

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники

**Л.А. Боков, В.А. Замотринский,  
А.Е. Мандель**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
РАДИОВОЛН**

Учебное пособие

Томск

2022

УДК 537.8(075.8) + 621.371.3(075.8)  
ББК 22.336я73  
Б786

**Рецензент:**

**Шарангович С. Н.**, зав. кафедрой сверхвысокочастотной  
и квантовой радиотехники, канд. физ.-мат. наук

**Боков, Лев Алексеевич**

Б786      **Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие /**  
Л.А. Боков, В.А. Замотринский, А.Е. Мандель. – Томск : Томск. гос.  
ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2022. – 409 с.

Излагаются основы макроскопической электродинамики, теории плоских электромагнитных волн в различных средах, методы расчета волноводных и колебательных систем. Решаются краевые задачи электродинамики и задачи об излучении электромагнитных волн. Приведены данные о строении атмосферы. Рассмотрены физические процессы, происходящие при свободном распространении радиоволн вблизи земной поверхности, в тропосфере и ионосфере, а также особенности распространения радиоволн различных диапазонов.

Для бакалавров, специалистов, магистрантов, обучающихся по направлениям подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Радиотехника», «Радиоэлектронные системы и комплексы», «Специальные радиотехнические системы». Весьма полезным это пособие будет для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Конструирование и технология радиоэлектронных средств».

УДК 537.8(075.8) + 621.371.3(075.8)  
ББК 22.336я73

© Боков Л.А., Замотринский В.А.,  
Мандель А.Е., 2022  
© Томск. гос. ун-т систем упр.  
и радиоэлектроники, 2022

# Предисловие

Настоящее издание является основным учебным пособием по курсам «Электродинамика и распространение радиоволн» и «Электромагнитные поля и волны» для бакалавров, специалистов, магистрантов, обучающихся по направлениям подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Радиотехника», «Радиоэлектронные системы и комплексы», «Специальные радиотехнические системы». Весьма полезным это пособие будет для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Конструирование и технология радиоэлектронных средств».

Авторы преследовали цель дать систематическое изложение курса, чтобы студент, используя книгу как, возможно, единственное учебное пособие, мог изучить теорию электричества и магнетизма, начиная от элементарных законов Кулона, Ома, Фарадея вплоть до теории быстропеременных процессов.

Соответственно разделы 1, 2, 3 посвящены формулировке общих законов электромагнетизма. Содержание этих разделов знакомит студентов с уравнениями Максвелла, теорией статических и квазистационарных полей.

Особое внимание уделено теории быстропеременных полей: распространению электромагнитных волн в свободном пространстве без учета и с учетом потерь (разделы 4 и 5). Достаточно подробно изложен материал, связанный с распространением плоских электромагнитных волн в анизотропных средах (раздел 6).

Общие методы решения краевых задач рассматриваются в разделе 7. Значительное внимание уделено решению задачи об излучении. Подробно исследуются электромагнитные поля, создаваемые элементарными электрическим и магнитным излучателями (раздел 8).

Важным, особенно с практической точки зрения, является вопрос о направленной передаче энергии электромагнитных волн. В разделе 9 рассматриваются вначале общие свойства направляемых волн, затем они конкретизируются для некоторых наиболее часто используемых линий передачи. В разделе 10 кратко изложена теория электромагнитных резонаторов.

Рассмотрены физические процессы, происходящие при распространении радиоволн в свободном пространстве (раздел 11), вблизи

земной поверхности (разделы 12,13), в тропосфере (раздел 14) и ионосфере (раздел 15). Приведены данные о строении атмосферы. Рассмотрены особенности распространения радиоволн различных диапазонов (раздел 16) и помехи радиоприему (раздел 17). В раздел 11 включены также некоторые определения и формулы для основных параметров антенн. Это позволяет выполнять энергетический расчет линии связи по найденной напряженности поля в точке приема.

Поскольку книга является учебным пособием, а не монографией, авторы считали возможным и даже целесообразным использовать материалы, уже опубликованные в учебной, методической и периодической литературе. Основные из них включены в список литературы [1–24].

## Введение

В основе электромагнетизма лежит представление об электромагнитном поле. Термин «поле» употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. В этом смысле говорят о «поле температур» материальной среды или, например, о «поле скоростей» частиц жидкости или газа. В сущности, при этом просто определяются какие-то функции координат: температура, скорость и т.п. По аналогии об электрическом поле формально можно говорить как о «поле сил», воздействующих на единичный положительный точечный заряд. Поле может быть скалярным (температурное поле, поле электростатического потенциала) или векторным (поле скоростей частиц жидкости или газа, напряженность электрического поля).

Электромагнитное поле характеризуется некоторыми векторными функциями координат и времени и оно, конечно, векторное. Какое же физическое содержание отвечает этому описательному аппарату? Поставим мысленный, но вполне реализуемый на практике эксперимент. Пусть на расстоянии  $L$  расположены две антенны: передающая и приемная. Передача электромагнитной энергии производится в течение короткого интервала времени  $t$ , а остальное время передатчик бездействует. Пусть время  $T$ , в течение которого энергия достигает приемной антенны, больше  $t$  (пусть даже  $T$  много больше  $t$ ). В таком случае легко указать время, когда энергия уже излучена передающей антенной, но еще не поступила в приемную, а следовательно, локализована в пространстве между антеннами. Ее носитель — это не привычная нам материальная среда, а иная физическая реальность. Именно она и есть электромагнитное поле; слово «поле» мы употребили для обозначения некоторой объективной реальности. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать как одну из форм существования материи.

Хотя проявления электромагнитных сил в природе люди наблюдали с давних времен, научные понятия в этой области сложились сравнительно недавно; к ним, разумеется, нельзя относить представления древних. В 1784–89 гг. были опубликованы работы Шарля Кулона об электрических и магнитных взаимодействиях.

Известный закон Кулона, который изучается в наше время уже в средней школе, поразительно похож на открытый в предшествующем веке Ньютоном закон тяготения. Найденный позднее закон Ампера о взаимодействии токов и другие закономерности этого рода идейно близки закону Кулона: действие одного объекта на другой, как полагали исследователи, происходит без всякого влияния промежуточной среды, мгновенно. Это так называемый принцип дальнего действия, т.е. действия на расстоянии, вошедший в науку вместе с механикой Ньютона.

С именем Майкла Фарадея (1791–1867) связано зарождение иной концепции в теории электромагнетизма — принципа ближнего действия, согласно которому взаимодействие осуществляется через посредство среды (в частности, вакуума), являющейся «вместилищем» электромагнитного процесса; при этом возникает вопрос о времени передачи взаимодействия. Исключительный вклад в науку было суждено внести Джеймсу Клерку Максвеллу (1831–1879). В современной физике уравнения Максвелла являются фундаментальными законами теории электромагнетизма. Максвеллу принадлежит теоретический вывод о существовании электромагнитных волн вместе с гипотезой об электромагнитной природе света. Этот вывод явился результатом анализа, отправной точкой которого были физические идеи Фарадея. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование осуществил позднее Генрих Герц (1857–1894), который внес также значительный вклад в теорию электромагнетизма. Герц предвосхитил многое из того, что мы относим теперь к радиотехнической электродинамике. В частности, в своих опытах он использовал параболические зеркала, в которых можно видеть прообраз современных зеркальных антенн. Тем не менее, он не ставил вопрос о техническом применении электромагнитных волн. Историческая заслуга изобретения беспроводной связи — радио — принадлежит нашему соотечественнику А.С. Попову (1859–1906). Отметим еще, что для подтверждения электромагнитной природы света решающими оказались опыты другого русского ученого — П.Н. Лебедева (1866–1911), измерившего световое давление.

Можно без преувеличения сказать, что радиотехника явилась широчайшей опытной базой теории электромагнетизма, основы-

вающейся на уравнениях Максвелла, а также стимулятором ее дальнейшего развития. Вместе с радиотехникой появилось понятие радиоволн, т.е. электромагнитных волн в радиотехнических системах. Важным научным направлением стало исследование распространения радиоволн в природных условиях — над Землей и в космосе. Проблема излучения и приема электромагнитной энергии, переносимой радиоволнами, привела к созданию теории антенн.

В первых опытах длина радиоволн измерялась метрами. В начале XX века, когда радиосвязь приобрела уже практическое значение, использовались главным образом длинные волны (длиной порядка километра). Но начиная с двадцатых годов в радиотехнической практике осваиваются все более короткие волны. Возникшая в военное время радиолокация дала этому процессу мощный толчок, в технику вошли волны дециметровые, сантиметровые, а затем и миллиметровые, которые имеют многочисленные применения в разных областях. Эта практика изменила многое как в самой радиотехнике, так и в ее теоретических основах. Дело в том, что ранее размеры элементов радиоаппаратуры оставались намного меньше длины волны, т.е. выполнялось условие квазистационарности. Благодаря этому основные представления электротехники и используемая ею теория цепей были пригодны как аппарат расчетов, а радиотехническая аппаратура во многом напоминала электротехническую. Но такое положение не могло сохраниться, когда понадобилось создавать радиотехнические элементы, сравнимые по размерам с длиной волны.

В дальнейшем будет показано, что по мере ослабления условия квазистационарности все большая часть энергии, связанной с проводником, по которому проходит ток, излучается в пространство.

В теории антенн существенно отклонение от условия квазистационарности, а многие современные антенны, обладающие высокой направленностью, многократно превышают длину волны по своим размерам. Что касается элементов радиоаппаратуры на сантиметровых и миллиметровых волнах, то принципы их построения далеки от прежних электротехнических образцов. Примечательно, например, использование различных волноводов в виде полых металлических труб, диэлектрических стержней и т.п., а также аналогично построенных резонаторов вместо так называемых колебательных

контуров, включающих в себя емкостные и индуктивные элементы. Для понимания принципов действия, сознательного применения и конструирования подобных устройств необходимо знание теории электромагнетизма, базирующейся на уравнениях Максвелла.

Благодаря широкому применению оптических квантовых генераторов — лазеров — в радиотехническую практику вошли чрезвычайно короткие волны; размеры соответствующей аппаратуры всегда очень велики в сравнении с длиной волны. В этой области электродинамическая теория смыкается с оптикой.

Задачи теории электромагнетизма, порождаемые радиотехнической практикой, нередко настолько сложны, что только появление современных ЭВМ делает эту теорию средством проектирования аппаратуры.



**ЧАСТЬ 1**

**ТЕОРИЯ**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО**

**ПОЛЯ**



# 1. Общие сведения о макроскопической электродинамике

## 1.1. Векторы электромагнитного поля

### 1.1.1. Определение электромагнитного поля

Под электромагнитным полем понимается особая форма существования материи, характеризующаяся способностью распространяться в вакууме со скоростью  $3 \cdot 10^8$  м/с и оказывающая силовое воздействие на заряженные частицы.

Определить поле в некоторой области пространства значит указать векторы поля в любой ее точке. Электромагнитное поле предстает как совокупность электрического (векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ) и магнитного (векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ) полей, находящихся во взаимной зависимости.

Лишь в некоторых специальных случаях (например, видимый свет) электромагнитное поле непосредственно воздействует на органы чувств человека. Однако, наблюдению доступны многочисленные электромагнитные явления, в основе которых лежат различные превращения энергии поля.

### 1.1.2. Векторы электрического поля

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  — векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и численно равная отношению силы  $\vec{F}$ , действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда  $q$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Под действием электрического поля происходит поляризация вещества — явление, связанное с ограниченным смещением связанных зарядов в веществе или поворотом электрических диполей

под воздействием внешнего электрического поля. Если среда состоит из заряженных частиц (диполей), выстраивающихся по направлению приложенного электрического поля, то поляризация называется ориентационной. Если среда состоит из нейтральных (в электрическом отношении) частиц, то происходит электронная поляризация, т.е. вытягивается электронная оболочка атомов.

Поляризацию вещества характеризует вектор электрической поляризации  $\bar{P}$ , определяемый как сумма всех дипольных моментов вещества, находящихся в единице объема:

$$\bar{P} = \sum_i \bar{p}_i,$$

где  $p_i = q_i \bar{l}_i$  — дипольный момент  $i$ -го диполя.

Поляризация пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_3 \bar{E},$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}} = 8,85 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$  — электрическая постоянная;  $\chi_3$  — электрическая восприимчивость.

Определим вектор электрического смещения  $\bar{D}$  в вакууме:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}.$$

Поляризация показывает, насколько вектор электрического смещения в данной среде отличается от вектора электрического смещения в вакууме. Следовательно, в веществе

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 \chi_3 \bar{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_3) \bar{E},$$

где  $1 + \chi_3 = \varepsilon_r$  — относительная электрическая проницаемость.

Таким образом,

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \varepsilon \bar{E},$$

где произведение  $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$  — абсолютная электрическая проницаемость.

### 1.1.3. Векторы магнитного поля

Рассмотрим вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ , так как именно он характеризует силовое воздействие магнитного поля. Этот вектор можно определить исходя из силы Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{V}, \vec{B}],$$

где  $\vec{F}_L$  — сила Лоренца;  $\vec{V}$  — скорость движения заряда  $q$ .

Если  $\vec{V} \perp \vec{B}$ , то численно

$$B = \frac{F}{qV}.$$

Таким образом, магнитная индукция — это сила, действующая на единичный электрический заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

Рассмотрим вектор  $\vec{H}$  — напряженность магнитного поля. С вектором магнитной индукции напряженность связана соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H},$$

где  $\vec{M}$  — намагниченность, равная сумме магнитных моментов атомов в единице объема вещества:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i.$$

Намагниченность пропорциональна напряженности приложенного поля:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H},$$

где  $\chi_m$  — магнитная восприимчивость.

Следовательно,

$$B = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  — магнитная постоянная.

Введем обозначение:

$$\mu_r = 1 + \chi_m,$$

где  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость.

Тогда

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}.$$

Обозначив  $\mu_0 \mu_r = \mu$ , где  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость, получим уравнение для векторов магнитного поля

$$\bar{B} = \mu \bar{H}.$$

Определив векторы поля по его механическим проявлениям, мы теперь можем представить себе следующую идеальную картину. В произвольную точку  $M(x, y, z)$  исследуемой области  $V$  — «точку наблюдения» — помещается весьма малый «пробный элемент» — точечный заряд или рамка с током, и в нужный момент измеряется действующая на него сила (или соответственно момент силы). Некоторое число таких измерений, произведенных в разных точках в течение необходимого времени, дает представление о поле в области  $V$ . В действительности описанный опыт технически осуществим лишь в немногих простейших случаях. Экспериментальное исследование электромагнитного поля требует иных средств, весьма разнообразных в зависимости от конкретных условий. О некоторых из них будем говорить впоследствии.

## 1.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Полный ток

Нам хорошо известен закон Ома для участка цепи:

$$U = \mathcal{R}I,$$

где  $U$  — напряжение, приложенное на заданном участке цепи;  $I$  — ток на этом участке;  $\mathcal{R}$  — электрическое сопротивление.

Однако в электродинамике полезно и порой просто необходимо знать соотношение между напряженностью электрического поля и плотностью тока  $\vec{j}$  в каждой точке пространства.

Плотность тока определяется по формуле

$$\vec{j} = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S},$$

где  $\vec{i}_0$  — орт, показывающий направление движения тока.

Связь между плотностью тока и током устанавливается соотношением

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s},$$

где  $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$  — векторный дифференциал площади.

Определим связь между напряженностью электрического поля и плотностью тока. Выделим в пространстве цилиндрическую область. Площадь основания цилиндра пусть будет  $\Delta S$ , а его высота —  $\Delta l$ . Будем полагать, что объем цилиндра настолько мал, что внутри цилиндра поле однородное и ток течет вдоль его оси. Из закона Ома для участка цепи можем записать:

$$j \cdot \vec{l}_0 \cdot \Delta S \cdot \vec{n}_0 = \frac{\Delta l \cdot \vec{n}_0}{\mathfrak{R}} \cdot \vec{E}.$$

Следовательно,

$$\vec{j} = \frac{\Delta l}{\Delta S \cdot \mathfrak{R}} \cdot \vec{E}.$$

Коэффициент перед вектором  $\vec{E}$  не что иное, как проводимость среды  $\sigma$ . В результате получаем закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Этот закон описывает ток проводимости. Кроме него, могут существовать токи другой физической природы.

Введем понятие плотности полного тока:

$$\vec{J}_{\text{полн}} = \vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}_{\text{см}} + \vec{J}_{\text{пер}} + \vec{J}_{\text{ст}},$$

где  $\vec{j}_{\text{пр}}$ ,  $\vec{j}_{\text{см}}$ ,  $\vec{j}_{\text{пер}}$ ,  $\vec{j}_{\text{ст}}$  — соответственно плотности токов проводимости, смещения, переноса и стороннего.

Ток проводимости обусловлен направленным упорядоченным движением свободных электрических зарядов в веществе или вакууме под действием электрического поля. О плотности тока проводимости мы уже говорили:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}.$$

Ток смещения — величина, пропорциональная скорости изменения переменного электрического поля в диэлектрике или вакууме. Название «ток» связано с тем, что ток смещения порождает магнитное поле по тому же закону, что и ток проводимости. Плотность тока смещения определяется формулой

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Понятие о токе смещения впервые было введено Максвеллом. Это, например, переменный ток в конденсаторе, заполненном идеальным диэлектриком. Ток смещения существует и в проводниках, по которым течет переменный ток проводимости, однако в данном случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости. Немного позже мы более подробно обсудим этот вопрос.

Ток переноса — это электрический ток, осуществляемый переносом электрических зарядов в свободном пространстве заряженными частицами или телами под действием электрического поля. Плотность тока переноса дается соотношением

$$\vec{j}_{\text{пер}} = \rho \vec{V},$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда;  $\vec{V}$  — скорость движения частиц.

Сторонний ток имеет неэлектрическое происхождение и является первичным источником поля, например механическим (генератор), тепловым (термопара), химическим (батарея).



### 1.3. Классификация сред, материальные уравнения

Выпишем уравнения, связывающие векторы поля:

$$\left. \begin{aligned} \bar{D} &= \varepsilon \bar{E} \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} \\ \bar{j} &= \sigma \bar{E} \end{aligned} \right\}.$$

Эти уравнения называют материальными, так как входящие в них величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ , именуемые макроскопическими параметрами, являются характеристиками среды (материала), в которой распространяются электромагнитные волны. Данные величины для каждого материала могут быть определены только экспериментальным путем. И, что очень важно, нет в природе двух сред, у которых хотя бы один из макроскопических параметров совпал.

Классификация сред проводится в зависимости от поведения макроскопических параметров.

По зависимости  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  от координаты среды делятся на однородные и неоднородные. Если макроскопические параметры среды не зависят от координаты, то среда однородная.

Макроскопические параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  в большинстве случаев можно считать не зависящими от величины векторов электромагнитного поля. Материальные уравнения оказываются при этом линейными. Соответственно употребляется выражение «линейные среды». Однако существуют и имеют важное техническое значение среды, отличающиеся заметной зависимостью макроскопических параметров от векторов поля. Их называют нелинейными. В электротехнике, как известно, распространены ферромагнетики — вещества, магнитная проницаемость которых значительно и сложным образом зависит от магнитного поля. Им аналогичны сегнетоэлектрики, обладающие сходной зависимостью диэлектрической проницаемости от электрического поля. Нелинейность ряда сред проявляется в сильных полях.

До сих пор говорилось лишь о так называемых изотропных средах, свойства которых одинаковы для полей любых направлений.

Однако существуют среды, проявляющие разные свойства в зависимости от направления поля, они называются анизотропными. Если, например, анизотропия проявляется в магнитном поле (анизотропный магнетик), то вместо  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_X &= \mu_{XX} H_X + \mu_{XY} H_Y + \mu_{XZ} H_Z \\ B_Y &= \mu_{YX} H_X + \mu_{YY} H_Y + \mu_{YZ} H_Z \\ B_Z &= \mu_{ZX} H_X + \mu_{ZY} H_Y + \mu_{ZZ} H_Z \end{aligned} \right\}.$$

Каждая проекция вектора  $\vec{B}$  здесь, вообще говоря, зависит от трех проекций вектора  $\vec{H}$  (часть коэффициентов  $\mu_{XX}, \mu_{XY}, \dots, \mu_{ZY}, \mu_{ZZ}$  может обращаться в нуль). Как видно, векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  уже не параллельны.

Всю совокупность действий, производимых над проекциями вектора  $\vec{H}$  для получения вектора  $\vec{B}$ , условно обозначают оператором

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{XX} & \mu_{XY} & \mu_{XZ} \\ \mu_{YX} & \mu_{YY} & \mu_{YZ} \\ \mu_{ZX} & \mu_{ZY} & \mu_{ZZ} \end{pmatrix},$$

в результате чего форма уравнения  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  сохраняется, но вместо скалярной величины  $\mu$  используется тензор  $\hat{\mu}$ :  $\vec{B} = \hat{\mu} \cdot \vec{H}$ .

Оператор  $\hat{\mu}$  называется тензором магнитной проницаемости, а коэффициенты при проекциях  $\vec{H}$  — его компонентами.

Совершенно аналогично описывается анизотропия диэлектрических свойств и проводимости.

Некоторые анизотропные среды нашли в последние годы важное применение в радиотехнике сверхвысоких частот.

Часто имеет место наведенная анизотропия, например в случае приложения к ферриту магнитного поля.

Убедиться в наличии или отсутствии анизотропии можно, проводя простой опыт. Из исследуемого материала изготовим куб (рис. 1.1). На две противоположные грани нанесем электроды. Например, напылим слой металла. Измерим емкость образовавшегося

плоского конденсатора  $C$ . Затем подсчитаем диэлектрическую проницаемость из формулы для емкости плоского конденсатора

$$C = \varepsilon \frac{S}{d},$$

где  $S$  — площадь обкладок конденсатора;  $d$  — расстояние между ними.

Так как рассматриваем куб с ребром, равным  $a$ , то получим

$$\varepsilon = C/a,$$

где  $C$  — измеренная емкость.

Повторим опыт для двух других пар граней. Если во всех опытах диэлектрическая проницаемость окажется одинаковой, то среда изотропная. Если хотя бы в двух она отличается, то среда анизотропная.

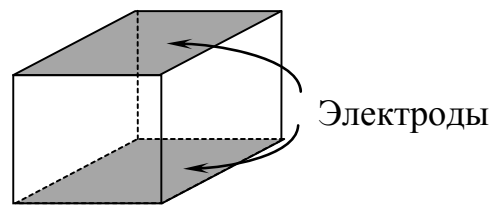


Рис. 1.1. К вопросу об анизотропии среды

Особое внимание уделим действию полей очень высоких частот.

С увеличением частоты приложенного к среде поля поляризованные частицы вещества не успевают изменять свое положение и, следовательно, величина индукции поля в данный момент времени  $t$  является функцией  $\bar{E}$  в предыдущий момент времени.

В быстропеременных полях обычно приходится иметь дело со сравнительно малыми напряженностями, тогда связь векторов  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$ , как мы уже говорили, можно считать линейной. Наиболее общий вид линейной зависимости между  $\bar{D}(t)$  и  $\bar{E}(t)$  во все предыдущие моменты времени может быть записан как интегральное соотношение

$$\bar{D}(t) = \bar{E}(t) + \int_0^{\infty} f(t') \cdot \bar{E}(t-t') dt',$$

где  $f(t')$  — функция времени, зависящая от свойств среды.

Всякое переменное поле может быть сведено путем разложения в ряд Фурье к совокупности монохроматических компонент,

в которых зависимость всех величин от времени дается множителем  $e^{+j\omega t}$ . Для таких полей связь между  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  приобретает вид

$$\bar{D} = \varepsilon(\omega)\bar{E},$$

где функция  $\varepsilon(\omega)$  определяется как

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \int_0^{\infty} f(t') \cdot e^{+j\omega t'} dt'.$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости как о коэффициенте пропорциональности между  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$ . Причем этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты колебаний поля. Среда, в которых такая зависимость проявляется, называются дисперсионными.

Кроме вакуума, с ростом частоты временную дисперсию в той или иной степени проявляют все среды.

Разделим также среды на проводники и диэлектрики. Для такого разделения сред необходимо ввести определенный критерий.

Идеальным проводником назовем среду, в которой существует только ток проводимости, а идеальным диэлектриком — среду, в которой существует только ток смещения.

Пусть в среде действует переменное поле

$$E = E_0 \cos \omega t,$$

тогда плотность тока проводимости

$$j_{\text{пр}} = \sigma E_0 \cos \omega t;$$

плотность тока смещения

$$j_{\text{см}} = -\omega \varepsilon E_0 \sin \omega t.$$

Отношение максимальных значений плотностей токов проводимости и смещения

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \text{tg } \Delta$$

называется тангенсом угла диэлектрических потерь.

Значит, если  $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$ , то среда проводник, если  $\operatorname{tg} \Delta \ll 1$  — диэлектрик.

Таким образом, если в среде преобладает ток проводимости, то эта среда реальный проводник. Если же преобладает ток смещения, то это реальный диэлектрик. Разумеется, огромное количество сред нельзя отнести ни к тем, ни к другим.

## 1.4. Уравнения Максвелла

### 1.4.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной форме

В компактной форме операций векторного анализа запишем уравнения, которые заключают в себе основы теории электромагнетизма и являются ее постулатами:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (1.4)$$

С формальной точки зрения это дифференциальные уравнения в частных производных относительно компонент векторов поля  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{B}$ , а также  $\bar{j}$  и  $\rho$ . Формулы (1.1)–(1.4) — это уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Значение уравнений Максвелла как основы теории электромагнетизма исключительно велико. Они явились результатом осмысления и обобщения огромного экспериментального материала, накопленного к концу девятнадцатого века. Необходимо подчеркнуть, что уравнения Максвелла справедливы в каждой точке пространства. В принципе, уравнения Максвелла дают возможность исследовать любые электромагнитные процессы. Надо лишь уметь правильно ставить соответствующие математические задачи, то есть

формировать математические модели, адекватные физической реальности, и решать их, привлекая при необходимости ЭВМ.

При первом знакомстве с уравнениями Максвелла кажется невероятным, чтобы эти несколько строчек содержали в себе все многообразие явлений электромагнетизма. Чтобы вполне осмыслить огромную физическую содержательность данных уравнений, надо изучить многие электромагнитные процессы. Впрочем, для уяснения основных черт физического содержания уравнений Максвелла будут представлены достаточно простые рассуждения.

С этой целью перейдем к уравнениям Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} d\bar{s} + I, \quad (1.5)$$

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{s}, \quad (1.6)$$

$$\oint_S \bar{D} d\bar{s} = q, \quad (1.7)$$

$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = 0. \quad (1.8)$$

Чтобы из формул (1.1), (1.2) получить (1.5), (1.6), рассмотрим некоторую поверхность  $S$ , «натянутую» на контур  $L$ . Взяв для определенности уравнение (1.1), проинтегрируем его левую и правую части по  $S$ :

$$\int_S \text{rot } \bar{H} d\bar{s} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{s} + \int_S \bar{j} d\bar{s}.$$

Достаточно теперь к левой части применить теорему Стокса, заменив поток  $\text{rot } \bar{H}$  через поверхность  $S$  циркуляцией  $\bar{H}$  по контуру  $L$ , вынести операцию дифференцирования  $\partial/\partial t$  за знак первого интеграла справа и учесть, что второй интеграл справа согласно определению есть ток  $I$ , проходящий через поверхность  $S$ , чтобы получить (1.5). При этом производится замена символов

$\partial/\partial t \rightarrow d/dt$ , так как интеграл уже не является функцией координат.

Совершенно так же уравнение (1.6) получается из уравнения (1.2).

Чтобы вывести равенство (1.7) из (1.3), левую и правую части уравнения (1.3) проинтегрируем по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ :

$$\int_V \operatorname{div} \bar{D} dv = \int_V \rho dv.$$

Объемный интеграл от  $\rho$  дает полный заряд  $q$ , содержащийся в объеме  $V$ . Что касается левого объемного интеграла, то он на основании теоремы Остроградского – Гаусса преобразуется в поток вектора  $\bar{D}$  через замкнутую поверхность  $S$ . Таким образом, уравнение (1.7) получено.

Уравнение (1.8) получается тем же путем из уравнения (1.4).

#### **1.4.2. Первое уравнение Максвелла: полный ток и магнитное поле**

Обсудим первое из уравнений Максвелла, привлекая и дифференциальную форму (1.1), и соответствующий интегральный аналог (1.5).

Поскольку ротор составляется из пространственных производных компонент вектора, то, как видно из (1.1), изменение в пространстве магнитного поля (вектор  $\bar{H}$  слева) связано с изменением электрического поля во времени (вектор  $\bar{D}$  справа).

Пусть сначала изменений во времени нет: процесс стационарен. Тогда первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}, \quad \oint_L \bar{H} d\bar{l} = I \quad (1.9)$$

и описывает связь магнитного поля с постоянным током. Нельзя себе представить ток без магнитного поля, поскольку при  $\bar{j} \neq 0$

( $I \neq 0$ ) обязательно  $\text{rot } \bar{H} \neq 0$  (или отлична от нуля циркуляция  $\bar{H}$ ), а следовательно,  $\bar{H} \neq 0$ .

Продолжим обсуждение первого уравнения Максвелла. Рассмотрим случай, когда ток проводимости отсутствует ( $I = 0$ ), но процесс уже не стационарен (происходят изменения во времени). Из уравнения (1.5) видно, что циркуляция  $\bar{H}$ , которая в случае постоянного тока была равна  $I$ , теперь оказывается равной величине

$$I_{\text{см}} = \frac{d}{dt} \int_S \bar{D} \bar{dS} = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} ds, \quad (1.10)$$

которая называется током смещения. Соответственно этому функция  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  рассматривается как плотность тока смещения. Понятие о нем уже было введено в подразделе 1.2.

Ток смещения — одно из важных понятий теории электромагнетизма. Во-первых, существенно, что по отношению к магнитному полю ток смещения как бы копирует роль обычного тока проводимости. Это видно из первого уравнения Максвелла, в котором ток проводимости и ток смещения (или их плотности) выступают равноправно. Во-вторых, следует учитывать, что физическая сущность тока смещения в вакууме никак не связана с движением зарядов.

Будем говорить, что вся правая часть уравнения Максвелла в интегральной форме (1.5) представляет собой полный ток  $I_{\text{см}} + I$ . В ток  $I$  могут входить токи проводимости, переноса и сторонние, которые также обсуждались в подразделе 1.2.

Величина  $\partial \bar{D} / \partial t + \bar{j}$  в (1.1) — плотность полного тока. В отсутствие магнитного поля ( $\bar{H} = 0$ ) равен нулю и полный ток. Если полный ток существует, то обязательно присутствует магнитное поле.

Привлечем для дальнейшего анализа тождество  $\text{div rot } \bar{H} \equiv 0$ . Составляя дивергенцию от левой и правой частей уравнения (1.1), получаем

$$\text{div} \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} \right) = 0. \quad (1.10a)$$



Отсюда следует, что вектор плотности полного тока  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}$  не имеет источников (стоков). Его векторные линии, следовательно, замкнуты или уходят из бесконечности в бесконечность.

Наконец, покажем, что первое уравнение Максвелла согласовано с законом сохранения заряда. Действительно, переписывая равенство (1.10а) в виде  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \bar{D}) + \operatorname{div} \bar{j} = 0$  (операции  $\operatorname{div}$  и  $\partial/\partial t$  мы имеем право поменять местами), а затем заменяя  $\operatorname{div} \bar{D}$  через  $\rho$  при помощи (1.3), получаем равенство  $\operatorname{div} \bar{j} = -\partial \rho / \partial t$ , отражающее закон сохранения заряда.

### 1.4.3. Второе уравнение Максвелла: обобщенный закон электромагнитной индукции

Если для потока вектора  $\bar{B}$  через поверхность  $S$ , называемого магнитным потоком, установить обозначение  $\Phi$ , а для циркуляции вектора  $\bar{E}$  по контуру  $L$  использовать символ  $\mathcal{E}$ , то уравнение (1.6) примет вид

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\mathcal{E} = \oint_L \bar{E} d\bar{l}$ ,  $\Phi = \oint_S \bar{B} d\bar{s}$ .

В этой форме второе уравнение Максвелла совпадает с законом электромагнитной индукции Фарадея. Циркуляция  $\mathcal{E}$  предстает как электродвижущая сила, наводимая в контуре  $L$  изменением магнитного потока  $\Phi$ .

Напомним, что закон Фарадея был установлен для проводящих (например, проволочных) контуров в магнитных полях. Закон электромагнетизма, выражаемый вторым уравнением Максвелла в интегральной форме, значительно шире указанного закона Фарадея, поскольку контур  $L$  в (1.6) — это любой мысленно очерченный в пространстве контур. Не имеет значения, какие именно материальные объекты оказались в области построения: это не нарушает

справедливости второго уравнения Максвелла. Столь общая постановка вопроса выходит далеко за пределы опытных фактов, на основе которых был сформулирован закон Фарадея. Второе уравнение Максвелла, однако, сохраняет идейную основу этого закона и может рассматриваться как обобщенный закон электромагнитной индукции.

#### **1.4.4. Третье уравнение Максвелла: электрическое поле и заряды**

Смысл третьего уравнения Максвелла (1.3), или (1.7), прост, поскольку он вполне исчерпывается содержанием понятий дивергенции и потока вектора. Линии вектора электрического смещения  $\bar{D}$  начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах (знаки  $\text{div}\bar{D}$  и  $\rho$  совпадают).

Третье уравнение Максвелла в интегральной форме известно также под названием теоремы Гаусса. В качестве частного момента отметим, что согласно (1.7) поток вектора  $\bar{D}$  через некоторую замкнутую поверхность  $S$  обращается в нуль не только при отсутствии зарядов внутри  $S$ , но и при их нейтрализации, когда полный положительный заряд уравновешивается отрицательным.

#### **1.4.5. Четвертое уравнение Максвелла: непрерывность линий вектора $\bar{B}$**

Четвертое уравнение Максвелла (1.4), или (1.8), по форме отличается от третьего нулевой правой частью. Это указывает на отсутствие фактора, который можно было бы назвать «магнитным зарядом». Если все же формально ввести магнитный заряд  $q_M$  с плотностью  $\rho_M$ , то согласно (1.4), (1.8)

$$q_M = 0; \rho_M = 0.$$

Другими словами, магнитных зарядов в природе не существует.

В силу четвертого уравнения Максвелла магнитные силовые линии (линии вектора  $\vec{B}$ ) обязательно непрерывны, т.е. либо замкнуты, либо идут из бесконечности в бесконечность.

#### **1.4.6. Заключительные замечания об уравнениях Максвелла**

Во введении говорилось, что Максвелл воплотил в математической форме физические идеи Фарадея, предвосхищавшие представление об электромагнитном поле. Фарадей рассматривал силовые линии как некоторую физическую реальность. Однако Максвелл не только, употребляя современное выражение, формализовал взгляды Фарадея, но и внес в них существенно новое. Именно Максвелл ввел ток смещения. Выше уже было показано, что следствием первого и третьего уравнений Максвелла является закон сохранения заряда. В дальнейшем мы неоднократно будем убеждаться в особой важности представления о токе смещения. Что же касается самих уравнений Максвелла, то в их окончательное формирование внесли решающий вклад Герц и Хевисайд.

### **1.5. Граничные условия для электромагнитного поля**

#### **1.5.1. Постановка задачи**

Основной задачей теории электромагнитного поля является нахождение его векторов в определенной области пространства при заданных условиях, которые отражают предварительные сведения об электромагнитном процессе. Задача имеет реальное физическое содержание, если эти сведения правильны и если они достаточны. При неправильных условиях, налагаемых на уравнения поля, можно получить решение, не соответствующее исследуемому процессу, или просто войти в противоречие с этими уравнениями. Решение, получаемое при недостаточных условиях, оказывается неопределенным.

Вопрос о том, какими сведениями надо располагать, чтобы найти поле в задаче того или иного типа, будет решаться по мере необходимости в последующих разделах. Пока же отметим, что для определения поля внутри области надо иметь некоторые данные о его характере на границе.

Особый интерес представляют границы разнородных сред, присутствующих в подавляющем большинстве практически интересных задач. Это границы между различными диэлектриками, границы между диэлектриками и проводниками, границы, на которых сосредоточены заряды или по которым протекают токи. Дальнейшее исследование посвящено определению с помощью уравнений Максвелла векторов электромагнитного поля вблизи таких границ. Результаты исследований формулируются в виде так называемых граничных условий, которые затем будут использоваться в задачах разного типа.

### 1.5.2. Нормальные и тангенциальные составляющие векторов

Пусть поверхность  $S$  — граница раздела двух сред,  $\vec{A}$  — произвольно ориентированный вектор, начало которого находится в точке  $M$ ,  $\vec{n}_0$  — нормаль к поверхности,  $\vec{\tau}_0$  — касательный

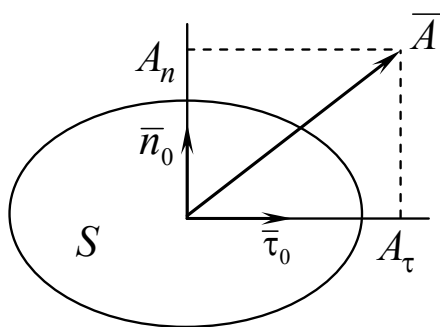


Рис. 1.2. Разложение вектора на тангенциальную и нормальную составляющие

к поверхности  $S$  единичный вектор (рис. 1.2).

Векторы  $\vec{A}$ ,  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{\tau}_0$  лежат в одной плоскости. Тогда

$$\vec{A} = \vec{n}_0 A_n + \vec{\tau}_0 A_\tau.$$

Таким образом, каждый вектор вблизи граничной поверхности может быть представлен в виде суммы нормальной и тангенциальной составляющих.

### 1.5.3. Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля

Пусть  $S$  — граница раздела двух сред. Выберем на ней достаточно малый элемент  $\Delta S$  и построим на нем цилиндр высотой  $\Delta h$ , находящийся в обеих средах (рис. 1.3).

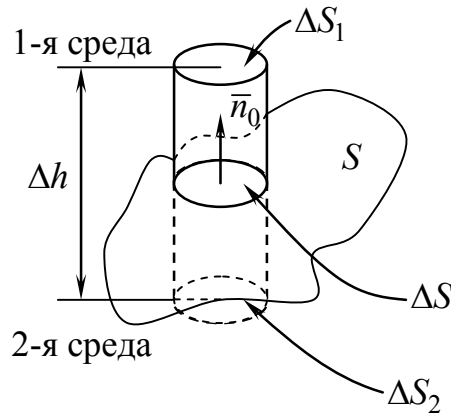


Рис. 1.3. К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля

Ось цилиндра совпадает с нормалью  $\vec{n}_0$ . Размеры цилиндра малы, и поля в пределах его объема не меняются. Применим к полю в объеме цилиндра третье уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q,$$

где  $S$  — вся поверхность цилиндра.

Представим весь поток вектора  $\vec{D}$  в виде трех потоков — через боковую поверхность и поверхности оснований цилиндра:

$$\oint_{S_{бок}} \vec{D} d\vec{S} + \oint_{\Delta S_1} \vec{D}_1 d\vec{S} + \oint_{\Delta S_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = \oint_V \rho dV.$$

Здесь первый интеграл дает поток через боковую поверхность цилиндра, второй и третий интегралы — поток через основания цилиндра.

Устремим  $\Delta h \rightarrow 0$ , тогда поток через боковую поверхность также устремится к нулю, следовательно,  $\bar{D}_1 \bar{n}_0 \Delta S - \bar{D}_2 \bar{n}_0 \Delta S = q$ , где  $q$  — заряд, сосредоточенный на поверхности  $\Delta S$ .

Введем понятие поверхностного заряда. Будем полагать, что он сосредоточен в слое нулевой толщины.

Пусть  $\xi$  — плотность поверхностного заряда, определяемая соотношением

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}.$$

Следовательно, при равномерном распределении заряда

$$q = \xi \Delta S.$$

Тогда

$$\bar{D}_1 \bar{n}_0 - \bar{D}_2 \bar{n}_0 = \xi \quad (1.11)$$

или  $D_{1n} - D_{2n} = \xi$  — граничное условие для нормальной составляющей вектора электрического смещения. В векторной форме это условие выглядит следующим образом:

$$\xi = \bar{n}_0 (\bar{D}_1 - \bar{D}_2).$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора  $\bar{D}$  на границе раздела двух сред терпит разрыв, равный поверхностной плотности заряда.

Рассмотрим два частных случая.

1. Граница двух идеальных диэлектриков. В этом случае нет свободных зарядов, т.е.  $\xi = 0$ , следовательно,  $D_{1n} = D_{2n}$ .

2. Граница «идеальный диэлектрик – идеальный проводник». Поле в идеальном проводнике равно нулю, значит,  $D_{2n} = 0$  и  $D_{1n} = \xi$  или  $\xi = (\bar{n}_0, \bar{D})$ .

Таким образом, для отыскания поверхностной плотности заряда достаточно определить нормальную компоненту вектора электрического смещения на границе с проводником.

#### 1.5.4. Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля

Проведем построения, аналогичные предыдущим (см. рис. 1.3). Применим к полю в полученном объеме четвертое уравнение Максвелла

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

Так как, в отличие от третьего уравнения, четвертое уравнение имеет нулевую правую часть, то и в граничных условиях для  $B_n$  также будет нулевая правая часть, то есть

$$B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad (1.12)$$

Отсюда с использованием материального уравнения получим граничные условия для нормальных составляющих вектора напряженности магнитного поля:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно.

#### 1.5.5. Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля

Рассечем поверхность раздела двух сред  $S$  плоскостью  $P$ , которую можно считать перпендикулярной некоторому малому элементу этой поверхности. В плоскости  $P$  возьмем прямоугольный контур  $ABCD$ . В общем случае по границе раздела в произвольном направлении может протекать ток  $I$ .

Проведем контур так, чтобы одна его часть была в первой среде, другая — во второй (рис. 1.4). Единичные векторы  $\bar{n}_0$  и  $\bar{\tau}_0$  лежат в плоскости контура, единичный вектор  $\bar{N}_0$  перпендикулярен ей.

Применим к полю вблизи границы первое уравнение Максвелла:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad I = \int_{AB} \vec{H}_2 d\vec{l} + \int_{BC} \vec{H} d\vec{l} + \int_{CD} \vec{H}_1 d\vec{l} + \int_{DA} \vec{H} d\vec{l}.$$

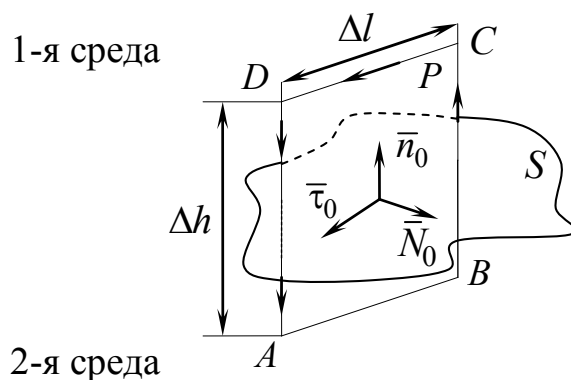


Рис. 1.4. К выводу граничных условий для тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля

В пределах контура поле однородно, так как размеры контура очень малы, поэтому можно записать

$$I = \vec{H}_2(-\vec{\tau}_0)\Delta l + \vec{H}\vec{n}_0\Delta h + \vec{H}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{H}\vec{n}_0\Delta h.$$

Устремим  $\Delta h \rightarrow 0$ , тогда

$$I = \vec{H}_1\vec{\tau}_0\Delta l - \vec{H}_2\vec{\tau}_0\Delta l.$$

Введем понятие поверхностного тока. Поверхностным током будем называть приведенный в движение поверхностный заряд. Плотность поверхностного тока определяется формулой

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta l},$$

где  $\vec{\eta}_0$  — орт, показывающий направление тока;  $\Delta l$  — часть тока, пересекающая отрезок  $\Delta l$ .

С учетом этого

$$\vec{H}_1\vec{\tau}_0 - \vec{H}_2\vec{\tau}_0 = \eta_N \quad \text{или} \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta_N,$$



где  $\eta_N$  — проекция вектора плотности поверхностного тока на направление, перпендикулярное плоскости контура.

В векторной форме

$$[\bar{n}_0, (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)] = \bar{\eta}. \quad (1.13)$$

Итак, при наличии поверхностного тока на границе раздела тангенциальная составляющая напряженности вектора магнитного поля терпит разрыв, равный его плотности.

Рассмотрим два частных случая.

1. Граница раздела «идеальный диэлектрик – идеальный диэлектрик».

Ток на границе отсутствует ( $\eta = 0$ ) и тогда

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

2. Граница раздела «идеальный диэлектрик – идеальный проводник».

В этом случае  $H_{2\tau} = 0$ , тогда  $H_{1\tau} = \eta_N$  или в векторной форме

$$\bar{\eta} = [\bar{n}_0, \bar{H}_1].$$

Таким образом, на границе с идеальным проводником при наличии магнитного поля всегда возникает поверхностный ток.

### 1.5.6. Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля

Обратимся ко второму уравнению Максвелла

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int \bar{B} d\bar{S}.$$

Рассуждения, аналогичные представленным в предыдущем пункте, приводят к соотношению

$$\bar{E}_1 \bar{\tau}_0 \Delta l - \bar{E}_2 \bar{\tau}_0 \Delta l = -\frac{d}{dt} (B \Delta h \Delta l).$$

Устремив высоту контура к нулю, получим

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0. \quad (1.14)$$

Из соотношения (1.14) следует, что тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  непрерывна на границе с любой средой.

Рассмотрим границу «идеальный диэлектрик – идеальный проводник». Так как поле в идеальном проводнике равно нулю, т.е.  $E_{2\tau} = 0$ , то  $E_{1\tau} = 0$ . Значит, линии вектора  $\vec{E}$  всегда перпендикулярны поверхности идеального проводника.

## 1.6. Энергия электромагнитного поля

### 1.6.1. Закон Джоуля – Ленца и превращение энергии

Поскольку электромагнитное поле физически реально, оно обладает энергией. После ряда рассуждений и операций над уравнениями Максвелла мы выясним, каким образом векторы поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  определяют его энергию  $W$ . Можно подойти к этому, начав с вопроса о превращениях энергии поля.

Известно, что при наличии тока в реальной среде выделяется тепло. Зная плотность тока  $\vec{j}$  и напряженность поля  $\vec{E}$ , нетрудно, как мы увидим, найти энергию, теряемую электромагнитным процессом за единицу времени, т.е. мощность тепловых потерь  $P$ . Оказывается, в объеме  $V$  расходуется мощность

$$P = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv. \quad (1.15)$$

Чтобы убедиться в справедливости записанного выражения, обратимся к простому варианту, в котором область  $V$  представляет собой цилиндр длиной  $l$  с площадью основания  $S$ . Ось цилиндра совпадает с направлением вектора плотности тока. Пусть в пределах объема выделенного цилиндра поле однородно. В этом случае применение формулы (1.15) дает

$$P = \vec{j} \cdot \vec{E} V = j S l E = IU.$$

Как видно, полученное равенство эквивалентно закону Джоуля – Ленца, известному из курса общей физики. Таким образом, применение формулы (1.15) означает обращение к закону Джоуля – Ленца. По смыслу равенства (1.15) подынтегральное выражение

$$p = \bar{j} \bar{E} \quad (1.16)$$

есть не что иное, как плотность мощности, т.е. мощность, отнесенная к единице объема:

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}. \quad (1.17)$$

Полученные выражения мощности и ее плотности имеют универсальный характер. Они верны не только при расчете джоулевых потерь, но и сохраняют смысл во всех случаях, когда рассматриваются токи.

Отметим, что в зависимости от направления движения зарядов величина  $p$  может быть как положительной, так и отрицательной. Заряды могут ускоряться полем. При этом  $\bar{j}$  и  $\bar{E}$  параллельны,  $p > 0$  и энергия у поля отбирается. Очевидно, что  $p < 0$ , если  $\bar{j}$  и  $\bar{E}$  антипараллельны. Это будет, например, в том случае, когда движение зарядов против поля создается каким-то неэлектромагнитным, «сторонним», процессом, который отдает свою энергию полю, тормозящему заряды.

Описание неэлектромагнитных факторов, как говорят сторонних сил, в большинстве случаев сводится к изменению вида материального уравнения. Используется одна из следующих формализаций:

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} - \bar{E}_{\text{ст}}), \quad \bar{j} = \sigma\bar{E} + \bar{j}_{\text{ст}}. \quad (1.18)$$

Введенные здесь функции  $\bar{E}_{\text{ст}}$  и  $\bar{j}_{\text{ст}}$  при решении электродинамических задач являются заранее заданными. Величина  $\bar{E}_{\text{ст}}$  называется напряженностью сторонних сил (или просто сторонней напряженностью). Теперь мы можем детализировать выражение плотности мощности (1.16). Используя (1.18), имеем:

$$p = \sigma^{-1}\bar{j}^2 - \bar{j}\bar{E}_{\text{ст}}, \quad p = \sigma\bar{E}^2 + \bar{j}_{\text{ст}}\bar{E}.$$

Таким образом, можно записать

$$p = p_{\Pi} + p_{\text{ст}}, \quad (1.19)$$

где

$$p_{\Pi} = \sigma^{-1}(\bar{j})^2 = \sigma \bar{E}^2, \quad p_{\text{ст}} = -\bar{j} \bar{E}_{\text{ст}} = \bar{j}_{\text{ст}} \bar{E}. \quad (1.20)$$

Параметр  $p_{\Pi}$  характеризует поглощение, потери электромагнитного процесса, а  $p_{\text{ст}}$  — действие сторонних сил. Сторонние силы обычно локализованы. Если, например, они сосредоточены в некоторой области  $V_{\Sigma}$ , то согласно первому равенству (1.18)  $\bar{j} = \sigma \bar{E}_{\text{ст}}$  в  $V_{\Sigma}$  и  $\bar{j} = \sigma \bar{E}$  вне  $V_{\Sigma}$ . Будем называть  $V_{\Sigma}$  областью источника.

Позднее мы не раз еще вернемся к обсуждению понятия сторонних сил. Интерпретация их будет несколько расширена.

### 1.6.2. Баланс энергии электромагнитного поля

Дальнейшее обсуждение будет опираться на уравнения Максвелла (1.1), (1.2). Все члены второго из них умножим на  $\bar{H}$ , а все члены первого — на  $\bar{E}$ :

$$\bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} = -\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

$$\bar{E} \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{E} \bar{j}.$$

Вычтем левую и правую части второй строчки из соответствующих частей первой, тогда слева получим выражение  $\bar{H} \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H}$ , которое мы свернем, так как оно равно  $\operatorname{div}[\bar{E}, \bar{H}]$ . В результате будем иметь

$$\operatorname{div}[\bar{E}, \bar{H}] = -\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{j} \bar{E}. \quad (1.21)$$

Равенству нетрудно придать интегральную форму. С этой целью проинтегрируем все его члены по некоторому объему  $V$ , огра-

ниченному поверхностью  $S$ , а затем левую часть преобразуем на основании теоремы Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S [\bar{E}, \bar{H}] d\bar{S} = - \int_V \left( \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) - \int_V \bar{j} \bar{E} dv. \quad (1.22)$$

Остается проанализировать полученный результат. После некоторых рассуждений мы увидим, что равенство (1.22) есть уравнение баланса энергии поля в объеме  $V$ .

Ключевым для нас является последний член справа в (1.22). Согласно формуле (1.15) это мощность  $P$ , причем  $P$  будет рассматриваться как величина, характеризующая все процессы преобразования энергии в объеме  $V$  (в п. 1.6.5 будет сделано уточнение). Разумеется, размерность мощности имеют и все остальные члены в (1.22).

Следующим важным моментом является тот факт, что для всякой энергетически изолированной системы уравнение баланса энергии имеет вид

$$P = - \frac{dW}{dt}, \quad (1.23)$$

где  $W$  — запас энергии.

В частности, из равенства (1.23) следует, что потери энергии ( $P > 0$ ) могут происходить только в результате уменьшения этого запаса  $\left( \frac{dW}{dt} < 0 \right)$ .

Если граница  $S$  области  $V$  является энергетически изолирующей и при наличии поля внутри объема  $V$  оно отсутствует во внешней среде, то поверхностный интеграл в (1.22) равен нулю. Таким образом, равенство (1.22) принимает вид

$$P = - \int_V \left( \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dv \quad (1.24)$$

и мы вправе истолковать его как уравнение баланса энергии для изолированной системы. Сопоставляя (1.24) и (1.23), имеем:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left( \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) dv. \quad (1.25)$$

В результате определена временная производная запаса энергии.

Сохраняя интерпретацию (1.25) и переходя к общему случаю, запишем (1.22) в виде

$$\oint_S [\bar{E}, \bar{H}] \bar{ds} + \frac{dW}{dt} + P = 0. \quad (1.26)$$

Очевидно, что равенство (1.22) предстает как уравнение баланса энергии в области  $V$ , причем вследствие неизолированности системы появился дополнительный член в виде поверхностного интеграла

$$P_\Sigma = \oint_S [\bar{E}, \bar{H}] \bar{ds} \equiv \oint_S \bar{\Pi} \bar{ds}. \quad (1.27)$$

Величина  $P_\Sigma$  есть поток вектора

$$\bar{\Pi} = [\bar{E}, \bar{H}] \quad (1.28)$$

через границу  $S$  области  $V$ . Вектор  $\bar{\Pi}$  называется вектором Пойнтинга.

Поток  $P_\Sigma$  вектора Пойнтинга  $\bar{\Pi}$  показывает, насколько внутренние процессы не уравновешены. Если, например,  $P_\Sigma > 0$ , это означает потери энергии в области  $V$  из-за перехода энергии во внешнее пространство. В таком случае говорят об активном балансе энергии. Если же  $P_\Sigma < 0$ , то энергия поступает в объем  $V$  извне — пассивный баланс энергии. В обоих случаях абсолютная величина  $P_\Sigma$  есть не что иное, как энергия, проходящая через граничную поверхность  $S$  за единицу времени. Поэтому величину  $P_\Sigma$  называют потоком энергии через поверхность  $S$ . Положительный поток энергии равен, таким образом, мощности излучения во внешнее пространство, а отрицательный — мощности поглощаемого внешнего излучения.

Баланс будем называть активным, когда  $P_{\Sigma} > 0$ , т.е. отдача энергии во внешнее пространство преобладает; согласно (1.26) при этом  $dW/dt + P < 0$ . В случае чистого излучения может оказаться, что внутренний запас энергии остается постоянным:  $W = \text{const}$ , тогда, как видно,  $P_{\Sigma} = -P$ . Поскольку  $P_{\Sigma} < 0$ , то  $P < 0$ : излучение создается сторонними силами в объеме  $V$  (согласно (1.19)  $P = P_{\text{п}} + P_{\text{ст}}$ , и в отсутствие потерь  $P = -P_{\text{ст}}$ ).

Наконец, если  $P_{\Sigma} = 0$ , это нейтральный баланс энергии. Поток энергии в данном случае может проходить насквозь, так что число входящих линий вектора Пойнтинга равно числу выходящих; он также может не входить в область  $V$  или вообще отсутствовать.

**Пример.** Рассмотрим поток энергии, проходящий через поверхность бесконечного цилиндрического провода с постоянным током  $I$  (рис. 1.5). В силу аксиальной симметрии системы для определения магнитного поля вплоть до поверхности провода ( $r = R$ ) можно пользоваться формулой  $\vec{H} = \vec{\alpha}_0 I / 2\pi R$ , известной из курса физики.

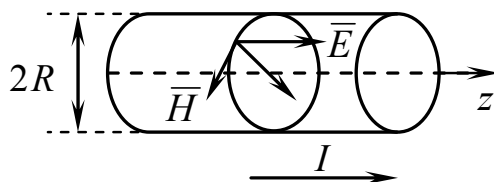


Рис. 1.5. К определению потока энергии, проходящего через поверхность бесконечного цилиндрического провода с постоянным током

Электрическое поле найдем из выражения для плотности тока  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ;  $\vec{E} = \vec{j} / \sigma = \vec{z}_0 I / (\pi R^2 \sigma)$ . Поэтому на боковой поверхности провода

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{-\vec{r}_0 I^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}.$$

Мы видим, что вектор Пойнтинга направлен внутрь провода. Значит, из внешнего пространства в провод входит поток энергии  $P_{\Sigma}$  (1.27). Вычислим  $P_{\Sigma}$  на участке провода длиной  $l$ :

$$\int_S \bar{\Pi} \bar{ds} = I^2 \mathfrak{R},$$

где  $\mathfrak{R} = l/\pi R^2 \sigma$  — электрическое сопротивление данного участка.

Входящий поток энергии равен мощности, поглощаемой согласно закону Джоуля – Ленца.

### 1.6.3. Энергия электромагнитного поля

Исходя из равенства (1.25), можно путем интегрирования определить энергию поля. При некоторых оговорках, которые будут сделаны в п. 1.6.5, справедливы следующие операции:

$$\bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \bar{E}^2}{2} \right),$$

$$\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \mu_0 \mu \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \mu \bar{H}^2}{2} \right).$$

Это значит, что операцию дифференцирования по времени в (1.25) можно вынести за знак интеграла. В результате запас энергии в области  $V$  выражается следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon \bar{E}^2 + \mu_0 \mu \bar{H}^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (\bar{E} \bar{D} + \bar{H} \bar{B}) dv. \quad (1.29)$$

Как видно, энергия складывается из двух частей, одна из которых связана с электрическим полем, а другая — с магнитным. Поэтому пишут  $W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}}$ , различая магнитную энергию

$$W_{\text{м}} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \bar{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \bar{H} \bar{B} dv \quad (1.30)$$

и электрическую энергию



$$W_3 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \bar{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dv. \quad (1.31)$$

Подынтегральное выражение в (1.29) есть не что иное, как плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \varepsilon \bar{E}^2 + \mu_0 \mu \bar{H}^2) = \frac{1}{2} (\bar{E} \bar{D} + \bar{H} \bar{B}). \quad (1.32)$$

Слагаемые имеют смысл плотностей электрической и магнитной энергии:  $w = w_3 + w_m$  ( $w_3$  и  $w_m$  — подынтегральные выражения из (1.30) и (1.31) соответственно).

#### 1.6.4. Локальный баланс и движение энергии

Если допустить, что поток вектора Пойнтинга  $P_\Sigma$  через любую, а не только замкнутую поверхность (как в п. 1.6.2) представляет собой поток энергии через эту поверхность, то  $\bar{P}$  следует истолковывать как плотность потока энергии:

$$\bar{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \bar{\pi}_0 \frac{\Delta P_\Sigma}{\Delta S}, \quad (1.33)$$

где  $\bar{\pi}_0$  — единичный вектор, указывающий направление движения энергии;  $\Delta S$  — ортогонально ориентированная площадка;  $\Delta P_\Sigma$  — количество энергии, проходящей за единицу времени через поверхность  $\Delta S$ .

Вернемся к равенству (1.21), переписав его в виде

$$\operatorname{div} \bar{P} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0. \quad (1.34)$$

Равенство (1.34) есть уравнение баланса энергии в дифференциальной форме. Оно характеризует локальный баланс энергии. Если в исчезающе малой окрестности некоторой точки баланс активен, то  $dw/dt + P < 0$  и в силу (1.34)  $\operatorname{div} \bar{P} > 0$ . При пассивном балансе  $dw/dt + P > 0$  и  $\operatorname{div} \bar{P} < 0$ , а при нейтральном —  $dw/dt + P = 0$

и  $\operatorname{div} \bar{\Pi} = 0$ . Вспоминая смысл оператора дивергенции, мы видим, что при активном балансе рассматриваемая точка является источником вектора Пойнтинга, при пассивном балансе — стоком, а при нейтральном балансе она лежит на некоторой линии вектора Пойнтинга. Таким образом, направление и модуль вектора Пойнтинга характеризуют направленность и размер в каждой точке пространства потока энергии излучения. Вектор Пойнтинга в СИ имеет размерность ватт на квадратный сантиметр ( $\text{Вт}/\text{см}^2$ ).

### 1.6.5. Заключительные замечания

Начнем с анализа сделанных нами допущений. В п. 1.6.2 мы предположили, что все процессы преобразования энергии характеризуются величиной  $P$ , определяемой формулой (1.15). Это, в частности, означает, что если нет токов проводимости ( $\bar{j} = 0$ ), то не может быть ни потерь энергии, ни действия сторонних сил. На самом деле потери энергии свойственны также процессам поляризации и намагничивания (хотя часто этими потерями можно пренебрегать). Если отказаться от сделанного допущения, то для изолированной системы из соотношений (1.22) и (1.23) уже нельзя получить равенство (1.25).

С этим тесно связан следующий вопрос. Почему не всегда верны действия, выполненные в начале п. 1.6.3? Дело в том, что в этих действиях были вынесены за знак оператора  $\partial/\partial t$  проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$ , а это допустимо только в случае безынерционной среды. В дальнейшем при изучении гармонических колебаний мы сможем учесть инерционность процессов поляризации и намагничивания. Соответствующие потери будут рассматриваться.

В заключение отметим, что вся информация об электромагнитном поле получена в результате наблюдения и осмысления превращений его энергии в иные формы. Ведь непосредственно мы «не замечаем» полей, если не говорить о тепловых и световых воздействиях, информативность которых незначительна. Начало было положено наблюдением электромеханических превращений, что в конечном счете привело к представлению о векторных функциях  $\bar{E}$

и  $\bar{B}$ . Выше мы не обсуждали специфические особенности различных превращений энергии, например электрохимических, фото- и термоэлектрических и многих других, используемых в технике. Однако были выяснены и проанализированы закономерности, свойственные всем видам превращений энергии.

## 1.7. Классификация электромагнитных явлений

Положим, что в уравнениях Максвелла (1.1)–(1.4) нет изменений во времени и проводимость равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \sigma = 0.$$

Система из четырех уравнений Максвелла разбивается на две независимые пары:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \bar{H} = 0 \\ \text{div } \bar{B} = 0 \end{array} \right\}; \quad (1.35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \bar{E} = 0 \\ \text{div } \bar{D} = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.36)$$

Системы уравнений (1.35) и (1.36) описывают электростатические и магнитостатические поля соответственно.

Снимем одно из ограничений:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \sigma \neq 0,$$

т.е. изменений во времени нет, но проводимость отлична от нуля. Тогда

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{j}; \quad (1.37)$$

$$\text{rot } \bar{E} = 0; \quad (1.38)$$

$$\text{div } \bar{D} = 0; \quad (1.39)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0. \quad (1.40)$$

Найдем дивергенцию первого уравнения:

$$\operatorname{div} \bar{j} = 0. \quad (1.41)$$

Уравнения (1.35)–(1.41) можно сгруппировать в три пары уравнений, описывающих стационарное электромагнитное поле.

$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}$ $\operatorname{div} \bar{B} = 0$	$\operatorname{rot} \bar{E} = 0$ $\operatorname{div} \bar{D} = 0$	$\operatorname{rot} \bar{E} = 0$ $\operatorname{div} \bar{j} = 0$
Магнитное поле постоянного тока в области, содержащей токи	Электрическое поле постоянного тока в диэлектрике	Электрическое поле в проводнике

Дальнейшее рассмотрение электромагнитных полей начнем с наиболее простых стационарных и затем перейдем к переменным полям.

## Контрольные вопросы

1. Запишите векторные функции, описывающие электромагнитное поле.
2. В чем отличие свободных зарядов от связанных?
3. Запишите совокупность уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Поясните физическое содержание уравнений Максвелла.
4. Покажите, что из первого уравнения Максвелла следует принцип непрерывности полного тока.
5. Запишите совокупность материальных уравнений. Поясните, почему уравнения называют материальными.
6. Какие среды называют анизотропными?
7. Запишите граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электрического поля.
8. Запишите граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов магнитного поля.
9. Прокомментируйте уравнение баланса энергии электромагнитного поля в некотором объеме.
10. Поясните физическое содержание вектора Пойнтинга.

## 2. Электростатика

### 2.1. Уравнения Максвелла для электростатического поля

Круг задач, которые могут быть решены в электростатическом приближении, довольно ограничен, так как в этой модели считается, что проводящие заряженные тела окружены идеальным диэлектриком и никаких временных изменений не происходит.

Вместе с тем результаты, полученные при исследовании явлений этого класса, часто используются на практике.

Ранее было показано, что не изменяющееся во времени электрическое поле в пространстве без токов — электростатическое поле. Оно не связано с магнитным полем и определяется следующей системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho, \quad (2.2)$$

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = q, \quad (2.2a)$$

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}. \quad (2.3)$$

Приступим к анализу этих уравнений.

### 2.2. Электростатический потенциал

Начнем с первого из записанных уравнений, утверждающего, что электростатическое поле является безвихревым (ротор его напряженности равен нулю), или, как чаще говорят, потенциальным. Происхождение второго термина связано со следующим свойством электростатического поля.

В силу известного тождества векторного анализа

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0$$

напряженность этого поля  $\vec{E}$  есть градиент некоторого скаляра  $\varphi$ , который называется электростатическим потенциалом. Принято писать

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (2.4)$$

или в декартовых координатах

$$\vec{E} = -\left( \bar{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (2.4a)$$

где  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  — единичные векторы (орты) соответствующих осей.

Потенциал — неоднозначная функция поля. Если положить

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi + \varphi_0),$$

где  $\varphi_0$  — некоторый скаляр, то будет удовлетворено уравнение (2.1). Легко видеть, однако, что записанное выражение будет описывать поле, тождественное полю (2.4), лишь в том случае, если  $\varphi_0$  — величина постоянная (не зависящая от координат). Итак, для данного поля  $\vec{E}$  потенциал определен с точностью до постоянной величины.

Выясним физическое содержание введенного понятия. Напряженность  $\vec{E}$  определяется как сила, действующая на помещенный в поле единичный точечный заряд. При перемещении этого заряда вдоль элементарного отрезка

$$\Delta \vec{l} = \bar{x}_0 \Delta x + \bar{y}_0 \Delta y + \bar{z}_0 \Delta z$$

(рис. 2.1) сила поля совершает работу

$$\Delta A = \vec{E} \Delta \vec{l}, \quad (2.5)$$

а работа по переносу заряда из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  есть

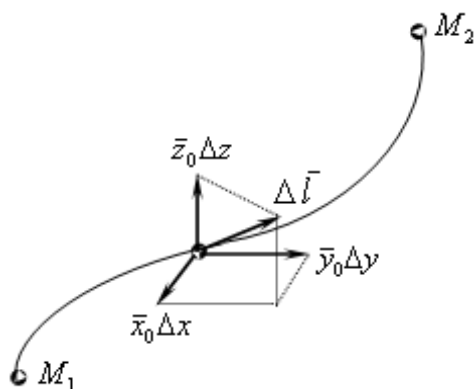


Рис. 2.1. К расчету работы электростатических сил

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \bar{E} d\bar{l}. \quad (2.6)$$

Переписав с помощью выражения (2.4а) стоящее под знаком интеграла скалярное произведение в декартовых координатах

$$\bar{E} d\bar{l} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right),$$

видим, что оно представляет собой взятый с обратным знаком полный дифференциал функции  $\varphi$ :

$$\bar{E} d\bar{l} = -d\varphi, \quad (2.7)$$

поэтому из равенства (2.6) следует, что

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.8)$$

Итак, работа, совершаемая полем при перемещении положительного единичного точечного заряда в электростатическом поле, равна разности потенциалов начальной и конечной точек пути. Она не зависит от абсолютного значения потенциалов, а также от вида пути, соединяющего точки. В частности, работа при обходе замкнутого контура равна нулю.

Объединяя формулы (2.6) и (2.8), получаем связь разности потенциалов с напряженностью поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \bar{E} d\bar{l}. \quad (2.9)$$

Значение потенциала в любой из точек, как указывалось, известно лишь с точностью до постоянной величины. Эту постоянную при необходимости выбирают условно. Так, иногда удобно считать, что потенциал земли или корпуса какого-либо прибора равен нулю. После этого потенциал любой точки определяется на основании формулы (2.9), где точка  $M_2$  (или  $M_1$ ) лежит в области известного потенциала (на земле и т.п.).

В электростатике обычно принимают, что потенциал в бесконечно удаленных точках равен нулю. Тогда потенциал в произвольной точке  $M$  численно равен работе, совершаемой при перемещении единичного заряда из этой точки в бесконечность, т.е. в соответствии с (2.9)

$$\varphi = \int_M^{\infty} \vec{E} \overline{dl}. \quad (2.10)$$

Понятие потенциала значительно упрощает задачу нахождения электростатического поля: вместо трех проекций вектора  $\vec{E}$  достаточно сначала найти одну лишь функцию  $\varphi$ , после чего напряженность поля вычисляется путем простого дифференцирования согласно уравнению (2.4).

### 2.3. Граничные условия в электростатике

Ранее были получены граничные условия для векторов электрического поля. Приведем их еще раз:

$$\left. \begin{array}{l} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ D_{1n} - D_{2n} = \xi \end{array} \right\} \text{— граничные условия для векторов.}$$

Рассмотрим границу «идеальный диэлектрик – проводник»:

$$\left. \begin{array}{l} E_{1\tau} = 0 \\ D_{1n} = \xi \end{array} \right\} \text{— граничные условия для векторов электрического поля.}$$

Поле в металле равно нулю:  $\text{grad} \varphi = 0$ , следовательно, на поверхности проводника  $\varphi = \text{const}$ . Проводящие поверхности в электростатике эквипотенциальны.



## 2.4. Определение потенциала по заданному распределению заряда.

### Принцип суперпозиции

Возможны следующие виды распределения зарядов:

- 1) точечный заряд —  $q$ ;
- 2) объемное распределение —  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ ;
- 3) поверхностное распределение —  $\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$ ;
- 4) линейное распределение —  $\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$ .

Принцип суперпозиции заключается в том, что потенциал системы точечных зарядов равен сумме потенциалов каждого из зарядов, взятых в отдельности. Поскольку уравнения Максвелла линейны относительно векторов поля, для их определения можно пользоваться принципом суперпозиции.

Определим потенциал системы точечных зарядов, используя принцип суперпозиции. Для этого вначале найдем потенциал точечного заряда  $q$  (рис. 2.2).

Воспользуемся уравнением (2.2а)

$$\oint_S \bar{D} \bar{d}s = q.$$

Исследуемое поле имеет точечную симметрию, поэтому целесообразно в качестве поверхности интегрирования выбрать поверхность сферы, проходящую через точку  $M$ , в которой определяем потенциал. На одинаковом расстоянии от заряда поле не изменяется. Кроме того, учтем, что направление вектора  $\bar{D}$  совпадает с направлением векторного дифференциала площади, тогда

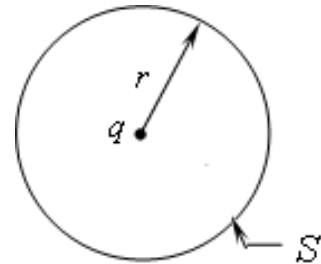


Рис. 2.2. К вычислению потенциала точечного заряда

$$D \oint_S ds = q; \quad \bar{D} = \frac{q}{S} \bar{r}_0 = \frac{q}{4\pi r^2} \bar{r}_0.$$

Воспользуемся материальным уравнением  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ , тогда

$$\bar{E} = \frac{q\bar{r}_0}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Так как

$$\varphi = \int_M^\infty \bar{E} d\bar{l},$$

то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}.$$

Легко определить потенциал в произвольной точке  $M$ , создаваемый двумя положительными зарядами (рис. 2.3):

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right).$$

Обобщим полученный результат для случая, когда имеется целая система точечных зарядов.

Для потенциала системы точечных зарядов получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.11)$$

Для объемного распределения суммирование заменяется интегрированием:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv; \quad dq = \rho dv. \quad (2.12)$$

Аналогичным образом можно записать потенциал для поверхностного распределения зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\xi}{r} ds; \quad dq = \xi ds. \quad (2.13)$$

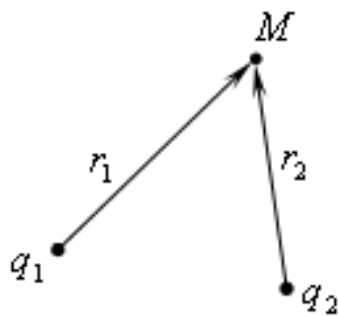


Рис. 2.3. К вычислению потенциала, созданного в точке двумя зарядами

Для линейного распределения зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau}{r} dl; \quad dq = \tau dl. \quad (2.14)$$

В качестве примера рассмотрим, как определить потенциал двух параллельных равномерно заряженных нитей (рис. 2.4). Линейная плотность зарядов нитей  $+\tau$  и  $-\tau$ .

Найдем потенциал в произвольной точке  $M$  как сумму потенциалов, создаваемых каждой нитью:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau}{r_1} dl - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\tau}{r_2} dl;$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} + C,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояние от положительно и отрицательно заряженной нити соответственно до точки  $M$ ,

в которой вычисляется потенциал (см. рис. 2.4). Константа  $C$  выбирается таким образом, чтобы на оси симметрии потенциал был равен нулю.

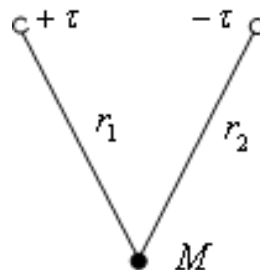


Рис. 2.4. К расчету потенциала двух параллельных равномерно заряженных нитей

## 2.5. Уравнения для электростатического потенциала

Получим из уравнений Максвелла для векторов электрического поля уравнения для электростатического потенциала. Исходить будем из уравнения (2.2)

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

Используя материальное уравнение  $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ , получим  $\operatorname{div} \epsilon \bar{E} = \rho$ , и так как  $E = -\operatorname{grad} \varphi$ , то

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} \varphi = -\rho. \quad (2.15)$$

Если  $\varepsilon$  не зависит от координаты, то есть среда однородна, то

$$\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho.$$

Так как  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \bar{\nabla}^2 \varphi$ , можно записать

$$\bar{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Это уравнение Пуассона.

Если  $\rho = 0$ , получим

$$\bar{\nabla}^2 \varphi = 0. \quad (2.17)$$

Это уравнение Лапласа.

**Пример 1.** Найти распределение потенциала в неоднородной среде, в которой  $\varepsilon_r = 1 + \frac{x}{a}$ . Объемная плотность заряда  $\rho_0$ . Потенциал зависит только от координаты  $x$ .

*Решение.* Воспользуемся формулой (2.15). В декартовых координатах при условии  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$  она примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\rho_0.$$

Покажем ход решения этого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\rho_0 ;$$

$$\varepsilon_0 \left( 1 + \frac{x}{a} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\rho_0 x + A, \text{ где } A - \text{const};$$

$$\varepsilon_0 \frac{x}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\rho_0 x + A - \varepsilon_0 ;$$

$$\partial \varphi = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} + \frac{Aa}{x\varepsilon_0} - \frac{a}{x} ;$$

$$\varphi = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} x + \frac{Aa}{\varepsilon_0} \ln x - a \ln x + B,$$

$$\varphi = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} x + a \ln x \left( \frac{Aa}{\varepsilon_0} - 1 \right) + B, \text{ где } B - \text{const.}$$

Обратим внимание на то, что в рассмотренной задаче среда неоднородна, поэтому мы воспользовались формулой (2.15), а не (2.16).

**Пример 2.** Найти распределение потенциала и напряженности электрического поля диполя.

*Решение.* Рассмотрим систему из двух разноименных, но равных по абсолютной величине точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $l$ , которая образует диполь. Ее электрическим моментом является вектор

$$\bar{p} = q\bar{l}, \quad (2.18)$$

где  $q$  — абсолютная величина каждого заряда;  $\bar{l}$  — вектор с абсолютным значением 1, направленный от положительного заряда к отрицательному.

Поле этой системы будем исследовать на расстояниях  $r$ , значительно превышающих ее размер:

$$r \gg l. \quad (2.19)$$

При соблюдении условия (2.19) система называется диполем. Если неограниченно уменьшать  $l$ , сохраняя момент  $\bar{p}$ , то в пределе получится «дипольная точка», характеризуемая вектором  $\bar{p}$ , — идеальный диполь; условие (2.19) выполнено при любых  $r$ . Потенциал диполя в произвольной точке  $M$  равен  $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ .

Полагая в соответствии с рис. 2.5  $r_1 r_2 \rightarrow r^2$  и  $r_1 - r_2 \rightarrow l \cos(\theta)$ , находим:

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{\bar{p}\bar{r}_0}{4\pi\varepsilon r^2}. \quad (2.20)$$

Теперь по формуле  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$  можно определить поле диполя  $\vec{E}$ . Это проще всего сделать, пользуясь сферической системой координат (рис. 2.6). Внося (2.20) в формулу

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\left( \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right),$$

получаем

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} (\vec{r}_0 2 \cos \theta + \vec{\theta}_0 \sin \theta). \quad (2.21)$$

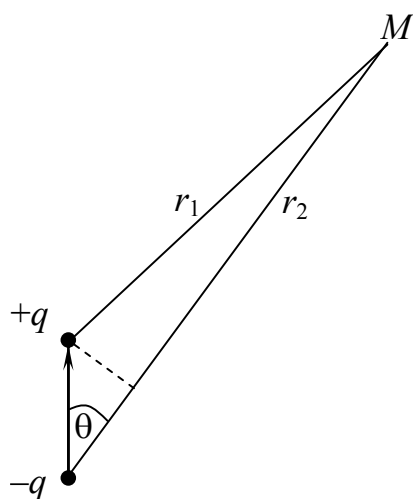


Рис. 2.5. К расчету поля электрического диполя

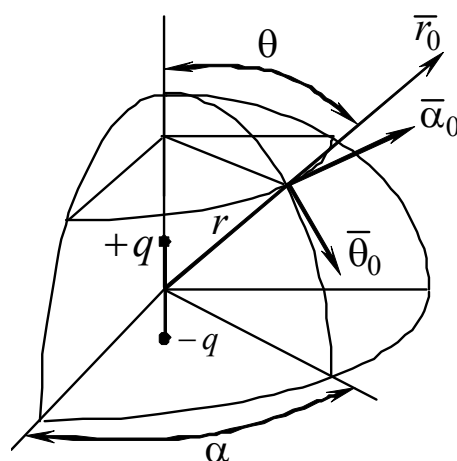


Рис. 2.6. К расчету поля электрического диполя с использованием сферической системы координат

Силловые линии поля в меридиональной плоскости изображены на рис. 2.7.

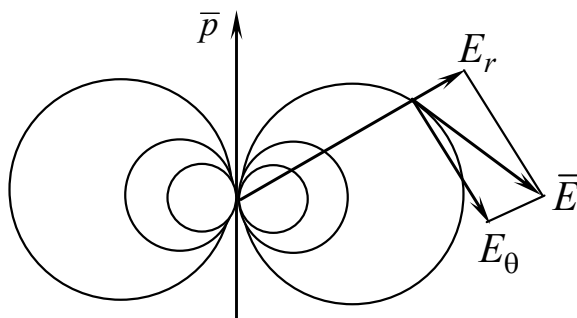


Рис. 2.7. Поле электрического диполя

Как и следовало ожидать, поле диполя симметрично относительно его оси.

Понятие диполя играет важную роль в теории электромагнетизма. Полученные выше результаты найдут применение в дальнейшем.

## 2.6. Основная задача электростатики

Прямой задачей электростатики является нахождение потенциала по заданному распределению заряда. Если плотность заряда в каждой точке известна, то потенциал как функция координат определяется уравнением Пуассона, решение которого имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv.$$

Далее находим напряженность электростатического поля  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ . Возможна и обратная задача.

Основная задача электростатики заключается в следующем. Задана система заряженных тел. Требуется найти распределение потенциала в пространстве, окружающем эти тела, представляющим собой идеальный диэлектрик. Однако очень часто задается не распределение заряда, а полные заряды либо потенциалы заряженных тел.

Могут быть заданы:

- заряды на проводящих телах (задача Неймана);
- потенциалы проводящих тел (задача Дирихле).

Нам нужно доказать, что задания потенциалов или полных зарядов тел принципиально достаточно для того, чтобы задача электростатики решалась единственным образом. Для доказательства этой теоремы нам потребуется формула Грина. Выведем ее.

Пусть  $\varphi$ ,  $\psi$  — скалярные функции. Рассмотрим их в области  $V$ , причем будем считать, что в области  $V$  они дифференцируемы.

Найдем  $\text{grad } \varphi$  и составим произведение.

Так как  $\psi \operatorname{grad} \psi$  — векторная функция, то применим к ней теорему Остроградского – Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) dv = \oint_S \psi \operatorname{grad} \varphi d\vec{s}.$$

Рассмотрим подынтегральные выражения по отдельности. Слева:

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \bar{\nabla}^2 \varphi.$$

В правой части:

$$\psi \operatorname{grad} \varphi d\vec{s} = \psi \operatorname{grad} \varphi \bar{n}_0 ds = \psi (\operatorname{grad} \varphi)_0 ds = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Подставив подынтегральные выражения в формулу Остроградского – Гаусса, получим:

$$\int_V (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \bar{\nabla}^2 \varphi) dv = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Полученное выражение называется формулой Грина.

Сформулируем теперь теорему единственности. Основная задача электростатики решается единственным образом, если:

а) потенциал есть непрерывная, конечная, однозначная функция координат;

б) на бесконечном расстоянии от исследуемой системы заряженных тел потенциалы и заряды равны нулю;

в) поверхности проводящих тел эквипотенциальны;

г) заданы либо потенциалы проводящих тел, либо их заряды.

Рассмотрим вначале основную задачу электростатики в формулировке Дирихле.

Доказательство проведем методом от противного, то есть предположим, что существуют два решения уравнения Лапласа  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Сформируем разностное решение:

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$



Тогда в любом случае

$$\bar{\nabla}^2 \Delta\varphi = 0.$$

При  $\rho = 0$  это очевидно. Но даже если  $\rho \neq 0$ , то каждая из этих функций должна удовлетворять уравнению Пуассона с одинаковой правой частью. Подставим разностное решение в формулу Грина:

$$\int_V (\text{grad } \Delta\varphi)^2 dv = \oint_S \Delta\varphi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n} ds.$$

Рассмотрим, чему равно  $\Delta\varphi$  на всей поверхности  $S$ . Нужно четко представлять, что  $S$  — поверхность, заключающая все исследуемое пространство, окружающее проводящие тела (диэлектрик). Она включает, во-первых, внешние поверхности всех проводников, во-вторых, поверхность сферы бесконечного радиуса, которая ограничивает все исследуемое пространство снаружи. На всей поверхности  $S$  решение  $\Delta\varphi = 0$  (в силу условий «б» и «в» теоремы единственности). Отсюда

$$\oint_S \Delta\varphi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n} ds = 0.$$

Значит, и левая часть формулы Грина равна нулю:

$$\int_V (\text{grad } \Delta\varphi)^2 dv = 0.$$

Под знаком интеграла находится неотрицательная функция, следовательно, интеграл обращается в нуль только при

$$\text{grad } \Delta\varphi = 0.$$

Отсюда

$$\Delta\varphi = \text{const}.$$

Мы уже убедились, что  $\Delta\varphi = 0$  на поверхности  $S$ , и теперь оказывается, что  $\Delta\varphi = \text{const}$  во всем объеме  $V$ . Значит,  $\Delta\varphi$  всюду равно нулю. Поскольку разностное решение обратилось в нуль, то не может быть двух значений потенциала в одной точке. Таким образом, теорема единственности для задачи Дирихле доказана.

Рассмотрим основную задачу электростатики в формулировке Неймана. Заданы заряды проводящих тел. Найти распределение потенциала в окружающем пространстве.

Пусть также имеются два решения уравнения Лапласа и разностное решение  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Рассмотрим правую часть формулы Грина для поверхности одного из проводников:

$$\oint_S \Delta\varphi \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} ds = \oint_S \Delta\varphi \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) ds;$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -E_1; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -E_2.$$

На границе с идеальным диэлектриком  $D_{1n} = \xi_1$ ,  $D_{2n} = \xi_2$ .

Привлекая материальное уравнение, получим

$$E_{1n} = \frac{\xi_1}{\varepsilon}; \quad E_{2n} = \frac{\xi_2}{\varepsilon};$$

$$-\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon} \oint_{S_1} (\xi_1 - \xi_2) ds = -\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon} (q_1 - q_2).$$

Но на поверхности рассмотренного проводника существует вполне определенный заряд и, значит, на этой поверхности  $q_1 - q_2 = 0$ . Например, на  $S_1$   $q_- = q_1$ , следовательно, на  $S_1$   $\Delta\varphi = 0$ .

Аналогично можно сказать и о других заряженных телах. Значит, правая часть формулы Грина равна нулю. Затем обращаемся к левой части формулы Грина:

$$\int_V (\text{grad } \Delta\varphi)^2 dv = 0.$$

Отсюда снова вытекает  $\varphi = \text{const}$ , следовательно,  $\Delta\varphi = 0$  всюду. Таким образом, теорема единственности для задачи Неймана доказана.

## 2.7. Методы решения задач электростатики

К настоящему времени разработано много методов решения задач электростатики. К числу основных относятся:

- метод суперпозиции;
- метод зеркальных изображений;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод разделения переменных;
- метод конформных преобразований.

Рассмотрим первые четыре из них.

### Метод суперпозиции

Этот метод основан на линейности уравнений Максвелла и был рассмотрен в подразд. 2.4.

Напомним, что потенциал системы зарядов равен сумме потенциалов каждого из зарядов, входящих в систему.

### Метод зеркальных изображений

Если система точечных зарядов находится в соседстве с проводником, то можно подобрать такие дополнительные (фиктивные) заряды, являющиеся как бы зеркальными изображениями первоначальных, что полное поле и истинных, и фиктивных зарядов, каждый из которых рассматривается без учета существования проводника, удовлетворит граничным условиям на его поверхности.

Пусть, например, заряд  $q$  находится на расстоянии  $h$  от проводящей плоскости  $S$  (рис. 2.8,*а*). Нетрудно найти поле, которое, будучи наложено на поле заряда  $q$ , удовлетворит требованию постоянства потенциала на плоскости  $S$ . Это поле заряда  $q$  (рис. 2.8,*б*), расположенного за плоскостью  $S$  на том же расстоянии  $h$ , равного ему по абсолютной величине и противоположного по знаку. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что плоскость симметрии двух разных и разноименных зарядов эквипотенциальна (силовые линии пересекают ее под прямым углом). Мысленно заполнив пространство по одну ее сторону проводящей средой, мы, очевидно, не нарушим поле в оставшемся полупространстве с зарядом.

Итак, для того чтобы найти поле точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью, надо мысленно построить по указанному способу его «зеркальное изображение» и искать поле над плоскостью как суперпозицию полей заряда и изображения. Подобным же образом — путем построения изображений отдельных зарядов — решается задача для системы зарядов над плоскостью (рис. 2.9).

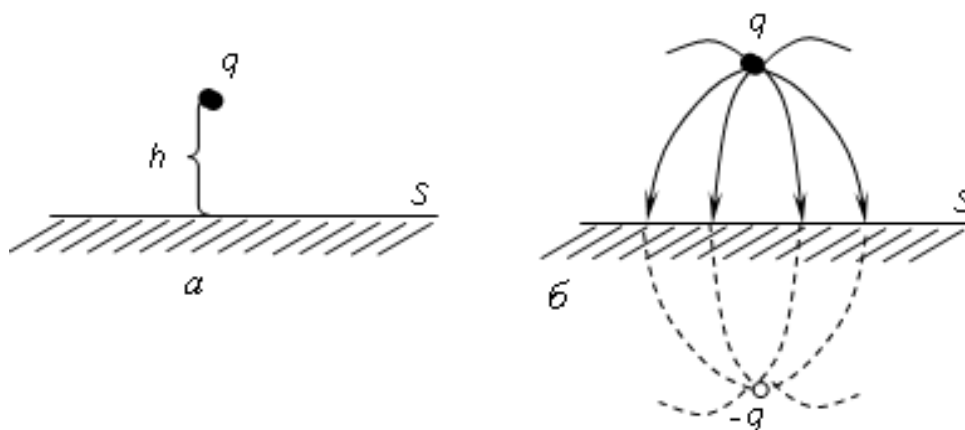


Рис. 2.8. К расчету поля заряда над проводящей плоскостью

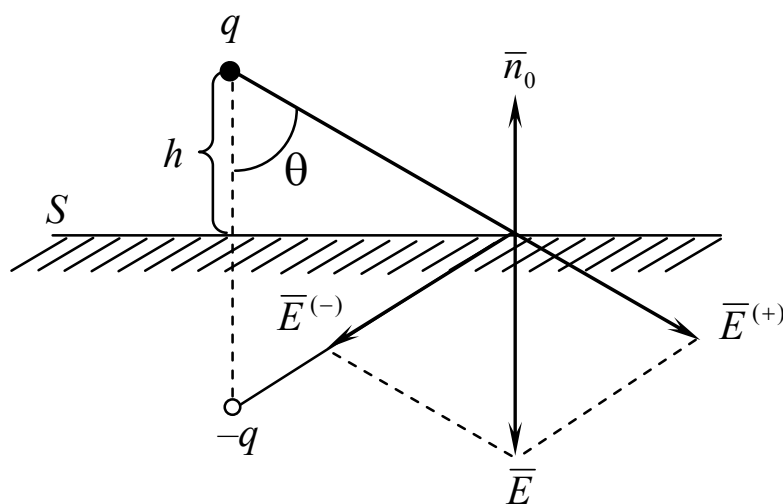


Рис. 2.9. К расчету поля заряда над проводящей плоскостью

Фактической причиной влияния проводника на поле зарядов является электростатическая индукция.

Так, в рассмотренном примере поле в плоскости проводника (см. рис. 2.9) равно

$$\bar{E} = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{n}_0 \cos \theta = \frac{-qh}{2\pi\epsilon r^3} \bar{n}_0 \quad (2.22)$$

(произведено сложение полей двух зарядов). Следовательно, исходя из граничного условия  $D_{1n} = \xi$ , плоскость несет заряд плотности

$$\xi = -\frac{qh}{2\pi r^3}. \quad (2.23)$$

Этот заряд индуцирован расположенным над плоскостью зарядом  $q$ . Таким образом, с помощью метода зеркальных изображений учитывается действие индуцированных зарядов. Остается только подчеркнуть, что обоснование законности метода дает доказанная выше теорема единственности. В данном случае мы имеем дело с заданными зарядами (в частности, полный заряд проводника обычно равен нулю). Согласно доказанной выше теореме найденное решение единственно и поэтому выражает истинное поле системы.

Для иллюстрации других возможностей метода зеркальных изображений рассмотрим задачу о параллельных бесконечно длинных заряженных цилиндрах. Задача о бесконечно длинных проводящих цилиндрах конечного диаметра принципиально гораздо сложнее. В случае нитей речь идет об известном распределении зарядов в пространстве. Здесь же плотность заряда различных участков цилиндрических поверхностей заранее неизвестна. Она не постоянна, как это имеет место в случае уединенного цилиндра: в результате взаимного влияния разноименно заряженных проводников заряд накапливается на менее удаленных участках их поверхностей.

Однако задача решается очень просто, если учесть, что эквипотенциальные поверхности поля заряженных нитей имеют цилиндрическую форму. На основании теоремы единственности мы имеем право утверждать, что поле в пространстве между поверхностями цилиндров (рис. 2.10,б) ничем не отличается от поля между аналогичными эквипотенциальными поверхностями двух заряженных нитей (рис. 2.10,а).

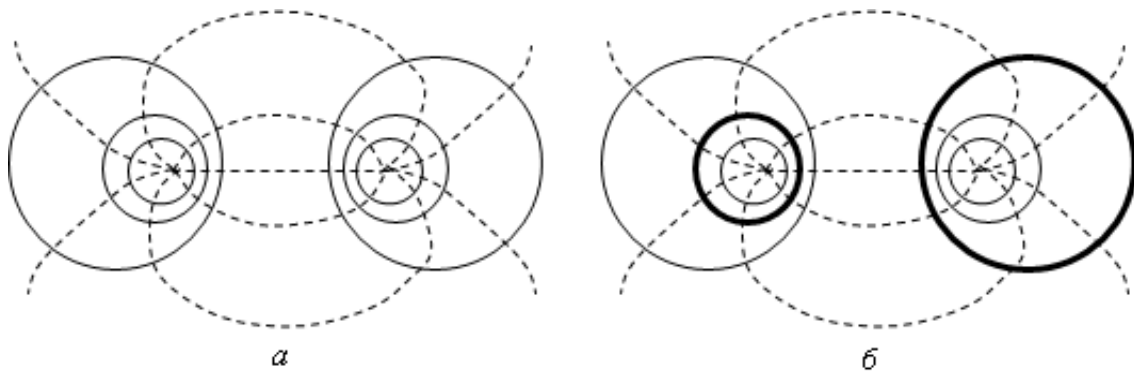


Рис. 2.10. К расчету поля двух бесконечно длинных проводящих цилиндров конечного диаметра

Таким образом, нахождение поля проводящих цилиндров сводится к простому выявлению «эквивалентных заряженных нитей», которыми якобы оно создается.

### Метод непосредственного интегрирования

Этот метод основан на интегрировании уравнений Лапласа или Пуассона в одномерной системе заряженных тел. Рассмотрим пример.

**Пример.** Исследовать поле плоского двухслойного конденсатора. Площадь пластин равна  $S$ . Поперечные размеры показаны на рис. 2.11.

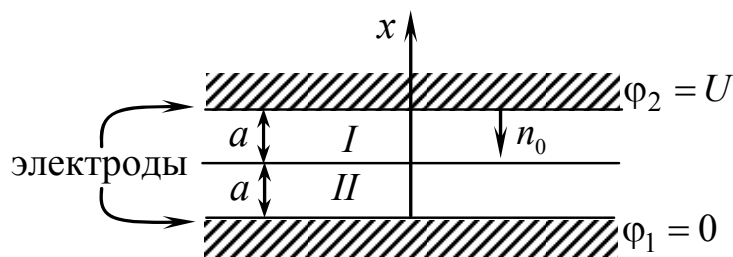


Рис. 2.11. К расчету поля плоского двухслойного конденсатора

Заданы диэлектрические проницаемости слоев:

$$\epsilon_1 = \epsilon_0; \quad \epsilon_2 = 2 \frac{a}{x} \epsilon_0.$$

Найти распределение потенциала, напряженности электрического поля и векторы электрического смещения. Определить заряд на верхней пластине конденсатора. Краевыми эффектами пренебречь.

*Решение*

1. Все межэлектродное пространство разбиваем на однородные области. Таких областей две. В них различное значение диэлектрической проницаемости.

2. Для каждой из областей записываем уравнение для потенциала в наиболее подходящей системе координат. В данном случае это прямоугольная система координат:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2 \varphi_1 = 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi_2 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0; \quad \varphi_1 = Ax + B; \quad 2a\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0; \quad \varphi_2 = Cx^2 + D.$$

3. Для определения постоянных интегрирования в полученных выше соотношениях воспользуемся граничными условиями и условиями теоремы единственности.

Граничные условия «диэлектрик – проводник»:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } x = 0, \quad \varphi_1 = 0, \\ \text{б) } x = 2a, \quad \varphi_2 = U \end{array} \right\} \text{ — теорема единственности (поверхности}$$

проводящих тел эквипотенциальны).

Граничные условия на границе смежных областей I и II:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{в) } x = a, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \\ \text{г) } x = a, \quad D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \text{так как } E = -\operatorname{grad} \varphi = -\bar{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{array} \right.$$

4. Составляем систему уравнений, исходя из граничных условий:

$$\text{а) } 0 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0;$$

$$\text{б) } U = C(2a)^2 + D;$$

$$в) Aa = Ca^2 + D;$$

$$г) \varepsilon_0 A = 2\varepsilon_0 C2a \Rightarrow A = 4aC.$$

Разрешаем эту систему относительно неизвестных постоянных:

$$4Ca^2 = Ca^2 + D \Rightarrow D = 3Ca^2;$$

$$U = C4a^2 + 3Ca^2 \Rightarrow C = \frac{U}{7a^2};$$

$$D = \frac{3}{7}U;$$

$$A = \frac{4}{7a}U.$$

Подставляем полученные значения постоянных:

$$\varphi_1 = \frac{4x}{7a}U; \quad \varphi_2 = \frac{Ux^2}{7a^2} + \frac{3}{7}U.$$

5. Проверка полученного решения. Проверка производится подстановкой  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в граничные условия.

Полученное решение удовлетворяет граничным условиям.

6. Определяем векторы поля:

$$\bar{E}_1 = -\bar{x}_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\bar{x}_0 \frac{4}{7a}U; \quad \bar{D}_1 = \varepsilon \bar{E}_1 = -\bar{x}_0 \frac{4\varepsilon_0}{7a}U;$$

$$\bar{E}_2 = -\bar{x}_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\bar{x}_0 \frac{2xU}{7a^2}; \quad \bar{D}_2 = \varepsilon \bar{E}_2 = -\bar{x}_0 \frac{4U}{7a} \varepsilon_0.$$

Потенциал в первой среде изменяется линейно, во второй — по квадратичному закону. Напряженность не зависит от координат в первой среде.

7. Определяем заряд на верхней пластине. Для этого вначале найдем его плотность. На границе с идеальным проводником:

$$\xi = D_{2n} = \bar{n}_0 \bar{D}_2;$$

$$\xi = -\bar{x}_0 (-\bar{x}_0) \frac{4\varepsilon_0}{7a}U = \frac{4\varepsilon_0}{7a}U.$$



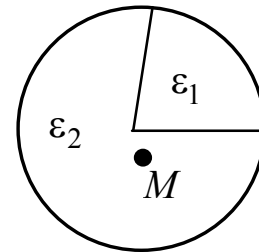
Полный заряд на верхней пластине

$$q = \xi S = \frac{4\varepsilon_0 US}{7a}.$$

### Метод разделения переменных

Этот метод основан на решении уравнений для потенциалов в случае двух- или трехмерных систем заряженных тел. Содержание этого метода рассмотрим на примере.

**Пример.** Найти распределение потенциала в цилиндрической трубе, заполненной диэлектриком (рис. 2.12). Длина цилиндра неограниченна. В цилиндре две области с разными значениями  $\varepsilon$ . В данном случае имеет место двумерная задача, поэтому  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ .



*Решение*

1. Делим пространство на  $n$  однородных областей. В нашем случае  $n = 2$ .

2. Записываем уравнения Лапласа для каждой из областей.

Пусть  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  не зависят от координаты. Применяем уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}_0 = 0. \quad (2.24)$$

3. Решаем методом разделения переменных. Решение уравнения (2.24) ищем в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от своей переменной:

$$\varphi_n = R(r)A(\alpha).$$

Подставляем  $\varphi$  в уравнение Лапласа (2.24). Индекс  $n$ , обозначающий номер области, пока будем опускать, потому что вид

Рис. 2.12. К расчету распределения потенциала в цилиндрической трубе, заполненной диэлектриком

решения от него не зависит. Как только особенности области будут проявлены, снова введем этот индекс.

$$\frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = 0;$$

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = 0.$$

4. Так как каждое из слагаемых зависит только от своей переменной, первое — от  $r$ , второе — от  $\alpha$ , то вместе они дадут ноль только в двух случаях.

Первый случай: каждая из функций (слагаемых) обращается в ноль:

$$\frac{r}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_0}{\partial r} \right) = 0; \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{A_0} \frac{\partial^2 A_0}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (2.26)$$

Второй случай: каждая из функций (слагаемых) равна одинаковым постоянным величинам, имеющим противоположные знаки:

$$\frac{r}{R_\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_\lambda}{\partial r} \right) = \lambda^2; \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{A_\lambda} \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial \alpha^2} = -\lambda^2. \quad (2.28)$$

Заметим, что нижние индексы 0 и  $\lambda$  подчеркивают тот факт, что  $A_0$  и  $R_0$  относятся к первому случаю, а  $A_\lambda$  и  $R_\lambda$  — ко второму.

Для первого случая уравнения (2.25) и (2.26) решаются легко:

$$r \frac{\partial R_0}{\partial r} = A_0; \quad R_0 = A_0 \ln r + B_0;$$

$$A_0 = C_0 \alpha + D_0;$$

$$\varphi_0 = R_0 A_0 = (A_0 \ln r + B_0)(C_0 \alpha + D_0).$$

Для второго случая уравнение (2.27) является уравнением Эйлера. Оно решается подстановкой  $R = r^p$ . После подстановки получаем

$$p^2 = \lambda^2,$$

где  $p = \pm\lambda$  — корень характеристического уравнения.

Следовательно, решение уравнения (2.27) имеет вид

$$R_\lambda = A_\lambda r^\lambda + B_\lambda r^{-\lambda}.$$

Уравнение (2.28) решается составлением характеристического уравнения

$$p^2 + \lambda^2 = 0;$$

$$p_{1,2} = \pm\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda = C_\lambda \sin \lambda\alpha + D_\lambda \cos \lambda\alpha;$$

$$\varphi_\lambda = R_\lambda \alpha_\lambda = (A_\lambda r^\lambda + B_\lambda r^{-\lambda})(C_\lambda \sin \lambda\alpha + D_\lambda \cos \lambda\alpha).$$

5. Конструируется общее решение на основе суммы частных:

$$\begin{aligned} \varphi_n = R_{0n} \alpha_{0n} + \sum_{\lambda} R_{\lambda n} \alpha_{\lambda n} = (A_{0n} \ln r + B_{0n})(C_{0n} \alpha + D_{0n}) + \\ + \sum_{\lambda} (A_{\lambda n} r^\lambda + B_{\lambda n} r^{-\lambda})(C_\lambda \sin \lambda\alpha + D_\lambda \cos \lambda\alpha). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Напомним, что индекс  $n$  показывает номер области. В рассмотренном случае  $n$  равно 1 или 2.

6. Определяем постоянные из условия теоремы единственности и граничных условий.

Например, одно из условий заключается в том, что потенциал — конечная функция координат. В исследуемом пространстве есть точка, в которой  $r = 0$ . При  $r = 0$  потенциал должен быть конечен, следовательно, коэффициенты при  $\ln r$  и  $r^{-\lambda}$  в (2.29) должны быть равны нулю. Значит,  $A_{01} = A_{02} = 0$ ,  $B_{\lambda 1} = B_{\lambda 2} = 0$ .

Далее применяем остальные граничные условия и делаем проверку.

## 2.8. Емкость. Конденсатор в электростатике

Обсудим одно из важных представлений электростатики. Рассматривая некоторый уединенный проводник, будем вычислять его потенциал, используя выражение (2.10); тогда это вполне определенная величина. При линейности среды заряд  $q$  и потенциал  $\phi$ , определяемый по формуле (2.10) для конкретного проводника, связаны линейной зависимостью; это следует из линейности уравнений электростатики. Поэтому каждый проводник можно охарактеризовать при помощи своего коэффициента пропорциональности  $C$ , связывающего потенциал и заряд:

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (2.30)$$

Можно сказать, что  $C$  есть характеристика проводника как «накопителя» заряда. Параметр  $C$  называется емкостью уединенного проводника.

На рис. 2.13 в двух вариантах показан проводник, находящийся в полости другого проводника. Это так называемый идеальный конденсатор.

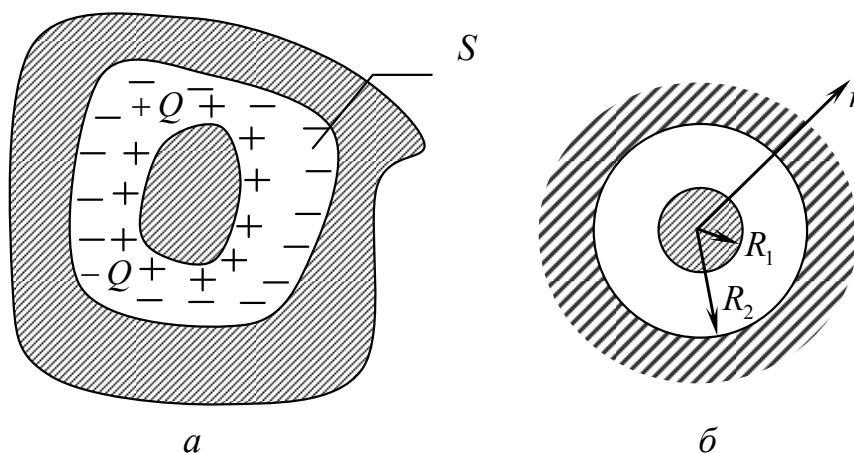


Рис. 2.13. К определению емкости сферического конденсатора

Пусть внутренний проводник несет заряд  $Q$ . Легко убедиться, что внутренняя поверхность внешнего проводника при этом имеет заряд  $-Q$ . Выберем внутри полого проводника замкнутую поверх-

ность  $S$  (рис. 2.13,а), охватывающую полость. Применяя к  $S$  равенство (2.2а), видим, что левая часть равна нулю, так как в проводнике  $\bar{D} = 0$ . Следовательно, равен нулю и полный заряд  $q$ , находящийся внутри поверхности  $S$ . Отсюда видно, что заряд внутреннего проводника  $Q$  уравнивается зарядом  $-Q$ , который может находиться только на внутренней поверхности полого проводника. Емкость конденсатора определяется как

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \quad (2.31)$$

где  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов обоих проводников ( $q$  и  $\Delta\varphi$  одного знака).

**Пример.** Определим емкость сферического конденсатора (рис. 2.13,б).

*Решение.* В силу сферической симметрии внутреннее поле оказывается таким же, как в случае точечного заряда. Поэтому для внутреннего и внешнего проводников имеем соответственно

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} \text{ и } \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2}.$$

Составляя разность этих величин и применяя формулу (2.31), получаем

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.32)$$

На идеальный конденсатор внешние электростатические поля не оказывают никакого действия. Действительно, внешние поля создают на поверхности проводящих тел такие распределения зарядов, которые компенсируют внутренние поля. Поле будет отсутствовать и в полости внутри проводника, если, разумеется, она не содержит зарядов. Говорят, что объекты, находящиеся в полости, электростатически экранированы: внешние поля на них не действуют. При этом внешнее пространство не экранировано от действия зарядов внутри полости. Действительно, рассматривая полый проводник идеального конденсатора как нейтральный, мы должны

прийти к выводу, что появление заряда  $-Q$  на его внутренней поверхности вызывает наведение заряда  $Q$  на внешней. Этот заряд, однако, на практике можно «отвести» при помощи заземления: он распределится на огромной поверхности и, можно сказать, исчезнет. Внешнее поле практически не возникает.

Реальный конденсатор — это система двух проводников, электростатическое взаимодействие которых значительно превышает воздействие внешних полей. Заряды проводников при этом, строго говоря, уже не одинаковы по абсолютной величине, однако не настолько, чтобы потеряло смысл применение формулы (2.31).

Представление о емкости может быть распространено и на случай системы более чем двух проводников. Пусть имеется  $N$  проводящих тел. Поскольку между полным зарядом каждого из проводников и потенциалами всех существует линейная зависимость, можно, например, записать:

$$q_i = C_{i1}(\varphi_i - \varphi_1) + C_{i2}(\varphi_i - \varphi_2) + \dots + C_{ik}\varphi_i + \dots + C_{iN}(\varphi_i - \varphi_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.33)$$

Коэффициенты  $C_{ik}$  называются частичными емкостями — собственными ( $k = i$ ) и взаимными ( $k \neq i$ ). Можно доказать, что  $C_{ik} = C_{ki}$ , т.е. матрица емкостей симметрична. Знание этой матрицы (т.е. всех частичных емкостей системы проводников) позволяет установить однозначное соответствие между их зарядами и потенциалами. Равенство (2.33) можно переписать в виде системы

$$q = A\varphi, \quad (2.34)$$

где  $q$  и  $\varphi$  — векторы-столбцы, образованные соответственно всеми зарядами  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$  и потенциалами  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ . При этом  $A = \|A_{ik}\|$  — матрица, элементы которой называются коэффициентами электростатической индукции. Связь между ними и частичными емкостями очевидна.

В заключение отметим, что собственная емкость  $C_{ii}$  некоторого проводника с номером  $i$  отличается от емкости того же проводника, рассматриваемого как уединенное тело, так как вследствие электростатической индукции в системе меняется распределение его заряда.

## 2.9. Энергия электростатического поля

Нам уже известно выражение для энергии электрического поля:

$$W_э = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{(\bar{E}, \bar{D})}{2}.$$

Выразим энергию электростатического поля через потенциал и объемную плотность заряда:

$$W_э = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \bar{D} dv = -\frac{1}{2} \int_V \bar{D} \operatorname{grad} \varphi dv;$$

$$\operatorname{div}(\varphi \bar{D}) = \varphi \operatorname{div} \bar{D} + \bar{D} \operatorname{grad} \varphi;$$

$$W_э = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \bar{D} dv - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) dv.$$

Рассмотрим второй интеграл в последнем выражении. Применим к нему теорему Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \bar{D}) dV = \oint_S \varphi \bar{D} \bar{dS}.$$

Интересуясь всей энергией, создаваемой системой электрических зарядов, распространим интегрирование на все исследуемое пространство. Другими словами, окружим область, в которой имеются заряды, условной сферической поверхностью и устремим ее радиус в бесконечность. Так как произведение  $\varphi \bar{D}$  убывает быстрее, чем  $r^{-2}$ , а площадь сферы увеличивается как  $r^2$ , исследуемый интеграл обращается в ноль. Следовательно, формула для энергии электростатического поля имеет вид

$$W_э = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV.$$

В последнем соотношении учтено, что  $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$ .

## Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте понятие «электростатическое поле».
2. Получите уравнения электростатического поля из уравнений Максвелла.
3. Какой физический смысл придается электростатическому потенциалу  $\varphi$ ?
4. Какая интегральная и дифференциальная связь существует между  $\vec{E}$  и  $\varphi$ ?
5. Поясните физическое содержание вектора Пойнтинга.
6. Изменяются ли при переходе через границу раздела двух сред с различными  $\varepsilon$  полные значения  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ?
7. Запишите граничные условия для векторов электрического поля при переходе через границу «идеальный диэлектрик – проводник».
8. Охарактеризуйте виды распределения зарядов.
9. Получите из уравнений Максвелла для электрического поля уравнения для потенциала.
10. Сформулируйте основную задачу электростатики.
11. Сформулируйте теорему единственности.
12. Перечислите основные методы решения задач электростатики.
13. Дайте обоснование методу зеркальных изображений.



### 3. Электромагнитное поле постоянных токов

#### 3.1. Электрическое поле постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока подобно полю электростатическому потенциально. Однако на проводящих границах потенциал уже не постоянен и вектор  $\vec{E}$  не составляет с ними прямого угла. Таким образом, электрическое поле системы проводящих тел, несущих ток, отличается от электростатического поля этой же системы.

Посмотрим, насколько велико может быть на практике отмеченное различие. Пусть разность потенциалов двух параллельных токонесущих пластин из меди ( $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$  См/м), лежащих на расстоянии  $d = 1$  см, составляет  $\varphi_B - \varphi_A = 10$  В, а плотность тока  $j = 2$  А/мм<sup>2</sup>.

Вычислим компоненты вектора  $\vec{E}$  у поверхности проводника:  
тангенциальная

$$E_\tau = \frac{j}{\sigma} \approx 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ В/м};$$

нормальная

$$E_n = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{d} = 10^3 \text{ В/м}.$$

Как видно, их отношение оказывается весьма малой величиной:

$$E_\tau / E_n = 3,5 \cdot 10^{-5},$$

и электрическое поле практически нормально токонесущему проводнику. По виду оно пренебрежимо мало отличается от поля электростатического конденсатора, образованного взятыми пластинами. Рассмотренный пример типичен. Тангенциальная компонента вектора  $\vec{E}$  на проводящей токонесущей поверхности обычно

настолько мала, что отличие электрического поля в диэлектрике от электростатического оказывается несущественным.

Иное наблюдается внутри проводника. Как известно, электростатическое поле там всегда отсутствует. Но при наличии постоянного тока в проводящей среде существует электрическое поле, описываемое уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \\ \bar{j} &= \sigma \bar{E}, \\ \operatorname{div} \bar{j} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \bar{E} d\bar{l} &= 0, \\ \oint_S \bar{j} d\bar{s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Последнее из уравнений (3.1) есть не что иное, как уравнение закона сохранения заряда, записанное для стационарного процесса ( $\partial/\partial t = 0$ ). Оно выражает непрерывность линий постоянного тока.

Сопоставляя систему уравнений (3.1) с уравнениями электростатического поля в среде, не содержащей зарядов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= 0, \\ \bar{D} &= \varepsilon \bar{E}, \\ \operatorname{div} \bar{D} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \bar{E} d\bar{l} &= 0, \\ \oint_S \bar{D} d\bar{s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3a)$$

видим, что они совершенно одинаковы по форме. Уравнения электростатики (3.3) становятся справедливыми для электрического поля в проводящей среде, если электрическую индукцию  $\bar{D}$  заменить в них на плотность тока  $\bar{j}$ , а диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  —

удельной проводимостью  $\sigma$ . На этом основании говорят, что между обоими полями существует формальная аналогия.

В ряде случаев указанное обстоятельство помогает нахождению электрического поля в проводящей среде. Если в рассматриваемой задаче все граничные поверхности имеют ту же форму, что и в некоторой электростатической задаче, и вектор  $\vec{j}$  ведет себя в первом случае на границах так же, как вектор  $\vec{D}$  во втором, то можно использовать готовое решение электростатической задачи, сделав в нем замену

$$\vec{D} \text{ на } \vec{j} \text{ и } \epsilon \text{ на } \sigma. \quad (3.4)$$

Так, вектор  $\vec{j}$  в слабо проводящей среде нормален ограничивающей ее поверхности хорошего проводника. Действительно, это вытекает из второго уравнения (3.2)

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Нормальная составляющая  $\vec{j}$  на границе сред непрерывна:

$$\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n}, \quad (3.5)$$

а тангенциальная составляющая в силу непрерывности  $E_\tau$  ( $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ) подчинена соотношению

$$j_{1\tau} = j_{2\tau} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (3.6)$$

т.е. в слабо проводящей среде она в  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  раз меньше, чем в хорошем проводнике. При достаточном различии проводимостей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  составляющей  $j_{1\tau}$  можно пренебречь и считать вектор  $\vec{j}_1$  нормальным границе.

Если заменить слабо проводящую среду идеальным диэлектриком, то можно рассмотреть электростатическую задачу, в которой вектор  $\vec{D}$  будет также нормальным границе. Пусть решение электростатической задачи известно заранее. Тогда, сделав в нем замену (3.4), мы получаем поле в слабо проводящей среде.

На принципе отмеченной выше аналогии базируется также моделирование электростатических полей в электролитической ванне. Для экспериментального исследования электростатического поля системы проводящих тел последние помещают в ванну и, создав требуемые потенциалы, измеряют плотность тока в различных участках электролита. Найденное таким путем поле тока в электролите представляет собой модель электростатического поля системы. Гарантией этому служит значительное различие удельных проводимостей электролита и элементов системы (обычно металлических), позволяющее считать, что вектор плотности тока к поверхностям системы нормален.

### 3.2. Магнитное поле постоянного тока

В этом подразделе мы ограничимся наиболее простыми проявлениями магнитного поля. Будем рассматривать лишь области, не содержащие тока ( $\vec{j} = 0$ ). Поставим также условие, чтобы любой мыслимый контур в области не охватывал тока (рис. 3.1,а). Кольцевые области, подобные изображенной на рис. 3.1,б, охватывающие ток, пока исключаются из анализа.

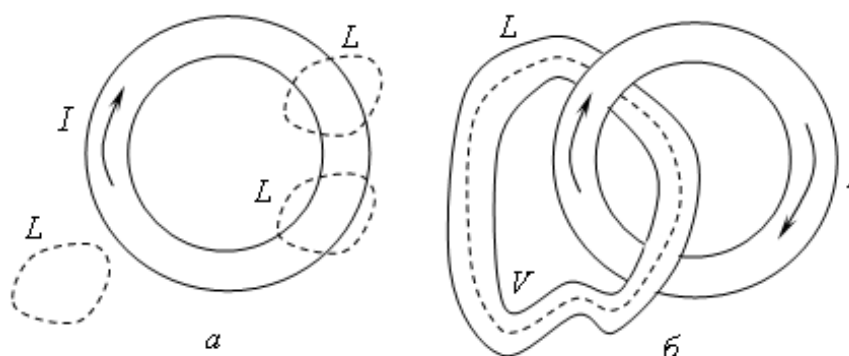


Рис. 3.1. Контур  $L$  не охватывает виток с постоянным током (а); контур  $L$  охватывает виток с постоянным током (б)

Тогда из уравнений Максвелла выделится независимая система уравнений магнитостатики:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0, \\ \bar{B} &= \mu \bar{H}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \bar{H} \bar{dl} &= 0, \\ \oint_S \bar{B} \bar{ds} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Первое из дифференциальных уравнений позволяет немедленно записать

$$\bar{H} = -\operatorname{grad} \varphi^M, \quad (3.9)$$

где  $\varphi^M$  — магнитоэлектростатический потенциал.

Из (3.7) следует, что магнитоэлектростатический потенциал подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание, что граничные условия для вектора  $\bar{H}$

$$\left. \begin{aligned} H_{1\tau} &= H_{2\tau}, \\ \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

ничем не отличаются от таких же условий для вектора  $\bar{E}$ , приходим к очевидному выводу, что решения задач магнитоэлектростатики формально идентичны решениям соответствующих электростатических задач и могут быть получены из них простой заменой величин  $\bar{E}$  на  $\bar{H}$  и  $\varepsilon$  на  $\mu$ .

Продолжим изучение магнитного поля постоянного тока, отказавшись от поставленных выше ограничений. С этой целью запишем в полном виде уравнения Максвелла, относящиеся к магнитному полю, при условии  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ :

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{j}, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (3.13)$$

$$\oint_l H dl = I, \quad (3.14)$$

$$\oint_S B d\bar{s} = 0. \quad (3.15)$$

Добавим сюда материальное уравнение

$$\bar{B} = \mu \bar{H}. \quad (3.16)$$

Сосредоточим внимание на связи магнитного поля и постоянного тока. Покажем, что однозначную связь между потенциалом магнитного поля  $\varphi^M$  и полем установить не удастся. Пусть задан контур с током (рис. 3.2).

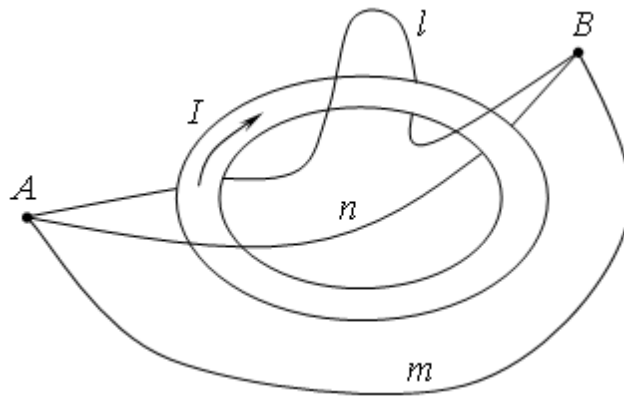


Рис. 3.2. К определению разности магнитных потенциалов между точками  $A$  и  $B$

Определим разность магнитных потенциалов между точками  $A$  и  $B$ . При этом от точки  $A$  до точки  $B$  будем проходить разными путями:

$$\Delta\varphi_{AmB}^M = \Delta\varphi_A^M - \Delta\varphi_B^M;$$

$$\Delta\varphi_{AnB}^M = \Delta\varphi_A^M - \Delta\varphi_B^M + I;$$

$$\Delta\varphi_{AlB}^M = \Delta\varphi_A^M - \Delta\varphi_B^M + 2I.$$

Отсюда видно, что разность потенциалов зависит от формы пути, следовательно, скалярный потенциал в области, содержащей токи, не может определять поле.

С целью установления связи между полем и вызывающим его током введем векторный магнитный потенциал, удовлетворяющий уравнениям (3.12), (3.13):

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \bar{B} = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (3.17)$$

Вектор  $\bar{A}$  называется векторным магнитным потенциалом. Сам он определяет поле неоднозначно, так как

$$B = \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{rot} (\bar{A} + \operatorname{grad} \varphi). \quad (3.18)$$

Действительно, если  $\bar{A}$  есть решение (3.18), то решением будет также функция

$$\bar{A}' = \bar{A} + \operatorname{grad} \varphi,$$

где  $\varphi$  — некоторый скаляр.

Из уравнений Максвелла выведем уравнения для потенциала  $\bar{A}$ . Подставляя (3.17) в (3.12) с учетом (3.16), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \bar{j} \mu.$$

Воспользовавшись формулой векторного анализа, запишем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \bar{j} \mu. \quad (3.19)$$

Из (3.18) следует, что в выборе вектора  $\bar{A}$  допускается известный произвол. В связи с этим наложим на  $\bar{A}$  дополнительное условие, называемое «кулоновской калибровкой»:

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0.$$

Тогда (3.19) принимает вид

$$\nabla^2 \bar{A} = -\bar{j} \mu. \quad (3.20)$$

Это векторное уравнение соответствует трем скалярным:

$$\nabla^2 A_x = -j_x \mu;$$

$$\nabla^2 A_y = -j_y \mu;$$

$$\nabla^2 A_z = -j_z \mu.$$

Сравним результат с уравнением Пуассона для электростатического потенциала. Запишем его еще раз:  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ . Решение этого

уравнения имеет вид  $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv$ .

Отсюда запишем проекции вектора  $\bar{A}$ :

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_x}{r} dv; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_y}{r} dv; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_z}{r} dv.$$

Зная проекции, найдем вектор:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}}{r} dv.$$

### 3.3. Магнитное поле линейного тока

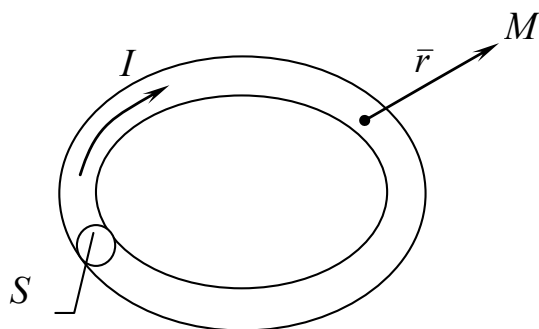


Рис. 3.3. К вопросу определения магнитного поля линейного тока

Воспользуемся выражением для векторного магнитного потенциала, чтобы найти магнитное поле в наиболее важном случае линейного тока.

Пусть это будет ток, протекающий в замкнутом контуре  $L$  произвольной формы (рис. 3.3). Площадь его поперечного сечения  $S$ .



Векторный магнитный потенциал, создаваемый таким током, определяется из выражения

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \int_l \frac{\bar{j}}{r} d\bar{S} d\bar{l}; \\ \bar{A} &= \frac{I\mu}{4\pi} \int_l \frac{d\bar{l}}{r},\end{aligned}\tag{3.21}$$

так как ток  $I = \int_S \bar{j} d\bar{S}$ .

Перейдем к выражению для напряженности магнитного поля:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A} = \frac{I}{4\pi} \int_l \text{rot} \frac{d\bar{l}}{r}.\tag{3.22}$$

Определим подынтегральное выражение.

Пусть  $\bar{a} = \frac{d\bar{l}}{r}$ ,  $\varphi = \frac{1}{r}$ . Тогда

$$\text{rot } \bar{a} \cdot \varphi = [\bar{\nabla}, \bar{a} \cdot \varphi] = [\bar{\nabla}, \bar{a}] \cdot \varphi + [\bar{\nabla} \varphi, \bar{a}] = \varphi \text{rot } \bar{a} + [\text{grad } \varphi, \bar{a}];$$

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi} \left( \int_L \frac{1}{r} \text{rot } d\bar{l} + \int_L \left[ \text{grad} \frac{1}{r}, d\bar{l} \right] \right).$$

Так как  $d\bar{l}$  не зависит от положения точки  $M$ , в которой находим ротор, то  $\text{rot } d\bar{l} = 0$ .

$$\text{Отсюда } \text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\bar{r}_0}{r^2}.$$

Подставив полученные результаты в формулу (3.22), получаем

$$\bar{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\bar{l}, \bar{r}_0]}{r^2}.\tag{3.23}$$

Это интегральная формулировка так называемого закона Био и Савара, непосредственно связывающего напряженность магнитного поля с линейным распределением тока.

В дифференциальной форме этот закон имеет вид

$$\overline{dH} = \frac{I}{4\pi r^2} [\overline{dl}, \overline{r_0}]. \quad (3.24)$$

Используя закон Био – Савара, мы можем теперь построить магнитные поля различных линейных токов.

### 3.4. Примеры магнитных полей

#### 3.4.1. Поле прямого провода (прямолинейного тока)

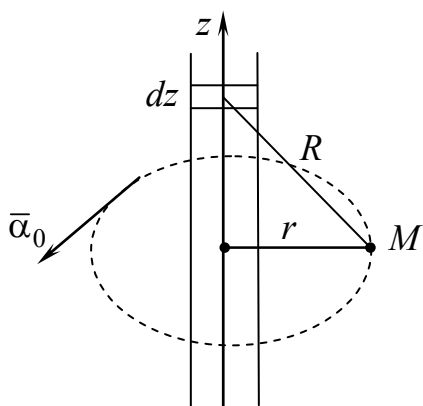


Рис. 3.4. К вопросу определения магнитного поля прямого провода

Пусть ток направлен вдоль оси  $Z$  цилиндрической системы координат (рис. 3.4).

Поле в произвольной точке  $M$  определяется из уравнения (3.23):

$$\overline{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[d\overline{z}, \overline{R_0}]}{R^2},$$

где  $\overline{R_0}$  — единичный вектор, направленный от  $dz$  к точке  $M$ ;  $\theta$  — угол между  $\overline{R_0}$  и осью  $Z$ .

Исходя из этого запишем:

$$\begin{aligned} [d\overline{z}, \overline{R_0}] &= \overline{\alpha_0} dz \sin \theta = \overline{\alpha_0} dz \sin(\pi - \theta) = \overline{\alpha_0} dz \frac{r}{R}; \\ H &= \frac{I}{4\pi} \overline{\alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{R^3} dz = \frac{I}{4\pi} \overline{\alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) = \frac{I \overline{\alpha_0}}{4\pi r} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \overline{\alpha_0} \frac{I}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Заметим, что этот же результат легко получается из первого уравнения Максвелла.

### 3.4.2. Круглый виток и соленоид

Определим поле на оси круглого витка (рис. 3.5). Подынтегральное выражение (3.24), как это видно из рисунка, имеет радиальную и продольную компоненты в цилиндрической системе координат:

$$d\bar{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\bar{l}, \bar{R}_0] = d\bar{H}_r + d\bar{H}_z, \quad (3.26)$$

причем радиальная составляющая при интегрировании должна уничтожиться.

Таким образом, напряженность поля на оси есть

$$\bar{H} = \int_L d\bar{H}_z = \bar{z}_0 \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \theta d\alpha}{a^2 + z^2} = \bar{z}_0 \frac{I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha,$$

или

$$\bar{H} = \bar{z}_0 \frac{I}{4} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.27)$$

В случае соленоида (рис. 3.6) можно допустить, что ток непрерывно распределен по цилиндрической поверхности и в элементарном поясе ширины  $dz$  равен

$$dI = nI dz,$$

где  $n$  — число витков катушки, приходящееся на единицу длины соленоида;  $I$  — ток одного витка.

Отметим, что  $nI$  называют числом ампервитков на единицу длины.

Поле на оси соленоида в точке  $M$ , создаваемое элементарным поясом, который виден из этой точки под углом  $2\theta$ , выражается формулой (3.27):

$$d\bar{H} = \bar{z}_0 \frac{nI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \bar{z}_0 \frac{nI}{2} d\left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right) = \bar{z}_0 \frac{nI}{2} d(\cos \theta).$$

Интегрируя это выражение от  $\theta_1$  до  $\pi - \theta_2$  (рис. 3.6,б), получаем выражение напряженности поля соленоида (т.е. всех его витков) в точке  $M$ :

$$\vec{H} = \vec{z}_0 \frac{nI}{2} d(\cos \theta_2 + \cos \theta_1). \quad (3.28)$$

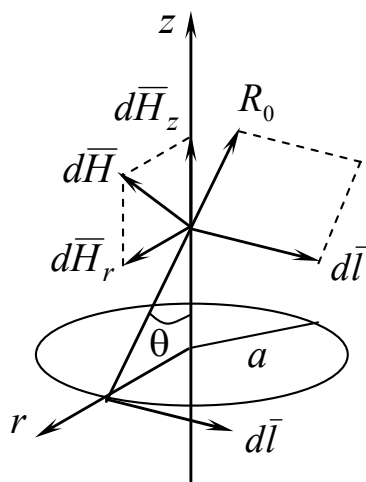


Рис. 3.5. К вопросу определения магнитного поля на оси круглого витка

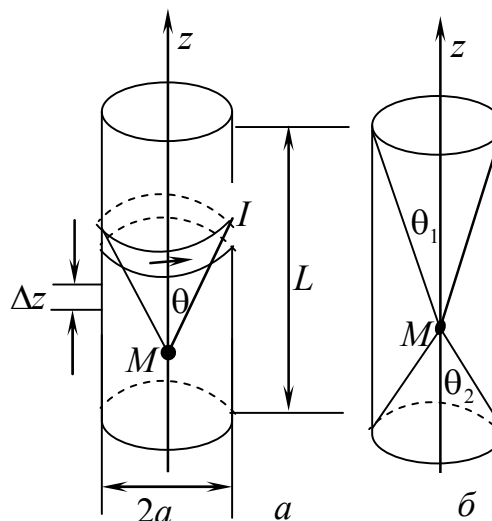


Рис. 3.6. К вопросу определения магнитного поля соленоида

Отсюда, в частности, нетрудно найти поле в центре соленоида длиной  $L$  при  $\theta_2 = \theta_1$ :

$$\vec{H} = \vec{z}_0 nI \cos \theta_2 = \vec{z}_0 \frac{nIL}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad (3.28a)$$

а также поле бесконечного соленоида ( $\theta_2 = \theta_1 \rightarrow 0$ ):

$$\vec{H} = \vec{z}_0 nI. \quad (3.28b)$$

### 3.4.3. Магнитный диполь

Покажем, что виток на достаточно большом расстоянии действует, как магнитный диполь.

Рассмотрим круглый виток (рис. 3.7). Обозначая расстояние от элемента витка до точки наблюдения  $M$  буквой  $R$ , имеем согласно (3.21)

$$\bar{A} = \frac{I\mu}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}}{R}.$$

Учитывая симметрию системы, нетрудно сообразить, что векторный потенциал имеет одну лишь азимутальную составляющую  $\bar{A} = \bar{\alpha}_0 A$ . Проекция элемента  $d\bar{l}$  на азимутальное направление в точке  $M$ , как видно из рис. 3.7, есть  $\cos\alpha \cdot dl$ .

Поэтому

$$\bar{A} = \bar{\alpha}_0 \frac{I\mu}{4\pi} \int_L \frac{\cos\alpha \cdot dl}{R}.$$

Далее видим, что

$$dl = a d\alpha \text{ и}$$

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \cos\alpha.$$

Следовательно,

$$\bar{A} = \bar{\alpha}_0 \frac{I\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos\alpha \cdot d\alpha}{(r^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \cos\alpha)^{1/2}}. \quad (3.29)$$

Полагая, что расстояние от центра витка  $r$  значительно превышает его радиус  $a$  ( $r \gg a$ ), раскрываем знаменатель подынтегрального выражения по формуле бинома Ньютона и ограничиваемся первыми членами:

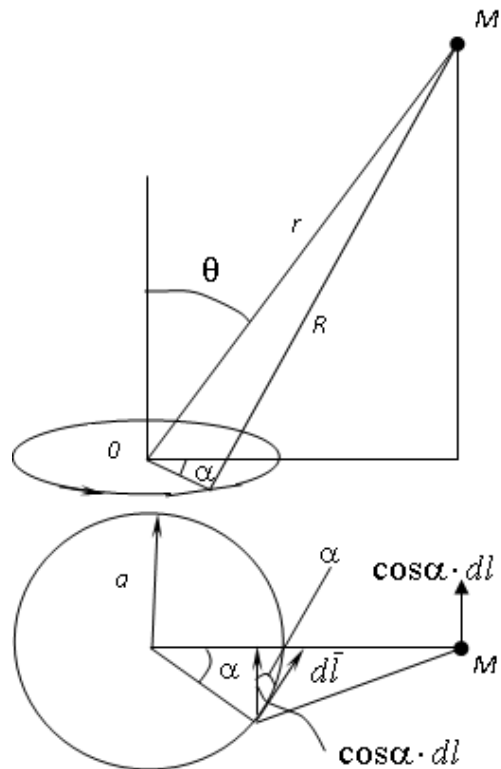


Рис. 3.7. К вопросу определения магнитного поля на большом расстоянии от круглого витка

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \alpha)^{-1/2} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \alpha + \dots \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Теперь нахождение векторного потенциала не представляет труда:

$$\bar{A} = \bar{\alpha}_0 \frac{I\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \alpha \right) \cos \alpha \cdot d\alpha = \bar{\alpha}_0 \frac{I\mu a^2}{4r^2} \sin \theta, \quad (3.30)$$

и напряженность магнитного поля определяется по формуле (3.17) в сферических координатах:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} = \frac{Ia^2}{4} \left[ \frac{\bar{r}_0}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r} \right) - \frac{\bar{\theta}_0}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r} \right) \right].$$

В результате получаем:

$$\bar{H} = \frac{Ia^2}{4r^3} (\bar{r}_0 2 \cos \theta + \bar{\theta}_0 \sin \theta). \quad (3.31)$$

Как показывает сравнение с формулой (2.21), магнитное поле витка по своему строению есть поле диполя. Виток ведет себя так, как если бы вместо него в точке 0 находился магнитный диполь, ориентированный по оси  $z$ . Переписывая (3.31) в форме (2.21), имеем:

$$\bar{H} = \frac{m}{4\pi\mu r^3} (\bar{r}_0 2 \cos \theta + \bar{\theta}_0 \sin \theta). \quad (3.31a)$$

Здесь величина  $m$ , подобно  $p$  в (2.21), представляет собой абсолютное значение момента диполя

$$\bar{m} = m \bar{z}_0.$$

Сопоставляя (3.31) и (3.31a), находим  $\bar{m}$ , т.е. не что иное, как магнитный момент витка:

$$\bar{m} = \bar{z}_0 I \mu \pi a^2 = \bar{z}_0 I \mu S, \quad (3.32)$$

где  $S$  — его площадь.

В последней форме выражение может быть использовано для плоского витка некруговой конфигурации.

### 3.5. Магнитная энергия постоянного тока

Из п.1.6.3 известно, что с магнитным полем связана энергия, распределенная в пространстве с плотностью

$$W_m = \frac{\mu \bar{H}^2}{2} = \frac{\bar{B} \bar{H}}{2}, \quad (3.33)$$

так как  $B = \mu H$ .

В некоторой области  $V$  она определяется интегралом

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{B} \bar{H} dV = \frac{1}{2} \int_V H \operatorname{rot} \bar{A} dV, \quad (3.34)$$

так как  $B = \operatorname{rot} \bar{A}$ .

Используя равенство  $\operatorname{div}[\bar{A}, \bar{H}] = \bar{H} \operatorname{rot} \bar{A} - \bar{A} \operatorname{rot} \bar{H}$ , получим

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \operatorname{rot} \bar{H} dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}[\bar{A}, \bar{H}] dV.$$

Преобразуем второе слагаемое по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div}[\bar{A}, \bar{H}] dV = \oint_S [\bar{A}, \bar{H}] d\bar{S}.$$

При учете всей энергии поля подынтегральное выражение устремляется к нулю, так как векторный потенциал и магнитное поле убывают быстрее, чем квадрат расстояния, а площадь увеличивается пропорционально ему.

Таким образом, с учетом того, что  $\vec{j} = \text{rot } \vec{H}$ , получаем

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \vec{j} dV. \quad (3.35)$$

### 3.6. Индуктивность и взаимная индуктивность

Определим энергию  $W_{\text{м}}$  линейного тока:

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \int_S \oint_l \vec{A} \vec{j} d\vec{l} d\vec{S}.$$

Так как  $\int_S \vec{j} d\vec{S} = I$ , получаем

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} \oint_L \vec{A} d\vec{l}. \quad (3.36)$$

Воспользуемся теоремой Стокса

$$\frac{I}{2} \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \frac{I}{2} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \frac{I}{2} \Phi,$$

где  $\Phi$  — поток магнитной индукции.

Поток магнитной индукции пропорционален току:

$$\Phi = LI,$$

где  $L$  — индуктивность контура.

Тогда

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}.$$

В случае  $n$  контуров  $L_i$  с токами  $I_i$  (рис. 3.8) вместо равенства (3.36) получаем





Причем ниже доказывается, что

$$M_{ik} = M_{ki}. \quad (3.41)$$

Первый член в правой части (3.40) соответствует собственной, а второй — взаимной энергии системы.

В частном случае двух контуров ( $n = 2$ )

$$W_M = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2) + M_{12} I_1 I_2. \quad (3.42)$$

Докажем равенство (3.41).

Взяв среди  $n$  контуров два произвольных ( $i$  и  $k$ ), запишем

$$\Phi_{ik} = M_{ik} I_k, \quad (3.43)$$

где  $\Phi_{ik}$  — магнитный поток, вызванный током контура  $L_k$  и проходящий через поверхность  $S_i$ , натянутую на контур  $L_i$ .

Выражая  $M_{ik}$ , записываем:

$$M_{ik} = \frac{1}{I_k} \oint_{L_i} \bar{A}_k d\bar{l}_i.$$

Но согласно (3.21)

$$\bar{A} = \frac{I\mu}{4\pi} \int_l \frac{d\bar{l}}{r},$$

следовательно, взаимная индуктивность

$$M_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\bar{l}_i d\bar{l}_k}{r}. \quad (3.44)$$

Формула симметрична относительно индексов  $i$  и  $k$ . Это значит, что совершенно такое же выражение будет получено и для взаимной индуктивности  $M_{ki}$ , определяемой равенством

$$\Phi_{ki} = M_{ki} I_i, \quad (3.45)$$

где  $\Phi_{ki}$  — магнитный поток, обусловленный током контура  $L_i$  и проходящий через поверхность, ограниченную контуром  $L_k$ .

Равенство (3.41) доказано.

Формула (3.44) дает возможность вычислять в конкретных случаях взаимные индуктивности по одному лишь взаимному расположению контуров.

В качестве примера определим внутреннюю индуктивность прямого провода радиуса  $R$ . Пусть по проводу протекает ток  $I$ .

Энергия и индуктивность связаны соотношением

$$L = \frac{2W_M}{I_0^2}. \quad (3.46)$$

Энергию, сосредоточенную в объеме  $dV$ , выразим через ее плотность:

$$dW_M = \frac{\mu H^2}{2} dV, \quad (3.47)$$

где в цилиндрической системе координат  $dV = r dr d\alpha dz$ .

Выражая напряженность магнитного поля из первого уравнения Максвелла и интегрируя (3.47) по объему цилиндра единичной длины, получим соотношение для энергии. Подставив его в (3.46), получим

$$L = \frac{\mu I_0}{8\pi^2 R^4} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 dz = \frac{\mu R^4 2\pi}{32\pi^2 R^4} = \frac{\mu}{8\pi}.$$

Это внутренняя индуктивность прямого провода. Заметим, что она не зависит от радиуса провода.

Определим теперь взаимную индуктивность двух витков, находящихся в одной плоскости (см. рис. 3.8).

Поток, создаваемый большим контуром, равен

$$\Phi_{12} = B_2 S_1 = \mu_0 \frac{I_2}{2R_2\pi} \pi R_1^2,$$

откуда

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2R_2\pi}.$$

Из выражения  $\Phi_{12} = M_{12}I_2$  находим

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2 R_2}.$$

## Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения для электрического поля в проводящей среде. Сопоставьте их с уравнениями электростатики.
2. Каким образом можно приспособить аналитические решения задач электростатики для решения задач в поле проводящей среды?
3. Запишите уравнения магнитостатики.
4. Получите уравнения магнитостатического поля из уравнений Максвелла.
5. С какой целью вводится векторный магнитный потенциал?
6. Запишите закон Био – Савара в интегральной и дифференциальной форме.

## 4. Общие свойства переменного электромагнитного поля

### 4.1. Монохроматическое поле, метод комплексных амплитуд

Для радиоэлектроники переменное электромагнитное поле представляет основной интерес. Мы будем изучать установившиеся процессы, которым свойственны гармонические во времени колебания. Тогда всякую изменяющуюся во времени скалярную величину можно записать в виде

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi)$$

и соответственно всякий вектор записывается как

$$\bar{A} = \bar{A}_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega$  — круговая частота гармонических колебаний;  $\varphi$  — фаза. Это величина, характеризующая состояние процесса в начальный момент времени.

Поля, изменяющиеся по гармоническому закону, называются монохроматическими. Для их исследования очень часто применяют хорошо известный из теории цепей метод комплексных амплитуд (МКА). Он также называется символическим методом.

МКА основан на применении формулы Эйлера. С учетом ее любую комплексную скалярную или векторную величину можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \psi_m (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)),$$

$$\dot{\bar{A}} = \bar{A}_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \bar{A}_m (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)).$$

Тогда

$$\psi = \operatorname{Re} \dot{\psi} \quad \text{и} \quad \bar{A} = \operatorname{Re} \dot{\bar{A}}.$$

Известно, что если решением дифференциального уравнения является комплексная величина, то решение включает действительную и мнимую части этой величины. Таким образом, получив

решение в виде комплексной величины, необходимо в конечном ответе взять только ее действительную часть.

Применение МКА во многих случаях помогает значительно упростить решение дифференциальных уравнений, так как дифференцирование комплекса по времени эквивалентно умножению на  $j\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{A} = j\omega \dot{A}.$$

Интегрирование сводится к делению на  $j\omega$ .

Представим комплексные величины в виде сомножителей:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \dot{A} = \dot{A}_m e^{j\omega t},$$

где  $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{j\varphi}$  и  $\dot{A}_m = \bar{A}_m e^{j\varphi}$  — комплексные амплитуды.

Применение понятия комплексной амплитуды позволяет во многих случаях избавляться от временной зависимости.

## 4.2. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Используя МКА, заменим в уравнениях Максвелла (1.1) и (1.2), записанных в дифференциальной форме, векторы поля комплексными представлениями:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t},$$

где  $\left. \begin{array}{l} \dot{\vec{E}}_m = \bar{E}_m e^{-jkz}, \\ \dot{\vec{H}}_m = \bar{H}_m e^{-jkz} \end{array} \right\}$  — комплексные амплитуды векторов поля.

Теперь можем записать:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \sigma \dot{\vec{E}} + \varepsilon \frac{d\dot{\vec{E}}}{dt} \Rightarrow \text{rot } \dot{\vec{H}} = \sigma \dot{\vec{E}} + j\omega \varepsilon \dot{\vec{E}}; \quad (4.1)$$

$$\text{rot } \dot{\vec{E}} = -\mu \frac{d\dot{\vec{H}}}{dt} \Rightarrow \text{rot } \dot{\vec{E}} = -j\mu\omega \dot{\vec{H}}. \quad (4.2)$$

Сократив на  $e^{j\omega t}$ , избавимся от временной зависимости и перейдем к комплексным амплитудам:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = j\omega \left( \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}}_m; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}_m. \quad (4.4)$$

В формуле (4.3)  $\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \dot{\varepsilon}$  — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Обозначим  $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$ , тогда  $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ .

Отношение  $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg} \Delta$  — тангенс угла диэлектрических по-

терь.

Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости характеризует ток проводимости и электрические потери в веществе: если потерями можно пренебречь, то  $\varepsilon'' = 0$ .

Аналогично получим:  $\dot{\mu} = \mu' - j\mu''$ ,  $\frac{\mu''}{\mu'} = \operatorname{tg} \Delta_m$  — потери на пе-

ремагничивание.

Уравнения Максвелла, таким образом, будут иметь вид:  
для комплексных векторов —

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \dot{\varepsilon} \dot{\vec{E}}, \quad (4.5a)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\mu} \dot{\vec{H}}; \quad (4.5b)$$

для комплексных амплитуд —

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = j\omega \dot{\varepsilon} \dot{\vec{E}}_m, \quad (4.6a)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \dot{\mu} \dot{\vec{H}}_m. \quad (4.6b)$$

Эти уравнения дополняются еще двумя:

$$\operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0; \quad (4.7)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) не вызывает сомнения, так как получено из  $\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0$ . А вот уравнение (4.7) требует доказательства. Приведем его:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \dot{\vec{j}} = -j\omega \dot{\rho}; \quad \dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \dot{\vec{j}};$$

$$\dot{\vec{j}} = \sigma \dot{\vec{E}};$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{j\omega} \operatorname{div} \dot{\vec{E}}; \quad \operatorname{div} \dot{\vec{D}} = \dot{\rho};$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \dot{\vec{E}} + \frac{\sigma}{j\omega} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0; \quad \left( \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0.$$

Так как выражение в скобках не может равняться нулю, следовательно,  $\operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0$ .

### 4.3. Волновые уравнения

Получим из уравнений Максвелла уравнения отдельно для  $\vec{E}$  и отдельно для  $\vec{H}$ . Из равенства (4.5б) выразим  $\vec{H}$  и подставим в (4.5а):

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega \mu} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}};$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}) = \omega^2 \varepsilon \mu \dot{\vec{E}};$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{\vec{E}}) - \nabla^2 \dot{\vec{E}} = \omega^2 \varepsilon \mu \dot{\vec{E}}.$$

Обозначим  $\omega^2 \varepsilon \mu = k^2$ , где  $k$  — волновое число.

Так как  $\operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0$ , то

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0. \quad (4.9)$$



Проведем аналогичные действия относительно вектора  $\dot{\vec{H}}$ :

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0. \quad (4.10)$$

Выражения (4.9) и (4.10) — это уравнения Гельмгольца.

Для комплексных амплитуд они выглядят следующим образом:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0; \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (4.12)$$

## 4.4. Средний баланс энергии электромагнитного поля

### 4.4.1. Среднее значение характеристик поля

Поскольку гармонические колебания электромагнитных полей, представляющие интерес для радиоэлектроники, являются быстро-переменными, обычно имеют дело с их усредненными во времени энергетическими характеристиками.

Переходя к комплексным величинам, необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$\operatorname{Re}(\dot{a}, \dot{b}) \neq \operatorname{Re}(\dot{a}) \cdot \operatorname{Re}(\dot{b});$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{A}^*),$$

где  $\dot{A}^*$  — комплексно-сопряженная величина.

Соответственно энергия магнитного и электрического полей и вектор Пойнтинга определяются по формулам:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{8} \mu (\dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^*)^2; \quad (4.13)$$

$$\omega_э = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{8} \varepsilon (\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^*)^2; \quad (4.14)$$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{4} \left[ \left( \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^* \right) \cdot \left( \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^* \right) \right]. \quad (4.15)$$

Понятия «среднее» и «среднее за период» у гармонических сигналов совпадают. Найдем среднее значение вектора Пойнтинга:

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |\bar{\Pi}| dt. \quad (4.16)$$

С учетом равенства (4.15)

$$|\bar{\Pi}| = \left| \frac{1}{4} \left( \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}^* + \dot{\vec{E}}^* \cdot \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{E}}^* \cdot \dot{\vec{H}}^* \right) \right| \cdot \sin \left( \widehat{\vec{E}, \vec{H}} \right). \quad (4.17)$$

Комплексные векторы поля задаются в виде

$$\dot{\vec{E}} = \bar{E}_m e^{j(\omega t + \varphi_E)}, \quad (4.18)$$

$$\dot{\vec{H}} = \bar{H}_m e^{j(\omega t + \varphi_H)}. \quad (4.19)$$

Подставим соотношения (4.18) и (4.19) в формулу (4.17) и затем в (4.16). Рассмотрим каждый из четырех получившихся интегралов в отдельности:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left| \dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}} \right| dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_m H_m e^{j\omega t} e^{j(\varphi_E + \varphi_H)} dt = 0.$$

Равенство нулю этого интеграла обусловлено наличием аргумента с удвоенной частотой. Аналогично обратится в ноль интеграл, содержащий произведение двух комплексно-сопряженных величин:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{\vec{E}}^* \dot{\vec{H}}^* dt = 0.$$

Третье и четвертое слагаемые в подынтегральном выражении (4.16) освобождаются от временной зависимости:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_m H_m e^{j(\bar{\varphi}_E + \bar{\varphi}_H)} dt = E_m H_m e^{j(\bar{\varphi}_E + \bar{\varphi}_H)}; \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{\vec{E}}^* \dot{\vec{H}} dt = E_m H_m e^{-j(\bar{\varphi}_E + \bar{\varphi}_H)}. \quad (4.21)$$

Таким образом, среднее значение вектора Пойнтинга определяется выражением

$$|\bar{\Pi}_{\text{cp}}| = \frac{1}{4} E_m H_m \left( e^{j(\varphi_E - \varphi_H)} + e^{-j(\varphi_E - \varphi_H)} \right) \cdot \sin \left( \widehat{\vec{E}}, \vec{H} \right).$$

С учетом формулы Эйлера

$$\begin{aligned} |\bar{\Pi}_{\text{cp}}| &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m \right] \cos(\varphi_E - \varphi_H); \\ |\bar{\Pi}_{\text{cp}}| &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Чтобы найти среднее значение вектора Пойнтинга, нужно определить реальную часть комплексного вектора Пойнтинга.

Аналогично находится среднее значение плотности энергии магнитного поля:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{м.ср}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \omega_{\text{м}} dt = \frac{1}{8T} \int_0^T \mu \left( \dot{\vec{H}}^2 + \dot{\vec{H}}^{*2} + 2\dot{\vec{H}}\dot{\vec{H}}^* \right) dt, \\ \omega_{\text{м.ср}} &= \frac{1}{4} \mu H_m^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Среднее значение плотности энергии электрического поля

$$\omega_{\text{э.ср}} = \frac{1}{4} \varepsilon E_m^2. \quad (4.24)$$

Определим среднее значение плотности мощности электромагнитного поля:

$$\dot{p}_{\text{ср}} = \operatorname{Re} \dot{p}, \quad (4.25)$$

где  $\dot{p} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \dot{\vec{E}}^* \sigma = \frac{\sigma}{2} E_m^2$ .

Сторонняя плотность мощности, как правило, имеет комплексный характер, так как ток и напряженность стороннего источника отличаются по фазе.

#### 4.4.2. Средний баланс энергии

Будем исходить из комплексной формы уравнений Максвелла (4.1), (4.2), записывая первое из них комплексно-сопряженным:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^* &= -j\omega \varepsilon^* \dot{\vec{E}}_m^* + \dot{\vec{j}}_{\text{ст.т}}^*, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -j\omega \mu \dot{\vec{H}}_m.\end{aligned}$$

Все члены первой строчки умножим на  $\dot{\vec{E}}_m$ , а второй — на  $\dot{\vec{H}}_m^*$ . Произведем вычитание соответственных частей и применим тождество

$$\operatorname{div} \left[ \dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] = \dot{\vec{H}}_m^* \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m - \dot{\vec{E}}_m \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^*.$$

Отсюда

$$\operatorname{div} \dot{\vec{\Pi}} = j \frac{\omega}{2} \left( \varepsilon^* \dot{\vec{E}}_m^* \dot{\vec{E}}_m - \mu' \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right) - \dot{p}_{\text{ст.т}}. \quad (4.26)$$

Внесем в (4.26) представления комплексных проницаемостей. Разделение вещественной и мнимой частей дает:

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{Re} \dot{\vec{\Pi}} &= -\frac{\omega}{2} \left( \varepsilon'' \dot{\vec{E}}_m^* \dot{\vec{E}}_m + \mu'' \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right) - \operatorname{Re} \dot{p}_{\text{ст.т}}; \\ \operatorname{div} \operatorname{Im} \dot{\vec{\Pi}} &= \frac{\omega}{2} \left( \varepsilon' \dot{\vec{E}}_m^* \dot{\vec{E}}_m - \mu' \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right) - \operatorname{Im} \dot{p}_{\text{ст.т}}.\end{aligned}\right\} \quad (4.27)$$

(В (4.27) учтено, что в результате комплексного сопряжения изменился знак при  $\varepsilon''$ .) Удобно сначала произвести интегрирование по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , и перейти к следующим соответствиям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \oint_S \dot{\Pi} ds &= -\frac{\omega}{2} \int_V \left( \varepsilon'' \dot{E}_m^* \dot{E}_m + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^* \right) dv - \operatorname{Re} \dot{P}_{\text{ст}m}; \\ \operatorname{Im} \oint_S \dot{\Pi} ds &= \frac{\omega}{2} \int_V \left( \varepsilon'' \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^* \right) dv - \operatorname{Im} \dot{P}_{\text{ст}m}, \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где  $\dot{P}_{\text{ст}m} = \int_V \dot{p}_{\text{ст}m} dv$  — интеграл, выражающий комплексную мощность источников электромагнитного поля.

Обсудим смысл первого из полученных равенств. В левой части — вещественная часть комплексного потока энергии. Последний член справа дает среднюю мощность источников. Легко видеть, что рассматриваемое равенство есть не что иное, как уравнение среднего баланса энергии при гармонических колебаниях.

Пусть источники в среднем отдают энергию полю. Если проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  вещественны ( $\varepsilon'' = 0$ ,  $\mu'' = 0$ ), то объемный интеграл в (4.28) исчезает. При этом в среднем вся мощность источников идет на излучение. Если же  $\varepsilon'' > 0$ ,  $\mu'' > 0$ , то положителен и объемный интеграл, а следовательно, средняя мощность излучения уменьшится на его величину. В случае когда область  $V$  энергетически изолирована, мощность источников полностью «гасится» объемным интегралом. Из этих рассуждений следует, что объемный интеграл в (4.28), взятый без знака минус, выражает среднюю мощность потерь в объеме  $V$ .

Полученный результат проясняет смысл мнимых частей  $\varepsilon''$  и  $\mu''$  комплексных проницаемостей  $\varepsilon$  и  $\mu$ . При  $\varepsilon'' = 0$  и  $\mu'' = 0$ , т.е. когда  $\varepsilon$  и  $\mu$  вещественны, среда не является поглощающей. Потери энергии существуют только при  $\varepsilon'' > 0$  и (или)  $\mu'' > 0$ . Эти, как говорят, электрические и магнитные потери происходят в результате преобразования энергии поля в какие-то иные формы. В особых случаях (активные среды) фигурируют отрицательные  $\varepsilon''$  и  $\mu''$ .

## 4.5. Теорема единственности для монохроматического электромагнитного поля

### 4.5.1. О единственности решений

Решения уравнений Максвелла, как и других уравнений в частных производных, принадлежат весьма широкому классу. Нахождение того или иного решения уравнений (4.5), (4.6) еще не означает, что получено электромагнитное поле, которому можно приписать определенное физическое содержание.

Поставим целью выяснить, при каких условиях система уравнений (4.5), (4.6) имеет некоторое единственное решение для  $\dot{E}_m, \dot{H}_m$ . Очевидно, что такие условия однозначно формализуют причину существования поля: единственное решение обладает физической определенностью.

### 4.5.2. Внутренняя задача

Докажем теорему единственности для внутренней задачи. В этом случае область пространства  $V$ , в которой ищется решение, ограничена поверхностью  $S$  (рис. 4.1).

Тогда задача имеет единственное решение:

– если в каждой точке области  $V$  среда обладает потерями ( $\sigma \neq 0$ );

– в области  $V$  заданы сторонние токи;

– заданы тангенциальные составляющие электрического или магнитного поля на границе. Это либо  $E_\tau$ , что соответствует  $E$ -задаче, либо  $H_\tau$  —  $H$ -задача.

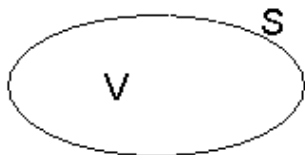


Рис. 4.1. К доказательству теоремы единственности (внутренняя задача)

Теорему доказываем методом от противного.

Пусть в произвольной точке  $M$  внутри области  $V$  существуют поля  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  и  $\bar{H}_1, \bar{H}_2$ , одновременно удовлетворяющие уравнениям Максвелла.

Сформируем разностное решение для их комплексных аналогов:

$$\Delta \dot{\bar{E}} = \dot{\bar{E}}_1 - \dot{\bar{E}}_2, \quad \Delta \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_1 - \dot{\bar{H}}_2.$$

Запишем уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \dot{\bar{H}}_1 = j\omega \dot{\bar{E}}_1 + \dot{j}_{\text{ст}1};$$

$$\text{rot } \dot{\bar{H}}_2 = j\omega \dot{\bar{E}}_2 + \dot{j}_{\text{ст}2},$$

где  $\dot{j}_{\text{ст}1} = \dot{j}_{\text{ст}2}$ , так как на основании условий теоремы единственности сторонние токи заданы.

Значит:

$$\text{rot } \Delta \dot{\bar{H}} = j\omega \Delta \dot{\bar{E}};$$

$$\text{rot } \dot{\bar{E}}_1 = -j\omega \dot{\mu} \dot{\bar{H}}_1;$$

$$\text{rot } \dot{\bar{E}}_2 = -j\omega \dot{\mu} \dot{\bar{H}}_2;$$

$$\text{rot } \Delta \dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\mu} \Delta \dot{\bar{H}}.$$

Разностные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла и не имеют источников.

Составим уравнения баланса:

$$\text{Re} \oint_S \Delta \dot{\bar{\Pi}} d\bar{s} = P_{\text{п}}; \quad \text{Re} \oint_S \left[ \Delta \dot{\bar{E}}, \Delta \dot{\bar{H}} \right] d\bar{s} = P_{\text{п}},$$

где  $P_{\text{п}}$  — мощность потерь в объеме.

На поверхности  $S$

$$\Delta H_{\tau} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta E_{\tau} = 0$$

для  $H$ -задачи и  $E$ -задачи соответственно, значит, на всей границе  $S$  равна нулю нормальная составляющая векторного произведения

$[\Delta\dot{\vec{E}}, \Delta\dot{\vec{H}}]$ . Следовательно, равны нулю потери внутри объема, то есть

$$P_{\text{п}} = \frac{1}{2} \int \sigma \Delta E^2 dv = 0. \quad (4.29)$$

Так как  $\sigma \neq 0$ , то  $\Delta E = 0$ . Не может быть двух значений вектора напряженности электрического поля в одной точке. Поскольку электрическое и магнитное поля связаны друг с другом, то не может быть двух значений и магнитного поля. Теорема доказана.

### 4.5.3. Внешняя задача

Теперь исследуем область  $V'$ , находящуюся за пределами области  $V$  (рис. 4.2). Единственность решения задачи требует двух дополнительных условий:

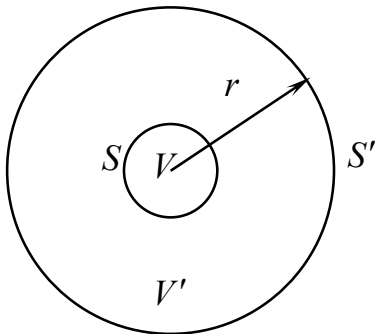


Рис. 4.2. К доказательству теоремы единственности (внешняя задача)

- все источники должны находиться на конечном расстоянии от области  $V$ ;
- поле должно убывать быстрее, чем  $1/r$ , то есть среда должна обладать хотя бы малой способностью поглощать энергию.

Доказательство, как и в предыдущем случае, ведем методом от противного. Пусть существуют поля  $\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{E}}_2$  и  $\dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{H}}_2$ .

Окружаем исследуемую область сферической поверхностью  $S'$  и ее радиус устремляем в бесконечность. Запишем уравнение баланса для области  $V'$ :

$$P_{\text{п}} = \text{Re} \oint_S [\Delta\dot{\vec{E}}, \Delta\dot{\vec{H}}] d\vec{s} + \text{Re} \oint_{S'} [\Delta\dot{\vec{E}}, \Delta\dot{\vec{H}}] d\vec{s}.$$

Поток через поверхность  $S$ , как уже доказано, равен нулю.



При  $r \rightarrow \infty$  все источники, сосредоточенные вблизи области  $V$ , можно считать точечными, значит, поле на поверхности сферы  $S'$  можно считать постоянным, тогда

$$P_{\Pi} = \operatorname{Re} \left[ \Delta \dot{\vec{E}}, \Delta \dot{\vec{H}} \right] 4\pi r^2.$$

Так как по условию произведение  $\left[ \Delta \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right]$  убывает быстрее, чем  $1/r^2$ , при  $r \rightarrow \infty$   $P_{\Pi} \rightarrow 0$ . Учитывая, что уравнение (4.29) справедливо и для объема  $V'$ , при  $\sigma \neq 0$  мы вынуждены обнулить разностное поле  $\Delta \vec{E}$ .

Из уравнений Максвелла следует, что если  $\Delta \vec{E} = 0$ , то и  $\Delta \vec{H} = 0$ .

Теорема доказана.

Единственность решения внешней задачи (а следовательно, и его физическая определенность) установлена только в классе быстро убывающих переменных полей.

## 4.6. Теорема взаимности

### 4.6.1. Лемма Лоренца

Для доказательства теоремы взаимности нам придется выполнить предварительное доказательство, называемое леммой Лоренца.

Пусть в исследуемой среде имеются две группы источников: одна группа сосредоточена в пространстве  $V_1$ , вторая — в  $V_2$ .

Запишем уравнения Максвелла для каждой группы источников и умножим уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1 = j\omega \varepsilon \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{j}}_{\text{ст}1} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}_2 \end{cases} \cdot \begin{cases} \dot{\vec{E}}_2 \\ \dot{\vec{H}}_1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 = j\omega \varepsilon \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_{\text{ст}2} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_1 = -j\omega \mu \dot{\vec{H}}_1 \end{cases} \cdot \begin{cases} \dot{\vec{E}}_1 \\ \dot{\vec{H}}_2 \end{cases}.$$

Проведем попарное вычитание:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 &= j\omega \dot{\vec{E}}_2 \varepsilon \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{j}}_{\text{ст}1} + j\omega \dot{\vec{H}}_1 \mu \dot{\vec{H}}_2; \\ \dot{\vec{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_1 &= j\omega \dot{\vec{E}}_1 \varepsilon \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{j}}_{\text{ст}2} + j\omega \dot{\vec{H}}_2 \mu \dot{\vec{H}}_1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Применим к левой части известное векторное тождество:

$$\operatorname{div} \left[ \dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{E}}_2 \right] = j\omega \dot{\vec{E}}_2 \varepsilon \dot{\vec{E}}_1 + j\omega \dot{\vec{H}}_1 \mu \dot{\vec{H}}_2 + \dot{\vec{E}}_2 \dot{j}_{\text{ст}1}; \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div} \left[ \dot{\vec{H}}_2, \dot{\vec{E}}_1 \right] = -j\omega \dot{\vec{E}}_1 \varepsilon \dot{\vec{E}}_2 - j\omega \dot{\vec{H}}_1 \mu \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{E}}_1 \dot{j}_{\text{ст}2}. \quad (4.32)$$

Предположим, что среда изотропна, тогда  $\varepsilon$  и  $\mu$  — скаляры, то есть

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_2 \varepsilon \dot{\vec{E}}_1 &= \dot{\vec{E}}_1 \varepsilon \dot{\vec{E}}_2; \\ \dot{\vec{H}}_2 \mu \dot{\vec{H}}_1 &= \dot{\vec{H}}_1 \mu \dot{\vec{H}}_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Вычтем (4.32) из (4.31):

$$\operatorname{div} \left[ \dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{E}}_2 \right] - \operatorname{div} \left[ \dot{\vec{H}}_2, \dot{\vec{E}}_1 \right] = \dot{\vec{E}}_2 \cdot \dot{j}_{\text{ст}1} - \dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{j}_{\text{ст}2}. \quad (4.34)$$

Выражение (4.34) является дифференциальной формулировкой леммы Лоренца. Проинтегрируем его по объему  $V$ , включающему объемы  $V_1$  и  $V_2$ . К левой части применим теорему Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \left\{ \left[ \dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{E}}_2 \right] - \left[ \dot{\vec{H}}_2, \dot{\vec{E}}_1 \right] \right\} d\vec{s} = \int_V \dot{\vec{E}}_2 \dot{j}_{\text{ст}1} dv - \int_V \dot{\vec{E}}_1 \dot{j}_{\text{ст}2} dv. \quad (4.35)$$

Выражение (4.35) — это интегральная формулировка леммы Лоренца.

#### 4.6.2. Доказательство теоремы взаимности

Для доказательства теоремы взаимности распространим в соотношении (4.35) интегрирование на бесконечность:  $r \rightarrow \infty$ . Учтем, что  $|\vec{E}|$ ,  $|\vec{H}|$  убывают быстрее, чем  $E_0/r$  и  $H_0/r$ .

При  $r \rightarrow \infty$  поверхностный интеграл обращается в ноль (на основании теоремы единственности для внешних задач). Учтем также, что источники сосредоточены каждый в своей области. Тогда мы сразу можем записать выражение для теоремы взаимности:

$$\int_{V_1} \bar{E}_2 \cdot \bar{j}_{\text{ст}1} dV = \int_{V_2} \bar{E}_1 \cdot \bar{j}_{\text{ст}2} dV. \quad (4.36)$$

Полученный результат выражает принцип взаимности для двух распределений сторонних токов, двух источников. Примечательна симметрия соотношения (4.36), совершенно не зависящая от характера среды, которая лишь предполагалась изотропной.

Положим, что вся среда линейна. Это значит, что выражение (4.36) справедливо при одновременном существовании обоих источников.

Можно ввести полные токи первой и второй областей  $\dot{I}_{\text{ст}1}$  и  $\dot{I}_{\text{ст}2}$ , определенным образом договорившись, через какие сечения вычисляются потоки векторов плотностей сторонних токов. Введем величины

$$\dot{U}_{12} = \frac{1}{\dot{I}_{\text{ст}1}} \int_{V_1} \dot{j}_{\text{ст}1} \dot{E}_2 dv, \quad (4.37)$$

$$\dot{U}_{21} = \frac{1}{\dot{I}_{\text{ст}2}} \int_{V_2} \dot{j}_{\text{ст}2} \dot{E}_1 dv,$$

которые можно рассматривать как комплексные амплитуды наводимых ЭДС ( $U_{12}$  наводится в объеме  $V_1$  током, локализованным в объеме  $V_2$ ; соответственный смысл имеет  $U_{21}$ ). Тогда (4.36) можно переписать в виде  $\dot{I}_{\text{ст}1} \dot{U}_{12} = \dot{I}_{\text{ст}2} \dot{U}_{21}$ . Разделим обе части на  $\dot{I}_{\text{ст}1} \dot{I}_{\text{ст}2}$ , это дает

$$\dot{U}_{12} / \dot{I}_{\text{ст}2} = \dot{U}_{21} / \dot{I}_{\text{ст}1}. \quad (4.38)$$

В данной трактовке соотношение (4.38) выступает как равенство взаимных сопротивлений  $Z_{12}$  и  $Z_{21}$  рассматриваемых источников.

### 4.6.3. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла. Магнитные токи

Рассматривая уравнения Максвелла в комплексной форме (4.5), (4.6) при отсутствии источников, легко заметить, что замена

$$\varepsilon \leftrightarrow -\mu, \dot{\vec{E}}_m \leftrightarrow \dot{\vec{H}}_m \quad (4.39)$$

сохраняет эту систему уравнений, причем первое уравнение переходит во второе, а второе — в первое.

Отмеченный факт имеет следующее значение. Существуют электродинамические задачи, в которых векторы  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  меняются ролями. Положим, что одна из таких «парных» задач решена, так что имеются формулы, выражающие векторы  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$ . Тогда для получения решения второй задачи из этой же пары достаточно в готовых формулах сделать замену (4.39). Говорят, что решение в этом случае получено путем применения принципа двойственности.

Чтобы распространить принцип двойственности на уравнения Максвелла при наличии источников, необходимо в дополнение к уравнениям (4.5), (4.6) построить некоторые модифицированные. Сопоставим те и другие уравнения:

Э	М
$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{J}}_{стм}$	$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon \dot{\vec{E}}_m$
$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}_m$	$\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu \dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{J}}_{мм}$

В левом столбце (Э) записана известная нам система уравнений электродинамики, а в правом (М) — модифицированная система, физическое содержание которой мы сейчас обсудим. Но сначала надо отметить, что одна система переходит в другую (Э → М), если в дополнение к условию (4.39) выполнить условие:

$$\dot{\vec{J}}_{стм} \leftrightarrow -\dot{\vec{J}}_{мм}. \quad (4.40)$$

Что же представляет собой система уравнений М? Это уравнения Максвелла с необычно заданными источниками. Появившаяся

в правой части второго уравнения функция  $\dot{j}_{Mm}$  есть магнитный аналог величины  $\dot{j}_{стm}$ . Это комплексная амплитуда плотности магнитного тока.

В природе, как полагают при формулировании основных уравнений теории электромагнетизма, магнитные заряды отсутствуют. Не может быть, следовательно, и магнитных токов. Но это не мешает вводить такие объекты формально — с единственной целью облегчить исследование вполне реальных объектов.

Итак, посредством замен (4.39) и (4.40) мы переводим уравнения Максвелла с обычными электрическими источниками в уравнения с условными магнитными источниками (либо действуем в обратном порядке). Существенно, что эта замена может производиться в формулах, выражающих готовые решения задач. Такие операции мы и будем производить.

## Контрольные вопросы

1. На чем основано применение метода комплексных амплитуд к уравнениям Максвелла?
2. Что позволяет определить метод комплексных амплитуд применительно к вектору Пойнтинга, плотностям энергии электрического и магнитного полей?
3. Какой физический смысл имеют вещественные и мнимые части  $\dot{\epsilon}$  и  $\dot{\mu}$  ?
4. Почему уравнения Гельмгольца называют также волновыми?
5. Исходя из уравнения среднего баланса энергии, объясните, на что расходуются активная и реактивная мощности источников электромагнитного поля.
6. Сформулируйте внутреннюю и внешнюю задачи теоремы единственности. Какую роль при ее доказательстве играет проводимость среды?
7. Сформулируйте лемму Лоренца и теорему взаимности. При каком условии они несправедливы?

8. Сравните формулировки теоремы взаимности в электродинамике и в теории цепей. Идет ли речь об одной и той же теореме?

9. Каков смысл введения в уравнения Максвелла магнитных зарядов и токов?

## 5. Плоские электромагнитные волны в изотропных неограниченных средах

### 5.1. Волновой характер электромагнитного поля

Перед изучением электромагнитных волн обсудим содержание понятий «волна», «волновой процесс», получивших широкое распространение в физике и технике. Прообразом здесь служат всем известные волны, возникающие на поверхности воды. Существенно то, что при движении, распространении всякой волны среда постепенно вовлекается в некоторый физический процесс, в результате чего происходит передача энергии в пространстве.

Таким образом, электромагнитное поле, возникшее в некоторой области пространства, не заполняет его мгновенно, а распространяется с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. Волновой характер распространения описывается уравнениями Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0. \quad (5.1)$$

Важной характеристикой волнового процесса является вид фронта волны. Фронт волны — это поверхность равных фаз. Он может иметь различную форму. Например, если источник волны точечный, то ее фронт представляет сферическую поверхность и волна называется сферической.

### 5.2. Плоские волны в средах без потерь

Плоская волна — это волна, фронт которой представляет собой плоскость. Рассмотрим, в каком случае может возникнуть плоская волна.

Предположим, что в точке  $O$  находится точечный источник (рис. 5.1). Плоскость  $P$  перпендикулярна оси  $Oz$ , точки  $M_1$ ,  $M_2$  лежат в плоскости  $P$ . Предположим, что источник  $O$  так далеко от плоскости  $P$ , что  $OM_1 \parallel OM_2$ . Это означает, что все точки в

плоскости  $P$  равноправны. То есть при перемещении в плоскости  $P$  не происходит изменение состояния процесса.

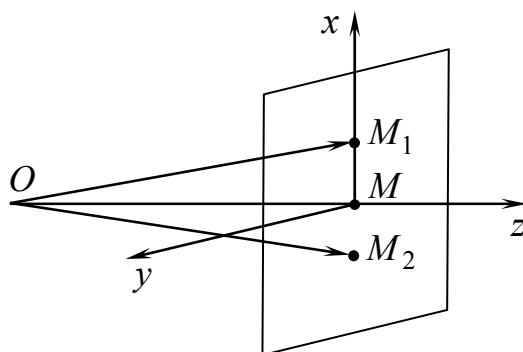


Рис. 5.1. Распространение плоской волны

Так как состояние процесса во всех точках плоскости одинаково, то эту плоскость можно назвать фронтом волны. В этой плоскости при перемещении в перпендикулярном оси  $z$  направлении не происходит никаких изменений. Математически это означает следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (5.2)$$

Такое приближение называется приближением плоской волны. В этом случае трехмерные уравнения (5.1) преобразуются в одномерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m &= 0; \\ \frac{d^2 \dot{\vec{H}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{H}}_m &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Решение подобного рода волновых уравнений хорошо известно и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \bar{e}_0 \left( A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)} \right); \\ \dot{\vec{H}} &= \bar{h}_0 \left( C e^{j(\omega t - kz)} + D e^{j(\omega t + kz)} \right). \end{aligned}$$



В этих уравнениях  $\bar{e}_0, \bar{h}_0$  — орты, показывающие направление векторов электрического и магнитного полей соответственно;  $A, B, C$  и  $D$  — вещественные константы. Переходя от комплексных векторов к их реальным частям, получим:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \text{Re } \dot{\bar{E}} = \bar{e}_0 (A \cos(\omega t - kz) + B \cos(\omega t + kz)); \\ \bar{H} &= \text{Re } \dot{\bar{H}} = \bar{h}_0 (C \cos(\omega t - kz) + D \cos(\omega t + kz)).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Исследуем решения (5.4). Рассмотрим первое слагаемое в первом уравнении (5.4).

Обратим внимание на то, что мы получили решение, описывающее волновой процесс. На рис. 5.2 показано распределение амплитуд электрического поля в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$ .

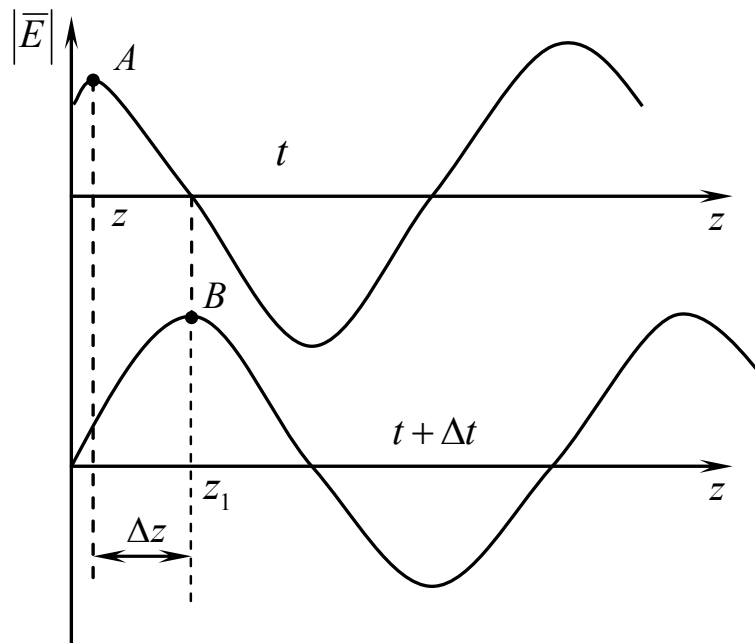


Рис. 5.2. Распределение в пространстве амплитуд электрического поля в различные моменты времени

Точки  $A$  и  $B$  соответствуют максимумам амплитуды поля. Положение максимума сместилось за время  $\Delta t$  на расстояние  $\Delta z$ . Следовательно,  $A \cos(\omega t - kz) = A \cos(\omega t + \omega \Delta t - kz - k \Delta z)$ .

Равенство значений функций обеспечивается равенством аргументов:  $\omega \Delta t = k \Delta z$ .

Отношение  $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v_{\phi}$  называется фазовой скоростью и показывает скорость распространения волнового фронта электромагнитной волны.

Для вакуума фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Подставив значения констант, получим:

$$v_{\phi}^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36} \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Это означает, что в вакууме скорость распространения электромагнитной волны равна скорости света.

Второе слагаемое в первом уравнении (5.4) является вторым частным решением и дает отрицательное значение скорости. Оно соответствует волне, распространяющейся к источнику.

Определим расстояние  $\lambda$  между точками поля с фазами, отличающимися на 360 градусов. Это расстояние называется длиной волны. Так как амплитуда волны на расстоянии длины волны и с изменением фазы на 360 градусов не изменяется, можем записать

$$\cos(\omega t - kz) = \cos(\omega t - k(z + \lambda) + 2\pi).$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{v_{\phi}}{f}. \quad (5.5)$$

Длина волны в вакууме

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad (5.6)$$

где  $c$  — скорость электромагнитной волны в вакууме (скорость света).

Фазовая скорость в остальных средах  $\mathfrak{V}_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$  и соответственно длина волны  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ .

Как следует из формулы для фазовой скорости, она не зависит от частоты, значит, вакуум — среда не дисперсионная.

Установим связь между направлениями векторов электрического и магнитного полей. Начнем с уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= j\omega\epsilon\dot{\vec{E}}; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -j\omega\mu\dot{\vec{H}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Заменяем векторные уравнения скалярными, т.е. приравниваем проекции векторов в (5.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon\dot{E}_x; & \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu\dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon\dot{E}_y; & \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega\mu\dot{H}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon\dot{E}_z; & \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega\mu\dot{H}_z. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Учтем в системе (5.8), что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -jk,$$

тогда

$$\begin{aligned} k\dot{H}_y &= \omega\epsilon\dot{E}_x; & k\dot{E}_y &= -\omega\mu\dot{H}_x; \\ k\dot{H}_x &= -\omega\epsilon\dot{E}_y; & k\dot{E}_x &= \omega\mu\dot{H}_y; \\ \dot{E}_z &= 0; & \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из выражений (5.9) видно, что у плоских волн нет продольных составляющих, так как  $E_z, H_z = 0$ .

Составим скалярное произведение  $(\bar{E}, \bar{H})$ , выразив  $E_x$  и  $E_y$  из соотношений (5.9):

$$\dot{E}_x = \frac{k}{\omega\varepsilon} \dot{H}_y; \quad \dot{E}_y = -\frac{k}{\omega\varepsilon} \dot{H}_x;$$

$$(\bar{E}, \bar{H}) = (E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y) = \frac{k}{\omega\varepsilon} H_x H_y - \frac{k}{\omega\varepsilon} H_x H_y = 0.$$

Так как скалярное произведение векторов равно нулю, векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  в плоской волне перпендикулярны друг другу. Поскольку у них нет продольных составляющих, то  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  перпендикулярны направлению распространения волны. Найдем отношение амплитуд векторов электрического и магнитного полей.

Будем предполагать, что вектор  $\bar{E}$  направлен вдоль оси  $x$ . Соответственно  $E_y = 0$ ,  $H_x = 0$ .

Из (5.9) следует:

$$E_x = \frac{k}{\omega\varepsilon} H_y; \quad H_y = \frac{k}{\omega\mu} E_x.$$

Отсюда

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{k}{\omega\varepsilon} = Z_B, \tag{5.10}$$

где  $Z_B$  — волновое сопротивление среды с макроскопическими параметрами  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

Величина  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$  называется волновым сопротивлением вакуума. Оно равно 377 Ом. С большой степенью точности эту величину можно считать волновым сопротивлением сухого воздуха.

На основе анализа решения волновых уравнений можно сделать следующие выводы.

1. В вакууме плоские волны распространяются со скоростью света, в остальных диэлектрических средах их скорость меньше в  $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  раз.

2. Векторы электрического и магнитного полей не имеют продольных составляющих и перпендикулярны друг другу.

3. Отношение амплитуд электрического и магнитного полей равно волновому сопротивлению среды, в которой происходит распространение электромагнитных волн.

### 5.3. Поляризация электромагнитных волн

Если в любой момент времени в любой точке пространства можно определить положение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , то говорят, что излучение поляризованное. Рассмотренная выше плоская волна — линейно поляризованная. Плоскость, проходящая через вектор  $\vec{E}$  и направление распространения, называется плоскостью поляризации. Линейная поляризация не единственно возможная.

Рассмотрим другие виды поляризации в режиме гармонических колебаний. Будем считать, что существуют одновременно две волны одной частоты. Векторы напряженности электрического поля у них взаимно перпендикулярны. Волновые процессы имеют произвольный фазовый сдвиг:

$$\vec{E}_1 = \bar{x}_0 E_{01} \cos(\omega t - kz); \quad (5.11)$$

$$\vec{E}_2 = \bar{y}_0 E_{02} \cos(\omega t - kz - \varphi). \quad (5.12)$$

Общее поле определяется суперпозицией заданных полей.

В плоскости  $z = 0$  :

$$\vec{E}_1 = \bar{x}_0 E_{01} \cos(\omega t); \quad (5.13)$$

$$\vec{E}_2 = \bar{y}_0 E_{02} \cos(\omega t - \varphi). \quad (5.14)$$

Векторы каждого из полей имеют только по одной проекции:

$$\vec{E}_1 = \bar{x}_0 E_x; \quad (5.15)$$

$$\vec{E}_2 = \bar{y}_0 E_y. \quad (5.16)$$

Освободимся от временной зависимости. Для этого из (5.13) с учетом (5.15) получим

$$\frac{E_x}{E_{01}} = \cos \omega t; \quad (5.17)$$

из (5.14) и (5.16) —

$$\frac{E_y}{E_{02}} = \cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \omega t \cdot \sin \varphi; \quad (5.18)$$

далее из (5.19) —

$$\sin \omega t = \frac{\frac{E_y}{E_{02}} - \frac{E_x}{E_{01}} \cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (5.19)$$

Возведем (5.17) и (5.19) в квадрат и сложим:

$$\left(\frac{E_x}{E_{01}}\right)^2 \sin^2 \varphi + \left(\frac{E_y}{E_{02}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{01}}\right)^2 \cos^2 \varphi - 2\left(\frac{E_x}{E_{01}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{02}}\right) \cos \varphi = \sin^2 \varphi;$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{02}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{01}} \cdot \frac{E_y}{E_{02}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса (рис. 5.3). Таким образом, траекторией конца вектора  $\vec{E}$  в плоскости  $z = \text{const}$  является эллипс.

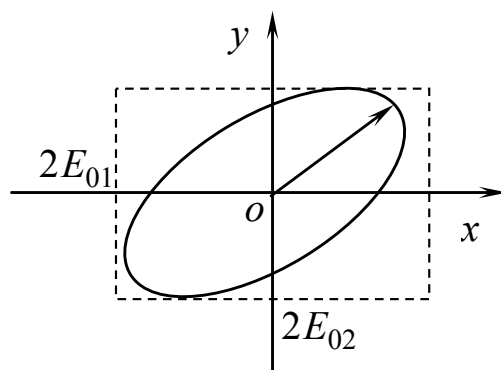


Рис. 5.3. К определению волны с эллиптической поляризацией

Рассмотрим некоторые частные случаи.

$$1. \quad \varphi = 0: \quad \frac{E_x}{E_{01}} = \frac{E_y}{E_{02}} \Rightarrow E_x = \frac{E_{01}}{E_{02}} E_y \quad \text{— линейная поляризация}$$

(рис. 5.4,а).

$$2. \quad \varphi = \pi: \quad E_x = -\frac{E_{01}}{E_{02}} E_y \quad \text{— поляризация также линейная}$$

(рис. 5.4,б).

$$3. \quad \varphi = \frac{\pi}{2}: \quad E_{01} = E_{02}; \quad E_x^2 + E_y^2 = E_{01}^2; \quad E_x = E_{01} \cos \omega t.$$

В этом случае

$$E_y = E_{02} \cos(\omega t - \pi/2) = -E_{01} \sin \omega t.$$

Со временем вектор напряженности электрического поля перемещается по часовой стрелке, если смотреть вдоль распространения волны. Это правая эллиптическая поляризация (рис. 5.4,в).

4.  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Этот случай соответствует волне с левой эллиптической поляризацией.

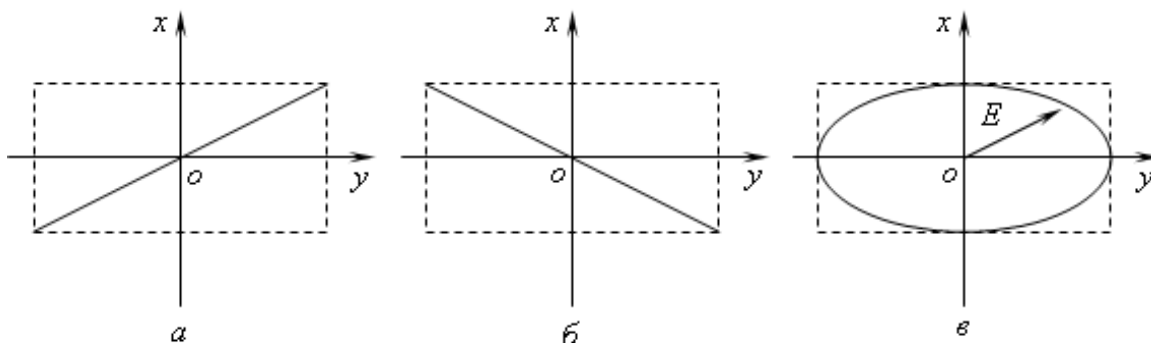


Рис. 5.4. Вектор напряженности электрического поля суммарной волны в плоскости  $z = 0$

Таким образом, чтобы получить волну с круговой поляризацией, исходные волны должны быть ортогонально линейно поляризованы, иметь одинаковые амплитуды и фазовый сдвиг, равный  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Для волны с круговой поляризацией можно записать:

$$\vec{E} = E_0 (\bar{x}_0 \cos \omega t \pm \bar{y}_0 \sin \omega t).$$

В комплексной форме

$$\dot{\vec{E}} = E_0 (\bar{x}_0 \pm j\bar{y}_0) e^{j(\omega t - kz)}.$$

Легко показать, что две волны с круговой поляризацией могут в сумме образовывать волну с линейной поляризацией.

## 5.4. Плоские электромагнитные волны в поглощающих средах

### 5.4.1. Затухание электромагнитных волн

Запишем уравнения Максвелла для электромагнитных волн, распространяющихся в поглощающей среде:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{E}} &= j\omega \dot{\vec{E}}; \\ \text{rot } \dot{\vec{H}} &= j\omega \dot{\vec{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

В уравнениях (5.20) диэлектрическая и магнитная проницаемости величины комплексные, следовательно, волновое число также комплексная величина:

$$\dot{k} = \sqrt{j\omega \dot{\epsilon}} = k' - jk''. \quad (5.21)$$

Так как имеет место квадратный корень,  $k'$  и  $k''$  могут иметь различные знаки. В дальнейшем покажем, что выбранные нами знаки соответствуют принципу физической реализуемости.

Запишем:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{E}_0 e^{j(\omega t - \dot{k}z)} = \bar{E}_0 e^{j\omega t} e^{-jk'z} e^{-k''z}, \quad (5.22)$$

где  $k' = \frac{2\pi}{\lambda}$  — постоянная распространения (фазовая постоянная);

$k''$  — постоянная затухания.

Плюс перед  $k'$  соответствует волне, распространяющейся от источника, минус перед  $k''$  отражает затухание волны при увеличении расстояния от источника. Покажем выражение (5.20) графиче-



ски. Перейдем к реальным частям комплексных величин. Напряженность электрического поля запишется в следующем виде:

$$\bar{E} = \text{Re } \dot{\bar{E}} = \bar{E}_0 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z). \quad (5.23)$$

На рис. 5.5 кривая 1 соответствует множителю  $\cos(\omega t - k'z)$ , кривая 2 — множителю, характеризующему затухание, кривая 3 — результирующая.

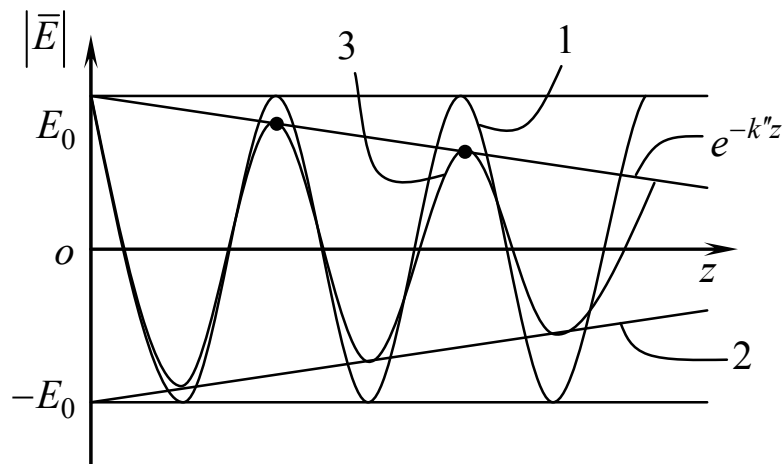


Рис. 5.5. К вопросу затухания электромагнитных волн в поглощающих средах

Затухание на расстоянии, равном длине волны, легко определить. Разделим модуль напряженности поля в точке  $A$  на его значение в точке  $B$ . Расстояние между этими точками равно  $\lambda$ .

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{e^{j\omega t} e^{-jk'z} e^{-k''z}}{e^{j\omega t} e^{-jk'(z+\lambda)} e^{-k''(z+\lambda)}} = e^{k''\lambda}. \quad (5.23a)$$

Если рассматривать не мгновенное значение напряженности поля, а его среднее значение, то вместо длины волны можно задавать любую длину  $l$ .

Затухание  $L$  в неперах определяется по формуле

$$L_{\text{Нп}} = \ln \frac{E_{\text{ср}A}}{E_{\text{ср}B}} = k''l.$$

Чаще затухание дается в децибелах:

$$L_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{E_{\text{ср}A}}{E_{\text{ср}B}} = 20k''l; \quad L_{\text{дБ}} = 8,69L_{\text{Нп}}.$$

### 5.4.2. Волновое число в поглощающих средах

Выразим  $k'$  и  $k''$  через макроскопические параметры, описывающие электромагнитные свойства среды. Как уже говорилось, в поглощающих средах это комплексные величины. Будем рассматривать немагнитные среды, т.е.  $\mu'' = 0$  и  $\mu = \mu_0$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \omega \sqrt{\mu_0 (\varepsilon' - j\varepsilon'')} \\ \dot{k} &= \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon (1 - j \operatorname{tg} \Delta)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где  $\varepsilon' = \varepsilon$ ,  $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \operatorname{tg} \Delta$ .

Возведем равенство (5.24) в квадрат и приравняем действительные части получившегося комплексного уравнения. Приравняем также квадраты модулей комплексных чисел. Получим два уравнения:

$$(k')^2 - (k'')^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon; \quad (5.25)$$

$$(k')^2 - (k'')^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}. \quad (5.26)$$

Отсюда

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta} + 1 \right)}; \quad (5.27)$$

$$k'' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta} - 1 \right)}. \quad (5.28)$$

Эти выражения описывают электромагнитные волны в любой среде.

### 5.4.3. Электромагнитные волны в диэлектрике

Рассмотрим типичный диэлектрик, для которого

$$\operatorname{tg} \Delta \ll 1. \quad (5.29)$$

Учитывая, что при условии (5.29) можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора

$$1 + \operatorname{tg}^2 \Delta = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \Delta}{2} + \dots,$$

получим из (5.27):

$$k' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2}} \sqrt{2 + \frac{\operatorname{tg}^2 \Delta}{2}} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \Delta}{8} \right). \quad (5.30)$$

Для идеального диэлектрика  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon}$ . Сравнивая с выражением (5.30), видим, что постоянная распространения электромагнитных волн в реальном диэлектрике при выполнении условия (5.29) практически не отличается от постоянной распространения в идеальном диэлектрике. То есть можно считать, что

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \quad \text{или} \quad k' = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Из соотношения (5.28) определим  $k''$ :

$$k'' = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon}}{2} \operatorname{tg} \Delta = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon}}{2} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}. \quad (5.31)$$

Из анализа формулы (5.31) следует, что затухание электромагнитной волны в хорошем диэлектрике невелико, так как проводимость в такой среде очень мала.

#### 5.4.4. Электромагнитные волны в проводящих средах

В случае проводящих сред  $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$ .

Из выражений (5.27), (5.28) получаем

$$k' = k'' = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon \operatorname{tg} \Delta}{2}} = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}. \quad (5.32)$$

Анализируя соотношение (5.32), можно сделать следующие выводы:

– затухание электромагнитных волн в проводящей среде зависит от частоты, а так как проводимость велика, то велико и затухание;

– проводящая среда является дисперсионной, так как в ней фазовая скорость зависит от частоты:

$$\vartheta_{\phi} = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}}.$$

Как видно, реальные проводники и диэлектрики резко различаются по характеру распространения электромагнитных волн.

#### 5.4.5. Поверхностный эффект

Согласно формуле (5.32) пространственное распределение поля волны, распространяющейся в проводнике, оказывается резко аperiодическим. Рассмотрим проникновение электромагнитного поля вглубь проводника. Затухание определяется после подстановки (5.32) в (5.23а):

$$\frac{E_A}{E_B} = e^{k'l} = e^{l \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}}. \quad (5.33)$$

Определим расстояние  $\Delta^0$ , на котором поле затухает в  $e$  раз:

$$\frac{E_0}{E_1} = e = e^{\Delta^0 k''}. \quad (5.34)$$

Отсюда

$$\Delta^0 k'' = 1 \Rightarrow \Delta^0 = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}. \quad (5.35)$$

Величина  $\Delta^0$  называется глубиной проникновения электромагнитного поля в проводник или толщиной скин-слоя.

Эффект проникновения поля на очень небольшую глубину в проводнике называется скин-эффектом или поверхностным эффектом (рис. 5.6).

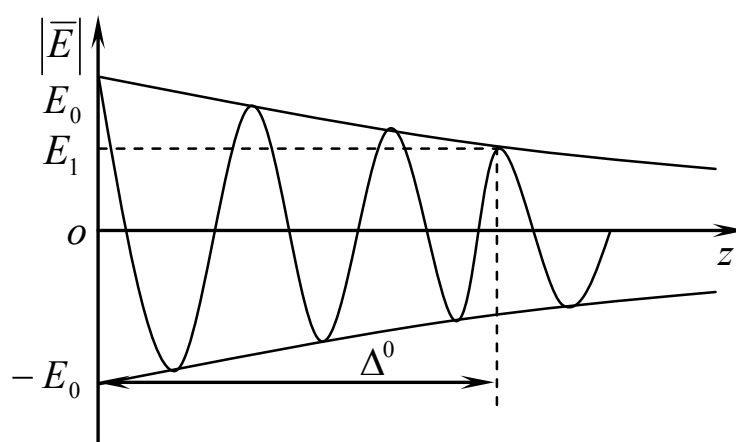


Рис. 5.6. К определению толщины скин-слоя

Чтобы оценить глубину проникновения поля, определим толщину скин-слоя меди на частоте  $f = 1$  ГГц. Проводимость меди  $\sigma = 6 \cdot 10^7$  См/м:

$$\Delta^0 = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^7}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 10^9}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Из приведенного примера видно, что глубина проникновения электромагнитного поля на высоких частотах очень мала и это важно с практической точки зрения.

## Контрольные вопросы

1. По какому признаку электромагнитные волны делят на плоские и сферические ?
2. Дайте определение фронта волны.
3. Объясните, почему выражение  $\dot{E}_m = \dot{E}_0 e^{-jkz}$  соответствует волне, распространяющейся вдоль оси  $z$ .
4. Запишите выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля сферической волны в идеальном диэлектрике.
5. Дайте определение волнового сопротивления среды. Можно ли утверждать, что это сопротивление среды распространению волны?
6. За какое время электрический вектор в волне с эллиптической поляризацией делает полный оборот?
7. Во сколько раз уменьшится амплитуда электрического вектора в среде с  $k'' = 3$  дБ/м на расстоянии 2 м.
8. Получите формулу для волнового сопротивления в проводниках. Какой физический смысл имеют его вещественная и мнимая части?
9. Сравните фазовые скорости, длины волн и коэффициенты затухания для волн, распространяющихся в вакууме и меди  $\left( \sigma = 6 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}, \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right)$  на частоте 1 МГц.  
*Ответ:* в вакууме  $v_\phi = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \lambda = 300 \text{ м}, k'' = 0;$   
в меди  $v_\phi = 408 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \lambda = 4,08 \cdot 10^{-4} \text{ м}, k'' = 1,54 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{м}}.$
10. В чем заключается скин-эффект и что является его причиной в проводниках?

## 6. Плоские электромагнитные волны в анизотропных средах

### 6.1. Анизотропные среды

До сих пор мы рассматривали электромагнитные поля в изотропных средах. Для таких сред соотношения, связывающие векторы  $\bar{B}$  и  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$ , имели вид

$$\bar{B} = \mu\bar{H}, \quad \bar{D} = \varepsilon\bar{E}. \quad (6.1)$$

Так как  $\mu$  и  $\varepsilon$  являются скалярными величинами, то векторы  $\bar{B}$  и  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$  и  $\bar{E}$  в изотропных средах параллельны между собой.

Каждое из векторных равенств (6.1) можно заменить тремя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu H_x; & D_x &= \varepsilon E_x; \\ B_y &= \mu H_y; & D_y &= \varepsilon E_y; \\ B_z &= \mu H_z; & D_z &= \varepsilon E_z. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Отсюда видно, что в изотропных средах функционально связаны между собой только одноименные проекции векторов поля. Свойства таких сред одинаковы в любых направлениях.

Наряду с изотропными существуют среды, которые в разных направлениях обнаруживают различные электромагнитные свойства. Эти среды называются анизотропными.

Напомним некоторые сведения из первого раздела.

В анизотропных средах каждая проекция векторов  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$  в общем случае может зависеть от трех проекций векторов  $\bar{H}$  или  $\bar{E}$  соответственно. Поэтому для них равенства (6.2) должны быть заменены более сложными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z; \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z; \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z; \\ D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z; \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z; \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Совокупность величин, на которые согласно системе равенств (6.3) необходимо умножать проекции векторов  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  для определения проекций векторов  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$ , принято условно записывать в виде матриц:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}; \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Введенные по формулам (6.4) совокупности чисел носят наименование тензоров магнитной и диэлектрической проницаемости. Числа  $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{xz}$  и  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$  и т.д. называются компонентами тензоров  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\varepsilon}$ . Компоненты могут быть как вещественными, так и комплексными величинами. В частных случаях некоторые из них обращаются в нуль.

В результате введения тензоров магнитной и диэлектрической проницаемости уравнения (6.1) для анизотропных сред приобретают компактный вид

$$\bar{B} = \hat{\mu}\bar{H}, \quad \bar{D} = \hat{\varepsilon}\bar{E}. \quad (6.5)$$

В общем случае для определения поля в анизотропной среде необходимо решать уравнения Максвелла в предположении, что магнитная и диэлектрическая проницаемости являются тензорами типа (6.4). Эта задача отличается значительной сложностью. К счастью, в природе не известны вещества, у которых магнитная и диэлектрическая проницаемости одновременно имеют тензорный характер. Поэтому в дальнейшем среды, обладающие или магнитной,



или диэлектрической анизотропией, целесообразно рассматривать раздельно. Первые из них характеризуются уравнениями

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \quad \bar{B} = \hat{\mu} \bar{H}. \quad (6.6)$$

У вторых сред тензором является только диэлектрическая проницаемость. Для них имеем:

$$\bar{D} = \hat{\varepsilon} \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu \bar{H}. \quad (6.7)$$

Следует отметить, что проводимость также может быть тензорной величиной. Для среды с тензорной проводимостью закон Ома в дифференциальной форме принимает вид

$$\bar{j} = \hat{\sigma} \bar{E}.$$

Определение тензора проводимости  $\hat{\sigma}$  аналогично (6.4).

Если тензор имеет только диагональные элементы и они равны друг другу, то он обращается в скаляр и, следовательно, описывает изотропную среду. Если эти диагональные элементы не равны, то описываемая среда анизотропная. Если присутствуют симметричные отличающиеся друг от друга элементы, то тензор соответствует среде, называемой гиротропной. Гиротропная среда — среда, обладающая способностью вращать плоскость поляризации распространяющихся в ней линейно поляризованных электромагнитных волн.

Типичными представителями анизотропных сред, наиболее часто встречающихся в практике, являются кристаллы. Намагниченные постоянным магнитным полем феррит и ионизированный газ (плазма) являются гиротропными средами. Далее рассмотрим эти среды.

## **6.2. Электромагнитные волны в кристаллах**

### **6.2.1. Классификация кристаллов по их электромагнитным свойствам**

Когда речь идет о распространении электромагнитных волн в кристалле, говорят о его оптических свойствах. Именно в оптическом диапазоне чаще всего используются кристаллы на практике.

Прохождение света через анизотропное вещество, оптические свойства которого в разных направлениях не одинаковы, сопровождается рядом своеобразных явлений. Эти явления имеют большое принципиальное и практическое значение. Особенности электромагнитных явлений в анизотропных средах связаны с тем, что индуцированный электромагнитной волной дипольный момент элемента объема среды не совпадает по направлению с электрическим полем воздействующей волны. То есть вектор напряженности электрического поля не параллелен вектору поляризации. Это происходит потому, что в анизотропном веществе под действием внешней силы элементарные заряды смещаются в одних направлениях легче, чем в других. Физическая природа анизотропии вещества связана с особенностями строения его молекул или с особенностями кристаллической решетки, в узлах которой находятся атомы или ионы. В таких условиях модель изотропного осциллятора для описания оптического электрона в атоме может оказаться непригодной, так как действующая на него возвращающая сила при смещении из положения равновесия обусловлена не только сферически симметричным полем ионного остова, но и полем соседних атомов или ионов, которое имеет более низкую симметрию.

Изучать распространение света в анизотропных средах в этом подразделе будем не с учетом их атомной структуры, а с помощью феноменологической электромагнитной теории. В рамках такой теории анизотропия учитывается тем, что в материальном уравнении проницаемость  $\epsilon$  или  $\mu$  представляет собой тензор (а не скаляр, как в изотропной среде).

Оптические свойства кристалла зависят в первую очередь от его структуры, определяющей симметрию диэлектрического тензо-

ра (6.4). В кристалле кубической симметрии диагональные элементы тензора равны друг другу, остальные обращаются в нуль. Поэтому в отношении своих оптических свойств кубические кристаллы вообще не отличаются от изотропных тел.

Итак, для кубических кристаллов

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

В одноосных кристаллах

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

И наконец, в двухосных кристаллах

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Более подробно рассмотрим распространение электромагнитных волн в одноосных кристаллах.

### 6.2.2. Электромагнитные волны в одноосных кристаллах

Рассмотрим немагнитный одноосный кристалл, например исландский шпат. Именно он чаще всего используется в оптических экспериментах.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= j\omega \hat{\varepsilon} \dot{\vec{E}}_m, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -j\omega \mu_0 \dot{\vec{H}}_m. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Заменяем векторные уравнения скалярными, при этом будем полагать, что плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$ , т.е. в соотношениях (6.11) положим  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{my}}{\partial z} &= -j\omega\varepsilon_1 E_{mx} ; & \frac{\partial E_{my}}{\partial z} &= j\omega\mu_0 H_{mx} ; \\ \frac{\partial H_{mx}}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_2 E_{my} ; & \frac{\partial E_{mx}}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 H_{my} . \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &= (\bar{x}_0 E_{mx} - \bar{y}_0 E_{my}) e^{-jkz} ; \\ \dot{\vec{H}}_m &= (\bar{x}_0 H_{mx} + \bar{y}_0 H_{my}) e^{-jkz} . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Подставим значения проекций из (6.13) в (6.12). Получим новую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} k H_{my} &= \omega\varepsilon_1 E_{mx} ; & k E_{0y} &= -\omega\mu_0 H_{mx} ; \\ k H_{mx} &= -\omega\varepsilon_2 E_{my} ; & k E_{0x} &= \omega\mu_0 H_{my} . \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Отсюда

$$E_{my} = -\frac{\omega\mu_0}{k} H_{0x} ; \quad E_{mx} = \frac{\omega\mu_0}{k} H_{0y} .$$

Этот результат подставляем в (6.14) и после сокращений получим

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 ; \quad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 . \quad (6.15)$$

Это дисперсионные соотношения, устанавливающие связь волнового числа с частотой и макроскопическими параметрами среды:

$$k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0} , \quad k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0} . \quad (6.16)$$

Из (6.16) находим два разных значения фазовой скорости:

$$\vartheta_{\phi 1} = \frac{\omega}{k_1} , \quad \vartheta_{\phi 2} = \frac{\omega}{k_2} . \quad (6.17)$$

Если вдоль оси  $z$  одноосного кристалла распространяется плоская электромагнитная волна произвольной линейной поляризации, то она разлагается на две волны, имеющие ортогональные линейные поляризации и различные фазовые скорости  $\mathfrak{V}_{\phi 1}, \mathfrak{V}_{\phi 2}$ .

Это приводит, во-первых, к эффекту двойного лучепреломления, так как разные скорости соответствуют разным углам преломления (рис. 6.1); во-вторых, к изменению вида поляризации. Действительно, если векторы напряженности полей с линейной поляризацией имеют вид

$$\bar{E}_1 = \bar{x}_0 E_0 \cos(\omega t - k_1 z),$$

$$\bar{E}_2 = \bar{y}_0 E_0 \cos(\omega t - k_2 z),$$

то фазовый сдвиг между этими волнами определяет вид поляризации (рис. 6.2).

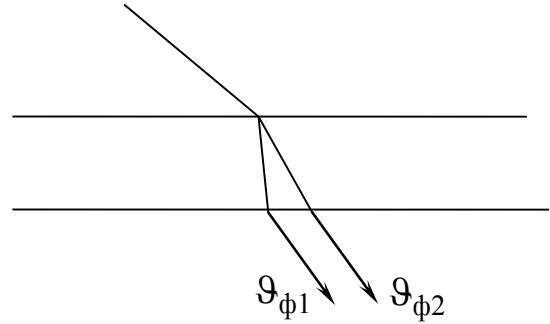


Рис. 6.1. Разложение плоской волны на две волны, имеющие различные фазовые скорости

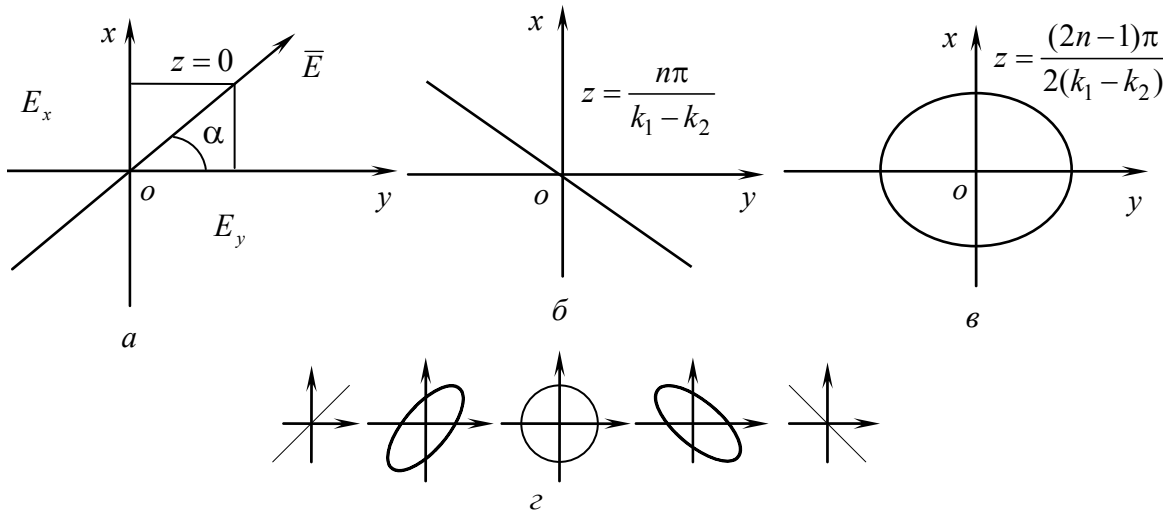


Рис. 6.2. Поляризационная структура поля в различных плоскостях вдоль оси  $z$

При  $\Delta\varphi = (k_1 - k_2)z = n\pi$  поляризация линейная.

При  $\Delta\varphi = (k_1 - k_2)z = \frac{(2n-1)\pi}{2}$  имеем эллиптическую поляризацию.

Если начальный угол  $\alpha = 45^\circ$  ( $z = 0$ , рис. 6.2,а), то поляризация круговая, так как в этом случае проекции вектора напряженности электрического поля на оси  $x$  и  $y$  равны. На рис. 6.2,б и 6.2,в показаны виды поляризации в различных плоскостях вдоль оси  $z$ : рис. 6.2,б — поляризация линейная; рис. 6.2,в — поляризация эллиптическая. Рис. 6.2,г иллюстрирует постепенный переход от поляризации линейной к эллиптической и вновь к линейной.

Заметим, что если бы волна распространялась вдоль оси  $x$ , эффект двойного лучепреломления и изменение вида поляризации не наблюдались бы. Это направление называется оптической осью кристалла.

## 6.3. Электромагнитные волны в гиротропных средах

### 6.3.1. Общие свойства феррита

Ферритами называют особую группу веществ, которые одновременно обладают магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами диэлектриков ( $\varepsilon = 5-20$ ). В отличие от ферромагнитных металлов, ферриты имеют весьма малую удельную проводимость ( $\sigma = 10^{-4}-10^{-6}$  См / м), и электромагнитные волны распространяются в них с небольшим затуханием. Совокупность целого ряда ценных свойств обуславливает широкое применение ферритов в радиотехнике.

В немагнитном состоянии феррит, как и любой другой ферромагнетик, представляет собой конгломерат большого числа областей, магнитные моменты которых ориентированы в различных направлениях. Под воздействием переменного электромагнитного поля магнитные моменты этих областей отклоняются от первоначального положения в направлении вектора  $\vec{H}$ . В результате этого появляется суммарный магнитный момент единицы объема

(т.е. вектор магнитной поляризации), совпадающий по направлению с вектором напряженности внешнего поля. Так как магнитная восприимчивость и связанная с ней магнитная проницаемость (см. п. 1.1.3) являются скалярными величинами, свойства ненамагниченного феррита для переменных полей любого направления оказываются одинаковыми и распространение электромагнитных волн в нем происходит точно так же, как и в любой другой изотропной среде.

### 6.3.2. Феррит в постоянном магнитном поле

Под действием постоянного магнитного поля феррит приобретает анизотропные свойства. Его магнитная проницаемость для переменных электромагнитных полей становится тензорной величиной. В связи с этим рассмотрим процессы в намагниченном феррите.

Как известно, электроны в атомах любого вещества обладают так называемым орбитальным и собственным (спиновым) магнитными моментами. Установлено, что свойства ферромагнитных веществ связаны главным образом со спиновым магнитным моментом. На этом основании упрощенную модель атома с некомпенсированным электронным спином можно представить в виде «волчка», обладающего спиновым магнитным моментом  $\bar{M}_s$  и собственным механическим моментом количества движения  $\bar{L}_s$  (появление которого объясняется вращением массы электрона вокруг собственной оси). Как показывает теория, моменты  $\bar{M}_s$  и  $\bar{L}_s$  имеют противоположные направления (рис. 6.3) и связаны между собой гиромагнитным отношением  $\gamma$ :

$$\bar{M}_s = -\gamma\bar{L}_s. \quad (6.18)$$

Для спина электрона  $\gamma = 2,21 \cdot 10^5 \text{ (А/м} \cdot \text{с)}^{-1}$ .

Знак минус указывает на то, что механический и магнитный моменты антипараллельны из-за отрицательного заряда электрона.

Рассмотрим поведение магнитного момента под действием постоянного магнитного поля.

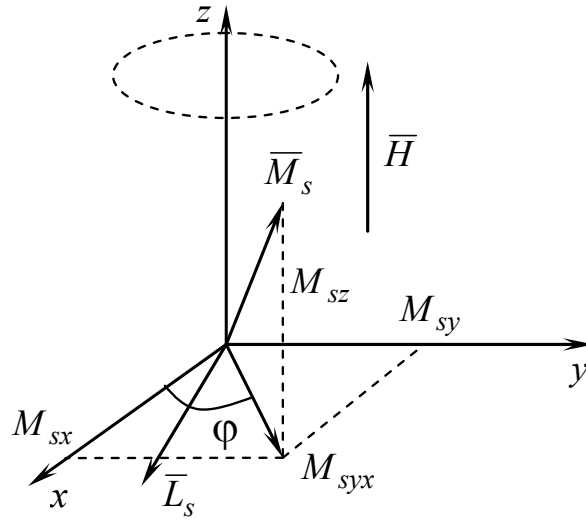


Рис. 6.3. К определению прецессии магнитного момента атома феррита в постоянном магнитном поле

Пусть на электрон действует магнитное постоянное поле  $\bar{H} = \bar{z}_0 H_0$  (см. рис. 6.3). Под его действием электрон приобретает вращающий момент

$$\bar{T} = [\bar{M}_s, \bar{H}_0]. \quad (6.19)$$

С другой стороны,

$$\bar{T} = \frac{d\bar{L}_s}{dt}. \quad (6.20)$$

Подставляя в формулу (6.19)  $\bar{T}$  из (6.20), с учетом равенства (6.18) получим

$$\frac{d\bar{M}_s}{dt} = -\gamma [\bar{M}_s, \bar{H}_0]. \quad (6.21)$$

Пусть  $\bar{M}_s$  — произвольно ориентированный вектор (см. рис. 6.3):

$$\bar{M}_s = \bar{x}_0 M_{sx} + \bar{y}_0 M_{sy} + \bar{z}_0 M_{sz}. \quad (6.22)$$



Тогда уравнение (6.21) можно заменить тремя скалярными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_{sx}}{dt} + (\gamma H_0)^2 M_{sy} &= 0; \\ \frac{dM_{sy}}{dt} - (\gamma H_0)^2 M_{sx} &= 0; \\ \frac{dM_{sz}}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Совместное решение первых двух уравнений дает

$$\begin{aligned} M_{sx} &= M_{sxy} \cos(\gamma H_0 t); \\ M_{sy} &= M_{sxy} \sin(\gamma H_0 t), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где  $M_{sxy} = \sqrt{M_{sx}^2 + M_{sy}^2}$ .

Так как тангенс угла  $\varphi$  между осью  $x$  и проекцией  $M_{sxy}$  равен  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_{sy}}{M_{sx}} = \operatorname{tg} \gamma H_0 t$ , то  $\varphi = \gamma H_0 t$ .

Из этих рассуждений следует, что вектор  $\bar{M}_s$  вращается относительно оси  $z$  с угловой частотой

$$\omega_m = \gamma H_0, \quad (6.25)$$

которая называется частотой гиромагнитного резонанса.

Таким образом, векторы магнитных моментов атомов начинают прецессировать вокруг оси  $z$  с угловой частотой  $\omega_m$ . Если бы не было затухания, прецессия магнитного момента продолжалась бесконечно долго. За счет тепловых потерь конец вектора движется по спирали и через очень короткое время ( $t \approx 10^{-8}$  с), называемое временем релаксации, все магнитные моменты выстраиваются вдоль поля. (Напомним, что прецессия — вращательное движение конца вектора при закрепленном другом его конце.)

Физическая причина прецессии заключается в том, что на электрон действует одновременно магнитный вращательный момент

$[\bar{M}_s, \bar{H}]$ , связанный с магнитным полем, и механический вращательный момент  $\frac{d\bar{L}_s}{dt}$ , с полем не связанный. Другими словами, со стороны магнитного поля действуют вращающие силы, а механические силы стремятся сохранить прежнее положение электрона и его магнитного момента.

### 6.3.3. Намагниченный феррит в переменном магнитном поле

Рассмотрим теперь явления, которые возникают при одновременном воздействии на атом постоянного магнитного поля  $\bar{H}_0 = \bar{z}_0 H_0$  и не совпадающего с ним по направлению переменного магнитного поля  $\bar{H} = \bar{H}_m \cos \omega t$  (рис. 6.4).

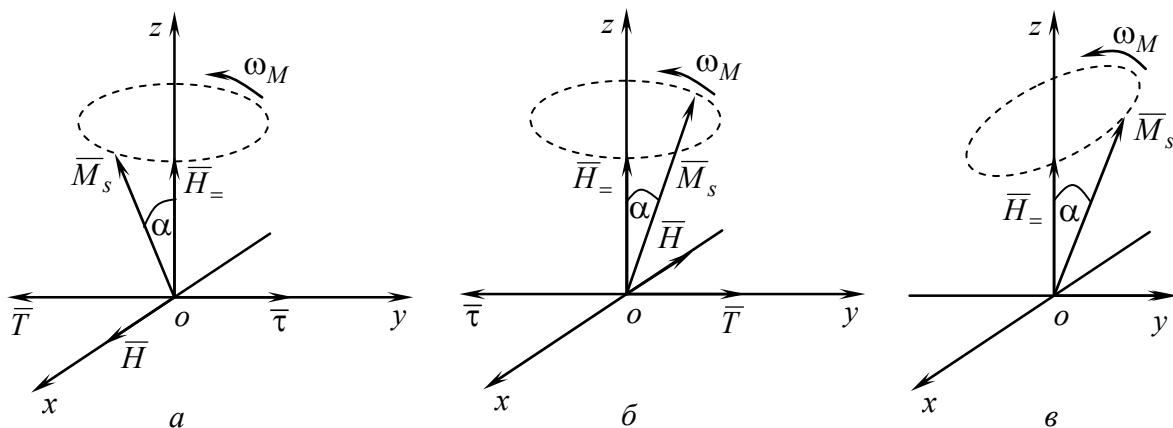


Рис. 6.4. К определению прецессии магнитного момента атома феррита при одновременном воздействии постоянного и переменного магнитных полей

Для упрощения предположим, что вектор  $\bar{H}$  направлен вдоль оси  $ox$ , а круговая частота  $\omega \approx \omega_M$ . Момент вращения, созданный переменным полем, определяется формулой

$$\bar{\tau} = [\bar{M}_s, \bar{H}]. \quad (6.26)$$

Пусть в начальный момент времени вектор  $\bar{M}_s$  лежит в плоскости  $xoz$ , а вектор напряженности переменного магнитного поля направлен вдоль оси  $ox$  и имеет максимальную величину. Как вытекает из формул (6.19), (6.26) и рис. 6.4,а, при  $t = 0$  момент вращения  $\bar{\tau}$  направлен противоположно моменту  $\bar{T}$  и стремится увеличить угол прецессии  $\alpha$ .

Через время, равное половине периода  $T_m = 2\pi/\omega_m$ , магнитный момент повернется на угол  $\pi$ , а вектор  $\bar{H}$  будет вновь иметь максимальную величину, но противоположную ориентацию. Из рис. 6.4,б следует, что и в момент  $t = \frac{T_m}{2}$  вектор  $\bar{\tau}$  будет стремиться увеличить угол прецессии.

В моменты времени  $t = T_m/4$  и  $t = 3T_m/4$ , когда вектор  $\bar{M}_s$  лежит в плоскости  $yo z$ , напряженность переменного магнитного поля равна нулю и оно на угол прецессии влияния не оказывает.

Таким образом, при одновременном воздействии несовпадающих по направлению постоянного и переменного магнитных полей магнитный момент атома феррита будет прецессировать относительно направления  $\bar{H}_0$ , описывая своим концом эллипс (рис. 6.4,в). Вектор магнитной поляризации (т.е. магнитный момент единицы объема феррита), а значит, и вектор магнитной индукции не будут совпадать по направлению с вектором напряженности переменного магнитного поля.

Повторяя рассуждения, позволившие получить соотношение (6.21), нетрудно убедиться в том, что уравнение движения магнитного момента атома в случае одновременного воздействия переменного и постоянного магнитных полей будет иметь вид

$$\frac{d\bar{M}_s}{dt} = -\gamma [\bar{M}_s, \bar{H}_\Sigma], \quad (6.27)$$

где результирующее поле  $\bar{H}_\Sigma = \bar{H}_0 + \bar{H}$ .

Намагниченная ферритовая среда представляет собой совокупность одинаково вращающихся магнитных моментов. Поэтому, умножая обе части уравнения (6.27) на число атомов в единице

объема, мы получим уравнение движения суммарного магнитного момента единицы объема

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\gamma [\bar{M}, \bar{H}_\Sigma], \quad (6.28)$$

где  $\bar{M}$  — магнитный момент единицы объема или вектор магнитной поляризации (намагниченности, см. п.1.1.3).

Если векторы  $\bar{H}$  и  $\bar{H}_0$  параллельны, то переменное магнитное поле не будет влиять на общую картину ориентации магнитных моментов, установившихся по направлению постоянного магнитного поля. Векторы магнитной поляризации и магнитной индукции, в отличие от предыдущего случая, будут параллельны вектору напряженности поля. Отсюда следует вывод о том, что свойства намагниченной постоянным полем ферритовой среды оказываются разными для переменных полей различного направления.

Чтобы найти магнитную проницаемость феррита, необходимо установить связь между напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией. Это можно сделать с помощью уравнения (6.28).

Пусть на феррит наряду с постоянным магнитным полем  $\bar{H}_0 = \bar{z}_0 H_0$  действует переменное поле с произвольно ориентированным вектором напряженности  $\bar{H} = \dot{\bar{H}}_m e^{j\omega t}$ . Результирующее поле выражается векторной суммой

$$\dot{\bar{H}}_\Sigma = \bar{z}_0 H_0 + \dot{\bar{H}}_m e^{j\omega t}, \quad (6.29)$$

а уравнение для вектора магнитной поляризации согласно (6.28) принимает вид

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\gamma \left[ \bar{M}, \left( \bar{z}_0 H_0 + \dot{\bar{H}}_m e^{j\omega t} \right) \right]. \quad (6.30)$$

Допустим, что феррит намагничен постоянным магнитным полем до насыщения, т.е. магнитные моменты всех атомов параллельны между собой и направлены вдоль поля  $\bar{H}_0$ . Следовательно, в отсутствие переменного поля вектор магнитной поляризации  $\bar{M}$  будет направлен так же, как и вектор  $\bar{H}_0$ :

$$\bar{M} = \bar{z}_0 M_0 + \dot{\bar{M}}_m e^{j\omega t}. \quad (6.31)$$

Подставляя (6.31) в (6.30) и переходя от векторного уравнения к трем скалярным, получим:

$$e^{j\omega t} j\omega \begin{vmatrix} \dot{M}_{mx} \\ \dot{M}_{my} \\ \dot{M}_{mz} \end{vmatrix} = -\gamma \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \dot{M}_{mx} e^{j\omega t} & \dot{M}_{my} e^{j\omega t} & M_0 + \dot{M}_{mz} e^{j\omega t} \\ \dot{H}_{mx} e^{j\omega t} & \dot{H}_{my} e^{j\omega t} & H_0 + \dot{H}_{mz} e^{j\omega t} \end{vmatrix}. \quad (6.32)$$

Будем пренебрегать в (6.32) эффектами второго порядка малости,  $|\dot{\bar{H}}_m| \ll |H_0|$ ,  $|\dot{\bar{M}}_m| \ll |M_0|$ , то есть произведением малых величин:

$$\begin{aligned} j\omega \dot{M}_{mx} e^{j\omega t} &= -\gamma \left( H_0 \dot{M}_{my} e^{j\omega t} - H_0 \dot{H}_{my} e^{j\omega t} \right); \\ j\omega \dot{M}_{my} e^{j\omega t} &= -\gamma \left( H_{mx} \dot{M}_0 e^{j\omega t} - H_0 M_{mx} e^{j\omega t} \right); \\ j\omega \dot{M}_{mz} e^{j\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Введем обозначения:

$$\omega_m = \gamma H_0; \quad \omega_0 = \frac{\gamma}{\mu_0} M_0.$$

Тогда первые два уравнения в (6.33) примут вид

$$\left. \begin{aligned} j\omega \dot{M}_{mx} &= -\omega_m \dot{M}_{my} + \mu_0 \omega_0 \dot{H}_{my}; \\ j\omega \dot{M}_{my} &= \omega_m \dot{M}_{mx} - \mu_0 \omega_0 \dot{H}_{mx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Выражаем отсюда проекции вектора намагниченности:

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= -\frac{\mu_0 \omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2} \dot{H}_{mx} - j \frac{\mu_0 \omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_m^2} \dot{H}_{my}; \\ \dot{M}_{my} &= j \frac{\mu_0 \omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_m^2} \dot{H}_{mx} - \frac{\mu_0 \omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2} \dot{H}_{my}; \\ \dot{M}_{mz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Перейдем к более компактному виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= -\mu_0 A \dot{H}_{mx} - j\mu_0 C \dot{H}_{my}; \\ \dot{M}_{my} &= j\mu_0 C \dot{H}_{mx} - \mu_0 A \dot{H}_{my}; \\ \dot{M}_{mz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

где  $A = \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2}$ ;  $C = \frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2}$ .

Обратимся теперь к материальному уравнению

$$\dot{\vec{B}}_m = \dot{\vec{M}}_m + \mu_0 \dot{\vec{H}}_m \quad (6.37)$$

и подставим в него значение проекций вектора  $\dot{\vec{M}}_m$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{mx} &= -\mu_0 A \dot{H}_{mx} - j\mu_0 C \dot{H}_{my} + \mu_0 \dot{H}_{mx}; \\ \dot{B}_{my} &= j\mu_0 C \dot{H}_{mx} - \mu_0 A \dot{H}_{my} + \mu_0 \dot{H}_{my}; \\ \dot{B}_{mz} &= \mu_0 \dot{H}_{mz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

В уравнениях (6.38) сгруппируем слагаемые перед одноименными проекциями напряженности магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{mx} &= \mu_0 (1 - A) \dot{H}_{mx} - j\mu_0 C \dot{H}_{my} + 0 \cdot \dot{H}_{mz}; \\ \dot{B}_{my} &= j\mu_0 C \dot{H}_{mx} + \mu_0 (1 - A) \dot{H}_{my} + 0 \cdot \dot{H}_{mz}; \\ \dot{B}_{mz} &= 0 \cdot \dot{H}_{mx} + 0 \cdot \dot{H}_{my} + \mu_0 \dot{H}_{mz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\mu_0 (1 - A) = \mu_x; \quad \mu_0 C = a.$$

Сопоставление (6.39) и (6.3) дает тензор вида

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & -ja & 0 \\ ja & \mu_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Полученный тензор содержит симметричные недиагональные элементы, отличающиеся знаком, и, следовательно, намагниченный

постоянным магнитным полем феррит — гиротропная среда. Как это влияет на распространение электромагнитных волн, рассмотрим ниже.

## 6.4. Плазма в электромагнитном поле

### 6.4.1. Общие свойства плазмы

Плазмой называется электрически нейтральный газ, в котором значительная часть атомов или молекул ионизирована. По целому ряду свойств плазма отличается от обычных газов, содержащих одни нейтральные молекулы. Так, например, благодаря наличию свободных зарядов плазма обладает большей, чем у обычных газов, электрической проводимостью. Под влиянием постоянного магнитного поля она может проявлять анизотропные свойства и т.п. В связи с этим целесообразно рассмотреть процессы, протекающие в плазме под действием электромагнитных полей.

В плазме возможны взаимодействия электронов и ионов с электрической и магнитной составляющими приложенного к ней электромагнитного поля. По своей величине они неравноценны. В большей части радиотехнического диапазона частот движение тяжелых ионов практически не влияет на распространение электромагнитных волн в плазме. Поэтому в дальнейшем их принимать в расчет не будем.

Сравним теперь силу взаимодействия электронов с электрической и магнитной составляющими электромагнитного поля, то есть найдем отношение величины силы Лоренца  $\bar{F}_L$  к силе Кулона  $\bar{F}_K$ . Пусть электрон, имеющий заряд  $e_0$ , движется со скоростью  $\bar{V}$  перпендикулярно линиям вектора магнитной индукции  $\bar{B}$ . Имея в виду только модули векторов, запишем:

$$\frac{F_L}{F_K} = \frac{e_0VB}{e_0E} = \frac{\mu_0HV}{E} = \frac{\mu_0V}{W_0} = V\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{V}{c} \ll 1.$$

Проведя ряд очевидных преобразований, убеждаемся, что отношение рассматриваемых сил значительно меньше единицы, т.е.  $F_K \gg F_L$ .

Таким образом, будем учитывать только взаимодействие электронов с электрической составляющей переменного электромагнитного поля.

#### 6.4.2. Диэлектрическая проницаемость плазмы в переменном электромагнитном поле

Как отмечалось, плазма содержит большое число заряженных частиц, которые в отсутствие постоянного магнитного поля (ненамагниченная плазма) движутся хаотически. Под влиянием электрического поля с напряженностью  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  на каждый свободный электрон действует сила

$$\vec{F}_K = -e_0 \vec{E}.$$

Представим силу как произведение массы электрона  $m_0$  на ускорение и, пренебрегая соударениями электронов с другими частицами, получим уравнение движения

$$m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e_0 \vec{E}, \quad (6.41)$$

где  $\vec{r}$  — смещение электрона относительно исходного положения.

Решая уравнение (6.41), находим

$$\vec{r} = \frac{e_0}{m_0 \omega^2} \vec{E}. \quad (6.42)$$

Таким образом, электроны совершают прямолинейное колебательное движение в направлении вектора  $\vec{E}$ , приобретая при этом электрический момент

$$\vec{p} = -e_0 \vec{r} = \frac{-e_0^2}{m_0 \omega^2} \vec{E}. \quad (6.43)$$



Если в единице объема плазмы имеется  $N$  свободных электронов и каждый из них получает одинаковое смещение, то электрический момент единицы объема (вектор электрической поляризации) равен

$$\bar{P} = N\bar{p} = -Ne_0\bar{r}, \quad (6.44)$$

или с учетом (6.42) имеем

$$\bar{P} = -\frac{Ne_0^2}{m_0\omega^2}\bar{E}. \quad (6.45)$$

Электрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость соответственно равны:

$$\chi_{\varepsilon} = -\frac{Ne_0^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}; \quad (6.46)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne_0^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}. \quad (6.47)$$

Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость ненамагниченной плазмы скалярная величина. Вектор электрической индукции в этом случае совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля и плазма является изотропной средой.

Пусть наряду с полем  $\bar{E} = \bar{E}_0 \cos \omega t$  на плазму воздействует постоянное магнитное поле  $\bar{H}_0 = \bar{z}_0 \bar{H}_0$ . Теперь, как только под влиянием электрического поля электрон приобретает скорость  $\bar{V}$ , на него начинает действовать со стороны магнитного поля сила Лоренца

$$\bar{F}_L = \varepsilon_0 \mu_0 [\bar{V}, \bar{H}_0]. \quad (6.48)$$

Из формулы (6.48) видно, что величина и направление силы Лоренца будут зависеть от взаимной ориентации векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{H}_0$ .

Предположим сначала, что, после того как электрону была сообщена начальная скорость  $\bar{V}_0$ , вектор которой параллелен  $\bar{E}_0$ ,

электрическое поле исчезает. Тогда в зависимости от направления вектора  $\vec{E}$  по отношению к  $\vec{H}_0$  электроны будут перемещаться по различным траекториям.

Если  $\vec{E} \parallel \vec{H}_0$ , то согласно (6.48) сила Лоренца  $\vec{F}_L = 0$  и частицы движутся прямолинейно вдоль силовых линий постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$  (как и при его отсутствии).

При  $\vec{E} \perp \vec{H}_0$  сила Лоренца имеет максимальное значение

$$\vec{F}_L = e_0 \mu_0 V_0 H_0.$$

Теперь в любой точке траектории электрона сила  $\vec{F}_L$  перпендикулярна вектору скорости (рис. 6.5,а). Следовательно, она не производит работу и может изменять лишь направление скорости, не изменяя ее величины, поэтому электроны будут двигаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны вектору  $\vec{H}_0$ . Радиус окружности можно определить из условия равенства центробежной силы и силы Лоренца:

$$\frac{m_0 v_0^2}{r} = e_0 \mu_0 V_0 H_0,$$

$$r = \frac{m_0 V_0}{e_0 \mu_0 H_0}. \quad (6.49)$$

Период обращения электрона по окружностям  $T_m$  находится из очевидного соотношения  $V_0 T_m = 2\pi r$ , откуда с учетом (6.49) будем иметь

$$T_m = \frac{2\pi m_0}{e_0 \mu_0 H_0}.$$

Угловая скорость вращения электрона (частота гироманнитного резонанса) равна

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = \frac{e_0 \mu_0 H_0}{m_0}. \quad (6.50)$$

Если вектор  $\vec{E}$  (следовательно, начальная скорость  $\vec{V}_0$ ) составляет с направлением  $\vec{H}_0$  некоторый угол  $\alpha$ , то скорость  $\vec{V}_0$  можно разложить на две составляющие:  $\vec{V}_\perp$  и  $\vec{V}_\parallel$  (рис. 6.5, б).

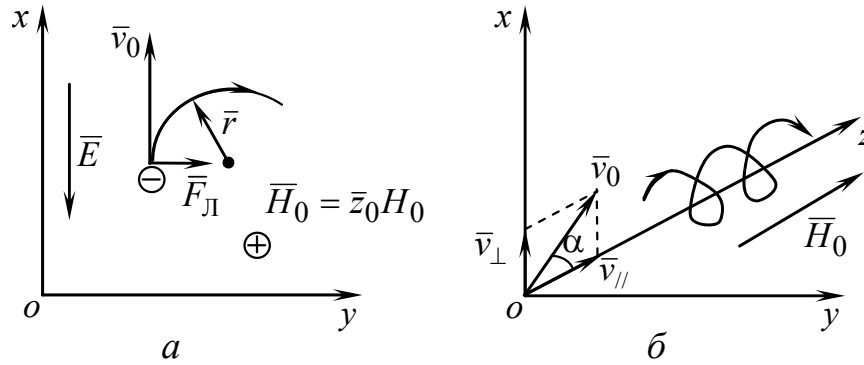


Рис. 6.5. Виды траектории движения свободных электронов в намагниченной плазме

Под влиянием  $\vec{V}_\perp$  электрон приобретает вращательное движение. Одновременно с этим он скользит вдоль силовых линий магнитного поля с постоянной скоростью  $\vec{V}_\parallel$ . Результирующая траектория электрона будет иметь вид винтовой линии с осью, параллельной вектору  $\vec{H}_0$ .

### 6.4.3. Тензор диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы

Пусть теперь переменное электрическое поле не исчезает после того, как электроны начали движение. Уравнение движения электрона при одновременном воздействии переменного электрического поля и постоянного магнитного поля может быть получено из формулы (6.41) путем введения в правую часть силы Лоренца. В комплексной форме уравнение принимает вид

$$m_0 \frac{d^2 \dot{\vec{r}}}{dt^2} = -e_0 \dot{\vec{E}} - e_0 \mu_0 \left[ \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}, \dot{\vec{H}}_0 \right],$$

где  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_m e^{j\omega t}$ .

Тогда

$$-m_0\omega^2\dot{\vec{r}}_m e^{j\omega t} = -e_0\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} - j\omega e_0\mu_0 e^{j\omega t} H_0 [\dot{\vec{r}}_m, \bar{z}_0]. \quad (6.51)$$

Умножим правую и левую части равенства (6.51) на  $\frac{e_0 N}{m_0\omega^2}$ . Теперь легко получить комплексную амплитуду вектора поляризации:

$$\dot{\vec{P}}_m = \frac{e_0 N}{m_0\omega^2} \dot{\vec{E}}_m + j \frac{\omega e_0\mu_0}{\omega^2 m_0} H_0 [\dot{\vec{P}}_m, \bar{z}_0].$$

Введем обозначения:

$$\frac{e_0^2 N}{m_0\epsilon_0} = \omega_0^2; \quad \frac{e_0\mu_0}{m_0} H_0 = \omega_m.$$

Тогда

$$\dot{\vec{P}}_m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \epsilon_0 \dot{\vec{E}}_m + j \frac{\omega_m}{\omega} [\dot{\vec{P}}_m, \bar{z}_0]. \quad (6.52)$$

Перейдем от векторного уравнения (6.52) к системе скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_{mx} &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \epsilon_0 \dot{E}_{mx} + j \frac{\omega_m}{\omega} \dot{P}_{my}; \\ \dot{P}_{my} &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \epsilon_0 \dot{E}_{my} - j \frac{\omega_m}{\omega} \dot{P}_{mx}; \\ \dot{P}_{mz} &= -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \epsilon_0 \dot{E}_{mz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Выразим проекции вектора электрической поляризации через проекции вектора напряженности электрического поля:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{P}_{mx} &= -\varepsilon_0 \overbrace{\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_m^2}}^{\varepsilon_0 A} \dot{E}_{mx} - j \varepsilon_0 \overbrace{\frac{\omega_m \omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_m^2)}}^{\varepsilon_0 C} \dot{E}_{my}; \\
\dot{P}_{my} &= j \frac{\varepsilon_0 \omega_m \omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_m^2)} \dot{E}_{mx} - \varepsilon_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \dot{E}_{my}; \\
\dot{P}_{mz} &= -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varepsilon_0 \dot{E}_{mz}.
\end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

Комплексная амплитуда вектора электрической индукции определяется равенством

$$\dot{D}_m = \dot{P}_m + \varepsilon_0 \dot{E}_m. \quad (6.55)$$

Вновь переходя к системе скалярных уравнений, с учетом обозначений, показанных в (6.45) фигурными скобками, получим:

$$\left. \begin{aligned}
\dot{D}_{mx} &= \varepsilon_0 (1 - A) \dot{E}_{mx} - j \varepsilon_0 C \dot{E}_{my} + 0 \cdot \dot{E}_{mz}; \\
\dot{D}_{my} &= j \varepsilon_0 C \dot{E}_{mx} + \varepsilon_0 (1 - A) \dot{E}_{my} + 0 \cdot \dot{E}_{mz}; \\
\dot{D}_{mz} &= 0 \cdot \dot{E}_{mx} + 0 \cdot \dot{E}_{my} - \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \dot{E}_{mz};
\end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon_0 (1 - A) = \varepsilon_x; \quad \varepsilon_0 C = b; \quad \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \varepsilon_z. \quad (6.57)$$

Сравнивая уравнения (6.56) с (6.3), с учетом обозначений (6.57) получим выражение для тензора диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & -jb & 0 \\ jb & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Таким образом, по внешнему виду тензоры  $\hat{\mu}$  для намагниченного феррита и  $\hat{\epsilon}$  для намагниченной плазмы симметричны. Это дает возможность при исследовании полей воспользоваться принципом перестановочной двойственности.

## 6.5. Продольное распространение плоских электромагнитных волн в феррите

Пусть электромагнитная волна распространяется в феррите в направлении постоянного магнитного поля  $\vec{H} = \vec{z}_0 H_0$ . Так как напряженность поля вдоль координат  $x$  и  $y$  в приближении плоских волн не изменяется, то

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Мы должны определить все основные характеристики электромагнитных волн: поляризацию, фазовую скорость, волновое сопротивление. Прежде всего необходимо получить дисперсионные соотношения.

Для этого запишем уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{H}_m &= j\omega\epsilon\dot{E}_m ; \\ \text{rot } \dot{E}_m &= -j\omega\hat{\mu}\dot{H}_m . \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Перейдем к скалярной форме записи:

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}}_0 - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} = j\omega\epsilon\dot{E}_{mx} ;$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}}_0 = j\omega\epsilon\dot{E}_{my} ;$$

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x}}_0 - \underbrace{\frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y}}_0 = j\omega\epsilon\dot{E}_{mz} ;$$

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y}}_0 - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} = -j\omega(\mu_x \dot{H}_{mx} - ja \dot{H}_{my});$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x}}_0 = -j\omega(\mu_x \dot{H}_{my} + ja \dot{H}_{mx});$$

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x}}_0 - \underbrace{\frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y}}_0 = -j\omega\mu_0 \dot{H}_{mz}.$$

Из этой системы сразу следует, что электромагнитная волна носит поперечный характер, так как  $\dot{E}_{mz} = 0$  и  $\dot{H}_{mz} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} = -j\omega\varepsilon \dot{E}_{mx}; \quad \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} = j\omega(\mu_x \dot{H}_{mx} - ja \dot{H}_{my}); \\ \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} = j\omega\varepsilon \dot{E}_{my}; \quad \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} = -j\omega(ja \dot{H}_{mx} - \mu_x \dot{H}_{my}). \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

Запишем проекции  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  для плоской волны (рис. 6.6):

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mx} &= H_{mx} e^{-jkz}; \\ \dot{H}_{my} &= H_{my} e^{-jkz}; \\ \dot{E}_{mx} &= E_{mx} e^{-jkz} = Z_{xy} H_{my} e^{-jkz}; \\ \dot{E}_{my} &= E_{my} e^{-jkz} = Z_{yx} H_{mx} e^{-jkz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

Подставляя (6.61) в (6.60), получим:

$$\left. \begin{aligned} kH_{my} &= \omega\varepsilon Z_{xy} H_{my}; \\ kH_{mx} &= \omega\varepsilon Z_{yx} H_{mx}; \\ Z_{yx} H_{mx} k &= \omega(\mu_x H_{mx} - ja H_{my}); \\ Z_{xy} H_{my} k &= \omega(\mu_x H_{my} + ja H_{mx}). \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

Подставляем  $Z_{yx} = Z_{xy} = \frac{k}{\omega \varepsilon}$  в уравнения системы (6.62), выражаем  $\dot{H}_{mx}$  или  $\dot{H}_{my}$ :

$$\left. \begin{aligned} (k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_x) H_{mx} &= -j\omega^2 \varepsilon a H_{my}; \\ (k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_x) H_{my} &= j\omega^2 \varepsilon a H_{mx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

Из второго уравнения (6.63) выражаем  $\dot{H}_{mx}$  и подставляем в первое. В результате получим

$$k^2 - \omega^2 \varepsilon \mu_x = \pm \omega^2 \varepsilon a, \quad (6.64)$$

откуда волновое число

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 (\mu_x \pm a)}. \quad (6.65)$$

Выражения (6.65) и есть дисперсионные соотношения. Их оказалось два — для  $k_1$  и  $k_2$ . Сразу видно, что при продольном распространении возникают две волны, характеризующиеся различными постоянными распространения.

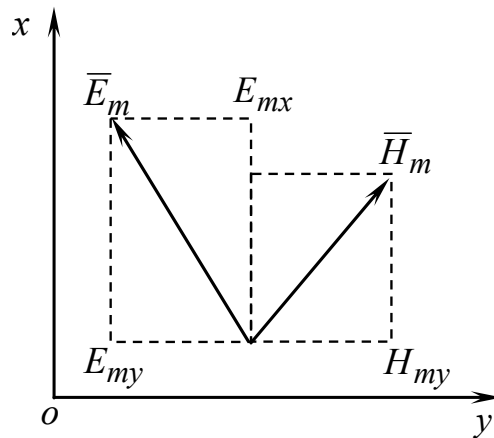


Рис. 6.6. Продольное распространение электромагнитной волны в намагниченном феррите

Подставим поочередно  $k_1$  и  $k_2$  в уравнения (6.63). Получим:

$$H_{my1} = jH_{mx1}; \quad H_{my2} = -jH_{mx2}. \quad (6.66)$$



Причем волновые сопротивления  $Z_{1,2}$  для каждой из волн различны:

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_x \pm a}{\varepsilon}}.$$

С учетом (6.66) из (6.61) получаем для одной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mx1} &= H_{m1} e^{-jk_1 z}; & \dot{H}_{my1} &= H_{m1} e^{-j\left(k_1 z - \frac{\pi}{2}\right)}; \\ \dot{E}_{mx1} &= Z_1 H_{m1} e^{-j\left(k_1 z - \frac{\pi}{2}\right)}; & \dot{E}_{my1} &= Z_1 H_{m1} e^{-jk_1 z}. \end{aligned} \right\}$$

Для другой волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mx2} &= H_{m2} e^{-jk_2 z}; & \dot{H}_{my2} &= H_{m2} e^{-j\left(k_2 z + \frac{\pi}{2}\right)}; \\ \dot{E}_{mx2} &= Z_2 H_{m2} e^{-j\left(k_2 z + \frac{\pi}{2}\right)}; & \dot{E}_{my2} &= Z_2 H_{m2} e^{-jk_2 z}. \end{aligned} \right\}$$

Перейдем к реальным частям комплексных векторов:

$$\left. \begin{aligned} H_{x1} &= H_{m1} \cos(\omega t - k_1 z); \\ H_{y1} &= H_{m1} \sin(\omega t - k_1 z); \\ E_{x1} &= Z_1 H_{m1} \sin(\omega t - k_1 z); \\ E_{y1} &= -Z_1 H_{m1} \cos(\omega t - k_1 z); \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{x2} &= H_{m2} \cos(\omega t - k_2 z); \\ H_{y2} &= -H_{m2} \sin(\omega t - k_2 z); \\ E_{x2} &= -Z_2 H_{m2} \sin(\omega t - k_2 z); \\ E_{y2} &= -Z_2 H_{m2} \cos(\omega t - k_2 z). \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

Видно, что плоская линейно поляризованная электромагнитная волна, попадая в намагниченный феррит, может быть разложена на две волны с круговой поляризацией с противоположным направлением вращения векторов. Одну из них описывает система уравнений (6.67), другую — (6.68).

У этих волн будут различны фазовые скорости:

$$\vartheta_{\phi 1} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mu_x + a)}}; \quad (6.69)$$

$$\vartheta_{\phi 2} = \frac{\omega}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mu_x - a)}}. \quad (6.70)$$

Видим, что феррит — среда дисперсионная, в нем фазовая скорость зависит от частоты, так как  $\mu_x$  и  $a$  являются функциями частоты.

Рассмотрим случай, когда в феррите существуют обе описанные волны. Пусть  $H_{m1} = H_{m2} = H_m$ . Вычислим напряженность результирующего магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_{mx1} + H_{mx2} = 2H_m \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} z\right); \\ H_y &= H_{my1} + H_{my2} = 2H_m \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right)}_{\text{Фазовый множитель}} \underbrace{\sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z\right)}_{\text{Амплитудный множитель}}. \end{aligned} \right\} (6.71)$$

Согласно соотношениям (6.71) проекции вектора  $H_x$  и  $H_y$  изменяются в фазе. Отсюда следует, что магнитное поле результирующей волны является линейно поляризованным. Его напряженность

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = 2H_m \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right).$$

Угол наклона вектора  $\vec{H}$  в любой точке оси  $z$  (рис. 6.7) определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H_y}{H_x} = \operatorname{tg} \frac{k_2 - k_1}{2} z,$$

откуда  $\theta = \frac{k_2 - k_1}{2} z$ .

Налицо угловая зависимость положения результирующего вектора  $\bar{H}$  от координаты  $z$ . Изменение положения плоскости поляризации при распространении плоской волны в гиротропной среде называется эффектом Фарадея. Величина эффекта определяется как

$$\theta' = \frac{k_2 - k_1}{2}.$$

Электрическое поле суммарной волны, в отличие от магнитного, не будет линейно поляризованным. Из-за различия волновых сопротивлений для волн левого и правого направлений вращения амплитуды напряженности электрического поля этих волн будут различны. Сложение двух волн круговой поляризации с разными амплитудами дает эллиптически поляризованную волну.

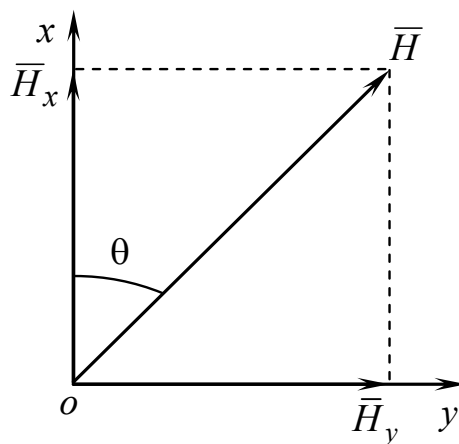


Рис. 6.7. К расчету угла поворота вектора  $\bar{H}$  при распространении электромагнитной волны в продольно-намагниченном феррите

Величина  $\theta'$ , характеризующая угол поворота вектора  $\bar{H}$  на единицу длины пути, называется постоянной Фарадея. Она зависит от свойств феррита, величины подмагничивающего поля и частоты. Среды, в которых проявляется эффект Фарадея, носят название гиротропных (вращающих) сред.

При изменении направления постоянного магнитного поля на противоположное изменяется знак компоненты  $a$  и постоянной Фарадея. Вращение векторов поля в этом случае будет совершаться против часовой стрелки (рис. 6.8). Поэтому поле в гиротропной среде не подчиняется принципу взаимности.

Из рис. 6.8 видно, что распространение в прямом и обратном направлениях является невзаимным. На этом принципе строятся невзаимные СВЧ-устройства, например ферритовый вентиль. Кроме явления Фарадея, в намагниченном феррите наблюдают явление резонансного поглощения одной из двух волн (с правой поляризацией).

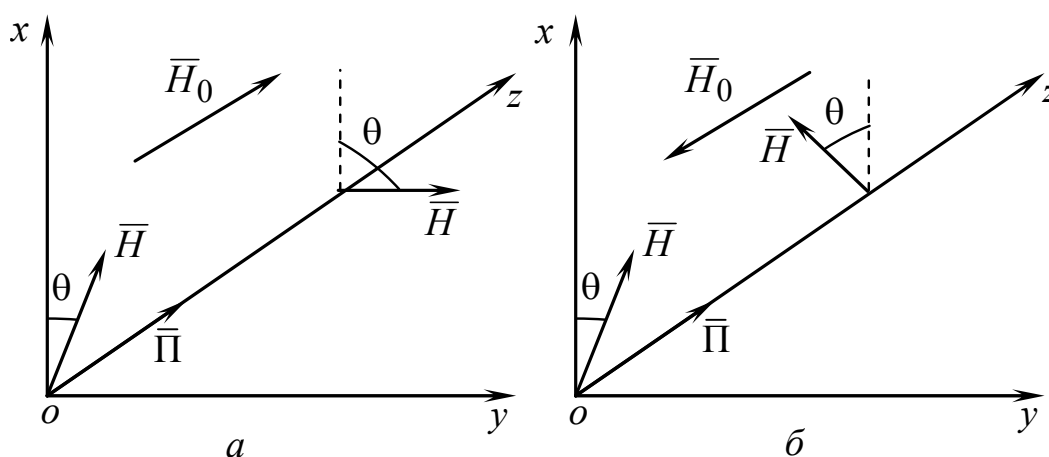


Рис. 6.8. К определению направления вращения вектора  $\vec{H}$  при распространении электромагнитной волны в продольно-намагниченном феррите

Рассмотрим условия резонансного поглощения. Из формулы для волнового числа  $k_{1,2} = \omega \sqrt{\epsilon_0 (\mu_x \pm a)}$

получаем волновое число для волны с левой круговой поляризацией:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_m \omega_0}{\omega^2 - \omega_m^2} + \frac{\omega_0 \omega}{\omega^2 - \omega_m^2} \right)} = \\
 &= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_0 (\omega_m - \omega)}{\omega^2 - \omega_m^2} \right)} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \left( 1 + \frac{\omega_0}{\omega + \omega_m} \right)}.
 \end{aligned}$$

Для волны с правой круговой поляризацией волновое число

$$k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega - \omega_m} \right)}.$$

Для волны с правой поляризацией на частоте  $\omega = \omega_m$   $k \rightarrow \infty$ ,  $\vartheta_\phi \rightarrow 0$ , следовательно, наблюдается явление продольного гиромагнитного резонанса. Эта волна распространяться не может. Практически всегда в среде имеются потери, поэтому при резонансе волна правого направления вращения претерпевает сильное поглощение. На выходе феррита в этом случае будет волна с левой круговой поляризацией.

Исходя из принципа перестановочной двойственности можно утверждать, что распространение электромагнитных волн в намагниченной плазме сопровождается теми же явлениями, что и в намагниченном феррите.

Эти эффекты учитываются при исследовании распространения радиоволн в ионосфере.

## 6.6. Поперечное распространение электромагнитных волн в феррите

Пусть постоянное магнитное поле приложено вдоль оси  $z$ , волна распространяется вдоль оси  $x$ .

Определим все основные характеристики электромагнитной волны: скорость, волновое сопротивление, поляризацию. Как и ранее, будем рассматривать плоскую волну. Запишем систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд в скалярной форме.

В соответствии с принятым выше приближением плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ , положим

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (6.72)$$

Система уравнений значительно упростится:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} &= -j\omega\varepsilon\dot{E}_{my}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} &= -j\omega\mu_0\dot{H}_{mz}; \\ \dot{E}_{mx} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} &= j\omega\varepsilon\dot{E}_{mz}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= j\omega(ja\dot{H}_{mx} + \mu_x\dot{H}_{my}); \\ \mu_x\dot{H}_{mx} &= ja\dot{H}_{my}. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Обратим внимание на то, что системы уравнений (6.73) и (6.74) являются независимыми. В систему (6.73) входят проекции  $\dot{E}_{mx}$ ,  $\dot{E}_{my}$ ,  $\dot{H}_{mz}$ , в (6.74) — только  $\dot{H}_{mx}$ ,  $\dot{H}_{my}$ ,  $\dot{E}_{mz}$ .

Найдем решение этих систем уравнений в виде плоских волн:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mx} &= E_{mx}e^{-jkx}; & \dot{H}_{mx} &= H_{mx}e^{-jkx}; \\ \dot{E}_{my} &= E_{my}e^{-jkx}; & \dot{H}_{my} &= H_{my}e^{-jkx}; \\ \dot{E}_{mz} &= E_{mz}e^{-jkx}; & \dot{H}_{mz} &= H_{mz}e^{-jkx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

Подставим значения проекций в системы уравнений (6.73) и (6.74):

$$\left. \begin{aligned} kH_{mz} &= \omega\varepsilon E_{my}; \\ kE_{my} &= \omega\mu_0 H_{mx}; \\ E_{mx} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

$$\left. \begin{aligned} kH_{my} &= -\omega\varepsilon E_{mz}; \\ kE_{mz} &= -\omega(jaH_{mx} + \mu_x H_{my}); \\ \mu_x H_{mx} &= jaH_{my}. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Из системы уравнений (6.76) получаем:

$$\begin{aligned} k_{об}^2 &= \omega^2 \varepsilon \mu_0; \\ \mathfrak{D}_{об} &= \frac{\omega}{k_{об}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}. \end{aligned}$$

Эта система описывает обыкновенную волну, то есть волну без дисперсии с нулевой продольной составляющей. Поперечные составляющие в этой волне связаны соотношением

$$E_{my} = \frac{k}{\omega\varepsilon} H_{mz}.$$

Обыкновенная волна линейно поляризована.

По-иному ведет себя волна, описываемая системой (6.77). В отличие от обыкновенной, эта волна имеет продольную составляющую магнитного поля. Как вытекает из третьего уравнения системы (6.77), продольная составляющая  $\dot{H}_{mx}$  сдвинута по фазе на  $\pi/2$  относительно поперечной составляющей  $\dot{H}_{my}$ .

Следовательно, вектор напряженности магнитного поля вращается в плоскости  $xoy$ , описывая своим концом эллипс (рис. 6.9). Подобная волна получила название необыкновенной.

Определим из (6.77) волновое число и фазовую скорость необыкновенной волны:

$$k_{но} = \omega \sqrt{\varepsilon \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x}}; \quad \mathfrak{D}_{но} = \left( \varepsilon \frac{\mu_x^2 - a^2}{\mu_x} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.78)$$

Фазовая скорость необыкновенной волны зависит от величины приложенного поля. При  $\mu_x = 0$  необыкновенная волна распространяться не может. В этом случае наблюдается продольный гиромагнитный резонанс.

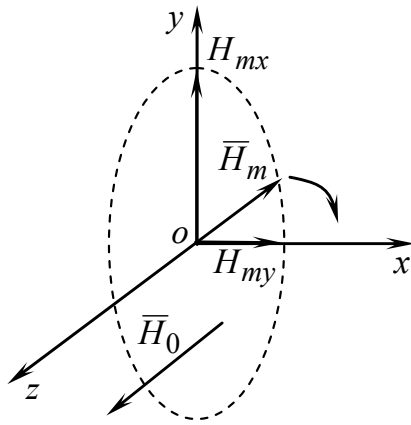


Рис. 6.9. Поляризационная структура необыкновенной волны в поперечно-намагниченном феррите

в феррите. Поскольку, как уже упоминалось, тензоры магнитной и диэлектрической проницаемостей симметричны, все решения уравнений Максвелла для намагниченной плазмы можно получить исходя из принципа перестановочной двойственности.

## Контрольные вопросы

1. В чем состоит явление двойного лучепреломления и как оно объясняется?
2. Как можно с помощью одноосного кристалла преобразовать поляризацию волны из линейной в круговую и обратно?
3. Какие среды называются анизотропными, а какие — гиротропными? Если среда гиротропная, то является ли она анизотропной, и наоборот? Приведите примеры.
4. Что такое спин электрона и как он себя ведет в постоянном магнитном поле? Какую роль при этом играет механический момент движения электрона?
5. Что такое прецессия спина? Почему она оказывает влияние на распространение волн в феррите, если время прецессии так мало? Проведите аналогию с вращением электрона в постоянном магнитном поле.

Частота поперечного гироманитного резонанса определяется формулой:

$$\omega_{\Pi} = \sqrt{\omega_m (\omega_0 + \omega_m)}.$$

При наличии потерь необыкновенная волна испытывает в окрестностях этой частоты резонансное поглощение.

В заключение заметим, что распространение электромагнитных волн в намагниченной плазме сопровождается теми же эффектами, что и



6. Запишите выражения для сил, действующих на спин электрона и электрон в намагниченных феррите и плазме. Что в этих выражениях является причиной анизотропии феррита и плазмы?

7. Плазма, даже в ненамагниченном состоянии, обладает рядом уникальных свойств. Укажите некоторые из них, исходя из выражения для  $\epsilon$  ненамагниченной плазмы.

8. В чем заключается эффект Фарадея, в каких средах и когда он наблюдается?

9. Изобразите ориентацию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн при поперечном распространении в намагниченных феррите и плазме и объясните различные свойства этих волн.

## 7. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн

### 7.1. Общие положения

Наш интерес вновь обращен к плоским электромагнитным волнам. Их, во-первых, можно рассматривать как предельный случай сферических волн, возбуждаемых источниками в неограниченной среде, во-вторых, волны с более сложной конфигурацией фронта можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Именно эти простейшие волны представляют наиболее удобный объект исследования волнового характера электромагнитного поля. Однако в большинстве практических задач нельзя говорить об однородном бесконечном пространстве. Обычно существенное влияние на распространение волн оказывают границы, разделяющие разнородные области. Так, волны над землей следует изучать с учетом их поведения на границе «земля – воздух»; характер волн в линиях передачи определяется наличием границ между направляющими проводниками и промежуточным диэлектриком и т.д. Настоящий раздел предшествует рассмотрению специальных задач подобного типа. В нем ставится цель дать основные представления о распространении электромагнитных волн в пространстве, состоящем из разнородных областей.

Электромагнитная волна, падая на плоскую границу раздела сред, частично проходит через нее, продолжая распространяться в измененном направлении, — преломляется, частично же отражается от границы, которая при этом служит как бы источником обратной волны (рис. 7.1,а).

Падение электромагнитной волны на тело ограниченных размеров представляет собой принципиально аналогичное, однако значительно более сложное явление, называемое дифракцией. Ни отраженная, ни преломленная волна здесь уже не может быть плоской (рис. 7.1,б).

Практически важен класс задач, в которых одной из сред является идеальный проводник. Такие идеализированные задачи воспроизводят основные черты явлений, происходящих при наличии

реальных хороших проводников — металлов. Как известно, электромагнитное поле внутри идеального проводника существовать не может; оно вовсе не проникает в идеальный проводник, поэтому на его границе отсутствует преломление, волна лишь отражается.

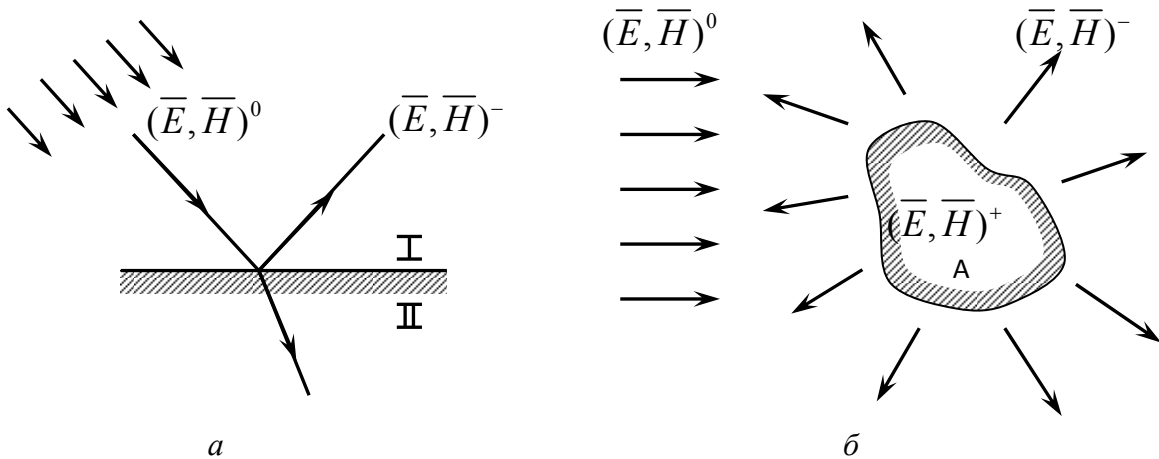


Рис. 7.1. Падение электромагнитной волны: *a* — на плоскую границу раздела сред; *б* — на тело ограниченных размеров

Электромагнитное поле, проникая в реальный проводник, весьма быстро затухает. В глубине его поле и ток практически отсутствуют. Потери энергии при отражении от реальных проводников весьма невелики, но в ряде случаев представляют собой единственный вид потерь в системе и поэтому нуждаются в учете. Для этой цели применяется метод граничных условий Леонтовича.

## 7.2. Нормальное падение плоской волны

Пусть плоскость  $xoy$  разделяет среды, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых соответственно равны:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 \text{ и } \varepsilon_1 \text{ при } z < 0, \\ \mu_2 \text{ и } \varepsilon_2 \text{ при } z > 0. \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

Плоская однородная электромагнитная волна, распространяясь в левом полупространстве, имеющем волновое сопротивление  $Z_1$ ,

падает на границу раздела (рис. 7.2). Комплексные амплитуды векторов  $\bar{H}$  и  $\bar{E}$  падающей волны запишем в виде

$$\dot{\bar{H}}_m^0 = \bar{y}_0 \dot{A} e^{-jk_1 z}, \quad (7.2)$$

$$\dot{\bar{E}}_m^0 = \bar{x}_0 \dot{A} Z_1 e^{-jk_1 z}.$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям при  $z = 0$ , необходимо предположить существование отраженной волны, распространяющейся в первой среде в обратном направлении:

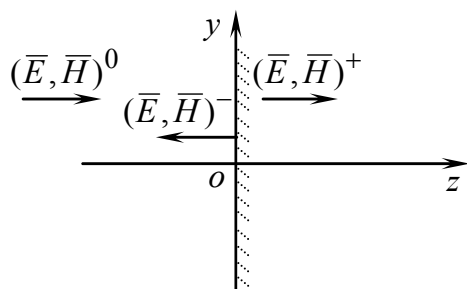


Рис. 7.2. Падение плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m^- &= -\bar{y}_0 \dot{B} e^{jk_1 z}, \\ \dot{\bar{E}}_m^- &= \bar{x}_0 \dot{B} Z_1 e^{jk_1 z}, \end{aligned} \right\} z \leq 0, \quad (7.3)$$

и волны, прошедшей во вторую среду с волновым сопротивлением  $Z_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m^+ &= \bar{y}_0 \dot{C} e^{-jk_2 z}, \\ \dot{\bar{E}}_m^+ &= \bar{x}_0 \dot{C} Z_2 e^{-jk_2 z}, \end{aligned} \right\} z \geq 0. \quad (7.4)$$

Векторы поля параллельны границе  $xoy$  и, значит, имеют только тангенциальные составляющие, поэтому они непрерывны на ней:

$$\dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^- = \dot{H}_m^+, \quad (7.5)$$

$$\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+.$$

Отсюда с учетом (7.2)–(7.4) при  $z = 0$  получим

$$\begin{aligned} \dot{A} - \dot{B} &= \dot{C}, \\ (\dot{A} + \dot{B})Z_1 &= \dot{C}Z_2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Отношения комплексных амплитуд на границе раздела

$$\rho = \frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}}, \quad \tau = \frac{\dot{E}_m^+(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{\dot{C}Z_2}{\dot{A}Z_1} \quad (7.7)$$

называются соответственно коэффициентом отражения и коэффициентом прохождения. Внося эти обозначения в (7.6), имеем:

$$1 - \rho = \frac{Z_1}{Z_2} \tau, \quad (7.8)$$

$$1 + \rho = \tau,$$

откуда

$$\rho = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (7.9)$$

Итак, электромагнитное поле в первой среде представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^{(1)} &= \bar{y}_0 \dot{A} \left( e^{-jk_1 z} - \rho e^{jk_1 z} \right), \\ \dot{E}_m^{(1)} &= \bar{x}_0 \dot{A} Z_1 \left( e^{-jk_1 z} + \rho e^{jk_1 z} \right), \end{aligned} \right\} z \leq 0, \quad (7.10)$$

а во второй — прошедшую волну:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^{(2)} &= \bar{y}_0 \dot{A} \frac{Z_1}{Z_2} \tau e^{-jk_2 z}, \\ \dot{E}_m^{(2)} &= \bar{x}_0 \dot{A} Z_1 \tau e^{-jk_2 z}, \end{aligned} \right\} z \geq 0. \quad (7.11)$$

Легко заметить, что амплитуда поля в первой среде периодически изменяется вдоль оси  $z$ . Переписав одну из формул (7.10) в виде

$$\dot{E}_m^{(1)} = \bar{x}_0 \dot{A} Z_1 e^{-jk_1 z} \left( 1 + \rho e^{j2k_1 z} \right),$$

мы констатируем, что амплитуда  $\dot{E}_m^{(1)}$  пропорциональна модулю комплексного числа  $1 + \rho e^{j2k_1 z}$ .

Считая  $k_1$  величиной вещественной (в среде отсутствуют потери), воспользуемся векторной диаграммой, представленной на рис. 7.3. По мере движения волны вдоль оси  $z$  условный вектор  $\rho$  вращается около фиксированного единичного вектора. Амплитуда  $\dot{E}_m^{(1)}$  пропорциональна их сумме (рис. 7.4), периодически меняющейся с ростом координаты  $z$ . Соседние минимумы (или соседние

максимумы)  $\dot{E}_m^{(1)}$  расположены на расстоянии  $\Delta z$ , соответствующем полному обороту  $\rho$ :

$$2k_1\Delta z = 2\pi,$$

т.е., как видно из этого условия, на расстоянии половины волны:

$$\Delta z = \frac{\pi}{k_1} = \frac{\lambda_1}{2}. \quad (7.12)$$

Когда волновые сопротивления обеих сред близки, коэффициент отражения (7.9) невелик и «волнистость» поля в первой среде незначительна. При резком различии волновых сопротивлений коэффициент отражения близок к единице, и амплитуда поля периодически спадает почти до нуля. Рассмотрим два предельных случая.

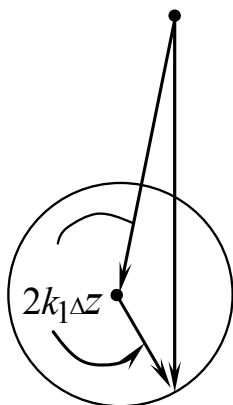


Рис. 7.3. Векторная диаграмма для описания периодически изменяющегося поля вдоль оси  $z$  в первой среде

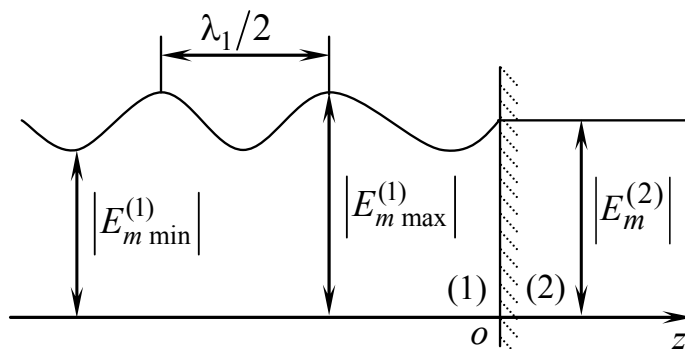


Рис. 7.4. Распределение амплитуды поля  $\dot{E}_m^{(1)}$  вдоль оси  $z$  в первой среде

1. Согласование сред. Если  $Z_1 = Z_2$ , что возможно лишь при соотношении проницаемостей

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (7.13)$$

то согласно (7.9)  $\rho = 0$ , т.е. отражение отсутствует, а амплитуда поля в обеих средах (если не говорить о поглощении) не изменяется.

2. Полное отражение. Если волна падает на границу с идеально проводящей средой ( $\sigma_2 \rightarrow \infty$ ), то

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon'_2 - j\sigma_2/\omega}} \rightarrow \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2}} \rightarrow 0. \quad (7.14)$$

То есть в соответствии с (7.9)  $\tau = 0$  и  $\rho = -1$ . Поле не проникает во вторую среду, в первой же оно (см. (7.10)) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^{(1)} &= \bar{y}_0 2 \dot{A} \cos k_1 z, \\ \dot{E}_m^{(1)} &= \bar{x}_0 j 2 \dot{A} Z_1 \sin k_1 z. \end{aligned} \quad (7.15)$$

В отсутствие поглощения (вещественная величина  $k_1$ ) электрическое и магнитное поля во всем пространстве остаются неизменными по фазе и имеют фазовый сдвиг  $\pi/2$ . Таким образом, среднее значение вектора Пойнтинга в любой точке поля равно нулю и передачи энергии нет. Магнитное поле при этом распределено косинусоидально, а электрическое — синусоидально от границы (рис. 7.5). Это обстоятельство отмечается как «пространственный сдвиг» полей на четверть волны. Электромагнитное поле этого вида называется стоячей волной.

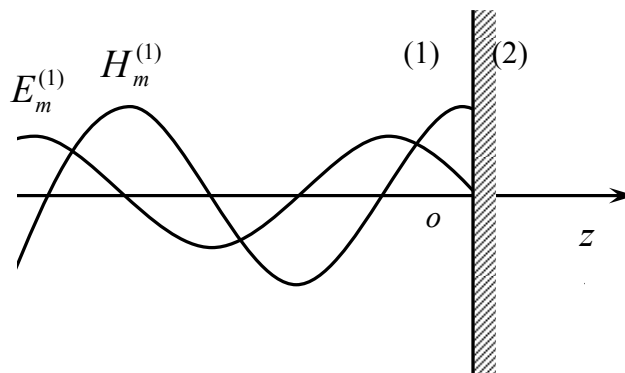


Рис. 7.5. Пространственный сдвиг электрического и магнитного полей на четверть длины волны при полном отражении от границы с идеально проводящей средой

Вычисление коэффициента отражения от металлической поверхности убеждает в том, что различие между реальными металлами и идеальным проводником вполне пренебрежимо, пока не

ставится задача учесть потери в металле. Эти потери, возникающие в результате проникновения волны в металл, очень малы и практически заметны главным образом в системах с многократным отражением волн — волноводах и полых резонаторах.

На практике возможны также случаи, когда поле, весьма близкое к стоячей волне, возникает при отражении от среды с резко отличающимся волновым сопротивлением. В этом нетрудно удостовериться, заметив, что при  $|Z_1| \gg |Z_2|$  и  $|Z_1| \ll |Z_2|$  согласно (7.9) коэффициент отражения по модулю  $|\rho| \approx \pm 1$ .

### 7.3. Волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Комплексная амплитуда электрического поля волны, распространяющейся в произвольном направлении  $\vec{z}'$ , записывается в виде

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m e^{-jkz'}. \quad (7.16)$$

Необходимо записать уравнение (7.16) в декартовой (не штрихованной) системе координат (рис. 7.6).

Пусть  $\vec{n}_0$  — нормаль к волновому фронту, совпадающая с направлением распространения  $\vec{z}'$ . Ее можно расписать через направляющие косинусы:

$$\vec{n}_0 = \underbrace{\bar{x}_0 \cos(\vec{n}_0, \hat{x}_0)}_{\ell} + \underbrace{\bar{y}_0 \cos(\vec{n}_0, \hat{y}_0)}_{m} + \underbrace{\bar{z}_0 \cos(\vec{n}_0, \hat{z}_0)}_{n}. \quad (7.17)$$

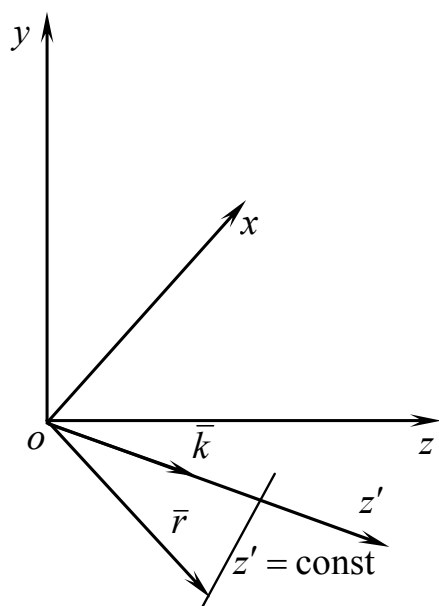


Рис. 7.6. Распространение электромагнитной волны в произвольном направлении  $\vec{z}'$

Найдем скалярное произведение  $\vec{n}_0$  на направление, задаваемое вектором  $\vec{r}$ .



Это даст нам проекцию  $\bar{r}$  на направление  $z$ :

$$(\bar{n}_0, \bar{r}) = x\ell + ym + zn. \quad (7.18)$$

Введем волновой вектор  $\bar{k}$ :

$$k\bar{n}_0 = \bar{k}. \quad (7.19)$$

С учетом этого запишем комплексную амплитуду напряженности электрического поля волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\dot{\bar{E}}_m = \bar{E}_m e^{-jk(x\ell + ym + zn)}. \quad (7.20)$$

Изучая наклонное падение волны на плоскую границу, мы рассмотрим два качественно различных случая. В первом из них электрический вектор падающей волны параллелен граничной плоскости (рис. 7.7,а) и, следовательно, перпендикулярен плоскости падения  $p$ . Волна, как мы будем условно считать, поляризована при этом горизонтально.

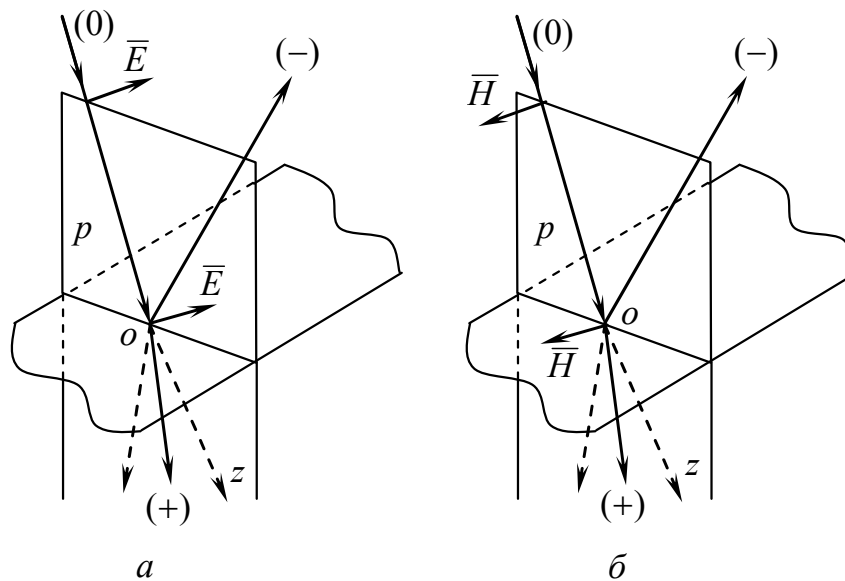


Рис. 7.7. Наклонное падение плоской волны на границу раздела сред: а – горизонтальная поляризация волны; б – вертикальная поляризация волны

Во втором случае (рис. 7.7,б) волна поляризована в плоскости падения, т.е. по определению вертикально.

Любую линейно поляризованную волну можно разложить на компоненты горизонтальной и вертикальной поляризации с тем, чтобы рассматривать их в отдельности.

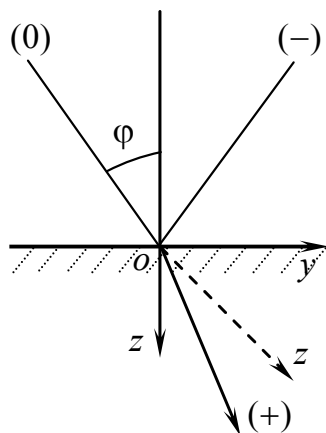


Рис. 7.8. Выбор осей координат при наклонном падении волны

В качестве границы сред возьмем плоскость  $xoy$  (рис. 7.8), так что

$$k = k_1 \quad \text{при } z < 0,$$

$$k = k_2 \quad \text{при } z > 0.$$

Волна, распространяясь в первой среде в плоскости  $yoz$ , падает на границу под углом  $\varphi$  к нормали, совпадающей с отрицательной осью  $z$ .

При этом

$$k_1 z' = k_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi).$$

## 7.4. Формулы Френеля для горизонтально поляризованных волн

Определим коэффициенты прохождения и отражения горизонтально поляризованных волн при наклонном падении. Падающая, отраженная и преломленная волны, а также соответствующие им углы показаны на рис. 7.9, где ось  $x$  направлена от нас, граница раздела сред лежит в плоскости  $xoy$ .

Комплексные амплитуды падающих волн, распространяющихся в направлении  $z'$  в штрихованной системе координат, записываются в виде

$$\dot{H}_m^0 = \bar{y}'_0 \dot{A} e^{-jkz'}, \quad (7.21)$$

$$\dot{E}_m^0 = \bar{x}'_0 Z_1 \dot{A} e^{-jkz'},$$

где  $Z_1$  — волновое сопротивление первой среды.

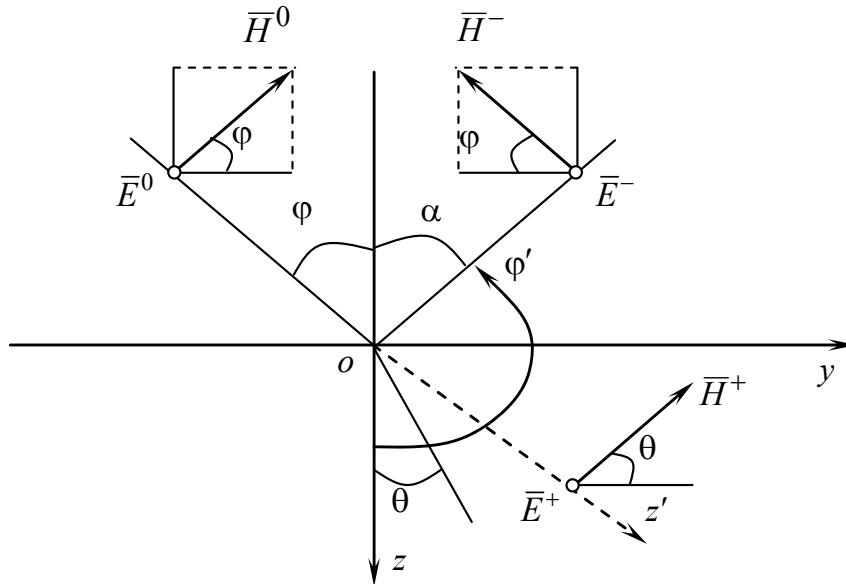


Рис. 7.9. Выбор направлений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  падающей, отраженной и преломленной волн при наклонном падении горизонтально поляризованной волны

Переходя к основным координатам  $(x, y, z)$  и учитывая, что  $x'$  совпадает с  $x$ , запишем поле падающей волны при значениях направляющих косинусов  $l = \cos \pi/2 = 0$ ,  $m = \cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi$ ,  $n = \cos \varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^0 &= \dot{A}(\bar{y}_0 \cos \varphi - \bar{z}_0 \sin \varphi) e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^0 &= \dot{A} Z_1 \bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} . \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Напряженность магнитного поля отраженной волны

$$\dot{\vec{H}}_m^- = \dot{B}(\bar{y}_0 \cos \alpha - \bar{z}_0 \sin \alpha) e^{-jk_1(y \sin \alpha - z \cos \alpha)} . \quad (7.23)$$

Произведем в (7.23) замену углов в соответствии с рис. 7.9:

$$\alpha = \pi - \varphi' ;$$

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \varphi') = -\cos \varphi' ;$$

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \varphi') = \sin \varphi' .$$

В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^- &= \dot{B}(\bar{y}_0 \cos \varphi' - \bar{z}_0 \sin \varphi') e^{-jk_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^- &= \dot{B} Z_1 \bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')} . \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Аналогично действуя для преломленных волн, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^+ &= \dot{C}(\bar{y}_0 \cos \theta - \bar{z}_0 \sin \theta) e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^+ &= \dot{C}Z_2 e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} . \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Ввиду того что граничные условия нужно выполнять вдоль всей оси  $y$ , все три волны — падающая, отраженная и преломленная — должны иметь одинаковую зависимость от координаты  $y$ . Следовательно, коэффициенты при  $y$  должны быть равны:

$$\begin{aligned} k_1 \sin \varphi &= k_1 \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \varphi ; \\ k_1 \sin \varphi &= k_2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{k_2}{k_1} \sin \varphi . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Отсюда вытекают известные законы Снеллиуса:

1) угол отражения равен углу падения —

$$\alpha = \varphi ; \quad (7.27)$$

2) углы падения и преломления связаны зависимостью

$$\sin \theta = n_{12} \sin \varphi , \quad (7.28)$$

$$\text{где } n_{12} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_1}{n_2} .$$

Для определения коэффициентов отражения и прохождения проведем так называемое сшивание решений для полей в первой среде и во второй среде на границе раздела. Поле в первой среде представляет сумму полей падающей (7.22) и отраженной (7.24) волн. Поле во второй среде — это поле преломленной волны (7.25). На границе раздела двух диэлектриков тангенциальные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  непрерывны, т.е.

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau} ; \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau} ; \end{aligned} \right|_{z=0} . \quad (7.29)$$

С учетом выражений (7.27), (7.28) формулы (7.22), (7.24) и (7.25) можно переписать. Для падающей волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^0 &= \dot{A}(\bar{y}_0 \cos \varphi - \bar{z}_0 \sin \varphi) e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^0 &= \dot{A} Z_1 \bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} . \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Для отраженной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^- &= \dot{B}(-\bar{y}_0 \cos \varphi - \bar{z}_0 \sin \varphi) e^{-jk_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^- &= \dot{B} Z_1 \bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)} . \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Для преломленной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^+ &= \dot{C}(\bar{y}_0 \cos \theta - \bar{z}_0 \sin \theta) e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} ; \\ \dot{\vec{E}}_m^+ &= \dot{C} Z_2 \bar{x}_0 e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)} . \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Поле в первой среде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{(1)} &= \dot{\vec{E}}_m^0 + \dot{\vec{E}}_m^- ; \\ \dot{\vec{H}}_m^{(1)} &= \dot{\vec{H}}_m^0 + \dot{\vec{H}}_m^- . \end{aligned} \quad (7.33)$$

Поле во второй среде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{(2)} &= \dot{\vec{E}}_m^+ ; \\ \dot{\vec{H}}_m^{(2)} &= \dot{\vec{H}}_m^+ . \end{aligned} \quad (7.34)$$

Тангенциальные составляющие векторов можно выразить через их проекции:

$$\begin{aligned} E_\tau^{(1)} &= E_x^0 + E_x^- ; & H_\tau^{(1)} &= H_y^0 + E_y^- ; \\ E_\tau^{(2)} &= E_x^+ ; & H_\tau^{(2)} &= H_y^+ . \end{aligned}$$

При  $z = 0$  получим

$$\dot{A} - \dot{B} = \dot{C} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} ; \quad (7.35)$$

$$\dot{A} - \dot{B} = \dot{C} \frac{Z_2}{Z_1} . \quad (7.36)$$

Определим коэффициенты отражения  $\rho_\Gamma$  и прохождения  $\tau_\Gamma$  как отношения амплитуд отраженной и прошедшей волн к амплитуде падающей волны на границе раздела сред:

$$\rho_\Gamma = \frac{E_m^-(z=0)}{E_m^0(z=0)} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}};$$

$$\tau_\Gamma = \frac{E_m^+(z=0)}{E_m^0(z=0)} = \frac{\dot{C}}{\dot{A}}.$$
(7.37)

Подставив (7.37) в (7.35), (7.36), получим систему

$$\begin{cases} 1 - \rho_\Gamma = \tau_\Gamma \frac{Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \varphi}; \\ 1 + \rho_\Gamma = \tau_\Gamma. \end{cases}$$
(7.38)

Отсюда следуют формулы Френеля для горизонтально поляризованной волны:

$$\rho_\Gamma = \frac{Z_2 \cos \varphi - Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \theta};$$

$$\tau_\Gamma = \frac{2Z_2 \cos \varphi}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \theta}.$$
(7.39)

## 7.5. Формулы Френеля для вертикально поляризованных волн

Вывод требуемых формул аналогичен предыдущему (рис. 7.10), поэтому без подробного обсуждения приведем значения комплексных амплитуд.

Для падающей волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^0 &= A\bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}; \\ \dot{E}_m^0 &= \dot{A}Z_1(\bar{y}_0 \cos \varphi + \bar{z}_0 \sin \varphi) e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Для отраженной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m^- &= \dot{B}\bar{x}_0 e^{-jk_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)}; \\ \dot{\bar{E}}_m^- &= \dot{B}Z_1(\bar{y}_0 \cos \varphi + \bar{z}_0 \sin \varphi) e^{-jk_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Для преломленной волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m^+ &= \dot{C}\bar{x}_0 e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)}; \\ \dot{\bar{E}}_m^+ &= \dot{C}Z_2(-\bar{y}_0 \cos \theta + \bar{z}_0 \sin \theta) e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

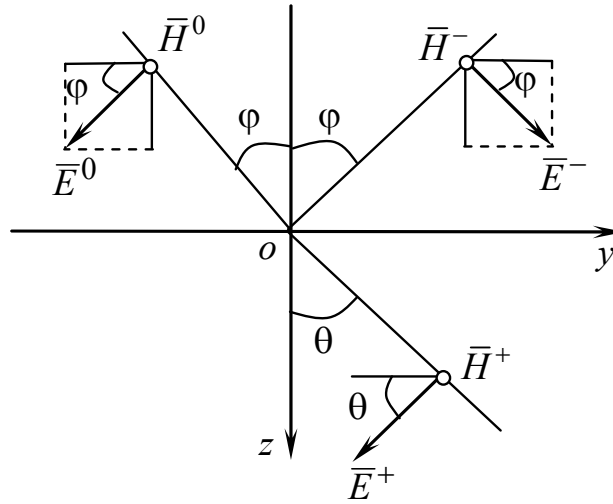


Рис. 7.10 Выбор направлений векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  падающей, отраженной и преломленной волн при наклонном падении вертикально поляризованной волны

Воспользуемся граничными условиями (7.29) и получим систему уравнений

$$\dot{A} - \dot{B} = \dot{C} \frac{Z_2 \cos \theta}{Z_1 \cos \varphi}; \quad (7.43)$$

$$\dot{A} + \dot{B} = \dot{C}.$$

Введем коэффициенты отражения  $\rho_B$  и прохождения  $\tau_B$ :

$$\rho_B = \frac{H_m^-(z=0)}{H_m^0(z=0)} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}}; \quad \tau_B = \frac{H_m^+(z=0)}{H_m^0(z=0)} = \frac{\dot{C}}{\dot{A}}.$$

Подставив их в (7.43), получим формулы Френеля для вертикально поляризованной волны:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{в}} &= \frac{2Z_1 \cos \varphi}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \theta}; \\ \rho_{\text{в}} &= -\frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \varphi}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \theta}.\end{aligned}\tag{7.44}$$

## 7.6. Полное отражение от границы двух диэлектриков

Предположим, что электромагнитная волна падает из более плотной в оптическом отношении диэлектрической среды на границу с менее плотной, т.е. имеет место неравенство

$$n_1 > n_2.$$

Из второго закона Снеллиуса  $\sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi$  следует, что  $\theta > \varphi$ . Если угол  $\varphi$  увеличивать, то при некотором угле, называемом критическим, —  $\varphi_{\text{кр}}$ , угол преломления  $\theta$  окажется равным  $\pi/2$ , то есть волна начинает распространяться вдоль границы раздела. Это явление полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.\tag{7.45}$$

Исследуем волновую природу этого явления. При  $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$  величина  $\cos \theta$  мнимая, так как

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \varphi}$$

и при  $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$  величина  $\frac{n_1}{n_2} \sin \varphi > 1$ .

Из формул Френеля для коэффициентов отражения следует:



$$|\rho_r| = \left| \frac{Z_2 \cos \varphi - jZ_1 |\cos \theta|}{Z_2 \cos \varphi + jZ_1 |\cos \theta|} \right| = 1; \quad (7.46)$$

$$|\rho_b| = \left| \frac{-Z_1 \cos \varphi + jZ_2 |\cos \theta|}{Z_1 \cos \varphi + jZ_2 |\cos \theta|} \right| = 1.$$

Привлекая формулы (7.30), (7.31) и соответственно (7.40) и (7.41), легко заметить, что все компоненты поля первой среды, представляющего собой суперпозицию падающих и отраженных волн, зависят от координат по закону

$$f(y, z) = e^{-jk_1 y \sin \varphi - jk_1 z \cos \varphi} \pm e^{-jk_1 y \sin \varphi + jk_1 z \cos \varphi + j\psi}, \quad (7.47)$$

где  $\psi$  — фаза коэффициента отражения.

Преобразуя эту функцию, получим:

$$f(y, z) = \underbrace{2e^{-j\left(k_1 y \sin \varphi - \frac{\psi}{2}\right)}}_{\text{Фазовый множитель}} \underbrace{\begin{cases} \cos\left(k_1 z \cos \varphi + \frac{\psi}{2}\right) \\ -j \sin\left(k_1 z \cos \varphi + \frac{\psi}{2}\right) \end{cases}}_{\text{Амплитудный множитель}}. \quad (7.48)$$

Этот результат означает, что поле имеет характер волны, распространяющейся вдоль оси  $y$  с постоянной распространения

$$\Gamma = k_1 \sin \varphi \quad (7.49)$$

и распределением амплитуд по нормали к границе (ось  $z$ ) типа стоячей волны с волновым числом

$$\beta_1 = k_1 \cos \varphi. \quad (7.50)$$

Как следует из (7.48), в этом случае  $y = \text{const}$  — плоскость равных фаз,  $z = \text{const}$  — плоскость равных амплитуд. Плоскость равных фаз и плоскость равных амплитуд оказались перпендикулярны друг другу.

Рассмотрим поле во второй среде:

$$E_2, H_2 \sim e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)},$$

где  $k_2 \sin \theta = k_1 \sin \varphi = \Gamma$ ;  $k_2 \sin \theta = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = \pm j\beta_z$  — мнимая величина.

Отсюда

$$E_2, H_2 \sim e^{-j\Gamma y} e^{-\beta z}. \quad (7.51)$$

Поле во второй среде распространяется вдоль оси  $y$  и затухает экспоненциально в направлении нормали к границе. Таким образом, поле в средах определяется формулами:

в первой среде

$$(E, H)^{(1)} \sim \underbrace{A_0 \sin\left(\beta z + \frac{\Psi}{2}\right)}_{\text{Амплитудный множитель}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \Gamma y - \frac{\Psi}{2}\right)}_{\text{Фазовый множитель}};$$

во второй среде

$$(E, H)^{(2)} \sim \underbrace{B_0 e^{-\beta z}}_{\text{Амплитудный множитель}} \underbrace{\cos(\omega t - \Gamma y)}_{\text{Фазовый множитель}}.$$

В обеих средах волна распространяется вдоль оси  $y$ , т.е. вдоль границы раздела, амплитуда меняется вдоль оси  $z$ , как показано на рис. 7.11.

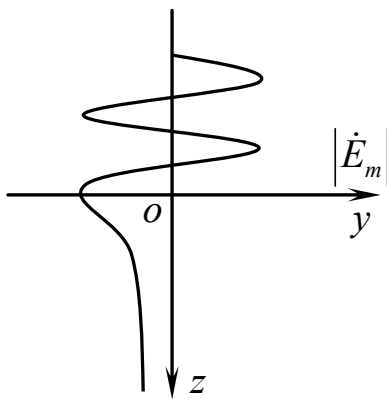


Рис. 7.11. К вопросу образования неоднородной волны при полном внутреннем отражении

Заметим также, что фазовая скорость электромагнитных волн во второй среде  $\vartheta_{\phi 2}$  больше, чем скорость электромагнитной волны в такой же, но безграничной среде, так как  $\vartheta_{\phi 2} = \omega/\Gamma$ .

Возникающие при явлении полного внутреннего отражения волны называются неоднородными. Их основные особенности заключаются в следующем:

- 1) волна распространяется вдоль границы раздела сред (направляется границей раздела);
- 2) плоскости равных фаз и равных амплитуд взаимно перпендикулярны;

3) имеются продольные составляющие у векторов электрического поля для вертикальной и магнитного поля для горизонтальной поляризации;

4) во второй среде возникает волна, направляемая границей раздела и затухающая по направлению нормали к границе. Эта волна называется поверхностной. Физически ее появление определяется возникновением переходного процесса при отражении;

5) во второй среде возникает быстрая волна с фазовой скоростью  $c > \vartheta_\phi > c/\sqrt{\epsilon_{r2}}$ , где  $\epsilon_{r2}$  — относительная диэлектрическая проницаемость второй среды.

Явление полного внутреннего отражения применяется в диэлектрических волноводах, волоконной оптике.

## 7.7. Наклонное падение на границу поглощающей среды

Рассмотрим поле во второй (проводящей) среде:

$$\dot{E}_2, \dot{H}_2 \approx e^{-jk_2(y \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (7.52)$$

Волновое число в этой среде комплексная величина:

$$\dot{k}_2 = k' - jk''.$$

С учетом этого показатель экспоненты в соотношении (7.52) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_2 \sin \theta &= k_1 \sin \varphi = \alpha_y; \\ \dot{k}_2 \cos \theta &= \sqrt{\dot{k}_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = \alpha_z \pm j\beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Отсюда

$$\dot{E}_2, \dot{H}_2 \approx e^{-j(y\alpha_y + z\alpha_z)} e^{-z\beta}.$$

Из второго закона Снеллиуса следует, что в поглощающей среде угол преломления комплексная величина. Он не дает представления о действительном угле преломления. Определим угол, под

которым волна распространяется в поглощающей среде, обозначив его  $\xi$  (рис. 7.12):

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\alpha_y}{\alpha_z} = \frac{k_1 \sin \varphi}{\operatorname{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7.54)$$

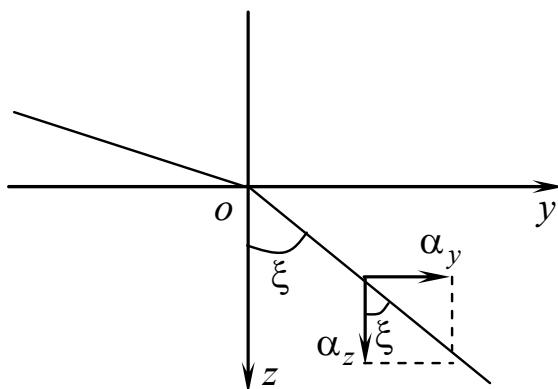


Рис. 7.12. К вопросу определения угла, под которым волна распространяется в поглощающей среде

Пусть среда, на границу с которой падает электромагнитная волна, проводник. В этом случае

$$|k_2| \gg |k_1|, \quad (7.55)$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{k_1 \sin \varphi}{\operatorname{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}} \cong 0.$$

Тогда из условия (7.55) следует, что  $\xi \cong 0$ .

Рассмотрим два типичных случая:

а) исчезающе малые потери ( $k_2'' \ll k_1''$ ).

При этом  $\alpha_z = jk_2 \cos \xi \approx jk_2' \cos \xi$ ,  $\alpha_y \approx jk_2' \sin \xi$  и согласно (7.53) и (7.55)

$$\xi = 0; \quad (7.56)$$

б) оптическая плотность поглощающей среды очень велика ( $|k_2| \gg |k_1|$ ). Пренебрегая в (7.55) числителем в сравнении со знаменателем, имеем

$$\operatorname{tg} \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0. \quad (7.57)$$

Большое практическое значение имеет случай, когда вторая среда проводник, для которого

$$|k_2|^2 = \omega \mu \sigma,$$

и исходное требование (б) всегда выполняется ввиду большой удельной проводимости  $\sigma$ .

Результат (7.57) показывает, что при любых углах падения  $\varphi$  на границу весьма плотной поглощающей среды преломленная волна распространяется практически в направлении нормали к границе. Плоскости равных амплитуд и фаз при этом совпадают.

## 7.8. Приближенные граничные условия Леонтовича

Полученный в предыдущем подразделе результат (7.57) приводит к мысли, что не только плоская волна, но и произвольное электромагнитное поле у границы достаточно плотной среды

$$|k_2| \gg |k_1| \quad (7.58)$$

возбуждает волны, уходящие в нее по нормали к поверхности раздела, так что можно пользоваться формулой

$$\dot{\vec{E}} = Z_2 \left[ \dot{\vec{H}}, \vec{n}'_0 \right], \quad (7.59)$$

где  $\vec{n}'_0$  — внутренняя нормаль к поверхности плотной среды;  $Z_2$  — ее волновое сопротивление.

Наиболее важен случай, когда рассматриваемая плотная среда проводник, тогда можно положить

$$\varepsilon = -j\sigma/\omega \quad (7.60)$$

и, таким образом,

$$Z_2 = \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}. \quad (7.61)$$

В силу непрерывности векторов поля соотношение (7.59) справедливо и на граничной поверхности (рис. 7.13): векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  уходящей в проводник волны равны тангенциальным компонентам соответствующих напряженностей поля в примыкающей к нему среде. Итак, на границе проводника существует следующее соотношение:

$$\dot{\bar{E}}_\tau = Z_2 \left[ \dot{\bar{H}}_2, \bar{n}'_0 \right]. \quad (7.62)$$

Введя местную систему координат с осью  $z$ , направленной по внутренней нормали ( $z_0 = n_0$ ), перепишем равенство (7.62) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= Z_2 \dot{H}_y; \\ \dot{E}_y &= -Z_2 \dot{H}_x. \end{aligned} \quad (7.62a)$$

Соотношения (7.62), (7.62a) известны под названием приближенных граничных условий Леонтовича.

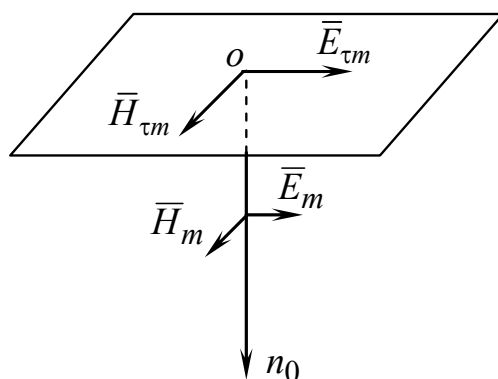


Рис. 7.13. К выводу приближенных граничных условий Леонтовича

Они указывают, в частности, на тот факт, что электрическое поле на поверхности проводника (в отличие от идеального проводника, когда  $\sigma \rightarrow \infty$ ) имеет тангенциальную компоненту. Эта со-

ставляющая очень мала и может не учитываться до тех пор, пока не ставится задача вычислить потери энергии в проводнике. Очевидно, что в приближении  $E_\tau = 0$  не принимается во внимание уходящий в проводник поток энергии.

Применение граничных условий Леонтовича к различным задачам непосредственно связано со степенью проникновения поля через границу.

## 7.9. Наклонное падение на границу с диэлектриком. Угол Брюстера

Выясним вначале условия, при которых волна горизонтальной поляризации без отражений проходит из одной среды в другую. Мы должны приравнять нулю коэффициент отражения:

$$\rho_r = \frac{Z_2 \cos \varphi - Z_1 \cos \theta}{Z_2 \cos \varphi + Z_1 \cos \theta} = 0;$$

$$\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 = \left(\frac{\cos \theta}{\cos \varphi}\right)^2 = \frac{1 - n_{1,2} \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi};$$

$$\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \sin^2 \varphi = 1 - n_{1,2} \sin^2 \varphi.$$

Отсюда

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2}{\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 - n_{1,2}^2} = \frac{1 - \frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (7.63)$$

Положим в (7.63)  $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ , т.е. диэлектрики — немагнитные среды. В этом случае угла, при котором отражение отсутствует, для горизонтально поляризованной волны не существует.

Проведем аналогичные действия в отношении волны, имеющей вертикальную поляризацию:

$$\rho_B = \frac{Z_1 \cos \varphi - Z_2 \cos \theta}{Z_1 \cos \varphi + Z_2 \cos \theta} = 0 \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi};$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2}{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}}{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (7.64)$$

Как и ранее, предположим

$$\mu_2 = \mu_1 = \mu_0. \quad (7.65)$$

Из (7.64) с учетом (7.65) получим

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1}{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1}. \quad (7.66)$$

Сравним (7.66) с известной тригонометрической формулой

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 + 1} \quad (7.67)$$

и обнаружим, что отражение отсутствует, если волна падает под так называемым углом Брюстера

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (7.68)$$

Если вертикально поляризованная волна направлена к границе раздела двух диэлектрических сред под углом Брюстера, то она без отражения проходит из одной среды в другую.



## Контрольные вопросы

1. Дайте определения плоскости поляризации, вертикально и горизонтально поляризованных волн. Верно ли, что при вертикальной поляризации вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен границе раздела?
2. Дайте определение волнового вектора электромагнитной волны. Для чего он вводится?
3. Как записывается фазовый множитель волны в точке с координатами  $(x, y, z)$  через волновой вектор и радиус-вектор, проведенный в эту точку?
4. Запишите законы Снеллиуса. Для границ каких сред они справедливы?
5. Дайте определение коэффициентов отражения и прохождения для волн с горизонтальной и вертикальной поляризацией. С чем связано существующее отличие в их определении?
6. При нормальном падении волны на границу плоскость падения и поляризация волны становятся неопределенными. Почему в этом случае коэффициенты прохождения, вычисленные по формулам для вертикальной и горизонтальной поляризаций, дают различные результаты?
7. В каких случаях граница идеальных диэлектриков полностью отражает или не отражает электромагнитную волну?
8. Какие волны называются неоднородными, а какие — поверхностными? Приведите примеры их появления.
9. Опишите структуру волн в обеих средах при явлении полного внутреннего отражения.
10. Из законов Снеллиуса следует, что угол преломления в поглощающей среде комплексный. Связано ли это с изменением типа волны при прохождении границы? Как найти истинный угол преломления?
11. В чем состоит приближенный характер граничных условий Леонтовича? Противоречат ли они строгим граничным условиям электродинамики или дополняют их?

## 8. Излучение электромагнитных волн

### 8.1. Уравнения Максвелла для области, содержащей источники. Неоднородные волновые уравнения

Понятие излучения уже затрагивалось в этой книге. Так, мы говорили об электромагнитных полях, возникающих в результате действия сторонних сил, т.е. в результате преобразования некоторой энергии в электромагнитную. В свою очередь сторонние силы в электродинамике удобно формализовать при помощи задания сторонних токов. В качестве стороннего может рассматриваться любой заданный ток. Таков, например, ток антенны, поддерживаемый действием генератора. Область существования стороннего тока выступает в качестве источника излучения. Поле излучения находится как решение уравнений Максвелла или вытекающих из них уравнений второго порядка при заданной плотности стороннего тока.

Записать эти уравнения нам сейчас предстоит. Начнем с уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}; \quad (8.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}. \quad (8.2)$$

Из закона сохранения заряда следует:

$$\operatorname{div} \bar{\dot{\vec{j}}}_{\text{ст}} = -j\omega\dot{\rho}_{\text{ст}}. \quad (8.3)$$

Найдем дивергенцию уравнения (8.1):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon \operatorname{div} \dot{\vec{E}} + \operatorname{div} \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} = j\omega\varepsilon \operatorname{div} \dot{\vec{E}} - j\omega\dot{\rho}_{\text{ст}} = 0. \quad (8.4)$$

Из (8.4) получим

$$\operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \frac{\dot{\rho}_{\text{ст}}}{\varepsilon}. \quad (8.5)$$

Выразив из равенства (8.2)

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}},$$

подставим в (8.1):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= k^2 \dot{\vec{E}} - j\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}; \\ \nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} + j\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}.\end{aligned}$$

Заменяя  $\operatorname{div} \dot{\vec{E}}$  из (8.5), окончательно получаем

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = \operatorname{grad} \frac{\dot{\rho}_{\text{ст}}}{\varepsilon} + j\omega\mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}. \quad (8.6)$$

Теперь из равенства (8.1) выразим

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}$$

и подставим в (8.2):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = k^2 \dot{\vec{H}} + \operatorname{rot} \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}.$$

Учитывая, что  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = -\operatorname{rot} \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}. \quad (8.7)$$

Уравнения (8.6) и (8.7) называются векторными уравнениями Даламбера. На основании уравнений Даламбера основная задача электродинамики для области, содержащей источники, сводится к отысканию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  по заданному распределению плотностей сторонних токов  $\dot{\vec{j}}_{\text{ст}}$  и зарядов  $\dot{\rho}_{\text{ст}}$ .

## 8.2. Электродинамические потенциалы

Как и в теории стационарных полей, в электродинамике используются различные скалярные и векторные функции. Обсудим употребление уже известных потенциалов  $\bar{A}$  и  $\phi$ , только зададим их в комплексной форме:  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\bar{A}}$  — комплексные электродинамические потенциалы.

Из соотношения (3.17) с привлечением материального уравнения зададим

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \dot{\vec{A}}. \quad (8.8)$$

Подставив (8.8) в (8.2), получим:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{E}} &= -j\omega \text{rot } \dot{\vec{A}}; \\ \text{rot}(\dot{\vec{E}} + j\omega \dot{\vec{A}}) &= 0. \end{aligned}$$

Далее, на основании тождества  $\text{rot grad } \phi \equiv 0$  запишем:

$$\dot{\vec{E}} + j\omega \dot{\vec{A}} = -\text{grad } \dot{\phi}; \quad (8.9)$$

$$\dot{\vec{E}} = -(\text{grad } \dot{\phi} + j\omega \dot{\vec{A}}). \quad (8.10)$$

Уравнения (8.8) и (8.10) дают возможность определить комплексные векторы поля, исходя из электродинамических потенциалов. Взяв реальные части этих комплексных величин, найдем векторы  $\bar{\vec{E}}$  и  $\bar{\vec{H}}$ . Выведем уравнения для электродинамических потенциалов. Подставим выражения для  $\bar{\vec{E}}$  и  $\bar{\vec{H}}$  (8.8), (8.10) в первое уравнение Максвелла (8.1):

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \dot{\vec{A}} = -j\omega \epsilon \text{grad } \dot{\phi} + \omega^2 \epsilon \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}. \quad (8.11)$$

Выполним ставшие уже привычными преобразования:

$$\text{grad div } \dot{\vec{A}} - \nabla^2 \dot{\vec{A}} = -j\omega \epsilon \mu \text{grad } \dot{\phi} - k^2 \dot{\vec{A}} + \mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}. \quad (8.12)$$

Получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} = \text{grad}(\text{div } \dot{\vec{A}} + j\omega \epsilon \mu \dot{\phi}) - \mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}.$$

Наложим дополнительное условие

$$\text{div } \dot{\vec{A}} = -j\omega \epsilon \mu \dot{\phi}. \quad (8.13)$$

Данное условие называют калибровкой Лоренца.

В результате получим уравнение для векторного электродинамического потенциала

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} = -\mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}. \quad (8.14)$$

Установим связь между векторным и скалярным потенциалами. Из уравнения (8.13) выразим

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}$$

и подставим в (8.10):

$$\dot{\vec{E}} = -\left( \frac{\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}}{j\omega\epsilon\mu} + j\omega \dot{\vec{A}} \right); \quad (8.15)$$

$$\dot{\vec{E}} = -\frac{j\omega}{k^2} \left( \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}} + k^2 \dot{\vec{A}} \right).$$

Видим, что  $\dot{\vec{H}}$  и  $\dot{\vec{E}}$  определяются через потенциал  $\dot{\vec{A}}$  посредством выражений (8.8) и (8.15).

Теперь получим уравнение для скалярного потенциала  $\dot{\phi}$ . Выражаем из (8.8)  $\dot{\vec{A}}$  и подставляем в калибровку (8.13). Получаем:

$$\nabla^2 \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}_{\text{ст}}}{\epsilon}. \quad (8.16)$$

Уравнения (8.14) и (8.16) являются соответственно векторным и скалярным уравнениями для электродинамических потенциалов.

Когда решается статическая задача, т.е.  $k=0, \omega=0$ , то  $\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ . Тогда в некоторой точке  $M$  (рис 8.1) существует поле, потенциалы которого определены по известным формулам (см. раздел 2). Когда мы пренебрегаем временем распространения, т.е.  $\mathfrak{D}_{\phi} \rightarrow \infty$ , то  $\nabla^2 \phi = -\mu \dot{\vec{j}}_{\text{ст}}$ . Динамические задачи сводятся к стационарным. Уравнения Даламбера превращаются в уравнения Пуассона, а лоренцева калибровка — в кулоновскую. Это утверждение эквивалентно условию  $l \ll \lambda$ , то есть расстояние между объектами или их длина гораздо меньше длины волны.

### 8.3. Решение уравнений для электродинамических потенциалов

Пусть в объеме  $V$  действуют источники, создающие сторонние токи, плотность которых  $\dot{\vec{j}}_{\text{ст}}$ , и сторонние электрические заряды с объемной плотностью  $\dot{\rho}_{\text{ст}}$  (рис. 8.1).

Чтобы установить связь поля с источником излучения, надо найти решение уравнений (8.14) и (8.16).

Рассмотрим вначале статический случай, т.е.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

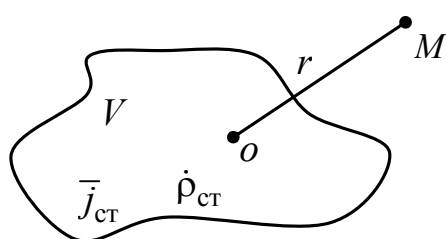


Рис. 8.1. К вычислению скалярного запаздывающего потенциала

Тогда в некоторой точке  $M$  существует поле, потенциалы которого определены по формулам

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\dot{\rho}_{\text{ст}}}{r} dv; \quad (8.17)$$

$$\dot{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}_{\text{ст}}}{r} dv. \quad (8.18)$$

Чтобы учесть конечное время распространения сигнала, будем полагать, что поле в точке  $M$  в момент времени  $t$  определяется значением токов и зарядов в предыдущий момент  $t - t'$ , где  $t' = \frac{r}{\mathfrak{D}_\phi}$  —

время запаздывания. Тогда

$$\phi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\dot{\rho}_{\text{ст}}(t-t')}{r} dv; \quad (8.19)$$

$$\dot{A}(t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{j}}_{\text{ст}}(t-t')}{r} dv. \quad (8.20)$$

Это формулы для так называемых запаздывающих потенциалов.

Запишем формулы для запаздывающих потенциалов, описывающих гармонические процессы. Пусть

$$\rho_{\text{CT}} = \rho_{\text{CT}m} \cos \omega t ;$$

$$\bar{J}_{\text{CT}} = \bar{J}_{\text{CT}m} \cos \omega t .$$

В момент времени  $t - t'$

$$\rho_{\text{CT}} = \rho_{\text{CT}} \cos(\omega t - \omega t') = \rho_{\text{CT}} \cos(\omega t - k r) ;$$

$$\bar{J}_{\text{CT}} = \bar{J}_{\text{CT}} \cos(\omega t - \omega t') = \bar{J}_{\text{CT}} \cos(\omega t - k r).$$

Перейдем к комплексной форме:

$$\dot{\phi}_{\text{CT}m} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\dot{\rho}_{\text{CT}m} e^{-jkr}}{r} dv ; \quad (8.21)$$

$$\dot{A}_{\text{CT}m} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}_{\text{CT}m} e^{-jkr}}{r} dv . \quad (8.22)$$

Это не что иное, как частные решения уравнений (8.14) и (8.16), соответствующие расходящимся от источника электромагнитным волнам.

Так, например, рассмотрим поле, создаваемое одним лишь колеблющимся зарядом

$$q_{\text{CT}} = \rho_m \Delta V \cos \omega t = q_{\text{CT}m} \cos \omega t ,$$

расположенным в окрестности точки  $o$  (рис. 8.2). Согласно (8.21) комплексная амплитуда потенциала этого поля есть

$$\dot{\phi}_m = \frac{\dot{\rho}_m \Delta V}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{\dot{q}_{\text{CT}m}}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jkr}}{r} , \quad (8.23)$$

а сам потенциал

$$\phi = \frac{q_{\text{CT}m}}{4\pi\epsilon r} \cos(\omega t - kr). \quad (8.23a)$$

Поле имеет характер сферической волны, расходящейся из точки  $o$ : ее фронт — это сферическая поверхность (рис. 8.2,а), радиус которой возрастает со скоростью  $\mathcal{V}$ .

Легко проверить, что (8.23) действительно является решением уравнения (8.16). Запишем уравнение (8.16) в сферических

координатах, положив  $\partial/\partial\theta = 0$  и  $\partial/\partial\alpha = 0$ . Поскольку поле ищется вне источника, то  $\rho_{ст m} = 0$ . Тогда уравнение (8.16) будет иметь вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi_m}{dr} \right) + k^2 \phi_m = 0. \quad (8.24)$$

Подставляя (8.23) в (8.24), убеждаемся, что уравнение удовлетворяется:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] + k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что решением (8.24) будет также комплексная амплитуда

$$\phi_m = \frac{\dot{q}_{ст m}}{4\pi\epsilon} \frac{e^{+jkr}}{r}. \quad (8.25)$$

Однако соотношение (8.25) соответствует волне, сходящейся к источнику (распространяющейся из бесконечности, рис. 8.2, б). Это решение в данном случае лишено физического содержания.

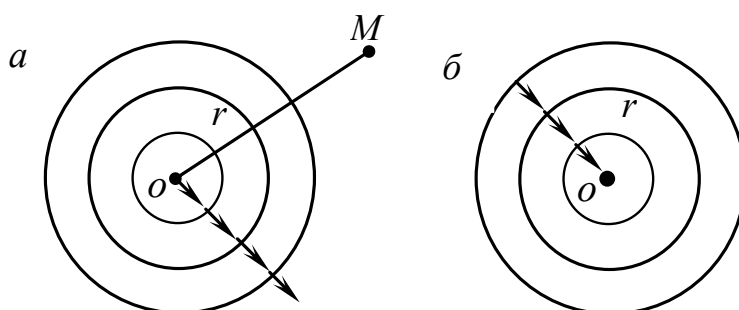


Рис. 8.2. К вопросу определения характера поля, создаваемого одиночным колеблющимся зарядом

Рассмотренный пример, конечно, еще не позволяет составить представление о поле излучения. Если, как это показано на рис. 8.1, источники распределены в области  $V$ , то для нахождения электромагнитного поля следует учесть действие всех точек этой области, т.е. произвести интегрирование в соответствии с формулами (8.21), (8.23). При этом, как уже говорилось выше, достаточно вычислить



только векторный потенциал, так как скалярный исключается с помощью соотношения калибровки. Это означает, что для определения поля излучения достаточно знать сторонний ток. Однако исследование поля при произвольном распределении тока является весьма сложной задачей. В дальнейшем мы ограничимся изучением так называемых элементарных источников.

## 8.4. Элементарный электрический излучатель

Рассмотрим отрезок  $l$ , вдоль которого течет ток  $I_{ст} = I_{стm} \cos \omega t$ . Может возникнуть сомнение относительно реальности такого изолированного элемента переменного тока. Для выяснения сущности вопроса привлечем закон сохранения заряда в форме (8.3). Поместив элемент тока на оси  $z$  декартовой системы координат (рис. 8.3,а), мы должны записать уравнение (8.3) в виде

$$\operatorname{div} \bar{z}_0 \dot{j}_{стm} = -j\omega \dot{\rho}_{стm} \quad \text{или} \quad \frac{dj_{стm}}{dz} = -j\omega \dot{\rho}_{стm}. \quad (8.26)$$

Приписывая отрезку  $l$  некоторую толщину, т.е. фактически заменяя его проводящим стержнем поперечного сечения  $S$ , имеем

$$\dot{j}_{стm} S = \dot{I}_{стm} \quad \text{и} \quad \dot{\rho}_{стm} S \Delta z = \dot{q}_{стm}, \quad (8.27)$$

где  $\dot{q}_{стm}$  — комплексная амплитуда заряда малого участка стержня  $\Delta z$ .

Умножив обе части равенства (8.26) на  $S \Delta z$ , с учетом (8.27) получаем

$$\Delta \dot{I}_{стm} = -j\omega \dot{q}_{стm}, \quad (8.28)$$

т.е. амплитуда заряда каждого участка пропорциональна изменению на нем амплитуды тока:

$$\Delta \dot{I}_{стm} = \frac{d\dot{I}_{стm}}{dz} \Delta z.$$

Но согласно условию амплитуда тока вдоль всего отрезка постоянна. Лишь на концах происходит ее изменение от нуля до  $I_{ст\ m}$  и от  $I_{ст\ m}$  до нуля (рис. 8.3,б).

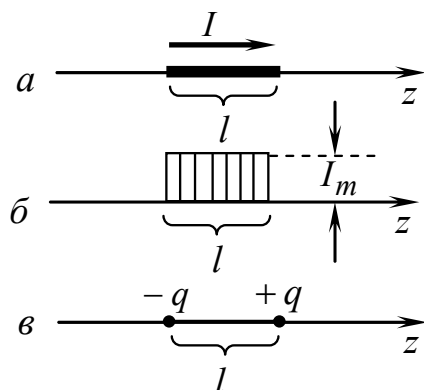


Рис. 8.3. Элементарный электрический излучатель

Отсюда в соответствии с (8.28) мы заключаем, что на всем отрезке, кроме его концов, заряд отсутствует; на концах же сосредоточены равные по абсолютной величине и противоположные по знаку колеблющиеся заряды с комплексными амплитудами

$$\dot{q}_{ст\ m} = \pm \frac{jI_{ст\ m}}{\omega}.$$

Иначе говоря, мы имеем дело с диполем (рис. 8.3,в), момент которого гармонически колеблется с частотой  $\omega$  и имеет комплексную амплитуду

$$\dot{p}_m = -j \frac{I_{ст\ m} l}{\omega} \bar{z}_0. \quad (8.29)$$

Первый искусственный излучатель, осуществленный Герцем, представлял собой именно подобие колеблющегося диполя. Два металлических шара перезаряжались с высокой частотой во время импульса индукционной катушки. Описание опытов Герца не входит в нашу задачу. Отметим лишь, что антенны, сравнимые по свойствам с излучателем Герца, применяются и в настоящее время. Элемент тока обычно рассматривается в качестве элементарного излучателя и называется диполем Герца.

Перейдем к анализу поля излучения диполя Герца. На основании равенства (8.22) комплексная амплитуда векторного потенциала элемента тока выражается интегралом:

$$\dot{A}_m = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \dot{j}_{ст\ m} \frac{e^{-jkr}}{r} dv = \bar{z}_0 \frac{\mu I_{ст\ m}}{4\pi S} \int_l \frac{e^{-jkr}}{r} dl. \quad (8.30)$$

Ограничиваясь расстояниями, значительно превышающими размер элемента,

$$r \gg l, \quad (8.31)$$

мы можем поступать с множителем  $1/r$  под знаком интеграла как с постоянной величиной. Положим также, что элемент мал в сравнении с длиной волны:

$$l \ll \lambda, \quad (8.32)$$

так что величину

$$kr = 2\pi r/\lambda \quad (8.33)$$

можно считать одинаковой для всех точек излучателя. С учетом сказанного перепишем выражение (8.30) в виде

$$\dot{\vec{A}}_m = \bar{z}_0 \frac{\mu I_{ст m}}{4\pi S} \frac{e^{-jkr}}{r} V = \bar{z}_0 \frac{\mu I_{ст m}}{4\pi r} e^{-jkr}, \quad (8.34)$$

где  $V = Sl$  — объем, занимаемый током.

Определим  $\bar{z}_0$  в сферической системе координат (рис. 8.4):

$$\bar{z}_0 = (\bar{r}_0 \cos \theta - \bar{\theta}_0 \sin \theta). \quad (8.35)$$

Отсюда

$$\dot{\vec{A}} = \dot{I}_{ст m} \frac{\mu l}{4\pi r} (\bar{r}_0 \cos \theta - \bar{\theta}_0 \sin \theta) e^{-jkr}. \quad (8.36)$$

Начнем с отыскания напряженности магнитного поля (8.8):

$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu} \text{rot } \dot{\vec{A}}_m$ . Запись ротора вектора напряженности магнитного

поля в сферических координатах имеет вид

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{I_{ст m} l}{4\pi} \begin{vmatrix} \frac{\bar{r}_0}{r^2 \sin \theta} & \frac{\bar{\theta}_0}{r \sin \theta} & \frac{\bar{\alpha}_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\cos \theta}{r} e^{-jkr} & -r \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.37)$$

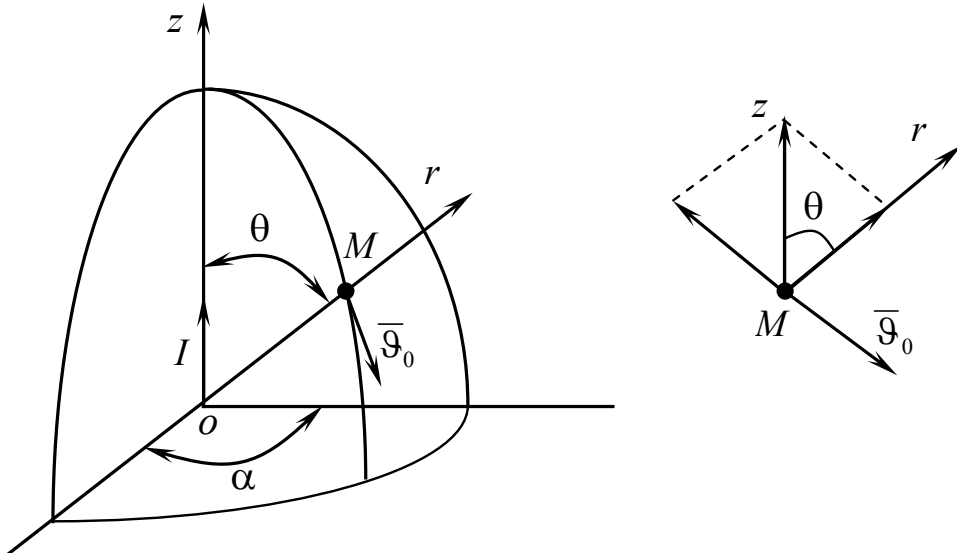


Рис. 8.4. Определение сферических проекций векторного потенциала

Как видно, вектор напряженности магнитного поля содержит только азимутальную составляющую:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m &= \frac{I_{ст} m l}{4\pi} \left[ \frac{\bar{\alpha}_0}{r} \left( jk \sin \theta \cdot e^{-jkr} + \frac{\sin \theta}{r} e^{-jkr} \right) \right] = \\ &= \bar{\alpha}_0 \frac{I_{ст} m l}{4\pi r} \left( \frac{1}{r} + jk \right) \sin \theta \cdot e^{-jkr} . \end{aligned} \quad (8.38)$$

Величину  $\dot{\vec{E}}$  теперь проще всего определить из первого уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}}_m = j\omega\epsilon \dot{\vec{E}}_m \Rightarrow \dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{j\omega\epsilon} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m ;$$

$$\dot{\vec{E}}_m = -j \frac{I_{ст} m l}{4\pi\epsilon\omega} \left[ \bar{r}_0 \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{r} + jk \right) \cos \theta + \bar{\theta}_0 \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r^2} + j\frac{k}{2} - k^2 \right) \sin \theta \right] e^{-jkr} . \quad (8.39)$$

Переходя в формулах (8.38), (8.39) от комплексов к векторам, записываем:

$$\begin{aligned}
H_{\alpha} &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{4\pi r} k \left[ \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) - \sin(\omega t - kr) \right] \sin \theta ; \\
E_r &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{2\pi r^2 \varepsilon \omega} k \left[ \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr) \right] \cos \theta ; \\
E_{\theta} &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{4\pi r \varepsilon \omega} k^2 \left[ \left( \frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \sin(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) \right] \sin \theta ; \\
H_r &= H_{\theta} = E_{\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Итак, поле элементарного электрического излучателя имеет характер сферической волны довольно сложного строения. Впрочем, слагаемые выражений (8.40), заключенные в квадратные скобки, не равноценны для полей на разных расстояниях от диполя. Это обстоятельство упрощает дальнейшее исследование.

## 8.5. Исследование поля электрического диполя

### 8.5.1. Поле в ближней зоне

Рассмотрим вначале поле в так называемой ближней зоне излучателя — на расстояниях, значительно меньших длины волны:

$$r \ll \lambda. \tag{8.41}$$

Неравенство (8.41) можно переписать в виде

$$kr \ll 1. \tag{8.42}$$

Отбросив малые члены в квадратных скобках (8.40), а также пренебрегая фазовым сдвигом  $kr$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned}
H_{\alpha} &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{4\pi r^2} \sin \theta \cos \omega t ; \\
E_r &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{4\pi \varepsilon \omega r^2} \cos \theta \sin \omega t ; \\
E_{\theta} &= \frac{I_{\text{ст}m} l}{4\pi \varepsilon \omega r^3} \sin \theta \cos \omega t .
\end{aligned} \right\} \tag{8.43}$$

Поле в ближней зоне по своей конфигурации совпадает со стационарными электрическими и магнитными полями, причем векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , поле носит чисто реактивный характер, передача энергии в ближней зоне не происходит. Электромагнитное поле в ближней зоне квазистационарно (изменяется во времени, но переноса энергии нет).

Все это объясняется тем, что поле в ближней зоне связано с источником. Происходит колебательное движение энергии вблизи источника. Становится ясным, что в ближней зоне излучение незначительно в сравнении с квазистационарным полем. Этого и следовало ожидать ввиду условия (8.41).

### 8.5.2. Поле в дальней зоне

В данном случае будем ориентироваться на неравенства

$$r \gg \lambda, \quad (8.44)$$

$$kr \gg 1. \quad (8.45)$$

Теперь в соотношениях (8.40) можно пренебречь членами порядка  $1/k^2 r^2$  и  $1/kr$ :

$$\begin{aligned} H_\alpha &= -\frac{I_{ст m} l}{4\pi r} k \sin(\omega t - kr) \cdot \sin \theta; \\ E_r &= 0; \\ E_\theta &= -\frac{I_{ст m} l}{4\pi r \epsilon \omega} k^2 \sin(\omega t - kr) \cdot \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Поле излучения в дальней зоне представляет собой сферическую волну, причем векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , как и в плоской волне, лежат перпендикулярно к направлению распространения, взаимно перпендикулярны и находятся в одной фазе. Вектор Пойнтинга направлен радиально. Средняя плотность потока энергии, переносимой волной:

$$\bar{\Pi} = \text{Re} \dot{\vec{\Pi}} = \bar{r}_0 \frac{E_m H_m}{2} = \bar{r}_0 \frac{I_{ст m}^2 (kl)^2 Z_0}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta. \quad (8.47)$$

Излучение максимально в экваториальной плоскости ( $\theta=90^\circ$ ) и отсутствует в направлении оси излучателя ( $\theta=0$ ).

Полное представление о характере излучения дает так называемая диаграмма направленности, которую строят, откладывая в произвольной меридиональной плоскости ряд отрезков, пропорциональных амплитуде электрического или магнитного поля в данном направлении (например,  $\theta$ ) для фиксированного расстояния  $r$ . Концы этих отрезков лежат на двух соприкасающихся окружностях (рис. 8.5,а). Аналогичное построение в пространстве приводит к объемной фигуре в виде тора (рис. 8.5,б).

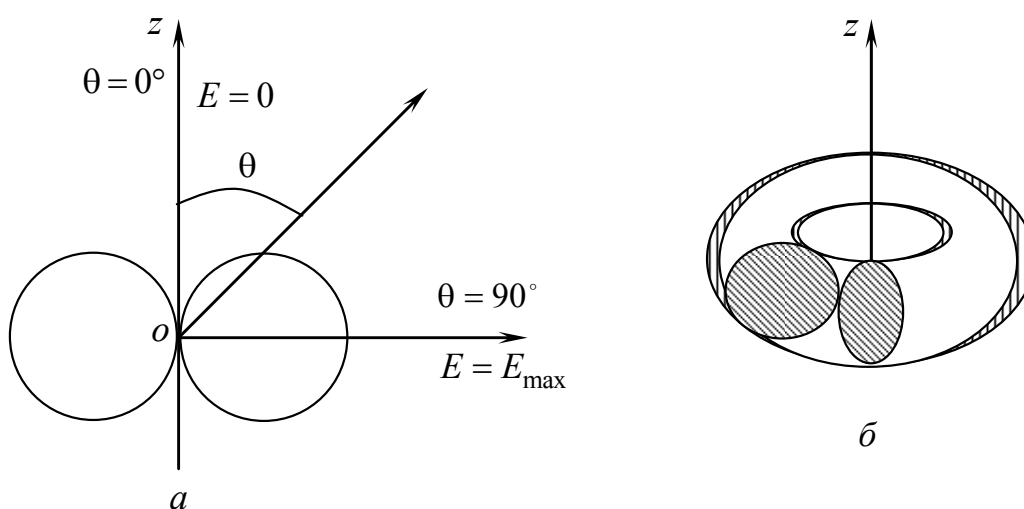


Рис. 8.5. Диаграмма направленности диполя Герца в плоскости, проходящей через ось диполя (а); пространственная диаграмма направленности (б)

Нетрудно вычислить полную среднюю мощность, излучаемую диполем Герца. Составляя поток комплексного вектора Пойнтинга через окружающую его сферическую поверхность (рис. 8.6), на основании выражения (8.47) запишем:

$$P_{\text{ср}} = \frac{I_{\text{ст } m}^2 (kl)^2 Z_0}{32\pi^2 r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^3 \theta d\theta d\alpha.$$

В результате интегрирования получаем следующее выражение излучаемой мощности:

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi}{3} I_{\text{ст } m}^2 Z_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (8.48)$$

Оно показывает, что излучение резко растет при ослаблении условия квазистационарности (8.41).

Величина

$$R^\Sigma = \frac{2\pi Z_0}{3} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (8.49)$$

называется сопротивлением излучения диполя Герца, ибо она в соответствии с формулировкой закона Джоуля – Ленца

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_{\text{ст} m}^2 R^\Sigma$$

характеризует мощность, рассеиваемую сторонним током в виде излучения.

На основании уравнений (8.40) можно построить картину поля элементарного излучателя для разных моментов времени и таким

способом проследить за его формированием в процессе излучения электромагнитной энергии.

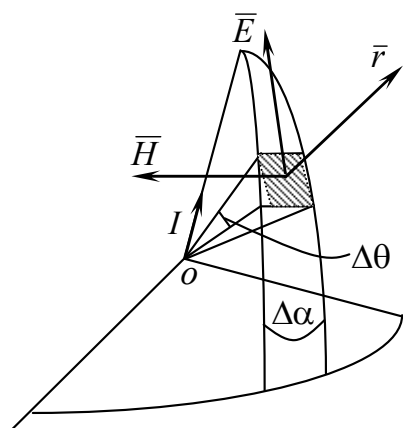


Рис. 8.6. К вопросу вычисления полной средней мощности, излучаемой диполем Герца

строением электрического поля излучателя, исследованное этим путем. Как видно, в момент максимального тока (заряды диполя при этом равны нулю) образуются «электрические вихри» (семейство замкнутых электрических силовых линий), распространяющиеся затем от источника.

В дальней зоне любая достаточно малая область поля элементарного излучателя несет все признаки плоской волны. Векторы поля (8.46) перпендикулярны к направлению ее распространения, а отношение их амплитуд равно  $Z_0$ .

В заключение отметим, что короткие в сравнении с длиной волны проволочные (стержневые) антенны (см. рис. 8.7) очень близки по характеру излучения к элементарному излучателю и обычно отождествляются с ним.



Однако для повышения эффективности размеры антенн стараются увеличить, так что условие (8.32), являющееся критерием этого отождествления, нарушается.

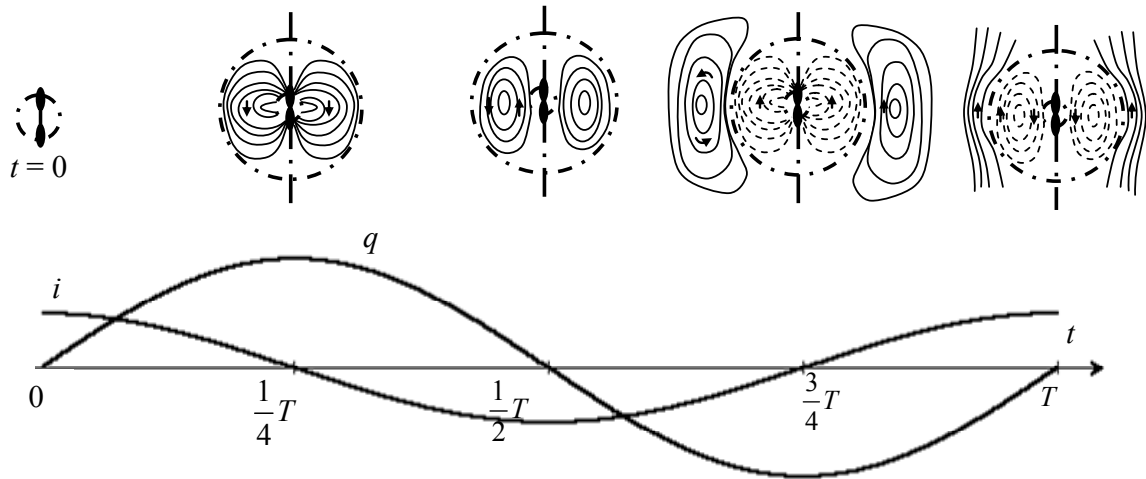


Рис. 8.7. Силовые линии электрического поля диполя Герца в различные моменты времени

Ток антенны при этом нельзя уже считать везде одинаковым по амплитуде. Его распределение становится почти синусоидальным с периодичностью волны в собственном пространстве. В качестве примера на рис. 8.8 показано распределение тока симметричного полуволнового вибратора. Поле такой антенны вычисляется как суперпозиция полей, создаваемых ее отдельными элементами, принимаемыми за диполи Герца.

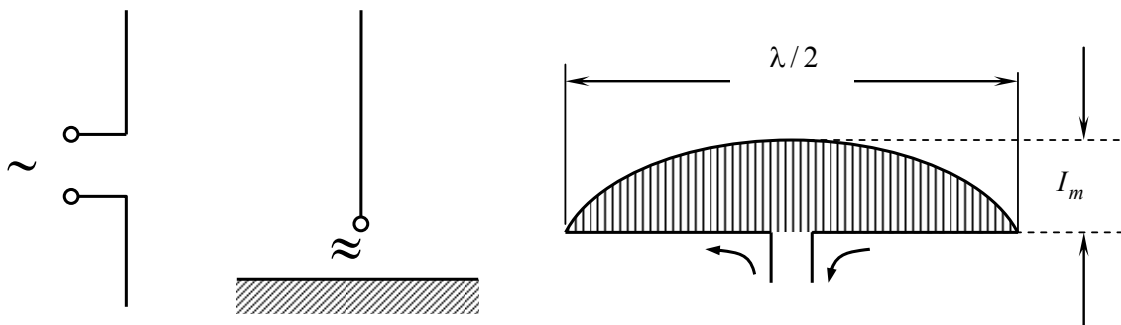


Рис. 8.8. Распределение тока симметричного полуволнового вибратора

## 8.6. Элементарный магнитный излучатель

Замкнутый виток площадью  $S$  с током  $I$  на расстоянии, значительно превышающем размеры витка, создает такое же поле, как если бы на его месте находился диполь с магнитным моментом  $\vec{m}$  (рис. 8.9):

$$\vec{m} = \vec{z}_0 I_{\text{ст}} \mu S . \quad (8.50)$$

Такой виток называют элементарным магнитным излучателем. Воспользуемся принципом перестановочной двойственности, который мы обсуждали в п. 4.6.3.

Поле витка (рамки) с переменным током можно найти, определив по формуле (8.22) векторный потенциал замкнутого тока, а затем используя формулы (8.8) и (8.15).

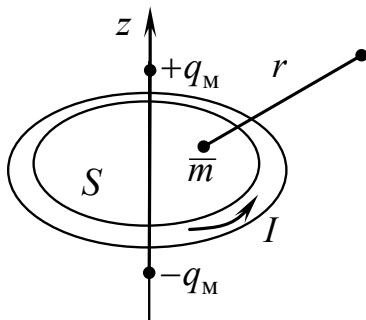


Рис. 8.9. К расчету элементарного магнитного излучателя

Однако задачу нетрудно упростить, опираясь на представление о магнитных зарядах, которые, разумеется, будут фигурировать не как реальные величины, а в качестве удобной абстракции.

Запишем магнитный момент диполя в комплексной форме:

$$\dot{\vec{m}} = \vec{z}_0 \dot{I}_{\text{ст}} \mu S . \quad (8.51)$$

Заменяя виток эквивалентным магнитным диполем, по аналогии с (8.3) получим

$$\text{div } \dot{\vec{j}}_M = -j\omega \dot{\rho}_M , \quad (8.52)$$

где  $\rho_M$  — «плотность магнитного заряда»;  $\vec{j}_M$  — «плотность магнитного тока», появляющегося в результате «движения магнитных зарядов».

Четвертое уравнение Максвелла мы должны теперь взять в виде

$$\text{div } \dot{\vec{H}} = \dot{\rho}_M / \mu , \quad (8.53)$$

а второе уравнение Максвелла примет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}} - \dot{\vec{j}}_M, \quad (8.54)$$

так как только такая запись не противоречит равенствам (8.52) и (8.53), в чем легко убедиться, образовав расходимость обеих частей уравнения (8.54).

Дальнейшее исследование будет построено на сравнении поставленной задачи о магнитном диполе с уже решенной задачей об электрическом диполе. Рассмотрим таблицу:

Задачи	Задача 1	Задача 2
Источник излучения	Электрический диполь, момент $\vec{p}$	Магнитный диполь, момент $\vec{m}$
Вид уравнений Максвелла	$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{\text{ст}} \quad (*)$ $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}}$	$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu\dot{\vec{H}} - \dot{\vec{j}}_M \quad (**)$ $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}$

Как видно, первое и второе уравнения Максвелла в задачах «поменялись ролями». При этом уравнения задачи 1 переходят в уравнения задачи 2 при замене

$$\dot{\vec{E}} \rightarrow \dot{\vec{H}}; \quad \dot{\vec{H}} \rightarrow \dot{\vec{E}}; \quad \varepsilon \rightarrow -\mu; \quad \mu \rightarrow -\varepsilon. \quad (8.55)$$

А это значит, что достаточно в решении уравнений (\*) при электрическом источнике  $\vec{p}$  сделать замену (8.55), чтобы получить решение уравнений (\*\*) при аналогичном магнитном источнике  $\vec{m}$ .

Итак, для нахождения поля элементарного магнитного излучателя мы должны произвести указанную замену в формулах (8.38) и (8.39). При этом надо учесть, что величина  $\vec{j}_{\text{ст}}$  входит в это решение только в форме электрического момента  $\vec{p}$ , который прямо следует заменить магнитным моментом  $-\vec{m}$ , т. е. вместо

$$\dot{p} = -jI_m l / \omega \quad \text{написать} \quad m = I_m \mu S. \quad (8.55a)$$

После операций (8.55), (8.55a) формулы (8.40) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha} &= \frac{I_m S Z_0}{4\pi r} k^2 \left[ \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr) \right] \sin \theta ; \\
E_r &= \frac{I_m S}{2\pi r^2} k \left[ \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) - \sin(\omega t - kr) \right] \cos \theta ; \\
E_{\theta} &= \frac{I_m S}{4\pi r} k^2 \left[ \left( \frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \right] \sin \theta ; \\
E_r &= E_{\theta} = H_{\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{8.56}$$

Способ, использованный нами, основан на перестановочной двойственности уравнений Максвелла. Общий метод, базирующийся на этом свойстве уравнений Максвелла, был впервые сформулирован А.А. Пистолькорсом, а также нашел отражение в работах М.А. Леонтовича и Я.Н. Фельда. Он получил распространение под названием принципа двойственности.

Из уравнений (8.56) известным путем получаем компоненты поля в ближней зоне:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha} &= \frac{I_m \mu S \omega}{4\pi r^2} \sin \theta \sin \omega t ; \\
H_r &= \frac{m}{2\pi \mu r^3} \cos \theta \cos \omega t ; \\
H_{\theta} &= \frac{m}{4\pi \mu r^3} \sin \theta \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{8.57}$$

В дальней зоне (поле излучения):

$$\begin{aligned}
E_{\alpha} &= \frac{I_m k^2 S Z_0}{4\pi r^2} \sin \theta \sin(\omega t - kr) ; \\
H_r &= 0 ; \\
H_{\theta} &= \frac{I_m k^2 S}{4\pi r} \sin \theta \cos(\omega t - kr).
\end{aligned} \tag{8.59}$$

Итак, в дальней зоне элементарный магнитный излучатель создает волновое поле, отличающееся от поля элементарного

электрического излучателя только ориентацией векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ . Диаграмма направленности излучения по-прежнему имеет вид, показанный на рис. 8.5, а сопротивление излучения выражается формулой

$$R^\Sigma = \frac{8\pi}{3} Z_0 \frac{S^2}{\lambda^4}, \quad (8.59)$$

вывод которой аналогичен выводу формулы (8.49).

В сущности, любая цепь переменного тока теряет какую-то небольшую долю энергии на излучение. Зная ток и площадь цепи, а следовательно, и момент эквивалентного магнитного диполя, нетрудно оценить излучаемую мощность.

На основании формул (8.58) можно заключить, что электромагнитное поле цепи должно резко падать уже на расстояниях, значительно меньших длины волны. Это значит, что ее энергия сконцентрирована в квазистационарной области, а волновой характер поля не существен.

## Контрольные вопросы

1. Для чего вводят электродинамические потенциалы, если есть неоднородные волновые уравнения для полей  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ ?
2. Почему электродинамические потенциалы называются также «запаздывающими»?
3. В какие уравнения переходили бы уравнения для электродинамических потенциалов и какой вид имели их решения, если бы скорость электромагнитных волн была равна бесконечности?
4. Какой смысл имеет переменная  $r$  в интегралах, определяющих  $A$  и  $\varphi$ ?
5. Какой физический смысл имеют электродинамические потенциалы?
6. Охарактеризуйте электрические и магнитные поля в ближней и дальней зонах диполя Герца: а) по их зависимости от расстояния; б) по среднему во времени значению вектора Пойнтинга.
7. Дайте определение сопротивления излучения антенны.

8. Дайте определение диаграммы направленности диполя. Для какой зоны она определяется? Изобразите диаграмму направленности диполя в полярной и прямоугольной системе координат.

9. Изобразите силовые линии электрического и магнитного полей на различных расстояниях от диполя Герца.

10. Сформулируйте принцип перестановочной двойственности и приведите пример его использования.

11. Если в ближней зоне излучателя отсутствует перенос мощности от источника, то как появляется поток мощности в дальней зоне?

12. Определите излучаемую мощность отрезка линии передачи длиной 1 км, рассматривая его как рамку с током. Расстояние между проводами 1 м, ток 10 А (действующее значение), частота 50 Гц.

*Ответ:*  $P = 2,47 \cdot 10^{-18}$  Вт.

## **9. Направляемые электромагнитные волны и направляющие системы**

### **9. 1. Понятие о направляющей системе. Классификация направляемых волн**

Ранее было установлено, что полностью отражающая граница раздела сред обладает способностью направлять движение электромагнитной энергии. С этим фактом в той или иной форме встречаются в различных областях радиотехники. Устройства, основанные на указанном явлении, обычно называют направляющими системами.

К их числу в первую очередь относятся всевозможные линии передачи. Широко известна двухпроводная линия. Коаксиальная линия применяется главным образом на сверхвысоких частотах. Исключительно радиотехнике сверхвысоких частот свойственны волноводы — полые и реже диэлектрические, а также системы типа полосковой линии и многие другие.

Различные направляющие системы получили широкое распространение благодаря интенсивному развитию радиотехники сверхвысоких частот. Особое место среди них занимают полые волноводы.

Полый волновод прямоугольного или круглого сечения представляет собой основной вид линии передачи в диапазоне сантиметровых волн.

Отметим, однако, что, кроме обычных волноводов и коаксиальных линий, в технике сверхвысоких частот применяется много разнообразных систем, преследующих специальные цели.

Ниже на основании общей теории будут рассмотрены важнейшие направляющие системы без учета потерь энергии.

Классификация направляемых волн проводится по признаку наличия у них продольной составляющей электрического или магнитного поля (рис. 9.1).

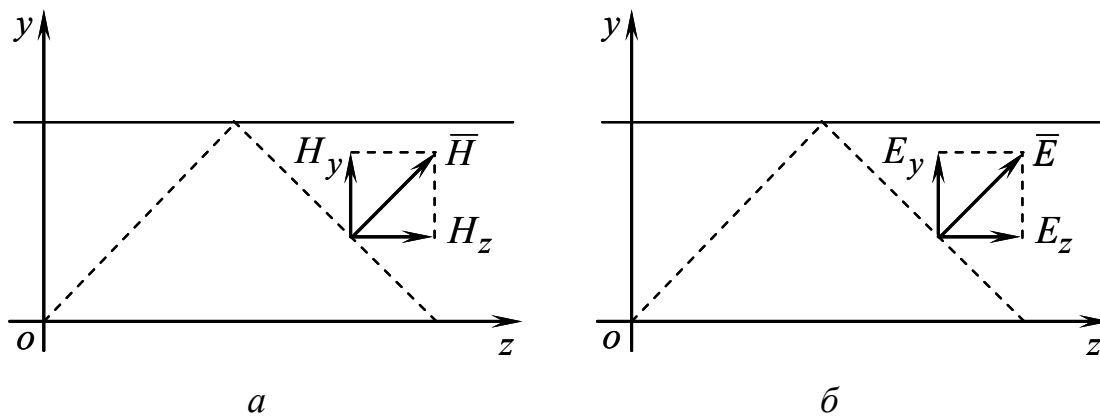


Рис. 9.1. Направляющая система, образованная двумя параллельными плоскостями: *a* – распространение электромагнитной волны горизонтальной поляризации; *б* – распространение вертикально поляризованной волны

На рис. 9.1,*a* показано распространение между двумя параллельными плоскостями электромагнитной волны горизонтальной поляризации. В этом случае вектор  $\vec{H}$  имеет продольную составляющую  $H_z$ . На рис. 9.1,*б* показано распространение вертикально поляризованной волны. Здесь отлична от нуля продольная составляющая вектора напряженности электрического поля  $E_z$ . Принято называть Н-волнами (магнитными) такие волны, у которых  $H_z \neq 0$ . Если  $E_z \neq 0$ , то волны называются Е-волнами (электрическими). В некоторых линиях передачи, таких как коаксиальная или микрополосковая, могут быть равны нулю продольные составляющие и электрического, и магнитного поля одновременно. Волны, для которых  $H_z = 0$  и  $E_z = 0$ , называют Т-волнами (поперечными)

## 9.2. Связь между продольными и поперечными составляющими поля в однородной направляющей системе

Однородная направляющая система — это система направляющих элементов, в которой форма поперечного сечения не зависит от координаты  $z$ . Параметры среды также не зависят от этой ко-



ординаты. Комплексная амплитуда вектора  $\bar{E}$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\bar{E}_m &= \bar{E}_{m\perp}(x, y)e^{-j\beta z}; \\ \bar{H}_m &= \bar{H}_{m\perp}(x, y)e^{-j\beta z},\end{aligned}\tag{9.1}$$

где  $\beta$  — продольное волновое число.

На рис. 9.2 показан волновой вектор  $\bar{k}$  и его составляющие — продольное  $\beta$  и поперечное  $\gamma_{\perp}$  волновые числа, связанные соотношением

$$\beta = \sqrt{k^2 - \gamma_{\perp}^2}.$$

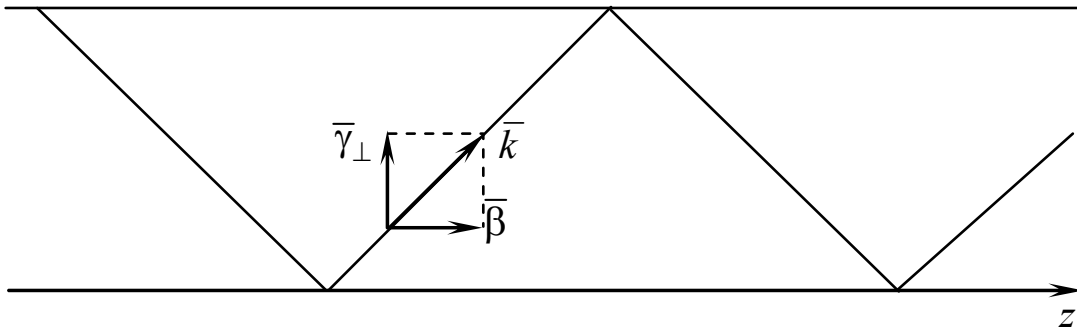


Рис. 9.2. Волновой вектор и его составляющие в однородной направляющей системе

Обратимся к уравнениям Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned}\nabla^2 \dot{\bar{H}}_m + k^2 \dot{\bar{H}}_m &= 0; \\ \nabla^2 \dot{\bar{E}}_m + k^2 \dot{\bar{E}}_m &= 0.\end{aligned}\right\}\tag{9.2}$$

Подставив  $\bar{E}_m$  и  $\bar{H}_m$  (9.1) в эти уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned}\nabla^2 \dot{\bar{E}}_{mz} + \gamma_{\perp}^2 \dot{\bar{E}}_{mz} &= 0; \\ \nabla^2 \dot{\bar{H}}_{mz} + \gamma_{\perp}^2 \dot{\bar{H}}_{mz} &= 0.\end{aligned}\right\}\tag{9.3}$$

Теперь задача заключается в установлении связи между продольными и поперечными составляющими векторов, то есть необходимо найти

$$\bar{E}_\perp \sim f(H_z, E_z), \quad \bar{H}_\perp \sim f(H_z, E_z),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_\perp &= \bar{x}_0 E_x + \bar{y}_0 E_y; \\ \bar{H}_\perp &= \bar{x}_0 H_x + \bar{y}_0 H_y. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Запишем уравнения Максвелла в скалярной форме для проекций комплексных векторов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j\beta \dot{H}_y &= j\omega \varepsilon \dot{E}_x; \\ -\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - j\beta \dot{H}_x &= j\omega \varepsilon \dot{E}_y; \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\beta \dot{E}_y &= -j\omega \mu \dot{H}_x; \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\beta \dot{E}_x &= j\omega \mu \dot{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Выразим  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  из первого и третьего уравнений системы (9.5):

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{1}{j\omega \varepsilon} \left( \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j\beta \dot{H}_y \right); \\ \dot{E}_y &= -\frac{1}{j\beta} \left( \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j\omega \mu \dot{H}_x \right). \end{aligned}$$

Подставим  $\dot{E}_x$  в четвертое,  $\dot{E}_y$  во второе уравнение системы (9.5):

$$\frac{\beta}{\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\beta^2}{j\omega\varepsilon} \dot{H}_y + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = j\omega\mu \dot{H}_y; \quad (9.6)$$

$$-\dot{H}_y \left( \frac{\beta^2}{j\omega\varepsilon} + j\omega\mu \right) = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}.$$

Таким образом, все поперечные проекции оказались выраженными через продольные:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\dot{H}_y \gamma_{\perp}^2 = j\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \times \bar{y}_0; \\ -\dot{H}_x \gamma_{\perp}^2 = j\beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \times \bar{x}_0; \end{array} \right. \quad (9.7)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\dot{E}_x \gamma_{\perp}^2 = j\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \times \bar{x}_0; \\ -\dot{E}_y \gamma_{\perp}^2 = j\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \times \bar{y}_0. \end{array} \right.$$

В системе уравнений (9.7) показано умножение на единичные орты и попарное сложение уравнений, которое позволяет получить поперечные векторы в соответствии с формулами (9.4):

$$-\gamma_{\perp}^2 \underbrace{(\bar{x}_0 \dot{H}_x + \bar{y}_0 \dot{H}_y)}_{H_{\perp}} =$$

$$= j\beta \underbrace{\left( \bar{x}_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)}_{\text{grad}_{\perp} H_z} - j\omega\varepsilon \underbrace{\left( \bar{x}_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \bar{y}_0 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right)}_{-[\bar{z}_0, \text{grad}_{\perp} E_z]}. \quad (9.8)$$

Уравнение (9.8) — результат сложения первой пары. Сложив вторую пару уравнений, окончательно получим:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{\perp}^2 \dot{H}_{\perp} = -j\beta \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z - j\omega\varepsilon [\bar{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]; \\ \gamma_{\perp}^2 \dot{E}_{\perp} = -j\beta \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z + j\omega\mu [\bar{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z]. \end{array} \right\} \quad (9.9)$$

Таким образом, связь между продольными и поперечными составляющими векторов поля установлена.

Теперь алгоритм поиска векторов электромагнитного поля заключается в следующем. Вначале из уравнений (9.3) находится продольная составляющая электрического поля для Е-волн или магнитного поля для Н-волн. Затем с помощью системы (9.9) находятся все поперечные составляющие. Отметим также, что формулы в системе (9.9) являются справедливыми для обобщенно-цилиндрической системы координат, т.е. ими можно пользоваться для расчета как прямоугольных, так и круглых волноводов.

### 9.3. Условия распространения электромагнитных волн в направляющих системах. Критическая длина волны

Комплексный вектор напряженности электрического поля задается формулой  $\vec{E} = \vec{E}_{m\perp}(x, y)e^{-j\beta z}$ .

Напомним, что  $\beta = \sqrt{k^2 - \gamma_{\perp}^2}$ . В зависимости от величины продольного волнового числа выделяются три режима работы линии передачи:

$k > \gamma_{\perp} \Rightarrow \beta > 0$  — режим распространяющейся электромагнитной волны, рабочий режим;

$k^2 < \gamma_{\perp}^2 \Rightarrow \beta^2 < 0$  ( $\beta$  — мнимая величина) — затухание (экспоненциальное), нерабочий режим;

$k = \gamma_{\perp} \Rightarrow \beta = 0$  — критический режим (режим отсечки).

В критическом режиме

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} = \gamma_{\perp}; \quad \beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Для реализации рабочего режима должно выполняться неравенство

$$\lambda < \lambda_{\text{кр}}. \quad (9.10)$$

Неравенство (9.10) определяет условия существования электромагнитных волн в направляющей системе.

Определим длину волны  $\Lambda$  и фазовую скорость  $\mathfrak{V}_\phi$  в линии передачи:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}}; \quad (9.11)$$

$$\mathfrak{V}_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр})^2}}. \quad (9.12)$$

Из (9.11) следует, что длина волны в направляющей системе всегда больше, чем длина волны в свободном пространстве. Формула (9.12) показывает, что фазовая скорость в направляющей системе всегда больше скорости света. Эти особенности электромагнитных волн объясняет концепция Бриллюэна.

Предполагается, что Т-волна распространяется в волноводе, отражаясь от его стенок. Интерференция Т-волн определяет структуру поля в направляющей системе.

Рассмотрим волну, распространяющуюся между двумя проводящими плоскостями (рис. 9.3). Пусть это будет Т-волна. На рис. 9.3 пунктирными линиями показаны следы фронтов Т-волны, распространяющейся под углом  $\phi$  к проводящим поверхностям. Точки 1 и 2 соответствуют фронтам с фазовым сдвигом, равным  $2\pi$ . В направлении распространения Т-волны это  $\lambda$ . В направлении  $z$  это длина волны в волноводе  $\Lambda$ .

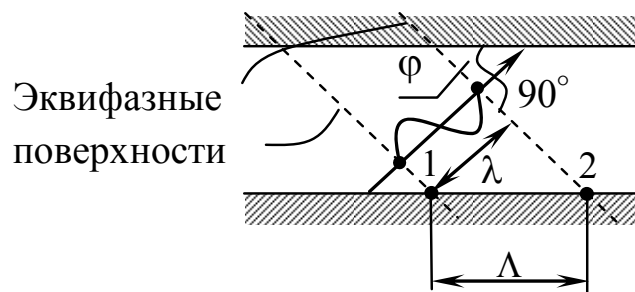


Рис. 9.3. К вопросу определения структуры поля в направляющей системе

Запишем фазовую скорость в волноводе:

$$v_{\phi} = \frac{\Lambda}{T} = \frac{\lambda}{\cos \varphi T} = \frac{c}{\cos \varphi}, \quad (9.13)$$

где  $c = \lambda/T$  — скорость света.

Сравнивая выражения (9.12) и (9.13), видим, что

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2},$$

следовательно, фазовая скорость всегда больше скорости света.

При  $\varphi = 0$  волна распространяется вдоль волновода (рис. 9.4,*а*).

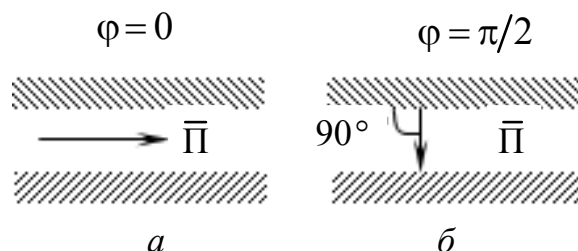


Рис. 9.4. Распространение волны в направляющей системе: *а* – волна распространяется вдоль волновода; *б* – критический режим

Угол  $\varphi = \pi/2$  соответствует критическому режиму работы (рис. 9.4,*б*). Перенос энергии в таком режиме отсутствует. Рабочий диапазон углов, под которыми может распространяться Т-волна, составляет  $0 \leq \varphi < \pi/2$ .

## 9.4. Групповая скорость электромагнитных волн в направляющих системах

Под групповой скоростью  $v_{\text{гр}}$  будем понимать скорость переноса максимума огибающей группы электромагнитных волн, близких друг к другу по частоте. Комплексный вектор напряженности поля может быть записан в следующем виде:

$$\dot{\tilde{E}}(z, t) = \int_0^{\infty} A_m(\omega) e^{j(\omega t - \beta(\omega)z)} d\omega. \quad (9.14)$$

Если спектр достаточно узок:  $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ , то все амплитуды вне этого спектра равны нулю и можно записать

$$\dot{\tilde{E}}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A_m(\omega) e^{j(\omega t - \beta(\omega)z)} d\omega.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right) (x - x_0)^n;$$

$$\beta(\omega) = \underbrace{\beta(\omega_0)}_{\beta_0} + (\omega - \omega_0) \frac{\partial \beta}{\partial \omega}.$$

В этом случае показатель экспоненты может быть записан в виде

$$\omega t - \beta(\omega)z = \omega t - \beta_0 z - (\omega - \omega_0)z \frac{\partial \beta}{\partial \omega};$$

прибавим и вычтем  $\omega_0 t$ , тогда

$$\omega t - \beta(\omega)z = \omega_0 t - \beta_0 z + (\omega - \omega_0) \left[ t - \frac{\partial \beta}{\partial \omega} z \right]. \quad (9.15)$$

Подставим (9.15) в (9.14):

$$\dot{\tilde{E}}(z, t) = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A_m \exp \left\{ (\omega - \omega_0) \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) z \right] \right\} d\omega.$$

Перейдем от комплексного вектора к его реальной части:

$$E(z, t) = \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A_n \cos \left\{ (\omega - \omega_0) \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) z \right] \right\} d\omega. \quad (9.16)$$

Максимум огибающей соответствует нулевому аргументу косинуса:

$$(\omega - \omega_0) \left[ t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) z \right] = 0. \quad (9.17)$$

Отсюда  $t - \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right) z = 0$ , следовательно,  $z = \frac{t}{\partial \beta / \omega}$ .

Групповая скорость  $\mathfrak{V}_{\text{гр}}$  определяется формулой

$$\mathfrak{V}_{\text{гр}} = \frac{\partial z}{\partial t} = \left( \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1}.$$

С учетом  $\beta = k \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}$  получим окончательное выражение для групповой скорости

$$\mathfrak{V}_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{гр}}} \right)^2}. \quad (9.18)$$

Как и следовало ожидать, групповая скорость, т.е. скорость переноса энергии, оказалась меньше скорости света.

## 9.5. Дисперсия направляемых электромагнитных волн

Учитывая, что  $\lambda_{\text{кр}} = c/f_{\text{кр}}$ , формулы для фазовой и групповой скоростей можно записать в виде

$$\mathfrak{V}_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{\text{кр}}}{f} \right)^2}}; \quad \mathfrak{V}_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \left( \frac{f_{\text{кр}}}{f} \right)^2}. \quad (9.19)$$

На рис. 9.5 показаны зависимости, построенные по формулам (9.19).



Как следует из этих формул, электромагнитные волны, распространяющиеся в направляющих системах, обладают дисперсией, то есть фазовая и групповая скорости зависят от частоты.

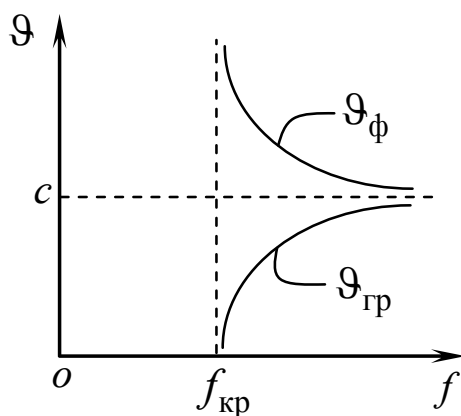


Рис. 9.5. Зависимость фазовой и групповой скоростей волны, распространяющейся между параллельными плоскостями, от частоты колебаний

Это очень важное свойство, которое необходимо учитывать на практике, например при передаче очень коротких импульсов.

## 9.6. Общие свойства направляемых волн

### 9.6.1. Поперечные электромагнитные волны (Т-волны)

В начале этого раздела мы провели классификацию направляемых волн. Теперь можем рассмотреть их общие свойства вне зависимости от того, в какой направляющей системе они распространяются.

Положим в уравнениях (9.9)  $H_z = 0$  и  $E_z = 0$ , тогда будем вынуждены предположить, что

$$\gamma_{\perp} = 0. \quad (9.20)$$

Так как  $\beta^2 = k^2 - \gamma_{\perp}^2$ , получим:

$$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (9.21)$$

Отсюда  $\vartheta_\phi = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$  и  $\Lambda = \lambda$ .

Другими словами, фазовая скорость и длина волны в линии передачи с Т-волной точно такие же, как и в свободном пространстве, заполненном тем же диэлектриком. Кроме того, так как  $\lambda_{кр} = 2\pi/\gamma_\perp$ , видим, что линии передачи в режиме Т-волны имеют  $\lambda_{кр} = \infty$ . Это значит, что в них может протекать постоянный ток. Следовательно, Т-волны могут существовать только в таких линиях передачи, которые имеют, как минимум, два отделенных друг от друга слоем диэлектрика проводящих элемента, например в двухпроводных, коаксиальных, микрополосковых линиях. В полых волноводах, таких как прямоугольный и круглый волноводы, а также в диэлектрических волноводах Т-волны распространяться не могут.

### 9.6.2. Электрические волны (Е-волны)

Подставляя  $H_z = 0$  в уравнения (9.9), получим:

$$\begin{aligned}\gamma_\perp^2 \dot{\vec{H}}_\perp &= j\omega\varepsilon [z_0, \text{grad}_\perp \dot{E}_z]; \\ \gamma_\perp^2 \dot{\vec{E}}_\perp &= -j\beta \text{grad}_\perp \dot{E}_z.\end{aligned}\tag{9.22}$$

Совмещая эти уравнения, найдем связь между поперечными составляющими векторов электрического и магнитного полей:

$$\dot{\vec{H}}_\perp = -\frac{\omega\varepsilon}{\beta} [z_0, \dot{\vec{E}}_\perp].\tag{9.23}$$

Отсюда можно найти волновое сопротивление линии передачи, в которой распространяется Е-волна:

$$Z^E = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{k}{\omega\varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

или

$$Z^E = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}.\tag{9.24}$$

### 9.6.3. Магнитные волны (Н-волны)

Для Н-волн  $E_z = 0$ . С этим условием из уравнений (9.9) получим:

$$\begin{aligned}\gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} &= -j\beta \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z; \\ \gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} &= -j\omega\mu [\vec{z}_0, \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z].\end{aligned}\quad (9.25)$$

Действуя, как и ранее, запишем:

$$\dot{\vec{E}}_{\perp} = -\frac{\beta}{\omega\mu} [\vec{z}_0, \dot{\vec{H}}_{\perp}].\quad (9.26)$$

Отсюда волновое сопротивление линии передачи, в которой распространяется Н-волна :

$$Z^H = \frac{Z^0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.\quad (9.27)$$

## 9.7. Прямоугольный волновод

Полый волновод прямоугольного поперечного сечения называется обычно прямоугольным волноводом. На рис. 9.6 он изображен в наиболее подходящей здесь декартовой системе координат, оси которой  $ox$  и  $oy$  параллельны сторонам поперечного контура  $a$  и  $b$ .

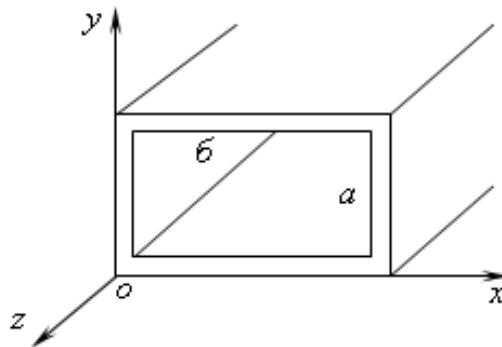


Рис. 9.6. Прямоугольный волновод, изображенный в декартовой системе координат

**Е-волны.** Будем искать решение уравнения (9.3), имеющего в декартовых координатах вид

$$\frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial y^2} = -\gamma_{\perp}^2 E_{mz}, \quad (9.28)$$

методом разделения переменных.

Положим

$$E_{mz} = X(x)Y(y), \quad (9.29)$$

где  $X$  и  $Y$  — неизвестные пока функции переменных  $x$  и  $y$ .

Подстановка (9.29) в (9.28) приводит к дифференциальному уравнению

$$X''Y + XY'' = -\gamma_{\perp}^2 XY,$$

которое после деления всех членов на  $XY$  принимает форму

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\gamma_{\perp}^2. \quad (9.30)$$

Учитывая взаимную независимость слагаемых левой части равенства (9.30), приравняем каждое из них постоянной величине:

$$\frac{X''}{X} = -\gamma_x^2; \quad \frac{Y''}{Y} = -\gamma_y^2, \quad (9.31)$$

с соблюдением равенства

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = \gamma_{\perp}^2. \quad (9.32)$$

Легко догадаться, что

$$\gamma_x^2 > 0; \quad \gamma_y^2 > 0, \quad (9.33)$$

так как  $\gamma_{\perp}^2 > 0$ , а физические условия вдоль осей  $ox$  и  $oy$  внутри волновода идентичны.

Записывая хорошо известные решения уравнений (9.31)

$$\left. \begin{aligned} X &= A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x, \\ Y &= C \cos \gamma_y y + D \sin \gamma_y y, \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

имеем

$$E_{mz} = (A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x)(C \cos \gamma_y y + D \sin \gamma_y y). \quad (9.35)$$

Полученное общее решение, содержащее шесть неизвестных постоянных  $A, B, C, D, \gamma_x$  и  $\gamma_y$ , не дает еще представления об исследуемом поле. Это и понятно, ибо в произведенных действиях пока не нашли отражения конкретные физические условия задачи — граничные условия на оболочке волновода. Потребовав, чтобы продольная составляющая электрического поля была равна нулю на всех стенках волновода, запишем:

$$\left. \begin{array}{l} E_{mz} = 0; \\ x = 0, y = 0. \end{array} \right\} \quad (9.36)$$

Из уравнения (9.35) видно, что это возможно лишь, если  $A=C=0$ , следовательно,

$$E_{mz} = E_0 \sin \gamma_x x \sin \gamma_y y, \quad (9.37)$$

где произведение  $BD$  заменено одним неизвестным коэффициентом  $E_0$ .

В силу требования равенства нулю продольной составляющей электрического поля на двух других стенках волновода запишем:

$$\left. \begin{array}{l} E_{mz} = 0; \\ x = a, y = b. \end{array} \right\} \quad (9.38)$$

Налагая условие (9.38) на решение (9.37), находим:

$$\gamma_x = \frac{m\pi}{a}; \quad \gamma_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (9.39)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$  — любые целые числа.

Значения  $m = 0$  и  $n = 0$  исключены, потому что они не соответствуют существованию поля ( $\dot{E}_{mz} = 0$ ). С учетом этого результата равенство (9.32) принимает вид

$$\gamma_{\perp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (9.40)$$

Итак, различным решениям  $E_{mz}$  соответствуют определенные значения поперечного волнового числа  $\gamma_{\perp}$ . Задав какие-либо числа  $m$  и  $n$ , мы однозначно определяем тип поля волновода. Все компоненты поля данного типа нетрудно найти, подставив в общие формулы (9.9)

$$\begin{aligned}\dot{H}_z &= 0; \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin \gamma_x x \sin \gamma_y y \exp\{j(\omega t - \beta z)\}.\end{aligned}$$

В результате получается:

$$\left. \begin{aligned}\dot{E}_{mz} &= E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{mx} &= -j\beta \frac{\gamma_x}{\gamma_{\perp}^2} E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{my} &= -j\beta \frac{\gamma_y}{\gamma_{\perp}^2} E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{mx} &= j \frac{\beta}{Z^E} \frac{\gamma_y}{\gamma_{\perp}^2} E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{my} &= -j \frac{\beta}{Z^E} \frac{\gamma_x}{\gamma_{\perp}^2} E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.\end{aligned}\right\} \quad (9.41)$$

В соответствии с принятой терминологией говорят, что формулы (9.41) выражают поле  $E_{mn}$  прямоугольного волновода. Это поле имеет характер распространяющейся волны при вещественных значениях продольного волнового числа

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2},$$

где

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\gamma_{\perp}} = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (9.42)$$

В дальнейшем мы чаще будем пользоваться понятием критической длины волны  $\lambda_{\text{кр}}$ , проще связанной с размерами системы, чем  $f_{\text{кр}}$ . Необходимо помнить, что сравниваемая с ней величина  $\lambda$  — это длина волны в свободном пространстве с теми же свойствами (параметры  $\epsilon, \mu$ ), что и среда, заполняющая волновод.

Как видно из формулы (9.42), с увеличением  $m$  и  $n$  критическая длина волны  $\lambda_{\text{кр}}$  уменьшается. Направляемая волна данного типа распространяется до тех пор, пока  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ . Волны высших типов существуют, таким образом, при меньших значениях  $\lambda$ , т.е. при более высоких частотах. Для низшей электрической волны  $E_{11}$  согласно (9.42) критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (9.43)$$

Одновременно в волноводе распространяется лишь ограниченное число волн различного типа. Действительно, при любых размерах поперечного сечения можно найти такие числа  $m$  и  $n$ , что рабочая длина волны окажется ниже критической.

На рис. 9.7 показано строение различных  $E$ -полей волновода в некоторый момент времени — «остановленная волна». Ввиду отсутствия продольной составляющей вектора  $\vec{H}$  магнитные силовые линии лежат в поперечной плоскости. Поле  $E_{11}$  соответствует одному семейству замкнутых магнитных линий и является простейшим. В центре этого семейства лежит максимум продольной составляющей вектора  $\vec{E}$ .

По рис. 9.7 легко найти соответствие между строением поля и значениями индексов  $m$  и  $n$ . Это числа полуволновых вариаций поля вдоль осей  $x$  и  $y$ . Величины

$$\begin{aligned} \lambda_x &= 2\pi/\gamma_x, \\ \lambda_y &= 2\pi/\gamma_y \end{aligned} \quad (9.44)$$

играют роль поперечных длин волн.

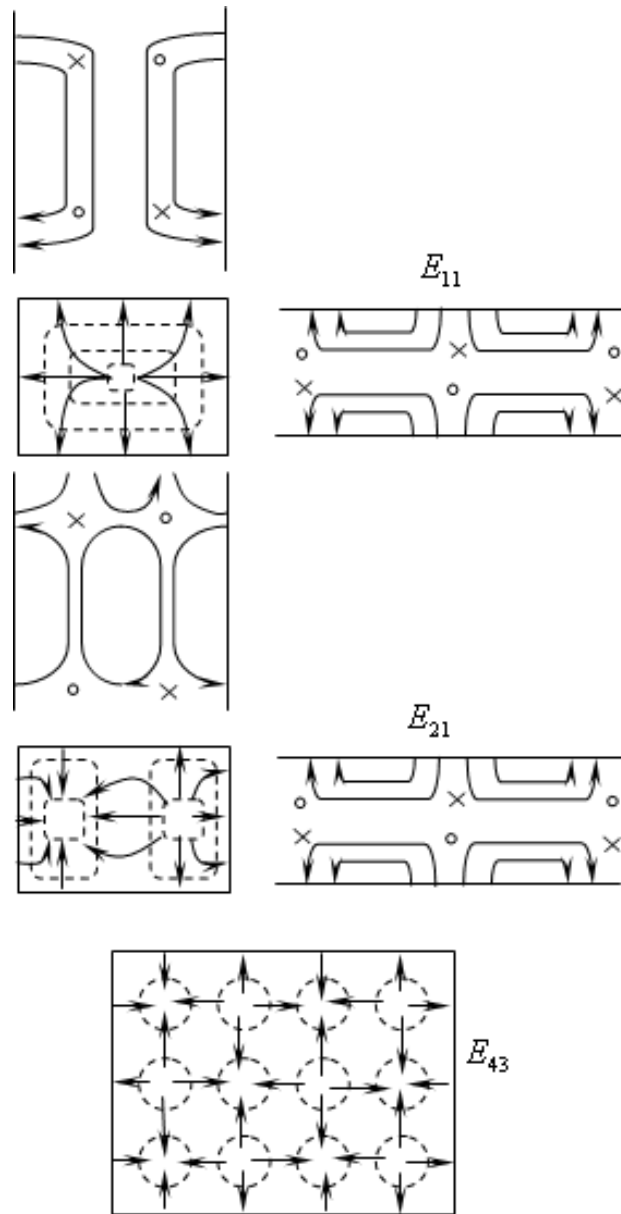


Рис. 9.7. Структура поперечно-электрических полей различных типов в прямоугольном волноводе

**H-волны.** Взяв теперь другое уравнение из (9.3):

$$\frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial y^2} = -\gamma_{\perp}^2 H_{mz}, \quad (9.45)$$

уже известным путем находим общий вид его решения

$$H_{mz} = (A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x) (C \cos \gamma_y y + D \sin \gamma_y y). \quad (9.46)$$



Налагая граничные условия

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} = 0 \\ x = 0, x = a \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} = 0 \\ y = 0, y = b \end{array} \right\}, \quad (9.47)$$

сначала получаем

$$\left. \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} \right|_{y=0} = (A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x) \gamma_y D = 0.$$

Отсюда  $D = 0$ , так как только при этом равенство будет выполнено для всех  $x$ . Точно так же доказывается, что  $B = 0$ . В результате

$$H_{mz} = H_0 \cos \gamma_x x \cos \gamma_y y. \quad (9.48)$$

Из граничных условий при  $x = a$  и  $y = b$  следует, что  $\gamma_x = \frac{m\pi}{a}$  и  $\gamma_y = \frac{n\pi}{b}$ , и, таким образом, подобно соотношению (9.40):

$$\gamma_{\perp}^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2. \quad (9.49)$$

Внося (9.48) в общие формулы (9.9), получаем выражения для всех компонент поля типа  $H_{mn}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_{mz} = H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{mx} = j\beta \frac{\gamma_x}{\gamma_{\perp}^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{H}_{my} = j\beta \frac{\gamma_y}{\gamma_{\perp}^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{mx} = j\beta Z^H \frac{\gamma_y}{\gamma_{\perp}^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y; \\ \dot{E}_{my} = -j\beta Z^H \frac{\gamma_x}{\gamma_{\perp}^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y. \end{array} \right\} \quad (9.50)$$

Так как общий вид поперечного волнового числа  $\gamma_{\perp}$  для Н-волн не отличается от полученного ранее для Е-волн, критическая длина волны по-прежнему определяется формулой (9.42):

$$\lambda_{\text{кр}} = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (9.51)$$

Однако, как видно из уравнений (9.50), Н-поле существует и в том случае, когда одно из чисел  $m$  и  $n$  есть нуль. При этом критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}}^{10} = 2a \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{кр}}^{01} = 2b. \quad (9.52)$$

Одна из этих величин оказывается наибольшей среди критических длин волн всех возможных Е- и Н-полей прямоугольного волновода. Полагая в дальнейшем  $a > b$ , мы констатируем, что наибольшей будет величина  $\lambda_{\text{кр}}^{10}$ . Это значит, что при достаточно малых размерах поперечного сечения волновода лишь одно поле  $H_{10}$  будет существовать в виде распространяющейся волны, которая называется основной. На практике применяется именно основная волна, распространяющаяся «без примеси» волн высших типов.

Взяв в формулах (9.50)  $m = 1$  и  $n = 0$ , выпишем компоненты поля  $H_{10}$ :

$$\begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a}; \\ \dot{E}_{mz} &= 0; \quad \dot{H}_{mx} = j \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}; \\ \dot{E}_{my} &= -j \frac{2a}{\lambda} Z_0 H_0 \sin \frac{\pi x}{a}; \quad \dot{H}_{my} = 0. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Основные характеристики волны типа  $H_{10}$  согласно (9.53) имеют вид:

$$\begin{aligned}
Z^H &= Z_0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \quad \beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \\
\mathfrak{G}_\phi &= c / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \quad \Lambda = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \\
\mathfrak{G}_{\text{гр}} &= c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{9.54}$$

На рис. 9.8 показано строение различных Н-полей. Магнитные силовые линии поля  $H_{10}$  образуют лежащие в плоскости  $xoy$  замкнутые контуры, а электрические силовые линии параллельны оси  $oy$ . Максимум электрического поля сдвинут по оси  $oz$  относительно центра семейства магнитных линий на  $\Lambda/4$ . В этом центре лежит максимум тока смещения.

Равенство нулю одного из индексов  $m$  и  $n$  означает, что поле в соответствующем направлении однородно: не имеет вариаций. Поперечная длина волны  $\lambda_x$  или  $\lambda_y$  (9.44) при этом обращается в бесконечность.

Нетрудно найти передаваемую волноводом мощность. Для волны основного типа согласно (9.52)

$$E_{m\perp} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

и в результате

$$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2Z^H} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{abE_0^2}{4Z^H} = \frac{abE_0^2}{4Z^0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \tag{9.55}$$

В оболочке волновода течет поверхностный ток (рис. 9.9), плотность которого определяется по формуле

$$\dot{\eta} = \left[ \bar{n}_0, \dot{H} \right].$$

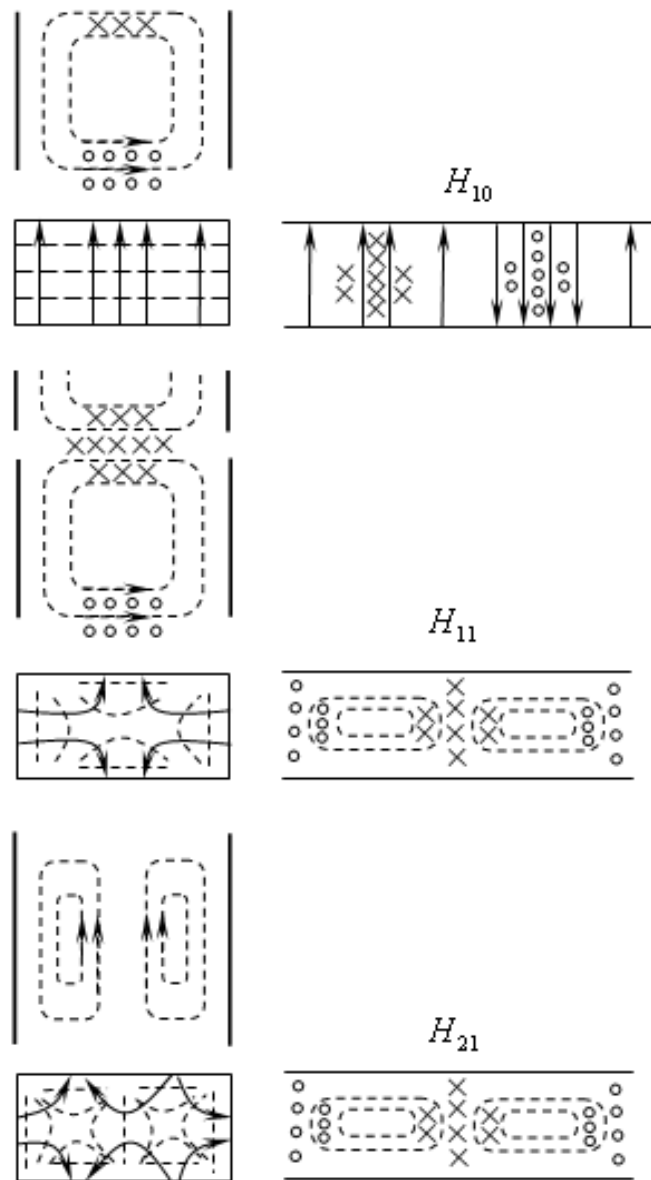


Рис. 9.8. Структура поперечно-магнитных полей различных типов в прямоугольном волноводе

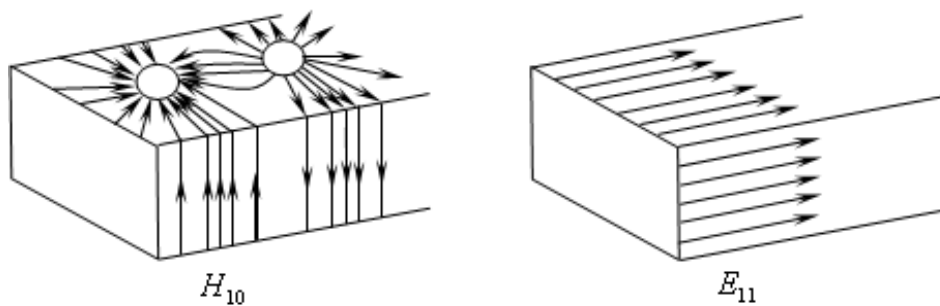


Рис. 9.9. Силовые линии тока волн  $H_{10}$  и  $E_{11}$  на стенках прямоугольного волновода

Подчеркнем в заключение некоторые особенности волновода, выявленные произведенным исследованием. Направляемые Е- и Н-волны образуют бесконечный ряд типов, отличающихся строением поля и скоростью распространения. Однако одновременно существует лишь ограниченное число волн. При этом размеры сечения прямоугольного волновода выбираются обычно так, чтобы распространялась только волна основного типа  $H_{10}$ . При достаточно малых размерах  $a < \lambda/2$  не может существовать и основная волна, поэтому передача энергии не происходит. Таким образом, на практике волноводы применяются только на очень коротких волнах, обычно сантиметровых и миллиметровых.

## 9.8. Коаксиальная линия

В коаксиальной линии могут распространяться волны Н, Е и Т. Ввиду того что условия существования Т-волны не зависят от частоты, тогда как Е- и Н-волны при достаточно низких частотах отсутствуют, именно Т-волна является основной. Она и используется для передачи энергии. Коаксиальные линии конструируются так, чтобы условия существования волн высших типов (Н и Е) оставались невыполненными.

Коаксиальная линия показана на рис. 9.10; радиусы внутреннего и внешнего проводников обозначим  $R_1$  и  $R_2$ .

Магнитное поле Т-волны коаксиальной линии находится из первого уравнения Максвелла

$$\bar{H}_m = \bar{\alpha}_0 \frac{I_m}{2\pi r}. \quad (9.56)$$

Полагая волновое сопротивление диэлектрической среды равным  $Z_{cp}$ , запишем:

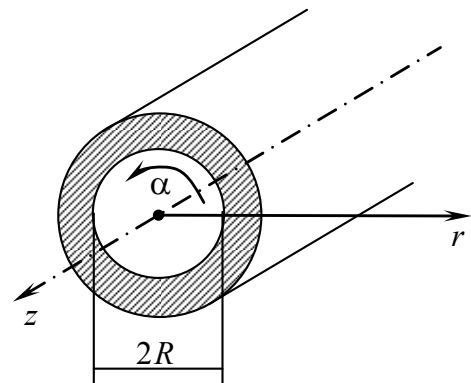


Рис. 9.10. Коаксиальная линия

$$\bar{E}_m = \bar{r}_0 \frac{I_m}{2\pi r} Z_{\text{ср}}. \quad (9.57)$$

Вычислив напряжение между проводниками как интеграл

$$U_m = \int_{R_1}^{R_2} E_m dr = \frac{I_m Z_{\text{ср}}}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (9.58)$$

приведем формулу (9.57) к виду

$$\bar{E}_m = \bar{r}_0 \frac{U_m}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (9.59)$$

что совпадает с выражением для поля коаксиального конденсатора, заряженного до разности потенциалов  $U_m$ .

Не следует, конечно, забывать, что электрическое и магнитное поля Т-волны отличаются от статических продольной волновой зависимостью, характеризуемой множителем  $\exp\{j(\omega t - kz)\}$ , который дописывается к амплитудам при переходе к комплексным величинам.

Как видно из формулы (9.58), отношение напряжения между проводниками к току, называемое волновым сопротивлением, равно

$$Z_{\text{л}} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{Z_{\text{ср}}}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (9.60)$$

Для линии с воздушной средой ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ )  $Z_{\text{ср}} = Z_0 = 120\pi$ , и волновое сопротивление коаксиальной линии  $Z_{\text{л}} = 60 \ln \frac{R_2}{R_1}$ .

## Контрольные вопросы

1. Опишите порядок действий при определении структуры полей  $E$  и  $H$  в направляющей системе на примере прямоугольного волновода.
2. Изложите суть метода разделения переменных.

3. Какие граничные условия выполняются на боковой стенке прямоугольного волновода ( $x = 0, 0 \leq y \leq b$ )?
4. Что означают символы в названии волны  $H_{mn}$  или  $E_{mn}$  ?
5. Как соотносятся поперечные составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в каждой точке направляющей системы по направлению и фазе?
6. Какая волна в направляющей системе называется основной? Почему стараются работать именно на этой волне (типе колебаний)?
7. В чем проявляется дисперсия в направляющих системах? Какое влияние она оказывает на передачу сигналов? В каких направляющих системах она отсутствует?
8. Дайте определения фазовой и групповой скоростей волны в направляющих системах. Какое соотношение существует между ними?
9. Изложите суть концепции Бриллюэна. Какие выводы из нее следуют?
10. Дайте определение волнового и характеристического сопротивления в направляющих системах. Можно ли трактовать их как «сопротивление, оказываемое направляющей системой, распространяющейся волне»? Для чего они могут быть использованы?

## 10. Объемные резонаторы

### 10.1. Общая теория электромагнитных резонаторов

#### 10.1.1. Накопление энергии в объеме. Резонатор и направляющая структура

Рассматривая различные волновые процессы, мы отмечали, что распространяющиеся, бегущие, волны переносят энергию. Было введено представление о стоячей волне, наложении двух противоположно направленных волн с одинаковыми амплитудами; в этом случае (при отсутствии потерь) энергия в среднем не переносится. Если в узлах электрического поля, т.е. там, где оно обращается в ноль, установить идеально проводящие плоскости  $z = \text{const}$ , прежнее поле сохранится в отсеченном энергетически изолированном объеме. Можно сказать, что противоположно направленные бегущие волны полностью отражаются этими плоскостями, на которые они падают по нормали. Движение энергии при этом имеет колебательный характер (рис. 10.1).

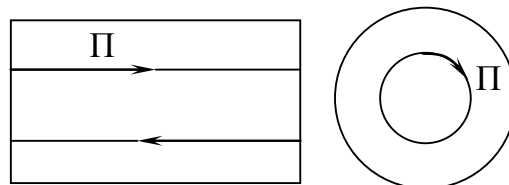


Рис. 10.1. Схема движения энергии  
внутри объема

Направление вектора Пойнтинга меняется через четверть периода колебаний поля: он колеблется с удвоенной частотой. Расстояние между соседними плоскостями составляет половину длины волны. Таким образом, условие существования поля между ними выполняется при определенной частоте. Изолированный объем, в котором происходит колебательное движение энергии, в сущности, выступает как накопитель. Условие накопления энергии можно реализовать не только при колебательном, но и при циклическом движении энергии (см. рис. 10.1) внутри некоторого объема. По-



сколькx во всех случаях свободные электромагнитные поля в энергетически изолированных объемах могут существовать только при определенных частотах, такие объемы являются резонаторами.

Легко показать, что резонатором будет любой отрезок некоторой продольно-однородной структуры, отсеченный двумя поперечными идеально проводящими плоскостями (рис. 10.2). Если исходной структурой является прямоугольный (рис. 10.2,*а*) или, например, круглый (рис. 10.2,*б*) волновод, то образуется полный резонатор; то же можно сказать о резонаторе, образованном коаксиальной линией (рис. 10.2,*в*). Но все дальнейшие рассуждения будут справедливы и в отношении отсеченного отрезка диэлектрического волновода (рис. 10.2,*г*) или какой-нибудь иной открытой структуры, например двухпроводной линии (рис. 10.2,*д*).

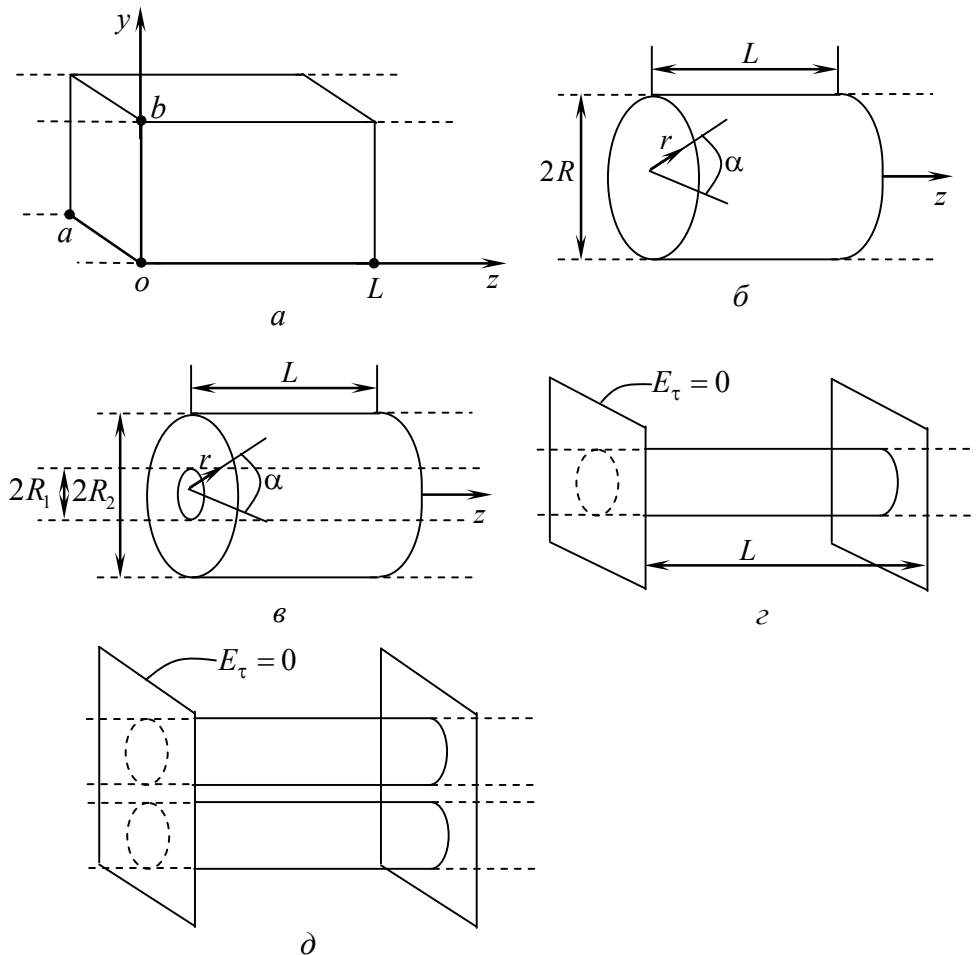


Рис. 10.2. Резонаторы: *а* – полный прямоугольный; *б* – полный цилиндрический; *в* – образованный отрезком коаксиальной линии; *г* – образованный отрезком диэлектрического волновода; *д* – образованный отрезком двухпроводной линии

В отсеченной области возможно существование лишь таких полей, которые в дополнение к граничным условиям, свойственным исходной направляющей структуре, удовлетворяют также условию  $E_\tau = 0$  на введенных перегородках. Таким свойством может обладать наложение прямой и обратной волн одного типа.

Сосредоточив внимание на поперечной электрической компоненте поля, запишем:

$$\dot{E}_{m\perp} = E_{\perp 1} e^{-j\beta z} + E_{\perp 2} e^{j\beta z}, \quad (10.1)$$

где  $E_{\perp}$  — поперечная проекция вектора  $\vec{E}$ .

Потребуем обращения  $\dot{E}_{m\perp}$  в нуль на плоскости  $z = 0$ , что реализуется при  $E_{\perp 1} = -E_{\perp 2}$ , причем выражение (10.1) принимает вид

$$\dot{E}_{m\perp} = E_0 \sin \beta z, \quad (10.2)$$

где  $E_0 = -j2E_{\perp}$  — стоячая волна.

Налагая такое условие при  $z = L$ , мы должны положить в (10.2)  $\sin \beta L = 0$ . Отсюда

$$\beta = p\pi/L, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.3)$$

т.е. постоянная распространения  $\beta$  не может быть произвольной величиной, а принимает одно значение из этой последовательности. Поскольку  $\beta = 2\pi/\Lambda$ , то из (10.3) следует

$$L = \pi\Lambda/2. \quad (10.4)$$

Как видно из равенства (10.2), при  $p=0$   $\dot{E}_{m\perp} \equiv 0$ : поперечная электрическая составляющая вообще отсутствует; эту возможность мы обсудим отдельно. Во всех остальных случаях равенство (10.4) означает, что длина отсеченного отрезка направляющей структуры должна быть кратна половине длины волны (того или иного типа).

Имея в виду, что  $\beta^2 = k^2 - \gamma_{\perp}^2$ , получаем

$$k^2 = \gamma_{\perp}^2 + (p\pi/L)^2.$$

Поскольку  $k^2 = (\omega/c)^2 \epsilon\mu$ , то

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\gamma_{\perp}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}. \quad (10.5)$$

Полагая пока  $\epsilon$  и  $\mu$  вещественными константами, будем считать также не зависящим от частоты поперечное волновое число  $\gamma_{\perp}$  (как в случае полых волноводов). Тогда (10.5) выражает в явной форме частоты, при которых поле может существовать в рассматриваемом объеме. Они называются собственными частотами. Объем выступает, таким образом, как резонатор.

Для каждого типа волны в направляющей структуре, которому отвечает определенное поперечное волновое число  $\gamma_{\perp}$ , существует бесконечное множество собственных частот, получаемых при переборе  $p$ . Собственные частоты, соответствующие всем типам волн при всех значениях  $p$ , образуют последовательность

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \leq \dots \leq \infty.$$

Заметим, что в случае Т-волн  $\gamma_{\perp} = 0$ , так что согласно равенству (10.5) собственные частоты зависят только от продольного размера  $L$  и являются кратными низшей частоте

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{p\pi}{L} \quad (10.6)$$

при  $p \neq 0$ .

Значение  $p = 0$  в данном случае невозможно. Это означало бы полное отсутствие электрического поля: для Т-волн оно поперечное.

Что касается случая  $p = 0$ , то поскольку при этом  $\beta = 0$ , соответствующая собственная частота резонатора, определяемая по формуле (10.5),

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \gamma_{\perp} \quad (10.7)$$

равна критической (круговой) частоте  $\omega_{\text{кр}}$  для данной длины направляющей структуры (сравните  $f_{\text{кр}} = \omega_{\text{кр}}/2\pi$ ). Так как при  $p = 0$  поперечное электрическое поле отсутствует, то должно существовать продольное, а следовательно, речь может идти только о Е-волнах. Как известно, при критической частоте поле не изменяется по оси  $z$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Согласно выражению (10.4) длина резонатора при этом оказывается неопределенной:  $L = 0 \cdot \infty$ . Две поперечные плоскости могут располагаться на любом расстоянии друг от друга. Заметим, что Н-волны при критической частоте имеют подобное же продольное магнитное поле (и поперечное электрическое), так что граничные условия на поперечных идеально проводящих перегородках не могут быть удовлетворены.

### 10.1.2. Свойства полей резонаторов

Мы рассмотрели только определенный класс резонаторов, каждый из которых можно трактовать как энергетически изолированный участок направляющей структуры. Их поля обладают свойствами стоячей волны. В простейшем случае векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  стоячей волны при отсутствии потерь сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , причем электрическое и магнитное поля синфазны на участке между соседними узлами. Этим свойством отличаются многие поля резонаторов. Из формулы (10.2) видно, что при вещественных  $\beta$  и  $E_\perp$  поле  $\bar{E}_\perp$  синфазно в области постоянного знака синуса. Пусть  $\dot{\bar{E}}_m = \bar{E}e^{i\varphi}$ , где фаза не зависит от координат. Определяя комплексную амплитуду  $\bar{H}$ , имеем

$$\dot{\bar{H}}_m = \frac{1}{-j\omega\mu} \text{rot } \dot{\bar{E}}_m = \bar{H}_m e^{i(\varphi+\pi/2)},$$

где  $\bar{H}_m = \frac{1}{\omega\mu} \text{rot } \bar{E}_m$  — величина вещественная.

Это значит, что фаза вектора  $\bar{H}$  отличается от фазы вектора  $\bar{E}$  на  $\pi/2$ . При таком фазовом соотношении наступают моменты, когда существует только электрическое поле или только магнитное.

Поток вектора Пойнтинга, проходящий через любое сечение резонатора, в среднем равен нулю. Движение энергии имеет колебательный характер (рис. 10.3,*а*).

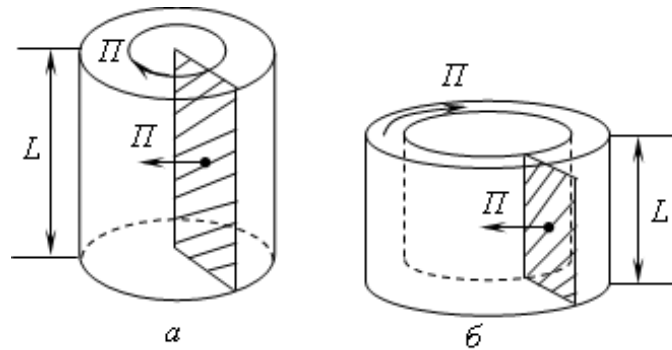


Рис. 10.3. Резонаторы: *а* – полый цилиндрический; *б* – образованный замкнутым в кольцо отрезком прямоугольного волновода

Можно убедиться, что в ряде случаев возникают циклические движения энергии (рис. 10.3,*б*). Если, например, рассматривать резонатор, показанный на рис. 10.2,*б*, при круговой поляризации, то в этом случае существует азимутальный циклический поток энергии (см. рис. 10.3,*а*); через заштрихованное сечение проходит поток вектора Пойнтинга, в среднем не уничтожающийся. Между основаниями цилиндра  $z = 0$  и  $z = L$  устанавливается уже рассматривавшаяся стоячая волна, однако функция  $E_{\perp}$  в равенстве (10.2) при этом не является вещественной величиной и сделанный ранее вывод о фазовом соотношении  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  оказывается неприменимым. Волны круговой поляризации возможны не только в круговом волноводе. То же можно сказать и о циклических потоках энергии в резонаторах; мы могли бы рассматривать, в частности, прямоугольный резонатор.

Существуют резонаторы, образованные замкнутой направляющей структурой того или иного вида. На рис. 10.3,*б* показан такой резонатор, который можно рассматривать как изогнутый в кольцо прямоугольный волновод. Если в волноводе распространяется переносящая энергию волна, то также образуется циклический поток вектора Пойнтинга. Это возможно, если вдоль замкнутого волновода укладывается целое число волн (чем больше радиус кольца, тем

с большим основанием можно определить длину волны). Впрочем, этот кольцевой резонатор можно трактовать как отсеченный двумя параллельными плоскостями отрезок коаксиальной линии и это представление является точным.

Кроме резонаторов, примеры которых представлены на рис. 10.2, нередко применяются и такие, которые уже нельзя рассматривать, как это делалось в п.10.1.1. Резонатором, например, может быть любая металлическая полость, какое-либо диэлектрическое тело, система зеркал, планарная структура и пр.

В общем случае в теории электромагнитных резонаторов ищутся решения уравнений Максвелла или волновых уравнений при требуемых граничных условиях. В частности, для произвольного полого резонатора с однородной изотропной средой формулируется одна из следующих двух задач:

1) в объеме резонатора  $V$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0 \quad (10.8)$$

на граничной поверхности  $S$

$$\dot{\vec{E}}_{m\perp} = 0;$$

2) в объеме резонатора  $V$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0 \quad (11.9)$$

на граничной поверхности  $S$

$$\left( \text{rot } \dot{\vec{H}}_m \right)_{\perp} = 0.$$

Соленоидальные решения этих задач  $(\text{div } \dot{\vec{E}}_m = 0, \text{div } \dot{\vec{H}}_m = 0)$  дают систему полей, называемых собственными колебаниями. Каждое решение  $\dot{\vec{E}}_m^{(n)}$  или  $\dot{\vec{H}}_m^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) реализуется при некотором собственном значении  $k_n^2$  параметра  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu / nc^2$ . Соответствующие значения  $\omega = \omega_n$  — это собственные круговые частоты резонатора, а  $k_n$  — собственные волновые числа.

Трехмерные векторные задачи аналогичны двумерным скалярным задачам. Если полый резонатор относится к уже рассматривавшемуся классу (см. рис. 10.3), то векторы  $\dot{\vec{E}}_m$  и  $\dot{\vec{H}}_m$  в уравнениях (10.8) и (10.9) удобно спроецировать на ось  $z$ . Это приводит к скалярным задачам относительно  $\dot{E}_{mz}$  и  $\dot{H}_{mz}$ .

Полное поле можно определить через  $\dot{E}_{mz}$  (Е-поля) или через  $\dot{H}_{mz}$  (Н-поля), подобно тому, как это делалось для направляющих структур.

### 10.1.3. Учет потерь. Добротность резонаторов

Потери энергии в реальных резонаторах обусловлены поглощением в диэлектрических и металлических элементах, а также в ряде случаев излучением во внешнее пространство (например, полый резонатор излучает при наличии отверстия).

Пусть  $W$  — запас энергии резонатора при собственных колебаниях некоторого типа с частотой  $\omega$ , а  $P_n$  — мощность потерь. Введем величину

$$Q = \omega W / P_n, \quad (10.10)$$

которая, как мы убедимся, для каждого типа колебаний является константой и называется добротностью резонатора. Поскольку рассматривается полная энергия некоторого свободного электромагнитного поля,  $W$  и  $P_n$  связаны соотношением (1.23); объединяя его с равенством (10.10), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega}{Q} W = 0. \quad (10.11)$$

Его решение

$$W(t) = W(0) \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right) \quad (10.12)$$

показывает, что запас энергии собственных колебаний экспоненциально падает.

Поскольку энергия квадратично связана с полем, то оно также экспоненциально затухает, причем амплитуды компонент  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  изменяются по закону  $\exp\left(-\frac{\omega}{2Q}t\right)$ . Это значит, что поле испытывает затухающие колебания.

## 10.2. Полые резонаторы

### 10.2.1. Прямоугольный резонатор

Рассмотрим подробно полый резонатор, показанный на рис. 10.3,а. В приближении идеальной проводимости оболочки собственные частоты определяются по формуле (10.5), в которую надо подставить выражение поперечных волновых чисел  $\gamma_{\perp} = \gamma_{\perp mn}$ . В результате имеем

$$\omega = \omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2} \quad (10.13)$$

(символ  $\omega_{mnp}$  отражает тот факт, что собственная частота определяется индексами  $m$ ,  $n$  и  $p$ ).

Заметим, что выражение собственных волновых чисел (10.5) в данном случае принимает вид  $\gamma_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2$ . Собственные колебания будем классифицировать, опираясь на представление о Е- и Н-волнах волновода.

Поскольку каждой из собственных волн  $E_{mn}$  или  $H_{mn}$  соответствует бесконечный ряд собственных колебаний, различающихся числами  $p$ , будем говорить о типах собственных колебаний  $E_{mnp}$  или  $H_{mnp}$ . Выпишем выражения соответствующих полей.



***E*-колебания:**

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_m^{mnp} = E_0^{mnp} & \left[ \bar{z}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L} - \frac{1}{\gamma_{\perp mn}^2} \frac{p\pi}{L} \times \right. \\ & \left. \times \left( \bar{x}_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \bar{y}_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \sin \frac{p\pi z}{L} \right]; \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m^{mnp} = jE_0^{mnp} \frac{\omega_{mnp}\varepsilon}{\gamma_{\perp mn}^2} & \left( \bar{x}_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} - \right. \\ & \left. - \bar{y}_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \cos \frac{p\pi z}{L}, \end{aligned}$$

где  $E_0^{mnp}$  — неопределенные коэффициенты. Индексы  $m, n, p$  могут принимать следующие значения:  $m, n = 1, 2, \dots$ ;  $p = 0, 1, 2, \dots$  (см. п. 10.1.1).

***H*-колебания:**

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}_m = -iH_0^{mnp} \frac{\omega_{mnp}\mu}{\gamma_{\perp mn}^2} & \left( -\bar{x}_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right. \\ & \left. + \bar{y}_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \sin \frac{p\pi z}{L}; \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}}_m = H_0^{mnp} & \left[ \bar{z}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L} - j \frac{1}{\gamma_{\perp mn}^2} \frac{p\pi}{L} \times \right. \\ & \left. \times \left( -\bar{x}_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \bar{y}_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \cos \frac{p\pi z}{L} \right]. \end{aligned}$$

В отличие от *E*-колебаний, в данном случае  $m, n = (0), 1, 2, \dots$  и  $p = 0, 1, 2, \dots$ ; нуль в скобках означает, что  $m$  и  $n$  не могут вместе быть равны нулю.

Прежде чем анализировать собственные колебания прямоугольного резонатора, отметим, что записанное представление полей не является единственно возможным. Можно тремя различными способами выбирать продольную ось  $z$ , т.е. получать резонатор,

мысленно перегораживая три разных ортогонально ориентированных прямоугольных волновода, как показано на рис. 10.4,а. Мы получим три различных классификации собственных колебаний.

Возвращаясь к выбору индексов  $m, n, p$  в формулах (10.13) и (10.14), видим, что любая комбинация трех целых чисел, одно из которых может быть заменено нулем, определяет один или несколько типов колебаний резонатора. Разные собственные колебания (в частности,  $E_{mnp}$  или  $H_{mnp}$ ), имеющие одинаковые собственные частоты, называются вырожденными. Очевидно, что различные линейные комбинации полей такого рода также представляют собой собственные колебания.

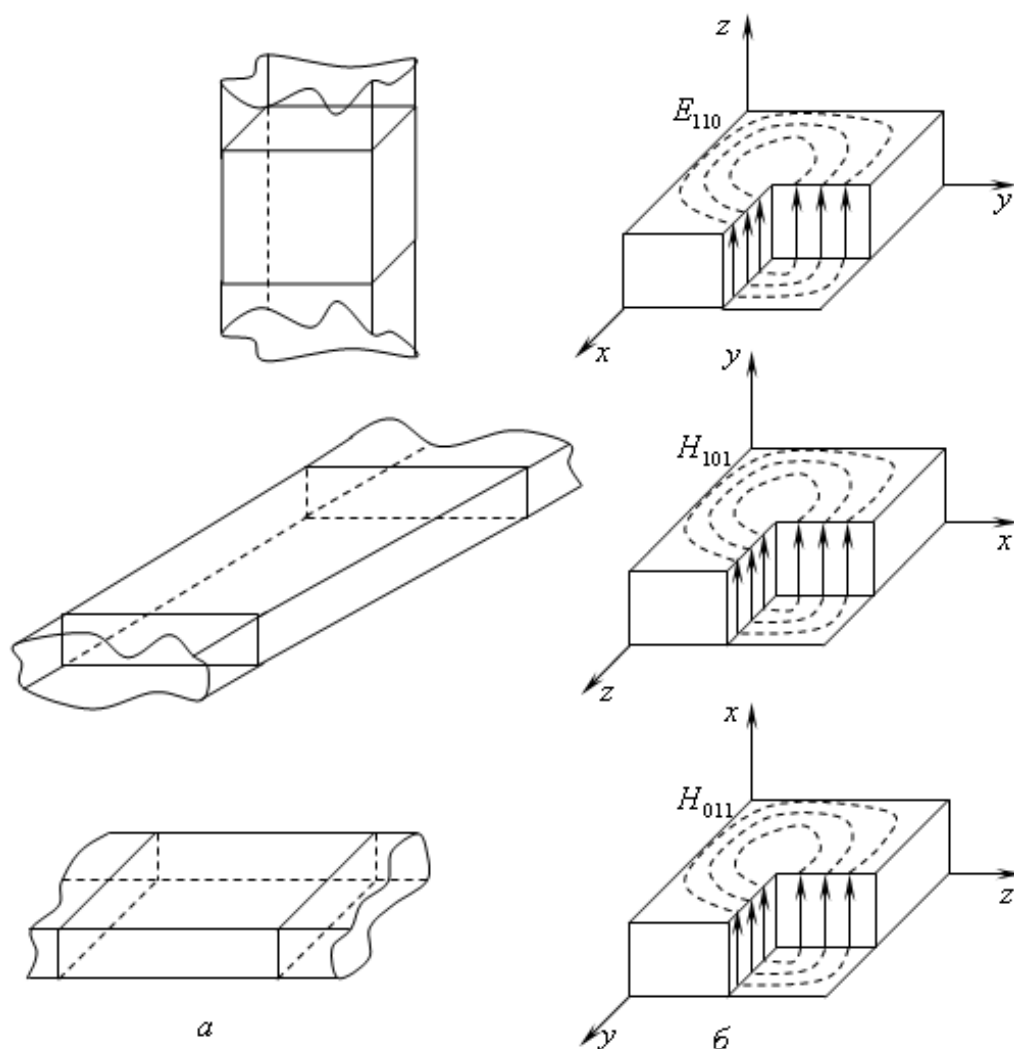


Рис. 10.4. Три различных классификации собственных колебаний прямоугольного резонатора в зависимости от выбора продольной оси  $z$

Какова низшая собственная частота резонатора без потерь? Чтобы найти ее значение при заданных размерах  $a$ ,  $b$  и  $L$ , надо минимизировать выражение для  $\omega_{mnp}$  (10.13) соответствующим выбором чисел  $m$ ,  $n$  и  $p$ . Одно из них, которое отвечает наименьшему размеру, берется равным нулю, а каждое из оставшихся — единице. Соответствующий тип колебаний резонатора называется основным.

Структура его поля показана на рис. 10.4,б при трех вариантах выбора системы координат. Одна и та же структура получает разные обозначения:  $E_{110}$ ,  $H_{101}$ ,  $H_{011}$ . Нулевой индекс соответствует той оси ( $x$ ,  $y$  или  $z$ ), вдоль которой поле однородно.

Рассмотрим несколько картин силовых линий собственных колебаний прямоугольного резонатора (рис. 10.5, 10.6).

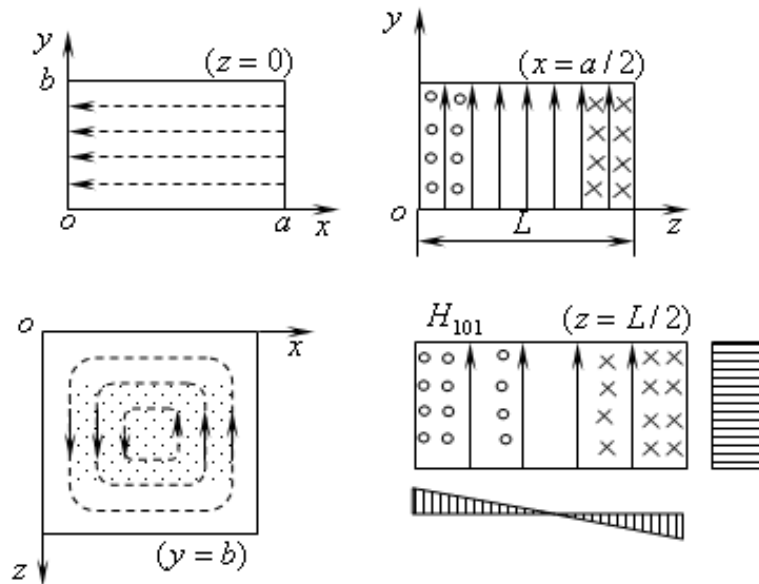


Рис. 10.5. Структура поля  $H_{101}$  в прямоугольном резонаторе

На рис. 10.5 показан тип колебаний  $H_{101}$ ; на рис. 10.6 — тип  $E_{111}$ . Эти изображения полезно сравнить с соответствующими мгновенными снимками волн в прямоугольном волноводе. Таким образом, сопоставляются стоячие и бегущие волны. Различие картин силовых линий состоит в том, что системы электрических и магнитных линий в одном случае сдвинуты на  $\lambda/4$  по отношению друг к другу. При этом в волноводе вектор Пойнтинга вдоль оси  $z$  не меняет знак.

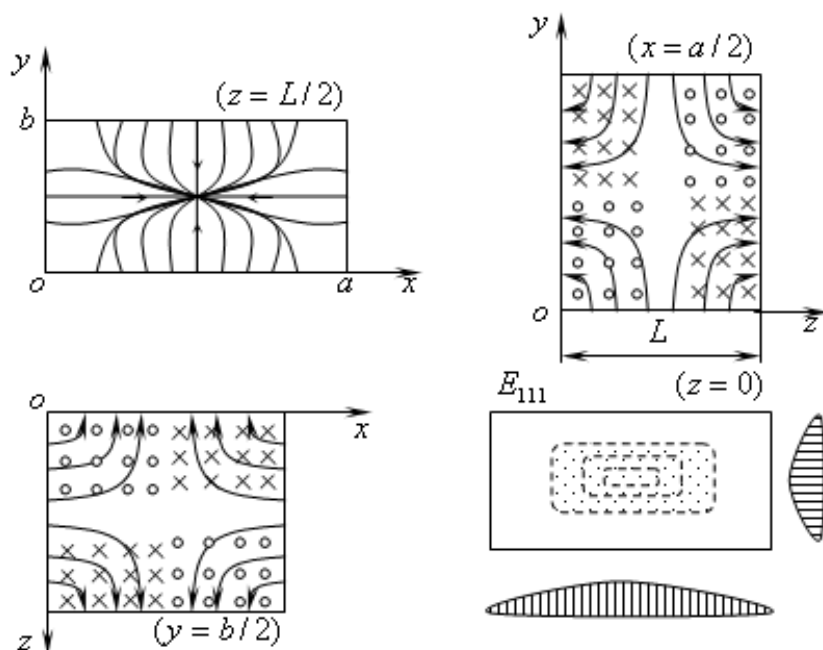


Рис. 10.6. Структура поля  $E_{111}$  в прямоугольном резонаторе

В резонаторе полные поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , а средние значения вектора Пойнтинга равны нулю.

### 10.2.2. Другие полые резонаторы

Рассмотрим в краткой форме некоторые другие полые электромагнитные резонаторы.

Рассекая идеально проводящими поперечными плоскостями коаксиальную линию, получаем коаксиальный резонатор. Если ограничиться рассмотрением собственных колебаний типа Т, собственные частоты  $\omega = \omega_p$  будут определяться формулой (10.5). Соответствующие типы колебаний будем обозначать  $T_p$ .

На рис. 10.7 показано строение поля типа  $T_1$ .

Как известно, при относительно низких частотах используются квазистационарные резонаторы (колебательные контуры), составленные из индуктивных и емкостных элементов. Поскольку электрическое и магнитное поля при этом можно считать пространственно разделенными, применяется теория цепей. Близкими свойствами обладают некоторые полые резонаторы, используемые, в частности, в электронике СВЧ. Таков, например, тороидальный

резонатор, показанный на рис. 10.8. Его электрическое поле при основном типе колебаний можно рассматривать как сосредоточенное между центральными плоскими элементами в узком зазоре.

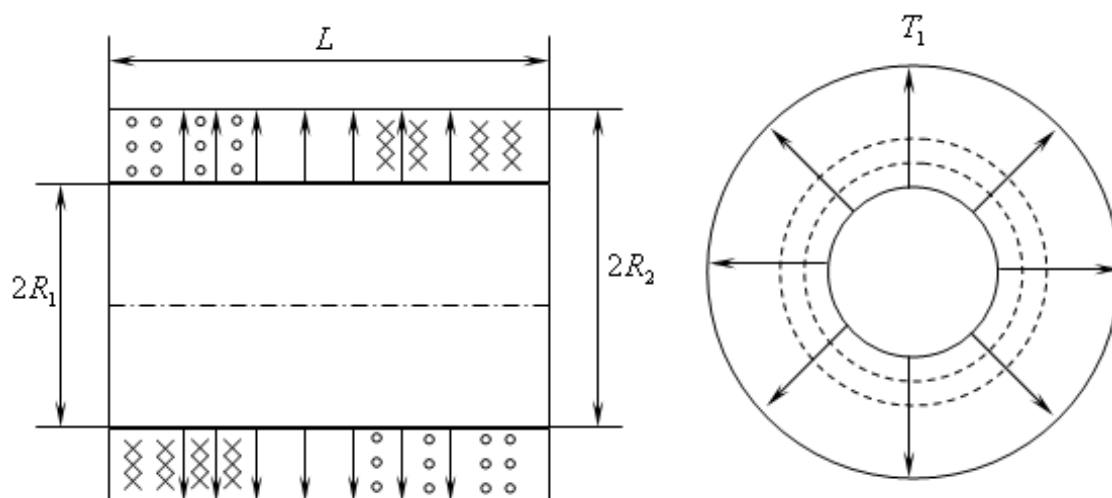


Рис.10.7. Структура поля  $T_1$  в коаксиальном резонаторе

Принимая эту часть за плоский конденсатор, имеем  $C = \epsilon S/d$  (рис. 10.8,*a*).

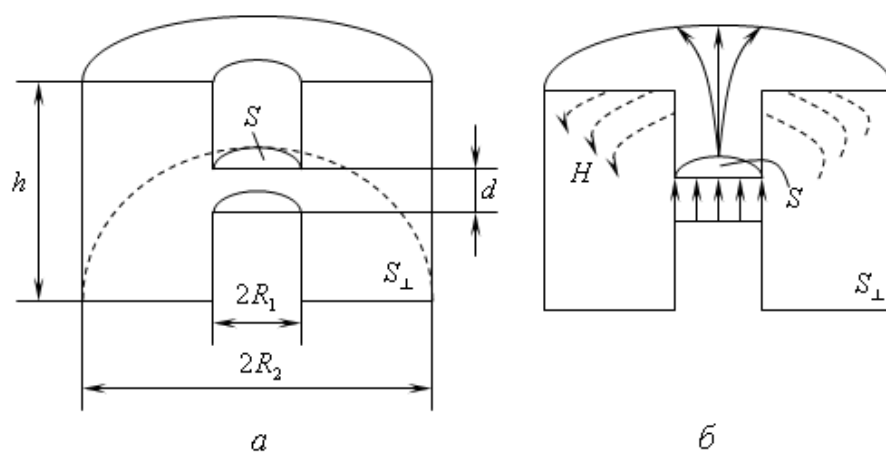


Рис. 10.8. Структура электрического и магнитного полей тороидального резонатора при основном типе колебаний

Магнитное поле описывается concentрическими силовыми линиями, подобно полю тороидального соленоида, так что  $H = I/2\pi r$ , где  $I$  — полный ток резонатора, линии которого расходятся в радиальных сечениях (рис. 10.8,*б*). Поэтому

$$L = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu\mu_0}{I} \int_{S_{\perp}} H ds = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \int_{S_{\perp}} \frac{ds}{r}.$$

Собственную частоту основного типа колебаний определим по формуле  $\omega = (LC)^{-1/2}$ . Внося  $L$  и  $C$ , имеем

$$\omega = \sqrt{2\pi d \left( \frac{\varepsilon\mu}{c^2} S \int_{S_{\perp}} \frac{ds}{r} \right)^{-1}}. \quad (10.16)$$

Рассматривавшиеся выше полые резонаторы типичны для техники СВЧ, главным образом для диапазона сантиметровых волн. Их отличительным признаком является весьма высокая добротность, которая в отдельных случаях может превышать  $10^5$ . В силу ряда причин (в частности, технологических) наиболее распространены цилиндрические резонаторы. Известно, что цилиндрический резонатор легко сделать перестраиваемым, снабдив передвижным дном — «поршнем». Для типов колебаний  $H_{0mp}$  так называемый бесконтактный поршень, т.е. дно, не касающееся цилиндрической поверхности, почти не нарушает условий существования поля, не разрывая путей токов в оболочке (они азимутальные). Различные полые резонаторы сложной формы незаменимы в СВЧ-электронике.

### 10.2.3. Твердотельные и планарные резонаторы

Развитие линий передачи затронуло и принципы конструирования резонаторов. Миниатюризация полых резонаторов возможна лишь на основе применения все более оптически плотных заполняющих сред. Поскольку собственные частоты изменяются как  $\varepsilon^{-1/2}$ , можно изготовить электромагнитный резонатор малых размеров, металлизировав поверхность диэлектрического шарика или, например, диска с высокой проницаемостью. Однако в металлизации нет необходимости (к тому же появятся потери в металле): диэлектрическое тело в оптически менее плотной среде (например,

воздухе) само способно быть резонатором. Диэлектрические резонаторы находят применение на практике.

На рис. 10.9,*а* показаны диэлектрические резонаторы, помещенные в полый волновод. Физическая причина, обуславливающая накопление энергии внутри диэлектрического тела, в определенном смысле та же, что при полном отражении волн от границы с менее оптически плотным диэлектриком.

Задача о собственных колебаниях диэлектрического шара строго решается методом разделения переменных. При этом внутреннее поле представляется так же, как в случае полого резонатора, а внешнее — через функции Ханкеля. Удовлетворение условиям непрерывности  $E_\tau$  и  $H_\tau$  на поверхности шара приводит к двум уравнениям относительно собственных волновых чисел — для классов колебаний  $E$  и  $H$ .

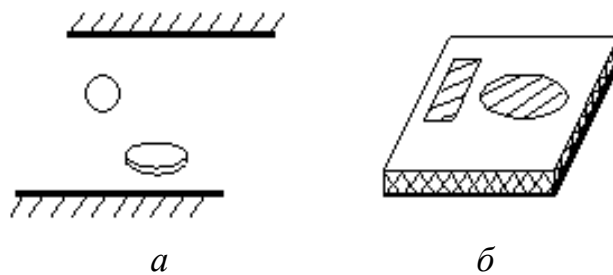


Рис. 10.9. Диэлектрические резонаторы, помещенные в полый волновод (*а*); прямоугольный и дисковый полосковые резонаторы (*б*)

Поскольку миниатюризация линий передачи привела к появлению различных планарных структур, были созданы и соответствующие планарные резонаторы. Таковы различные полосковые резонаторы, например прямоугольный и дисковый (рис. 10.9,*б*).

#### 10.2.4. Оптические и квазиоптические резонаторы

Системы зеркал и линз могут направлять потоки электромагнитной энергии. Если в такого рода структуре созданы условия существования стоячих волн, мы получим резонатор. Ясно, что простейшим будет резонатор, образованный двумя зеркалами.

На первый взгляд, такая открытая структура кажется менее выгодной, чем полый резонатор, поскольку можно ожидать значительных потерь на излучение. Но необходимо учитывать, что зеркальные резонаторы применяются в условиях, когда их размеры на несколько порядков превышают длину волны. При подобных относительных размерах полого резонатора, т.е. при использовании собственных колебаний весьма высокого порядка, мы попадаем в сгущенную область его спектра: на некоторый фиксированный интервал частот приходится относительно много типов собственных колебаний. Это нежелательно по ряду причин; учитывая потери, можно установить, что, начиная с некоторой частоты, полый резонатор должен утратить резонансные свойства. Существование эффекта сгущения спектра легко проверить на примере прямоугольного резонатора. Взяв формулу (10.5), видим, что с ростом  $m$ ,  $n$  и  $p$  соседние собственные частоты действительно сближаются. Между тем сгущение спектра отсутствует в классе Т-колебаний: частотные интервалы между соседними типами колебаний везде одинаковы. Заметим, что в лучевой трактовке различным типам колебаний полого резонатора сопоставляются разные типы допустимых многократных отражений. Если же рассматривать Т-колебания для системы двух параллельных идеально проводящих плоскостей, то они описываются простейшей лучевой схемой (рис. 10.10,*a*), содержащей прямой и обратный нормальные лучи.

Оптический резонатор из двух плоских параллельных зеркал характеризуется тем, что при достаточно больших углах  $\alpha$  (рис. 10.10,*б*) многократные отражения невозможны. Не слишком большие потери на излучение будут только при малых  $\alpha$ . Поэтому спектр собственных колебаний оказывается в значительной степени «прореженным». Если иметь в виду лучевые схемы, то возможны



лишь параксиальные системы лучей. Поля собственных колебаний, практически, являются Т-полями.

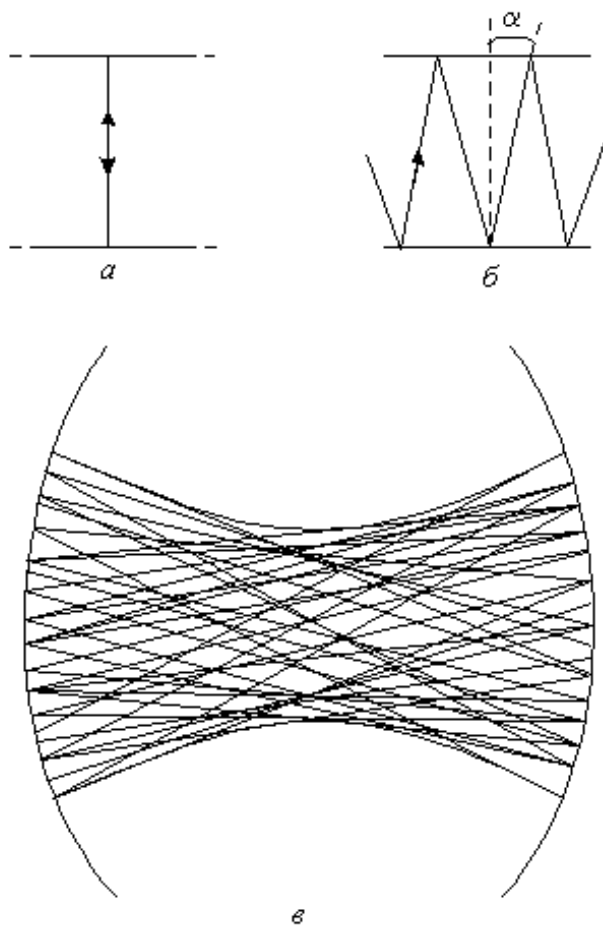


Рис. 10.10. Оптический резонатор из двух плоских параллельных зеркал (*a*, *б*); резонатор с вогнутыми зеркалами (*в*)

Плоские резонаторы, однако, не обладают удовлетворительной устойчивостью по отношению к деформации, например перекосам зеркал, которые приводят к резкому возрастанию потерь на излучение. Чаще применяются резонаторы с вогнутыми зеркалами, значительно более устойчивые по отношению к деформациям, но отличающиеся несколько меньшим разрежением спектра. При лучевой трактовке типов колебаний таких резонаторов приходят к некоторым замкнутым конфигурациям, не выходящим за пределы каустики — линии, ограничивающей систему лучей (рис. 10.10, *в*).

Имеется сходство между процессами в линзовой линии и резонаторе с вогнутыми зеркалами. В обоих случаях существуют типы

волн (бегущих и соответственно стоячих), которые имеют разные поперечные распределения; за пределами некоторой осевой зоны поля быстро убывают.

## Контрольные вопросы

1. Чем отличаются структуры полей  $E$  и  $H$  в прямоугольном волноводе и резонаторе, образованном на его основе?

2. Дайте определение добротности резонатора. Какие виды потерь энергии в нем присутствуют?

3. Объемный резонатор на частоте 1 ГГц имеет добротность 6000. За сколько периодов колебаний амплитуда электрического и магнитного полей уменьшится в нем в  $e^{2\pi} \approx 23$  раза и какое это займет время?

*Ответ:* за 6000 периодов и 6 мкс.

4. Прямоугольный резонатор возбуждается на типе колебаний  $H_{101}$ . Как будет называться этот тип колебаний, если оси  $y$  и  $z$  поменять местами?

5. Выведите формулу для низшей частоты кубического резонатора и определите ее для резонатора со стороной 0,1 м.

*Ответ:*  $f_0 = 2,12$  ГГц.

6. За счет какого явления электрические и магнитные поля удерживаются внутри диэлектрического резонатора?

7. Почему в оптическом диапазоне существуют открытые резонаторы, а не замкнутые?

**ЧАСТЬ 2**

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
РАДИОВОЛН**



# 11. Распространение радиоволн в свободном пространстве

## 11.1. Классификация радиоволн по диапазонам

Радиоволнами принято называть электромагнитные волны в диапазоне частот  $3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{12}$  Гц, т.е. от единиц килогерц до тысяч гигагерц.

Мы рассмотрим вопросы, связанные с процессами свободного распространения радиоволн. Под свободным распространением радиоволн будем понимать распространение радиоволн в атмосфере, вдоль поверхности земли, в толще земли, в космическом пространстве. Из рассмотрения исключим передачу электромагнитных волн по искусственным линиям связи — проводным линиям, волноводам, световодам, полосковым линиям передачи и т.п.

Свободно распространяющиеся радиоволны находят в современной науке и технике обширное и многообразное применение. Прежде всего отметим использование радиоволн для передачи разного рода информации (телеграфия, телефония, телевидение, радиовещание), определения координат объектов (радиолокация, радионавигация), управления на расстоянии различными устройствами и механизмами (радио- и телеуправление). Свободно распространяющиеся радиоволны широко используются в метеорологии при наблюдении за атмосферными образованиями (прогнозирование погоды), в геофизике, при изучении верхних слоев атмосферы, в радиоастрономии, при изучении строения планет, звезд, туманностей, находящихся как в пределах нашей галактики, так и вне ее.

Во всех перечисленных применениях общим является наличие передающего устройства, среды, в которой распространяются радиоволны, и приемного устройства. Все вместе эти элементы образуют радиолинию (рис. 11.1).

В радиолиниях связующим элементом является природная среда, окружающая земной шар, например атмосфера и космическое пространство, если радиолиния расположена между Землей и космическим аппаратом. На земных радиолиниях типа «земля-земля»

среда включает в себя атмосферу и поверхность Земли. Земная атмосфера и поверхность Земли являются поглощающими, электрически неоднородными средами. Их проводимость и диэлектрическая проницаемость непостоянны и изменяются во времени и пространстве, зависят от частоты распространяющихся волн.

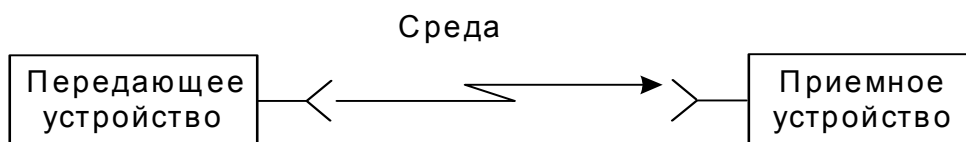


Рис. 11.1. Схематическое изображение радиолинии

В зависимости от частоты распространяющихся радиоволн влияние одной и той же среды проявляется в большей или меньшей степени. Резко выраженная зависимость законов распространения радиоволн от их частоты приводит к необходимости разделить радиоволны на диапазоны, в пределах которых условия распространения радиоволн примерно одинаковы. Сведения об этих диапазонах в соответствии с Регламентом радиосвязи, принятым Международным консультативным комитетом по радио (МККР), приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Распределение радиоволн по диапазонам

Номер диапазона	Частота	Название по частоте	Длина волны	Название по длине волны
4	3–30 кГц	Очень низкие частоты (ОНЧ)	100–10 км	Сверхдлинные волны (СДВ)
5	30–300 кГц	Низкие частоты (НЧ)	10–1 км	Длинные волны (ДВ)
6	300 кГц–3 МГц	Средние частоты (СЧ)	1000–100 м	Средние волны (СВ)
7	3–30 МГц	Высокие частоты (ВЧ)	100–10 м	Короткие волны (КВ)

Номер диапазона	Частота	Название по частоте	Длина волны	Название по длине волны
8	30–300 МГц	Очень высокие частоты (ОВЧ)	10–1 м	Метровые волны
9	300 МГц–3 ГГц	Ультравысокие частоты (УВЧ)	100–10 см	Дециметровые волны
10	3–30 ГГц	Сверхвысокие частоты (СВЧ)	10–1 см	Сантиметровые волны
11	30–300 ГГц	Крайне высокие частоты (КВЧ)	10–1 мм	Миллиметровые волны
12	300–3000 ГГц	Гипервысокие частоты (ГВЧ)	1–0,1 мм	Децимиллиметровые волны

Диапазоны 8–12 часто объединяют в один большой диапазон ультракоротких волн (УКВ). В последние годы для радиосвязи находят применение и волны оптического диапазона.

Их разделяют на инфракрасные (частоты  $3 \cdot 10^{12}$ – $4 \cdot 10^{14}$  Гц, длины волн  $10^{-3}$ – $7,5 \cdot 10^{-7}$  м), видимые (частоты  $4 \cdot 10^{14}$ – $7,5 \cdot 10^{14}$  Гц, длины волн  $7,5 \cdot 10^{-7}$ – $4 \cdot 10^{-7}$  м), ультрафиолетовые (частоты  $7,5 \cdot 10^{14}$ – $1,5 \cdot 10^{17}$  Гц, длины волн  $4 \cdot 10^{-7}$ – $2 \cdot 10^{-9}$  м).

Диапазон радиоволн ограничен и представляет собой ресурс, который, как и другие природные ресурсы, требует рационального использования.

## 11.2. Некоторые сведения из теории антенн

Свободное пространство представляет собой однородную изотропную непоглощающую среду, у которой относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости ( $\epsilon_r$  и  $\mu_r$ ) равны единице. Такой средой был бы идеальный вакуум. Реально к свободному пространству можно отнести космическое пространство и в некоторых случаях на небольших расстояниях воздух, окружающий

Землю. Основной задачей дисциплины «Распространение радиоволн» является определение напряженности электрического поля в точке приема при заданных мощности передатчика или тока в антенне, частоте и параметрах трассы (расстояние, высота антенны и т.п.). Решение этой задачи обычно представляют в виде формулы для свободного пространства и множителя ослабления, учитывающего влияние реальных факторов.

Пусть в свободном пространстве расположена антенна, имеющая максимальный размер излучающей области  $L$ . В зависимости от расстояния до точки наблюдения пространство вокруг антенны может быть разделено на три области: ближнюю, промежуточную и дальнюю. Поля в этих областях имеют различную структуру и определяются по соответствующим формулам. Нас в дальнейшем будет интересовать, как правило, дальняя область или зона Фраунгофера, поскольку этот случай обычно имеет место в реальных линиях радиосвязи. Область дальней зоны определяется соотношением

$$r \geq \frac{2L^2}{\lambda}, \quad (11.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны.

В дальней зоне электромагнитное поле, созданное антенной, имеет характер электромагнитной волны со сферическим фазовым фронтом и взаимно ортогональными векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , ортогональными и к направлению на антенну. В дальней зоне свободного пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  синфазны и их модули связаны соотношением

$$Z = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 120\pi = 377. \quad (11.2)$$

Величина  $Z$  имеет размерность сопротивления и называется характеристическим (иногда волновым) сопротивлением свободного пространства.

Пусть в свободном пространстве вместо реальной антенны расположена антенна, излучающая мощность  $P$  равномерно во всех



направлениях. Такая воображаемая антенна называется изотропной. На расстоянии  $r$  от нее величина вектора Пойнтинга ( $\text{Вт/м}^2$ ) будет равна

$$\Pi = \frac{P}{4\pi r^2},$$

где  $4\pi r^2$  — поверхность сферы, проходящая через точку наблюдения, с центром в точке расположения антенны.

Реальная антенна излучает ту же мощность неравномерно по разным направлениям. За счет этого в направлении максимального излучения вектор Пойнтинга увеличится в  $D$  раз:

$$\Pi = \frac{PD}{4\pi r^2}. \quad (11.3)$$

Параметр  $D$  называется коэффициентом направленного действия (КНД) антенны и является одним из ее основных параметров.

В дальней зоне амплитуды полей  $E$  и  $H$  связаны со средним по времени значением вектора Пойнтинга соотношением

$$\Pi = \frac{1}{2} E_m H_m.$$

Исключая из этого соотношения  $H_m$  с помощью формулы (11.2), получим выражение для амплитуды напряженности электрического поля в дальней зоне антенны в свободном пространстве

$$E_m = \frac{\sqrt{60PD}}{r}. \quad (11.4)$$

Таким образом, использование направленных антенн позволяет в  $\sqrt{D}$  раз увеличить напряженность поля в направлении максимального излучения при той же излучаемой мощности. Напряженность поля в других направлениях определяется через диаграмму направленности антенны  $F(\theta, \alpha)$ , где углы  $\theta$  и  $\alpha$  характеризуют направление на точку наблюдения в сферической системе координат  $(r, \theta, \alpha)$ :

$$E_m(\theta, \alpha) = \frac{\sqrt{60PD}}{r} F(\theta, \alpha). \quad (11.5)$$

В некоторых случаях бывает задан не КНД, а коэффициент усиления антенны  $G = D\eta$ , где  $\eta$  — коэффициент полезного действия (КПД) антенны. Для реальных антенн КПД определяется в курсе антенн. В диапазоне УКВ его часто принимают равным единице.

Если в передающей антенне задана не излучаемая мощность, а амплитуда входного тока  $I_0$ , то аналогом формулы (11.4) является соотношение

$$E_m(\theta, \alpha) = \frac{60\pi I_0 l_d}{\lambda r} F(\theta, \alpha), \quad (11.6)$$

где  $l_d$  — действующая длина антенны.

Этот параметр легко определяется для вибраторных антенн, если известно распределение тока по длине антенны. Он связан с КНД антенны соотношением

$$l_d = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R_\Sigma D}{120}}, \quad (11.7)$$

где  $R_\Sigma$  — сопротивление излучения антенны.

При энергетическом расчете линии связи представляет интерес не сама напряженность поля в точке приема, а мощность в нагрузке приемной антенны или электродвижущая сила (ЭДС) на ее выходе. В теории антенн доказывается, что эти параметры определяются соотношениями

$$e_{\max} = l_d E, \quad P_{\text{нmax}} = \Pi S_{\text{эфф}}, \quad (11.8)$$

где  $e_{\max}$  и  $P_{\text{нmax}}$  — максимальные значения ЭДС на выходе приемной антенны и мощности в ее нагрузке;  $l_d$  и  $S_{\text{эфф}}$  — действующая длина и эффективная поверхность приемной антенны, определяемая через ее КНД:

$$S_{\text{эфф}} = \frac{\lambda^2 D}{4\pi}. \quad (11.9)$$

Формулы (11.8), (11.9) предполагают, что прием осуществляется в направлении максимума диаграммы направленности приемной антенны, что она согласована с падающей волной по поляриза-

ции и что ее КПД равен единице, а также что антенна согласована с нагрузкой по сопротивлению (для  $P_{н \max}$ ).

Из формул (11.3), (11.8) и (11.9) следует формула радиосвязи в свободном пространстве

$$P_2 = P_1 \frac{D_1 D_2 \lambda^2}{(4\pi r)^2}, \quad (11.10)$$

где  $P_2$  — максимальная мощность в нагрузке приемной антенны;  $P_1$  — излучаемая мощность;  $D_1, D_2$  — КНД передающей и приемной антенн соответственно.

Отношение  $L_0 = P_2/P_1$  при  $D_1 = D_2 = 1$ , т.е. при ненаправленных (изотропных) антеннах, называют основными потерями радиолинии и обычно выражают в децибелах:

$$L_{0, \text{дБ}} = 10 \lg L_0 = 20 \lg \frac{c}{4\pi r f}, \quad (11.11)$$

где  $f$  — частота излучаемого сигнала;  $c$  — скорость света.

Если измерять  $r$  в километрах, а  $f$  в мегагерцах, то получим удобное для расчетов выражение:

$$L_{0, \text{дБ}} = -[33 + 20(\lg r + \lg f)]. \quad (11.12)$$

Измерение потерь в радиолинии в децибелах удобно, так как абсолютное значение основных потерь может изменяться в больших пределах. Применение направленных антенн эквивалентно увеличению мощности передатчика в  $D_1 D_2$  раз или на  $(D_{1, \text{дБ}} + D_{2, \text{дБ}})$  децибел.

### 11.3. Область пространства, существенная при распространении радиоволн

При распространении радиоволн в свободном пространстве различные области пространства неодинаково влияют на формирование поля на некотором расстоянии от излучателя. Область пространства, в которой распространяется основная часть передаваемой мощности,

называют областью пространства, существенной при распространении радиоволн.

Очевидно, что эта область охватывает пространство вблизи прямой, соединяющей точки расположения излучателя и приемной антенны. Размеры и конфигурацию области, существенной при распространении радиоволн, определяют исходя из принципа Гюйгенса.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка фронта распространяющейся волны является источником новой, вторичной, сферической волны. Полное поле определяется путем суммирования элементарных полей, созданных вторичными источниками, которые находятся на некоторой поверхности, окружающей первичный источник. Математическую формулировку принципа Гюйгенса дал Кирхгоф в виде формулы, носящей его имя:

$$\varphi(P) = \frac{j}{4\pi} \oint_S \left\{ \varphi_S \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial \varphi_S}{\partial n} \right\} dS, \quad (11.13)$$

где  $\varphi(P)$  — поле в точке наблюдения  $P$ ;  $S$  — замкнутая поверхность, окружающая источник;  $n$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число;  $\lambda$  — длина волны;  $\varphi_S$  — поле на поверхности  $S$ ;  $R$  — расстояние от точки  $P$  до точек поверхности  $S$ .

Формула Кирхгофа не учитывает векторный характер электромагнитного поля и поэтому является приближенной. Позднее были получены векторные аналоги формулы Кирхгофа. Однако и в таком виде она находит широкое применение, так как позволяет объяснить и рассчитать многие эффекты, связанные с распространением радиоволн.

Построение, предложенное Френелем (рис. 11.2), позволяет наглядно истолковать принцип Гюйгенса, определить размеры и конфигурацию области, существенной для распространения радиоволн, не прибегая к вычислению интеграла в формуле (11.13).

Пусть в точке  $A$  помещен источник, а в точке  $B$  — приемная антенна. Причем расстояние  $AB$  много больше длины волны. Пусть на некотором расстоянии от точки  $A$  помещена бесконечная плоскость  $S$ , перпендикулярная к линии  $AB$  (см. рис. 11.2).

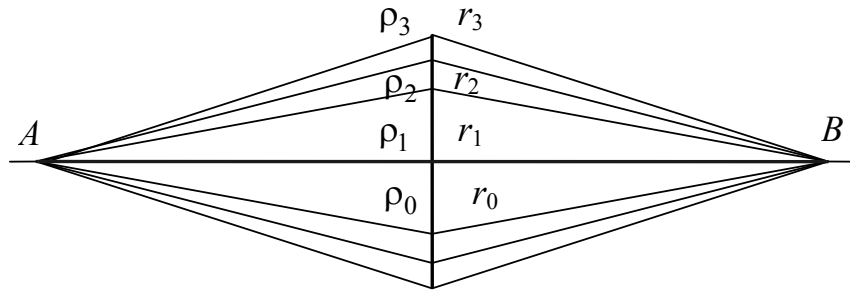


Рис. 11.2. Построение зон Френеля на плоскости

Эту плоскость выберем в качестве поверхности, на которой рассматриваются вторичные источники. Разобьем плоскость  $S$  на зоны Френеля. Границы зон Френеля определяются равенствами

$$\begin{aligned} \rho_1 + r_1 - (\rho_0 + r_0) &= \lambda/2; \\ \rho_2 + r_2 - (\rho_0 + r_0) &= 2\lambda/2; \\ &\dots\dots\dots \\ \rho_n + r_n - (\rho_0 + r_0) &= n\lambda/2. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Таким образом, первая зона Френеля — круг радиуса  $R_1$ , вторая — поверхность между окружностями с радиусами  $R_1, R_2$  и т.д. (рис. 11.3).

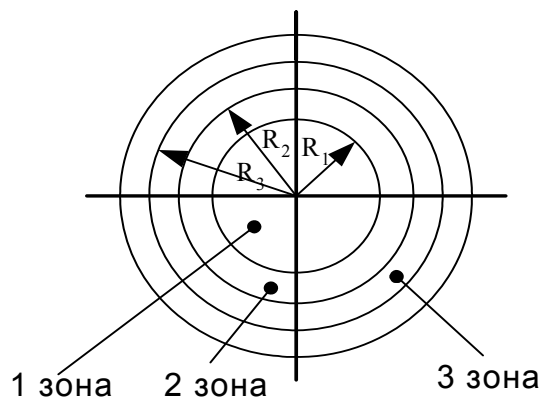


Рис. 11.3. Зоны Френеля в плоскости  $S$

Определим размеры зон Френеля. Из рис. 11.3 находим:

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 + R_1^2} = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{R_1^2}{\rho_0^2}} \approx \rho_0 \left( 1 + \frac{R_1^2}{2\rho_0^2} \right) = \rho_0 + \frac{R_1^2}{2\rho_0}. \quad (11.15)$$

Мы использовали условие  $R_1/\rho_0 \ll 1$ . Аналогично

$$r_1 \approx r_0 + \frac{R_1^2}{2r_0}. \quad (11.16)$$

Подставляя (1.15) и (1.16) в первое уравнение системы (1.14), получим:

$$\rho_0 + \frac{R_1^2}{2\rho_0} + r_0 + \frac{R_1^2}{2r_0} - \rho_0 - r_0 = \frac{\lambda}{2}. \quad (11.17)$$

Отсюда радиус первой зоны Френеля

$$R_1 = \sqrt{\frac{\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0}}. \quad (11.18)$$

Аналогично внешний радиус зоны с любым номером будет

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0}}. \quad (11.19)$$

Площадь первой зоны

$$S_1 = \pi R_1^2 = \frac{\pi\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0}.$$

Площадь  $n$ -й зоны

$$S_n - S_{n-1} = \frac{\pi\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0} n - \frac{\pi\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0} (n-1) = \frac{\pi\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0}. \quad (11.20)$$

Таким образом, площади всех зон Френеля одинаковы и равны

$$S_\Phi = \frac{\pi\lambda r_0 \rho_0}{r_0 + \rho_0}.$$

Построим границы зон Френеля в плоскости распространения волны. Для этого будем перемещать плоскость  $S$  вдоль линии  $AB$  (рис. 11.4).

Для любого положения этой плоскости справедливы равенства, описывающие границу данной зоны Френеля:

$$\rho_1 + r_1 = \rho'_1 + r'_1 = AB + \lambda/2 = \text{const}. \quad (11.21)$$

Равенства (11.21) описывают эллипсы с полюсами в точках  $A$  и  $B$ , где расположены излучатель и приемник. Следовательно, в пространстве первая зона Френеля представляет собой эллипсоид вращения с осью вращения линией  $AB$ . Зоны высших номеров — часть пространства между соседними эллипсоидами вращения. Таким образом, если мы ограничиваемся конечным числом зон, конфигурация области, существенной при распространении радиоволн, — это эллипсоид вращения с полюсами в точках расположения излучателя и приемника.

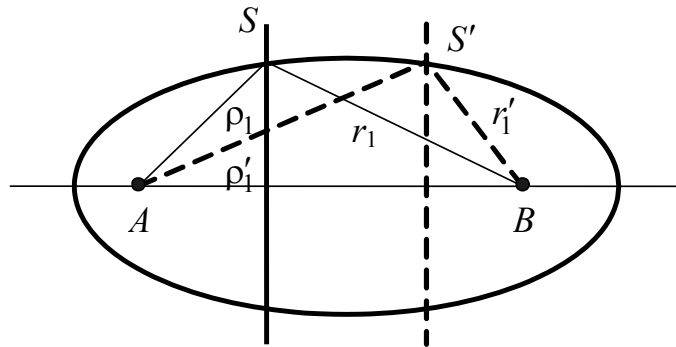


Рис. 11.4. Пространственные зоны Френеля

Посмотрим теперь, все ли зоны Френеля необходимо учитывать в результирующем поле. Вернемся к системе уравнений (11.14). Согласно этим равенствам вторичные источники, расположенные на границах двух соседних зон, излучают волны, приходящие в точку наблюдения в противофазе. Найдем суммарное поле, обусловленное всеми зонами Френеля.

В практике распространения радиоволн расстояние между излучателем и точкой наблюдения всегда велико по сравнению с длиной волны, т.е. всегда интересуются полем в дальней зоне. Следовательно, всегда выполняется условие  $\rho_0 + r_0 \gg \lambda$ . Будем считать, что также выполняется условие  $\rho_0 \gg \lambda$ ;  $r_0 \gg \lambda$ .

В этих условиях при переходе от одной зоны к другой амплитуда колебаний каждого элемента площади  $S_n$  меняется незначительно. Еще меньше меняется амплитуда колебаний при перемещениях в пределах одной зоны. Разделим каждую зону Френеля на некоторое число равных по площади колец. При этом волны, создаваемые каждым кольцом, почти не будут отличаться по амплитуде

друг от друга, но будут отличаться по фазе. Например, при делении первой зоны на четыре кольца, фазы колебаний источников двух соседних колец будут отличаться на  $45^\circ$ .

Суммирование векторов напряженностей поля в пределах первой зоны для этого случая изображено на рис. 11.5,а. Результирующий вектор волны от вторичных источников второй зоны  $\bar{E}_2$  будет направлен противоположно вектору  $\bar{E}_1$  (рис. 11.5,б). Он будет короче вследствие увеличения расстояния  $\rho$  и  $r$ . Результирующий вектор  $\bar{E}_3$  (рис. 11.5,в) будет меньше по длине вектора  $\bar{E}_2$  и направлен противоположно ему.

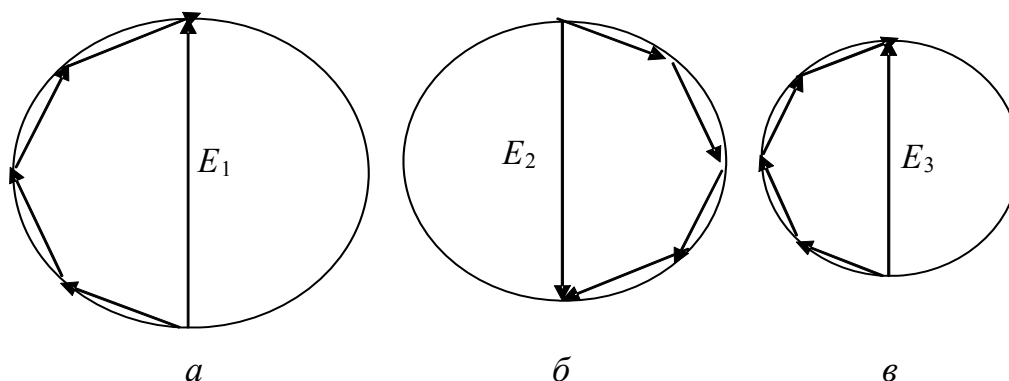


Рис. 11.5. Суммирование векторов напряженности электрического поля

Таким образом, результирующую напряженность поля, создаваемого всеми зонами Френеля, можно представить в виде знакопеременного ряда

$$E_{\Sigma} = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots + (-1)^{n-1} E_n.$$

Поскольку соседние члены ряда мало отличаются друг от друга, каждый член ряда можно считать равным среднему арифметическому из двух соседних:

$$E_{\Sigma} = \frac{E_1}{2} + \left( \frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left( \frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \dots + \left( \frac{E_{n-2}}{2} - E_{n-1} + \frac{E_n}{2} \right) + \frac{E_n}{2}. \quad (11.22)$$



Ряд (11.22) сходящийся. При  $n \rightarrow \infty$  величины в каждой из скобок близки к нулю и результирующая напряженность поля стремится к половине значения напряженности поля, создаваемого первой зоной:

$$E_{\Sigma} \rightarrow \frac{E_1}{2}.$$

Данный результат обусловлен тем, что поля, создаваемые зонами высших номеров, взаимно компенсируются.

Таким образом, получаем важный вывод: результирующее поле в точке наблюдения в основном создается волнами вторичных излучателей, расположенных в пределах первых нескольких зон Френеля. Вклад остальных зон Френеля в силу быстрой сходимости ряда пренебрежимо мал.

Из проведенного анализа также можно сделать вывод о том, что имеется область пространства, существенно участвующая в распространении радиоволн. Эта область ограничена эллипсоидом вращения, соответствующим внешней границе пространственной зоны Френеля с небольшим номером.

Эллипсоид существенной области тем больше вытянут, чем меньше длина радиоволны  $\lambda$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  эллипсоид превращается в линию, соединяющую источник и точку наблюдения, называемую лучом. Так, в оптике существует раздел — геометрическая оптика, в которой волны заменяют лучами. В общем случае такая замена справедлива и для радиоволн других диапазонов, но только при отсутствии препятствий с конечными размерами. При падении волны на тело с конечными размерами геометрическая оптика дает принципиально неверные результаты, например полное отсутствие поля в области тени (за препятствием). Заметим, что подход, основанный на принципе Кирхгофа и зонах Френеля, называется физической или волновой оптикой.

Применим полученные результаты для изучения дифракции радиоволн. Рассмотрим два вида препятствий: непрозрачный экран с круглым отверстием и непрозрачную полуплоскость.

Пусть на пути радиоволны расположен экран с отверстием, центр которого совпадает с линией  $AB$  (рис. 11.6).

Для расчета поля в точке наблюдения применим формулу Кирхгофа (11.13). Пусть в качестве передающей антенны используется точечный ненаправленный (изотропный) излучатель, поле которого можно представить как

$$\varphi(r) = A \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (11.23)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от мощности источника.

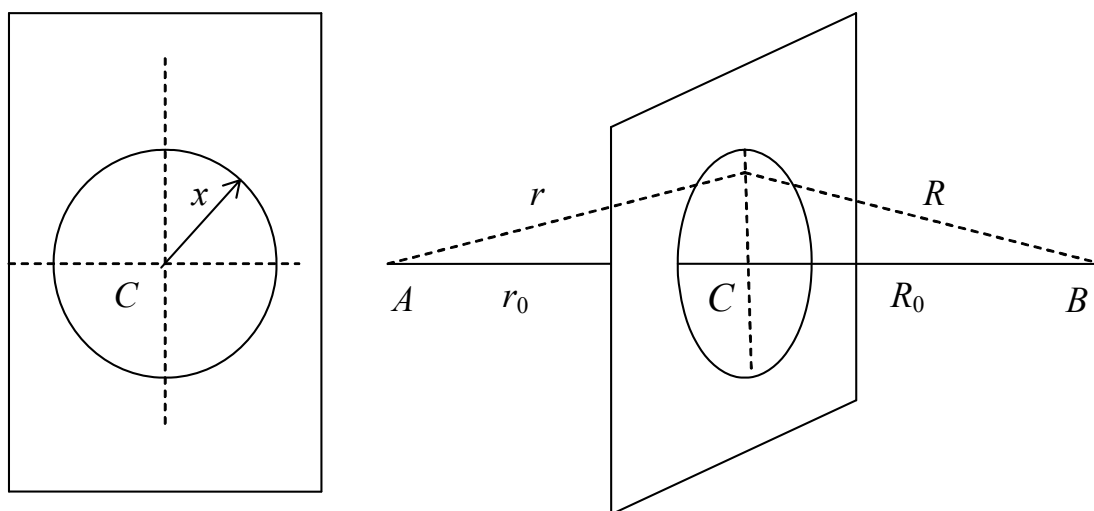


Рис. 11.6. К дифракции радиоволн на круглом отверстии в плоском экране

Тогда формуле Кирхгофа можно придать вид

$$\varphi(x_0) = -\frac{jAk}{2} \int_0^{x_0} \frac{e^{-jk(r+R)}}{rR} \left( \frac{r_0}{r} + \frac{R_0}{R} \right) x dx, \quad (11.24)$$

где  $x$  — текущий радиус на отверстии;  $r_0$  — расстояние от точки  $A$  до экрана;  $R_0$  — расстояние от экрана до точки приема  $B$ ;  $x_0$  — радиус отверстия;  $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$ ;  $R = \sqrt{R_0^2 + x^2}$ .

Если поле, определяемое формулой (11.24), нормировать по отношению к полю в свободном пространстве и перейти к безразмерным расстояниям  $kr$ , сохраняя прежние обозначения, то формулу (11.24) можно записать в виде

$$\varphi(kx_0) = \frac{k(r_0 + R_0)}{2} e^{jk(r_0 + R_0)} \times$$

$$\times \int_0^{kx_0} \frac{e^{-jk(r(x) + R(x))}}{r(x)R(x)} \left[ \frac{r_0}{r(x)} + \frac{R_0}{R(x)} \right] x dx. \quad (11.25)$$

В качестве иллюстрации на рис. 11.7 приведена функция  $|\varphi(kx_0)|$ , построенная по формуле (11.25). В расчетах принималось  $R_0 = r_0 = 10\pi$ , что соответствует реальным расстояниям  $5\lambda$ .

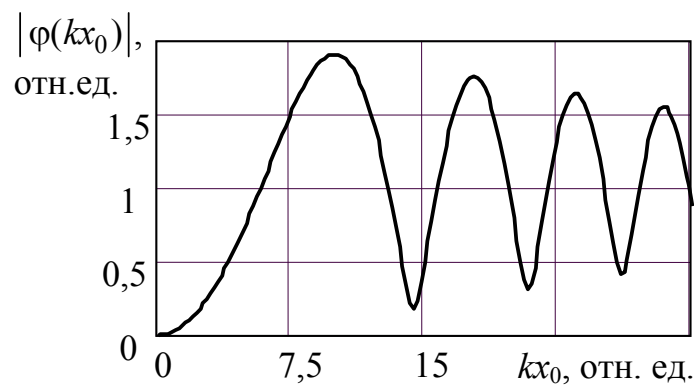


Рис. 11.7. Дифракция радиоволн на круглом отверстии в плоском экране

Если радиус отверстия плавно увеличивать от  $x_0 = 0$ , то напряженность поля за экраном в точке приема  $B$  будет возрастать и достигнет максимума при  $x_0 = R_1$ , т.е. при  $x_0$ , равном радиусу первой зоны Френеля. В дальнейшем изменение величины напряженности поля носит осциллирующий характер: возрастает при  $x_0$ , равном радиусу нечетной зоны Френеля, и уменьшается при  $x_0$ , равном радиусу четной зоны. Причем с увеличением номера зоны амплитуда осцилляций уменьшается и напряженность поля стремится к величине поля в свободном пространстве. Значения максимумов и минимумов функции соответствуют открытым нечетным и четным зонам Френеля. Если закрыть все четные зоны специальным экраном и оставить открытыми только нечетные зоны, получим зонную пластинку. Она будет действовать как собирающая линза, поскольку волны от нечетных зон приходят в фазе в точку наблюдения.

Рассмотрим второй пример — дифракцию волны на краю непрозрачного экрана. Для упрощения вычислений ограничимся случаем, когда экран находится в дальней зоне источника. При этом волну, падающую на экран, можно считать плоской, т.е.  $\varphi_S = \text{const}$ , и формуле (11.24) придать вид

$$\varphi(P) = \frac{j\varphi_S}{R_0\lambda} \int_{x_0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-jk}{2R_0}(x^2+y^2)} dx dy. \quad (11.26)$$

Интегралы в (11.26) вычисляются после замены переменных

$$u = x \sqrt{\frac{k}{\pi R_0}}, \quad v = y \sqrt{\frac{k}{\pi R_0}}$$

через специальные функции — интегралы Френеля:

$$C(u_0) = \int_0^{u_0} \cos\left(\frac{ku^2}{2}\right) du, \quad S(u_0) = \int_0^{u_0} \sin\left(\frac{ku^2}{2}\right) du, \quad (11.27)$$

$$\varphi(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1-j}{2} - C(u_0) + jS(u_0) \right).$$

Интегралы Френеля хорошо табулированы. Результаты вычислений функции  $\varphi(u_0)$  представлены на рис. 11.8.

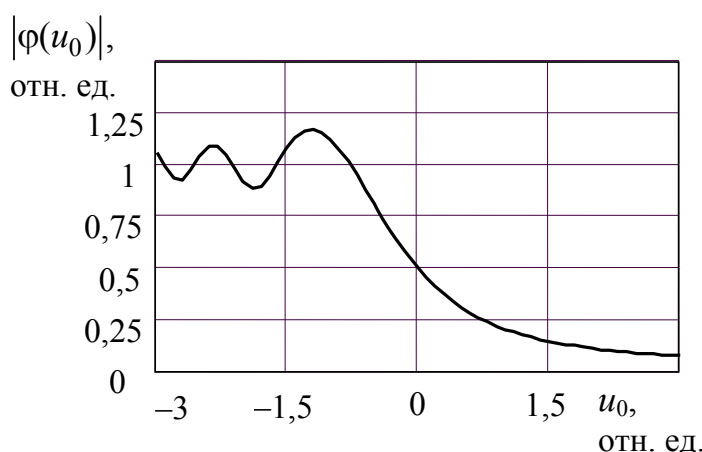


Рис. 11.8. Дифракция радиоволн на краю экрана

При больших положительных  $x_0$  (или  $u_0$ ) экран перекрывает линию  $AB$  и поле в точке  $B$  практически отсутствует. По мере опускания экрана поле монотонно возрастает. Когда экран достигает линии  $AB$ , поле составляет половину поля при отсутствии экрана. При дальнейшем опускании экрана поле в точке  $B$  осциллирует. Глубина осцилляций здесь не так велика, как в случае круглого отверстия, потому что основная площадь зон Френеля уже открыта.

Понятие зон Френеля широко используется на практике в случае распространения радиоволн при наличии каких-либо препятствий. Например, при расчете радиорелейных линий высоту подвеса антенн выбирают так, чтобы местные предметы на трассе (деревья, возвышенности, строения) не перекрывали существенную область распространения радиоволн, которая включает несколько первых зон Френеля. Дифракция на краю непрозрачного экрана является моделью распространения радиоволн в условиях гористой местности. Зонные пластинки используются на вершинах горных хребтов как ретрансляторы телевизионных сигналов. Радиолокационные станции, работающие на метровых волнах, используют отражение от Земли для формирования диаграммы направленности антенн. Определение размеров площадки, которую необходимо очистить около антенны, также проводят на основе зон Френеля.

## **11.4. Классификация радиоволн по способу распространения**

В предыдущих подразделах мы рассчитывали величину поля радиоволн в свободном пространстве. Хотя реально такое пространство в природе не существует, однако космическому пространству в первом приближении можно приписать свойства однородной изотропной среды, т.е. свободного пространства. Можно считать, что распространение радиоволн в космосе происходит по прямолинейным траекториям и с постоянной скоростью.

В большинстве случаев мы имеем дело с такими линиями радиосвязи, которые находятся в непосредственной близости от Земли. В этом случае нельзя пренебречь ни близостью Земли, ни влиянием окружающей ее атмосферы на процессы распространения

радиоволн. Основными факторами, воздействующими в данном случае на распространение радиоволн, являются:

- 1) близость Земли и сферичность ее поверхности;
- 2) воздействие неоднородностей тропосферы — нижней, прилегающей к Земле части атмосферы. Ее высота 10–15 км над уровнем земной поверхности;
- 3) влияние ионосферы — верхних ионизированных слоев атмосферы, расположенных в интервале высот от 60–80 до 1000 км над поверхностью Земли.

Кратко рассмотрим влияние этих факторов. Влияние Земли в основном сводится к следующему. При распространении радиоволн вдоль линии связи имеет место отражение радиоволн от земной поверхности. В этом случае поле в точке приема  $B$  над поверхностью Земли будет представлять собой сумму полей двух волн — прямой и отраженной. Влияние Земли приводит к тому, что поле в точке приема представляет собой интерференционную картину двух волн (рис. 11.9).

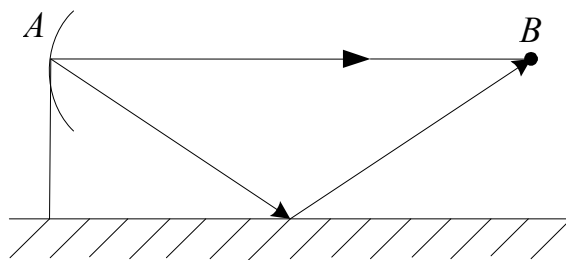


Рис. 11.9. Интерференция двух радиоволн

При низко расположенных антеннах выделить по отдельности прямую и отраженную волны не представляется возможным и волна распространяется вдоль поверхности Земли, испытывая при этом поглощение и некоторое изменение фазовой скорости.

На характер распространения радиоволн над поверхностью Земли влияет и сферичность Земли (рис. 11.10). Величина поля в области тени, создаваемой выпуклостью Земли, способность радиоволн за счет дифракции преодолеть эту выпуклость зависят от длины волны. Как известно, дифракция заметно проявляется, когда размер препятствия сравним с длиной волны, поэтому наиболее ярко дифракция проявляется на длинных волнах.

На распространение радиоволн значительное влияние оказывает также рельеф земной поверхности. Чем короче длина волны, тем это влияние сильнее. Радиоволны, распространяющиеся в непосредственной близости от поверхности Земли и частично огибающие ее выпуклость вследствие явления дифракции, получили название земных радиоволн.

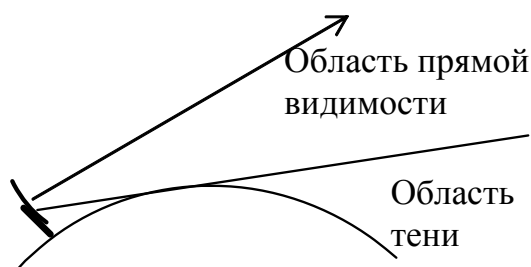


Рис.11.10. Влияние сферичности Земли на распространение радиоволн

Тропосфера представляет собой неоднородную среду. Свойства ее под действием метеоусловий меняются во времени. Тропосфера характеризуется постепенным уменьшением показателя преломления воздуха с высотой и обладает локальными неоднородностями показателя преломления.

Плавное изменение показателя преломления с высотой приводит к искривлению траектории радиоволн (рефракция) и способствует, как правило, повышению дальности распространения радиоволн из-за огибания ими земного шара.

Локальные неоднородности тропосферы вызывают рассеивание радиоволн (рис. 11.11). Влияние рассеивания проявляется только на волнах короче 1 м. При более длинных волнах поле в области тени обусловлено дифракцией. Рассеянные радиоволны могут достигать точек на поверхности Земли, удаленных от передатчика на расстояние до тысячи километров.

Радиоволны, распространяющиеся на значительные расстояния за счет рассеяния в тропосфере и волноводного действия тропосферы (рефракции), получили название тропосферных радиоволн.

Ионизированная часть атмосферы — ионосфера — содержит значительное количество ионов газов и свободных электронов.

Радиоволны с длиной волны более 10 м отражаются от ионосферы и не могут покинуть пределы земной атмосферы. Для более коротких волн (в том числе оптических) ионосфера является прозрачной.

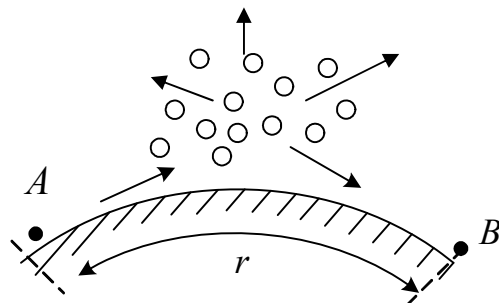


Рис. 11.11. Тропосферная линия связи за счет рассеяния на неоднородностях тропосферы

Отраженные ионосферой радиоволны, падая на полупроводящую поверхность Земли и также отражаясь от нее, могут вновь отразиться от ионосферы. В результате подобного многократного отражения радиоволны могут попасть в сколь угодно удаленные точки земной поверхности, и даже несколько раз обогнуть земной шар (рис. 11.12).

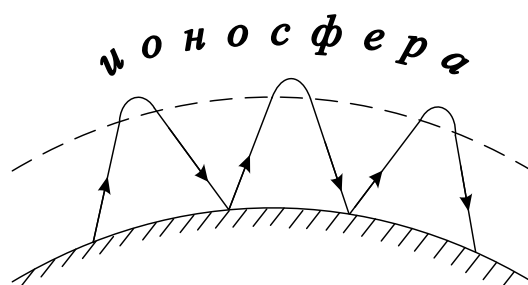


Рис. 11.12. Распространение радиоволн за счет отражения от ионосферы

Радиоволны, распространяющиеся на большие расстояния в результате однократного или многократного отражения от ионосферы, а также радиоволны, рассеивающиеся на неоднородностях ионосферы, называются ионосферными радиоволнами.



## 11.5. Понятие о функции ослабления

Выше мы отметили существенное влияние близости Земли и окружающей ее атмосферы на процессы распространения радиоволн. Это приводит к тому, что поле на приемном конце радиолинии, находящейся в земных условиях, отличается от поля в свободном пространстве. Для учета этих факторов вводится функция, или коэффициент, ослабления  $V(r)$ . Амплитуда напряженности поля в реальных условиях  $E_m$  определяется как произведение напряженности поля в данной точке в случае распространения волны в свободном пространстве и функции ослабления:

$$E_m = E_{0m} V(r) = \frac{\sqrt{60PD}}{r} V(r), \quad (11.28)$$

где  $E_{0m}$  — амплитуда напряженности электрического поля в свободном пространстве;  $D$  — коэффициент направленного действия;  $P$  — мощность, излучаемая антенной.

Из формулы (11.28) следует выражение для функции ослабления:  $V(r) = \frac{E_m}{E_{0m}}$ , или в децибелах

$$V(r)_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{E_m}{E_{0m}}. \quad (11.29)$$

Представление функции ослабления в децибелах удобно тем, что общие потери на линии связи теперь могут быть определены как

$$L_{\Sigma, \text{дБ}} = L_{0, \text{дБ}} + D_{1, \text{дБ}} + D_{2, \text{дБ}} + V(r)_{\text{дБ}}, \quad (11.30)$$

где  $L_{0, \text{дБ}}$  — основные потери в радиолинии, определяются по формуле (11.11);  $D_{1, \text{дБ}}$ ,  $D_{2, \text{дБ}}$  — коэффициенты направленного действия передающей и приемной антенн в децибелах;  $V(r)_{\text{дБ}}$  — функция ослабления в децибелах.

Плотность потока мощности, излучаемого передающей антенной, с учетом функции ослабления выражается формулой

$$\Pi = \frac{PD}{4\pi r^2} V^2(r). \quad (11.31)$$

Эти формулы показывают, что с точки зрения распространения радиоволн основной задачей расчета линии связи является определение функции ослабления в различных условиях распространения земных, тропосферных, ионосферных волн. К определению функции ослабления  $V(r)$  при различных встречающихся на практике условиях распространения радиоволн и сводится, по существу, основное содержание дальнейших разделов пособия.

## Контрольные вопросы

1. Объясните физическую причину ослабления напряженности поля в свободном пространстве.
2. Как зависит амплитуда напряженности поля и величина вектора Пойнтинга от расстояния в свободном пространстве?
3. Получите формулу идеальной радиосвязи в свободном пространстве.
4. Поясните физический смысл коэффициента направленного действия антенны. Как зависит напряженность поля в точке приема от КНД передающей антенны?
5. В чем состоит принцип Гюйгенса?
6. Как строятся зоны Френеля?
7. Как определяется область пространства, существенная для распространения радиоволн? Как изменяется эта область при увеличении частоты радиоволны?
8. Между передающей и приемной антеннами расположен плоский экран. Как будет изменяться сигнал в приемной антенне при изменении положения экрана?
9. Опишите влияние Земли, тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн.
10. Между тропосферой и ионосферой на высоте от 10 до 80 км находится область атмосферы — стратосфера. Почему существование стратосферы не учитывается при распространении радиоволн?

## 12. Распространение земных радиоволн при поднятых антеннах

### 12.1. Электрические параметры различных типов земной поверхности

Строгое решение задачи о распространении земных радиоволн над реальной поверхностью Земли в общем случае весьма сложно. Поэтому при теоретическом изучении и расчете земных радиотрасс пользуются некоторыми упрощенными моделями. Во-первых, полагают, что атмосфера однородная, не поглощающая среда; во-вторых, что поверхность Земли гладкая и однородная на протяжении всей трассы; в-третьих, все случаи распространения земных радиоволн условно делят на три категории:

- а) распространение при поднятых антеннах в зоне освещенности;
- б) распространение при низко расположенных антеннах над плоской поверхностью Земли;
- в) распространение в области тени и полутени.

Во всех этих случаях важную роль играют электрические параметры земной поверхности:  $\epsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость;  $\sigma$  — удельная проводимость. Относительную магнитную проницаемость  $\mu_r$  практически для всех типов земной поверхности можно считать равной единице.

Параметры реальной поверхности Земли отличаются большим разнообразием даже в пределах одной местности. Поэтому приведем некоторые усредненные значения электрических параметров реальных почв или диапазон изменения этих значений (табл. 12.1). Кроме того, эти параметры зависят от частоты (или длины волны), на которой они определяются.

Известно, что в любой немагнитной среде такие характеристики электромагнитной волны, как фазовая скорость, длина волны в среде, коэффициент затухания, определяются через параметры  $\epsilon_r$  и  $\sigma$ . Нас в дальнейшем будут интересовать коэффициенты отражения плоских волн с различной поляризацией от границы раздела «воздух – среда». Параметры воздуха при этом принимаются такие

же, как и у вакуума. Напомним, что у вертикально поляризованной волны вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости падения, а у горизонтально поляризованной — перпендикулярен ей. Плоскость падения — плоскость, проходящая через направление распространения волны и нормаль к поверхности.

Таблица 12.1

Электрические параметры различных типов  
земной поверхности на разных длинах волн

Тип поверхности	$\lambda$	$\epsilon_r$	$\sigma$ , 1/Ом·м
Морская вода	> 1 м	75	1–6
	10 см	70	1–6
	3 см	65	10–20
Пресная вода водоемов	> 1 м	80	0,01–0
	10 см	75	1–2
	3 см	65	10–20
Влажная почва	> 1 м	20–30	0,02–03
	10 см	20–30	0,5–1
	3 см	10–20	1–3
Сухая почва	> 1 м	3–6	$10^{-5}$ – $10^{-3}$
	10 см	3–6	0,01–0,07
	3 см	3–6	0,1–0,2
Снег ( $t = -10$ °С)	> 1 м	1,2	$10^{-6}$
	10 см	1,2	$10^{-5}$
	3 см	1,2	$10^{-5}$
Лес	> 10 м	1,004	$10^{-6}$ – $10^{-5}$
	10 см	1,04–1,4	$10^{-5}$ – $10^{-3}$

При записи коэффициентов отражения удобно пользоваться понятием относительной комплексной проницаемости

$$\dot{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \epsilon_r - j60\lambda\sigma. \quad (12.1)$$

Комплексные коэффициенты отражения волн с вертикальной  $\dot{R}_V$  и горизонтальной  $\dot{R}_Г$  поляризацией можно записать в виде

$$\dot{R}_B = \frac{\dot{\epsilon}_r \cos \varphi - \sqrt{\dot{\epsilon}_r - \sin^2 \varphi}}{\dot{\epsilon}_r \cos \varphi + \sqrt{\dot{\epsilon}_r - \sin^2 \varphi}}, \quad \dot{R}_\Gamma = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\dot{\epsilon}_r - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\dot{\epsilon}_r - \sin^2 \varphi}}, \quad (12.2)$$

где  $\varphi$  — угол падения, отсчитываемый от нормали к поверхности.

Формулы (12.2) носят название формул Френеля.

В реальных условиях распространения радиоволн, когда высоты антенн много меньше расстояния между ними, угол падения близок к  $90^\circ$  и удобно ввести угол скольжения  $\gamma = 90^\circ - \varphi$ . Угол  $\gamma$  отсчитывается от горизонтальной плоскости.

Напомним, что коэффициенты отражения определяются как  $\dot{R} = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}$ , где  $\dot{E}_{\text{отр}}$  и  $\dot{E}_{\text{пад}}$  — комплексные амплитуды напряженности электрического поля отраженной и падающей волн в точке отражения. При этом модуль коэффициента отражения характеризует изменение амплитуды волны при отражении, а его фаза — изменение фазы волны.

На рис 12.1 показана зависимость модуля и фазы коэффициентов отражения от угла  $\varphi$  для сухой почвы с параметрами  $\epsilon_r = 6$ ,  $\sigma = 0,02$  при длине волны  $\lambda = 6$  м.

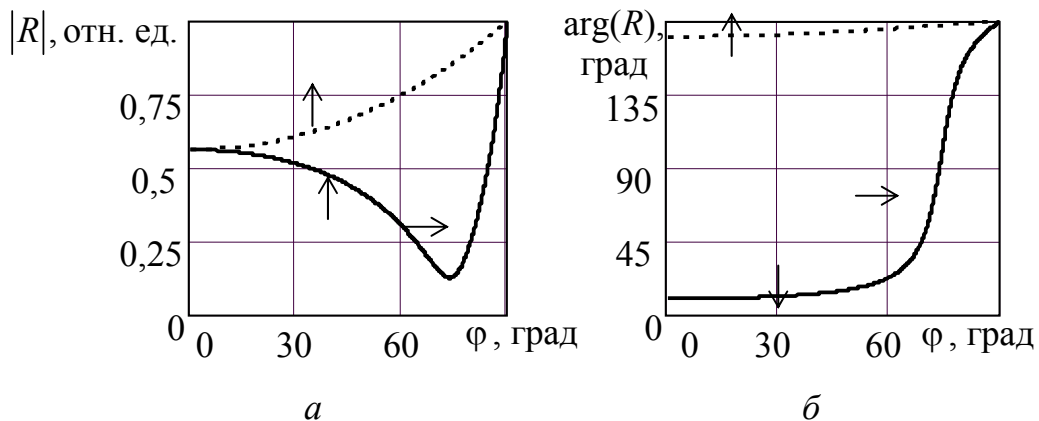


Рис. 12.1. Зависимость модуля (а) и фазы (б) коэффициентов отражения от угла падения для сухой почвы ( $\epsilon_r = 10$ ,  $\sigma = 0,1$ ) и  $\lambda = 6$  м:

————— вертикальная поляризация  
 ..... горизонтальная поляризация

На рисунке видно, что коэффициент отражения при горизонтальной поляризации по модулю больше, чем при вертикальной.

Фаза коэффициента  $R_{\Gamma}$  близка к  $\pi$  ( $180^\circ$ ), фаза коэффициента  $R_B$  меняется от  $0^\circ$  при вертикальном падении волны до  $180^\circ$  при пологом падении. Такое поведение коэффициентов отражения характерно для большинства реальных поверхностей Земли. При отражении от идеального диэлектрика минимальный модуль коэффициента отражения  $R_B$  становится равным нулю, а угол, при котором это происходит, называется углом Брюстера. Если поверхность Земли считать идеально проводящей ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), то  $R_B = 1$ ,  $R_{\Gamma} = -1$ . Изменения, происходящие при этом с кривыми на рис. 12.1, условно показаны стрелками.

## 12.2. Расстояние прямой видимости

Уточним вначале термин «поднятая антенна». Поднятая антенна — антенна, поднятая на высоту, по крайней мере, в несколько раз большую длины волны излучения. Практически с поднятыми антеннами встречаются только в диапазоне УКВ и в редких случаях — КВ. Типичные примеры поднятых антенн — антенны телецентров, радиолокационных станций, радиорелейных линий.

Пусть передающая и приемная поднятые антенны расположены в точках  $A$  и  $B$  на высотах соответственно  $h_1$  и  $h_2$  над поверхностью Земли (рис. 12.2). Поверхность Земли — гладкая сфера радиуса  $R_0$ ; расстояние между антеннами равно  $r$ . Для наглядности реальные масштабы на рис. 12.2 сильно искажены. Область, существенно участвующая в распространении радиоволн, ограничена эллипсоидом вращения, приближенно совпадающим с первой пространственной зоной Френеля.

Из рис. 12.2 видно, что если соотношение между  $r$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  такое, что первая зона Френеля не достигает выпуклости Земли, то возможно прямолинейное распространение радиоволн между точками  $A$  и  $B_1$  или  $A$  и  $B_2$ . В противном случае Земля будет препятствием, за которое радиоволны могут попасть только путем дифракции. Поле в этом случае оказывается сильно ослабленным, так как в распространении радиоволн участвует лишь часть первой зоны Френеля и зоны высших порядков, также искаженные Землей.

Расстоянием прямой видимости называется такое расстояние между двумя точками, расположенными над поверхностью Земли, при котором соединяющая их прямая касается поверхности Земли. На рис. 12.3 точки  $A$  и  $B$  находятся на расстоянии прямой видимости. Обозначим его  $r_0$ .

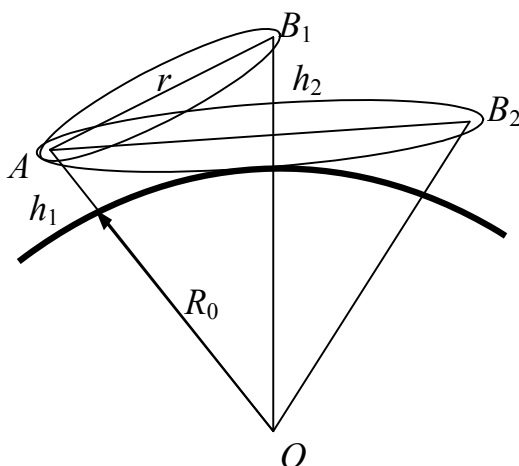


Рис. 12.2. Влияние сферичности Земли на распространение радиоволн при поднятых антеннах

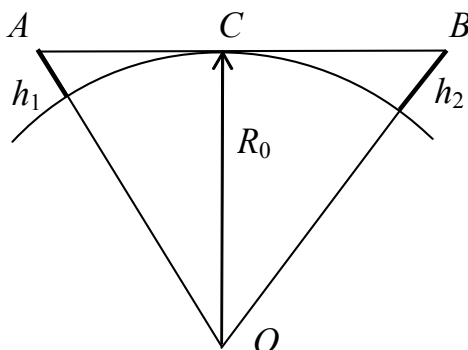


Рис. 12.3. Определение расстояния прямой видимости

Тогда согласно рис. 12.3 запишем:

$$r_0 = AC + CB;$$

$$AC = \sqrt{(R_0 + h_1)^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0h_1};$$

$$CB = \sqrt{(R_0 + h_2)^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0h_2}.$$

Следовательно, расстояние прямой видимости будет

$$r_0 = \sqrt{2R_0} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (12.3)$$

Подставляя величину  $R_0 = 6370$  км и выражая  $r_0$  в километрах, а  $h_1$  и  $h_2$  в метрах, получим расстояние прямой видимости в километрах

$$r_0 = 3,57 (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (12.4)$$

Если протяженность трассы  $r < 0,2r_0$ , то поверхность Земли принято считать плоской. При  $r < 0,8r_0$  нужно учитывать сферичность Земли, хотя еще можно разделить прямую и отраженную волны в точке приема. Это нельзя сделать в области полутени ( $0,8r_0 \leq r < 1,2r_0$ ), и тем более тени ( $r \geq 1,2r_0$ ). В эти области поле проникает за счет дифракции.

С наиболее простого случая поднятых над плоской землей антенн мы и начнем изучать распространение земных радиоволн.

## 12.3. Распространение радиоволн при поднятых антеннах и плоской Земле

### 12.3.1. Интерференционная формула

Рассмотрим схему распространения радиоволн, когда приемная и передающая антенны подняты над плоской поверхностью Земли (рис. 12.4). Пусть  $r$  — длина линии связи, антенны подняты над Землей на высоту  $h_1 \geq \lambda$  и  $h_2 \geq \lambda$ .

В данном случае поле в точке приема является результатом интерференции прямой волны ( $AB$ ) и отраженной ( $ACB$ ). Для определения положения точки отражения на поверхности Земли следует построить зеркальное изображение точки  $A$  (точка  $A_1$ ) и соединить ее с точкой  $B$ . При таком построении в точке  $C$  будет выполняться закон отражения — угол отражения равен углу падения и  $ACB = A_1CB$ . На рис. 12.4 изображена также диаграмма направленности антенны  $F(\theta)$  в свободном пространстве, где угол  $\theta$  отсчитывается



от горизонтальной плоскости. Очевидно, что поле в точке наблюдения  $B$  будет векторной суммой полей прямой и отраженной волн:

$$\bar{E}(B) = \bar{E}_1(B) + \bar{E}_2(B), \quad (12.5)$$

где поля  $E_1$  и  $E_2$  могут быть определены как поля в свободном пространстве.

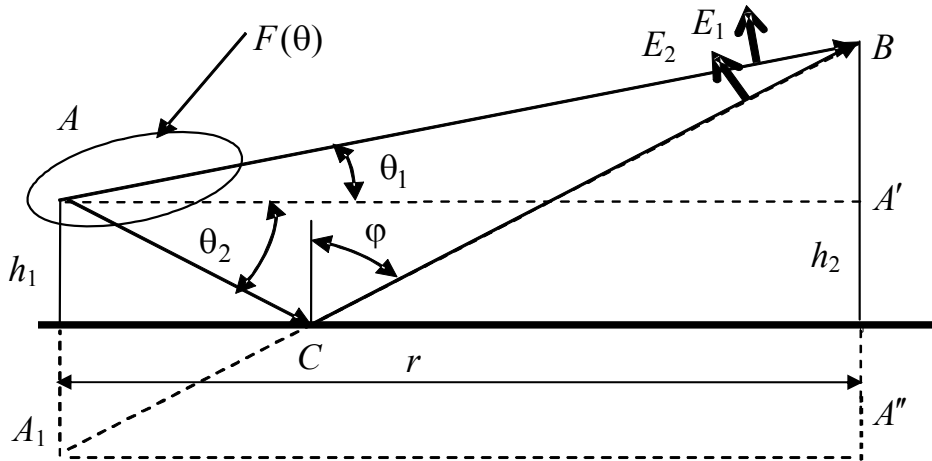


Рис. 12.4. Поднятые антенны над плоской поверхностью Земли

С учетом коэффициента отражения в точке  $C$  величины полей  $E_1$  и  $E_2$  в точке  $B$  будут определяться соотношениями

$$E_1(B) = AF(\theta_1) \frac{e^{-jkr_1}}{r_1}; \quad (12.6)$$

$$E_2(B) = AF(\theta_2) \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \dot{R}(\varphi),$$

где  $A = \sqrt{60PD}$ ;  $\varphi$  — угол падения отраженной волны в точке  $C$ ;  $F(\theta_1)$  и  $F(\theta_2)$  — значения диаграммы направленности антенны в направлении прямой и отраженной от поверхности волн.

Формула (12.5), описывающая поле в точке наблюдения как сумму полей падающей и отраженной волн, является общим выражением интерференционной формулы.

В большинстве реальных случаев расстояние между антеннами много больше их высот, т.е.

$$r \gg h_1 \text{ и } r \gg h_2. \quad (12.7)$$

При выполнении этих условий в интерференционной формуле можно сделать следующие допущения:

- 1) векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  в точке  $B$  можно считать параллельными. Это позволяет векторную сумму заменить алгебраической;
- 2) расстояния  $r_1$  и  $r_2$  в знаменателях формул (12.6), определяющие амплитуды полей в точке наблюдения, можно считать одинаковыми и равными  $r$  — расстоянию по поверхности Земли;
- 3) коэффициент отражения можно определять по формулам Френеля для плоских волн, хотя реально отраженная волна в точке  $C$  является сферической.

В результате интерференционной формуле можно придать вид

$$E(B) = AF(\theta_1) \frac{e^{-jkr_1}}{r} \left[ 1 + \frac{F(\theta_2)}{F(\theta_1)} \dot{R}(\varphi) e^{-jk\Delta r} \right], \quad (12.8)$$

где  $\Delta r = r_2 - r_1$  — разность хода отраженной и прямой волн.

Выражение в квадратных скобках формулы (12.8) является коэффициентом ослабления  $V(r)$  и называется в данном случае интерференционным множителем или множителем Земли.

На практике обычно представляет интерес только амплитуда поля в точке наблюдения, т.е. модуль выражения (12.8)

$$E(B) = |\dot{E}(B)| = \frac{A}{r} |V(r)| F(\theta_1), \quad (12.9)$$

где

$$|\dot{V}(r)| = V(r) = \sqrt{1 + \left( \frac{F(\theta_2)}{F(\theta_1)} |R| \right)^2 + \frac{F(\theta_2)}{F(\theta_1)} |R| \cos(k\Delta r + \Phi)}; \quad (12.10)$$

$|R|$  и  $\Phi$  — модуль и фаза коэффициента, зависящие от угла падения  $\varphi$ .

В случае слабонаправленных антенн  $F(\theta_1) \cong F(\theta_2)$  и выражение для  $V(r)$  упрощается:

$$V(r) = \sqrt{1 + |R|^2 + 2|R|\cos(k\Delta r + \Phi)}. \quad (12.11)$$

Если антенна имеет узкую диаграмму направленности и направлена под углом к горизонту, то  $F(\theta_2) \approx 0$  и  $V(r) \approx 1$ . Физически это означает, что поле антенны не попадает на Землю, отраженная волна практически отсутствует и в точке приема имеется только прямая волна. Такой случай характерен для радиолокационных станций УКВ-диапазона, антенны которых направлены под углом к горизонту.

Выразим разность хода  $\Delta r$  через высоты антенн и расстояние между ними. Обратимся к рис. 12.4. Из треугольников  $AA'B$  и  $A_1A''B$  найдем:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (h_2 - h_1)^2} \approx r + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2r}; \quad (12.12)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (h_2 + h_1)^2} \approx r + \frac{(h_2 + h_1)^2}{2r}, \quad (12.12a)$$

отсюда

$$r_2 - r_1 \approx \frac{2h_1h_2}{r}. \quad (12.13)$$

Следовательно, функцию ослабления можно записать в виде

$$V(r) = \sqrt{1 + |R|^2 + 2|R|\cos\left(\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r} + \Phi\right)}. \quad (12.14)$$

При изменении длины радиолинии  $r$  функция ослабления  $V(r)$  проходит через ряд максимумов и минимумов:

$$\text{максимумы при } \cos\left(\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r} + \Phi\right) = 1;$$

$$\text{минимумы при } \cos\left(\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r} + \Phi\right) = -1.$$

Значения  $V(r)$  в максимумах равны  $1 + |R|$ , в минимумах —  $1 - |R|$ .

Рассмотрим пространственную интерференционную структуру поля, создаваемую излучателем в зависимости от длины линии связи  $r$  при постоянных высотах антенн  $h_1, h_2$ .

При распространении УКВ вдоль поверхности Земли ( $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ) формула (12.14) может быть упрощена. При малых углах скольжения  $\gamma = 90^\circ - \varphi$  для большинства встречаемых в практике видов поверхностей Земли (море, сухая и влажная суша) модуль коэффициента отражения близок к единице, а угол потери фазы  $\Phi$  — к  $180^\circ$  (см. рис. 12.1 и объяснение к нему).

Подставляя эти величины в формулу (12.14), получим множитель ослабления

$$V(r) = 2 \left| \sin \left( \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda r} \right) \right|. \quad (12.15)$$

Эта формула характеризует интерференционную структуру поля, при которой множитель ослабления проходит ряд максимумов и минимумов с изменением расстояния  $r$ . Расстояния, которым соответствуют максимумы напряженности поля, можно найти из условия

$$\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda r} = \frac{\pi}{2}(2n + 1), \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что первый максимум напряженности поля излучения удален от передатчика на расстояние (м)

$$r_{\max 1} = \frac{4h_1 h_2}{\lambda}.$$

Расстояние (м) от передатчика до первого минимума можно найти из условия

$$r_{\min 1} = \frac{2h_1 h_2}{\lambda}.$$

### 12.3.2. Диаграммы направленности поднятых антенн

Рассмотрим частный случай интерференционной формулы, когда точка приема находится в дальней зоне передающей антенны (рис. 12.5).

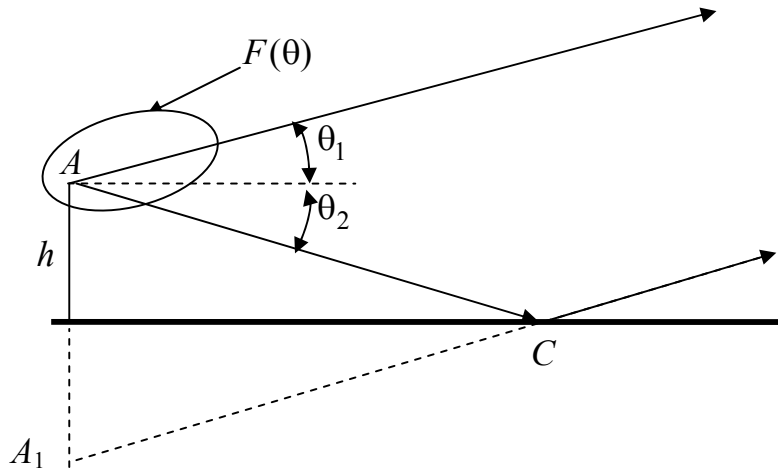


Рис. 12.5. К определению диаграммы направленности поднятой антенны

Этот случай соответствует определению диаграммы направленности передающей антенны, расположенной над поверхностью Земли. Поскольку точка  $B$  находится на бесконечном удалении, то выполняются следующие условия:

- 1) лучи  $AB$  и  $A_1B$  параллельны;
- 2) углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\varphi$  связаны соотношениями  $\theta_2 = -\theta_1$ ,  $\varphi = 90^\circ - \theta_1$ . Будем в дальнейшем обозначать угол  $\theta_1$  как  $\theta$ ;

- 3) разность хода  $\Delta r = A_1D$  можно определить, опуская перпендикуляр  $AD$  из точки  $A$  на прямую  $A_1CB$ :

$$\Delta r = 2h_1 \cos \theta. \quad (12.16)$$

Как известно, диаграмма направленности характеризует зависимость поля в точке наблюдения от угловых координат. В данном случае в вертикальной плоскости эта зависимость будет иметь вид

$$F_\Sigma(\theta) = F(\theta)V(\theta), \quad (12.17)$$

поскольку разность хода  $\Delta r$  согласно равенству (12.16) не зависит от  $r$ , а только от угла  $\theta$ .

Для дальнейшего анализа рассмотрим случай слабонаправленных антенн ( $F(\theta_1) \approx F(\theta_2)$ ), когда интерференционный множитель представляется формулой (12.11). Заменяем в ней угол  $\theta_1$  на  $\theta$  и  $h_1$  на  $h$ :

$$V(\theta) = \sqrt{1 + |R|^2 + 2|R|\cos[2kh\cos(\theta) + \Phi]}. \quad (12.18)$$

В зависимости от поляризации поля передающей антенны рассмотрим два случая.

1. Горизонтальная поляризация. Примером таких антенн является горизонтальный вибратор. Пусть вначале Земля считается идеально проводящей ( $\sigma = \infty$ ). Тогда согласно формулам (12.1) и (12.2)  $|R|=1$ ,  $\Phi = \pi$  и формула (12.18) приобретает вид

$$V(\theta) = 2|\sin(kh\cos(\theta))|. \quad (2.19)$$

Поскольку диаграмма направленности самого вибратора в экваториальной плоскости представляет окружность ( $F(\theta_1)=1$ ), то  $F(\theta)=V(\theta)$ , т.е. диаграмма направленности определяется только множителем Земли  $V(\theta)$ . Графики функции  $F(\theta)$  представлены на рис. 12.6 для различных отношений  $h/\lambda$ .

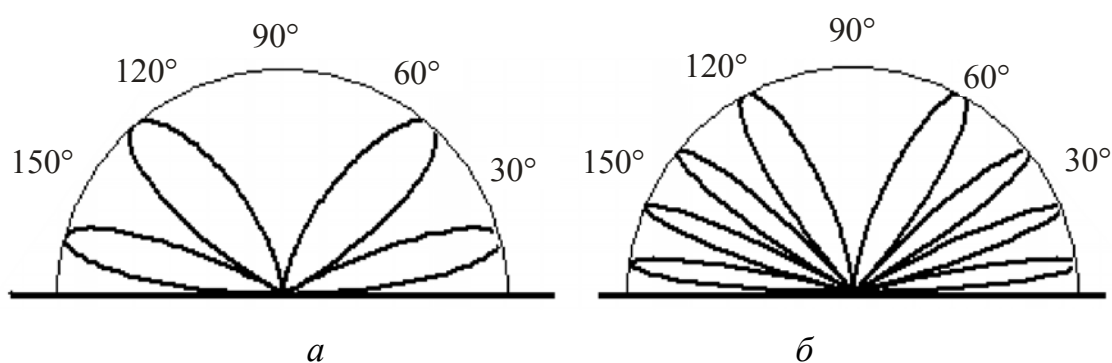


Рис. 12.6. Диаграммы направленности горизонтального вибратора над идеально проводящей Землей:  $a - h/\lambda=1$ ;  $b - h/\lambda=2$

Из рисунка можно сделать следующие выводы.

1. Диаграмма направленности при  $h/\lambda > 0,5$  носит лепестковый характер.

2. Число лепестков увеличивается с ростом  $h/\lambda$  и в одном квадранте равно числу полуволн, укладываемых на высоте антенны.

3. Первый лепесток всегда оторван от Земли и наклоняется к ней при увеличении  $h/\lambda$ .

Для реальных почв, как следует из рис. 12.1, значения коэффициента отражения близки к  $|R|=1$ ,  $\Phi = \pi$ , особенно при больших углах падения, характерных в практике распространения радиоволн. Поэтому сделанные выводы можно распространить и на реальные трассы. Отличие заключается в том, что для реальных почв лепестки диаграммы направленности как бы «заплывают», т.е. значения поля между ними не будут строго равны нулю. Это объясняется тем, что реально модуль коэффициента отражения всегда меньше единицы и полной компенсации полей прямой и отраженной волн в этих направлениях не происходит.

На рис. 12.7 представлены диаграммы направленности горизонтального вибратора над некоторыми почвами. Известно, что характер среды определяется значением тангенса угла потерь:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{60 \lambda \sigma}{\varepsilon_r}. \quad (2.20)$$

Если  $\operatorname{tg} \Delta > 1$ , то среда близка к проводящей, если  $\operatorname{tg} \Delta < 1$  — к диэлектрической. На рис. 12.7 хорошо видно «заплывание» нулей диаграмм направленности. В случае, представленном на рис. 12.7,а, почва ведет себя как проводящая среда ( $60 \lambda \sigma > \varepsilon_r$ ), а в случае, представленном на рис. 12.7,б, — как диэлектрическая ( $60 \lambda \sigma < \varepsilon_r$ ).

Направления лепестков диаграмм горизонтального вибратора можно определить из выражения (12.19), соответствующего идеально проводящей Земле, поскольку для реальных почв и горизонтальной поляризации модуль коэффициента отражения близок к единице, а фаза — к  $180^\circ$ .

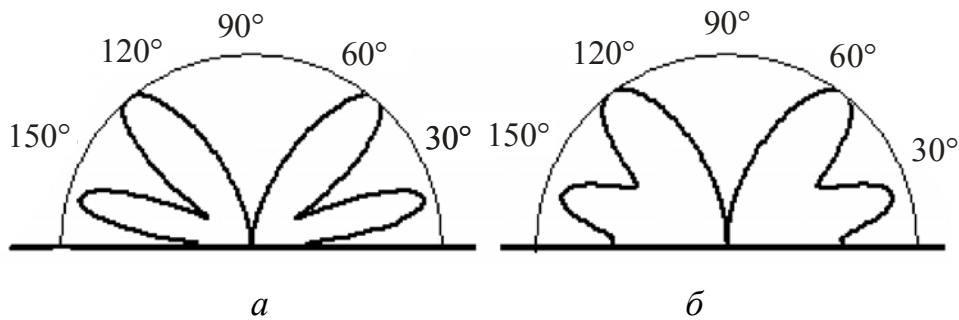


Рис. 12.7. Диаграммы направленности горизонтального вибратора над различными почвами при  $h = 2\lambda$  :  
*a* – влажная почва ( $\epsilon_r = 10$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\lambda = 1$  м);  
*б* – сухая почва ( $\epsilon_r = 4$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $\lambda = 1$  м)

Заменим в формуле (12.19) угол падения  $\theta$  на угол скольжения  $\gamma = 90^\circ - \theta$ , поскольку на практике представляют интерес лепестки, близкие к Земле, и нормируем диаграмму направленности так, чтобы ее максимальное значение было равно единице. Тогда

$$F(\gamma) = |\sin(kh \sin(\gamma))|. \quad (12.21)$$

Из этой формулы следует, что максимумы диаграммы направленности будут соответствовать углам скольжения  $\gamma$ , при которых  $kh \sin(\gamma) = \sin(n\pi/2)$ , где  $n$  — номер лепестка, отсчитываемый от поверхности Земли. В результате получим, что первый лепесток наклонен к горизонту на угол, определяемый соотношением

$$\sin(\gamma_{1,\max}) = \frac{\lambda}{4h}. \quad (12.22)$$

2. Вертикальная поляризация. Рассмотрим вначале случай идеально проводящей Земли. Коэффициент отражения равен единице, т.е.  $|R| = 1$ ,  $\Phi = 0$ . Формула (12.18) приводится к виду

$$V(\theta) = 2 |\cos(kh \cos(\theta))| = 2 |\cos(kh \sin(\gamma))|. \quad (12.23)$$

Очевидно, что по сравнению с горизонтальной поляризацией характер поведения множителя Земли изменится на противоположный — там, где были максимумы, будут нули, и наоборот. В качестве реальной антенны возьмем вертикальный вибратор. В отличие от горизонтального вибратора, собственная диаграмма направлен-



ности в вертикальной плоскости в этом случае определяется выражением  $F_1(\theta) = \cos(\theta)$ . На рис. 12.8 показаны множитель Земли, диаграмма  $F_1(\theta)$  и их произведение, т.е. полная диаграмма направленности  $F_\Sigma(\theta) = F_1(\theta)V(\theta)$ .

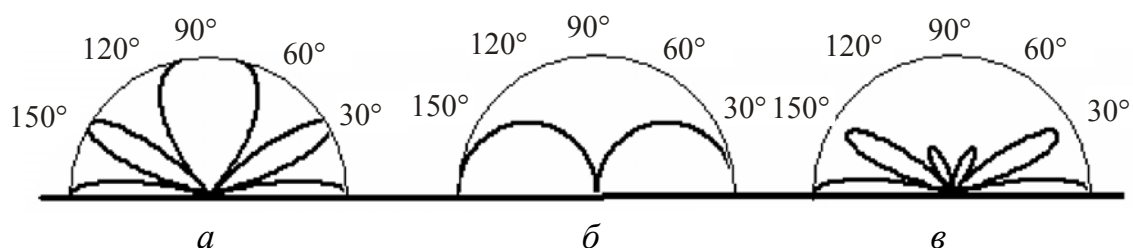


Рис. 12.8. Диаграммы направленности для вертикального вибратора и идеально проводящей Земли при  $h = \lambda$ :  
 $a - V(\theta)$ ;  $б - F_1(\theta)$ ;  $в - F_\Sigma(\theta)$

У реальных почв зависимость коэффициента отражения от угла падения носит сложный характер (см. рис. 2.1). Существует как бы «неполный» угол Брюстера ( $\varphi_B$ ), при котором модуль коэффициента отражения имеет минимум, а фаза изменяется от значений, близких к  $0^\circ$ , до значений, близких к  $180^\circ$ . Поэтому диаграммы направленности от  $\varphi = 0$  до  $\varphi_B$  имеют вид, соответствующий вертикальному вибратору над идеально проводящей землей, а при  $\varphi > \varphi_B$  — горизонтальному вибратору. В частности, первый от Земли лепесток оторван от нее, как у горизонтального вибратора.

Примеры таких диаграмм приведены на рис. 12.9.

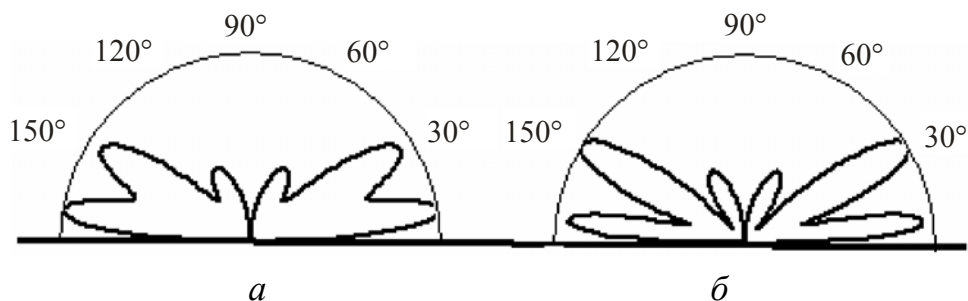


Рис. 12.9. Диаграммы направленности вертикального вибратора над почвами при  $h = \lambda$ :  
 $a - \epsilon_r = 10, \sigma = 0,1$ ;  $б - \epsilon_r = 10, \sigma = 1$

Из рисунка видно, что увеличение проводимости почвы делает диаграмму направленности более изрезанной и ее первый лепесток оторван от Земли.

### 12.3.3. Условия применимости отражательной трактовки

В основе интерференционных формул лежит так называемая отражательная трактовка, согласно которой присутствие Земли учитывается введением отраженной от нее волны. Коэффициент отражения при этом определяется по формулам Френеля, справедливым для плоских волн, в геометрической точке отражения (точка  $C$  на рис. 12.4, 12.5). Такой подход характерен в геометрической оптике, когда из-за малости длины волны область, существенная для распространения радиоволн, превращается в линию и распространение волны рассматривается как распространение луча. В действительности, как следует из подраздела 11.3, наличие конечной области, существенной при распространении радиоволн, приводит к образованию подобной области на поверхности Земли для отраженной волны. Углы падения волн на различные точки этой области отличаются от угла падения в точку  $C$ , и поэтому коэффициенты отражения в пределах области, существенной для отражения радиоволн, различны. Если этим различием можно пренебречь, то падающую и отраженную волны считают плоскими и отражательная трактовка будет справедлива, поскольку формулы Френеля являются точными для плоских волн. Таким образом, условие применимости отражательной трактовки сводится к условию малости изменения коэффициента отражения  $|\Delta R|$  в пределах области, существенной для отражения радиоволн. Очевидно, оно может быть записано как

$$|\Delta R| \ll |R|.$$

Это условие приводится к виду [3]

$$2 \frac{(h_1 + h_2)^2}{\lambda r} \gg |1 - R^2|, \quad (12.24)$$

где  $h_1, h_2$  — высоты антенн;  $r$  — расстояние между антеннами;  $R$  — коэффициент отражения в точке  $C$ .

Из условия (2.24) следует важный для практики вывод: чем ближе по модулю коэффициент отражения к единице, тем при меньших высотах антенн выполняются условия отражательной трактовки. В частности, для идеально проводящей Земли отражательная трактовка справедлива при любых высотах расположения антенн.

### 12.3.4. Квадратичная формула Введенского

Диаграмма направленности антенны над Землей, хотя и дает представление о распределении поля в различных направлениях, но не позволяет найти величину этого поля, поскольку определяется для бесконечно удаленных точек, где амплитуда поля стремится к нулю. Чтобы определить величину поля в точке наблюдения, нужно вернуться к интерференционным формулам п. 12.3.1. В нем было показано, что в случае длинных трасс интерференционный множитель может быть представлен в виде

$$V(r) = 2 \left| \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{r} \right) \right|. \quad (12.25)$$

Если расстояние настолько велико, что

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{r} \leq \frac{\pi}{9}, \quad (12.26)$$

то синус в формуле (12.15) можно заменить его аргументом. Совершаемая при этом ошибка не превышает 0,01. В результате получим

$$V(r) = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r}. \quad (12.27)$$

Формула для расчета напряженности поля в этом случае принимает вид

$$E_m = \frac{\sqrt{60PD}}{r^2} \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda}. \quad (12.28)$$

Обозначение  $E_m$  в данной формуле подчеркивает, что она определяет амплитудное значение вектора  $\vec{E}$ . Иногда в инженерных расчетах используют другую форму записи формулы (12.28):

$$E_d = \frac{2,18\sqrt{PD} h_1 h_2}{r^2 \lambda}, \quad (12.28a)$$

где  $P$  подставляется в киловаттах,  $h_1, h_2, \lambda$  — в метрах,  $r$  — в километрах.

В этом случае действующее значение напряженности поля  $E_d$  получается в милливольтгах на метр.

Формула (12.28) была получена в 1928 году академиком Б.А. Введенским. Она характеризует зависимость напряженности электрического поля от длины линии связи, длины волны и высоты расположения антенн. Следует отметить обратную пропорциональность поля квадрату расстояния —  $r^2$ . В свободном пространстве эта зависимость более слабая и определяется как  $1/r$ . Поэтому формулу Введенского часто называют квадратичной.

Причина квадратичной зависимости в том, что в условиях применимости формулы Введенского оба луча — прямой и отраженный — в месте приема имеют практически одинаковые амплитуды, но фазы их сдвинуты на величину, почти равную  $180^\circ$ . Это «почти» — потеря фазы за счет разности хода лучей  $\Delta r = \frac{2h_1 h_2}{r}$ . Результирующее поле двух лучей можно представить с помощью векторной диаграммы (рис. 12.10).

В рассматриваемых условиях отраженный луч является вредным, так как ослабляет поле прямой волны. Результирующее поле прямо пропорционально дополнительному к  $180^\circ$  углу сдвига по фазе. Этот угол  $\alpha$  мал и обратно пропорционален длине трассы  $r$ :

$$\alpha = k\Delta r = \frac{4h_1 h_2}{\lambda r}.$$

Поскольку поле в свободном пространстве само обратно пропорционально длине трассы  $r$ , то в целом результирующее поле обратно пропорционально квадрату расстояния. При этом, чем больше расстояние  $r$ , тем меньше разность хода  $\Delta r$  прямого и от-

раженного лучей и тем больше ослабляется поле вдоль земной поверхности за счет второго, отраженного, луча.

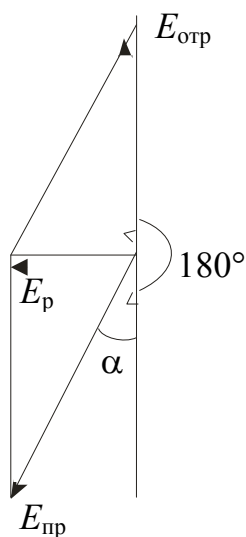


Рис. 12.10. Векторная диаграмма результирующего поля в точке приема

Сформулируем ограничения для использования формулы Введенского.

1. Должны выполняться условия  $|R| > 0,95$  и  $175^\circ < \Phi < 180^\circ$ .
2. Формула применима при высотах подъема антенны и расстояниях, для которых выполняется условие

$$18h_1h_2 \leq \lambda r, \quad (12.29)$$

следующее из соотношения (12.26).

3. Формула дает правильные результаты только в условиях применимости отражательной трактовки.

4. Формула применима для высот подъема точки наблюдения (приемной антенны) не больше первого максимума диаграммы направленности, определяемого равенством (12.22). При дальнейшем подъеме приемной антенны согласно формуле Введенского напряженность электрического поля должна увеличиваться. Однако в действительности она уменьшается в соответствии с диаграммой направленности.

Несмотря на ряд допущений, сделанных при выводе формулы Введенского, расчеты по ней хорошо совпадают с экспериментом. Она имеет фундаментальное значение для расчета напряженности поля УКВ линий связи, например в телевидении.

## 12.4. Отражение радиоволн от неровной земной поверхности. Критерий Рэлея

При падении волны на совершенно ровную плоскую поверхность направление отраженной волны подчиняется законам геометрической оптики. Такое отражение называется зеркальным. Если отражающая поверхность неровная, то радиоволны отражаются от нее одновременно в различных направлениях. Это диффузное, или рассеянное, отражение (рис. 12.11).

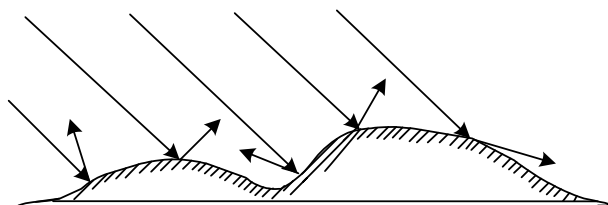


Рис. 12.11. Рассеяние радиоволн при отражении от неровной земной поверхности

При этом напряженность поля отраженной волны в зеркальном направлении меньше, чем в случае ровной поверхности. В этом случае говорят об эффективном коэффициенте отражения в зеркальном направлении.

Отметим, что понятие степени неровности применительно к задачам распространения радиоволн носит относительный характер. Решающим здесь является соотношение между длиной волны и высотой неровности. Например, холмистая местность с высотой холмов порядка сотен метров по отношению к сверхдлинным волнам может быть отнесена к категории гладких, но в диапазоне сантиметровых волн ровное поле, покрытое травой высотой до 10 см, должно быть отнесено к классу шероховатых поверхностей.

Для оценки степени шероховатости поверхности используется критерий Релея.

Пусть плоская волна отражается от поверхности с неровностями, наибольшая высота которых равна  $h$  (рис. 12.12). Часть мощности падающей волны отражается на нижнем уровне  $b-b_1$ , часть — на верхнем  $a-a_1$ . Плоскость  $m-m_1$  перпендикулярна направлению распространения падающей волны. Она является плоскостью равных фаз (фазовым фронтом) падающей волны.

Определим фазовые соотношения на плоскости  $n-n_1$ , перпендикулярной направлению распространения отраженной волны.

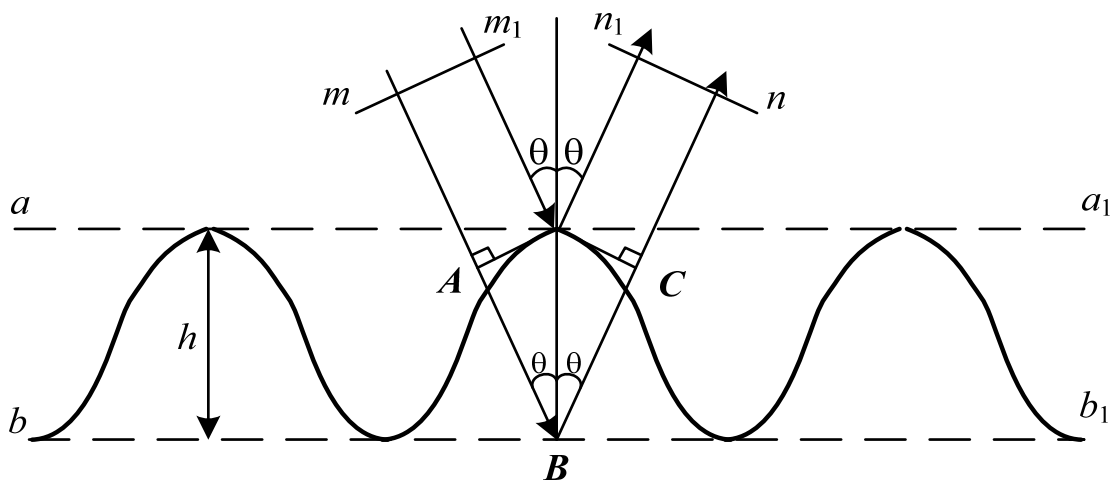


Рис. 12.12. Искажение фазового фронта волны при отражении от неровной поверхности

Очевидно, что наибольшая разность фаз окажется между волнами, отраженными от верхнего и нижнего уровней неровностей. Разность хода лучей  $mn$  и  $m_1n_1$  составляет величину  $ABC = 2h \cos \theta$ . Это приводит к сдвигу фаз между лучами

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos \theta.$$

Считается, что если фазовые искажения на плоскости  $n-n_1$  не превышают  $\pi/4$ , то отраженная волна плоская и влиянием неровностей на отражение можно пренебречь.

Из этого условия определяют допустимую высоту неровностей, т.е. высоту неровностей, при которых отражение можно считать зеркальным:

$$\Delta\varphi_{\text{доп}} = \frac{2\pi}{\lambda} 2h_{\text{доп}} \cos\theta < \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда

$$h_{\text{доп}} \leq \frac{\lambda}{16 \cos\theta}. \quad (12.30)$$

Соотношение (12.30) называют критерием Рэля. Этот критерий показывает, что при данной высоте неровностей отражение ближе к зеркальному для пологих лучей. Влияние неровностей земной поверхности тем сильнее, чем короче длина волны.

## 12.5. Учет сферичности Земли в интерференционных формулах

Полученные ранее формулы справедливы для плоской поверхности Земли. Землю принято считать плоской, если длина линий радиосвязи удовлетворяет соотношению  $r < 0,2r_0$ , где  $r_0$  — расстояние прямой видимости.

Пусть условие применимости отражательной трактовки выполняется. Тогда схема распространения прямого и отраженного лучей над поверхностью земли будет иметь вид, приведенный на рис. 12.13.

Проведем через точку  $C$  плоскость  $MN$ , касательную к земному шару. Высоты антенн будем отсчитывать от этой плоскости. Точка  $C$  — точка отражения радиоволны. В этом случае картина распространения радиоволн над сферической Землей будет аналогична картине распространения радиоволн над плоской поверхностью  $MN$ . Это позволяет воспользоваться интерференционными формулами, но с учетом изменения высоты антенн. Следовательно, все рассмотренные ранее методы расчета напряженности поля над плоской Землей могут быть распространены на сферическую Землю при замене действительных высот антенн  $h_1$  и  $h_2$  на приведенные  $h'_1$  и  $h'_2$ .



Таким образом, проблема учета кривизны Земли при использовании интерференционных формул сводится к нахождению приведенных высот  $h'_1$  и  $h'_2$  по известным высотам  $h_1$  и  $h_2$  и расстоянию между антеннами.

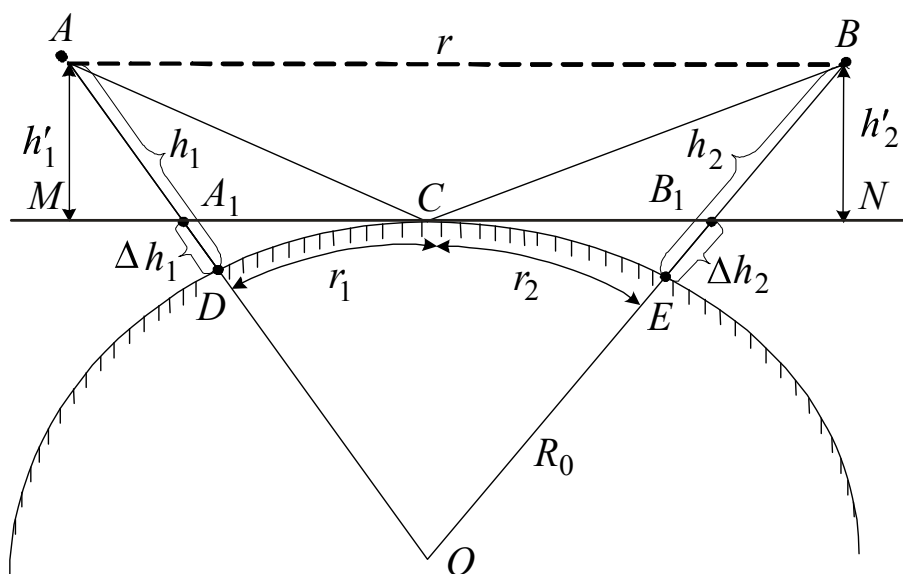


Рис. 12.13. Учет влияния сферичности Земли на распространение радиоволн

Если бы рисунок был изображен с соблюдением масштаба, то было бы видно, что приведенные и реальные высоты почти не имеют углового расхождения и можно считать

$$\begin{aligned} h'_1 &\cong h_1 - \Delta h_1; \\ h'_2 &\cong h_2 - \Delta h_2. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Отметим, что  $r_1$  и  $r_2$  приблизительно соответствуют расстоянию прямой видимости при высоте антенн  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  и, следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta h_1 &\cong \frac{r_1^2}{2R_0}; \\ \Delta h_2 &\cong \frac{r_2^2}{2R_0}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Окончательно приведенные высоты могут быть определены из соотношений

$$\begin{aligned} h'_1 &= h_1 - \frac{r_1^2}{12,8}; \\ h'_2 &= h_2 - \frac{r_2^2}{12,8}, \end{aligned} \tag{12.33}$$

где высоты антенн выражаются в метрах, а расстояния  $r_1$  и  $r_2$  — в километрах.

Полученные формулы показывают, что умение вычислять приведенные высоты упирается в знание расстояний  $r_1$  и  $r_2$ , т.е. в нахождение точки  $C$ . В общем случае определение положения точки отражения  $C$  связано с громоздкими вычислениями. Их можно упростить, если рассматривать либо большие, либо маленькие расстояния  $r$ .

При небольших расстояниях между антеннами  $r$ , считая Землю плоской, положение точки отражения  $C$  находят по формулам

$$\begin{aligned} A_1C \approx r_1 &= r \frac{h_1}{h_1 + h_2}; \\ B_1C \approx r_2 &= r \frac{h_2}{h_1 + h_2}. \end{aligned} \tag{12.34}$$

При значительных расстояниях, близких к расстоянию прямой видимости, прямая  $A_1B_1$  и ломаная  $ACB$  почти сливаются и можно считать

$$\begin{aligned} A_1C \approx AC &\approx \sqrt{2R_0 h_1}; \\ C_1B \approx CB &\approx \sqrt{2R_0 h_2}. \end{aligned}$$

Кроме того, в последнем случае  $r$  близко к расстоянию прямой видимости, т.е.

$$r \approx r_0 = \sqrt{2R_0} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad \sqrt{2R_0} = \frac{r}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}.$$

Отсюда положение точки  $C$  можно найти по формулам

$$r_1 = r \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}; \quad r_2 = r \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}. \quad (12.35)$$

Для промежуточных случаев положение точки  $C$  приближенно берется как среднее из двух положений, определяемых формулами (12.34) и (12.35).

Приведенные высоты позволяют учесть влияние сферичности Земли на величину поля в интерференционных формулах. Отметим, что по мере увеличения длины трассы и приближения ее к дальности прямой видимости приведенные высоты постепенно уменьшаются и в пределе стремятся к нулю. В этом случае множитель ослабления в интерференционных формулах, а следовательно, и напряженность поля также обращаются в нуль и концепция, положенная в основу интерференционных формул, — наличие двух волн (прямой и отраженной) в точке приема — теряет смысл. В связи с этим полагают, что интерференционные формулы пригодны для расчетов при расстояниях между передатчиком и приемником  $r < 0,8r_0$ .

## 12.6. Распространение радиоволн в зоне тени и полутени

При длинных радиотрассах модель плоской Земли неприменима, необходимо учитывать ее сферичность и для определения напряженности поля на большом удалении от передатчика решать задачу дифракции электромагнитных волн на шаре. Задача усложняется тем, что приходится учитывать реальные электрические параметры Земли. В 1945 г. академик В.А. Фок получил общее выражение для расчета напряженности электрического поля в месте приема, пригодное для любых расстояний от передатчика. Однако определение напряженности поля по формуле Фока связано со сложными вычислениями, поскольку формула представляет собой ряд, плохо сходящийся при небольших расстояниях.

Для значительных расстояний в области тени, когда выпуклость Земли экранирует зону приема, можно учитывать только первый член ряда и рассчитывать напряженность поля по формуле

$$E = E_0 V, \quad (12.36)$$

где  $E_0$  — амплитуда напряженности электрического поля, создаваемого антенной в свободном пространстве;  $V$  — множитель ослабления.

Множитель ослабления определяется произведением трех функций:

$$V = U(x) V(y_1) V(y_2), \quad (12.37)$$

где  $U(x)$  — функция, зависящая от расстояния и электрических параметров почвы;  $V(y_1)$  и  $V(y_2)$  — функции, зависящие от высоты подъема приемной и передающей антенн соответственно.

Параметры  $x$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  определяются через масштабы расстояний  $L$  и высот  $H$  следующим образом:

$$L = \left( \frac{R_0^2 \lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{R_0 \lambda^2}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad (12.38)$$

$$x = \frac{r}{L}; \quad y_1 = \frac{h_1}{H}; \quad y_2 = \frac{h_2}{H}, \quad (12.39)$$

где  $x$  — нормированная длина трассы;  $y_1$ ,  $y_2$  — нормированные высоты расположения антенн;  $R_0$  — радиус Земли.

Выражения для функций  $U(x)$  и  $V(y)$ , достаточно сложные в общем виде, могут быть упрощены для некоторых практически важных случаев. Например, в диапазоне УКВ при  $\lambda < 10$  м для горизонтальной поляризации волны и  $\lambda < 1$  м для вертикальной поляризации функция  $U(x)$  может быть аппроксимирована выражением

$$U(x) = 2\sqrt{\pi x} e^{-2,02x}. \quad (12.40)$$

Графики функций  $U(x)$  и  $V(y)$  приведены на рис. 12.14 и 12.15.

Кроме того, функция  $V(y)$  (дБ) с достаточной степенью точности может быть аппроксимирована выражениями

$$\begin{aligned}
 V(y) &\approx -1,386 + 2,22y + 19 \cdot \lg(y), & 0,01 \leq y \leq 1; \\
 V(y) &\approx -1,29 + 1,166y + 30,1 \cdot \lg(y), & 1 \leq y \leq 40.
 \end{aligned}
 \tag{12.41}$$

В случае длинных, средних и коротких волн антенны являются, как правило, низко расположенными. Высотные множители  $V(y_1)$  и  $V(y_2)$  обращаются в единицы, но расчет множителя ослабления остается достаточно сложным, так как проявляется сильная зависимость от параметров почвы. На практике в этом случае можно использовать графики, построенные для двух видов земной поверхности — моря и суши (рис. 12.16 и 12.17).

Графики, приведенные на рис. 12.16, 12.17, построены по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля при малых расстояниях (см. раздел 13), по формуле Фока при больших расстояниях и рекомендованы Международным консультативным комитетом по радиосвязи (МККР). Предполагается, что передающая антенна — несимметричный вибратор с  $D = 1,5$ , установленный на поверхности Земли и излучающий мощность 1 кВт.

Если для передающей антенны задана не излучаемая мощность, а ток  $I_0$  на входе антенны и действующая длина антенны  $l_d$ , то излучаемую мощность можно определить по формуле

$$P = 160\pi^2 \left( \frac{l_d I_0}{\lambda} \right)^2. \tag{12.42}$$

На рис. 12.16, 12.17 по вертикали отложены значения напряженности электрического поля в децибелах по отношению к 1 мкВ/м. Если излучаемая мощность и КНД передающей антенны отличаются от предполагаемых, то напряженность поля определяется из условия, что она пропорциональна  $\sqrt{PD}$ .

В зоне полутени при поднятых антеннах расчет поля значительно усложняется, поскольку в дифракционной формуле необходимо учитывать несколько слагаемых. В то же время определение поля в зоне полутени представляет значительный практический интерес, например при расчете области уверенного приема телевизионных передач, поскольку в зоне тени дифракционное поле быстро убывает с увеличением расстояния.

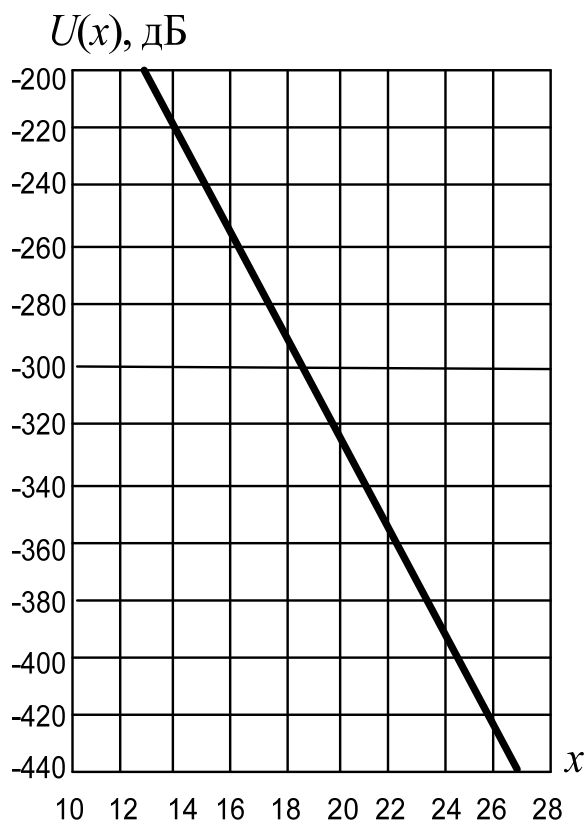
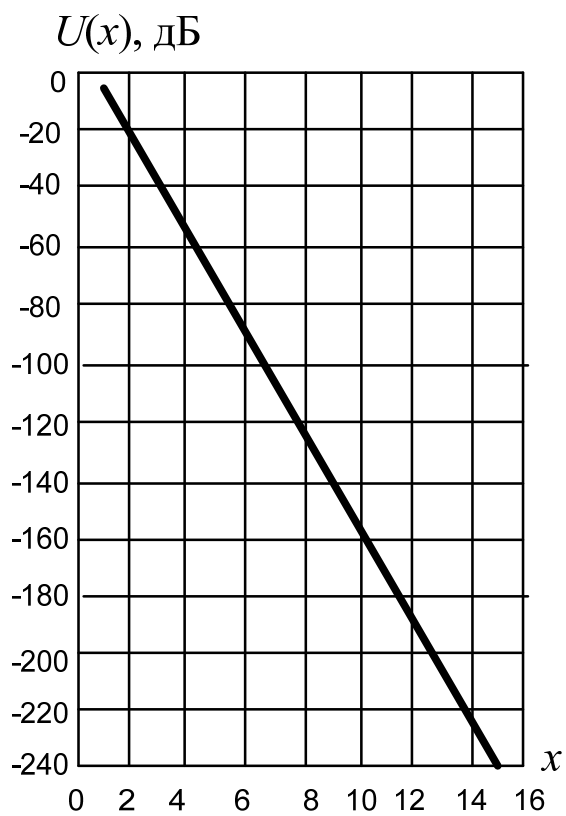


Рис. 12.14. Зависимость  $U(x)$  от нормированной длины трассы

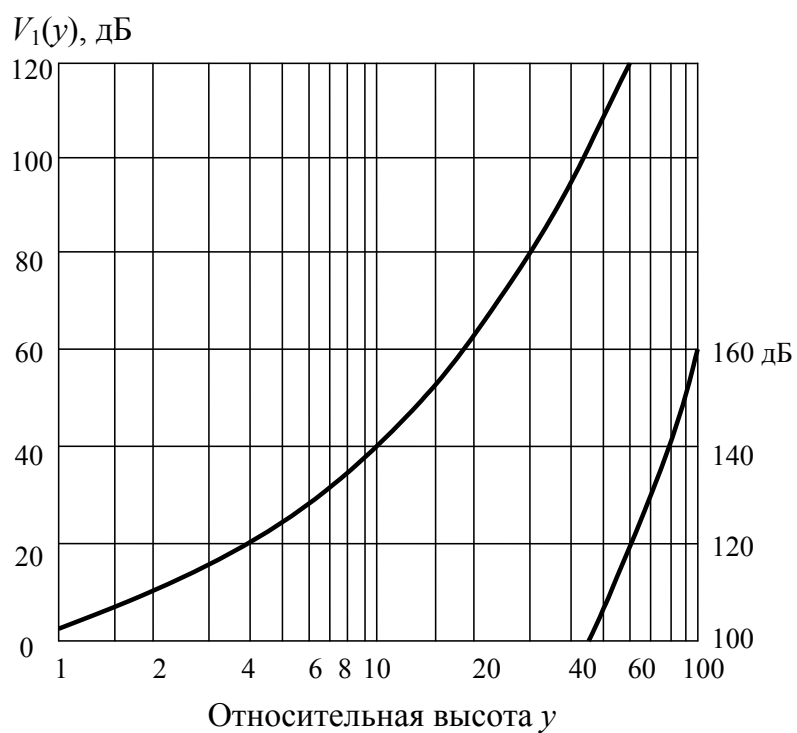
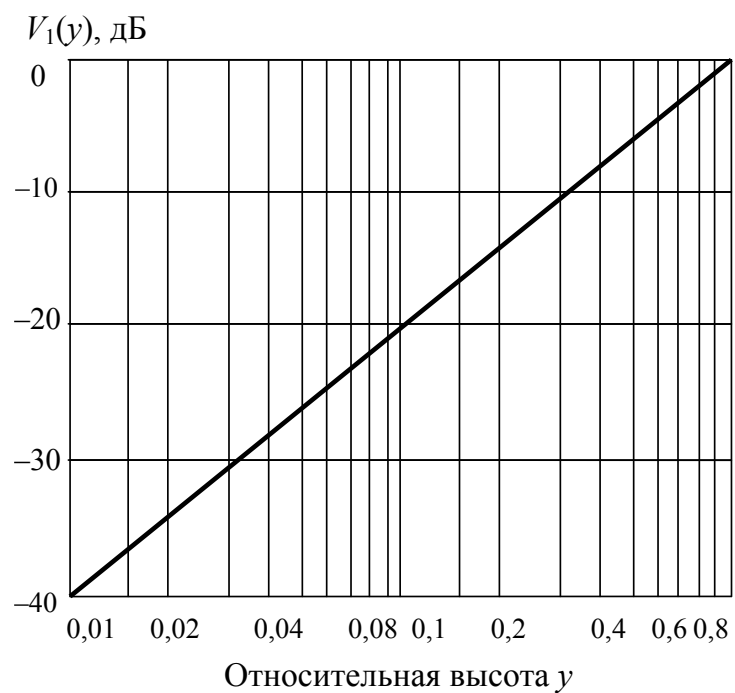


Рис. 12.15. Зависимость  $V(y)$  от нормированной высоты антенны

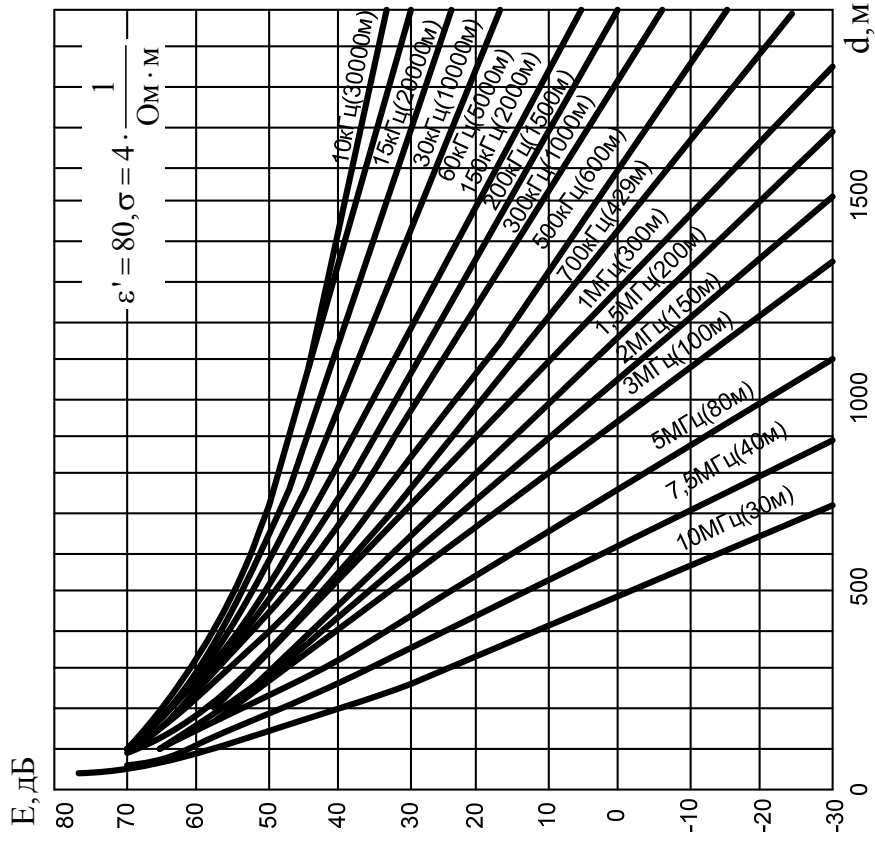


Рис. 12.16. Зависимость напряженности  
земной волны от расстояния  
при распространении над морем

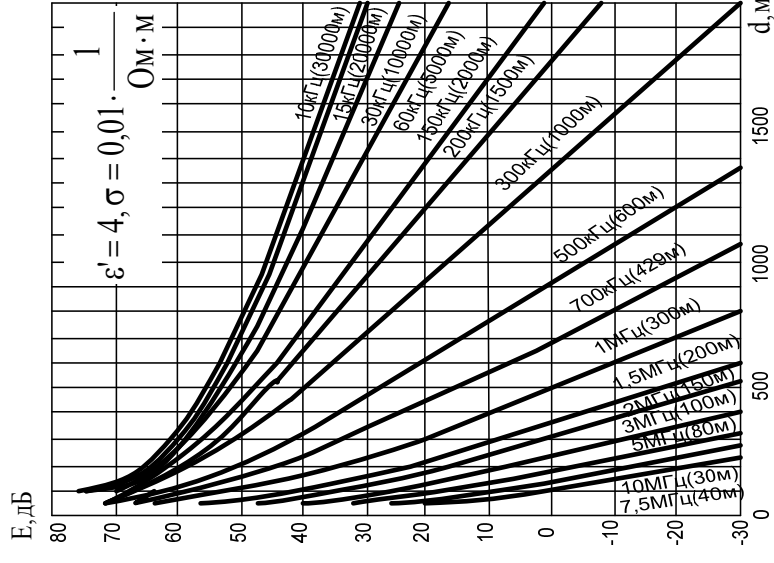


Рис. 12.17. Зависимость напряженности  
земной волны от расстояния  
при распространении над сушей



На практике приходится использовать приближенные методы. Рассмотрим один из этих методов. Нормированные параметры трассы определяются по формулам (12.38) и (12.39). Нормированное расстояние прямой видимости при этом будет равно

$$x_{\text{пр}} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}. \quad (12.43)$$

Множитель ослабления (дБ/м) определяется по формуле

$$V(x) = V_{\text{пр}}(\mu, q = \infty) - 17,1\xi, \quad (12.44)$$

где первое слагаемое определяет ослабление на границе прямой видимости, второе — добавочное ослабление при переходе в область тени; параметр  $\xi$  определяет удаление от границы прямой видимости в область тени:

$$\xi = x - x_{\text{пр}}. \quad (12.45)$$

Параметр  $\mu$  связан с нормированными высотами антенн соотношением

$$\mu = \sqrt{\frac{\sqrt{y_1 y_2}}{\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}}}. \quad (12.46)$$

Параметр  $q$  определяется формулой

$$q = j \sqrt[3]{\frac{\pi R_0}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r - j60\lambda\sigma}}.$$

В диапазоне УКВ можно пользоваться формулой (12.44) как для горизонтальной, так и для вертикальной поляризации.

График функции  $V_{\text{пр}}(\mu, q = \infty)$  хорошо аппроксимируется выражением

$$V(\mu, q = \infty) = 16,8 - 35,28\mu + 1,44e^{\mu} 47,65 \cdot \ln(\mu). \quad (12.47)$$

В заключение отметим, что одночленной дифракционной формулой можно пользоваться для радиотрасс с расстоянием, примерно в полтора раза превышающим расстояние прямой видимости. Общее представление о поведении поля вблизи расстояния прямой

видимости и в зоне тени дает рис. 12.18. Из него видно, что в зоне освещенности поле имеет интерференционный характер, причем по мере укорочения волны первый максимум приближается к линии горизонта в соответствии с формулой (12.22). В области тени множитель ослабления быстро уменьшается, и тем быстрее, чем короче длина волны.

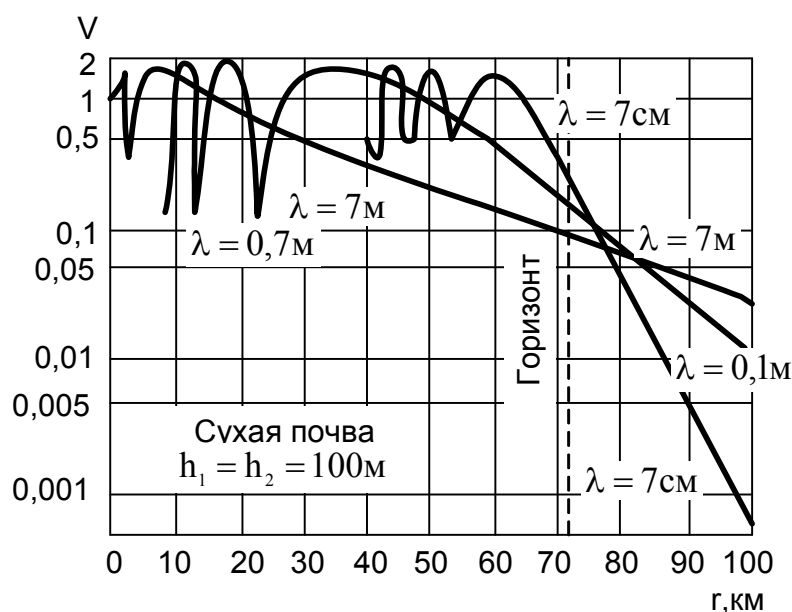


Рис. 12.18. Зависимость множителя ослабления на разных длинах волн при поднятых антеннах

В качестве примера рассмотрим расчет множителя ослабления в области полутени.

**Пример.** Определить множитель ослабления на границе прямой видимости и на расстоянии 10 км от нее, если высоты антенн  $h_1 = 200$  м (передающая антенна телецентра),  $h_2 = 15$  м (приемная антенна),  $\lambda = 6$  м.

1. Определим масштабы расстояний и высот по формуле (12.38):

$$L = \sqrt[3]{\frac{\lambda R_0^2}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{\pi}} = 42,63 \text{ км};$$

$$H = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 R_0}{\pi^2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{\pi^2}} = 142,676 \text{ м.}$$

2. Нормированные высоты антенн по формулам (12.39)

$$y_1 = h_1/L = 1,402, \quad y_2 = h_2/L = 0,105.$$

3. Нормированное расстояние прямой видимости можно определить как

$$x_{\text{пр}} = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = \sqrt{1,402} + \sqrt{0,105} = 1,508$$

или как  $x_{\text{пр}} = r_0/L$ , где  $r_0$  — расстояние прямой видимости, равное 64,3 км.

4. По формуле (12.46)  $\mu = 0,505$ .

5. Множитель ослабления на границе прямой видимости по формуле (12.47)

$$V(\mu, q = \infty) = -31,185 \text{ дБ.}$$

6. Нормированное расстояние для  $r_0+10 = 74,3$  км

$$x = 74,3/42,63 = 1,743.$$

7. Параметр  $\xi = x - x_{\text{пр}} = 0,235$ .

8. Множитель ослабления для расстояния 74,3 км

$$V(x) = V_{\text{пр}}(\mu, q = \infty) - 17,1\xi = -31,185 - 17,1 \cdot 0,235 = -35,203 \text{ дБ.}$$

Таким образом, на расстоянии прямой видимости множитель ослабления составляет  $-31,185$  дБ, а в области полутени, на расстоянии 74,3 км, равен  $-35,203$  дБ.

## Контрольные вопросы

1. Поясните суть отражательной трактовки при определении напряженности поля поднятых антенн. Как определяются пределы ее применимости?

2. Почему и как отличаются диаграммы направленности вертикального и горизонтального вибраторов, поднятых над идеально

проводящей землей? Что происходит с диаграммами направленности при уменьшении высоты антенн?

3. Какой вид имеет диаграмма направленности в вертикальной плоскости у вертикального вибратора в условиях применимости формулы Введенского?

4. Как объясняется квадратичная зависимость напряженности от расстояния в формуле Введенского? Каковы условия применимости формулы?

5. Как определить участок поверхности Земли, существенный при отражении радиоволн в случае поднятых антенн? Как определить, можно ли считать его гладким?

6. Как определить напряженность поля в точке приема при поднятых антеннах, если условия применимости формулы Введенского не выполняются?

7. Поясните механизм распространения радиоволн в области тени. Как поле в зоне тени зависит от частоты радиоволн? Объясните эту зависимость, используя понятие пространства, существенного для распространения радиоволн.

8. Какой характер имеет зависимость напряженности поля от расстояния в зоне освещенности и зоне тени при поднятых антеннах? Объясните разный характер этих зависимостей.

9. Как зависит напряженность поля по формуле Введенского от высоты приемной антенны? Какова эта зависимость в действительности?

## 13. Распространение земных радиоволн при низко расположенных антеннах

### 13.1. Формула идеальной радиопередачи

В диапазонах длинных, средних и отчасти коротких волн в качестве антенн используют различного типа вибраторы, расположенные непосредственно на поверхности Земли. Это объясняется, во-первых, большой длиной волны, когда поднять антенну на несколько длин волн не представляется возможным. Во-вторых, как увидим ниже, такое расположение имеет определенные преимущества. В предыдущем разделе распространение радиоволн при поднятых антеннах рассматривалось на основе отражательной трактовки. При низко расположенных антеннах она в общем случае неприменима, хотя бы потому, что невозможно выделить по отдельности падающую и отраженную волны. Однако, как было показано в п. 12.3.3, для идеально проводящей Земли отражательная трактовка справедлива для любых высот расположения антенн. Поэтому, используя отражательную трактовку, вначале определим поле, создаваемое низко расположенным вибратором над идеально проводящей Землей. Затем рассмотрим особенности распространения радиоволн над реальной почвой в сравнении со случаем идеально проводящей Земли.

Обсудим вопрос об оптимальной ориентации вибратора относительно поверхности идеально проводящей Земли. Для этого рассмотрим два случая расположения симметричного вибратора над поверхностью Земли (рис. 13.1,*а,б*). Согласно методу зеркальных изображений действие Земли можно учесть введением зеркального изображения реальных зарядов с противоположными знаками.

Из рис. 13.1,*а* следует, что для вертикального вибратора ток в зеркальном изображении имеет то же направление, что и в реальном. Это приводит к увеличению поля в точке наблюдения в два раза по сравнению с полем в отсутствие Земли при условии сохранения величины входного тока. В случае горизонтального вибратора (см. рис. 13.1,*б*) ток в зеркальном изображении имеет противоположное направление по отношению к току в вибраторе. При этом

поля в точке наблюдения на поверхности Земли взаимно компенсируются. В остальных точках пространства эта компенсация будет тем более полной, чем ниже располагается вибратор над Землей. Таким образом, в случае идеально проводящей Земли вибратор следует располагать вертикально.

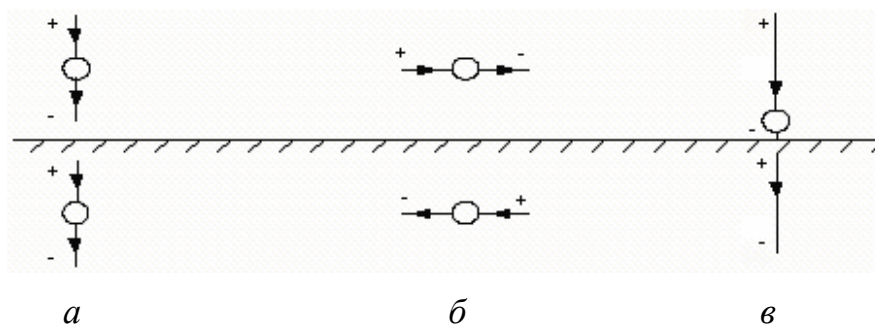


Рис. 13.1. Вибраторные антенны вблизи идеально проводящей Земли: *a* – симметричный вертикальный вибратор; *б* – симметричный горизонтальный вибратор; *в* – несимметричный вертикальный вибратор

Для реальных почв этот вывод остается также справедливым, поскольку свойства почв в диапазонах длинных, средних и коротких волн близки к свойствам проводника. На практике обычно используются вертикальные несимметричные вибраторы (рис. 13.1, *в*), в которых роль второй половины вибратора играет зеркальное изображение в Земле.

Определим, как изменится поле вибратора (см. рис. 13.1, *в*) по сравнению с полем симметричного вибратора в свободном пространстве при сохранении излучаемой мощности. В присутствии Земли вектор Пойнтинга в точке наблюдения увеличится в два раза по сравнению со свободным пространством, поскольку поле в идеальный проводник не проникает и поэтому поверхность сферы, по которой распределяется излученная мощность, уменьшится в два раза. Напряженность поля при этом увеличится в  $\sqrt{2}$  раз. Таким образом, вместо равенства (11.4) в направлении поверхности Земли будем иметь

$$E = \frac{\sqrt{120PD}}{r}. \quad (13.1)$$

Выражение (13.1) называется формулой идеальной радиопередачи. Этим подчеркивается двоякая идеализация: во-первых, не принимается во внимание кривизна Земли; во-вторых, ее поверхности приписываются свойства идеального проводника. Отметим, что зависимость  $E(r) \sim 1/r$  осталась такой же, как в свободном пространстве. Это вполне естественно, так как идеальные проводники не поглощают энергию электромагнитных волн.

Если Земля имеет конечную проводимость, то волна будет проникать в Землю и это приведет к следующему:

а) изменится структура поля в точках на поверхности Земли;

б) энергия волны будет поглощаться в Земле и это обусловит дополнительное ослабление поля. Такое ослабление учитывается введением в формулу идеальной радиопередачи (13.1) множителя ослабления  $V$ , зависящего от расстояния и электрических параметров почвы:

$$E = \frac{\sqrt{120PD}}{r} V(r, \dot{\epsilon}_{r2}), \quad (13.2)$$

где  $\dot{\epsilon}_{r2}$  — комплексная относительная диэлектрическая проницаемость почвы (12.1).

Рассмотрим указанные следствия по отдельности. В качестве передающей антенны будем предполагать для определенности несимметричный вибратор (см. рис. 13.1,б), хотя все выводы справедливы для любых низко расположенных антенн с вертикальной поляризацией поля излучения.

## 13.2. Структура поля над поглощающей поверхностью Земли

Определение структуры поля означает нахождение соотношений между составляющими векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в какой-либо точке. Предположим, что точка наблюдения находится на поверхности Земли на достаточном удалении от передающей антенны (в ее дальней зоне). Изменения, происходящие в структуре поля при замене идеально проводящей Земли на поглощающую, показаны на

рис. 13.2. Передающая антенна расположена слева (на рисунке не показана) так, что распространение волны происходит слева направо.

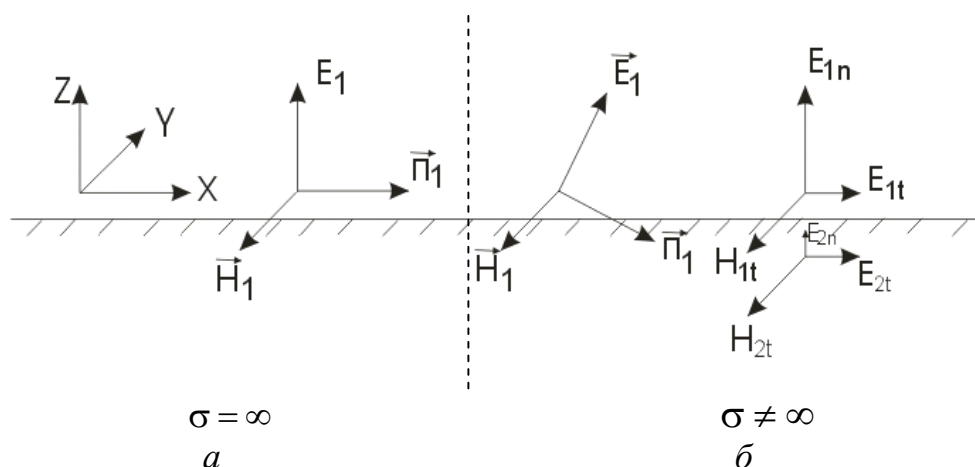


Рис. 13.2. Структура поля над идеально проводящей (а) и поглощающей (б) Землей

Над идеально проводящей Землей вектор Пойнтинга  $\vec{\Pi}$  направлен вдоль Земли, вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен, а вектор  $\vec{H}$  параллелен поверхности Земли, так что выполняются граничные условия для идеальных проводников  $E_t = H_n = 0$ , где индекс  $t$  означает тангенциальную (касательная к поверхности Земли) составляющую какого-либо вектора, а индекс  $n$  — нормальную (перпендикулярную) составляющую.

Над реальной (с конечной проводимостью) поверхностью Земли происходит наклон вектора Пойнтинга в сторону Земли, поскольку энергия волны из воздуха частично проникает в Землю и поглощается в ней в виде тепла. Поскольку векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны вектору  $\vec{\Pi}$ , то происходит наклон вектора  $\vec{E}$  в направлении движения волны. Таким образом, на поверхности появляется составляющая  $E_t \neq 0$ . Задача о структуре поля в основном сводится к определению этой составляющей. Конечно, на поверхности почвы выполняются точные граничные условия электродинамики

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \dot{\varepsilon}_2 E_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (13.3)$$



Эти условия не позволяют ответить на вопрос о структуре поля, поскольку число неизвестных больше числа уравнений. Можно было бы найти решение задачи, если уравнения (13.3) рассмотреть вместе с уравнениями Максвелла для обеих сред — воздуха и земли, и найти поля из этих уравнений с учетом граничных условий. Однако такой путь является слишком сложным и громоздким. Существует более простой способ решения задачи, основанный на использовании приближенных граничных условий Леонтовича (см. подразд. 7.8).

Условия Леонтовича применимы, когда модуль комплексной относительной диэлектрической проницаемости второй среды — земли, много больше относительной проницаемости первой среды — воздуха:

$$|\dot{\epsilon}_{r2}| = \sqrt{\epsilon_{r2}^2 + (60\lambda\sigma)^2} \gg \epsilon_{r1} = 1, \quad (13.4)$$

где  $\epsilon_{r2}$  и  $\sigma$  — относительная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость почвы;  $\epsilon_{r1}$  — относительная диэлектрическая проницаемость воздуха, которую можно считать равной единице.

Для реальных почв условие (13.4), как правило, выполняется и потому не носит ограничительного характера.

Приближенные граничные условия Леонтовича могут быть представлены в виде

$$\frac{E_{1t}}{H_{1t}} \approx \dot{Z}_2, \quad (13.5)$$

где  $E_{1t}$  и  $H_{1t}$  — тангенциальные составляющие напряженности полей  $\bar{E}_1$  и  $\bar{H}_1$  в воздухе на границе с почвой;  $\dot{Z}_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r2}}}$  — характеристическое сопротивление почвы.

Характеристическое сопротивление первой среды — воздуха — принимаем равным  $120\pi$ .

Особенностью граничных условий Леонтовича является то, что они связывают между собой тангенциальные составляющие полей в воздухе через параметры земной поверхности.

В выбранной нами на рис. 13.2 системе координат приближенные граничные условия Леонтовича имеют вид

$$H_{1y} \approx - \frac{E_{1x}}{120\pi} \sqrt{\dot{\epsilon}_{r2}}. \quad (13.6)$$

Если бы земля была идеально проводящей, то соотношение между  $E_{1z}$  и  $H_{1y}$  определялось бы характеристическим сопротивлением воздуха:

$$\frac{E_{1z}}{H_{1y}} = Z_1 = 120\pi. \quad (13.7)$$

При реальных почвах соотношение (13.7) выполняется приближенно, поскольку, как показывает анализ, наклон вектора Пойнтинга на реальных почвах составляет всего несколько градусов. Исключая из формул (13.6) и (13.7)  $H_{1y}$ , получим соотношение между  $E_{1z}$  и  $E_{1x}$ :

$$E_{1x} \approx \frac{E_{1z}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_r}}. \quad (13.8)$$

Приближенный характер этого соотношения объясняется приближенным характером соотношений (13.6) и (13.7) для реальных почв.

Точные граничные условия (13.3) позволяют выразить компоненты полей  $\bar{E}_1$  и  $\bar{H}_1$  в земле через компоненты в воздухе:

$$E_{2x} = E_{1x}, \quad \dot{\epsilon}_{r2} E_{2z} = E_{1z}, \quad H_{1y} = H_{2y}. \quad (13.9)$$

В отличие от предыдущих соотношений эти равенства являются точными. Из формул (13.8) и (13.9) можно получить соотношение между компонентами электрического поля в земле

$$E_{2z} \approx \frac{E_{2x}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{r2}}}. \quad (13.10)$$

Таким образом, поперечные (нормальные) и продольные (тангенциальные) компоненты вектора  $\bar{E}$  в воздухе и земле связаны между собой похожими соотношениями (13.8) и (13.10). Однако

если в воздухе преобладает поперечная составляющая  $E_{1z}$ , то в земле — продольная  $E_{2x}$ .

Из формул (13.8) и (13.10) также следует, что между составляющими электрического поля в воздухе и в земле имеется сдвиг фаз, поскольку корень из комплексной диэлектрической проницаемости почвы является также комплексной величиной. Это приводит к тому, что поля  $\bar{E}_1$  и  $\bar{E}_2$  оказываются эллиптически поляризованными (рис. 13.3).

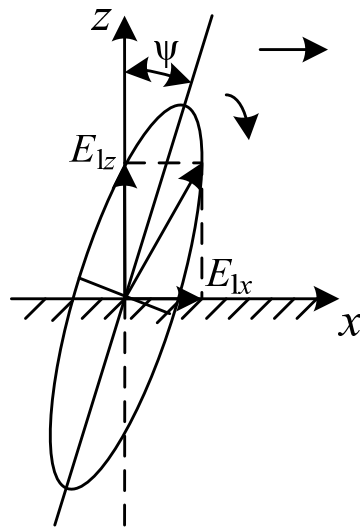


Рис. 13.3. Эллипс поляризации радиоволны, распространяющейся над полупроводящей поверхностью

Для реальных почв эллипс, как правило, сильно вытянут. Поэтому можно приближенно считать поляризацию волны линейной и говорить о явлении наклона фронта волны. Угол наклона определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\sqrt{|\dot{\epsilon}_{r2}|}}. \quad (13.11)$$

Проведенный анализ структуры полей позволяет сделать вывод о том, что в воздухе выгоднее использовать в качестве антенн вертикальные вибраторы, а в земле — горизонтальные. В то же время появление горизонтальной составляющей электрического поля над

реальными почвами объясняет применение приемных антенн в виде горизонтальных проводов над Землей в диапазоне коротких волн. По сравнению с вертикальным проводом горизонтальный провод принимает составляющую поля  $E_{1x}$ , которая меньше вертикальной. Однако антенна с горизонтальным проводом обладает направленностью в горизонтальной плоскости и проще в изготовлении. Если в качестве приемной антенны используется магнитная антенна, например рамочная или ферритовая, то она может располагаться либо в воздухе, либо в почве, но вблизи поверхности, поскольку поля в почве быстро затухают при удалении от поверхности.

### 13.3. Расчет вертикальной составляющей напряженности электрического поля. Формула Шулейкина – Ван-дер-Поля

Обратимся теперь к определению множителя ослабления  $V$  в формуле (13.2). Решение этой задачи, как и предыдущей, представляет сложную электродинамическую проблему. Впервые в 1909 г. эту задачу решил А. Зоммерфельд, используя уравнения Максвелла для воздуха и почвы и строгие граничные условия. Однако его решение содержало ошибку, позднее исправленную В.А. Фоком, и было представлено в интегральном виде, неудобном для практического применения. Позднее этой проблемой занимались М.В. Шулейкин, Ван-дер-Поль, Е.Л. Фейнберг и многие другие. Решение, пригодное для практического использования, было получено в 1923–25 гг. М.В. Шулейкиным и Ван-дер Полем и представляется в виде графика (рис. 13.4) или приближенной формулы

$$|V| = \frac{2 + 0,3\rho}{2 + \rho + 0,6\rho^2}, \quad (13.12)$$

где безразмерный параметр  $\rho$  называется численным расстоянием:

$$\rho = \frac{\pi r}{\lambda |\tilde{\epsilon}_{r2}|} = \frac{\pi r}{\lambda \sqrt{\epsilon_{r2}^2 + (60\sigma\lambda)^2}}. \quad (13.13)$$

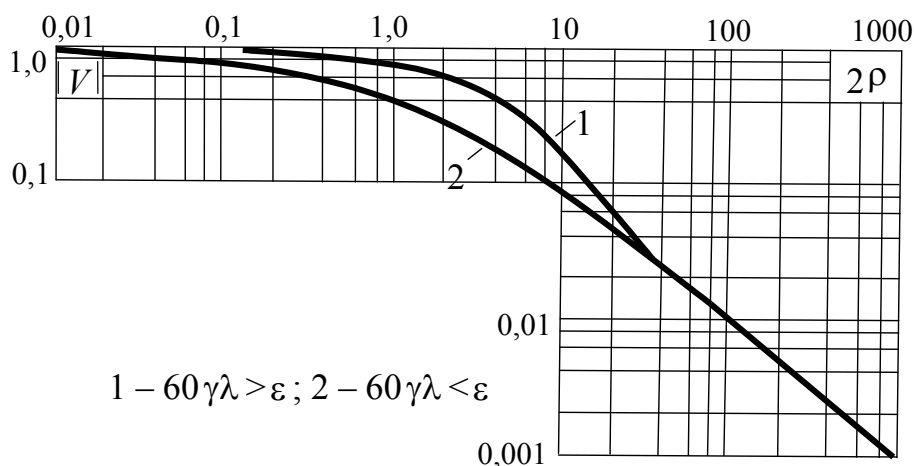


Рис. 13.4. Зависимость множителя ослабления от численного расстояния

Формулу для расчета напряженности поля (13.2) вместе с формулой для определения множителя ослабления (13.12) называют формулой Шулейкена – Ван-дер-Поля.

Из графика рис.13.4 и формулы (13.12) видно, что при малых значениях  $\rho$  множитель  $|V|$  слабо зависит от  $\rho$ , то есть мало меняется с изменением расстояния, длины волны, электрических свойств почвы и близок к единице. Следовательно, при этих условиях почва не вносит дополнительного ослабления и волна распространяется как над идеально проводящей почвой. Реально этому случаю соответствуют небольшие значения  $r/\lambda$  и большие значения диэлектрической проницаемости (например, для воды) или проводимости (пример — морская вода). Заметим, что при  $\sigma \rightarrow \infty$  формула Шулейкина переходит в формулу идеальной радиопередачи. Большие значения  $\rho$  соответствуют большим расстояниям, небольшим длинам волн, сухим почвам. При  $\rho > 20$  справедливо приближение

$$|V| = \frac{1}{2\rho}, \quad (13.14)$$

и напряженность поля убывает согласно формуле (13.2) как  $1/r^2$ .

Заметим, что затухание в воздухе, определяемое по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля, всегда меньше, чем если бы волна распространялась только в почве. В последнем случае коэффициент

ослабления имеет экспоненциальную зависимость от расстояния и определяется по формулам, известным из курса электродинамики.

Представленный выше результат решения задачи о распространении волны над поглощающей почвой является максимально упрощенным, но удовлетворяющим потребностям практики.

Сделаем теперь несколько качественных выводов о механизме распространения радиоволн в этом случае.

Мы установили ранее, что область, существенная для распространения радиоволн, имеет форму эллипса с фокусами в корреспондирующих пунктах — местах расположения антенн. При расположении антенн близко к поверхности Земли часть энергии просачивается в почву и по мере удаления от излучателя убывает за счет потерь в полупроводящей земле. Вследствие этого повышается роль концевых участков трассы, примыкающих к антеннам.

Физическую картину повышения роли концевых участков трассы можно объяснить следующим образом. Предположим, что земля является идеальным проводником. На ее поверхности расположен вертикальный диполь, в точке  $O$ . Определим поле на поверхности земли в точке  $A$  (рис. 13.5).

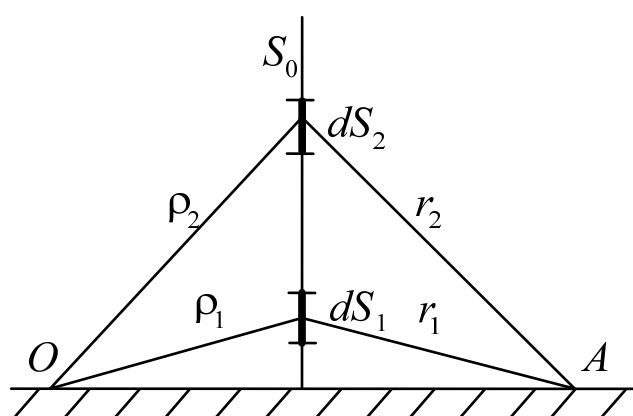


Рис. 13.5. К объяснению понятий взлетной и посадочной площадок

Пусть между точками  $O$  и  $A$  расположена плоскость  $S_0$ , перпендикулярная поверхности земли и трассе распространения радиоволн. Согласно принципу Гюйгенса – Френеля напряженность поля в точке  $A$  формируется в результате суммирования полей вторичных излучений, расположенных на плоскости  $S_0$ .

Сравним вклад в поле, создаваемый вторичными источниками с элементарных площадок  $dS_1$  и  $dS_2$ . Вклад площадок в создание поля в точке  $A$  определяется суммарным расстоянием  $\rho + r$ . Очевидно, что, чем больше это расстояние, тем меньше вклад в поле в точке  $A$ . Таким образом, вклад вышерасположенной площадки меньше, по сравнению с вкладом нижерасположенной.

Пусть теперь земля не является идеальным проводником. Тогда роль элементарных площадок изменится. Поле в точке  $A$  определяется в данном случае не только расстоянием  $\rho + r$ , но и ослабляющим действием земли. В результате утечки электромагнитной энергии в землю поле над реальной землей оказывается ослабленным (по сравнению с полем над идеальной землей). Чем ближе к земле площадка, тем сильнее сказывается ослабляющее действие земли. Следовательно, в случае реальной земли более существенный вклад в поле в точке  $A$  вносят вторичные источники высоко расположенных элементарных площадок. То есть вклад площадки  $dS_2$  больше вклада площадки  $dS_1$  (см. рис. 13.5).

Таким образом, при распространении радиоволны вдоль трассы она как бы «взлетает» над поверхностью Земли и «опускается» в точке приема (рис. 13.6). При этом очевидно, что параметры трассы не влияют существенно на величину поля в точке приема  $A$ . Исключение составляют участки поверхности вблизи антенн, поскольку они определяют общее ослабление волны.

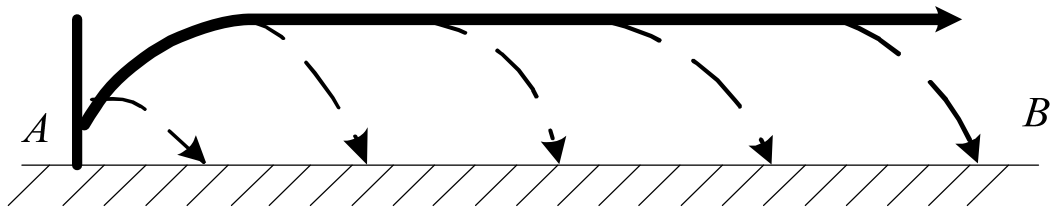


Рис. 13.6 Механизм распространения радиоволн при низко расположенных антеннах

Таким образом, концевые участки трассы, называемые взлетной и посадочной площадками, играют наиболее существенную роль в распространении земных радиоволн при низко расположенных антеннах. Поэтому для обеспечения уверенной радиосвязи при

низко расположенных антеннах важным является выбор места установки передающей и приемной антенн.

Как уже отмечалось выше, функция ослабления является комплексной величиной. Представим ее в виде

$$\dot{V}(r) = |V(r)|e^{j\psi(r)}.$$

Модуль ее определяет ослабление амплитуды поля. Выясним, что определяет фаза  $\psi(r)$  функции ослабления. Для ответа на этот вопрос запишем напряженность поля волны с полным фазовым множителем:

$$\dot{E}(r, t) = \frac{\sqrt{120PD}}{r} |V(r)| e^{j(\omega t - kr + \psi(r))}. \quad (13.15)$$

Определим фазовую скорость волны, приравняв нулю полный дифференциал фазы [3, 10]:

$$\omega \cdot dt - k \cdot dr + \frac{d\psi}{dr} \cdot dr = 0.$$

Отсюда получим

$$v_{\phi} = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k - d\psi/dr}. \quad (13.16)$$

Как следует из формулы (13.16), фазовая скорость волны определяется изменением фазы  $\psi$  с расстоянием. Анализ функции ослабления (13.12) показывает, что фаза  $\psi$  изменяется в начале трассы, а затем остается практически постоянной. Это означает, что фазовая скорость волны вблизи передающей антенны постепенно увеличивается и на некотором расстоянии от нее приближается к скорости света. Обратный процесс — замедление скорости волны — происходит вблизи приемной антенны. Волна как бы разгоняется вблизи передающей и замедляется вблизи приемной антенны, что подтверждает рассмотренный выше механизм распространения. Основную часть трассы волна проходит со скоростью света независимо от характера почвы, над которой распространяется. Этот вывод имеет решающее значение в радионавигации и радиопеленгации.



### 13.4. Распространение радиоволн при низко расположенных антеннах над неоднородной трассой

Реальная поверхность Земли в редких случаях является однородной. Чаще всего она представляет собой электрически неоднородную структуру сложной формы. Рассмотрим плоский участок земной поверхности с двумя почвами, отличающимися друг от друга диэлектрической проницаемостью и проводимостью (рис. 13.7).

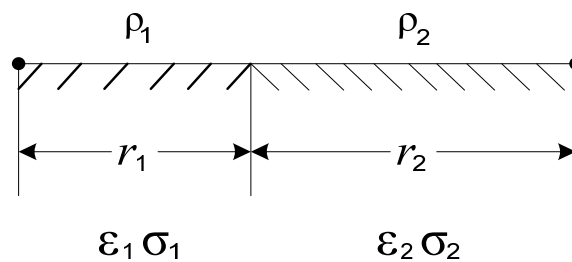


Рис. 13.7. Неоднородная радиотрасса

Определим множитель ослабления в точке приема  $A$ . Долгое время при вычислении множителя ослабления для неоднородной почвы пользовались приближенными методами. Эти методы основывались на том, что поглощение радиоволн при их распространении над каким-либо участком пропорционально длине участка с данной почвой и не зависит от его положения на трассе. Такой подход приводил к ошибкам в определении напряженности поля в точке приема, обусловленным тем, что в действительности радиоволны больше всего поглощаются концевыми участками трассы, прилегающими к антеннам. Оценка множителя ослабления для неоднородной трассы была проведена в работах Е.Л. Фейнберга. Он полагал, что модуль комплексной диэлектрической проницаемости каждой из почв много больше единицы, то есть применимы граничные условия Леонтовича. Для случая, когда электрические параметры почвы резко изменяются (например, суша – море), Фейнберг получил формулу

$$|V| = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\rho_1}{r_1} \frac{\rho_2}{r_2}} (r_1 + r_2)}. \quad (13.17)$$

Выражение (13.17) позволяет выявить своеобразный эффект, специфический при распространении радиоволн над поверхностью Земли: при распространении радиоволн над однородной почвой множитель ослабления всегда убывает с увеличением расстояния, над неоднородной почвой возможны отступления от этого правила.

Например, пусть участок, примыкающий к передатчику, обладает меньшей проводимостью, чем участок, примыкающий к приемнику ( $|\tilde{\epsilon}_1| < |\tilde{\epsilon}_2|$ ), а длины участков примерно одинаковы ( $r_1 \approx r_2$ ). В этом случае численное расстояние  $\rho_1$  будет больше численного расстояния  $\rho_2$ . Если при этом численные расстояния велики, то

$$\left| \frac{1}{\rho_1} \right| < \left| \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \right| < \left| \frac{1}{\rho_2} \right|. \quad (13.18)$$

При больших  $\rho_1$  множитель ослабления на первом участке определяется формулой

$$|V_1| = \frac{1}{2\rho_1}.$$

На втором участке множитель ослабления определяется формулой (13.12). В связи с этим при переходе на второй участок должен иметь место скачок напряженности поля вверх, поскольку множитель ослабления  $|V_1|$  оказывается значительно больше множителя ослабления  $|V_2|$ .

Типичный пример такого скачка напряженности поля наблюдается при переходе трассы с суши (плохо проводящая среда, вызывает сильное поглощение) на море (хорошо проводящая среда). Результаты экспериментальных измерений амплитуды поля подтверждают скачок при переходе через береговую линию (рис. 13.8).

Для трассы, состоящей из трех электрически неоднородных участков, при больших численных расстояниях  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  множитель ослабления определяется формулой, также полученной Е.Л. Фейнбергом:

$$|V| = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\rho_1}{r_1} \frac{\rho_3}{r_3}} (r_1 + r_2 + r_3)}. \quad (13.19)$$

Из формулы (13.19) следует, что поле в точке приема не зависит от среднего участка трассы, а определяется только свойствами концевых участков. Это обстоятельство подчеркивает роль взлетной и посадочной площадок.

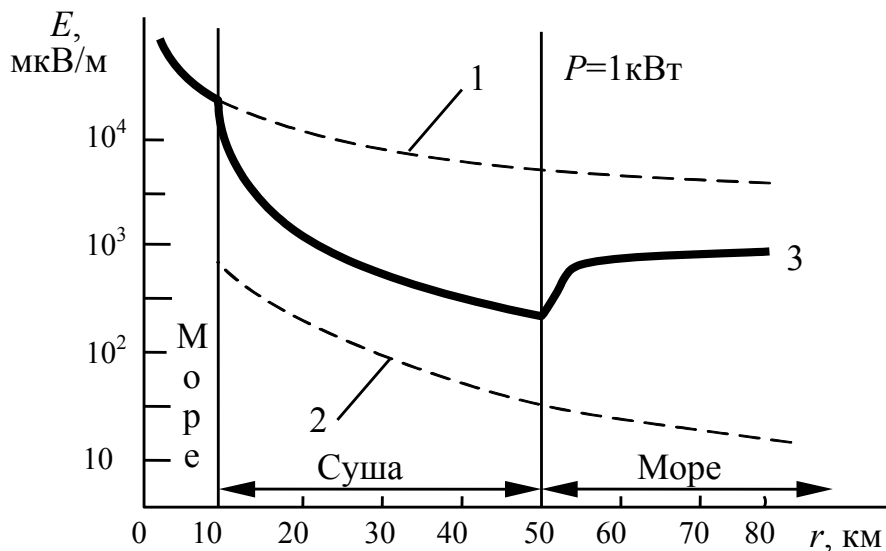


Рис. 13.8. Изменение напряженности поля на стыке двух разнородных трасс: 1 – однородная морская трасса; 2 – однородная сухопутная трасса; 3 – трасса «суша – море»

При распространении радиоволн над неоднородной трассой, кроме скачкообразного изменения амплитуды волны, может происходить изменение направления движения волны. Это явление получило название «береговая рефракция», поскольку наиболее ярко выражено на границе «суша – море». Для его объяснения обратимся к рис. 13.9.

Пусть передатчик находится в море (точка  $O$ ) на значительном удалении от берега. Приемник расположен на суше в точке  $A$

вблизи от береговой линии. Над морем волна распространяется со скоростью света. Пунктирная линия  $b-b$  изображает фазовый фронт волны, подходящей к береговой линии. Участки фронта волны, оказавшиеся над сушей, замедляются, в то время как над морем скорость остается прежней.

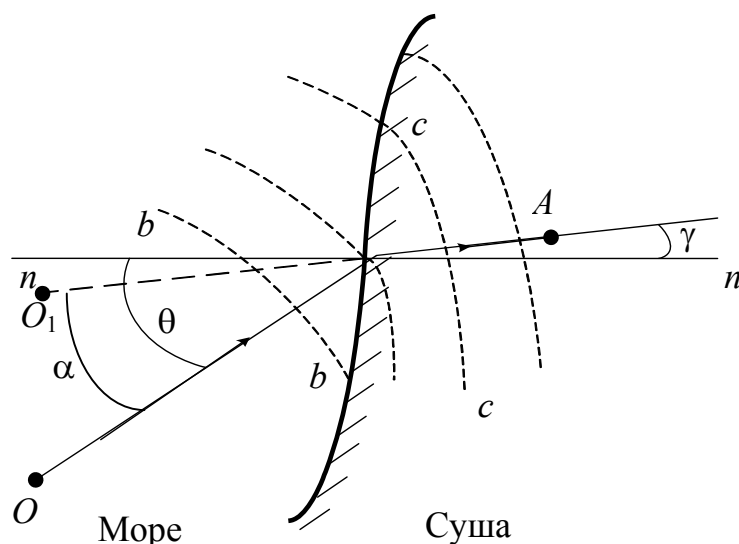


Рис. 13.9. К теории береговой рефракции

В результате после перехода через береговую линию наклон фазового фронта изменяется (линия  $c-c$ ). Фактически произошло преломление фазового фронта волны, причем угол преломления  $\gamma$  стал меньше угла падения  $\theta$ . Если в точке  $A$  расположен пеленгатор, определяющий угловое положение передатчика, то он определит его не в направлении точки  $O$ , а в направлении угла  $\gamma$  к линии нормали  $n-n$ , т.е. в направлении точки  $O_1$ . Угол  $\alpha = \theta - \gamma$  называется углом береговой рефракции и определяет ошибку пеленга. Если суша близка по свойствам к диэлектрику, то угол рефракции определяется выражением

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{\pi k \epsilon_r x_2}}, \quad (13.20)$$

где  $k = \omega / c$  — волновое число в свободном пространстве;  $\epsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость почвы;  $x_2$  — протяженность сухопутного участка трассы.

Из формулы (13.20) следует, что угол рефракции уменьшается с уменьшением угла падения  $\theta$  и увеличением расстояния  $x_2$ . Последнее можно объяснить тем, что в приемник, расположенный далеко от берега, попадает энергия из верхних слоев радиоволны, на которые переход «суша – море» оказывает слабое влияние. В связи с этим для уменьшения ошибки пеленга радиолокационные станции рекомендуется располагать дальше от береговой линии.

## Контрольные вопросы

1. Почему в диапазонах средних и длинных волн в качестве передающих антенн используют вертикальные несимметричные вибраторы? Какова при этом роль Земли?
2. Сформулируйте приближенные граничные условия Леонтовича. При каких обстоятельствах они применимы?
3. Как зависит структура поля над земной поверхностью от свойств почвы?
4. От чего зависит соотношение амплитуд вертикальной и горизонтальной составляющих напряженности электрического поля в волне, распространяющейся вдоль поверхности Земли?
5. Как объясняется сложный характер зависимости напряженности поля от расстояния в формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля? В каких случаях ею можно пользоваться?
6. Что такое взлетная и посадочная площадки? Как объясняется их существование?
7. Трасса между передающей и приемной антеннами частично проходит над озером, расположенным посередине трассы. Изобразите зависимость напряженности поля вдоль трассы.
8. Поясните суть явления береговой рефракции. Почему ошибка пеленга цели, вызванная береговой рефракцией, зависит от расстояния между береговой линией и точками расположения передатчика и приемника?

## **14. Тропосфера и ее влияние на распространение радиоволн**

### **14.1. Электрические параметры тропосферы**

С точки зрения распространения радиоволн атмосферу разделяют на три области: тропосферу (расстояние от поверхности земли 10–15 км), стратосферу (от 10–15 до 60 км) и ионосферу (от 50–60 примерно до 20000 км). В состав атмосферы входит молекулярный азот (78 % по объему), молекулярный кислород (21 % по объему) и другие газы (водород, аргон, CO<sub>2</sub>).

Высота нижнего слоя атмосферы — тропосферы — над полярными широтами 8–10 км, над экватором 16–18 км. В отличие от других слоев атмосферы — стратосферы и ионосферы — тропосфера содержит большое количество паров воды.

Тропосфера слабо поглощает солнечный свет и нагревается главным образом от поверхности Земли. Поэтому температура воздуха в ее пределах уменьшается с высотой. Обычно температура воздуха убывает на 5–6 °С на 1 км. Но иногда на небольших интервалах высот наблюдается местное возрастание температуры с высотой, называемое температурной инверсией.

Прекращением уменьшения температуры и характеризуется верхняя граница тропосферы. Выше этой границы, в стратосфере, температура с высотой возрастает и достигает максимума примерно на высоте 50 км. Нагрев стратосферы происходит из-за сильного поглощения ультрафиолетовых лучей Солнца озоном, содержащимся в этом слое в небольшом количестве.

Тропосфера и стратосфера составляют неионизированные слои атмосферы, поэтому закономерности распространения радиоволн в обоих слоях в ряде случаев одинаковы. Однако в тропосфере, благодаря значительно большей плотности воздуха и близости слоя к земле, метеорологические процессы проходят значительно интенсивнее, чем в стратосфере. Ввиду этого при изучении распространения радиоволн в неионизированной части атмосферы можно ограничиться изучением распространения радиоволн в тропосфере.

Характер распространения радиоволн в тропосфере определяется состоянием атмосферы и процессами, которые в ней происходят. Состояние атмосферы определяется следующими характеристиками: температурой  $T$ , влажностью (абсолютной влажностью)  $e$ , давлением  $p$ . Эти характеристики называются метеорологическими параметрами тропосферы.

Атмосфера состоит из смеси газов, в основном азота и кислорода. Каждый газ обладает диэлектрической проницаемостью и проводимостью. Во всех диапазонах, за исключением УКВ, проводимость газов практически равна нулю. В диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн сказывается дисперсия вещества и проводимость отличается от нуля.

В 1925 г. Международной комиссией по аэронавигации было введено понятие стандартной, или нормальной, тропосферы, которая характеризует среднее состояние тропосферы в умеренных широтах. Для нормальной тропосферы приняты следующие метеопараметры: на поверхности Земли  $p = 1013$  мбар,  $T = 288$  К, относительная влажность 60 %. С увеличением высоты на каждые 100 м давление уменьшается на 12 мбар, температура — на 0,55 градуса, относительная влажность остается постоянной. Высота нормальной тропосферы равна 11 км.

Для определения влияния метеорологических условий на характер распространения радиоволн нужно установить связь между электрическими (проводимость, диэлектрическая проницаемость) и метеорологическими (температура, влажность, давление) параметрами тропосферы. При прохождении электромагнитной волны через газ его молекулы поляризуются под действием электрического поля волны. Вектор поляризации определяется как дипольный момент единицы объема газа и пропорционален напряженности электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (14.1)$$

где  $\varepsilon_0$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость;  $\chi$  — электрическая восприимчивость вещества, связанная с относительной диэлектрической проницаемостью соотношением  $\chi = \varepsilon_r - 1$ .

Восприимчивость  $\chi$  зависит от абсолютной температуры  $T$ , давления  $p$  и, если молекулы не обладают постоянным дипольным моментом, то

$$\chi = \frac{ap}{T}. \quad (14.2)$$

Если каждая молекула обладает постоянным дипольным моментом, то

$$\chi = \frac{bp}{T^2}, \quad (14.3)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, определенные в результате многочисленных экспериментов.

Восприимчивость смеси газов подчиняется закону аддитивности, т.е. восприимчивость смеси газов равна сумме восприимчивостей отдельных газов.

Молекулы всех газов тропосферы, за исключением молекул водяного пара, не обладают постоянным электрическим дипольным моментом. Молекула же водяного пара обладает постоянной составляющей электрического дипольного момента, существующей и при отсутствии внешнего поля. Поэтому электрическая восприимчивость тропосферы определяется формулой

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{ap}{T} + \frac{be}{T^2}, \quad (14.4)$$

где  $p$  — суммарное давление всех газов воздуха, за исключением водяного пара;  $e$  — давление водяного пара.

С показателем преломления тропосферы  $n$  электрическая восприимчивость связана соотношением

$$\chi = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \approx 2(n - 1). \quad (14.5)$$

Так как показатель преломления воздуха мало отличается от единицы, то удобно ввести параметр «индекс преломления  $N$ », определив его как

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \quad (14.6)$$



Если в формулы (14.4), (14.5) подставить значения констант  $a$  и  $b$ , то для индекса преломления  $N$  получается соотношение

$$N = \frac{76,5}{T} \left( p + \frac{4810e}{T^2} \right), \quad (14.7)$$

где  $T$  — температура, К;  $p$  и  $e$  — давление, Па.

Если в формулу (14.7) подставить параметры нормальной тропосферы, то на поверхности Земли  $N = 325$  и  $dN/dh = -40 \text{ км}^{-1}$ .

В реальных условиях значения метеопараметров и индекса преломления могут значительно отличаться от принятых для нормальной тропосферы. В любом случае тропосфера является неоднородной средой, поскольку ее показатель преломления изменяется с высотой, а иногда и в горизонтальном направлении. Изменение показателя преломления с высотой приводит к искривлению траектории волны — рефракции. В диапазоне СВЧ начинает сказываться поглощение радиоволн в молекулах газов и рассеяние на капельках воды в гидрометеорах: дожде, тумане, снеге. Кроме того, в тропосфере всегда существуют мелкие неоднородности показателя преломления, которые приводят к рассеянию радиоволн.

Исследование совместного действия всех этих эффектов затруднительно, поэтому будем каждый эффект рассматривать в отдельности.

## 14.2. Рефракция радиоволн

### 14.2.1. Траектория волны в сферически слоистой среде

В разделах 11–13 мы рассматривали распространение радиоволн в однородной среде — вакууме, хотя и при наличии разных препятствий. Тропосфера и ионосфера являются принципиально отличными неоднородными средами, поскольку их электрические параметры зависят от координат. Строгое решение задачи о распространении радиоволн в таких средах достаточно сложно. Однако если учесть, что реальное изменение показателя преломления в тропосфере очень медленное, то решение можно упростить,

применив метод геометрической оптики. В нем распространение волны заменяется распространением лучей. Это можно обосновать тем, что при укорочении длины волны уменьшаются поперечные размеры области, существенной для распространения радиоволн, т.е. нескольких первых зон Френеля. В пределе для оптических волн данная область превращается в линию — луч. При этом сферические участки волновых поверхностей в пределах существенной области становятся все более плоскими, что позволяет пользоваться законами отражения и преломления для плоских волн — законами Снеллиуса и формулами Френеля для коэффициентов отражения и преломления. Плавное изменение показателя преломления позволяет также пренебречь отражением при переходе волны из одного слоя в другой и учитывать только искривление траектории, т.е. рефракцию.

Условие применимости геометрической оптики — малость изменения показателя преломления  $n$  на расстояниях порядка длины волны имеет вид

$$\left| \frac{dn}{dl} \right| \ll \frac{n^2}{\lambda}, \quad (14.8)$$

где  $\lambda$  — длина волны в вакууме.

Это условие выполняется в тропосфере для большинства диапазонов радиоволн.

Разобьем мысленно тропосферу на тонкие сферические слои, в пределах каждого из которых коэффициент преломления будем считать неизменным (рис. 14.1).

Пусть из точки  $A$  излучается волна, падающая под углом  $\theta_0$  на границу раздела слоев в точке  $B$ . При переходе во второй слой волна преломляется, причем, если коэффициент преломления убывает с высотой, угол преломления  $\psi_1$  оказывается больше угла падения  $\theta_0$ . На границе раздела второго, третьего и всех последующих слоев также происходит преломление радиоволны. В результате этого радиоволна движется по траектории, имеющей вид ломаной линии  $ABCD$ . Если толщину слоев уменьшить и перейти к плавному изменению коэффициента преломления, то ломаная  $ABCD$  в пределе бу-

дет стремиться к некоторой кривой. Таким образом, при прохождении волны в неоднородной среде ее траектория искривляется, т.е. происходит рефракция радиоволны.

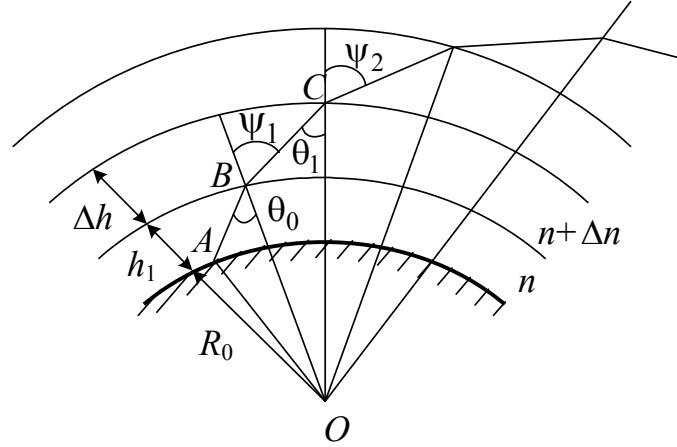


Рис. 14.1. Рефракция радиоволн в сферической слоистой тропосфере

Из треугольника  $BOC$  на основании теоремы синусов углов треугольника имеем

$$\frac{\sin \theta_1}{R_0 + h_1} = \frac{\sin \angle OBC}{R_0 + h_1 + \Delta h}. \quad (14.9)$$

На основании закона преломления

$$\sin \angle OBC = \sin \psi_1 = \frac{n}{n + \Delta n} \sin \theta_0.$$

Преобразуя выражение (14.9), получим уравнение траектории радиоволны в сферически слоистой тропосфере:

$$n \sin \theta_0 (R_0 + h_1) = (n + \Delta n) (R_0 + h_1 + \Delta h) \sin \theta_1. \quad (14.10)$$

Чем больше величина  $\Delta n$ , тем больше угол  $\theta_1$  отличается от угла  $\theta_0$  и тем больше траектория отходит от прямолинейной.

Если в равенстве (14.10) устремить  $R_0$  к бесконечности, то получим уравнение траектории волны в плоской тропосфере:

$$n \sin \theta_0 = (n + \Delta n) \sin \theta_1.$$

Таким образом, при распространении волны в плоской слоистой среде произведение коэффициента преломления слоя на синус угла падения этой волны на слой остается постоянным:

$$n \sin \theta = \text{const.} \quad (14.11)$$

Определим радиус кривизны траектории радиоволны для плоской тропосферы. На рис. 14.2 изображены две поверхности с коэффициентами преломления  $n$  и  $n+dn$ , отстоящие одна от другой по высоте на малый интервал  $dh$ . Волна, падающая на нижнюю поверхность под углом  $\theta$ , преломляется и падает на верхнюю поверхность под углом  $\theta + d\theta$ . На участке  $AB$  траектория волны представляется отрезком кривой с радиусом кривизны  $\rho$ .

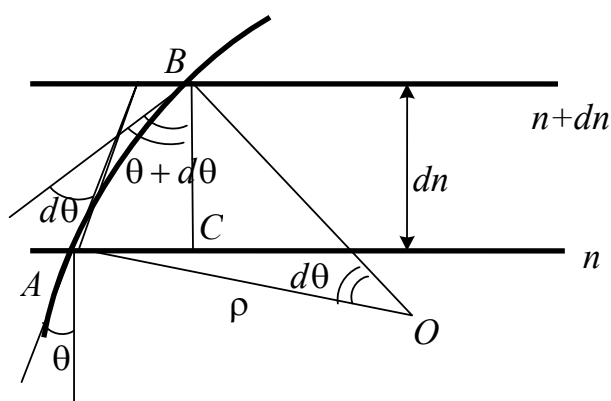


Рис. 14.2. К определению радиуса кривизны траектории волны в тропосфере

Радиусы  $OA$  и  $OB$  являются нормальными к кривой в точках  $A$  и  $B$ . Угол между касательными к кривой в точках  $A$  и  $B$  равен  $d\theta$ , следовательно, и угол  $AOB$  равен  $d\theta$ . Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{AB}{d\theta},$$

где  $AB$  — длина дуги.

Из треугольника  $OAB$  определим отрезок  $AB$ :

$$AB = \frac{dh}{\cos(\theta + d\theta)}.$$

Тогда

$$\rho = \frac{dh}{\cos(\theta + d\theta)d\theta} \approx \frac{dh}{\cos(\theta)d\theta}. \quad (14.12)$$

Возьмем полный дифференциал от уравнения траектории в плоской слоистой среде (14.11):

$$d(n \sin \theta) = dn \sin \theta + n \cos \theta d\theta = 0.$$

Выразим  $\cos \theta d\theta$  через  $n$  и  $dn$ :

$$\cos \theta d\theta = -\frac{dn}{n} \sin \theta. \quad (14.13)$$

Подставляя (14.13) в (14.12), получим

$$\rho = \frac{n}{-\frac{dn}{dh} \sin \theta}. \quad (14.14)$$

Как следует из выражения (14.14), наибольшее искривление испытывают пологие лучи, для которых  $\theta \approx 90^\circ$  и радиус кривизны минимален. Вертикально направленные лучи не искривляются.

Перейдем в формуле (14.14) к индексу преломления и запишем ее для пологих лучей. Отличием  $n$  от единицы практически можно пренебречь. Тогда

$$\rho = \frac{10^6}{-\frac{dN}{dh}}. \quad (14.15)$$

Формулы (14.14) и (14.15) справедливы и для сферической тропосферы, поскольку радиус кривизны определяется для небольшого отрезка траектории волны, на котором сферичность Земли не сказывается.

Для нормальной тропосферы радиус кривизны траектории волны согласно (14.15) составляет  $\rho \approx 4R_0 \approx 25000$  км, где  $R_0$  — радиус Земли. Если скорость убывания индекса преломления составит  $157 \text{ км}^{-1}$ , то радиус кривизны луча станет равным радиусу Земли. С этим случаем мы еще встретимся ниже.

## 14.2.2. Эквивалентный радиус Земли

Изложенные в разделах 12, 13 методы расчета напряженности поля земных радиоволн не учитывают влияние тропосферы и в них принимается прямолинейное распространение волн. Для учета влияния тропосферной рефракции удобно заменить распространение волны по криволинейной траектории на распространение по прямолинейной траектории, но над Землей с другим, эквивалентным радиусом. Понятием эквивалентного радиуса Земли можно пользоваться в том случае, когда коэффициент преломления  $n$  меняется с высотой по линейному закону, т.е.  $dn/dh = \text{const}$ .

Рассмотрим уравнение траектории волны в сферически слоистой тропосфере (14.10)

$$n \sin \theta_0 (R_0 + h_1) = (n + \Delta n)(R_0 + h_1 + \Delta h) \sin \theta.$$

Если коэффициент преломления  $n$  меняется с высотой по линейному закону, это уравнение можно переписать в виде

$$\left( n + \frac{dn}{dh} \Delta h \right) (R_0 + h_1 + \Delta h) \sin \theta = n \sin \theta_0 (R_0 + h_1),$$

или

$$\left( 1 + \frac{\Delta h}{n} \frac{dn}{dh} \right) \left( 1 + \frac{\Delta h}{R_0 + h_1} \right) \sin \theta = \sin \theta_0.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая членами второго порядка малости, а также учитывая, что  $n \approx 1$ ,  $R_0 + h_1 \approx R_0$ , получим

$$\left[ 1 + \Delta h \left( \frac{dn}{dh} + \frac{1}{R_0} \right) \right] \sin \theta = \sin \theta_0. \quad (14.16)$$

Если в уравнении (14.16) положить  $dn/dh = 0$ , то оно определит прямолинейную траекторию волны при отсутствии рефракции

$$\left( 1 + \frac{\Delta h}{R_0} \right) \sin \theta = \sin \theta_0. \quad (14.17)$$

Из сравнения формул (14.16) и (14.17) видно, что тропосферу можно рассматривать как однородную среду, с неизменным по высоте значением  $n$ , если вместо реального радиуса Земли ввести эквивалентный радиус  $R_3$ , определяемый соотношением

$$\frac{1}{R_3} = \frac{dn}{dh} + \frac{1}{R_0},$$

откуда, переходя к индексу преломления, получим

$$R_3 = \frac{R_0}{1 + R_0 \frac{dN}{dh} \cdot 10^{-6}}. \quad (14.18)$$

Используя эквивалентный радиус Земли, картину распространения радиоволн по криволинейной траектории с радиусом кривизны  $\rho$  вблизи реальной земной поверхности (рис. 14.3,а) можно заменить картиной распространения волн по прямолинейной траектории вблизи поверхности Земли с измененным радиусом  $R_3$  (рис. 14.3,б). При этом высота траекторий в обоих случаях будет одинаковой.

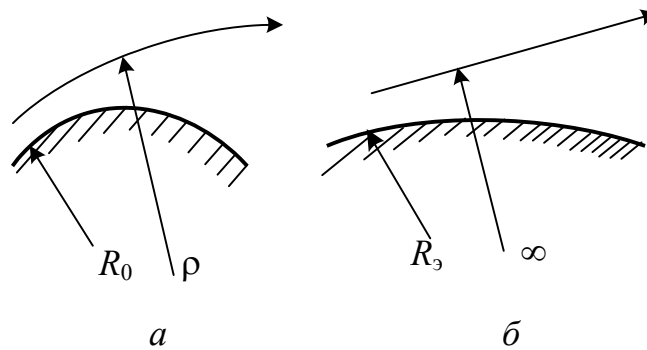


Рис. 14.3. Определение эквивалентного радиуса Земли

Эквивалентный радиус Земли  $R_3$  можно выразить и через радиус кривизны луча  $\rho$ :

$$R_3 = \frac{R_0}{1 - \frac{R_0}{\rho}}. \quad (14.19)$$

Для нормальной тропосферы  $\rho = 4R_0$ , следовательно, эквивалентный радиус Земли

$$R_3 \approx \frac{4}{3}R_0. \quad (14.20)$$

При учете влияния тропосферы на распространение земных радиоволн обычно ограничиваются случаем нормальной тропосферы и заменяют реальный радиус Земли на эквивалентный (14.20) при вычислении приведенных высот антенн и в дифракционных формулах.

### 14.2.3. Виды тропосферной рефракции

Как было показано выше, радиус кривизны луча  $\rho$ , а следовательно, и рефракция радиоволн в тропосфере определяются градиентом показателя преломления по высоте. В зависимости от знака изменения индекса преломления с высотой  $dN/dh$  тропосферную рефракцию разделяют на положительную или отрицательную (рис. 14.4).

При  $dN/dh > 0$  индекс преломления возрастает с высотой и траектория волны обращена выпуклостью вниз ( $\rho < 0$ ). Такой вид рефракции называют отрицательной тропосферной рефракцией (рис. 14.4,а).

При  $dN/dh < 0$  индекс преломления убывает с высотой и траектория волны обращена выпуклостью вверх ( $\rho \square 0$ ). Такой вид рефракции называют положительной тропосферной рефракцией (рис. 14.4,б).

При положительной тропосферной рефракции различают три частных случая.

1. Нормальная тропосферная рефракция, когда

$$\frac{dN}{dh} = -40 \text{ км}^{-1}; \quad \rho = 4R_0; \quad R_3 = \frac{4}{3}R_0.$$

Напряженность поля в точке приема больше, чем при отсутствии рефракции.



2. Критическая тропосферная рефракция, когда

$$\frac{dN}{dh} = -\frac{10^6}{R_0} = -157 \text{ км}^{-1}, \quad \rho = R_0; \quad R_3 = \infty.$$

В этом случае радиус кривизны луча равен радиусу Земли и волна распространяется вдоль земной поверхности. Эквивалентная Земля становится плоской (рис. 14.4,в).

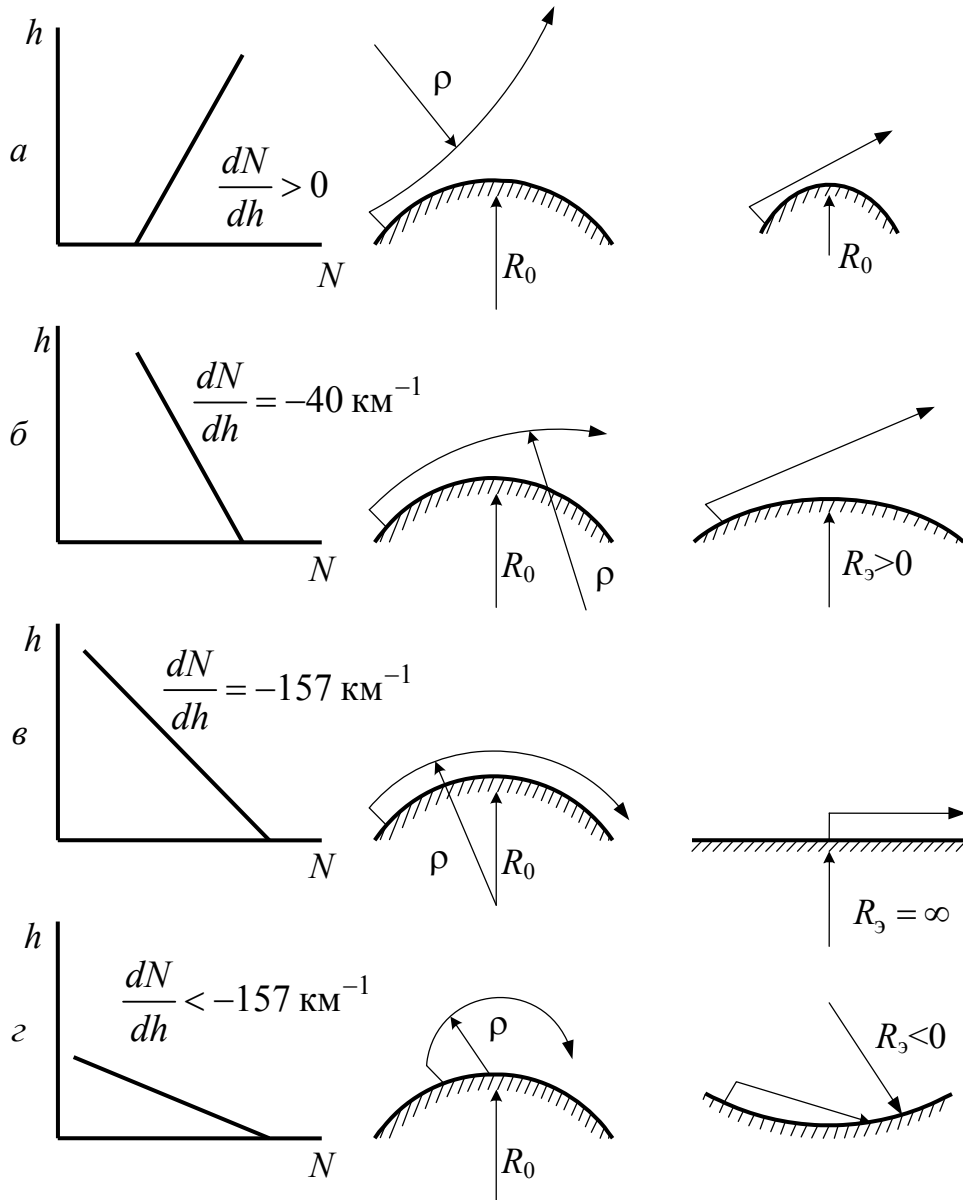


Рис. 14.4. Виды тропосферной рефракции

### 3. Сверхрефракция, когда

$$\frac{dN}{dh} < -157 \text{ км}^{-1}, \rho < R_0; \quad R_3 < 0.$$

При сверхрефракции радиус кривизны меньше радиуса Земли, наступает полное внутреннее отражение волны в тропосфере, и она возвращается на Землю. Эквивалентный радиус Земли  $R_3$  оказывается отрицательным (рис. 14.4,з). После отражения от Земли волна снова уходит в тропосферу и может далее распространяться путем последовательного отражения от тропосферы и Земли на большие расстояния.

Как следует из выражения для индекса преломления (14.7), производная  $dN/dh$  определяется скоростью изменения температуры, давления и влажности с высотой, т.е. погодными условиями. Отрицательная рефракция встречается довольно редко. Как правило, имеет место положительная рефракция. Повышенная влажность, сырая погода, характерная для циклонов, приводят к снижению скорости убывания индекса преломления с высотой и уменьшению рефракции. Напротив, сухая, ясная погода приводит к усилению рефракции.

#### 14.2.4. Распространение радиоволн в условиях сверхрефракции

Как уже отмечалось, режимом сверхрефракции может быть охвачена область тропосферы, в которой выполняется условие

$$\frac{dN}{dh} < -157 \text{ км}^{-1},$$

т.е. показатель преломления с высотой резко уменьшается. Такое убывание  $N$  с высотой наиболее часто связано с температурной инверсией, когда температура воздуха не уменьшается, как обычно, а возрастает с высотой. В этих областях индекс преломления  $N$  резко убывает с высотой (рис. 14.5).

Температурная инверсия возникает по следующим причинам:

1) горизонтальный перенос воздушных масс, когда теплый воздух суши, например, оказывается над холодным воздухом, прилежащим к поверхности моря;

2) охлаждение поверхности Земли. После захода солнца в первую очередь охлаждаются прилегающие к ней слои воздуха. Такое явление характерно для засушливых районов и пустынь;

3) сжатие воздушных масс. Температурная инверсия возникает за счет выделения тепла при сжатии воздушных масс при антициклонах.

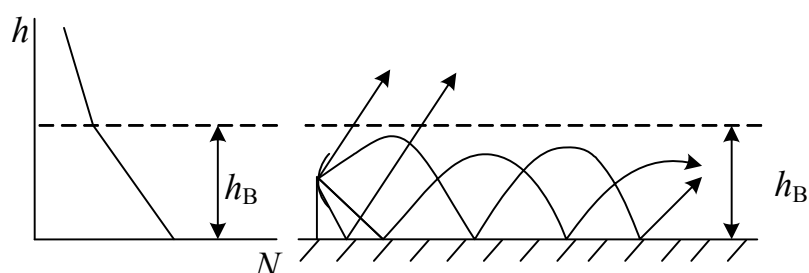


Рис. 14.5. Изменение показателя преломления тропосферы с высотой и распространение УКВ в условиях тропосферного волновода

Когда область сверхрефракции занимает значительное расстояние над Земной поверхностью, радиоволны УКВ-диапазона могут быть приняты на весьма больших расстояниях от передатчика, много больших расстояния прямой видимости. Радиоволны в этом случае распространяются путем последовательного отражения в тропосфере и от поверхности Земли.

Это явление аналогично распространению волн в волноводе. Поэтому инверсионный слой, в котором возникает такая передача энергии, называют тропосферным волноводом. По аналогии с металлическим волноводом тропосферный волновод имеет критическую длину волны, которая связана с его высотой соотношением

$$\lambda_{\text{кр}} = 8 \cdot 10^{-4} h_{\text{В}}^{3/2}, \quad (14.21)$$

где  $h_{\text{В}}$  — высота тропосферного волновода.

Волны, длиннее  $\lambda_{кр}$ , не захватываются волноводом и испытывают только дополнительное искривление на его границе.

Эксперименты по измерению показателя преломления в тропосфере показывают, что высота тропосферных волноводов редко превышает 200 м, и, следовательно, в тропосферных волноводах возможно распространение в основном сантиметровых и дециметровых волн.

Значение сверхрефракции для дальней радиосвязи невелико, так как само явление температурной инверсии носит нерегулярный характер и не может обеспечить устойчивую связь на большие расстояния. Однако образование тропосферного волновода может являться причиной помех при работе радиолокационных станций, которые не могут обнаружить самолет, находящийся выше тропосферного волновода. Заметим, что сверхрефракция оптических волн была известна человечеству с древнейших времен как явление миража.

### **14.3. Распространение радиоволн путем рассеяния на неоднородностях тропосферы**

Дальнее распространение радиоволн УКВ-диапазона имеет место и при отсутствии сверхрефракции. Основной причиной заметных уровней напряженности электрического поля за пределами горизонта, превышающих величину напряженности дифракционного поля, является рассеяние радиоволн неоднородностями тропосферы. Эти неоднородности непрерывно возникают в тропосфере за счет постоянно существующего турбулентного (вихревого) движения воздуха. Величина неоднородностей, как правило, очень мала, изменение индекса преломления  $\Delta N$  составляет всего несколько единиц при индексе преломления  $N = 325$  для нормальной тропосферы.

Схематически тропосферная линия связи за счет рассеяния на неоднородностях изображена на рис. 14.6.

Допустим, что неоднородности сосредоточены в объеме  $V$ . Все неоднородности в этом объеме являются источниками рассеянного излучения. Рассмотрим одну из точек объема. Пусть в точке  $Q$  передающая антенна создает плотность потока мощности, равную

$$\Pi_Q = \frac{P_1 D_1}{4\pi r_1^2},$$

где  $D_1$  — коэффициент направленного действия передающей антенны;  $P_1$  — мощность излучения передающей антенны;  $r_1$  — расстояние от передающей антенны до точки  $Q$  объема рассеяния.

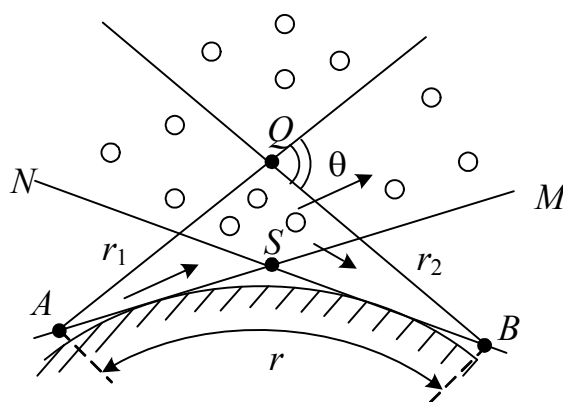


Рис. 14.6. Тропосферная линия связи за счет рассеяния на неоднородностях тропосферы

Обозначим через  $S(\theta)$  удельную эффективную площадь рассеяния единицы объема тропосферы с центром в точке  $Q$ . Эффективной площадью рассеяния называется величина (имеющая размерность площади), которая, будучи умноженной на плотность потока мощности первичного излучения (в месте расположения рассеивающего тела) и разделенной на  $4\pi r_2^2$ , дает плотность потока мощности рассеянного излучения в точке приема. Удельная эффективная площадь рассеяния является функцией угла рассеяния  $\theta$ .

Тогда мощность вторичного излучения, рассеянного элементом объема  $dV$  с центром в точке  $Q$ , будет определяться формулой

$$dP_Q = \frac{P_1 D_1 S(\theta)}{4\pi r_1^2} dV. \quad (14.22)$$

Плотность потока мощности переизлученной волны от объема  $dV$  в месте расположения приемной антенны будет

$$d\Pi_B = \frac{dP_Q}{4\pi r_2^2},$$

где  $r_2$  — расстояние от рассеивающего тела до приемника.

Мощность, извлекаемая приемной антенной, имеет вид

$$dP_2 = d\Pi_B S_{2\text{эфф}}, \quad (14.23)$$

где  $S_{2\text{эфф}}$  — эффективная площадь приемной антенны, связанная с коэффициентом направленного действия  $D_2$  соотношением (11.9).

Подставляя в соотношение (14.23) значения  $d\Pi$  и  $S_{2\text{эфф}}$ , найдем мощность, создаваемую единицей объема рассеяния в месте расположения приемной антенны:

$$dP_2 = \frac{P_1 D_1 D_2 \lambda^2 \delta(\theta) dV}{16\pi^2 r_1^2 r_2^2}.$$

Для определения мощности, создаваемой переизлучением всех неоднородностей объема  $V$ , проинтегрируем это выражение по всему объему рассеяния:

$$P_2 = \frac{P_1 D_1 D_2 \lambda^2}{64^3 \pi} \int_V \frac{S(\theta) dV}{r_1^2 r_2^2}. \quad (14.24)$$

Формула (14.24) показывает, что для расчета мощности радиоволны в приемной антенне, во-первых, необходимо знать конфигурацию объема  $V$  тропосферы, участвующего в создании рассеянного излучения. Рассеивающий объем обычно определяют как пространство, ограниченное пересечением главных лепестков диаграмм направленности передающей и приемной антенн. Во-вторых, необходимо знать выражение удельной эффективной площади рассеяния. Эту величину получают при статистическом рассмотрении процесса рассеяния радиоволн на неоднородностях тропосферы и выражают через среднеквадратичное значение флуктуаций диэлектрической проницаемости тропосферы.

Воспользоваться формулой (14.24), как правило, не удастся из-за недостаточной изученности функции  $S(\theta)$ . Кроме того, рассмотренная модель дальнего тропосферного распространения (ДТР), основанная на существовании мелких неоднородностей в тропосфере, не является единственной. Существуют теории, учитывающие также отражения радиоволн в тропосфере от слоистых образований. Поэтому при расчетах поля при ДТР используются в основном экспериментальные данные.

На рис. 14.7 приведен пример записи зависимости напряженности поля  $E$  в точке приема от времени  $t$ .

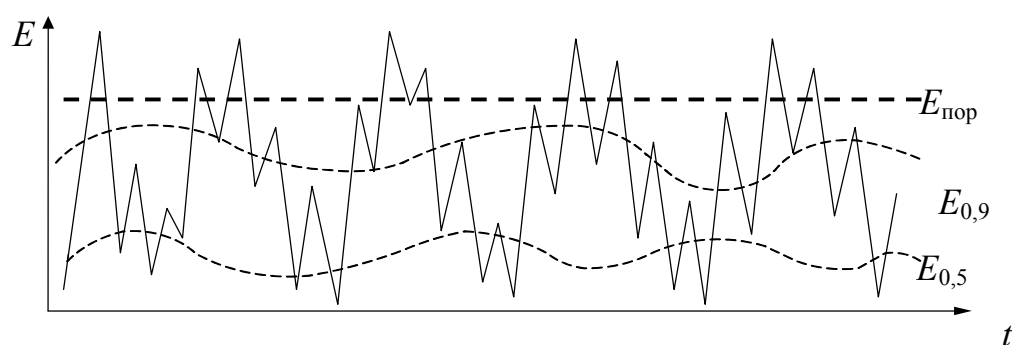


Рис. 14.7. Запись напряженности поля сигнала, подверженного замираниям

Из рисунка видно, что напряженность поля испытывает случайные изменения своего уровня, которые называются замираниями. По характеру и длительности замирания можно четко разделить на два типа: быстрые и медленные. Длительность быстрых замираний составляет от долей секунд до нескольких минут. Медленные замирания имеют длительность от часов до суток и более. Установлено, что причиной быстрых замираний является интерференция в точке приема большого количества волн, рассеиваемых отдельными частями объема  $V$ . Амплитуды этих волн можно считать постоянными, а их фазы изменяются случайным образом в пределах от  $0$  до  $2\pi$  из-за турбулентного движения воздуха в рассеивающем объеме  $V$ . Медленные замирания связаны с изменением метеоусловий на трассе распространения, например выпадением осадков, изменением давления, температуры и т.п.

Пунктирными линиями на рис.14.7 обозначены уровни напряженности поля, которые превышаются сигналом в течение определенного времени наблюдения. Так, уровень  $E_{0,5}$  превышает в течение 50 % времени наблюдения. Такой уровень называется медианным. Уровень  $E_{0,9}$  превышает в течение 90 % времени наблюдения. Очевидно, что можно провести уровни сигналов, превышаемые для любой заданной доли времени наблюдения.

На рис. 14.7 нанесена также линия постоянного уровня  $E_{\text{пор}}$ , которая соответствует пороговой чувствительности приемного устройства, включающего и приемную антенну.

Очевидно, что величина напряженности поля в точке приема зависит от параметров передающего устройства и трассы, а  $E_{\text{пор}}$  определяется только параметрами приемного устройства. При изменении мощности передатчика кривая  $E(t)$  смещается относительно уровня  $E_{\text{пор}}$ . Если мощность передатчика такова, что  $E_{\text{пор}} = E_{0,5}$ , то связь будет осуществляться только в течение 50 % времени связи и ее надежность составит 50 %. Для увеличения надежности связи до 90 % необходимо увеличивать мощность передатчика так, чтобы против уровня  $E_{\text{пор}}$  пришелся уровень  $E_{0,9}$ .

Увеличение мощности передатчика в децибелах будет равно разности уровней  $E_{\text{мед}} - E_{0,9}$ , выраженной также в децибелах, поскольку изменение мощности передатчика и соответствующее изменение напряженности поля в точке приема выражаются в децибелах одним и тем же числом.

Зависимость вероятности превышения уровня сигнала от его значения в относительных единицах называется функцией распределения случайной величины. Обычно уровни сигнала определяют в относительных единицах по отношению к медианному уровню и выражают в децибелах:

$$E_{0,9} = 20 \lg \frac{E_{0,9}}{E_{0,5}}.$$

Таким образом, чтобы определить мощность передатчика, обеспечивающего требуемую надежность связи, необходимо знать функцию распределения напряженности поля и величину мощности передатчика при вероятности связи 50 %.



Увеличение мощности передатчика является не единственным и далеко не оптимальным способом повышения надежности связи. Для борьбы с быстрыми замираниями и получения более устойчивого сигнала используют также прием на две или четыре антенны. Их разносят в направлении, перпендикулярном трассе, на расстояние  $(70-100)\lambda$ . Принятые отдельными антеннами сигналы детектируют и затем складывают. Очевидно, чем больше расстояние между антеннами, тем больше некоррелированность замираний. Аналогичный эффект дает использование для передачи сообщений нескольких частот (разнесение по частоте).

Радиолинии тропосферного рассеяния используют в основном там, где нельзя установить ретрансляторы радиорелейных линий, — над проливами, в малонаселенных районах. Протяженность таких радиолиний составляет 300–600 км. Их основной недостаток — большие потери энергии при распространении радиоволн. Это предъявляет повышенные требования к аппаратуре, в частности требуется применение передатчиков большой мощности (10–100 кВт) и антенн с большим КНД. При этом для антенн с КНД больше 40 дБ наблюдается эффект «потери усиления антенн», а именно увеличение КНД антенн не приводит к увеличению мощности в нагрузке приемной антенны в соответствии с формулой (14.24). Это объясняется тем, что при увеличении КНД происходит сужение диаграмм направленности и, как следствие, уменьшение рассеиваемого объема  $V$ .

К недостаткам таких линий связи следует отнести и невозможность передачи широкой полосы частот без искажения.

#### **14.4. Ослабление радиоволн в тропосфере**

При распространении в тропосфере радиоволны испытывают дополнительное ослабление по отношению к ослаблению поля в свободном пространстве. Это ослабление называется затуханием. Причинами затухания волн в тропосфере являются: 1) поглощение радиоволн гидрометеорами и газами атмосферы; 2) рассеяние радиоволн гидрометеорами — дождем, снегом, градом, туманом.

Прежде чем анализировать конкретные причины затухания в тропосфере, уточним единицы его измерения.

Множитель ослабления в тропосфере определяют по формуле

$$V = e^{\Gamma'' r}, \quad (14.25)$$

где  $\Gamma''$  — коэффициент затухания, Нп/м, или по формуле

$$V = 10^{\frac{\Gamma'' r}{20}}, \quad (14.26)$$

где  $\Gamma''$  — коэффициент затухания, дБ/м, причем 1 Нп = 8,68 дБ.

Коэффициент затухания удобно выражать в децибелах на километр, так как  $V[\text{дБ}] = \Gamma''[\text{дБ/км}]r[\text{км}]$ .

Поглощение газами атмосферы и парами воды происходит на уровне молекул и носит резонансный характер. Молекулы воды имеют постоянные электрические моменты, а молекулы кислорода — постоянные магнитные. Если частота волны совпадет с собственными частотами этих молекул, то наступают резонансные явления и энергия волны переходит во внутреннюю энергию молекул. Это обуславливает селективное поглощение волн определенной частоты (рис. 14.8). Резонансные линии поглощения всех других газов расположены вне диапазона радиоволн.

Из рис.14.8 видно, что в молекулах  $\text{H}_2\text{O}$  имеется четко выраженный резонанс на длине волны 1,35 см ( $\Gamma'' = 0,2$  дБ/км) и возрастание затухания при  $\lambda < 0,2$  см. В молекулах  $\text{O}_2$  происходит резонанс при  $\lambda = 0,5$  см ( $\Gamma'' \approx 13$  дБ/км) и при  $\lambda = 0,25$  см ( $\Gamma'' \approx 3$  дБ/км). По причине большого селективного поглощения радиоволны с длиной волны, меньшей 1,5 см, не используются для передачи сигналов в тропосфере.

В гидрометеорах оба фактора затухания — поглощение и рассеяние — проявляются одновременно и поэтому их не разделяют (рис. 14.9).

Наиболее существенным препятствием гидрометеоры (капельки дождя, тумана, снежинки) являются для радиоволн короче 10 см. Более длинные волны существенного поглощения в гидрометеорах не испытывают (см. рис. 14.9). Диэлектрическая проницаемость снега и града ( $\epsilon_r = 1$  и 5) гораздо меньше, чем жидкой фазы воды ( $\epsilon_r = 80$ ). Ослабление в граде составляет несколько процентов от

ослабления в дожде такой же интенсивности. Ослабление в сухом снеге также мало [4].

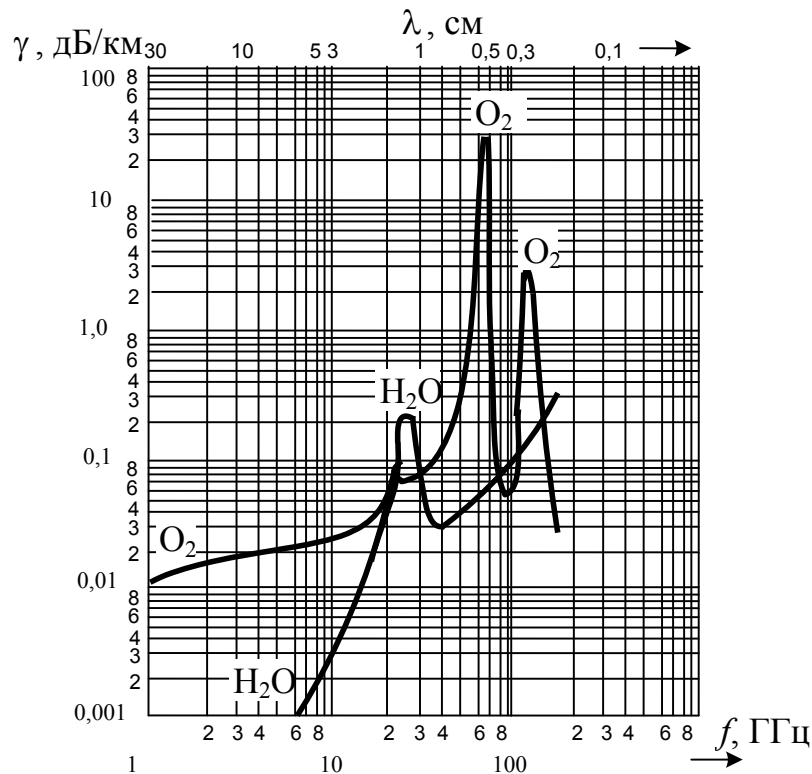


Рис. 14.8. Зависимость коэффициента поглощения от частоты в молекулах кислорода и паров воды

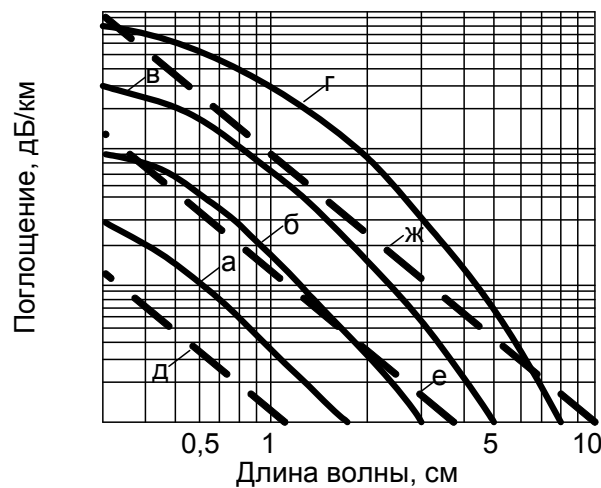


Рис. 14.9. Зависимость коэффициента поглощения за счет рассеяния на гидрометеорах от длины волны: *а* – морозящий дождь 0,25 мм/ч; *б* – легкий дождь 1мм/ч; *в* – умеренный дождь 4 мм/ч; *г* – сильный дождь 15 мм/ч; *д* – слабый туман; *е* – средний туман; *ж* – сильный туман

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение рефракции радиоволн. Сравните рефракцию с дифракцией по проявлению и причинам, их вызывающих.
2. С какими параметрами воздушной среды и как связан показатель преломления тропосферы?
3. В чем состоит приближение геометрической оптики при анализе распространения радиоволн в тропосфере? При каких условиях можно пользоваться этим приближением?
4. Что такое эквивалентный радиус Земли, чему он равен и при каких условиях им можно пользоваться?
5. От каких параметров тропосферы зависит радиус кривизны траектории волны?
6. Дайте определение нормальной тропосферы и нормальной тропосферной рефракции. Как учитывается нормальная рефракция при определении напряженности поля радиоволн?
7. Какая погода способствует увеличению дальности распространения радиоволн в тропосфере?
8. При каких условиях возможно возникновение тропосферного волновода?
9. Каков механизм дальнего тропосферного распространения радиоволн? На каких частотах работают линии связи, использующие явление ДТР?
10. Каковы причины быстрых и медленных замираний напряженности поля при ДТР? Какие меры обеспечения качественной связи применяются в линиях связи, использующих ДТР?
11. Какие диапазоны волн интенсивно поглощаются и рассеиваются в тропосфере?

## 15. Ионосфера и ее влияние на распространение радиоволн

### 15.1. Состав и строение ионосферы

Ионосферой называют область атмосферы, расположенную на высотах более 50–60 км над поверхностью Земли. За верхнюю границу ионосферы принимают область высот 15–20 тыс. км, где плотность газа близка к плотности газа в межпланетном пространстве. Область атмосферы, существенно влияющая на условия распространения радиоволн, ограничена меньшими высотами, порядка 1–1,5 тыс. км. С высот, больших 50 км, газ в атмосфере ионизирован и содержит большое число свободных электронов и положительных ионов. Процесс ионизации состоит в том, что под действием квантов солнечного излучения от нейтральных молекул отрываются электроны, а молекулы превращаются в положительно заряженные ионы. Условно этот процесс можно выразить соотношением



где  $N_2$  — молекула азота, из которого в основном состоит атмосфера на высотах 100–300 км;  $h\nu$  — квант энергии солнечного излучения;  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка;  $\nu$  — частота излучения;  $N_2^+$  — положительный ион азота;  $e$  — заряд электрона.

Конечно, в ионосфере одновременно с ионизацией происходит и обратный процесс — рекомбинация, т.е. воссоединение положительного иона с электроном и образование нейтральной молекулы. С восходом Солнца ионизация преобладает над рекомбинацией, и электронная концентрация растет; с заходом Солнца в результате рекомбинации электронная концентрация уменьшается (рис. 15.1).

Для того чтобы ионизация была возможна, энергия кванта должна быть, по крайней мере, не меньше работы выхода для молекулы азота. Анализ значений работ выхода газов, составляющих ионосферу, показывает, что ионизацию может совершить лишь ультрафиолетовое излучение Солнца с длиной волны меньше

1000 Å и более короткое — рентгеновское. Ионизацию создают также метеориты, вторгающиеся в земную атмосферу. Образование ионосферы на определенной высоте над Землей объясняется тем, что энергия ионизирующего излучения уменьшается на пути к Земле за счет ионизации и на поверхности Земли она очень ослаблена. Таким образом, ионосфера защищает Землю от опасного для жизни ультрафиолетового и рентгеновского излучения.

В результате экспериментальных исследований получены полные сведения о строении ионосферы. Установлено, что на высоте 250–400 км имеется основной максимум ионизации. Выше и ниже этого максимума электронная плотность убывает. Нижнюю область называют внутренней, верхнюю — внешней ионосферой.

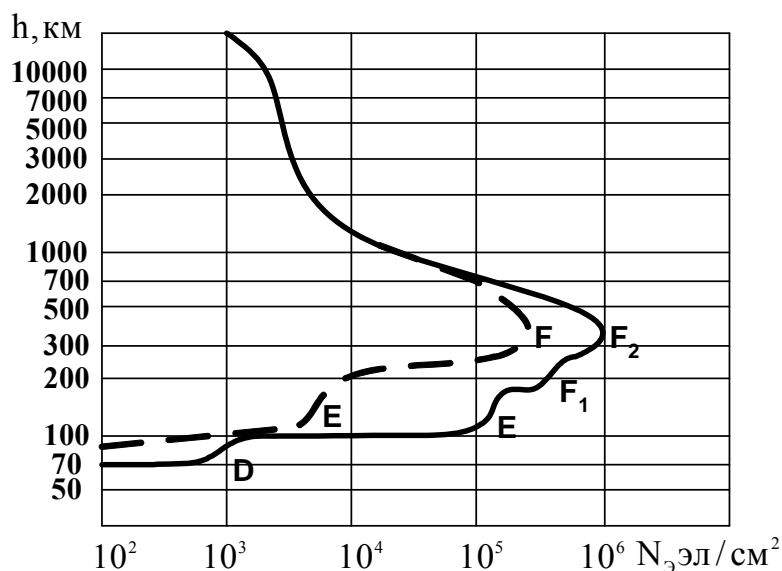


Рис. 15.1. Распределение электронной плотности ионосферы:  
 - - - - - ночью ; ——— днем

Во внутренней ионосфере существует несколько неярко выраженных максимумов концентрации электронов. Они называются слоями и обозначаются символами D, E, F. Ионосферные слои характеризуются следующими параметрами: плотностью электронов в максимуме ионизации; высотой нижней границы, полутолщиной слоя (высотой от нижней границы до максимума ионизации); числом столкновений электронов с нейтральными молекулами. Данные о слоях ионосферы представлены в табл. 15.1.

Таблица 15.1

## Характеристики слоев ионосферы

Название слоя	Высота, км	$N_e$ , эл/см <sup>3</sup>	Число соударений $\nu$ , 1/с	Условия существования
D	60–80	$10^3$ – $10^4$	$10^7$	Днем
E	100	$1,5 \cdot 10^5$ –днем $5 \cdot 10^3$ –ночью	$10^5$	Всегда
F (F <sub>1</sub> )	200–230	$(2-4) \cdot 10^5$	$10^4$	Днем, летом
F (F <sub>2</sub> )	300–400	$(4-9) \cdot 10^5$	$10^3$ – $10^4$	Днем и ночью, летом
F <sub>2</sub>	220–240 300–330	$(0,6-2) \cdot 10^6$ $2,5 \cdot 10^5$	$10^3$ – $10^4$	Днем, зимой Ночью, зимой

Из данных таблицы следует, что слой D — нижний слой — существует лишь днем и зимой и летом. Ночью свободные электроны в нем полностью рекомбинируют с ионами. Слой E существует всегда, хотя ночью, с заходом Солнца, электронная концентрация в нем уменьшается. Слой E является самым устойчивым ионосферным слоем, и процессы в нем хорошо описываются современной теорией. Слой F зимой ведет себя подобно слою E, но электронная концентрация в нем гораздо больше. Летом слой F распадается на два слоя — F<sub>1</sub> и F<sub>2</sub>, причем слой F<sub>1</sub> существует только днем. Необходимо иметь в виду, что число электронов даже в максимумах электронной концентрации гораздо меньше числа нейтральных молекул, концентрация которых в области слоя D составляет  $10^{15}$  см<sup>-3</sup> и уменьшается до  $10^{10}$  см<sup>-3</sup> в слое F<sub>2</sub>. Этим объясняется такое большое число соударений электронов с нейтральными молекулами за одну секунду ( $\nu$ ).

В заключение описания основных физических свойств ионосферы следует отметить, что гипотеза о существовании ионизированной области в верхних слоях атмосферы высказывалась задолго до изобретения радио. Свое косвенное подтверждение она получила в 20-х годах XX века, когда была установлена радиосвязь на коротких волнах между Америкой и Европой. Теория дифракции не могла это объяснить из-за сравнительно малой длины волны. Однако прямое доказательство существования ионосферы было получено только в 30-х годах после вертикального зондирования ионосферы радиоимпульсом и приема на Земле отраженного сигнала. Для

проведения таких исследований в разных районах Земли было построено много ионосферных станций. Одна из первых в СССР такая станция была построена в г. Томске при Томском государственном университете. Поскольку сначала было неизвестно общее число ионосферных слоев, то им присваивали названия не с первой буквы, а с некоторым запасом. Первым был открыт слой E, а ниже его оказался лишь один слой D. По данным ионосферных станций можно определить значения максимальной электронной концентрации в каждом слое. Конечно, эти данные были уточнены с началом полетов искусственных спутников Земли.

Существование ионосферы оказывает определяющее влияние на распространение радиоволн всех диапазонов, кроме УКВ, но и в нем ионосфера влияет на космическую связь, связь со спутниками, радиоастрономию и т.п.

## 15.2. Электрические параметры ионосферы

Наличие в верхних слоях атмосферы кроме нейтральных молекул свободных электронов и ионов определяет электрические параметры ионосферы. В целом ионосфера является электрически нейтральной средой, поскольку число положительных и отрицательных частиц в ней одинаково. В физике такой ионизированный газ называется плазмой. Рассмотрим распространение плоской монохроматической волны в плазме, считая ее однородной.

При прохождении радиоволны через плазму, в данном случае ионосферу, положительные ионы и свободные электроны начинают двигаться упорядоченно в такт с изменением поля волны. Движущиеся в ионосфере заряды можно рассматривать как некоторый конвекционный ток. Плотность конвекционного тока электронов определяется концентрацией электронов в газе  $N_e$  и скоростью их движения  $\bar{V}$ :

$$\bar{\delta}_{\text{эл}} = eN_e\bar{V}, \quad (15.2)$$

где  $e$  — заряд электрона.



В этом уравнении неизвестна скорость движения электронов  $\bar{V}$ . Определим ее, используя уравнение движения электрона

$$m \frac{dV}{dt} + mvV = eE, \quad (15.3)$$

где  $m$  — масса электрона;  $v$  — число столкновений электронов с ионами и молекулами в единицу времени;  $eE$  — сила, действующая на электрон со стороны электрического поля волны.

Поскольку векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{V}$  параллельны, знаки векторов в формуле (15.3) опускаем.

Величина  $mvV$  характеризует изменение количества движения электронов при соударениях за единицу времени и имеет смысл силы трения.

Решение уравнения (15.3) ищем в виде

$$V = Ae^{j\omega t}, \quad (15.4)$$

где  $\omega$  — круговая частота электромагнитной волны.

В результате подстановки (15.4) в (15.3) получим

$$V = \frac{eE}{m(v + j\omega)},$$

и выражение для конвекционного тока электронов преобразуется к виду

$$\delta_{\text{эл}} = \frac{N_e e^2 E}{m(j\omega + v)} = \frac{N_e e^2 E}{m(\omega^2 + v^2)} (v - j\omega). \quad (15.5)$$

Очевидно, что конвекционный ток положительных ионов будет определяться таким же выражением, только параметры  $m$ ,  $e$  и  $v$  будут относиться к иону. Поскольку масса иона во много раз больше массы электрона, то величина тока ионов будет во столько же раз меньше тока электронов и им можно пренебречь.

Представим плазму как вакуум, в котором находятся только заряженные частицы. Присутствием нейтральных молекул можно пренебречь, так как даже в тропосфере, где плотность воздуха гораздо больше, показатель преломления отличается от единицы на

миллионные доли. Таким образом, кроме конвекционного тока в ионосфере будет существовать также ток смещения в вакууме

$$\delta_{\text{см}} = j\omega\varepsilon_0 E \quad (15.6)$$

и полный ток составит

$$\delta = \delta_{\text{см}} + \delta_{\text{эл}} = j\omega\varepsilon_0 E \left( 1 - \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m (\nu^2 + \omega^2)} \right) + \frac{N_e e^2 \nu}{m (\nu^2 + \omega^2)} E. \quad (15.7)$$

В формуле (15.7) разделены вещественная и мнимая части.

Известно [7, 10, 11], что в любом веществе полный ток может быть представлен суммой токов проводимости и смещения:

$$\delta = \delta_{\text{пр}} + \delta_{\text{см}} = \sigma E + j\omega\varepsilon_0 \varepsilon_r E. \quad (15.8)$$

Сравнивая выражения (15.7) и (15.8), получим формулы для проводимости и относительной диэлектрической проницаемости ионосферы:

$$\sigma = \frac{N_e e^2 \nu}{m (\nu^2 + \omega^2)}; \quad (15.9)$$

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m (\nu^2 + \omega^2)}. \quad (15.10)$$

Формулам (15.9) и (15.10) можно придать более удобный вид, если подставить численные значения входящих в них констант ( $e$ ,  $m$ ,  $\varepsilon_0$ ):

$$\sigma = 2,82 \cdot 10^{-8} \frac{N_e \nu}{\nu^2 + \omega^2}; \quad (15.11)$$

$$\varepsilon_r = 1 - 3190 \frac{N_e}{\nu^2 + \omega^2}. \quad (5.12)$$

Если частота  $\omega$  много больше числа соударений ( $\omega \gg \nu$ ), то формулы (15.11) и (15.12) упрощаются:

$$\sigma = 2,82 \cdot 10^{-2} \frac{N_e \nu}{\omega^2}; \quad (15.13)$$

$$\varepsilon_r = 1 - 80,8 \frac{N_e}{f^2}. \quad (15.14)$$

В формулах (15.13) и (15.14) электронная концентрация выражена в электронах на кубический сантиметр, а частота — в килогерцах.

Из последних соотношений видно, что  $\varepsilon_r$  и  $\sigma$  зависят от частоты. Следовательно, ионосфера является диспергирующей средой. Частота, при которой показатель преломления плазмы обращается в нуль, называется плазменной частотой или частотой Ленгмюра:

$$f_0 = \sqrt{80,8 N_e}. \quad (15.15)$$

Соударения электрона с нейтральными молекулами при этом не учитываются.

Используя соотношение для плазменной частоты, запишем выражение для показателя преломления плазмы:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{80,8 N_e}{f^2}}. \quad (15.16)$$

Формула (15.16) имеет основополагающее значение при рассмотрении распространения радиоволн в ионосфере, хотя в ней не учтены соударения электрона с нейтральными молекулами. Однако для большинства диапазонов частот, как следует из табл. 15.1, выполняется условие  $\omega \gg \gamma$  и поэтому учет столкновений вносит незначительные поправки.

Основные особенности распространения радиоволн в реальной ионосфере можно объяснить, полагая в первом приближении, что концентрация электронов в ионосфере, а следовательно, и ее плазменная частота зависят только от высоты над поверхностью Земли и не зависят от широты и долготы места.

Изменение диэлектрической проницаемости в ионосфере существенно отличается от изменения этого параметра в тропосфере. Показатель преломления в тропосфере близок к единице и меняется

с высотой незначительно. В ионосфере, как видно из выражения (15.16), при частотах радиоволны, меньших плазменной частоты ( $f < f_0$ ), относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  оказывается меньше нуля, а показатель преломления — мнимой величиной:

$$n = -j\sqrt{|\epsilon_r|}.$$

Отсюда следует, что при  $f < f_0$  электромагнитные колебания в ионосфере не распространяются и затухают при увеличении расстояния  $r$  по экспоненциальному закону. Нетрудно заметить, что выражение (15.16) совпадает с формулой для показателя преломления в волноводах без учета в нем потерь, так что плазменной частоте соответствует критическая частота в волноводе. Очевидно, что все особенности полей в волноводах, изучаемые в курсе электродинамики, переносятся на ионосферу. Отличие между ними состоит в том, что показатель преломления волновода характеризует его в целом, а в ионосфере он изменяется по высоте из-за изменения электронной концентрации.

### 15.3. Отражение и преломление радиоволн в ионосфере

В отличие от однородной плазмы, рассмотренной в предыдущем подразделе, распределение электронной концентрации в реальной ионосфере имеет сложный характер, зависящий от высоты, времени суток и года, земных координат. Таким образом, ионосфера является неоднородной средой, точнее, неоднородной плазмой. Анализ основных особенностей распространения радиоволн в ионосфере проводят для идеализированной модели в виде простого слоя, распределение электронной концентрации в котором приведено на рис. 15.2. В пределах полутолщины слоя  $B$  оно может быть представлено параболическим законом [3]

$$N_e(h) = N_{em} \left[ 1 - \left( \frac{h - h_m}{B} \right)^2 \right]. \quad (15.17)$$

Как и в тропосфере, анализ распространения радиоволн в ионосфере проводится в приближении геометрической оптики. Будем пренебрегать потерями в ионосфере. Будем также считать Землю и ионосферу плоскими, делая в окончательных выводах поправки на их сферичность. Изменение электронной концентрации с высотой приводит согласно соотношению (15.16) к изменению показателя преломления и искривлению траектории, т.е. к рефракции волны. Основные формулы, описывающие рефракцию радиоволн, остаются такими же, как и в тропосфере, но зависимость  $n(h)$  выражена гораздо сильнее.

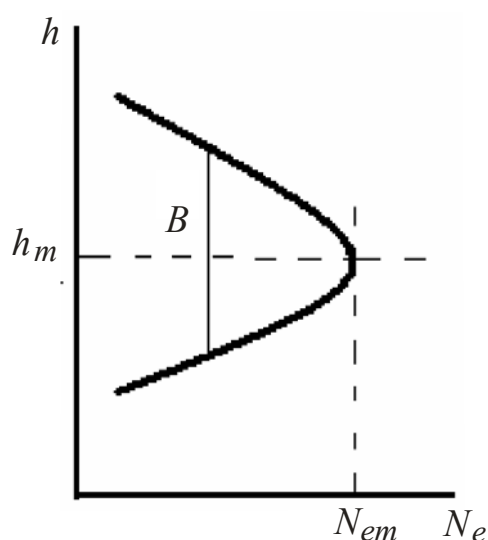


Рис. 15.2. Распределение электронной концентрации по высоте в простом слое

В качестве исходных соотношений будем использовать (15.16), (14.10) и (14.13), подчеркивая в них зависимость параметров ионосферы от высоты. Тогда показатель преломления на разных высотах  $h$  в простом слое будет определяться формулой

$$n(h) = \sqrt{1 - \frac{80,8N_e(h)}{f^2}}. \quad (15.18)$$

Уравнение траектории волны имеет вид

$$n(h) \sin \theta(h) = n_0 \sin \theta_0, \quad (15.19)$$

где  $n_0$  и  $\theta_0$  — значения показателя преломления и угла падения на нижней границе простого слоя.

Можно принять, что на нижней границе  $n_0 = 1$ .

Радиус кривизны луча на разных высотах  $h$

$$\rho(h) = \frac{n(h)}{-\frac{\partial n}{\partial h} \sin \theta(h)}. \quad (15.20)$$

Вычисляя производные

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{40,4}{nf^2} \frac{dN_e}{dh}, \quad \frac{dN_e}{dh} = \frac{2N_{em}}{B^2} (h_m - h)$$

и подставляя их в равенство (15.20), окончательно для радиуса кривизны луча получим выражение

$$\rho(h) = \frac{n(h)^3 f^2 B^2}{80,8 N_{em} (h_m - h) \sin \theta_0}. \quad (15.21)$$

Остановимся ниже на следующих вопросах для модели простого слоя:

- условие отражения вертикально направленной волны;
- условие отражения наклонно направленной волны;
- траектория радиоволн в простом слое;
- время распространения радиоволн в простом слое.

**Условие отражения вертикально направленной волны.**

В простом слое плазменная частота (15.15) изменяется с высотой вместе с изменением электронной концентрации. Максимальное значение плазменной частоты в ионосферном слое называется его критической частотой. Очевидно, что критическую частоту слоя можно определить как плазменную частоту максимума ионизации

$$f_{кр} = \sqrt{80,8 N_{em}}. \quad (15.22)$$

Рассмотрим распространение вертикально направленной волны в простом слое в зависимости от соотношения частоты волны и критической частоты слоя. При этом возможны три случая (рис. 15.3).

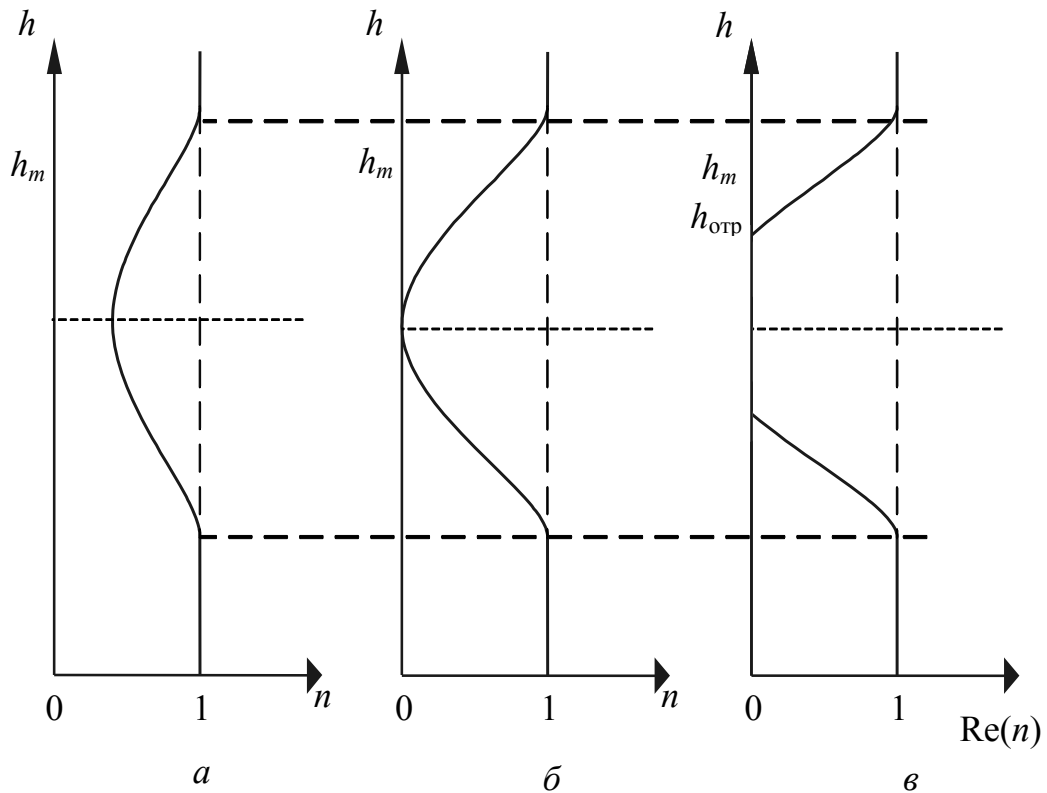


Рис. 15.3. Зависимость  $n(h)$  для вертикально направленной волны:  
 $a - f_1 > f_{кр}$ ,  $б - f_2 = f_{кр}$ ,  $в - f_3 < f_{кр}$

На частоте  $f_1 > f_{кр}$  (рис. 15.3,а) показатель преломления нигде не обращается в нуль ( $n(h) > 0$ ) и волна проходит через слой, лишь испытывая изменение скорости. На частоте  $f_2 = f_{кр}$  (рис. 15.3,б) показатель преломления в точке максимума электронной концентрации равен нулю ( $n(h_m) = 0$ ). При приближении к этой точке скорость движения энергии волны (групповая скорость) замедляется до нуля, распространение волны вверх прекращается и она поворачивает вниз. Будем называть этот процесс отражением волны, хотя, конечно, он отличается от классического отражения волны от резкой границы раздела двух сред.

На частоте  $f_3 < f_{кр}$  (рис. 15.3,в) показатель преломления обращается в нуль в двух точках по высоте и волна отражается в нижней из них. Между этими точками показатель преломления — мнимая величина. Чем ниже частота волны  $f$ , тем ниже оказывается высота первой точки отражения.

Формула (15.22) для критической частоты простого слоя позволяет определить критические частоты реальных ионосферных слоев. Так, согласно табл. 15.1:

$$\begin{aligned} \text{для слоя D} & \text{ — } N_{em} = 10^4 \text{ эл/см}^3, & f_{\text{крD}} = \sqrt{80,8 \cdot 10^4} = 900 \text{ кГц}; \\ \text{для слоя E} & \text{ — } N_{em} = 10^4 \text{ эл/см}^3, & f_{\text{крE}} = 3,5 \text{ ГГц}; \\ \text{для слоя F}_1 & \text{ — } N_{em} = 10^4 \text{ эл/см}^3, & f_{\text{крF}_1} = 5,5 \text{ ГГц}; \\ \text{для слоя F}_2 & \text{ — } N_{em} = 10^4 \text{ эл/см}^3, & f_{\text{крF}_2} = 12 \text{ ГГц}. \end{aligned}$$

**Условие отражения наклонно направленной волны.** Из уравнения луча (15.19) следует, что с продвижением волны вглубь простого слоя при  $h < h_m$  угол падения  $\theta$  увеличивается (поскольку  $n$  уменьшается), а при  $h > h_m$  — уменьшается. Об этом же свидетельствует анализ радиуса кривизны луча (см. формулу (15.20)). Из формулы (15.20) следует, что при  $h < h_m$  радиус кривизны  $\rho > 0$ , при  $h > h_m$   $\rho < 0$ . Таким образом, ниже  $h_m$  траектория волны обращена выпуклостью от Земли, а выше  $h_m$  — выпуклостью к Земле. Если при этом в какой-либо точке угол падения станет равным  $90^\circ$  ( $\sin \theta = 1$ ), то в ней произойдет поворот волны к Земле, то есть отражение волны. Очевидно, что отражение волны может произойти там, где  $\rho > 0$ , т.е. ниже максимума ионизации. Из уравнения траектории волны (15.20) следует, что условием отражения наклонного луча является выполнение равенства

$$n(h_{\text{отр}}) = \sin \theta_0. \quad (15.23)$$

Таким образом, отражение наклонного луча в ионосфере происходит на высоте, при которой показатель преломления  $n(h)$  равен синусу начального угла падения на ионосферу  $\theta_0$ . Возведем выражение (15.23) в квадрат и, используя равенство (15.18), придадим ему вид

$$1 - \frac{80,8N_e(h_{\text{отр}})}{f^2} = \sin^2 \theta_0 \quad \text{или} \quad \frac{80,8N_e(h_{\text{отр}})}{f^2} = \cos^2 \theta_0.$$

Величина  $\sqrt{80,8N_e(h_{\text{отр}})} = f_0(h_{\text{отр}})$  определяет частоту волны, отражающуюся на высоте  $h_{\text{отр}}$  при вертикальном падении, а



$f = f_{\theta}(h_{\text{отр}})$  — частоту волны, отражающуюся на той же высоте при наклонном падении под углом  $\theta_0$ . Опуская индекс «отр» в обозначении высоты, представим последнее соотношение в виде

$$f_{\theta}(h) = f_0(h) \sec \theta_0, \quad (15.24)$$

где  $\sec \theta_0 = 1/\cos \theta_0$ .

Это соотношение называется законом секанса и играет важную роль в теории распространения радиоволн в ионосфере. Оно связывает частоты вертикальной и наклонной волн, отражающихся от одной и той же области ионосферы.

Поскольку при изменении угла  $\theta_0$  от 0 до  $90^\circ$  функция  $\sec \theta_0$  изменяется от 1 до  $\infty$ , то согласно этому закону от ионосферы должны отражаться радиоволны сколь угодно высоких частот. В действительности максимальное значение угла  $\theta_{0m}$  ограничивается сферичностью Земли. Из простых геометрических соотношений следует, что максимальный угол падения на нижнюю границу ионосферы  $\theta_{0m}$  определяется соотношением

$$\sin \theta_{0m} = \frac{R_0}{R_0 + h_0}, \quad (15.25)$$

где  $R_0$  — радиус Земли;  $h_0$  — высота нижней границы ионосферного слоя.

Для  $R_0 = 6370$  км и  $h_0 = 200$  км угол  $\theta_{0m} = 72^\circ 40'$  и  $\sec \theta_{0m} \approx 4$ , если учесть нормальную рефракцию в тропосфере и ввести эквивалентный радиус Земли, равный 8493 км, то  $\theta_{0m}$  станет равным  $75^\circ$ , а  $\sec \theta_{0m} \approx 3,86$ .

Если закон секанса применить к максимуму электронной концентрации, а углу  $\theta_0$  придать его максимальное значение  $\theta_{0m}$ , то формула (15.24) определит максимальную частоту волны, еще отражающейся от данного слоя ионосферы. Эта частота называется максимальной частотой ионосферного слоя. Можно считать, что максимальная частота превышает критическую частоту в среднем в 4 раза. Для слоя  $F_2$  максимальные частоты волн, которые еще могут отражаться от ионосферы, составляют от 30 до 40 МГц.

**Траектория радиоволн в простом слое.** Траектория волны при отражении от ионосферы полностью определяется уравнением луча (15.19). Для упрощения анализа траектории удобнее использовать соотношения (15.21) и (15.23), которые определяют точку поворота волны и радиус кривизны луча. В точке отражения наклонного луча ( $h_{отр}$ ) выполняется соотношение (15.23) и радиус кривизны в ней определяется выражением

$$\rho(h_{отр}) = \frac{f^2 B^2 (\sin \theta_0)^2}{80,8 N_{em} (h_m - h_{отр})}. \quad (15.26)$$

Рассмотрим траекторию волны в простом слое для двух случаев:

- 1) постоянный начальный угол падения  $\theta_0$  и изменяющаяся частота радиоволны  $f$ ;
- 2) постоянная частота  $f$  и изменяющийся угол падения  $\theta_0$ .

Траектория волн для первого случая показана на рис. 15.4.

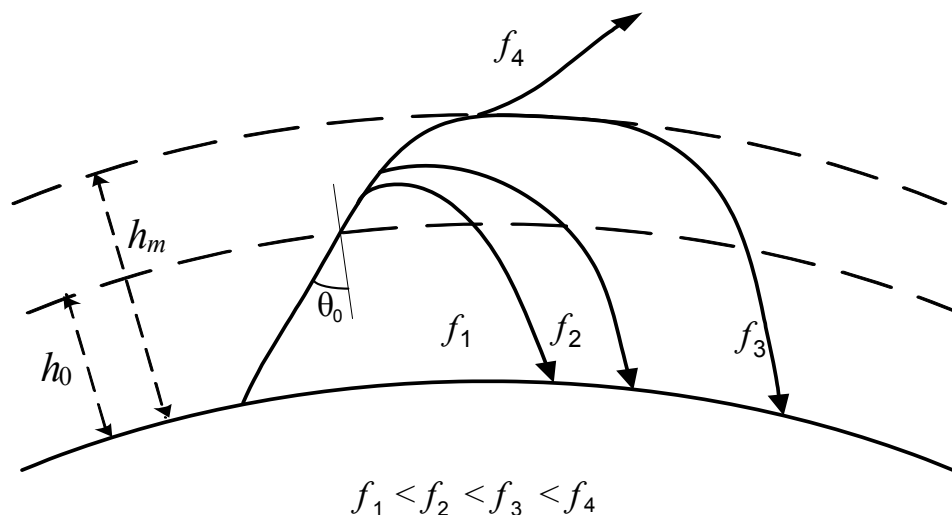


Рис. 15.4. Траектории волн в простом слое на разных частотах при постоянном угле падения  $\theta_0$

По мере увеличения частоты увеличивается высота точки отражения и радиус кривизны в ней согласно выражению (15.26). Расстояние до падения отраженной волны на Землю (длина радиолинии) увеличивается. По мере увеличения частоты точка отраже-

ния приближается к максимуму электронной концентрации ( $h_m$ ) и радиус кривизны, как следует из (15.26), стремится к бесконечности. Эта траектория (частота  $f_3$  на рис. 15.4) называется лучом Педерсена. При дальнейшем увеличении частоты волна проходит слой без отражения (частота  $f_4$  на рис. 15.4).

Рассмотрим второй случай. В частотных диапазонах, использующих отражение от ионосферы, применяются, как правило, антенны с широкой диаграммой направленности в вертикальной плоскости.

В зависимости от соотношения между частотой волны и частотами ионосферного слоя ( $f_{кр}, f_{max}$ ) возможны следующие ситуации.

$f \leq f_{кр}$ . Радиоволны отражаются при всех углах падения, отражается и направленная вертикально вверх волна (рис. 15.5,а). По мере увеличения угла падения высота точки отражения уменьшается, а радиус кривизны увеличивается. В реальных условиях такие траектории имеют длинные, средние волны и длинноволновую часть КВ.

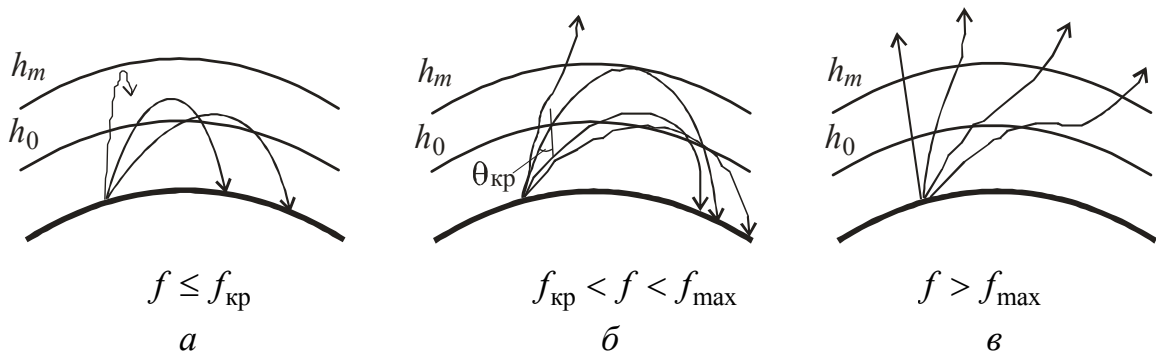


Рис. 15.5. Траектории волн в ионосфере в зависимости от угла  $\theta_0$

$f_{кр} < f < f_{max}$ . В этом случае существует угол падения  $\theta_{кр}$ , при котором волна еще отражается от максимума ионизации (рис. 15.5,б). Дальнейшее уменьшение угла падения приводит к тому, что радиоволна проходит через простой слой без отражения. Эту частоту выше мы определили как максимальную для угла  $\theta_{кр}$ . При этом опять может возникнуть луч Педерсена, поскольку радиус кривизны в точке отражения стремится к бесконечности. При

приближении к критическому углу со стороны углов  $\theta > \theta_{кр}$  отраженный луч сначала приближается к передатчику, а вблизи критического угла удаляется и переходит в луч Педерсена, дальность радиолинии для которого может достигать до 7000 км. Таким образом, в этом случае вокруг антенны существует область, в которую ионосферная волна не попадает, — зона молчания. Очевидно, что с увеличением частоты радиус зоны молчания ( $R_{ЗМ}$ ) увеличивается, а с увеличением электронной концентрации — уменьшается. Справедливо и обратное утверждение: для каждой длины радиолинии существует максимальная частота, еще отражающаяся от данного ионосферного слоя, которая называется максимально применимой частотой (МПЧ). Подобная ситуация характерна для коротких волн, отражающихся от слоев  $F_1$  и  $F_2$ .

$f > f_{max}$ . Если частота больше максимальной, то условие отражения не выполняется для всех реальных углов падения ( $\theta < \theta_m$ ) и волна проходит через ионосферный слой, испытывая в нем искривление траектории, т.е. преломляется (рис. 15.5,в). Наибольшее искривление испытывают пологие лучи, вертикальный луч не искривляется. Этому соответствует зависимость радиуса кривизны от угла падения в формуле (15.21). Такие траектории характерны для диапазона УКВ. С увеличением частоты искривление траектории волны уменьшается.

## 15.4. Поглощение радиоволн в ионосфере

Поглощение радиоволн в ионосфере происходит из-за столкновения электронов с нейтральными молекулами. Под действием электрического поля волны электроны разгоняются и приобретают энергию, которую передают молекулам при соударениях. За счет этого увеличивается хаотическое тепловое движение молекул и повышается температура газа, составляющего ионосферу. Формально наличие потерь энергии волны в ионосфере проявляется в том, что ее проводимость отличается от нуля. Известно, что коэффициент поглощения  $\Gamma''$  в веществе выражается формулой

$$\Gamma'' = k \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta} \right)}, \quad (15.27)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в свободном пространстве;  $\lambda$  — длина волны в нем;  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{60\lambda\sigma}{\varepsilon_r}$  — тангенс угла потерь.

Выясним зависимость коэффициента поглощения от частоты. Для этого рассмотрим два случая — низких и высоких частот. На низких частотах можно считать, что  $60\lambda\sigma \gg \varepsilon_r$  и  $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$ . Пренебрегая в формуле (15.27) единицами по сравнению с  $\operatorname{tg} \Delta$ , получим для этого случая

$$\Gamma'' \approx k \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \Delta}{2}} = \sqrt{\frac{30\sigma}{\lambda}}. \quad (15.28)$$

Из формулы (15.11) для проводимости ионосферы следует, что на низких частотах при  $\omega \ll \nu$   $\sigma \approx 2,82 \cdot 10^{-8} \frac{N_e}{\nu}$  и не зависит от частоты. Таким образом, на низких частотах коэффициент поглощения пропорционален  $1/\sqrt{\lambda}$  или  $\sqrt{f}$ .

Аналогичные рассуждения для высоких частот, когда  $\omega \gg \nu$  и  $\operatorname{tg} \Delta \ll 1$ , приводят к выражению

$$\Gamma'' \approx \frac{k \operatorname{tg} \Delta}{2} = \frac{30\pi\sigma}{\varepsilon_r} \approx \frac{30\pi}{\varepsilon_r} \cdot 2,82 \cdot 10^{-8} \frac{\nu}{\omega^2}. \quad (15.29)$$

Таким образом, на низких частотах поглощение растет с ростом частоты как  $\sqrt{f}$ , а на высоких — падает как  $1/f^2$ . Очевидно, на промежуточных частотах существует частота с максимумом поглощения. Более строгий анализ показывает, что максимальное поглощение будет на частоте, близкой к числу соударений, т.е. при  $f \approx \nu$ .

Этому можно дать следующее физическое объяснение. На низких частотах период колебаний много больше времени свободного пробега электрона между соударениями, равного  $1/\nu$ . Электрон не успевает набрать достаточно энергии между соударениями. На высоких частотах, когда период колебаний много меньше времени

свободного пробега, электрон успевает несколько раз обменяться энергией с волной, прежде чем потеряет энергию при соударении.

Зависимость поглощения от частоты в ионосфере играет важную роль в объяснении особенностей распространения средних и коротких волн.

## 15.5. Влияние постоянного магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере

Постоянное магнитное поле Земли, напряженность которого составляет  $H_0 \approx 40$  А/м, качественно и количественно меняет свойства ионосферы. Причина этого состоит в наличии в ионосфере свободных зарядов — электронов и ионов. В присутствии постоянного магнитного поля на них действует еще одна сила — сила Лоренца

$$\bar{F}_L = q[\bar{V} \cdot \bar{B}_0], \quad (15.30)$$

где  $q$  — заряд частицы;  $V$  — ее скорость;  $B_0 = \mu_0 H_0$  — магнитная индукция поля Земли.

Рассмотрим физическую картину явлений, возникающих при действии постоянного магнитного поля на движущиеся заряды. Пусть вначале электромагнитная волна отсутствует. Электроны и ионы находятся в хаотическом движении. При этом на них действует сила Лоренца, изменяющая только направление скорости движущихся зарядов, но не ее величину. В результате частицы будут двигаться по окружностям вокруг вектора  $\bar{H}_0$ , радиусы которых определяются из равенства силы Лоренца и центробежной силы:

$$qV_n B_0 = \frac{mV_n^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{mV_n}{qB_0},$$

где  $V_n$  — составляющая скорости, перпендикулярная вектору  $\bar{H}_0$ .

Определим далее период и частоту вращения заряженной частицы вокруг вектора  $\vec{H}_0$ :

$$T = \frac{2\pi R}{V_n} = \frac{2\pi m}{qB_0}, \quad f_M = \frac{1}{T} = \frac{q\mu_0 H_0}{2\pi m}. \quad (15.31)$$

Формулы (15.31) интересны тем, что период и частота вращения не зависят от величины и начального направления скорости  $\vec{V}$ . В случае параллельных векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{H}_0$  сила Лоренца равна нулю и частица движется по прямой параллельно вектору  $\vec{H}_0$ . Частота вращения частицы вокруг магнитного поля  $f_M$  называется гиромагнитной частотой. Нетрудно убедиться, что если смотреть по направлению вектора  $\vec{H}_0$ , то электроны с зарядом  $e$  вращаются против часовой стрелки, а положительные ионы — по часовой стрелке. Для электронов  $f_M \approx 1,4$  МГц, для ионов  $f_M \approx 760$  Гц. Поскольку гиромагнитная частота ионов лежит за пределами используемых для радиосвязи частот, присутствием ионов далее будем пренебрегать.

Для определения показателя преломления и проводимости ионосферы в присутствии поля  $\vec{H}_0$  воспользуемся соотношениями (15.1)–(15.8). Изменение коснется лишь определения скорости электрона. В соотношение (15.3) добавится сила Лоренца. Для упрощения выражений не будем учитывать соударения с молекулами. Тогда уравнение движения электрона примет вид

$$-e\vec{E} - e\mu_0 [\vec{V} \cdot \vec{H}_0] = j\omega m \vec{V}. \quad (15.32)$$

Скорость  $\vec{V}$  как вектор из этого уравнения непосредственно не определяется, поскольку входит в векторное произведение. В декартовой системе координат компоненты  $V_x$ ,  $V_y$  и  $V_z$  находятся из системы трех уравнений, которая получается проектированием уравнения (15.32) на координатные оси. При этом если ось  $z$  выбрать вдоль вектора  $\vec{H}_0$ , то составляющие  $V_x$  и  $V_y$  будут зависеть и от  $E_x$ , и от  $E_y$ . Подстановка выражений для компонент скорости в уравнение (15.8) приводит к выводу, что оно выполняется только, если диэлектрическая проницаемость является матрицей размером

3×3. Эта матрица называется тензором диэлектрической проницаемости ионосферы. Более подробный вывод выражения для тензора  $\hat{\epsilon}_r$  ионосферы (или плазмы) можно найти в разделе 6. Приведем его без вывода:

$$\hat{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_T & -j\beta & 0 \\ j\beta & \epsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L \end{pmatrix}, \quad (15.33)$$

где

$$\epsilon_T = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_M^2}, \quad \beta = \frac{\omega_0^2 \omega_M}{\omega(\omega^2 - \omega_M^2)}, \quad \epsilon_L = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_M = 2\pi f_M. \quad (15.34)$$

Из выражений (15.34) для компонент тензора  $\hat{\epsilon}_r$  видно, что влияние магнитного поля Земли на распространение радиоволн сказывается особенно сильно на частотах, близких к гиромангнитной частоте электронов, равной 1,4 МГц, хотя проявляется и на других частотах.

Известно, что среды, у которых один из параметров  $\epsilon$ ,  $\mu$  или  $\sigma$  выражается тензором, являются анизотропными. Это означает, что их свойства зависят от направления распространения волны (см. раздел 6). Для ионосферы анизотропия выражается также в том, что векторы  $\bar{E}$  и  $\bar{D}$  не параллельны. Аналогичными свойствами обладают намагниченные ферриты и некоторые кристаллы.

Остановимся кратко на особенностях распространения радиоволн в ионосфере, связанных с присутствием магнитного поля Земли.

При распространении радиоволн вдоль магнитных силовых линий Земли наблюдается вращение плоскости поляризации радиоволны (эффект Фарадея). Для ионосферы необходимо учесть, что электроны под действием магнитного поля Земли вращаются всегда в одном направлении и для волн с разным направлением вращения вектора  $\bar{E}$  ионосфера имеет различные свойства.

Рассмотрим случай поперечного распространения волны по отношению к магнитному полю Земли  $\bar{H}_0$ . При этом возможны два



случая: а) вектор  $\vec{E}$  параллелен вектору  $\vec{H}_0$ ; б) вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен  $\vec{H}_0$ . Определим для первого случая вектор индукции  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \vec{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_T & -j\beta & 0 \\ j\beta & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_L \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon_L E_0 \vec{z}_0.$$

Если подставить выражение  $\varepsilon_L$  из формулы (15.34), то видно, что соотношение между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  такое же, как и при отсутствии магнитного поля. Это объясняется тем, что сила Лоренца в данном случае равна нулю. Волна с таким направлением вектора  $\vec{E}$  называется обыкновенной.

Очевидно, что если вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен  $\vec{H}_0$ , то сила Лоренца будет отлична от нуля. Приведем выражение для  $\varepsilon_r$  такой волны, называемой необыкновенной:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_M^2}{\omega^2 - \omega_M^2} \right)}. \quad (15.35)$$

Анализ выражения (15.35) показывает, что необыкновенная волна имеет особенности при распространении. В частности, при  $\omega > \omega_M$  существуют два значения частоты, при которых  $\varepsilon_r$  обращается в нуль. Кроме того, в необыкновенной волне появляется составляющая электрического поля, направленная вдоль  $\vec{H}_0$  и сдвинутая по фазе относительно поперечной составляющей. Это приводит к тому, что необыкновенная волна становится эллиптически поляризованной.

Если волна, посланная с Земли, падает на ионосферу под произвольным по отношению к  $\vec{H}_0$  углом, то она расщепляется на обыкновенную и необыкновенную, имеющие разные показатели преломления. Условия отражения (15.21) выполняются для них на разных высотах. Таким образом, каждому входящему в ионосферу лучу соответствуют два отраженных луча, попадающие в разные точки Земли.

Поле в точке приема определяется интерференцией двух волн — обыкновенной и необыкновенной — входящих в ионосферу под разными углами. Поскольку параметры ионосферы непрерывно изменяются, то будут меняться и фазы интерферирующих волн, а следовательно, величина результирующего поля, что приводит к эффекту замирания сигнала.

## Контрольные вопросы

1. Что представляет собой ионосфера, что является причиной ее образования?
2. Определите собственную частоту ионизированного газа, если электронная концентрация в нем составляет  $10^4$  эл/см<sup>3</sup>.
3. Объясните, почему ионосфера является диспергирующей средой. Как это качество ионосферы сказывается на распространении радиоволн?
4. Что такое критическая и максимальная частота? Укажите соотношение между ними.
5. Какие изменения в ионосферных слоях происходят в течение времени суток, времени года?
6. Какие частоты радиоволн наиболее сильно поглощаются в ионосфере? Каков механизм этого поглощения?
7. Как и почему постоянное магнитное поле Земли влияет на распространение радиоволн в ионосфере? Почему такое влияние не обнаруживается в тропосфере?
8. В чем состоит эффект Фарадея, при каких условиях он проявляется?
9. Как по данным ионосферных станций определяются критические частоты ионосферных слоев?
10. Какие волны называются обыкновенной и необыкновенной? Поясните физически причину их различного распространения в ионосфере.

## 16. Диапазонные особенности распространения радиоволн

### 16.1. Особенности распространения сверхдлинных и длинных волн

Радиоволны длиной от 1000 до 10000 м называют длинными (ДВ, частота 300–30 кГц), а радиоволны длиной более 10000 м — сверхдлинными (СДВ, частота менее 30 кГц). Благодаря большой длине, эти волны хорошо огибают Землю. Кроме того, в данных диапазонах радиоволн для всех видов земной поверхности токи проводимости существенно преобладают над токами смещения. Поэтому при распространении поверхностной волны происходит лишь незначительное поглощение энергии, что обуславливает распространение СДВ и ДВ на большие расстояния (порядка 3000 км).

В ионосфере СДВ и ДВ поглощаются слабо, поскольку в ней проходит незначительная часть трассы. Известно, что, чем ниже частота радиоволны, тем ниже электронная концентрация, необходимая для поворота луча к Земле. Следовательно, высота поворота СДВ и ДВ — нижняя граница ионосферы (слой D днем или E ночью). Начиная с расстояния 300–400 км, в точке приема помимо земной волны присутствует и отраженная от ионосферы волна. Эти волны интерферируют в точке приема, но на различных расстояниях от передатчика интенсивности земной и ионосферной волн разные. До 500 км учитывают в основном земную радиоволну и расчет напряженности поля ведут по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля (см. формулу (13.12)). После 500 км земная волна слабее ионосферной. Тропосфера практически не влияет на распространение радиоволн в этих диапазонах. Можно сказать, что область, где распространяются СДВ и ДВ, — сферический слой, который лежит между земной поверхностью и нижним слоем ионосферы. Высота этого слоя 80–100 км. Условие распространения при этом такие же, как и в сферическом волноводе: есть даже критическая длина волны (~ 100 км).

Расчет радиолиний на СДВ и ДВ обычно проводится по эмпирическим формулам, чаще всего по формуле Остина

$$E = \frac{300\sqrt{PD}}{r} \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} e^{-0,0014r/\lambda^{0,6}}, \quad (16.1)$$

в которой мощность  $P$  подставляется в киловаттах, расстояние  $r$  и длина волны  $\lambda$  — в километрах, угол  $\theta$  — геоцентральный угол между точками излучения и приема:  $\theta = r/R_0$ ,  $R_0$  — радиус Земли. Действующее значение напряженности электрического поля в формуле (16.1) определяется в милливольтках на метр.

Особенностью формулы Остина является необычная зависимость напряженности поля от расстояния. В противоположной точке Земли — точке антипода, формула Остина дает бесконечное значение поля, так как  $\theta = 180^\circ$ . В действительности в этой точке наблюдается некоторое увеличение поля, поскольку в нее приходят в фазе волны, обогнувшие Землю с разных направлений. Это явление получило название «эффект антипода». Реально формулой Остина пользуются на расстояниях от 2 до 18 тыс. км.

Основное преимущество линий связи на ДВ и СДВ — большая устойчивость напряженности электрического поля. Величина сигнала мало меняется в течение суток и в течение года и не подвержена случайным изменениям.

Основной недостаток — ограниченный частотный диапазон, а также необходимость использовать громоздкие антенны. Во всем частотном диапазоне СДВ и ДВ (3–300 кГц) не разместится даже один телевизионный канал, который требует полосы 8 МГц.

На СДВ иногда наблюдается интересное явление — «свистящие атмосферерики»: в приемнике возникает характерный свист, частота которого постепенно понижается. Причиной появления «атмосфериков» служат грозовые разряды в другом полушарии Земли. Как отмечалось при изучении ионосферы, магнитное поле Земли вызывает расщепление волны на обыкновенную и необыкновенную. Из анализа показателя преломления необыкновенной волны (см. формулу (15.35)) при частотах, меньших плазменной, следует, что он не обращается в нуль ни при какой электронной концентрации. Это означает, что такие сверхнизкие частоты могут пронизывать ионосферу, удаляться от Земли на десятки ее радиусов и возвращаться на Землю вдоль магнитных силовых линий Земли. Понижение частоты звучания «атмосферика» связано с сильной

дисперсией этих частот в ионосфере. Более высокие частоты имеют большую скорость и раньше приходят в пункт приема, чем низкие. Изучение «свистящих атмосфериков» дает научную информацию о состоянии атмосферы на больших расстояниях от Земли.

Устойчивость сигнала на ДВ и СДВ объясняет их широкое применение для построения навигационных систем. Однако суточные изменения слоя D приводят к изменению высоты сферического волновода, в котором распространяются эти волны на большие расстояния, что в свою очередь вызывает изменение фазовой скорости и соответственно ошибки в определении местоположения объекта.

Несмотря на крайнюю ограниченность частотного диапазона, длинные и сверхдлинные волны находят очень важные применения. Кроме радионавигации, они используются для обеспечения надежной радиотелефонной и телеграфной связи на дальние расстояния и радиовещания. Они могут использоваться для связи с подводными объектами, например подводными лодками, поскольку только волны этих диапазонов (наряду с оптическими) испытывают относительно слабое поглощение в морской воде.

## **16.2. Особенности распространения средних волн**

К средним волнам (СВ) относятся радиоволны длиной от 100 до 1000 м (частоты 0,3–3 МГц). Средние волны могут распространяться как земные и как ионосферные.

Напряженность электрического поля земных СВ для малых расстояний (до 200 км) рассчитывают по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля, а для больших расстояний — по дифракционным формулам (см. раздел 13). Средние волны испытывают существенное поглощение в земной поверхности и поэтому СВ-радиолинии, использующие земные радиоволны, имеют протяженность не более 700 км. Все особенности распространения земных радиоволн при низко расположенных антеннах, рассмотренные ранее, проявляются именно в диапазоне средних волн.

Ионосферная волна способна отразиться лишь при концентрации, свойственной слою E. Через слой D (самый низкий) волна проходит и сильно в нем поглощается. Слой D ионосферы появляется только днем, поэтому ночью поглощение средних волн в ионосфере значительно уменьшается.

Если пункт приема находится в зоне действия земной волны, то с наступлением темноты в эту точку начинает попадать также ионосферная волна. Интерференция земной и ионосферной волн приводит к замираниям — случайным колебаниям поля сигнала. Для замираний еще употребляется термин «фединг». Когда приемная станция расположена вне области действия земных радиоволн, замирания обязаны своим происхождением интерференции ионосферных волн, претерпевших разное число отражений от ионосферы. Для борьбы с замираниями на средних волнах применяются специальные антенны, у которых максимум диаграммы направленности прижат к земной поверхности, так называемые антифединговые антенны.

Только в диапазоне средних волн наблюдается сравнительно редкое явление — перекрестная модуляция. Она проявляется в том, что сигнал мощной радиостанции модулирует своим полем число соударений  $v$  электронов с нейтральными молекулами. В результате в такт с сигналом мощной радиостанции изменяется поглощение радиоволн других станций. В этом проявляются нелинейные свойства ионосферы — поглощение зависит от напряженности поля волны мощной радиостанции. Впервые данный эффект наблюдался в 1924 г. после начала работы крупной радиостанции в городе Горьком (ныне Нижний Новгород), которая модулировала своим сигналом передачи радиостанции в Люксембурге. Поэтому он называется также Люксембург-Горьковским эффектом. Действенных мер борьбы с ним не существует, и на практике ограничиваются рекомендациями использовать на мощных станциях антифединговые антенны.

Средние волны используются главным образом в радиовещании. Типичная дальность радиолиний соответствует применению земной волны. В заключение сформулируем кратко особенности распространения средних волн.

1. На небольших расстояниях (до 1000 км) от передатчика преобладает земная волна. Связь устойчивая и не зависит от времени суток и года. Расчет напряженности поля можно вести по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля (для расстояний, меньших 200 км), или по дифракционной формуле и графикам, составленным на ее основе (см. раздел 13).

2. На больших расстояниях от передатчика связь осуществляется только ионосферной волной. Поэтому днем связь практически отсутствует (из-за поглощения в слое D), ночью диапазон «оживает». Связь относительно устойчивая, замирания вызваны приходом в точку наблюдения нескольких волн, претерпевших разное число отражений от Земли и ионосферы.

3. В промежуточной области днем прием идет на земную волну и ослабленную в слое D ионосферную. Интерференция этих небольших по интенсивности волн приводит к значительным колебаниям уровня сигнала — замираниям. Ночью ионосферная волна преобладает над земной. Связь становится более устойчивой.

4. Расчет напряженности поля ионосферных волн ведут по эмпирическим формулам или по графикам, составленным на основе экспериментальных данных.

### **16.3. Распространение коротких волн**

К коротким волнам (КВ) относятся радиоволны длиной от 10 до 100 м (частоты 3–30 МГц).

Слабо выраженная дифракция и сильное поглощение земных волн приводят к тому, что короткие волны как земные могут распространяться лишь на расстояния порядка десятков километров.

Основной интерес для радиосвязи представляют ионосферные волны. Короткие волны проходят слои D и E, испытывая в них поглощение, отражаются они от слоя F. Распространение ионосферных коротких волн имеет ряд особенностей. Рассмотрим основные из них.

Распространение радиоволн на большие расстояния происходит путем последовательных отражений от ионосферы и поверхности Земли. Радиоволна как бы совершает скачки с Земли к ионо-

сфере и обратно. Длина одного скачка зависит от высоты отражающего слоя и угла падения волны на ионосферу. Максимальные скачки получаются, если излучение направлено вдоль Земли. За один такой скачок волна покрывает расстояние от 3000 км при отражении от слоя  $F_1$  и до 4000 км при отражении от слоя  $F_2$ .

Способность коротких волн распространяться как ионосферные на большие расстояния объясняется их слабым затуханием в ионосфере. Как было установлено в подразделе 15.5, поглощение на высоких по сравнению с числом соударений частотах обратно пропорционально квадрату частоты. Именно этот случай характерен для коротких волн.

Рабочий диапазон коротких волн ограничен. В диапазоне коротких волн существуют понятия максимально применимой частоты (МПЧ) и наименьшей применимой частоты (НПЧ). Наличие МПЧ объясняется с помощью закона секанса (см. формулу (15.24)). Из него следует, что для заданного расстояния, меньшего длины одного скачка, и для заданной электронной концентрации слоя существует максимальная частота, способная от него отражаться. НПЧ обусловлена частотной зависимостью поглощения в ионосфере. При понижении частоты поглощение быстро увеличивается, уровень сигнала в точке приема уменьшается и при НПЧ напряженность поля принимает пороговое значение, ниже которого прием невозможен. Очевидно, что и МПЧ, и НПЧ зависят от параметров ионосферы: электронной концентрации и числа соударений. НПЧ зависит также от параметров аппаратуры: излучаемой мощности, чувствительности приемника и т.п. Для коротковолновых линий радиосвязи актуальна проблема правильного выбора оптимальной рабочей частоты для радиосвязи. Поскольку концентрация электронов в слое  $F$  меняется в течение суток, то существуют так называемые дневные (10–25 м) и ночные (35–100 м) волны.

В диапазоне КВ существует зона молчания, упоминавшаяся в подразделе 15.3. Она представляет собой кольцевую область около передающей антенны. В зоне молчания прием радиоволн с данной аппаратурой невозможен. Внутренняя граница зоны молчания определяется напряженностью поля земной волны, достаточной для радиоприема. Очевидно, что положение этой границы зависит от мощности передатчика, чувствительности приемника, параметров



антенн и т.п. Внешняя граница зоны молчания определяется из условия, что рабочая частота является МПЧ для данного расстояния.

Земные волны в зоне молчания слишком слабы из-за поглощения в почве, а ионосферные отражаются под большими углами падения и поэтому попадают на Землю за зоной молчания. Очевидно, что в течение суток внешняя граница зоны молчания передвигается, а внутренняя — неподвижна.

Замирания сигнала на коротких волнах в основном объясняются интерференцией нескольких волн, приходящих в точку приема. Это могут быть волны, претерпевшие разное число отражений от ионосферы, либо обыкновенная и необыкновенная волны, либо и то и другое. Кроме интерференционных, наблюдаются еще поляризационные замирания, связанные с поворотом плоскости поляризации при прохождении через ионосферу (эффект Фарадея).

Для борьбы с замираниями на КВ-линиях связи обычно используют прием на несколько разнесенных в пространстве антенн. Расстояние между антеннами выбирается так, чтобы замирания сигналов слабо коррелировали между собой. На практике для этого достаточно разнести антенны на  $10\lambda$ . Выигрыш за счет разнесенного приема даже двух антенн может достигать 10 дБ и более.

В ионосфере, кроме регулярных (суточных, сезонных) изменений, часто наблюдаются возмущения, во время которых электронная концентрация слоя F значительно изменяется. В основном ионосферные возмущения вызываются потоками заряженных частиц — корпускул, испускаемых Солнцем во время солнечных вспышек. Потоки корпускул, попадая в магнитное поле Земли, двигаются вдоль магнитных силовых линий и концентрируются в приполярных областях, вызывая полярные сияния, магнитные бури и нарушения связи на коротких волнах. Для борьбы с такими нарушениями связи переходят на более низкие частоты, увеличивают мощность передатчиков или используют линии связи, расположенные в более южных широтах.

Расчет коротковолновых линий связи в основном сводится к составлению графика рабочих частот (волнового расписания) и вычислению напряженности поля в точке приема. График рабочих частот строится на основе зависимости МПЧ от времени суток. Для

составления графика рабочих частот на основе данных ионосферных станций Земли составляются официальные прогнозы максимально применимых частот. Расчет напряженности поля производится по методу А.Н. Казанцева на основе графиков для затухания волн в ионосферных слоях.

Короткие волны применяются в основном для радиовещания. Преимущество коротковолновых линий связи — способность распространяться на большие расстояния, испытывая слабое поглощение в Земле и ионосфере.

## **16.4. Распространение ультракоротких волн**

### **16.4.1. Распространение УКВ в пределах прямой видимости**

Радиоволны с длиной волны короче 10 м (частота свыше 30 МГц) относятся к УКВ-диапазону. Снизу по частоте УКВ-диапазон ограничен КВ-диапазоном, сверху — инфракрасными волнами. Обычно УКВ-радиолинии действуют в пределах прямой видимости, поскольку ионосфера для УКВ-диапазона прозрачна. Это является основным недостатком УКВ и в то же время их достоинством, когда нужно избавиться от взаимных помех УКВ-станций. Несомненно, ценным свойством ультракоротких волн является большой частотный диапазон, позволяющий обмениваться значительными объемами информации. Так, на метровых и дециметровых волнах диапазон частот составляет около 3000 МГц. Если принять для одного телевизионного канала полосу частот 10 МГц (на практике 8 МГц), то можно разместить в этих диапазонах 297 телевизионных каналов. Для сравнения: во всем КВ-диапазоне разместятся 3 телевизионных канала, а на средних волнах вообще ни одного.

Постоянная тенденция радиотехники переходить на все более высокие частоты приобретает особое значение в связи с развитием спутниковой и мобильной связи, Интернета и пр. Поэтому рассмотрим распространение УКВ более подробно.

К линиям связи, работающим на УКВ в пределах прямой видимости, относятся:

- телевизионное и УКВ-вещание;
- радиорелейные линии связи (РРЛ) и радиолокационные станции (РЛС);
- связь со спутниками Земли и другими космическими объектами;
- различные виды мобильной связи.

Вопросы распространения радиоволн для этих линий связи являются во многом общими, хотя и имеют некоторые особенности.

**Телевизионное и УКВ-вещание.** Поскольку телевизионные антенны, как правило, слабонаправленные, то отражение от Земли формирует диаграмму направленности (ДН) в вертикальной плоскости. Для увеличения дальности вещания антенны передатчика и приемника поднимают над земной поверхностью. Это увеличивает расстояние прямой видимости и прижимает нижний лепесток ДН антенн к Земле.

Если поверхность Земли является достаточно гладкой, то для расчета радиолинии применяют интерференционную формулу, и в частности формулу Введенского. Для оценки неровности земной поверхности используется критерий Рэля. Эти вопросы рассмотрены в разделе 12.

Влияние тропосферы учитывается введением эквивалентного радиуса Земли для нормальной тропосферы. Поглощением в тропосфере для метровых и дециметровых волн можно пренебречь. Распространение этих диапазонов в условиях города, конечно, имеет свои особенности, связанные с экранирующим действием зданий. По имеющимся в литературе данным измерение напряженности поля в Москве на уровне улиц на частоте 49,75 МГц дало дополнительное ослабление 6 дБ, а на частоте 200 МГц — 10 дБ. Внутри зданий дополнительное ослабление увеличивается по мере перехода с верхних этажей на нижние. Так, на седьмом этаже поле может составлять от 6 до 40 % напряженности поля на крыше, а на первом — от 3 до 7 %. Большой разброс этих значений объясняется интерференцией прямой волны и волн, отраженных от стен и других предметов.

**Работа РРЛ и РЛС.** Расстояние между соседними станциями РРЛ (30–50 км) и высоты антенн (до 100 м) выбираются так, чтобы

антенны находились в пределах прямой видимости, а область пространства, существенная для распространения радиоволн, была свободна от местных предметов. При этом влиянием Земли можно пренебречь. Диапазон применяемых частот ограничен сверху поглощением в тропосфере (10–15 ГГц), а снизу — снижением усиления антенн и полосой частот для передачи необходимой информации (200–300 МГц). Тропосфера учитывается, как и в предыдущем случае, введением эквивалентного радиуса Земли для нормальной тропосферы. Нестационарные процессы в тропосфере являются причиной замираний на РРЛ.

К таким процессам относятся:

а) ослабление в осадках (гидрометеорах) на частотах выше 6–7 ГГц;

б) изменение скорости убывания показателя преломления с высотой, что приводит к изменению траектории радиоволн;

в) отражения от слоистых неоднородностей в тропосфере с последующей интерференцией с прямой волной.

В радиолокации тропосфера и ионосфера являются источниками ошибок при определении координат цели радиолокационными станциями. При углах места цели, больших  $5^\circ$ , рефракция радиоволн приводит к следующим систематическим ошибкам в определении угловых координат и дальности до цели:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma &= N \operatorname{ctg} \gamma_0, \\ \Delta r &= 0,007 N \operatorname{csc} \gamma_0,\end{aligned}\tag{16.2}$$

где  $\gamma_0$  — начальный угол места в направлении на цель;  $N$  — индекс преломления тропосферы у поверхности Земли. В формулах (16.2)  $\Delta\gamma$  измеряется в микроградусах ( $1 \text{ мкрад} = 5,73 \cdot 10^{-5}$  градуса =  $3,44 \cdot 10^{-3}$  угловых минуты),  $\Delta r$  — в метрах.

Например, при  $\gamma = 10^\circ$  и  $N = 313$  (нормальная тропосфера)  $\Delta\gamma = 6,1'$ ,  $\Delta r = 12,6 \text{ м}$ .

В целом максимальные ошибки по углу места не превосходят  $1^\circ$ , а по дальности — 100 м. Флуктуации показателя преломления тропосферы приводят к случайным ошибкам в определении координат цели. Ионосфера влияет на работу РЛС, если цель находится

на высотах, превышающих 100 км, причем влияние уменьшается с ростом частоты согласно формуле (15.16). Систематические ошибки по дальности, вызванные рефракцией в ионосфере на частоте 10 ГГц, не превышают 0,1 м при высоте цели 180 км, а по угловым координатам — 0,1 мрад, т.е. 0,34'.

**Связь со спутниками и другими космическими объектами.** Очевидно, что радиосвязь с искусственным спутником Земли (ИСЗ) или другим космическим объектом, находящимся выше ионосферных слоев, возможна только в диапазоне УКВ, проникающих через ионосферу. Как правило, для этих целей используют остронаправленные антенны и влиянием Земли можно пренебречь. Земля в этих случаях является источником тепловых шумов. Верхние применяемые частоты ограничиваются поглощением в тропосфере, а нижние — поглощением в ионосфере, которое на этих частотах обратно пропорционально квадрату частоты (см. формулу (15.29)).

Суммарные потери в тропосфере и ионосфере минимальны в окне прозрачности от 0,1 до 6 ГГц, поглощение в котором не превышает 1 дБ. На практике обычно используют частоты от 1 до 10 ГГц.

Кроме поглощения, тропосфера и ионосфера создают следующие проблемы:

а) рефракция радиоволн в тропосфере и ионосфере искривляет траекторию радиоволн. Это приводит к ошибкам в определении положения ИСЗ. Радиусы кривизны луча в тропосфере и ионосфере зависят от угла падения  $\theta$  как  $1/\sin\theta$ . Поэтому ошибка в определении угловых координат максимальна для пологих трасс и может составлять для тропосферы 1–2 градуса. Рефракция в ионосфере увеличивается с уменьшением частоты и учитывается при частотах  $f < 400$  МГц. Ошибка из-за рефракции в ионосфере в определении положения ИСЗ может достигать нескольких градусов. Учет рефракции необходим в системах слежения за ИСЗ. Неправильный учет этого явления может привести к «потере» спутника станцией слежения;

б) поворот плоскости поляризации волны при прохождении сквозь ионосферу (эффект Фарадея). Если для передачи и приема используются антенны с линейной поляризацией, то поворот

плоскости поляризации волны приводит к уменьшению сигнала на выходе приемной антенны. При движении спутника угол поворота поляризации непрерывно меняется и это вызывает замирания сигнала. Как следует из подразд. 6.5, угол поворота обратно пропорционален квадрату частоты, поэтому эффект Фарадея учитывается на частотах ниже 1 ГГц.

**Различные виды мобильной связи.** Различные виды мобильной связи (сотовая, транкинговая и пейджинговая) получили в последнее время массовое распространение. Все они используют частоты от 0,8 до 4 ГГц. Особенности распространения радиоволн в городах, обсуждавшиеся выше для телевидения, наблюдаются и в системах мобильной связи, но выражены более резко. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, высоты телевизионных антенн, передающих и приемных, как правило, больше, чем в системах подвижной связи (СПС). Во-вторых, частоты в СПС выше, чем в телевидении. Это уменьшает дифракцию волн на различных препятствиях. Кроме того, при мобильной связи движение абонента приводит к изменению уровня сигнала из-за изменения окружающей обстановки. Как и при ДТР, сигнал в точке приема испытывает случайные изменения уровня — быстрые и медленные замирания. Причиной быстрых замираний является многолучевой характер распространения радиоволн. В точку приема приходят волны, отраженные от городских зданий, причем фазы этих волн изменяются случайным образом от 0 до 360°. Быстрые замирания подчиняются закону распределения Рэлея. Причиной медленных замираний является перемещение абонента. При этом изменяется экранирующее действие городских зданий.

Точное определение ослабления радиоволн в городских условиях не представляется возможным из-за влияния очень многих факторов. В настоящее время существует несколько моделей решения этих задач. Наибольшее распространение получили модели Окамуры и Хата. Рассмотрим кратко положения модели Окамуры.

Как и при ДТР, задача определения напряженности поля в точке приема сводится к расчету медианного уровня напряженности поля и оценке быстрых и медленных замираний. Для вычисления медианных значений напряженности поля получены аппроксими-

рующие выражения для частот 0,9 и 4 ГГц, представляющие практический интерес:

$$\begin{aligned} F_M &= -(20 + 0,3r + 5,7 \lg r) \text{ для } f = 0,9 \text{ ГГц;} \\ F_M &= -(29,4 + 0,3r + 7,6 \lg r) \text{ для } f = 4 \text{ ГГц,} \end{aligned} \quad (16.3)$$

где расстояние  $r$  выражается в километрах;  $F_M$  — дополнительное ослабление по отношению к полю в свободном пространстве, выраженное в децибелах, при котором уровень поля соответствует медианному.

Формулы (16.3) предполагают, что городская застройка соответствует квазигладкой поверхности протяженностью несколько километров со средней высотой неровностей, меньшей 20 м. Как следует из формул (16.3), дополнительное ослабление, вызванное рассеянием и поглощением радиоволн городскими зданиями, увеличивается с увеличением расстояния и частоты радиоволн. Формулы (16.3) получены для высоты антенны базовой станции (БС) 200 м и высоты антенны абонентской станции (АС) 3 м.

Экспериментально установлено, что влияние высоты БС в основном зависит от расстояния до точки приема и практически не зависит от частоты в диапазоне 200–2000 МГц. При этом на небольших расстояниях мощность принимаемого сигнала изменяется пропорционально квадрату высоты антенны, а при больших — пропорционально

$$\begin{aligned} F_{A1} &= 20 \log(h/200) \text{ при } r < 10 \text{ км,} \\ F_{A1} &= 30 \log(h/200) \text{ при } r > 10 \text{ км,} \end{aligned} \quad (16.4)$$

где  $h$  — высота антенны БС;  $F_{A1}$  — фактор, учитывающий высоту антенны БС, дБ.

При дальности, превышающей расстояние прямой видимости, расчет напряженности поля ведется по дифракционным формулам. При  $h = 50$  м это расстояние составляет примерно 25 км, при  $h = 200$  м — 50 км.

Исследования влияния высоты антенны АС показали, что оно не зависит от длины трассы, поскольку антенна располагается ниже уровня застройки, принятой в модели квазигладкой поверхности

города. Фактор, учитывающий высоту антенны АС, может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
 F_{A2} &= 10 \log(h/3) \quad \text{при } h < 3 \text{ м,} \\
 F_{A2} &= 20 \log(h/3) \quad \text{при } h > 3 \text{ м и } f = 400 \text{ МГц,} \\
 F_{A2} &= 30 \log(h/3) \quad \text{при } h > 3 \text{ м и } f = 2000 \text{ МГц.}
 \end{aligned}
 \tag{16.5}$$

Таким образом, медианный уровень сигнала в точке приема определяется множителем ослабления

$$L_{\text{мед}} = L_{\text{св}} + F_{\text{м}} + F_{A1} + F_{A2}, \tag{16.6}$$

где  $L_{\text{св}}$  — ослабление в свободном пространстве.

Учет влияния замираний на качество и надежность мобильной радиосвязи во многих случаях не играет такой важной роли, как в РРЛ, использующих ДТР.

Медленные замирания при мобильной связи наблюдаются при движении АС и отражают медианный уровень сигнала в разных точках трассы. В табл. 16.1 приведены значения дисперсии медленных замираний по данным Окамуры.

Таблица 16.1

Дисперсия медленных замираний  $\sigma^2$ , дБ

Местность	$f=0,5$ ГГц	$f=1$ ГГц	$f=2$ ГГц	$f=11$ ГГц
Город	6	6,5	7,3	8
Пригород	7,5	8,9	9	10

Модель Окамуры предусматривает также учет характера местности, если она не относится к квазигладкой. К квазигладким относятся: а) пригород и открытая местность; б) трасса с наклоном; в) трасса, включающая участки земли и моря; г) холмистая местность. Так, на частоте 1 ГГц при связи в условиях пригорода медианный уровень сигнала увеличивается на 10 дБ, а на открытой местности — на 30 дБ относительно рассчитанного по формуле (16.6).



## 16.4.2. Распространение ультракоротких волн за горизонт

Распространение УКВ за линию горизонта, иначе называемое дальним распространением УКВ, всегда считалось перспективным для радиосвязи из-за большой информационной емкости диапазона и возможности применения остронаправленных антенн. Особый интерес это представляло до запуска первых ИСЗ. Перечислим способы радиосвязи с применением распространения УКВ за горизонт с краткой характеристикой.

1. Дальнее распространение УКВ за счет рассеяния на неоднородностях тропосферы.

2. Дальнее распространение УКВ при сверхрефракции в тропосфере. Как отмечалось в п. 14.2.4, при определенных погодных условиях в тропосфере образуется область, в которой индекс преломления убывает с высотой быстрее чем на 157 единиц на километр. При этом радиус кривизны луча в тропосфере становится меньше радиуса Земли и луч, посланный горизонтально, возвращается на Землю. После отражения от Земли распространение волны продолжается как бы в тропосферном волноводе на расстояния в несколько тысяч километров. В тропосферном волноводе могут распространяться волны дециметрового и сантиметрового диапазонов. Поскольку возникновение условий для появления тропосферных волноводов трудно предсказуемо, то практического использования тропосферные волноводы не получили. Более того, их появление является причиной взаимных помех радиолокационных и других УКВ-станций.

3. Дальнее распространение УКВ за счет рассеяния на неоднородностях ионосферы. Неоднородности показателя преломления ионосферы вызваны неоднородностями электронной концентрации, всегда существующими в ионосфере. Дифференцирование формулы (15.16) для показателя преломления плазмы приводит к выражению

$$\Delta n = -\frac{80,8\Delta N_e}{2n(f)f^2}, \quad (16.7)$$

из которого следует, что для организации радиосвязи пригодны низкие частоты УКВ-диапазона (30–60 МГц). Основное рассеяние происходит в нижних слоях ионосферы на высотах 70–90 км, поэтому дальность действия таких линий связи составляет от 1000 до 2300 км. Полоса частот одного канала несколько килогерц. Как и при ДТР, полоса частот ограничена многолучевым характером распространения. Из-за значительных потерь при распространении такая связь требует больших мощностей передатчиков (десятки киловатт) и антенн с КНД 20–30 дБ. Поле в точке приема подвержено замираниям, как и при ДТР. Достоинством этой связи является ее надежность, что особенно важно для приполярных областей, где ионосферные возмущения приводят к нарушениям связи на КВ.

4. Дальнее распространение УКВ за счет отражения от слоя  $F_2$  и спорадического слоя  $E_S$ . В годы высокой солнечной активности электронная концентрация слоя  $F_2$  достигает величины, при которой от него возможно отражение метровых волн, падающих наклонно на ионосферу. Зона молчания при этом составляет 2000 км. Максимальная дальность порядка 4000 км. Кроме регулярных ионосферных слоев (D, E, F), в ионосфере возможно появление спорадического (случайного) слоя  $E_S$  с электронной концентрацией, близкой к концентрации слоя  $F_2$ . Поскольку этот слой возникает на высоте слоя E, то дальность связи при отражении от него составляет от 1000 до 2500 км. Отражение от слоев  $F_2$  и  $E_S$  является причиной нерегулярного дальнего приема телевизионных сигналов.

5. Дальнее распространение УКВ за счет отражения от метеорных следов. Метеоры, постоянно вторгающиеся в атмосферу Земли, сгорая на высоте порядка 100 км, оставляют за собой ионизированный след, существующий несколько секунд. Отражение от него можно использовать для организации дальней связи на УКВ. Такая линия связи функционирует в ждущем режиме: передатчик на несущей частоте работает непрерывно, а передача информации начинается при появлении метеорного следа и заканчивается с его рассасыванием. Для ускоренной передачи во время существования метеорного следа информация накапливается и с повышенной скоростью передается во время сеанса связи. Для этих линий связи используются частоты 40–80 МГц, длина трассы 1600–1800 км, КНД антенн 5–18 дБ, мощности передатчиков — единицы кило-

ватт, полоса частот — единицы килогерц. Достоинством таких линий связи является их надежность и скрытность, поскольку определить участок небосвода, куда будут направлены антенны, практически невозможно.

6. Дальнее распространение УКВ за счет усиления препятствием. Схема распространения радиоволн в этом случае изображена на рис. 16.1.

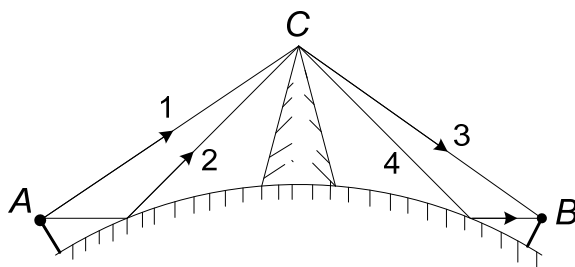


Рис. 16.1. Схема распространения радиоволн при усилении препятствием

Расстояние между точками *A* и *B* составляет сотни километров и при отсутствии препятствия в точке *C* определяется дифракцией около сферической поверхности Земли. В диапазоне УКВ поле является достаточно слабым. Дополнительное ослабление создается поглощением Земли. При наличии препятствия в точке *C* в виде горного хребта между точками *A* и *C* существуют две волны: прямая (1) и отраженная от Земли (2). На вершине препятствия они испытывают дифракцию, которую с некоторым приближением можно рассматривать как дифракцию на краю экрана (см. подраздел 11.3). От вершины до точки приема также можно выделить прямую волну (3) и отраженную волну (4). Таким образом, имеем четыре волны между точками передачи *A* и приема *B*: 1-3, 1-4, 2-3 и 2-4. Поскольку они распространяются в свободном пространстве и испытывают ослабление только при отражении от Земли и дифракции в точке *C*, то при благоприятных фазовых соотношениях между ними поле в точке приема может значительно превышать поле при отсутствии препятствия. Так, для трассы 240 км на частоте 100 МГц и высоте препятствия 1000 м расчетное значение увеличения напряженности поля составляет 80 дБ. В некоторых случаях для увеличения

напряженности поля на вершинах устанавливаются специальные пассивные ретрансляторы в виде металлических сетчатых зеркал различной формы.

## Контрольные вопросы

1. Каков механизм распространения длинных и сверхдлинных волн на расстояния до 3–4 тыс. км и более?
2. Какие преимущества и недостатки радиосвязи на ДВ и СДВ?
3. Укажите и объясните особенности связи на средних волнах в течение суток.
4. Что такое зона молчания в диапазоне коротких волн? Чем определяется ближняя и дальняя границы зоны? Почему зона молчания существует только на КВ?
5. Чем объясняется способность коротких волн распространяться на большие расстояния и даже огибать земной шар?
6. Какие нерегулярные процессы происходят в ионосфере и как они влияют на распространение коротких волн?
7. Какое влияние оказывает Земля, тропосфера и ионосфера на распространение УКВ?
8. Какие частоты выбираются для связи с космическими объектами? Объясните причины этого выбора.
9. Какие особенности распространения радиоволн в условиях города имеют место при телевизионном вещании и мобильной связи?
10. Назовите и охарактеризуйте возможные случаи распространения УКВ за горизонт без использования искусственных спутников Земли. Чем объясняется интерес к таким случаям?

## 17. Помехи радиоприему

### 17.1. Оценка уровня помех

Величина сигнала в точке приема еще не определяет качество приема. Очевидно, оно зависит от отношения мощности сигнала к мощности помех на входе приемного устройства. Поэтому оценка уровня помех не менее важна, чем определение уровня самого сигнала.

Помехами или шумами называют посторонние сигналы, поступающие на вход радиоприемного устройства одновременно с полезным сигналом и имеющие частоту, попадающую в полосу пропускания приемника. Термин «шум» обычно применяют к помехам, имеющим непрерывный частотный спектр. Например, тепловой шум, вызванный хаотическим движением электронов в проводниках антенны или фидера, различные шумы полупроводниковых и электронных приборов. В некоторых случаях шум не является помехой. Так, в радиоастрономии прием излучения космических объектов, имеющего характер шума, используется для изучения Вселенной. К собственно помехам относят посторонние сигналы с дискретным частотным спектром. Например, помехи от соседних станций, промышленные помехи и др. В литературе по распространению радиоволн термины «шум» и «помеха» часто не имеют четкого разделения.

Известно, что любой резистор  $R$  является источником теплового шума, который на согласованной с ним нагрузке выделяет мощность

$$P_{\text{ш}} = k\Delta f T_0, \quad (17.1)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> — постоянная Больцмана;  $\Delta f$  — полоса пропускания приемника;  $T_0$  — абсолютная температура резистора, К.

Мощность шума реального источника на согласованной с ним по сопротивлению нагрузке может быть также представлена в виде формулы (17.1), но через некоторую эквивалентную температуру,

которую называют шумовой температурой ( $T_{ш}$ ) данного источника:

$$P_{ш} = k\Delta f T_{ш}. \quad (17.2)$$

С формальной точки зрения  $T_{ш}$  — это коэффициент пропорциональности в формуле (17.2) между  $P_{ш}$  и величиной  $k\Delta f$ . Ее можно также трактовать как температуру, до которой нужно нагреть активное сопротивление, равное входному сопротивлению приемника, чтобы оно создало в нем такую же мощность шума, как и реальный источник.

Каждый приемник имеет собственные шумы, которые определяются в основном входными цепями и пересчитываются к его входу. Мощность этих шумов может быть выражена аналогично формуле (17.2) через шумовую температуру приемника  $T_{пр} = T_0(F-1)$ , где  $T_0$  — реальная температура приемника, К (обычно принимается равной 290 К);  $F$  — коэффициент шума приемника.

График зависимости шумовой температуры приемника от частоты для приемников с различными входными цепями приведен на рис. 17.1.

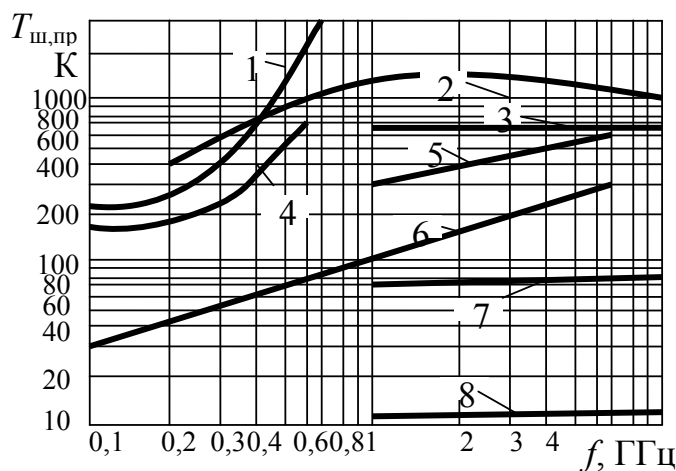


Рис. 17.1. Зависимости шумовой температуры приемников с различными входными цепями от частоты:  
 1 — транзисторы; 2 — диодные смесители; 3 — туннельные диоды;  
 4 — электронные лампы; 5 — лампы бегущей волны;  
 6 — параметрические усилители; 7 — мазеры, охлаждаемые азотом;  
 8 — мазеры, охлаждаемые гелием

Представление шумов приемника и внешних шумов, поступающих с антенны, через один параметр — шумовую температуру — позволяет проводить их сравнение и определять полную мощность шумов на его входе. Перечислим типы внешних шумов с обозначением их шумовой температуры:

- 1) атмосферные помехи, вызванные разрядами молний, —  $T_{\text{атм}}$ ;
- 2) промышленные помехи, созданные излучением промышленных и бытовых электрических установок, —  $T_{\text{пром}}$ ;
- 3) космические помехи, вызванные излучением космических объектов — галактик, звезд, планет, Солнца, Луны и т.п., —  $T_{\text{косм}}$ ;
- 4) шумы, вызванные радиоизлучением нагретой поверхности Земли и газов атмосферы, —  $T_{\text{тепл}}$ .

Кроме того, антенна и фидер, обладая собственным активным сопротивлением, являются источником тепловых шумов, шумовая температура которых определяется по формуле

$$T_{\text{ш.соб}} = T_0 \left( (1 - \eta_{\text{ф}}) + \eta_{\text{ф}}(1 - \eta_{\text{а}}) \right), \quad (17.3)$$

где первое слагаемое определяет собственные шумы фидера; второе — собственные шумы антенны;  $\eta_{\text{ф}}$  и  $\eta_{\text{а}}$  — коэффициенты полезного действия фидера и антенны.

Таким образом, полная шумовая температура на входе приемника равна

$$T_{\text{ш}} = T_{\text{ш.пр}} + T_{\text{ш.соб}} + \eta_{\text{ф}} T_{\text{ш.вн}}, \quad (17.4)$$

где

$$T_{\text{ш.вн}} = T_{\text{ш.атм}} + T_{\text{ш.косм}} + T_{\text{ш.пром}} + T_{\text{ш.тепл}}. \quad (17.5)$$

Уровень внешних помех, а следовательно, их шумовая температура зависит от параметров приемной антенны и от направления ее диаграммы направленности. Объективной характеристикой источников внешних помех является их яркостная температура  $T_{\text{я}}$ . Яркостной температурой источника помехи (шума) называется температура абсолютно черного тела, создающего такую же спектральную плотность излучения (плотность потока мощности в полосе 1 Гц), как и реальный источник. Шумовая температура

определяется через яркостную температуру и параметры антенны соотношением

$$T_{\text{ш.вн}} = \frac{G}{4\pi} \int_{4\pi} T_{\text{я}}(\Omega) F^2(\Omega) d\Omega, \quad (17.6)$$

где  $\Omega$  — телесный (объемный) угол в пространстве в направлении на точку наблюдения, измеряемый в стерadiansах;  $G$  — коэффициент усиления антенны;  $F(\Omega)$  — диаграмма направленности антенны;  $T_{\text{я}}(\Omega)$  — распределение яркостной температуры источников шума в пространстве;  $4\pi$  — область интегрирования, охватывающая всю сферу вокруг антенны.

Для остронаправленных антенн интеграл в (17.6) можно приближенно оценить, если считать яркостную температуру источников шума постоянной в пределах главного ( $T_{\text{я.гл}}$ ) и боковых лепестков диаграммы направленности (ДН). В этом случае формула (17.6) может быть преобразована к виду

$$T_{\text{ш.вн}} \approx \frac{G}{4\pi} \left( T_{\text{я.гл}} \Omega_{\text{гл}} + \sum_i T_{\text{я}i} \Omega_i F_i^2 \right), \quad (17.7)$$

где  $i$  — номер бокового лепестка ДН;  $\Omega_{\text{гл}}$  и  $\Omega_i$  — телесные углы главного и  $i$ -го бокового лепестка;  $F_i$  — уровень  $i$ -го бокового лепестка ДН; уровень главного лепестка принят равным единице.

Во многих других случаях помеха приходит на антенну практически постоянной со всех направлений и  $T_{\text{я}}(\Omega)$  является величиной, не зависящей от направления  $\Omega$ . Можно показать [20], что в этих случаях

$$T_{\text{ш.вн}} = \eta_{\text{а}} T_{\text{я}}. \quad (17.8)$$

На частотах ниже 100 МГц уровень ненаправленных помех обычно оценивается не шумовой температурой, а напряженностью поля помех  $E_n$  в полосе частот 1 кГц.

При известной действующей длине антенны  $l_{\text{д}}$  напряжение помехи на входе согласованного приемника определяется выражением



$$U_{\Pi} = 0,5E_{\Pi}I_{\text{д}}\sqrt{f}, \quad (17.9)$$

а шумовая температура внешних шумов —

$$T_{\text{вн}} = \frac{E_{\Pi}^2\lambda^2\eta_{\text{а}}\eta_{\text{ф}}}{960\pi^2k}, \quad (17.10)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Рассмотрим подробнее методы расчета уровня перечисленных помех и шумов. В большинстве своем они используют результаты экспериментальных исследований и представлены в виде графиков. Поскольку помехи являются случайными сигналами и описываются статистическими методами, то на графиках приводятся значения, соответствующие медианным уровням напряженности поля помехи. Напомним, что медианный уровень превосходится сигналом в течение 50 % времени наблюдения. В отдельные моменты времени реальные значения уровня помех могут значительно отличаться от медианного значения.

## 17.2. Атмосферные помехи

Как уже отмечалось, атмосферные помехи создаются при грозовых разрядах молний. Основной уровень таких помех приходится на звуковые частоты 300–10000 Гц и убывает с ростом частоты как  $1/f$ .

Эти помехи, постоянно возникающие в тропических районах Земли, отражаясь от ионосферы, распространяются в средние широты и создают постоянный уровень атмосферных помех, который может быть определен по графику рис. 17.2.

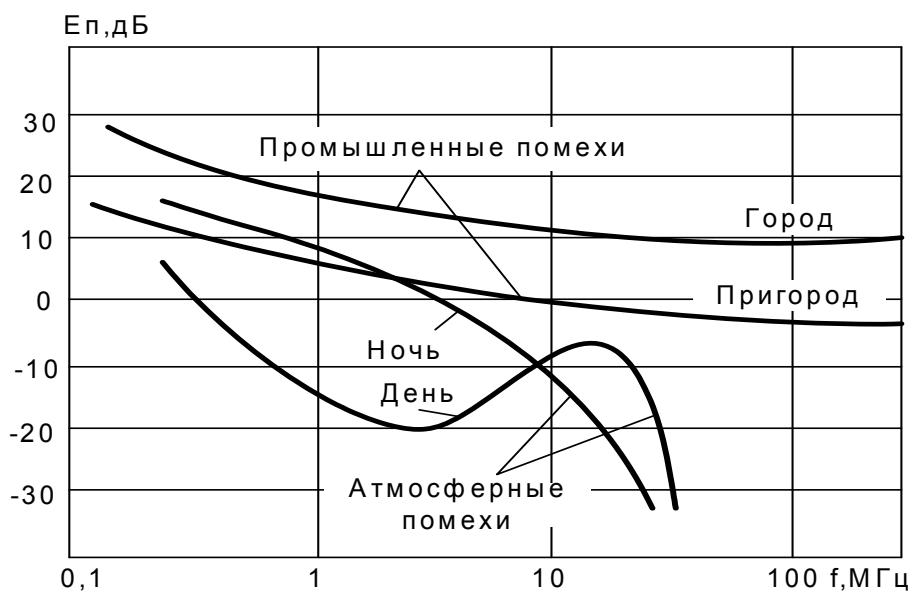


Рис. 17.2. Зависимости от частоты напряженности поля атмосферных и промышленных помех в полосе частот 1 кГц в децибелах относительно уровня 1 мкВ/м

### 17.3. Промышленные помехи

Уровень промышленных помех особенно велик в крупных промышленных центрах. Напряженность электрического поля помехи может быть определена по графикам на рис. 17.2, где приведены значения напряженности поля помех ( $E_p$ ) в полосе частот 1 кГц. Промышленные помехи имеют, как правило, вертикальную поляризацию.

К промышленным помехам можно условно отнести сигналы от других радиостанций, работающих в данном частотном диапазоне. Уровень этих помех определяется конкретной обстановкой и может быть определен так же, как и уровень полезного сигнала. Исключение составляют короткие волны, которые могут распространяться на большие расстояния с малым ослаблением. Поэтому в точку приема приходят сигналы от многих станций земного шара. Их уровень на коротких волнах во многих случаях даже превосходит уровень атмосферных помех.

## 17.4. Космические помехи

Космические помехи создаются в основном радиоизлучением Галактики. Она создает шум с непрерывным частотным спектром. Яркостную температуру космического шума можно определить по графику рис. 17.3.

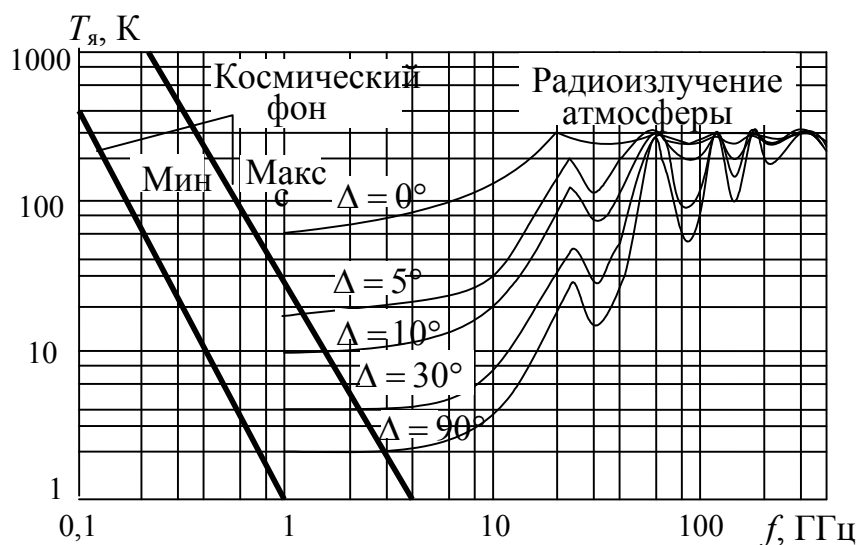


Рис. 17.3. Зависимость яркостной температуры космических шумов и шумов атмосферы от частоты

Отдельные космические объекты также являются источником помех. Основным из них является Солнце, яркостная температура которого приведена на рис. 17.4. Телесный угол для Солнца составляет 0,03 ст.

## 17.5. Шумы, созданные тепловым излучением Земли

Шумы, созданные тепловым излучением Земли, зависят от температуры ее поверхности и от того, какая часть диаграммы направленности антенны обращена в сторону Земли. Поэтому для уменьшения этих помех у остронаправленных антенн стараются

уменьшить уровень боковых и заднего лепестков диаграммы направленности.

Расчет шумовой температуры для этого случая ведут по формуле (17.7). Нагретые газы атмосферы (в основном тропосферы) создают шумы, яркостная температура которых определяется по графику на рис. 17.3. Уровень таких шумов зависит от наклона главного лепестка антенны к горизонту (угла места  $\Delta$ ), поскольку при уменьшении угла места увеличивается путь радиоволны в атмосфере.

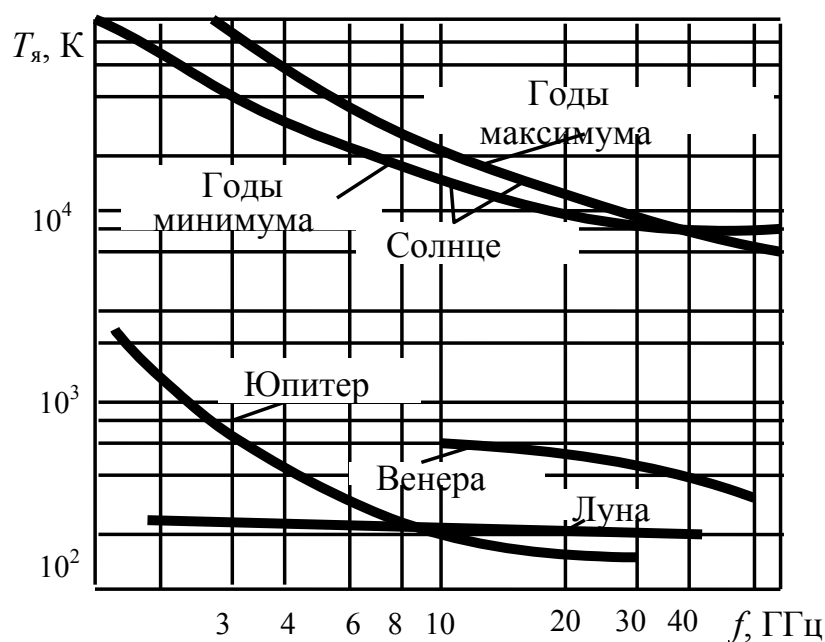


Рис. 17.4. Зависимость яркостной температуры Солнца, Луны и планет от частоты

В качестве примера рассмотрим вычисление шумовой температуры телевизионной антенны.

**Пример.** Определить мощность шумов на входе телевизионного приемника, если частота 100 МГц, полоса частот 6 МГц (приблизительно третий телевизионный канал), приемная антенна — симметричный полуволновой вибратор. Принять  $\eta_a = 1$ ,  $\eta_\phi = 0,9$ .

### Решение

1. Собственные шумы приемника для частоты 100 МГц определяются по графику рис. 17.1 (транзисторная входная цепь) и составляют  $T_{\text{пр}} = 250$  К.

2. Атмосферными помехами на этой частоте можно пренебречь (см. рис. 17.2).

3. Промышленные помехи определяются по графику рис. 17.2. Напряженность поля помех  $E_{\text{п}}$  равна 10 дБ по отношению к 1 мкВ/м, т.е.  $E_{\text{ш}} = 3,1 \cdot 10^{-6}$  В/м. Однако, как указывалось выше, эти данные характеризуют в основном вертикальную компоненту электрического поля. Поскольку выделить горизонтальную составляющую помехи не представляется возможным, в дальнейшем ее учитывать не будем.

4. Космические шумы характеризуются яркостной температурой  $T_{\text{я}} = 700$  К (см. рис. 17.3, средний уровень). Поскольку космические шумы приходят практически со всех направлений, то согласно формуле (17.8)

$$T_{\text{ш.косм}} = \eta_{\text{ф}} T_{\text{я}} = 700 \text{ К.}$$

Шумовую температуру Солнца можно было бы определить по формуле (17.7), ограничиваясь интегрированием по телесному углу для Солнца:

$$T_{\text{ш.С}} = \frac{1,64}{4\pi} T_{\text{я.С}} \Omega_{\text{С}},$$

где 1,64 — КНД полуволнового вибратора (без учета влияния Земли). Однако данных по яркостной температуре Солнца на таких частотах в литературе нет. Поэтому шум Солнца учитывать не будем.

5. Шумы, созданные тепловым излучением Земли и нагретой атмосферы, определим по формуле (17.7), распространив ее на телесный угол  $2\pi$ , под которым видна Земля из точки расположения антенны. Яркостная температура Земли зависит от угла падения волны и определяется по формуле

$$T_{\text{я}} = T_0 (1 - |R|^2),$$

где  $R$  — коэффициент отражения от поверхности Земли, зависящий от угла падения, поляризации волны и свойств почвы.

Оценим приближенно интеграл в формуле (17.6) по теореме о среднем значении. Для среднего угла падения, равного  $45^\circ$ , получим:

$$T_{ш.з} = \frac{GT_0}{4\pi} \int_{2\pi} (1 - |R|^2) F^2(\Omega) d\Omega \approx \frac{1,64 \cdot 300}{4\pi} \cdot 0,5 \cdot 0,7 \cdot 2\pi \approx 86 \text{ К.}$$

Здесь приняты значения:  $|R| = 0,7$  (горизонтальная поляризация, сухая почва, угол падения  $45^\circ$ );  $F(45^\circ) = 0,7$  в плоскости вектора  $\vec{E}$  (проходящей через ось вибратора);  $F(45^\circ) = 1$  в плоскости вектора  $\vec{H}$  (перпендикулярной оси вибратора); телесный угол для полусферы составляет  $2\pi$ .

6. Собственные шумы антенны и фидера определяются по формуле (17.3):

$$T_{ш.соб} = T_0 \left( (1 - \eta_\phi) + \eta_\phi (1 - \eta_a) \right) = 300(1 - 0,9) = 30 \text{ К.}$$

Таким образом, шумовая температура внешних помех определяется в основном космическими шумами ( $T_{ш.косм} = 700 \text{ К}$ ) и тепловыми шумами Земли ( $T_{ш.з} = 86 \text{ К}$ ). Согласно формуле (17.4) полная шумовая температура помех на входе приемника будет

$$T_{ш} = T_{ш.пр} + T_{ш.соб} + \eta_\phi T_{ш.вн} = 250 + 30 + 786 \cdot 0,9 \approx 987 \text{ К.}$$

Для сравнения приведем данные по шумовой температуре приемных телевизионных антенн: 1-й канал — 15000 К; 2-й, 3-й каналы — 3000 К; , 4-й канал — 300 К.

Расхождение в определении шумовой температуры проведенных расчетов и литературных данных объясняется тем, что в расчете не учитывались промышленные помехи, которые могут быть сравнимы с уровнем остальных помех.

В заключение оценим действующее значение напряжения шумов  $U_{ш}$  на входе приемника через мощность шумов  $P_{ш}$  и входное сопротивление приемника  $R_{пр}$ :

$$U_{\text{ш}} = \sqrt{P_{\text{ш}}/R_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{k\Delta f T_{\text{ш}}}{R_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 987}{75}} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ В.}$$

Таким образом, рассчитанное напряжение шумов на входе приемника гораздо меньше чувствительности типичного телевизионного приемника, составляющей 50–200 мкВ.

## Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды помех и причины их возникновения.
2. Какой смысл имеет термин «шумовая температура антенны»?
3. Какие виды помех являются преобладающими в различных частотных диапазонах?
4. Что является источником атмосферных помех? Укажите частотный спектр атмосферных помех.
5. Что такое яркостная температура источника помехи? Чему она равна для Земли, Солнца, космического пространства?
6. Сформулируйте определение шумовой температуры антенны по известным яркостным температурам источников помех.

## Литература

1. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – 4-е изд. – М. : Либроком, 2010. – 544 с.
2. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. / В.А. Неганов [и др.] ; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – 4-е изд., доп. и перераб. – М. : Радиотехника, 2009. – 744 с.
3. Морозов А.В. Электродинамика и распространение радиоволн / А.В. Морозов, А.Н. Нырцов, Н.П. Шмаков. – М. : Радиотехника, 2007. – 408 с.
4. Нефедов Е.И. Техническая электродинамика : учеб. пособие для студентов высших учеб. заведений / Е.И. Нефедов. – М. : Академия, 2008. – 416 с.
5. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн / Б.М. Петров. – М. : Горячая линия-Телеком, 2007. – 558 с.
6. Пименов Ю.В. Техническая электродинамика : учеб. пособие для вузов / Ю.В. Пименов, В.И. Вольман, А.Д. Муравцов ; под ред. Ю.В. Пименова. – М. : Радио и связь, 2002. – 536 с.
7. Крамм М.Н. Сборник задач по основам электродинамики : учеб. пособие для вузов / М.Н. Крамм. – СПб. : Лань, 2011. – 248 с.
8. Боков Л.А. Электромагнитные поля и волны : учеб. пособие / Л.А. Боков. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2003. – 214 с.
9. Сомов А.М. Распространение радиоволн : учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальностям в области информационной безопасности / А.М. Сомов, В.В. Старостин. – М. : Гелиос АРВ, 2010. – 264 с.
10. Электромагнитные поля и волны : учеб. пособие / В.А. Замотринский [и др.]. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2006. – 175 с.
11. Мандель А.Е. Распространение радиоволн : учеб. пособие / А.Е. Мандель, В.А. Замотринский. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2006. – 164 с.
12. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн : учеб. для вузов / Г.А. Ерохин [и др.] ; под ред. Г.А. Ерохина. – 2-е изд. – М. : Горячая линия-Телеком, 2004. – 491 с.



13. Распространение радиоволн : учеб. / О.И. Яковлев [и др.]. – 2-е изд. – М. : ЛЕНАНД, 2012. – 496 с.
14. Устройства СВЧ и антенны / Д.И. Воскресенский [и др.]. – М. : Радиотехника, 2006. – 378 с.
15. Нефедов Е.И. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства : учеб. пособие / Е.И. Нефедов. – М. : Академия, 2010. – 320 с.
16. Маковеева М.М. Системы связи с подвижными объектами : учеб. пособие для вузов / М.М. Маковеева, Ю.С. Шинаков. □ М. : Радио и связь, 2002. – 440 с.
17. Долуханов М.П. Распространение радиоволн / М.П. Долуханов. – М. : Связь, 1972. – 336 с.
18. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн / Г.П. Грудинская. – М. : Высш. шк., 1975. – 280 с.
19. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн / Ф.Б. Черный. – М. : Советское радио, 1972. – 458 с.
20. Черенкова Е.Л. Распространение радиоволн / Е.Л. Черенкова, О.В. Чернышев. – М. : Радио и связь, 1984. – 272 с.
21. Красюк И.П. Электродинамика и распространение радиоволн / И.П. Красюк, Н.Д. Дымович. □ М. : Высш. шк., 1974. – 536 с.
22. Баскаков С.Н. Электродинамика и распространение радиоволн / С.Н. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1992. – 416 с.
23. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности / Е.Л. Фейнберг. – М. : Наука. – 546 с.
24. Калинин А.Н. Распространение радиоволн и работа радиолиний / А.Н. Калинин, Е.Л. Черенкова. – М. : Связь, 1971. – 433 с.

## Список сокращений и обозначений

ДВ – длинные волны

КВ – короткие волны

РЛС – радиолокационная станция

РРЛ – радиорелейная линия

СВ – средние волны

СДВ – сверхдлинные волны

УКВ – ультракороткие волны

$\bar{A}$  – векторный магнитный потенциал

$D$  – коэффициент направленного действия антенны

$\bar{D}, \bar{B}$  – векторы электрической и магнитной индукции

$\bar{E}, \bar{H}$  – векторы напряженностей электрического и магнитного поля

$F(\theta)$  – диаграмма направленности антенны

$F_{\Sigma}(\theta)$  – диаграмма направленности антенны с учетом влияния

Земли

$G$  – коэффициент усиления антенны

$H_0$  – напряженность постоянного магнитного поля Земли

$I(r, t)$  – электрический ток

$\bar{j}(r, t)$  – вектор плотности электрического тока

$k$  – волновое число

$L$  – потери в линии связи (коэффициент ослабления)

$\bar{M}$  – вектор намагниченности

$N$  – индекс преломления в тропосфере

$N_e$  – электронная концентрация в ионосфере

$P$  – мощность электромагнитного поля

$\bar{P}$  – вектор электрической поляризации

$P_{\Pi}, P_{\text{ст}}$  – мощности потерь и стороннего источника

$p$  – плотность мощности электромагнитного поля

$p_{\Pi}, p_{\text{ст}}$  – плотности мощностей потерь и стороннего источника

$R_0$  – радиус Земли (6370 км)

$R_{\text{э}}$  – эквивалентный радиус Земли

$q$  – электрический заряд

$V$  – функция (множитель) ослабления  
 $W$  – энергия электромагнитного поля  
 $W_{\text{э}}, W_{\text{м}}$  – энергии электрического и магнитного поля  
 $w$  – плотность энергии электромагнитного поля  
 $w_{\text{э}}, w_{\text{м}}$  – плотности энергий электрического и магнитного поля  
 $Z_0$  – волновое сопротивление свободного пространства  
 $\Delta^0$  – глубина проникновения электромагнитного поля в проводник  
 $\epsilon, \mu$  – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости  
 $\epsilon_0, \mu_0$  – диэлектрическая и магнитная постоянные  
 $\epsilon_r, \mu_r$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости  
 $\vec{\Pi}$  – вектор Пойнтинга  
 $\rho, \xi, \tau$  – плотности объемного, поверхностного и линейного заряда  
 $\sigma$  – удельная проводимость среды  
 $\varphi$  – скалярный электростатический потенциал  
 $\chi_{\text{э}}, \chi_{\text{м}}$  – электрическая и магнитная восприимчивости

# Оглавление

Предисловие.....	3
Введение.....	5
ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	
1. Общие сведения о макроскопической электродинамике	
1.1. Векторы электромагнитного поля.....	11
1.1.1. Определение электромагнитного поля.....	11
1.1.2. Векторы электрического поля.....	11
1.1.3. Векторы магнитного поля.....	13
1.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Полный ток.....	14
1.3. Классификация сред, материальные уравнения.....	17
1.4. Уравнения Максвелла.....	21
1.4.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной форме.....	21
1.4.2. Первое уравнение Максвелла: полный ток и магнитное поле.....	23
1.4.3. Второе уравнение Максвелла: обобщенный закон электромагнитной индукции.....	25
1.4.4. Третье уравнение Максвелла: электрическое поле и заряды.....	26
1.4.5. Четвертое уравнение Максвелла: непрерывность линий вектора $\vec{B}$ .....	26
1.4.6. Заключительные замечания об уравнениях Максвелла.....	27
1.5. Граничные условия для электромагнитного поля.....	27
1.5.1. Постановка задачи.....	27
1.5.2. Нормальные и тангенциальные составляющие векторов.....	28
1.5.3. Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля.....	29
1.5.4. Граничные условия для нормальных составляющих магнитного поля.....	31
1.5.5. Граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля.....	31
1.5.6. Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля.....	33
1.6. Энергия электромагнитного поля.....	34
1.6.1. Закон Джоуля – Ленца и превращение энергии.....	34
1.6.2. Баланс энергии электромагнитного поля.....	36
1.6.3. Энергия электромагнитного поля.....	40
1.6.4. Локальный баланс и движение энергии.....	41

1.6.5. Заключительные замечания.....	42
1.7. Классификация электромагнитных явлений.....	43
Контрольные вопросы.....	44
2. Электростатика	
2.1. Уравнения Максвелла для электростатического поля.....	45
2.2. Электростатический потенциал.....	45
2.3. Граничные условия в электростатике.....	48
2.4. Определение потенциала по заданному распределению заряда. Принцип суперпозиции.....	49
2.5. Уравнения для электростатического потенциала.....	51
2.6. Основная задача электростатики.....	55
2.7. Методы решения задач электростатики.....	59
2.8. Емкость. Конденсатор в электростатике.....	68
2.9. Энергия электростатического поля.....	71
Контрольные вопросы.....	72
3. Электромагнитное поле постоянных токов	
3.1. Электрическое поле постоянного тока.....	73
3.2. Магнитное поле постоянного тока.....	76
3.3. Магнитное поле линейного тока.....	80
3.4. Примеры магнитных полей.....	82
3.4.1. Поле прямого провода (прямолинейного тока).....	82
3.4.2. Круглый виток и соленоид.....	83
3.4.3. Магнитный диполь.....	85
3.5. Магнитная энергия постоянного тока.....	87
3.6. Индуктивность и взаимная индуктивность.....	88
Контрольные вопросы.....	92
4. Общие свойства переменного электромагнитного поля	
4.1. Монохроматическое поле, метод комплексных амплитуд.....	93
4.2. Уравнения Максвелла в комплексной форме.....	94
4.3. Волновые уравнения.....	96
4.4. Средний баланс энергии электромагнитного поля.....	97
4.4.1. Среднее значение характеристик поля.....	97
4.4.2. Средний баланс энергии.....	100
4.5. Теорема единственности для монохроматического электромагнитного поля.....	102
4.5.1. О единственности решений.....	102
4.5.2. Внутренняя задача.....	102
4.5.3. Внешняя задача.....	104
4.6. Теорема взаимности.....	105
4.6.1. Лемма Лоренца.....	105
4.6.2. Доказательство теоремы взаимности.....	106

4.6.3. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла. Магнитные токи .....	108
Контрольные вопросы.....	109
5. Плоские электромагнитные волны в изотропных неограниченных средах	
5.1. Волновой характер электромагнитного поля.....	111
5.2. Плоские волны в средах без потерь .....	111
5.3. Поляризация электромагнитных волн .....	117
5.4. Плоские электромагнитные волны в поглощающих средах.....	120
5.4.1. Затухание электромагнитных волн .....	120
5.4.2. Волновое число в поглощающих средах .....	122
5.4.3. Электромагнитные волны в диэлектрике .....	123
5.4.4. Электромагнитные волны в проводящих средах.....	124
5.4.5. Поверхностный эффект.....	124
Контрольные вопросы.....	126
6. Плоские электромагнитные волны в анизотропных средах	
6.1. Анизотропные среды.....	127
6.2. Электромагнитные волны в кристаллах .....	130
6.2.1. Классификация кристаллов по их электромагнитным свойствам.....	130
6.2.2. Электромагнитные волны в одноосных кристаллах .....	131
6.3. Электромагнитные волны в гиротропных средах.....	134
6.3.1. Общие свойства феррита .....	134
6.3.2. Феррит в постоянном магнитном поле .....	135
6.3.3. Намагниченный феррит в переменном магнитном поле .....	138
6.4. Плазма в электромагнитном поле .....	143
6.4.1. Общие свойства плазмы.....	143
6.4.2. Диэлектрическая проницаемость плазмы в переменном электромагнитном поле .....	144
6.4.3. Тензор диэлектрической проницаемости намагниченной плазмы .....	147
6.5. Продольное распространение плоских электромагнитных волн в феррите .....	150
6.6. Поперечное распространение электромагнитных волн в феррите .....	157
Контрольные вопросы.....	160
7. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн	
7.1. Общие положения.....	162
7.2. Нормальное падение плоской волны .....	163
7.3. Волна, распространяющаяся в произвольном направлении.....	168
7.4. Формулы Френеля для горизонтально поляризованных волн.....	170

7.5. Формулы Френеля для вертикально поляризованных волн .....	174
7.6. Полное отражение от границы двух диэлектриков .....	176
7.7. Наклонное падение на границу поглощающей среды .....	179
7.8. Приближенные граничные условия Леонтовича.....	181
7.9. Наклонное падение на границу с диэлектриком. Угол Брюстера .....	183
Контрольные вопросы.....	185
8. Излучение электромагнитных волн	
8.1. Уравнения Максвелла для области, содержащей источники. Неоднородные волновые уравнения.....	186
8.2. Электродинамические потенциалы .....	187
8.3. Решение уравнений для электродинамических потенциалов .....	190
8.4. Элементарный электрический излучатель .....	193
8.5. Исследование поля электрического диполя.....	197
8.5.1. Поле в ближней зоне .....	197
8.5.2. Поле в дальней зоне .....	198
8.6. Элементарный магнитный излучатель .....	202
Контрольные вопросы.....	205
9. Направляемые электромагнитные волны и направляющие системы	
9.1. Понятие о направляющей системе. Классификация направляемых волн .....	207
9.2. Связь между продольными и поперечными составляющими поля в однородной направляющей системе .....	208
9.3. Условия распространения электромагнитных волн в направляющих системах. Критическая длина волны.....	212
9.4. Групповая скорость электромагнитных волн в направляющих системах.....	214
9.5. Дисперсия направляемых электромагнитных волн.....	216
9.6. Общие свойства направляемых волн.....	217
9.6.1. Поперечные электромагнитные волны (Т-волны).....	217
9.6.2. Электрические волны (Е-волны).....	218
9.6.3. Магнитные волны (Н-волны) .....	219
9.7. Прямоугольный волновод .....	219
9.8. Коаксиальная линия .....	229
Контрольные вопросы.....	230
10. Объемные резонаторы	
10.1. Общая теория электромагнитных резонаторов .....	232
10.1.1. Накопление энергии в объеме. Резонатор и направляющая структура.....	232
10.1.2. Свойства полей резонаторов .....	236
10.1.3. Учет потерь. Добротность резонаторов.....	239

10.2. Полые резонаторы .....	240
10.2.1. Прямоугольный резонатор.....	240
10.2.2. Другие полые резонаторы.....	244
10.2.3. Твердотельные и планарные резонаторы .....	246
10.2.4. Оптические и квазиоптические резонаторы.....	248
Контрольные вопросы.....	250
<b>ЧАСТЬ 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН</b>	
11. Распространение радиоволн в свободном пространстве	
11.1. Классификация радиоволн по диапазонам.....	253
11.2. Некоторые сведения из теории антенн .....	255
11.3. Область пространства, существенная при распространении радиоволн.....	259
11.4. Классификация радиоволн по способу распространения .....	269
11.5. Понятие о функции ослабления .....	273
Контрольные вопросы.....	274
12. Распространение земных радиоволн при поднятых антеннах	
12.1. Электрические параметры различных типов земной поверхности .....	275
12.2. Расстояние прямой видимости .....	278
12.3. Распространение радиоволн при поднятых антеннах и плоской Земле .....	280
12.3.1. Интерференционная формула.....	280
12.3.2. Диаграммы направленности поднятых антенн .....	285
12.3.3. Условия применимости отражательной трактовки .....	290
12.3.4. Квадратичная формула Введенского .....	291
12.4. Отражение радиоволн от неровной земной поверхности. Критерий Рэлея.....	294
12.5. Учет сферичности Земли в интерференционных формулах.....	296
12.6. Распространение радиоволн в зоне тени и полутени .....	299
Контрольные вопросы.....	307
13. Распространение земных радиоволн при низко расположенных антеннах.....	309
13.1. Формула идеальной радиопередачи.....	309
13.2. Структура поля над поглощающей поверхностью Земли.....	311
13.3. Расчет вертикальной составляющей напряженности электрического поля. Формула Шулейкина – Ван-дер-Поля .....	316
13.4. Распространение радиоволн при низко расположенных антеннах над неоднородной трассой .....	321
Контрольные вопросы.....	325



14. Тропосфера и ее влияние на распространение радиоволн	
14.1. Электрические параметры тропосферы .....	326
14.2. Рефракция радиоволн .....	329
14.2.1. Траектория волны в сферически слоистой среде .....	329
14.2.2. Эквивалентный радиус Земли .....	334
14.2.3. Виды тропосферной рефракции .....	336
14.2.4. Распространение радиоволн в условиях сверхрефракции .....	338
14.3. Распространение радиоволн путем рассеяния на неоднородностях тропосферы .....	340
14.4. Ослабление радиоволн в тропосфере .....	345
Контрольные вопросы .....	348
15. Ионосфера и ее влияние на распространение радиоволн	
15.1. Состав и строение ионосферы .....	349
15.2. Электрические параметры ионосферы .....	352
15.3. Отражение и преломление радиоволн в ионосфере .....	356
15.4. Поглощение радиоволн в ионосфере .....	364
15.5. Влияние постоянного магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере .....	366
Контрольные вопросы .....	370
16. Диапазонные особенности распространения радиоволн	
16.1. Особенности распространения сверхдлинных и длинных волн .....	371
16.2. Особенности распространения средних волн .....	373
16.3. Распространение коротких волн .....	375
16.4. Распространение ультракоротких волн .....	378
16.4.1. Распространение УКВ в пределах прямой видимости .....	378
16.4.2. Распространение ультракоротких волн за горизонт .....	385
Контрольные вопросы .....	388
17. Помехи радиоприему	
17.1. Оценка уровня помех .....	389
17.2. Атмосферные помехи .....	393
17.3. Промышленные помехи .....	394
17.4. Космические помехи .....	395
17.5. Шумы, созданные тепловым излучением Земли .....	395
Контрольные вопросы .....	399
Литература .....	400
Список сокращений и обозначений .....	402