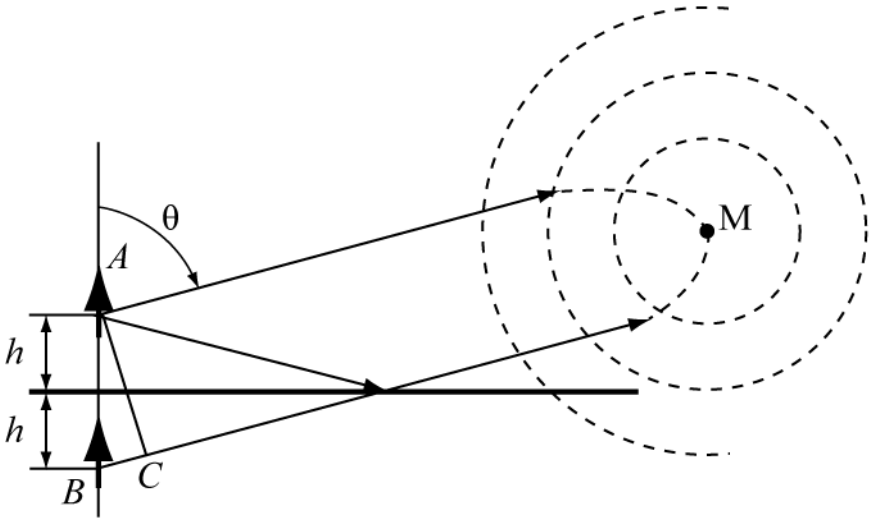
Боков Л.А., Мандель А.Е.,
Соколова Ж.М., Шангина Л.И.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ:
сборник задач и упражнений

Учебное пособие



Томск – 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Л.А. Боков, А.Е. Мандель Соколова Ж.М., Шангина Л.И.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ: сборник задач и упражнений

Учебное пособие

Томск – 2022

УДК 537.8(075.8) + 621.371.3(075.8)
ББК 22.336я73
Б786

Рецензент:

Шарангович С. Н., зав. кафедрой сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники, канд. физ.-мат. наук**.**

Боков Л.А.

Б786 Электромагнитные поля и волны: сборник задач и упражнений. Учебное пособие/ / Боков Л.А., А.Е. Мандель, Соколова Ж.М., Шангина Л.И.– Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2022. – 181 с.

Учебное пособие содержит материалы практических занятий по дисциплинам «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространнение радиоволн». Представлены решения широкого круга задач для практических занятий, излагаются вопросы теории, необходимые для решения задач. Представлены вопросы и задачи по элементам векторного анализа.

Учебное пособие предназначено для студентов технических направлений подготовки и специальностей.

УДК 537.8(075.8) + 621.371.3(075.8)
ББК 22.336я73
Б786

© Л.А. Боков, А.Е. Мандель,
Соколова Ж.М., Шангина Л.И..
2022

© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2022

Содержание

Введение ... 5
Глава 1. Элементы векторной алгебры и векторного анализа ... 8
1.1. Сведения из векторной алгебры и векторного анализа ... 8
1.2. Поля и операции векторного анализа ... 9
1.3. Криволинейные системы координат ... 16
1.4. Примеры решения задач ... 19
1.5. Задачи для самостоятельного решения ... 28
Глава 2. Уравнения Максвелла ... 33
2.1. Краткие теоретические сведения ... 33
2.2. Примеры решения задач ... 36
2.3. Задачи для самостоятельного решения ... 52
Глава 3. Электростатическое поле ... 58
3.1. Краткие теоретические сведения ... 58
3.2. Примеры расчета электростатических полей ... 61
3.3. Задачи для самостоятельного решения ... 72
Глава 4. Электромагнитное поле постоянных токов ... 79
4.1. Электрическое поле постоянного тока ... 79
4.2. Магнитное поле постоянного тока ... 80
4.3. Энергия магнитного поля постоянного тока ... 82
4.4. Индуктивность и взаимная индуктивность ... 83
4.5. Примеры решения задач ... 84
4.6. Задачи для самостоятельного решения ... 93
Глава 5. Плоские электромагнитные волны ... 97
5.1. Плоские волны в безграничных средах ... 97
5.2. Отражение и преломление плоских волн от границы раздела двух сред ... 105
5.3. Задачи для самостоятельного решения ... 112
Глава 6. Излучение электромагнитных волн ... 116
6.1. Краткие теоретические сведения ... 116
6.2. Примеры решения задач ... 122
6.3. Задачи для самостоятельного решения ... 130
Глава 7. Электромагнитные поля в направляющих системах ... 134
7.1. Краткие теоретические сведения ... 134
7.2. Примеры решения задач ... 144
7.3. Задачи для самостоятельного решения ... 154
Глава 8. Электромагнитные поля в объемных резонаторах ... 160
8.1. Краткие теоретические сведения ... 160
8.2. Примеры решения задач ... 170
8.3. Задачи для самостоятельного решения ... 176
Список литературы ... 181

Введение

Материал предлагаемого студентам пособия содержит разобранные варианты практических занятий, охватывающие все разделы курса «Электромагнитные поля и волны». Разделы пособия построены по единому принципу. В начале каждого практического занятия кратко излагаются теоретические сведения. Приведенные формулы являются справочным материалом, имеющим целью экономию времени учащегося при решении предложенных задач и необходимы для самостоятельной работы студентов. Во второй части занятия приводятся подробные решения ряда типичных задач. В третьей части занятия предлагаются задачи для самостоятельного решения. Цель данного пособия помочь студентам усвоить лекционный курс.

Пособие написано сотрудниками кафедры сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Задачи, приведенные в пособии, частично заимствованы из различных учебных пособий и монографий, а в основном разработаны преподавателями кафедры. Для усвоения материала требуются знания основ высшей математики, читаемых в вузах. В связи с этим первая глава пособия содержит элементы векторной алгебры и векторного анализа.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических направлений подготовки и специальностей.

Список условных обозначений

A – работа, Дж.

$\bar{B}$ – магнитная индукция, Тл ($Вб/м^2$).

C – емкость, Ф.

c – скорость света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

$\bar{D}$ – электрическое смещение (электрическая индукция), $Кл/м^2$.

$\bar{E}$ – напряженность электрического поля, В/м.

e – заряд электрона, $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$\bar{F}$ – сила, Н.

f (ω) – рабочая частота, Гц (круговая частота, рад/с).

$\bar{H}$ – напряженность магнитного поля, А/м.

I – электрический ток, А.

J, j, j_S – плотность электрического тока, плотность поверхностного тока, $А/м^2$.

k, $\bar{k}$ – волновое число и волновой вектор, 1/м.

L, M – индуктивность и взаимная индуктивность, Гн.

m – масса электрона, $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

$\bar{M}$ – вектор намагниченности среды, Тл ($Вб/м^2$).

n – показатель преломления среды.

$\bar{p}$ – импульс частицы, кг · м/с.

$\bar{P}_e$ – дипольный момент, Кл · м.

P, $P_\text{Т}$ – мощность и мощность тепловых потерь, Вт.

$\bar{P}$ – вектор поляризации среды, $Кл/м^2$.

q – величина электрического заряда, Кл.

$\bar{r}$ – радиус-вектор точки.

φ, U – электрические потенциал и напряжение, В.

ϑ, $v_\text{ф}$ – фазовая скорость распространения ЭМВ в среде, м/с.

$v_\text{гр}$ – групповая скорость, м/с.

W, W_E, W_M – энергия, электрическая энергия, магнитная энергия ЭМП, Дж.

w – объемная плотность энергии электромагнитной поля, $Дж/м^3$.

Z_C – характеристическое (волновое) сопротивление среды, Ом.

W_0 – характеристическое (волновое) сопротивление вакуума, $W_0 = 120\pi$ Ом.

$\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ – орты декартовой системы координат.

$\bar{r}_0$, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{z}_0$ – орты цилиндрической системы координат.

$\bar{r}_0$, $\bar{\theta}_0$, $\bar{\alpha}_0$ – орты сферической системы координат.

α – коэффициент затухания (потерь) в среде, $1/\text{м}$.

β – фазовая постоянная распространения волны, $1/\text{м}$.

γ – постоянная распространения волны, $1/\text{м}$ ($\gamma = \beta + i\alpha$).

Δ – угол потерь.

δ – глубина проникновения электромагнитного поля, м.

ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $\Phi/\text{м}$.

ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$.

ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9} = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $\Phi/\text{м}$.

σ – удельная проводимость среды, $\text{См}/\text{м}$.

μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ $\text{Гн}/\text{м}$.

μ – абсолютная магнитная проницаемость, $\text{Гн}/\text{м}$.

μ_r – относительная магнитная проницаемость, $\mu_r = \mu/\mu_0$.

$\chi_{\text{М}}$, $\chi_{\text{Э}}$ – магнитная и электрическая восприимчивости среды.

ρ, ξ, τ – объемная, поверхностная, линейная плотности электрического заряда, соответственно $\text{Кл}/\text{м}^3$, $\text{Кл}/\text{м}^2$, $\text{Кл}/\text{м}$.

Φ, ψ_{ik} – магнитный поток и потокосцепление, Вб.

λ (λ_0) – длина волны в среде (вакууме), м.

$\bar{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, $\text{Вт}/\text{м}^2$.

ЭДС, Э – электродвижущая сила, В.

Глава 1. Элементы векторной алгебры и векторного анализа

1.1. Сведения из векторной алгебры и векторного анализа

Рассмотрим декартову систему координат. Соответствующие направления осей X, Y, Z декартовой системы координат задаются единичными векторами $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$.

Любой вектор в декартовой системе координат можно представить в виде разложения:

$$\vec{A} = A_x\vec{x}_0 + A_y\vec{y}_0 + A_z\vec{z}_o \qquad (1.1)$$

где A_x, A_y, A_z – проекции вектора $\vec{A}$ на оси X, Y, Z соответственно (компоненты вектора $\vec{A}$).

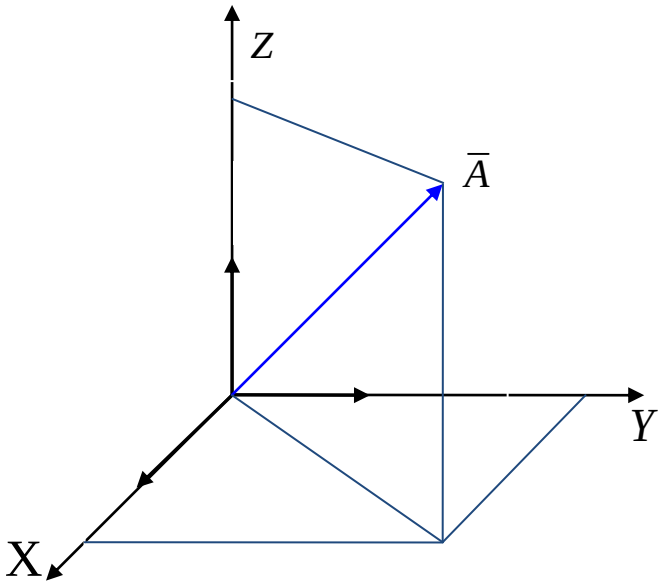


Рис. 1.1. Компоненты вектора

Сложение двух векторов сводится к суммированию их компонент:

$$\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{x_0}(A_x + B_x) + \overrightarrow{y_0}(A_y + B_y) + \overrightarrow{z_0}(A_z + B_z) \qquad (1.2)$$

Скалярное произведение двух векторов $\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$ есть скаляр, который вычисляется по следующим правилам:

$$\left(\vec{A}\,\vec{B}\right) = \vec{A}\,\vec{B} = \vec{A}\,\vec{B}\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.3)$$

где α - угол между направлениями векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

Векторное произведение двух векторов есть вектор, перпендикулярный исходным векторам и направленный в сторону движения правого винта, если вращать от первого вектора ко второму по наименьшему углу.

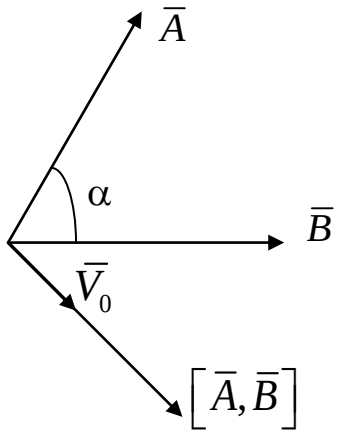


Рис. 1.2. К определению векторного произведения

Зададим направление векторного произведения ортом $\bar{V}_0$. Тогда векторное произведение двух векторов будет:

$$\left[\vec{A}\,\vec{B}\right] = \vec{V}_0 AB sin\alpha = \begin{vmatrix} \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{y_0} & \overrightarrow{z_0} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{x_0}\left(A_y B_z - B_y A_z\right) -$$

$$-\overrightarrow{y_0}(A_x B_z - A_z B_x) + \overrightarrow{z_0}\left(A_x B_y - A_y B_x\right) \qquad (1.4)$$

где α – угол между направлениями векторов.

Двойное векторное произведение может быть вычислено как

$$\left[\vec{A}\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right] = \vec{B}\left(\vec{A},\vec{C}\right) - \vec{C}(\vec{A},\vec{B}) \qquad (1.5)$$

Для смешанного произведения существует правило перестановки:

$$\vec{A}\cdot\left[\vec{B}\cdot\vec{C}\right] = \cdot\vec{C}\left[\vec{A}\cdot\vec{B}\right] = \vec{B}\left[\vec{C}\cdot\vec{A}\right] \qquad (1.6)$$

1.2. Поля и операции векторного анализа

Для описания физических полей, к которым относятся электромагнитные поля, используются их математические модели – скалярные и векторные поля. Скалярные и векторные величины, при описании полей в заданном пространстве являются функциями положения точки M, т.е. являются функциями координат. Совокупность значений некоторой величины (скалярной или векторной), отнесенных каждой точке пространства, называется полем этой величины. Если величина скалярная, это поле называется **скалярным**. Если величина векторная, то поле будет **векторным**.

1.2.1. Скалярное поле

Пусть в каждой точке пространства задана некоторая скалярная величина $U = U\left(M\right) = U\left(x,y,z\right)$, которая характеризуется своим числовым значением. В этом случае говорят, что этой скалярной величиной задано

скалярное поле, а функцию $U(x,y,z)$ называют функцией поля. Таким полем может быть поле скалярного потенциала $\phi = f(M) = f(x,y,z)$, поле температур в неравномерно нагретом теле $T = f(x,y,z)$, плотность массы неоднородного тела $m = f(x,y,z)$.

Геометрической характеристикой скалярного поля являются поверхности уровня или эквипотенциальные поверхности – поверхности, на которых скалярная функция U имеет одно и то же значение:

$$U(x,y,z) = \text{const}.$$

Зададим функцию $U = U(x,y,z)$, описывающую скалярное поле. Выберем произвольную точку $M(x,y,z)$ этого поля и произвольный луч $\overline{l}$, выходящий из точки M в направлении единичного вектора $\overline{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где (α,β,γ) – углы, образованные вектором $\overline{l}_0$ с осями координат.

Производной функции $U = U(x,y,z)$ в точке M по направлению $\overline{l}$ называют предел отношения приращения функции ΔU в направлении $\overline{l}$ величины перемещения Δl при $\Delta l \to 0$:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\partial U}{\partial l}.$$

Производная по направлению дает скорость изменения функции в заданном направлении. Формула вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \quad (1.7)$$

Градиентом скалярного поля, задаваемого скалярной функцией $U(x,y,z)$, называется вектор, координаты которого совпадают со значениями соответствующих частных производных этой функции

$$\text{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{x}_0 + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{y}_0 + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{z}_0. \quad (1.8)$$

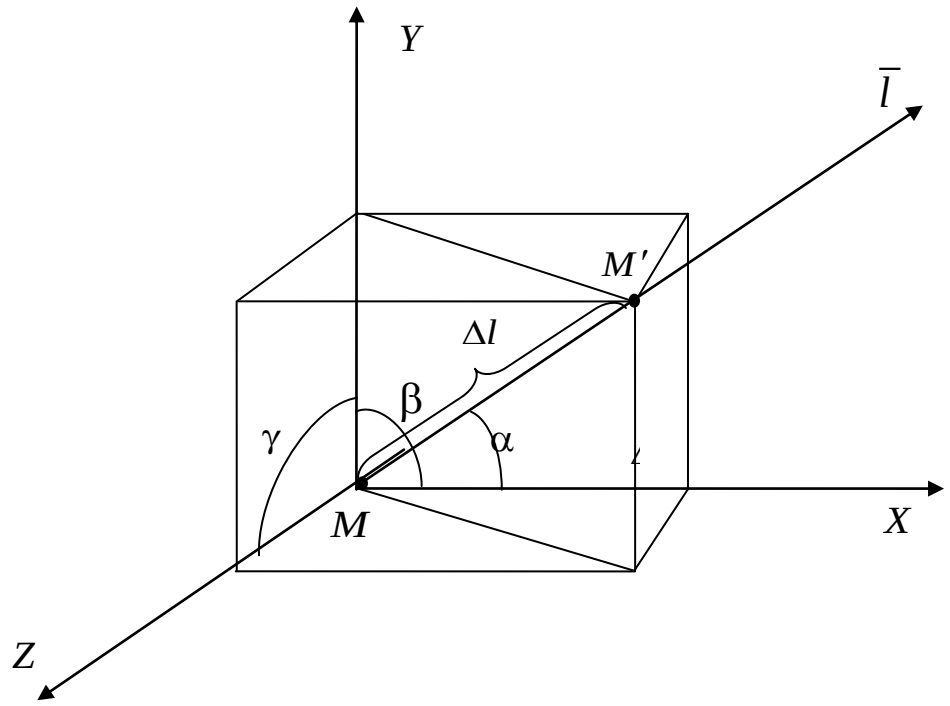


Рис. 1.3. К определению производной по направлению

Градиент скалярной функции U – $\mathrm{grad}U$ – вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

Свойства градиента:

1. $\mathrm{grad}\left(U_1+U_2\right)=\mathrm{grad}U_1+\mathrm{grad}U_2$;
2. $\mathrm{grad}\left(U_{1\cdot}\cdot U_2\right)=U_1\,\mathrm{grad}U_2+U_2\mathrm{grad}U_1$.

Выражение градиента в символической форме с помощью оператора Гамильтона $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0$:

$$\mathrm{grad}U=\nabla U.$$

1.2.2. Векторное поле

Пусть в каждой точке пространства задана некоторая векторная величина $\vec{A}(M)$ или три ее проекции на координатные оси $\vec{A}(M)=A_x\vec{x}_0+A_y\vec{y}_0+A_z\vec{z}_o$. В этом случае говорят, что этой векторной величиной задано векторное поле. Векторными полями являются, например: электрическое поле точечного заряда; поле сил тяготения; поле магнитной напряженности и др.

Графически векторное поле удобно изображать с помощью векторных линий. Векторной линией векторного поля $\vec{A}(M)$ называется такая линия в пространстве, в каждой точке которой вектор $\vec{A}$ направлен по касательной к ней.

Семейство векторных линий определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{Ay} = \frac{dz}{Az}. \qquad (1.9)$$

Пусть в некоторой области пространства задано векторное поле $\vec{A}(M)$ и поверхность S. Тогда потоком векторного поля П через ориентированную поверхность S называется величина

$$\ddot{I} = \int_S \vec{A} d\vec{S} = \int_S A_n dS \qquad (1.10)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$ – векторный дифференциал поверхности, $\vec{n}_0$ – нормаль к участку поверхности dS, a_n – проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль к ориентированному участку поверхности $d\vec{S}$.

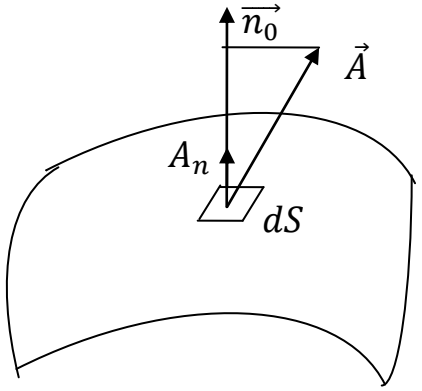


Рис. 1.4. К определению потока векторного поля

Если поверхность S замкнута – вычисляется интеграл по замкнутой поверхности:

$$\text{П} = \oint \vec{A}\ \overrightarrow{dS}$$

Рассмотрим несколько векторных полей, в которых размещена замкнутая поверхность S (рис. 1.5).

Поле на рис. 1.5, *а* содержит точку, из которой расходятся силовые линии поля. Эту точку называют источником поля. Поле на рис. 1.5, *б* содержит точку, в которой силовые линии поля сходятся. Эта точка называется стоком. Выходящие через поверхность S силовые линии рассматриваются как положительные. Соответственно потоки, входящие внутрь объема – как отрицательные.

Силовые линии могут проходить замкнутую область насквозь (рис. 1.5, *в*) или не пересекать ее поверхность (рис 1.5, *г*). На рисунке 1.5, *в* число силовых линий, входящих внутрь объема равно числу силовых линий, выходящих из замкнутого объема. В этом случае суммарный поток через поверхность S равен нулю. Это означает, что источников поля в объеме нет.

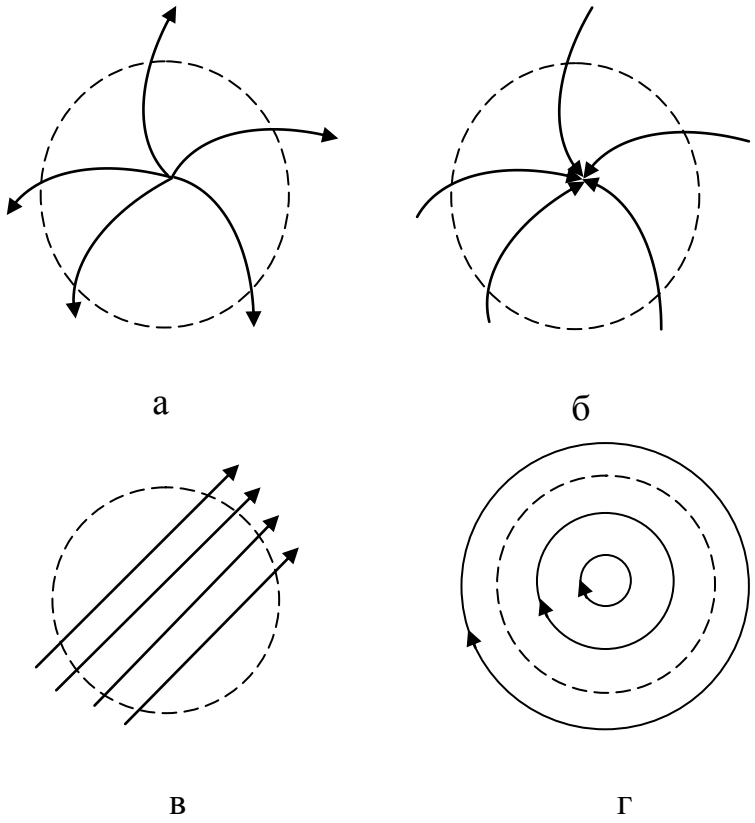


Рис. 1.5. Пунктиром обозначена замкнутая поверхность S

Величину потока векторного поля через замкнутую поверхность можно рассматривать как характеристику самого поля. Тогда, векторное поле можно исследовать, помещая пробную замкнутую поверхность в различные области поля и определяя поток Π. Если разделить величину потока Π на объем V, охваченный поверхностью S, то можно получить в области поля среднюю плотность потока или среднюю мощность источника поля (если он есть внутри). Однако из-за конечных размеров пробной поверхности результаты таких исследований могут оказаться неоднозначными, например, если внутри окажутся два одинаковых по мощности источник и сток. Чтобы избавиться от такой неоднозначности, будем стягивать поверхность к некоторой точке M (рис. 1.6.). Тогда, в пределе объем V устремится к нулю и поверхность S устремится к нулю. Таким образом, будет получена величина мощности источника поля в точке M.

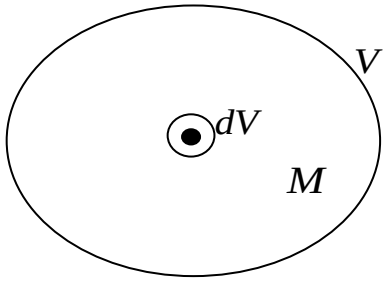


Рис. 1.6. К определению дивергенции векторного поля

Скалярная величина, характеризующая источники поля в рассматриваемой точке поля или указывающая на отсутствие источников, называется дивергенцией (расходимостью) векторного поля в точке M и обозначается как $div\vec{A}(M)$. Часто вместо «дивергенция поля $\vec{A}$» говорят «дивергенция вектора $\bar{a}$». Если $div\,\vec{A}>0$ – в точке M есть источник поля. Если $div\,\vec{A}<0$ – точка M является стоком. Если в точке M источники поля и стоки отсутствуют – $div\,\vec{A}=0$.

Формула для вычисления дивергенции поля $div\vec{A}(M)$ в декартовой системе координат:

$$div\ \vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (1.11)$$

Выражение дивергенции в символической форме с помощью оператора Гамильтона:

$$div\,A=\nabla\vec{A}$$

Свойства дивергенции:

1. $div(\vec{A}_1+\vec{A}_2)=div\vec{A}_1+div\vec{A}_2$;
2. $divC\vec{A}=Cdiv\vec{A}$;
3. $div(\varphi\vec{A})=\varphi div\vec{A}+\vec{A}grad\varphi$.

Теорема Остроградского – Гаусса. Поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции вектора $\bar{a}$, взятого по объему V, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{A}d\bar{s}=\int_V div\,\vec{A}\,d\vec{V}. \qquad (1.12)$$

Левая часть равенства (1.12) – поток векторного поля, возникшего или поглощенного в объеме V. Правая часть – суммирование «производительности» каждого бесконечно малого элемента объема.

Теорема Остроградского – Гаусса позволяет преобразовать поверхностный интеграл в объемный (или наоборот, объемный в поверхностный).

Понятие циркуляции и ротора вводят для описания вихревых свойств поля.

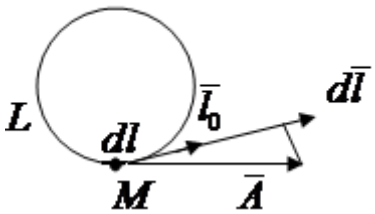


Рис. 1.7. К определению циркуляции векторного поля

Пусть в пространстве задано векторное поле $\vec{A}$. Построим в этом векторном поле контур L (произвольно). Выберем положительное направление обхода контура.

За положительное направления обхода контура принимается направление, при котором поверхность, ограниченная контуром, всегда остается слева (рис. 1.7).

Циркуляцией векторного поля (или вектора $\vec{A}$) называется следующий контурный интеграл:

$$C = \oint_L \vec{A} d\vec{l} \,, \tag{1.13}$$

где $d\vec{l} = \vec{l}_0 dl$ – векторный дифференциал длины.

В случае силового поля линейный интеграл вдоль замкнутой линии L представляет собой работу, выполненную полем при перемещении материальной точки вдоль этой линии.

Ротор (вихрь) векторного поля $rot\vec{A}$ – это вектор, характеризующий интенсивность вихревых полей в каждой точке пространства. Ротор проявляет себя как вихрь, поэтому он имеет ось. Направление оси определяет направление вектора, изображающего ротор.

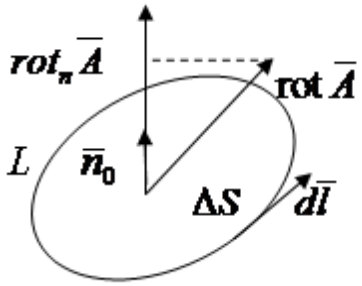


Рис. 1.8. К определению ротора векторного поля

Численно составляющую ротора в направлении нормали $\vec{n}_0$ к плоской площадке ΔS определяют как предел, к которому стремится отношение циркуляции вектора к площадке ΔS, ограниченной контуром интегрирования, при стремлении ее к нулю (рис. 1.8):

$$(rot\ \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_S \vec{A} d\vec{l}}{\Delta S} \,,$$

Формула для вычисления ротора векторного поля $rot\vec{A}$ в декартовой системе координат:

$$rot\vec{A} = \vec{x}_0\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec{y}_0\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1.14}$$

Запишем $rot\vec{A}$ с помощью введенного ранее оператора набла ∇. Если умножить оператор ∇ векторно на вектор$\vec{A}$, то мы получим $rot\vec{A}$:

$$rot\vec{A} = \left[\nabla \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Свойства ротора:

1. $rot(\vec{A} \pm \vec{B}) = rot\vec{A} \pm rot\vec{B}$;
2. $rotC\vec{A} = Crot\vec{A}$, где $C = \text{const}$;
3. $rot(\varphi\vec{A}) = \varphi \cdot rot\vec{A} + \left[grad\varphi \cdot \vec{A}\right]$.
4. $rotrot\vec{A} = grad(div\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$
5. $rot\ grad\ \vec{A} = 0$ при любом φ
6. $div\ rot\ \vec{A} = 0$ при любом $\vec{A}$

Теорема Стокса. Циркуляция вектора $\vec{A}$ по произвольному контуру L равна потоку вектора $rot\vec{A}$ через произвольную поверхность S, ограниченную данным контура:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S} \qquad (1.15)$$

Теорема Стокса устанавливает связь между потоком вектора $rot\vec{A}$ через ориентированную поверхность с циркуляцией этого вектора по краю поверхности. Теорема позволяет преобразовать контурный интеграл в интеграл по поверхности.

Потенциальные и соленоидальные поля. Поле вектора $\vec{A}$ называется **потенциальным**, если существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, при которой во всех точках поля выполняется равенство $div\ \vec{a} = 0$, т.е. $rot\vec{A} = 0$.

Поле вектора $\vec{A}$ называется **соленоидальным** (или **трубчатым**), если в каждой точке поля $div\ \vec{A} = 0$. То есть поле не имеет ни источников, ни стоков. Линии вектора поля замыкаются сами на себя.

1.3. Криволинейные системы координат

В теории электромагнитного поля используются различные системы координат, но чаще всего прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Для удобства записи различных математических операций вводят обобщенную криволинейную, ортогональную систему координат.

В этой системе каждой точке M в пространстве соответствует тройка чисел q_1, q_2, q_3, которые являются криволинейными координатами точки M. Координатными поверхностями называются поверхности $q_1 = c_1$,

$q_2 = c_2$, $q_3 = c_3$, в которых одна из координат сохраняет постоянное значение.

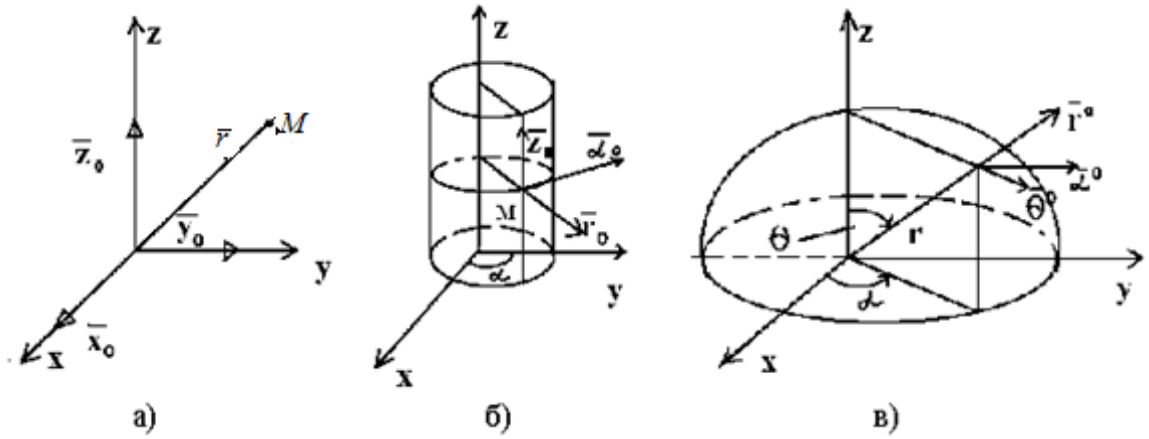


Рис. 1.9. а) прямоугольная система координат; б) цилиндрическая система координат; в) сферическая система координат

Линии пересечения координатных поверхностей называются координатными линиями. Векторы, направленные по касательной к координатным линиям, называются единичными векторами или ортами. В нашем случае они должны образовывать правую тройку векторов.

Рассмотрим прямоугольную, цилиндрическую и сферическую систему координат и установим связь между ними.

Связь между координатами в прямоугольной и цилиндрической системах определяется формулами

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha,\ z = z, \qquad (1.16)$$

между прямоугольными и сферическими координатами – формулами

$$x = r\cos\alpha\sin\theta,\ y = r\sin\alpha\sin\theta,\ z = r\cos\theta. \qquad (1.17)$$

Элемент длины $d\vec{l}$ в рассмотренных системах координат имеет вид

$$d\vec{l} = \vec{x}_0 dx + \vec{y}_0 dy + \vec{z}_0 dz \ - \text{в прямоугольной}, \qquad (1.18)$$

$$d\vec{l} = \vec{r}_0 dr + \vec{\alpha}_0 r d\alpha + \vec{z}_0 dz \ - \text{в цилиндрической}, \qquad (1.19)$$

$$d\vec{l} = \vec{r}_0 dr + \vec{\theta}_0 r d\theta + \vec{\alpha}_0 r\sin(\theta) d\alpha - \text{в сферической}. \qquad (1.20)$$

В этих выражениях коэффициенты при ортах определяют длины отрезков, соответствующие приращению данной координаты. Так, в сферической системе при изменении координаты точки наблюдения b на $b + db$, точка смещается по дуге с радиусом r на расстояние $r\,db$. Коэффициенты, связывающие приращение длины и соответствующей координаты называются коэффициентами Ламэ:

$$\begin{array}{llll} 1. & r & h_r = 1 & \theta \quad h_\theta = r \\ 2. & \alpha & h_\alpha = r & \alpha \quad h_\alpha = r\cdot\sin\theta \\ 3. & z & h_z = 1 & r \quad h_r = 1 \end{array} \qquad (1.21)$$

В прямоугольной системе они равны(1,1,1), в цилиндрической – (1,*r*,1), в сферической –(1, *r*,*r*·*sin*θ). С помощью коэффициентов Ламэ можно

определить элементы поверхности и объема в нужной системе координат. Например, дифференциал (элемент) поверхности сферы равен

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\alpha = rd\theta \cdot r\sin\theta\, d\alpha = r^2 \cdot \sin\theta\, d\theta d\alpha. \qquad (1.22)$$

Элемент объема в сферической системе координат

$$dV = dl_r \cdot dl_\theta \cdot dl_\alpha = r^2 \cdot \sin\theta\, dr d\theta d\alpha. \qquad (1.23)$$

Связь между декартовой и цилиндрической системами определяется формулами:

$x \quad y \quad z$
$\vec{x}_0 \quad \vec{y}_0 \quad \vec{z}_0$
r α z
$\vec{r}_0 \quad \vec{\alpha}_0 \quad \vec{z}_0$
$x = r\cos\alpha;\ y = r\sin\alpha;\ z = z.$

(1.24)

Связь между декартовой и сферической координатами:

$x \quad y \quad z$
$r \quad \theta \quad \alpha$
$\vec{r}_0 \quad \vec{\theta}_0 \quad \vec{\alpha}_0$
$x = r\cos\alpha\sin\theta;$ $y = r\sin\alpha\sin\theta;\ z = r\cos\theta.$

(1.25)

Выражения градиента в различных системах координат имеют вид:

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) = \bar{x}_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{y}_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{z}_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \text{прямоугольная;} \qquad (1.26)$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r,\alpha,z) = \bar{r}_0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{\alpha}_0}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \bar{z}_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \text{цилиндрическая;} \qquad (1.27)$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r,\theta,\alpha) = \bar{r}_0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{\theta}_0}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\bar{\alpha}_0}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} - \text{сферическая.} \qquad (1.28)$$

Выражения дивергенции в трех системах координат имеют вид:

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \text{прямоугольная;} \qquad (1.29)$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \text{цилиндрическая;} \qquad (1.30)$$

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(a_\theta\sin(\theta))}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} - \text{сферическая.} \qquad (1.31)$$

Выражения ротора в трех системах координат имеют вид:

$$rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \text{прямоугольная;} \qquad (1.32)$$

$$rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}_0}{r} & \vec{\alpha}_0 & \frac{\vec{z}_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r\,A_\alpha & A_z \end{vmatrix} - \text{цилиндрическая;} \qquad (1.33)$$

$$rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}_0}{r^2 \sin\theta} & \frac{\vec{\theta}_0}{r\sin\theta} & \frac{\vec{\alpha}_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\theta \cdot A_\alpha \end{vmatrix} - \text{сферическая.} \qquad (1.34)$$

Оператор Лапласа в декартовой системе координат

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \nabla\nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad (1.35)$$

в цилиндрической системе координат представляется в виде

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad (1.36)$$

в сферической – в виде

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}. \qquad (1.37)$$

1.4. Примеры решения задач

Задача №1

Построить поверхности уровня потенциала электростатического поля, заданного уравнением $\varphi(x) = 4x + 7$.

Решение:

Поверхность уровня определяется тем, что на ней скалярная функция остается постоянной $\varphi(x, y, z) = c = \text{const}$. В нашем случае скалярной функцией является потенциал. Поэтому поверхность уровня потенциала носит название эквипотенциальной поверхности. Она задана уравнением $\varphi(x) = 4x + 7 = c$.

Семейство поверхностей уровня (в нашей задаче – эквипотенциальных поверхностей) характерно тем, что значения скаляров (потенциалов) соседних поверхностей отличаются на постоянную величину $\Delta\varphi$, выбранную произвольно. Зададим $\Delta\varphi = \Delta c = 3.$

Построим семейство эквипотенциальных поверхностей. Для этого зададимся каким-либо значением постоянной c. Например, $c = 0, 3, 6, 9, 12$ и т.д., и соответственно определим x.

Из уравнения $\varphi(x) = 4x + 7 = c$ имеем

$$x = \frac{c-7}{4} = \frac{1}{4}c - \frac{7}{4} = 0,25 \cdot c - 1,75.$$

Для выбранных значений c построим таблицу значений x:

c	0	3	6	9	12	15
x	–1,75	–1	–0,25	+0,5	+1,25	+2

Далее найдем φ:

$$\varphi_1 = 4 \cdot (-1,75) + 7 = 0,$$
$$\varphi_2 = 4 \cdot (-1) + 7 = 3,$$
$$\varphi_3 = 4 \cdot (-0,25) + 7 = 6,$$
$$\varphi_4 = 4 \cdot (+0,5) + 7 = 9,$$
$$\varphi_5 = 4 \cdot (+1,25) + 7 = 12,$$
$$\varphi_6 = 4 \cdot (+2) + 7 = 15.$$

Эквипотенциальные поверхности у нас являются плоскостями, поскольку потенциал φ зависит от одной координаты x.

Задача №2

Построить семейство эквипотенциальных поверхностей. Зависимость потенциала φ от координат определяется уравнением

$$\varphi = 10 \lg \frac{1}{r},$$

где $r = \frac{1}{e_0}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; e_0 – единица длины.

Решение:

1. Покажем, что эквипотенциальная поверхность, построенная на основании заданной зависимости потенциала от координат, будет сферой с радиусом r. В самом деле, для того, чтобы потенциал φ был постоянным, нужно, чтобы радиус оставался постоянным. Это имеет место в сфере. Мы установили, что эквипотенциальная поверхность – сфера.

2. Определим потенциалы соответствующих эквипотенциальных поверхностей. Используя условие $\varphi(x, y, z) = c = \text{const}$, рассчитаем несколько значений для φ:

$$\varphi_1 = 10 \lg \frac{1}{r_1} = c;$$

$$\varphi_2 = 10 \lg \frac{1}{r_2} = c + 1 \cdot \Delta c;$$

$$\varphi_3 = 10\lg\frac{1}{r_3} = c + 2\cdot\Delta c;$$

…

$$\varphi_n = 10\lg\frac{1}{r_n} = c + (n-1)\cdot\Delta c;$$

$$\varphi_{n+1} = 10\lg\frac{1}{r_{n+1}} = c + n\cdot\Delta c.$$

Далее надо связать отношение радиусов различных эквипотенциальных сфер:

$$\varphi_{n+1} - \varphi_1 = 10\lg\frac{1}{r_{n+1}} - 10\lg\frac{1}{r_1} = c + n\cdot\Delta c - c = n\cdot\Delta c$$

или

$$10\lg\frac{r_1}{r_{n+1}} = n\cdot\Delta c.$$

Зададимся $\Delta c = 10$, тогда $\lg\frac{r_1}{r_{n+1}} = n$. Отсюда $\frac{r_1}{r_{n+1}} = 10^n$, $r_1 = 10^n \cdot r_{n+1}$.

Тогда $r_{n+1} = r_1 \cdot 10^{-n}$. Пусть $r_1 = 10 м = 10^3 см$. Тогда

$r_2 = r_1 \cdot 10^{-1} = 10^3 \cdot 10^{-1} = 10^2$ см;

$r_3 = r_1 \cdot 10^{-2} = 10^3 \cdot 10^{-1} = 10$ см;

$r_4 = r_1 \cdot 10^{-3} = 10^3 \cdot 10^{-3} = 1$ см;

$r_5 = r_1 \cdot 10^{-4} = 10^3 \cdot 10^{-4} = 0{,}1$ см и т.д.

Вывод. Расстояния между соседними эквипотенциальными сферами уменьшаются по мере увеличения потенциала.

Задача №3

Найти производную плоскопараллельного поля $\varphi(M) = x^2 - y^2$ в точке $M\left(\sqrt{3}, 2\right)$ по направлению вектора $\bar{l} = \vec{x}_0 + \vec{y}_0\sqrt{3}$.

Решение:

По теореме Пифагора находим l: $\left|\bar{l}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Используя свойства градиента, запишем

$$G_l = \overline{G}\cdot\vec{l}^{\,o} = \frac{\delta\varphi}{\delta x}\left(\cos(\vec{x}_0\cdot\bar{l}) + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\cos(\vec{y}_0\cdot\bar{l})\right)$$

Подготовим из условий задачи заготовки:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\beta = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x = 2\sqrt{3};$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y = -4.$$

тогда

$$\frac{\delta\varphi(M)}{\delta l} = \frac{\delta\varphi}{\delta l}\cdot\cos(\vec{x}_o\cdot\vec{l}) + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\cos(\vec{y}_o\cdot\vec{l}) = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Задача №4

Найти наибольшую скорость изменения скалярного поля $\varphi = 5x^2yz + 5xyz^2 - 7xy^2z$ в точке M (1, 1, 1).

Решение:

Запишем формулу для определения градиента скалярного поля: φ:

$$grad\,\varphi = \nabla\varphi$$

Проведем дифференцирование и в полученные результаты подставим координаты точки M:

$$grad\,\varphi = \vec{x}_0(10xyz + 5yz^2 - 7y^z z) + \vec{y}_0(5x^2z + 5xz^2 - 14xyz) +$$
$$+ \vec{z}_0(5x^2y + 10xyz - 7xy^2) = 8\vec{x}_0 - 4\vec{y}_0 + 8\vec{z}_0$$

Ответ: $grad\,\varphi == 8\vec{x}_0 - 4\vec{y}_0 + 8\vec{z}_0$.

Задача №5

Найти векторную линию магнитного поля, создаваемую проводником, по которому течет ток i. (R – расстояние от оси провода до точки наблюдения M.

Решение:

Система дифференциальных уравнений для определения векторных линий запишется в виде:

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

Откуда $xdx = ydy$

Проведя операцию интегрирования, получим: $x^2 + y^2 = R^2$

Ответ: $x^2 + y^2 = R^2$,

т.е. векторные линии являются окружностями с центром на оси провода.

Задача №9

Найти уравнение векторных линий поля $\bar{A}$, $\bar{A}=\left[\bar{r},\bar{i}\right]$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор, $\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z$.

Решение:

$$\bar{A}=\left[x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k},i\right]=-y\bar{k}+z\bar{j},$$

$$\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y}+c,\ \frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=\frac{c^2}{2}.$$

Ответ: $x=c_1,\ y^2+z^2=c_2$.

1.4.13. Задача №13

Вычислить $\operatorname{div}\bar{r}$ в прямоугольной системе координат,

$$\bar{r}=\bar{x}_0x+\bar{y}_0y+\bar{z}_0z.$$

Решение:

Записываем формулу дивергенции и, подставив в нее заданное значение вектора $\bar{r}$, дифференцируем:

$$\operatorname{div}\bar{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Ответ: 3.

Задача №10

Вычислить дивергенцию радиус вектора $\bar{r}$ в прямоугольной системе координат

$$\bar{r}=\bar{x}_0x+\bar{y}_0y+\bar{z}_0z.$$

Решение:

Записываем формулу дивергенции и, подставив в нее заданное значение вектора $\bar{r}$, дифференцируем:

$$\operatorname{div}\bar{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Ответ: 3.

Задача №11

Вычислить div от произведения $2xyz\bar{r}$.

Решение:

Используя свойство дивергенции $\operatorname{div}(\varphi\bar{a})=\varphi\operatorname{div}\bar{a}+\bar{a}\operatorname{grad}\varphi$, распишем заданное значение:

$$\operatorname{div}\left(2xyz\bar{r}\right)=2xyz\cdot\operatorname{div}r+\bar{r}\cdot\operatorname{grad}\left(2xyz\right).$$

Продифференцируем радиус-вектор и проделаем необходимые математические операции:

$$\operatorname{div}\left(2xyz\bar{r}\right) = 6xyz + \left(\bar{x}_0 x + \bar{y}_0 y + \bar{z}_0 z\right) \times$$

$$\left(\bar{x}_0 \frac{\partial\left(2xyz\right)}{\partial x} + \bar{y}_0 \frac{\partial\left(2xyz\right)}{\partial y} + \bar{z}_0 \frac{\partial\left(2xyz\right)}{\partial z}\right) = 6xyz + 6xyz = 12xyz.$$

Ответ: $12xyz$.

Задача №12

Найти ротор вектора $\bar{H} = \dfrac{I}{2\pi R^2}\left(-\bar{x}_0 y + \bar{y}_0 x\right)$.

Решение:

Формула для вычисления ротора векторного поля $\operatorname{rot}\bar{H}$ в декартовой системе координат имеет вид:

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \frac{I}{2\pi R^2}\begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{2I}{2\pi R^2}\bar{z}_0 = \bar{z}_0 \frac{I}{\pi R^2}.$$

Подставляем в нее x-вую и y-вую составляющие напряженности заданного магнитного поля и вычисляем определитель. Полученное значение показывает направление и величину искомого $\operatorname{rot}\bar{H}$.

Задача №13

Определить циркуляцию вектора поля $\bar{A} = 5x\bar{j}$ по контуру, указанному на рис. 1.12.

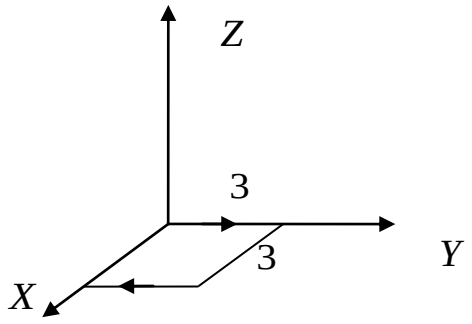


Рис. 1.11. К задаче №13

Решение:

Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint_L \bar{A} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{A}\, d\bar{S},$$

$$Ц = \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 5x & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}\,5;\ d\bar{S} = -\bar{k}\, dS;$$

$$Ц = -5\bar{k} \cdot \bar{k}\,9 = -45.$$

Ответ: -45.

Задача №14

А. Вычислить циркуляцию вектора $\bar{a} = -y^2 \bar{x}_0 + x^2 \bar{y}_0$ по контуру α путем непосредственного интегрирования $Ц = \oint_Z \bar{a} d\bar{l}$, где

$$d\bar{l} = -x_0 dx - y_0 dy.$$

Б. Вычислить циркуляцию этого же вектора, используя теорему Стокса.

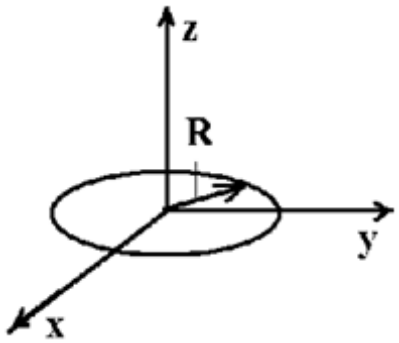


Рис. 1.12. К задаче №14

Решение:

Для А. Воспользовавшись формулой (1.13), запишем определение циркуляции путем непосредственного интегрирования

$$Ц = \int \bar{a} d\bar{l} = \int_0^1 x^2 dy - \int_1^0 y^2 dx + \int (-y^2 x_0 + x^2 y_0) d\bar{l} =$$

$$= \int_0^1 x^2 dy - \int_1^0 y^2 dx - \int_0^1 y^2 dx + \int_1^0 x^2 dy = 0.$$

В данном примере используется расчетное значение $\bar{a} = -y^2 \bar{x}_0 + x^2 \bar{y}_0$, когда $\operatorname{rot} \bar{a} = \bar{z}_0 \cdot 2(x + y)$.

Для Б. Используя теорему Стокса, подставив значения ротора вектора $\bar{a}$,

$$Ц = \oint_{\alpha} \bar{a} d\bar{l} = \int_{S} \operatorname{rot} \bar{a}\, d\bar{S} = 2\int_{0} (x+y)\bar{z}_0 \bar{z}_0 dydx =$$

$$= 2\left(y\Big|_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 + x\Big|_1^0 \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) = 1-1 = 0.$$

проинтегрировав полученное, определим циркуляцию. Она равна нулю в обоих случаях.

Ответ: $Ц = 0$.

Задача №15

Определить поток вектора $\bar{a} = \bar{x}_0$ через площадку, перпендикулярную оси X, имеющую форму прямоугольника со сторонами равными 1 и 2.

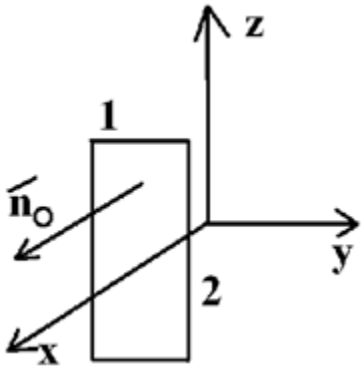


Рис. 1.13. К задаче №15

Решение:

Потоком векторного поля П через ориентированную поверхность S называется величина (1.10). Запишем ее с учетом

$$\varphi = \int_S \bar{a} d\bar{S} = \int_S (\bar{a}, \bar{n}_0) dS = \int_S \bar{x}_0 x_0 dS = 2.$$

При изменении направления нормали на противоположное поток меняет знак: $\varphi = -2$.

Ответ: $\varphi = 2$.

Задача №16

Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = \bar{R}$, где $\bar{R} = \bar{r}_0 r + \bar{z}_0 z$ – радиус-вектор через поверхность цилиндра радиуса R и высотой h (рис. 1.14).

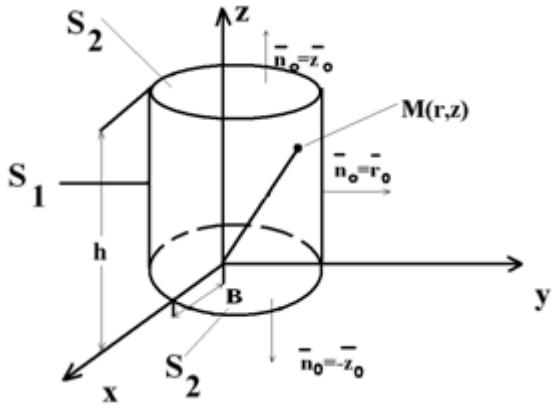


Рис. 1.14. К задаче №16

Решение:

Искомый поток $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, где φ_1, φ_2, φ_3 – потоки через поверхности S_1, S_2, S_3. Следовательно,

$$\varphi_1 = \int_{S_1} \bar{a} d\bar{S} = \int_{S_1} (\bar{r}_0 r + \bar{z}_0 z)\bar{r}_0 dS = R 2\pi R h = 2\pi R^2 h;$$

$$\varphi_2 = \int_{S_2} (\bar{r}_0 r + \bar{z}_0 0)\bar{z}_0 dS, \; \bar{r}_0 \bar{z}_0 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0;$$

$$\varphi_3 = \int_{S_3} (\bar{r}_0 r + \bar{z}_0 h)\bar{z}_0 dS = h\pi R^2.$$

Искомый поток $\varphi = \varphi_1 + \varphi_3 = 3\pi R^2 h$.

Данную задачу можно решить с применением теоремы Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \bar{A} d\bar{S} = \int_v \operatorname{div} \bar{a} \, dv.$$

В цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Заданный вектор $\bar{a}$ имеет 2 проекции $\bar{a} = \bar{r}_0 r + \bar{z}_0 z$. Поэтому

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial r^2}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \; \varphi = \oint_V \operatorname{div} a \, dv = 3\oint_V dv = 3\pi R^2 h.$$

Решение задачи стало значительно проще, однако при определении потока надо учитывать, что поверхность, пронизываемая потоком, должна быть замкнута.

Задача №17

Сколько из приведенных полей являются потенциальными?

$$\bar{A} = x^2 \bar{i} - y^2 \bar{j}; \; \bar{B} = x\bar{i} + y\bar{k}.$$

Решение:

Потенциальной является поверхность, когда $\operatorname{rot}\bar{a}=0$.

1) $\operatorname{rot}\bar{A}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & -y^2 & 0\end{vmatrix}=0;$

2) $\overset{\mathrm{r}}{rotB}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & 0 & y\end{vmatrix}=\bar{i}\,1=1.$

Ответ: Поле $\bar{A}$ является потенциальным.

Задача №18

Сколько из приведенных полей являются соленоидальными?

1) $\bar{A}=2z\bar{i}$;

2) $\bar{B}=8y^2\bar{k}$;

3) $\bar{D}=3z^2\bar{i}$.

Решение:

В соленоидальном поле $\operatorname{div}\bar{A}=0$. Проверяем:

1) $\operatorname{div}\bar{A}=\dfrac{\partial(2z)}{\partial y}=0;$

2) $\operatorname{div}\bar{B}=\dfrac{\partial(8y^2)}{\partial z}=0;$

3) $\operatorname{div}\bar{D}=\dfrac{\partial(3z^2)}{\partial x}=0;$

Ответ: Соленоидальные все три поля $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{D}$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наибольшую скорость изменения поля $\varphi=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точке $M(1,1,1)$.

2. Найти градиент скалярной функции r, определяющей расстояние между текущей точкой $M(x,y,z)$ и постоянной точкой $A(a,b,c)$.

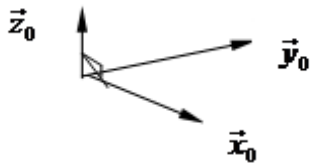
Ответ: $\bar{G}=\operatorname{grad}r=\bar{r}_0$, $\bar{r}=\bar{r}_0\cdot r$.

3. Найти grad скалярного поля $U(x,y)=3x^2\cdot y-3x\cdot y^3+y^4$ в точке $M(1,2)$.

Ответ: $3x^2y+3xy^3+y^4$.

4. Определить уравнения силовых линий поля

$$\overline{E}=-10z\overline{i}+20\overline{j}+10x\overline{k}.$$



Ответ: $x^2+z^2=C_1^2,\ zy+2x=C_2$.

5. Определить уравнение силовых линий

$$\overline{E}=-10z\overline{i}+2-\overline{j}+10x\overline{k}.$$

Ответ: $x^2+z^2=c_1^2,\ 2x+zy=c_2$.

6. Найти уравнения силовых линий B поля, где $B=\left[\overline{K},\overline{r}\right]$, $\overline{r}$ – радиус-вектор.

Ответ $xdx+ydy=0,\ x^2+y^2=c^2$.

7. Определить поток Π радиус-вектора через поверхность единичного куба.

Ответ: 3.

8. Определить поток радиус-вектора через поверхность единичного куба.

Ответ: $\Pi=3$.

9. Найти поток вектора $\overline{r}$ – радиус-вектора.

Ответ: $2j$.

10. Найти div вектора $\overline{A}=\left[\overline{r},\left[\overline{r},\overline{k}\right]\right]$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор.

Ответ: $2z$.

11. Сколько из приведенных ниже формул являются ложными?

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$; 2) $\operatorname{rot}\left(x\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{i}\right)=0$; 3) $\operatorname{div}\left(y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\right)=2$;

4) $\operatorname{div}\left(\overline{a}\varphi\right)=\varphi\operatorname{div}\overline{a}+\overline{a}\operatorname{grad}\varphi$; 5) $\operatorname{div}\left(x\cdot\vec{i}+z^2\cdot\vec{j}+y^2\cdot\vec{k}\right)=0$.

Ответ: 3.

12. Сколько из приведенных ниже соотношений ошибочны?

1) $\oint\limits_L\overline{H}dl=\int\limits_S\operatorname{rot}H\,dl$; 2) $\int\limits_V\operatorname{div}\operatorname{rot}B\,dV=0$; 3) $\oint\limits_S\overline{D}d\overline{S}=\int\limits_V\operatorname{div}\overline{D}\,dV$;

4) $\int\limits_S \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi\, dV = 0$; 5) $\oint\limits_S \operatorname{rot}\bar{H}\, d\bar{S}$.

Ответ: 3.

13. Определить циркуляцию вектора $\bar{A}$ по контуру, указанному на рисунке. Вектор $\bar{A}$ задан как векторное произведение $\bar{A} = \left[\bar{k}, \bar{r}\right]$.

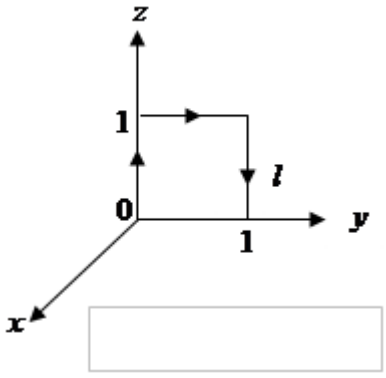


Рис. 1.15. К задачам №13-14

Ответ: 1.

14. Вычислить циркуляцию вектора $\bar{A} = mz^2\bar{x}_0$ по контуру ℓ, показанному на рисунке 1.17.

Ответ: 0.

15. Вычислить циркуляцию вектора $\bar{A} = 5\bar{i} + 7\bar{j}$ по контуру L.

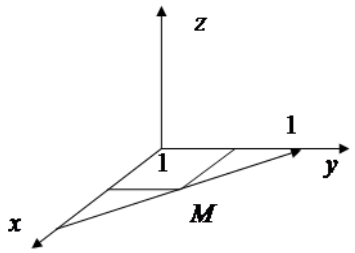


Рис. 1.16. К задаче №22

Ответ: $Ц = 0$.

16. Сколько из приведенных полей являются потенциальными полями?

1) $\bar{A} = 5x\bar{i}$; 2) $\bar{B} = 8x^2\bar{i} + zy\bar{k}$; 3) $\bar{D} = y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$; 4) $\bar{C} = z\bar{z}$.

Ответ: 2.

17. Вычислить ротор вектора $\bar{D} = z\bar{j} + z\bar{k}$.

Ответ: $\operatorname{rot}\bar{D} = -\bar{i}$.

18. Найти уравнение векторных линий поля $\bar{A}$, $\bar{A} = \left[\bar{r}, \bar{i}\right]$ где $\bar{r}$ – радиус-вектор.

Ответ: $y^2 + z^2 = C_1^2$, $x = C_2$.

19. Определить поток вектора $\bar{a}$ через поверхность цилиндра радиусом R и высотой h. Ось цилиндра совпадает с осью OZ. Поле $\bar{a}$ равно $\bar{a} = -5\bar{z}_0$.

Ответ: $\Pi = -10\pi Rh$.

20. Определить векторные линии $\bar{B} = y\bar{i} - x\bar{i}$.

Ответ: $x \cdot y = c$.

21. Определить поток вектора $\bar{a} = \dfrac{m}{r^2}\bar{r}_0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ через поверхность сферы радиуса $r = 5$ м с центром в точке $r = 0$.

Ответ: $20m\pi$.

22. Вычислить $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, где $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 6.

23. Сколько из приведенных полей являются соленоидальными полями?

1) $\bar{A} = 2z\bar{j}$;2) $\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{M}$;3) $\bar{C} = \left[\bar{k}, \bar{r}\right]$;

24. Найти вихрь вектора $\bar{E} = \left[\bar{k}, \left[\bar{k}, \bar{r}\right]\right]$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор.

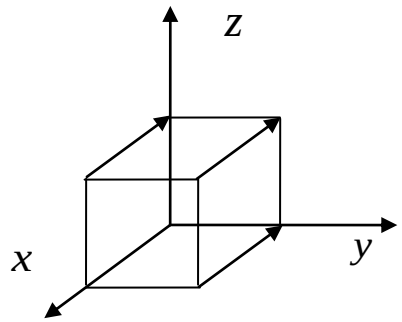


Рис. 1.17. К задаче №24

Ответ: 0.

25. Определить дивергенцию вектора

$$\bar{B} = \left(\bar{r}, \bar{k}\right)\bar{k}z + \left[\bar{i}, \left[\bar{j}, \bar{r}\right]\right].$$

Ответ: $2z$.

26. Как изменится поток радиус-вектора $\bar{r}$ через поверхность куба с центром в начале координат, если все ребра куба увеличить в два раза?

Ответ: $3a^2$.

27. В поле точечного заряда $\bar{E} = \dfrac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}\bar{r}_0$ построена сфера с центром в месте расположения заряда с радиусом $R = 10$ см. Как изменится поток вектора E через сферу, если радиус уменьшить в два раза?

Ответ: $\Pi = \text{const}$ при любом r.

28. Определить циркуляцию вектора $H = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$ по контуру, показанному на рисунке, радиус окружности $R = 1/2$.

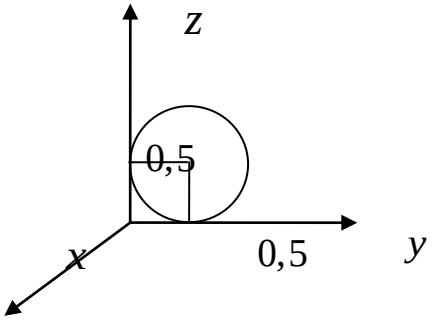


Рис. 1.18. К задаче №28

Ответ: $Ц = \frac{\pi}{2}$.

Глава 2. Уравнения Максвелла

Целью данного занятия является закрепление теоретического материала путем решения задач по следующим вопросам курса:

- уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах;
- материальные уравнения;
- граничные условия.

В начале каждой части занятия приводятся краткие теоретические сведения; в конце занятия – задачи для самостоятельного решения с ответами.

2.1. Краткие теоретические сведения

Электромагнитное поле представляет совокупность полей электрического (векторы $\bar{E}$, $\bar{D}$) и магнитного (векторы $\bar{H}$, $\bar{B}$), находящихся во взаимной зависимости. Вектор $\bar{E}$ – напряженность электрического поля, измеряемая в вольтах на метр ($\text{В}/\text{м}$); вектор $\bar{D}$ – электрическая индукция – кулон на квадратный метр ($\text{Кл}/\text{м}^2$); вектор $\bar{H}$ – напряженность магнитного поля – ампер на метр ($\text{А}/\text{м}$); вектор $\bar{B}$ – магнитная индукция – в веберах на квадратный метр ($\text{Вб}/\text{м}^2$).

В компактной форме операций векторного анализа запишем уравнения Максвелла, которые заключают в себе основы теории электромагнетизма.

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

1. Закон полного тока

$$\int \overline{H} d\bar{l} = I_{полн}, \tag{2.1}$$

где $\bar{I}_{\text{полн}} = \int_S \bar{j} d\bar{S}$ – полный ток, пронизывающий площадку S, опирающуюся на контур L.

2. Обобщенный закон электромагнитной индукции

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\int_S \frac{d\bar{B}}{dt} d\bar{S}. \tag{2.2}$$

3. Постулат Максвелла

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \int_V \rho dv = q. \tag{2.3}$$

где q – заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности S; ρ – объемная плотность заряда.

4. Закон непрерывности магнитных силовых линий

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0. \tag{2.4}$$

Переход от уравнений Максвелла в интегральной форме к уравнениям в дифференциальной форме осуществляется с помощью теорем Остроградского – Гаусса (1.24) и Стокса (1.29).

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

1. $$\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j}_{\text{полн}}; \qquad (2.5)$$
2. $$\operatorname{rot}\bar{E} = -\partial B / \partial t; \qquad (2.6)$$
3. $$\operatorname{div}\bar{D} = \rho; \qquad (2.7)$$
4. $$\operatorname{div}\bar{B} = 0. \qquad (2.8)$$

Плотность полного тока представляет сумму четырех токов:

$$\bar{j}_{полн} = \bar{j}_{\text{см}} + \bar{j}_{\text{пр}} + \bar{j}_{\text{пер}} + \bar{j}_{\text{ст}}, \qquad (2.9)$$

соответственно плотности тока смещения, плотности тока проводимости, плотности тока переноса и плотности стороннего тока.

Выражения каждого из токов приведены в таблице:

$\bar{j}_{\text{см}}$ плотность тока смещения	$\bar{j}_{\text{пр}}$ плотность тока проводимости	$\bar{j}_{\text{пер}}$ плотность тока переноса	$\bar{j}_{\text{ст}}$ плотность стороннего тока
$\bar{j}_{\text{см}} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$	$\bar{j}_{\text{пр}} = \sigma \bar{E}$	$\bar{j}_{\text{пер}} = \rho \bar{\vartheta}$	первичный источник поля

В эти выражения входит σ – удельная объемная проводимость вещества.

В каждой конкретной задаче присутствует один или несколько токов, соответствующих условиям задачи.

2.1.1. Материальные уравнения

Связь векторов электромагнитного поля в некоторой материальной среде представляется материальными уравнениями:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \qquad (2.10)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 \bar{H} + \bar{M}, \qquad (2.11)$$

где $\bar{P}$ – вектор поляризации среды, $\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_{\text{Э}} \bar{E}$, $\bar{M}$ – вектор намагниченности, $\bar{M} = \mu_0 \chi_{\text{М}} \bar{H}$. Здесь $\chi_{\text{Э}} = \varepsilon_r - 1$ – электрическая восприимчивость и $\chi_{\text{М}} = \mu_r - 1$ – магнитная восприимчивость среды; $\varepsilon_0 = 10^{-3}/36\pi \approx 8{,}856 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}257 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Вектор плотности тока проводимости связан с вектором напряженности электрического поля законом Ома в дифференциальной форме:

$$\bar{j}_{\text{пр}} = \sigma \bar{E}. \qquad (2.12)$$

Каждая среда характеризуется своими относительными проницаемостями – магнитной (μ_r) и электрической (ε_r) и абсолютной удельной проводимостью σ.

Материальные среды по своим свойствам делятся на однородные и неоднородные, линейные и нелинейные, изотропные и анизотропные.

Неоднородными являются среды, в которых параметры μ, ε и σ являются функциями координат. Нелинейными являются среды, в которых параметры μ, ε и σ являются функциями самих полей. Анизотропные среды отличаются от изотропных тем, что они в разных направлениях обнаруживают различные свойства. Для таких сред μ, ε и σ могут быть представлены виде тензора. Тензор представляет матрицу, состоящую из 9 независимых элементов. Материальные уравнения в этом случае приобретают вид:

$$\bar{D} = \|\varepsilon\| \cdot \bar{E},\ \bar{B} = \|\mu\| \cdot \bar{H},\ \bar{J}_{\text{ПР}} = \|\sigma\| \cdot \bar{E}. \qquad (2.13)$$

2.1.2. Граничные условия

Граничные условия непосредственно следуют из уравнений Максвелла и определяют поведение векторов поля на границе раздела двух сред.

Каждый произвольно ориентированный вектор вблизи граничной поверхности может быть представлен в виде сумм нормальной и тангенциальной составляющих:

$$\bar{A} = \bar{n}_0 A_n + \bar{\tau}_0 A_\tau,$$

где $\bar{\tau}_0$ – касательный к граничной поверхности единичный вектор; $\bar{n}_0$ – нормаль к поверхности. Поэтому граничные условия формулируются для тангенциальных и нормальных компонент поля.

Граница может проходить между двумя диэлектриками (граница д-д) и между диэлектриком и металлом (граница д-м). Ниже приведены граничные условия для этого вида границ.

Граничные условия для нормальных компонент электрического поля на границе диэлектрик-диэлектрик:

- $D_{1n} = D_{2n}$ – при отсутствии поверхностного заряда ξ_S на границе раздела;
- $D_{1n} - D_{2n} = \xi_S$ – при наличии поверхностного заряда ξ_S на границе раздела;
- $\bar{n}_0 \left(\bar{D}_1 - \bar{D}_2 \right) = \xi_S$ – векторная форма записи граничных условий;
- $\dfrac{E_{1n}}{E_{2n}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, где ε_1 и ε_2 – абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно.

Граничные условия для нормальных компонент магнитного поля на границе диэлектрик-диэлектрик:

- $B_{1n} = B_{2n}$, $\bar{n}_0\left(\bar{B}_1 - \bar{B}_2\right) = 0$ – векторная форма записи граничных условий;
- $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, где μ_1 и μ_2 – абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно.

Граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля на границе диэлектрик-диэлектрик:

- $\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, где ε_1 и ε_2 – абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно;
- $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Граничные условия для тангенциальных компонент магнитного поля на границе диэлектрик-диэлектрик:

- $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1 и μ_2 – абсолютные магнитные проницаемости первой и второй среды соответственно;
- $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ – при отсутствии поверхностного тока j_S на границе раздела;
- $H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_S$ – при наличии поверхностного тока j_S на границе раздела;
- $\left[\bar{n}_0, \left(H_{1\tau} - H_{1\tau}\right)\right] = j_S$ – векторная форма записи граничных условий.

Граничные условия для компонент электрического и магнитного полей на границе диэлектрик-металл:

- $D_n = \xi_S$, где ξ_S – поверхностный заряд на границе раздела;
- $E_\tau = 0$;
- $B_{1n} = 0$;
- $H_\tau = j_S$, где j_S – поверхностный ток на границе раздела диэлектрик-металл.

2.2. Примеры решения задач

Задача №1

Доказать, что линии полного тока непрерывны и замкнуты.

Решение:

Какое равенство должно иметь место, чтобы линии полного тока $\bar{j}_{\text{полн}}$ были замкнуты? $\operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}} = 0$ и $\oint_S \bar{j}_{\text{полн}} d\bar{S} = 0$ – эти равенства нам и нужно доказать.

Запишем уравнение Максвелла, в которое входит плотность полного тока $\bar{j}_{\text{полн}}$. Из закона полного тока (первое уравнение Максвелла) следует, что $\operatorname{rot}\bar{H} = \bar{j}_{\text{полн}}$. Возьмем div от обеих частей этого равенства:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{H} = \operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}}.$$

Но из соотношений векторного анализа известно, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{H} = 0$. Следовательно, $\operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}} = 0$.

В соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса можно записать:

$$\oint_S \bar{j}_{\text{полн}}\, d\bar{S} = \int_V \operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}}\, dV.$$

С учетом полученного соотношения $\operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}} = 0$, получаем $\oint_S \bar{j}_{\text{полн}}\, d\bar{S} = 0$.

Таким образом, поток вектора $\bar{j}_{\text{полн}}$ через замкнутую поверхность S равен нулю – это означает, что нигде нет ни начала, ни конца линий $\bar{j}_{\text{полн}}$ (сколько линий входит в объем, столько и выходит). Следовательно, линии полного тока непрерывны и замкнуты.

Задача №2

Используя уравнения Максвелла, вывести уравнения непрерывности и закон сохранения заряда.

Решение:

Закон сохранения заряда утверждает, что всякому изменению заряда в некотором объёме соответствует электрический ток, втекающий в объём или вытекающий из него. Он является следствием закона непрерывности полного тока.

Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме, исключив сторонний ток и ток переноса $\operatorname{rot}\bar{H} = \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{j}_{\text{пр}}$, и возьмем дивергенцию от всех слагаемых этого равенства:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{H} = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{j}_{\text{пр}}\right) \equiv 0$$

или

$$\operatorname{div}\bar{j}_{\text{полн}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\bar{j}_{\text{пр}} \equiv 0,\ \operatorname{div}\bar{j}_{\text{пр}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

После интегрирования по объёму

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div} \bar{j}_{\text{пр}}\, dV = 0.$$

и применения теоремы Остроградского – Гаусса, получим:

$$\int_S \bar{j}_{\text{пр}}\, d\bar{S} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\bar{V} = 0.$$

Откуда следует: $I_{\text{пр}} = -\dfrac{dq}{dt}$ – закон сохранения заряда.

Задача №3

В сферическом объёме радиуса R равномерно распределён гармонически изменяющийся заряд с объёмной плотностью $\rho = 1 \cdot \cos \omega t$. Чему будет равен ток проводимости, связанный с этим зарядом?

Решение:

Используя закон сохранения заряда

$$I_{\text{пр}} = -\frac{dq}{dt},$$

запишем: $I_{\text{пр}} = \int_S \bar{j}_{\text{пр}} d\bar{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\bar{V}$.

Продифференцировав объемную плотность заряда ρ по времени и учитывая, что объем сферы равен $4/3\pi R^3$, получим:

$$I_{\text{пр}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \omega \sin \omega t.$$

Задача №4

Может ли вектор $\bar{B} = \bar{x}_0 5x + \bar{y}_0 y$ быть вектором магнитной индукции?

Решение:

Заданный вектор может быть вектором магнитной индукции только в том случае, если он будет удовлетворять четвертому уравнению Максвелла. Так как

$$\operatorname{div} \bar{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 5 + 1 = 6 \neq 0,$$

то заданный вектор не может быть вектором магнитной индукции.

Задача №5

Положительный заряд с объёмной плотностью $\rho = 10^{-3}$ Кл/м^3 равномерно распределён в сферическом объёме радиуса $R = 1$ см (рис. 2.1).

Найти вектор электрического смещения $\bar{D}$ и вектор напряженности электрического поля $\bar{E}$ в областях:

1. $0 \le r \le R$;
2. $R \le r \le \infty$.

Построить график зависимости $\bar{D}(r)$. Дать численный результат при: $r_1 = 0,2$ см, $r_2 = 1$ м.

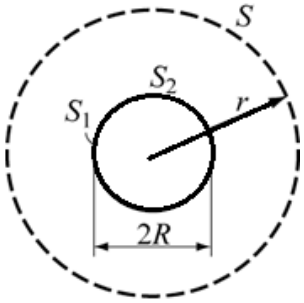


Рис. 2.1. К задаче №5

Решение:

Исходной формулой для решения этой задачи является третье уравнение Максвелла. Так как вектор $\bar{D}$ распределен по поверхности равномерно, то

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = \oint D_r \bar{r}_0 dS \bar{r}_0 = D_r S = q,$$

где $\bar{r}_0$ – единичный радиус-вектор.

Следовательно:

1. Для первой области ($0 \le r \le R$) при $S = 4\pi r^2$ получим:

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,\ D_{r1} = \frac{\rho}{3} r = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2,\ E_{r1} = \frac{D_{r1}}{\varepsilon_0}.$$

2. Для второй области ($R \le r \le \infty$) получим:

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3,\ D_{r2} = \frac{\rho}{3}\frac{R^3}{r^2} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}\ \text{Кл/м}^2,\ E_{r2} = \frac{D_{r2}}{\varepsilon_0}.$$

Меняя r в пределах $0 \le r \le \infty$, построим график зависимости $\bar{D}(r)$, показанный на рис. 2.2.

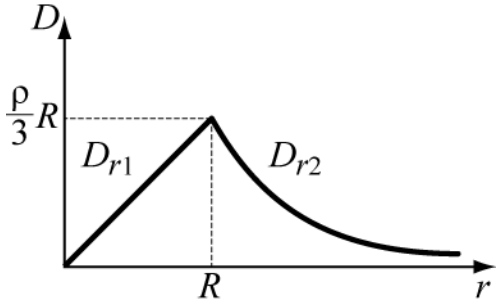


Рис. 2.2. К задаче №5

Задача №6

По прямолинейному круглому проводнику протекает ток силою I. Найти выражения, определяющие напряженность магнитного поля внутри проводника (область 1 – $0 \le r \le R$) и вне проводника (область 2 – $R \le r \le \infty$) . Построить графики зависимости $H(r)$.

Произвести численные расчёты при следующих данных: радиус проводника $R = 1$ см, величина тока $I = 1$ А, $r_1 = 0{,}5$ см и $r_2 = 1$ м.

Решение:

Для решения этой задачи используется первое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \bar{I}_{\text{полн}}.$$

Формулировка этого закона утверждает, что циркуляция вектора $\bar{H}$ по контуру L определяется величиной полного тока, охватываемого этим замкнутым контуром (рис. 2.3).

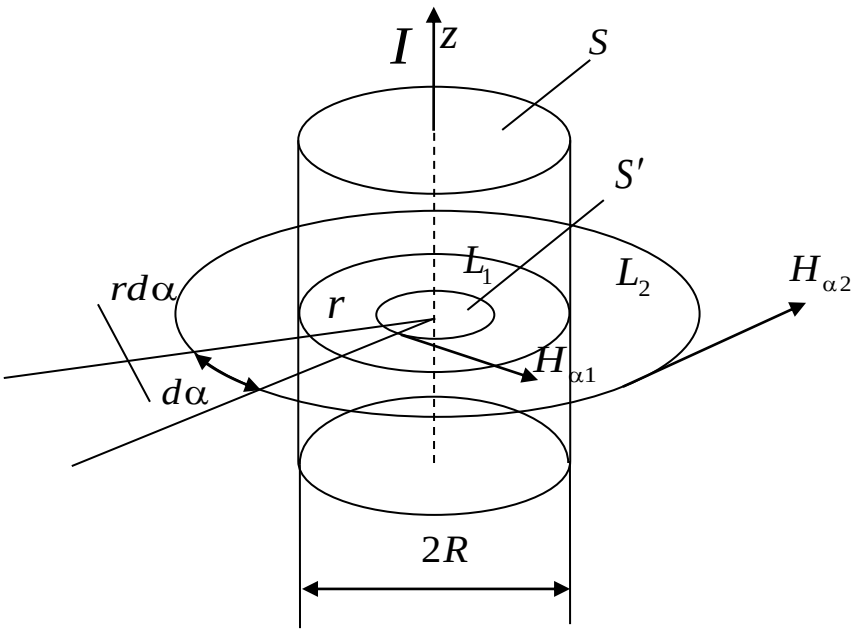


Рис. 2.3. К задаче №6

Так как элемент длины контура в цилиндрической системе координат равен $d\bar{\ell}_\alpha = \bar{\alpha}_0 r d\alpha$, то

$$\oint_L \bar{H} d\bar{\ell} = \int_0^{2\pi} H_\alpha \cdot r d\alpha = H_\alpha \cdot 2\pi r = I.$$

В области 2 контур L охватывает полный ток $I_2 = I$, поэтому

$$H_{\alpha 2} = \frac{I}{2\pi r}.$$

В области 1 охватываемый контуром ток меняется от 0 до I и равен $I_1 = \dfrac{Ir^2}{R^2}$. Следовательно,

$$H_{\alpha 1} = \frac{Ir}{2\pi R^2}.$$

График зависимости $H(r)$ представлен на рис. 2.4.

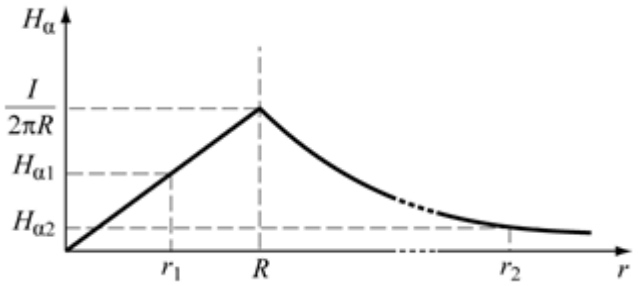


Рис. 2.4. К задаче №6

Результат численного расчёта: $H_{\alpha 1} = 0{,}16$ А/м, $H_{\alpha 2} = 15{,}9$ А/м.

Задача №7

Анизотропный диэлектрик имеет диэлектрическую проницаемость

$$\|\varepsilon\| = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}.$$

К нему приложено электрическое поле $\bar{E} = \bar{x}_0 E_x + \bar{z}_0 E_z$. Найдите выражение для вектора электрического смещения $\bar{D}$. Определите угол между векторами $\bar{E}$ и $\bar{D}$.

Решение:

Так как диэлектрик имеет анизотропную диэлектрическую проницаемость, то вектор электрического смещения $\bar{D}$ будет определен следующим выражением:

$$\bar{D} = \|\varepsilon\| \bar{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}.$$

Перемножая строку на столбец, получим проекции вектора смещения:

$$D_X = \varepsilon_1 E_X,\ D_Y = \alpha E_X,\ D_Z = \varepsilon_0 E_Z.$$

Из них составим вектор смещения $\bar{D}$

$$\bar{D} = \bar{x}_0 \varepsilon_1 E_x + \bar{y}_0 \alpha E_x + \bar{z}_0 \varepsilon_0 E_z.$$

Для определения угла между векторами $\bar{D}$ и $\bar{E}$ запишем скалярное произведение векторов

$$\left(\bar{D},\bar{E}\right)=D_xE_x+D_zE_z=\sqrt{D_x^2+D_y^2+D_z^2}\sqrt{E_x^2+E_z^2}\cos\left(\bar{D},\bar{E}\right),$$

откуда

$$\angle\left(\bar{D},\bar{E}\right)=\arccos\left(\frac{D_xE_x+D_zE_z}{\sqrt{D_x^2+D_y^2+D_z^2}\cdot\sqrt{E_x^2+E_z^2}}\right).$$

Задача №8

Определить полный ток, если известно, что напряженность магнитного поля $\bar{H}=\bar{x}_0 5z\sin\omega t$.

Решение:

Воспользовавшись первым уравнением Максвелла, находим:

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 5z\sin\omega t & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{y}_0\cdot 5\sin\omega t=j_{\text{полн}}.$$

Из полученного соотношения следует, что плотность полного тока $j_{\text{полн}}$ имеет только одну составляющую, направленную по оси y. Таким образом:

$$j_{\text{полн}}=\bar{y}_0 5\sin\omega t.$$

Задача №9

Задано электрическое поле $\bar{E}=E_0(\bar{x}_0 y-\bar{y}_0 x)\cos\omega t$. Определить магнитное поле $\bar{H}$.

Решение:

Используем 3-е уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot}\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}.$$

Найдем $\operatorname{rot}\bar{E}$:

$$\operatorname{rot}\bar{E}=\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & 0\end{vmatrix}E_0\cos\omega t=-\bar{z}_0 2E_0\cos\omega t.$$

Вектор $\bar{B}$ определим интегрированием полученного выражения для $\mathrm{rot}\,\bar{E}$ по времени

$$\bar{B} = \int \bar{z}_0 2E_0 \cos\omega t dt,\ \bar{B} = \bar{z}_0 \frac{2E_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Используя, материальное уравнение $\bar{B} = \mu\bar{H}$, находим выражение для вектора магнитного поля $\bar{H}$:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu} \Rightarrow \bar{H} = \bar{z}_0 \frac{2E_0}{\mu\omega}\sin\omega t.$$

Задача №10

В некотором объеме свободного пространства имеется электрическое поле $\bar{E} = 10\bar{y}_0$ В/м и магнитное поле $\bar{H} = 15\bar{x}_0$ А/м. Заряд $q = 10^{-9}$ К влетает в этот объем со скоростью $\bar{\upsilon} = 10^6\bar{z}_0$ А/м. Найти силу, действующую на заряд и её направление.

Решение:

На заряд, находящийся в магнитном и электрическом поле действует сила:

$$\bar{F} = q\left\{\bar{E} + \left[\bar{\upsilon}\times\bar{B}\right]\right\}.$$

Сила электрического поля, воздействующая на заряд равна:

$\bar{F}_э = q\bar{E} = 10^{-9}\cdot 10\cdot\bar{y}_0 = 10\cdot 10^{-9}\bar{y}_0.$

Сила магнитного поля, воздействующая на заряд равна при $\bar{B} = \mu_0\bar{H}$ ($\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м), определяется как векторное произведение скорости движения заряда и вектора магнитной индукции:

$$\bar{F}_м = \left[\bar{\upsilon}\times\bar{B}\right] = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 15\cdot 4\pi\cdot 10^{-7} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 18.84\cdot 10^{-9}\bar{y}_0.$$

Суммарное воздействие сил электрического и магнитного полей направлено по оси $\bar{y}_0$ и равно по величине

$$F = F_э + F_м = 28.84\cdot 10^{-9}\ \text{Н}.$$

Задача №11

Определить электродвижущую силу (ЭДС), возбуждаемую в квадратной рамке потоком вектора $\bar{B} = \mu\bar{H}_0\cos\omega t$. Направление вектора $\bar{H}$ относительно плоскости рамки показано на рис. 2.5.

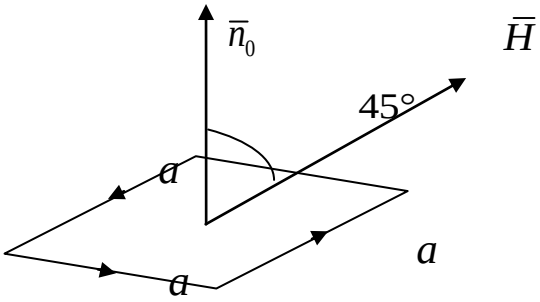


Рис. 2.5. К задаче №11

Решение:

Поток вектора магнитной индукции Φ определяется выражением

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S},$$

где S – площадь рамки.

Запишем значение для потока Φ, проделав необходимые преобразования:

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S} = \int_S \bar{B}\bar{n}_0 dS = \cos 45° \int_S B dS = \cos 45° B \int_S dS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \mu H_0 \cos \omega t \cdot a^2.$$

Величину электродвижущей силы (ЭДС) определяем следующим образом:

$$\text{ЭДС} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega \mu H_0 \sin \omega t \cdot a^2.$$

Задача №12

Между полюсами электромагнита, создающего в зазоре индукцию $\bar{B} = \bar{B}_0 \cos \omega t$, помещена круглая рамка, площадь которой S_1 ($S_1 = \pi a^2$, где a – радиус рамки) много меньше площади полюсов электромагнита S и L – периметр рамки (рис. 2.6). Определить напряженность электрического поля, циркулирующую вдоль рамки и электродвижущую силу $Э$, наведённую в контуре, если частота генератора $f = 400$ Гц, амплитуда напряженности переменного магнитного поля $B_0 = 1$ Тл, $a = 0{,}5$ см? Справка: $Э = E_1 L$. Как изменятся $\bar{E}$ и $Э$, если рамку повернуть на угол $\alpha = 60°$ относительно первоначального положения? Диэлектрик – воздух.

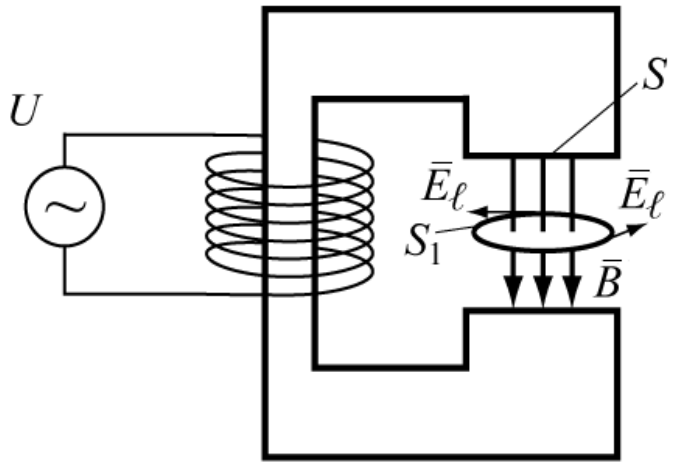


Рис. 2.6. К задаче №12

Решение:

Для решения этой задачи используется закон электромагнитной индукции (второе уравнение Максвелла в интегральной форме (2.2)).

По условиям задачи, поток вектора индукции, пронизывающий рамку, можно считать однородным и определяемым в виде

$$\Phi = \int_{S_1} \bar{B} d\bar{S} = B_n S_1 \cos\alpha.$$

Здесь B_n – проекция вектора $\bar{B}$ на нормаль $\bar{n}$ к поверхности S_1. Согласно закону электромагнитной индукции, циркуляция вектора $\bar{E}$ по замкнутому контуру равна скорости изменения этого потока $\partial\Phi / \partial t$, пронизывающего площадку S_1. Запишем эти утверждения:

$$Э = \oint_L \bar{E} d\bar{\ell} = E_\ell \cdot L = E_\ell 2\pi a = -\frac{\partial\left(B_0 \pi a^2 \cos\omega t\right)}{\partial t} = B_0 \pi a^2 \omega \cdot \sin\omega t.$$

При перпендикулярной ориентации рамки по отношению к вектору $\bar{B}$, т.е. когда угол $\alpha = 0$, наведённая Э в контуре определяется выражением

$$Э = \pi a^2 B_0 \omega \sin\left(\omega t\right).$$

Подставив заданные величины, получим

$$Э = 1 \cdot (3{,}14) \cdot \left(0{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^2 400 \cdot \sin\left(2\pi 400 t\right) = 0{,}0314 \cdot \sin\left(2\pi \cdot 400 t\right) \text{ В},$$

откуда максимальная (амплитудная) величина Э равна

$$Э_{\max} = 3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

Напряженность электрического поля, циркулирующая вдоль рамки E_ℓ равна отношению Э к периметру рамки L:

$$E_\ell = Э / L = Э / 2\pi a = 1 \cdot (3{,}14) \cdot \left(0{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^2 400 \times$$

$$\times \sin\left(2\pi \cdot 400 t\right) / (2\pi \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}) = 0{,}25 \cdot 10^{-2} \sin\left(\omega t\right) \text{ В/м}.$$

При повороте плоскости рамки на угол α относительно магнитного поля, $\bar{E}$ и Э уменьшаются в $\cos\alpha$ раз.

Ответ:

1) Максимальная Э, наводимая в контуре при перпендикулярной ориентации рамки к вектору $\bar{B}_0$, и напряженность электрического поля соответственно равны $Э_{max1} = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ В и $E_{max1} = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ В/м.

2) при повороте рамки на угол α максимальная Э и напряженность электрического поля $Э_{max2} = 1{,}57 \cdot 10^{-2}$ В, $E_{max2} = 1{,}25$ мВ/м.

Задача №13

Определить электродвижущую силу (ЭДС) в замкнутом контуре, образованном равнобедренным треугольником, если известен вектор $\bar{H} = \bar{H}_0 \sin\omega t$. Направление вектора $\bar{H}$ показано на рис. 2.7 и $\theta=60^0$.

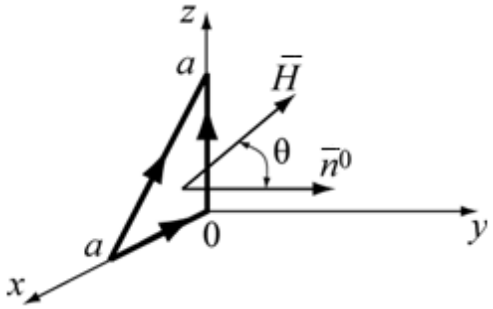


Рис. 2.7. К задаче №13

Решение:

Запишем выражение для потока Ф вектора $\bar{B} = \mu\bar{H}_0 \sin\omega t$:

$$\Phi = \mu_0 \sin\omega t \int_S \bar{H} d\bar{S}..$$

Скалярное произведение векторов $\bar{H}d\bar{S} = H_0 \cos\theta \cdot S$.

Учитывая (1.35), получим выражение для потока, пронизывающего треугольную площадку:

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2} H_0 \sin\omega t \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Электродвижущая сила определяется соотношением

$$Э = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega a^2}{4} H_0 \cos\omega t.$$

. Задача №14

Две полубесконечные магнитные среды, 1-ая изотропная и 2-ая анизотропная, имеют плоскую границу раздела, которая проходит через координатную поверхность zx (рис. 2.8).

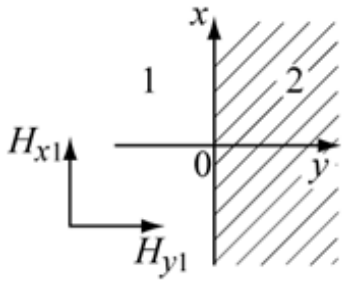


Рис. 2.8. К задаче №14

Проводимости сред равны нулю. В первой среде существует магнитное поле $\bar{H}_1 = \bar{x}_0 H_{x1} + \bar{y}_0 H_{y1}$. Определить магнитное поле во второй среде.

Параметры сред:

$$\mu_1 = \mu_0; \|\mu_2\| = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0.$$

Решение:

Согласно рис. 2.8 и граничным условиям, записываем связь между векторами первой и второй сред:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \rightarrow H_{x1} = H_{x2}, H_{z1} = H_{z2} = 0,,$$
$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_0 H_{1y} = B_{2n}.$$

Запишем вектора $\bar{H}$ и $\bar{B}$ для первой среды:

$$\bar{H}_1 = \bar{x}_0 H_{x1} + \bar{y}_0 H_{y1}, \bar{B}_1 = \mu_0 \bar{H}_1 = \bar{x}_0 \mu_0 H_{x1} + \bar{y}_0 \mu_0 H_{y1}.$$

Запишем выражение для вектора $\bar{H}_2$, составляющие которого надо определить из граничных условий:

$$\bar{H}_2 = \bar{x}_0 H_{x2} + \bar{y}_0 H_{y2} + \bar{z}_0 H_{z2}.$$

Так как во второй среде магнитная проницаемость представлена тензором, то вектор магнитной индукции для второй среды через материальное уравнение запишем в виде произведения двух матриц и перемножим их:

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{x2} \\ B_{e2} \\ B_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2} \\ \alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\bar{B}_2 = \bar{x}_0\left(\mu_0 H_{x2} - \alpha H_{y2}\right) + \bar{y}_0\left(\alpha H_{x2} + \mu_0 H_{y2}\right) =$$
$$= \bar{x}_0\left(\mu_0 H_{x1} - \alpha_0 H_{y2}\right) + \bar{y}_0\left(\alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2}\right).$$

Вектор $\bar{B}_2$ будет полностью определен, если будут определены H_{x2} и H_{y2}. Но $H_{x2} = H_{x1}$ (равенство тангенциальных составляющих) и составляющая $B_{y2} = \alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2}$.

Приравняв составляющие (равенство нормальных компонент) $B_{y2} = B_{y1}$, получим:

$$B_{y2} = \alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2} = B_{1y} = \mu_0 H_{1y}.$$

Отсюда определим:

$$H_{y2} = H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1}.$$

Зная составляющие магнитного поля второй среды, запишем конечное выражение векторов $\bar{H}_2$ и $\bar{B}_2$:

$$\bar{H}_2 = \bar{x}_0 H_{x1} + \bar{y}_0\left(H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1}\right),$$

$$\bar{B}_2 = \bar{x}_0\left(\frac{\mu_0{}^2 + \alpha^2}{\mu_0} H_{x1} - \alpha H_{y1}\right) + \bar{y}_0 \mu_0 H_{y1}.$$

Задача №15

Два диэлектрика, обладающие относительными диэлектрическими проницаемостями ε_{r1} и ε_{r2} имеют плоскую границу раздела (рис. 2.9).

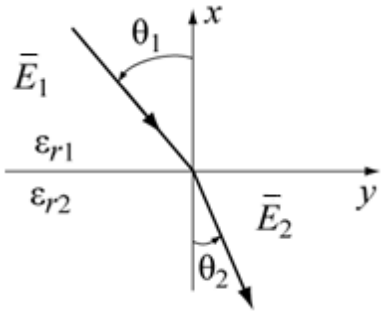


Рис. 2.9. К задаче №15

Вектор $\bar{E}$ электрического поля в первой среде образует угол θ_1 с осью X.

Найти вектора $\bar{E}$ и $\bar{D}$ во второй среде и угол преломления θ_2. Численный ответ привести для $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 4$, $E_1 = 1\,\text{В/м}$, $\theta_1 = 30°$.

Решение:

1. Найдем вектора $\bar{E}$ и $\bar{D}$ во второй среде. Запишем для первой среды общее выражение напряженности электрического поля $\bar{E}_1 = \sqrt{E_{\tau 1}^2 + E_{n1}^2}$ и вектора электрической индукции $\bar{D}_1 = \varepsilon_1 \bar{E}_1$, где $E_{\tau 1} = E_1 \sin\theta_1$, $E_{n1} = E_1 \cos\theta_1$. Для второй среды – $\bar{E}_2 = \sqrt{E_{\tau 2}^2 + E_{n2}^2}$, $\bar{D}_2 = \varepsilon_2 \bar{E}_2$.

Воспользуемся граничными условиями:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2},\ D_{n1} = D_{n2}.$$

Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля второй среды легко определяется первым граничным условием ($E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$). Нормальная составляющая электрического поля второй среды определяется из второго граничного условия и материального уравнения:

$$\varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2}, \text{ откуда } E_{n2} = (\varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2}) E_{n1}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} = E_1 \sin\theta_1 = 0{,}5 \text{ В/м},\ E_{n1} = E_1 \cos\theta_1 = 0{,}87 \text{ В/м},$$

$$E_{n2} = (\varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2}) E_{n1} = (\varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2}) E_1 \cdot \cos\theta_1 = 0{,}2275 \text{ В/м}.$$

Величина напряженности электрического поля во второй среде равна $E_2 = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}22^2} = 0{,}546$ В/м, тогда

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = 4 \cdot 0{,}546 = 2{,}184 \text{ Кл/м}^2.$$

2. Найдем угол преломления θ_2. Для этого составим систему уравнений

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2,$$

$$\varepsilon_{r1} E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_{r2} \cos\theta_2.$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $\varepsilon_{r2} tg\theta_1 = \varepsilon_{r1} tg\theta_2$, которое позволяет определить угол преломления θ_2:

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \operatorname{tg}\theta_1 = 66{,}6°.$$

Задача №16

Относительная диэлектрическая проницаемость среды изотропного диэлектрика $\varepsilon_r = 4$. Чему равна электрическая восприимчивость $\chi_Э$?

Решение:

Используя соотношение $\varepsilon = 1 + \chi_Э$, получим, что $\chi_Э = \varepsilon - 1$. Следовательно, $\chi_Э = 4 - 1 = 3$.

. Задача №17

Напряженность магнитного поля в среде, обладающей $\mu_r = 161$, $H = 0{,}1$ А/м. Чему равен вектор намагниченности среды $\bar{M}$?

Решение:

Согласно (1.10), магнитная восприимчивость среды определяется как $\chi_{\text{М}} = \mu_r - 1 = 102 - 1 = 101,$ а намагниченность среды $\bar{M}$ равна $\bar{M} = \mu_0 \chi_{\text{М}} \bar{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 160 \cdot 0{,}1 = 126{,}8 \cdot 10^{-7}$ Тл.

. Задача №18

Плоский воздушный конденсатор, пластины которого имеют форму дисков радиуса a, подключен к источнику переменного гармонического напряжения частоты ω. Диэлектрик внутри – воздух. Расстояние между дисками d. Найти энергию электрического и магнитного полей внутри конденсатора.

Решение:

Напряжение между пластинами меняется по гармоническому закону $U = U_0 \cos \omega t$. Напряженность электрического поля определим через напряжение

$$E = \frac{U}{d} \cos \omega t.$$

Электрическая энергия равна

$$W_{\text{Э}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2} \pi a^2 d \cdot \cos^2 \omega t = \frac{\varepsilon_0 \pi \cdot a^2}{2d} U_0{}^2 \cos^2 \omega t. \quad (2.14)$$

Магнитную энергию определим по формуле:

$$W_{\text{М}} = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV. \quad (2.15)$$

Напряжённость магнитного поля определим из закона полного тока (2.1):

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = H \cdot 2\pi r = \int_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} d\bar{S} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \; H = -\varepsilon_0 \frac{r \omega U}{2d} \sin \omega t.$$

Подставив значение напряжённости магнитного поля в (2.14), получим:

$$W_{\text{М}} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{2d} \right)^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d \left(\int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 dr \cdot d\alpha) \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_0 \omega U_0}{2d} \right)^2 \frac{a^4 2\pi \cdot d}{4} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 \pi}{4d} \left(\frac{U_0 a^2}{2} \right)^2 \sin^2 \omega t. \quad (2.16)$$

Задача №19

Докажите, что вектор $\bar{E}$, представленный выражением $\bar{E} = \bar{y}_0 E_{y0} \cos(\omega t - kz)$, является решением волнового уравнения.

Решение:

Так как вектор $\bar{E}$ является функцией одной координаты z, оператор $\nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2}$ и волновое уравнение примет вид

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Взяв производные от вектора $\bar{E}$, убедитесь, что равенство левой и правой частей волнового уравнения выполняется при равенстве $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Задача № 20

Доказать, что вектор магнитной индукции

$$\bar{B} = \bar{\alpha}_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

удовлетворяет 4-му уравнению Максвелла в интегральной форме (2.8), т.е. линии вектора $\bar{B}$ непрерывны (рис. 2.10).

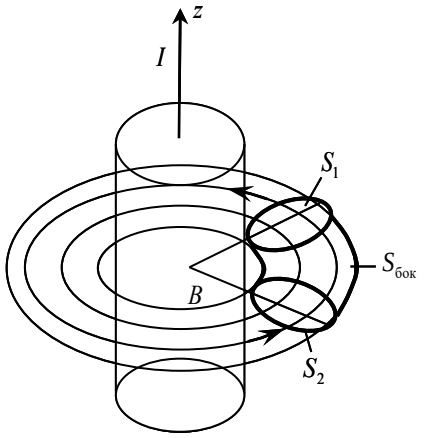


Рис. 2.10. К задаче №20

Решение:

Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла

$$\oint_S \bar{B} d\bar{S}$$

по поверхности симметричной (относительно оси z) объёмной фигуры, построенной вокруг проводника с током и замкнутой по координате α. Часть этой фигуры, в виде искривленного цилиндра, показана на рисунке 2.10. Полный поток вектора магнитной индукции через этот выделенный объём можно представить в виде трех потоков: через одно S_2 и другое S_1 сечение и боковую поверхность $S_{\text{бок}}$. Запишем вектор $d\bar{S}$ виде суммы трех слагаемых: $\bar{\alpha}_0 dS_1 - \bar{\alpha}_0 dS_2 + \bar{r}_0 dS_{\text{бок}}$. Подставим в подынтегральное выражение векторы $\bar{B}$ и $d\bar{S}$, получим:

$$\oint_S \bar{B}d\bar{S} = \oint_s \bar{\alpha}_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} d\bar{S} = \oint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_0 dS_1 - \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_0 dS_2 + \bar{\alpha}_0\bar{r}_0 dS_{\text{бок}}) = 0.$$

Здесь $\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_0 dS_1 - \bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_0 dS_2 = 0$, так как $S_1 = S_2$, а нормали к площадкам противоположно направлены, и скалярное произведение двух ортогональных векторов равно нулю ($\bar{\alpha}_0\bar{r}_0 = 0$). Поэтому для замкнутой фигуры получаем $\oint_S \bar{B}d\bar{S} = 0$.

Ответ: $\oint_S \bar{B}d\bar{S} = 0$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вектор $\bar{E} = E_0\bar{z}_0 \cos t \sin x$. Определить вектора $\bar{B}$ и $\bar{H}$.

Ответ: $\bar{B} = \bar{y}_0 E_0 \cos x \sin t$; $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu} \Rightarrow \bar{H} = \bar{y}_0 \frac{E_0}{\mu} \cos x \sin t$.

2. Чему равен заряд в кубе с ребром a, если начало координат расположено на вершине куба, а ось совпадает с одним его ребром, вектор

$$\bar{D} = \frac{x^2}{2}\bar{x}_0 ?$$

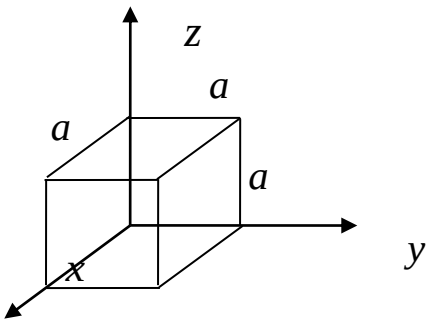


Рис. 2.11. К задаче №2

Ответ: $q = \frac{a^4}{2}$.

3. Какое физическое толкование может быть дано уравнению $\operatorname{rot}\bar{H} = 10\bar{z}_0$?

Ответ: Вихревое магнитное поле H возбуждено током, плотность которого 10 А/м и направление вдоль оси z.

4. Какие из представленных магнитных полей при $\mu = \text{const}$ удовлетворяют уравнению Максвелла, т.е. могут быть реализованы?

1) $\bar{H}_1 = \bar{x}_0 3x\cos\omega t - \bar{y}_0 3\cos\omega t$

2) $\bar{H}_2 = \bar{y}_0 \cos x \cos\omega t - \bar{x}_0 \sin y \cos\omega t$;

3) $\bar{H}_3 = \bar{x}_0 6x\cos\omega t - \bar{y}_0 3y^2\cos\omega t$.

Ответ: Второе поле.

5. Заряд $q = 10^{-3}$ Кл со скоростью $\nu = 100$ м/с под углом $\varphi = 60°$ пересекает поле $E = 10^{-2}\bar{y}_0$ В/м. Какова сила воздействия поля E на заряд и зависит ли она от скорости и угла?

Ответ: $F = 10^{-5}\bar{y}_0\cos\varphi$ Кл·В/м.

6. В сферическом объёме радиуса R равномерно распределён гармонически изменяющийся заряд с объёмной плотностью $\rho = 1\cdot\cos\omega t$. Чему будет равен ток проводимости, связанный с этим зарядом?

Ответ: $I_{\text{пр}} = \frac{4}{3}\pi R^3\omega\sin\omega t$.

7. В объёме V имеется заряд $q = 2$ Кл и заряд q_2. Определить q_2, если известно, что поток вектора $\bar{D}$ через поверхность S, охватывающую объём V, равен 1 Кл.

Ответ: $q_2 = -1$ Кл.

8. Определить циркуляцию вектора $\bar{B}$ по контуру с координатами $(0,0);\ (0,1);\ (1,1);\ (1,0)$, если плотность тока проводимости $\bar{j}_{\text{пр}} = \bar{j}_0 xy$, $\bar{j}_0 \perp XOY$; плотность тока смещения $\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} = 0;\ \mu = 3\mu_0$.

Ответ: $0,75\mu_0$.

9. Сфера радиуса a имеет заряд с объемной плотностью $\rho = \rho_0\frac{r^2}{a^2}\cdot\sin\theta$. Найти полный заряд сферы Q.

Ответ: $Q = \frac{\rho\pi^2 a^3}{5}$.

10. В некоторой области с диэлектрической проницаемостью ε задано поле $\bar{E} = \kappa\left(\bar{x}_0 x^2 + \bar{y}_0 y^2\right)$. Вычислить плотность объемного заряда.

Ответ: $\rho = 2\kappa(x + y)$.

11. Напряженность поля в некоторой области меняется по закону $E_x = E_a\frac{a}{x};\ E_y = 0;\ E_z = 0;\ x \in [a,b]$. Найти объемную плотность заряда в данной области, если $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Ответ: $\rho = -\frac{a}{x^2}\varepsilon_0 E_0$.

12. Вблизи границы раздела двух сред $(x = 0)$ задано распределение вектора

$$\bar{D}_1 = \left(5\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0\right),\ x > 0;$$

$$\bar{D}_2 = \left(4\bar{x}_0 + 3\bar{y}_0\right),\ x < 0.$$

Есть ли на границе раздела поверхностный заряд?

Ответ: есть.

13. Электрическое поле, имеющее амплитуду напряженности $15\ \text{В/м}$ и частоту $0{,}6\ \text{ГГц}$, существует в среде с параметрами $\varepsilon = 3{,}6$, $\mu = 1$, $\sigma = 0{,}72\ \text{См/м}$. Определите амплитудное значение и фазовый угол вектора плотности полного тока, существующего в каждой точке данной среды.

Ответ: $\delta_m = 10{,}8\ \text{А/м}^2$, ток опережает напряженность поля на угол $0{,}17\ \text{рад}$.

14. Определить ЭДС в замкнутом контуре, изображенном на рисунке в виде треугольника ABC, если известен вектор $\bar{H} = H_m \bar{y}_0 \sin \varpi t$.

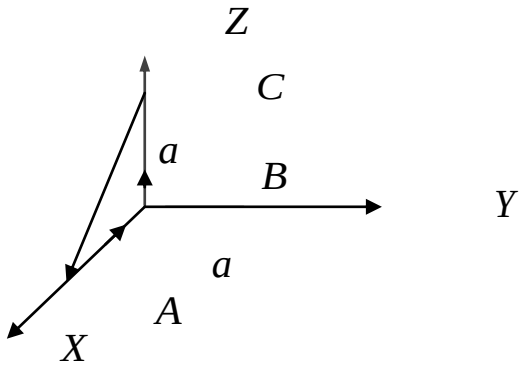


Рис. 2.13. К задаче №14

Ответ: $\text{ЭДС} = -\omega\mu H_m \bar{y}_0 \cos \varpi t$.

15. В однородном магнитном поле с напряженностью $\bar{H}$ вращается прямоугольная плоская рамка со скоростью $\omega = 2\pi f$. Стороны рамки a и b, число витков N, магнитная проницаемость среды $\mu_a = \mu_0$, f – число оборотов в секунду. Вычислить ЭДС в рамке.

Ответ: $\text{Э} = -2\pi n N \mu_0 \cdot H \cdot a \cdot b \cdot \sin 2\pi n t$.

16. Вектор электрического смещения равен

$$\bar{D} = x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 - (x + y)\bar{z}_0.$$

Найти объемную плотность заряда.

Ответ: $2\ \text{Кл/м}^3$.

17. По рамке с размерами $a \times b$, расположенной на расстоянии r от прямолинейного бесконечного проводника, протекает ток $I = I_0 \cos \omega t$. Вычислить величину электродвижущей силы в проводе.

Ответ: $\text{Э} = \dfrac{\omega\mu_0 в}{2\pi} I_0 \cdot \ln \dfrac{r + a}{r} \cdot \sin \omega t$.

18. Напряженность магнитного поля в среде, обладающей $\mu_r = 102$, $H = 2$ А/м. Чему равен вектор намагниченности среды $\bar{M}$?

Ответ: $\bar{M} = 0,25 \cdot 10^{-3}$ Тл.

19. При каких условиях выполняется равенство $\operatorname{div}\left[\bar{r}, \bar{H}\right] = 0$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор, $\bar{H}$ – вектор напряженности магнитного поля.

Ответ: $\operatorname{div}\bar{H} = 0$.

20. Удельная проводимость среды $\bar{\sigma}$ выражается тензором. Какой вид имеет этот $\bar{\sigma}$, если $\bar{\delta} = \bar{\delta}_0 + \delta_1$, где $\bar{\delta}_0 = \sigma \cdot \bar{E}$, $\bar{\delta}_1 = \chi \cdot \left[\bar{E} \cdot \bar{z}_0 \cdot H_0\right]$, κ – постоянная.

Ответ: $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & \kappa H_0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & \kappa H_0 & \sigma \end{bmatrix}$.

21. Под каким углом расположены векторы $\bar{E}$, $\bar{D}$, если

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

а $\bar{E} = x_0 E$.

Ответ: $90°$.

22. Как изменится токи проводимости ($\bar{\delta}_{\text{пр}}$) и смешения ($\bar{\delta}_{\text{см}}$); если при тех же $\bar{E}$ и $\bar{H}$, ε и σ среды увеличатся вдвое?

Ответ: $\bar{\delta}_{\text{см}}$ и $\bar{\delta}_{\text{пр}}$ – удвоятся.

23. Вектор $\bar{D}$ направлен под углом $30°$ к границе раздела двух сред, диэлектрические проницаемости которых равны $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \sqrt{3}$. Определить угол α_1 между $\bar{D}_2$ и границей раздела.

Ответ: $\alpha_2 = 45°$.

24. Диэлектрик коаксиального кабеля имеет удельную проводимость σ. Определить напряженность электрического поля E внутри кабеля, если ток утечки на единицу длины равен I.

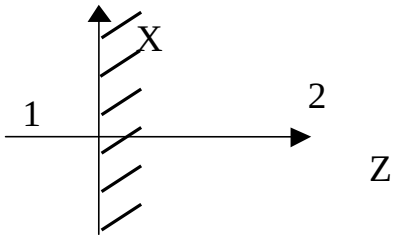
Ответ: $\bar{E} = \bar{r}_0 \dfrac{I}{2\pi \cdot \sigma \cdot r}$.

25. На границе (плоскость XZ) раздела двух сред векторы $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_{11}$ имеют вид $\bar{D}_1 = (2\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 4\bar{z}_0) \cdot \varepsilon$; $\bar{D}_{11} = (4\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 8\bar{z}_0) \cdot \varepsilon_0$. Определить напряженности электрического поля в этих средах. С какими средами, с точки зрения материальных уравнений, мы имеем здесь дело?

Ответ: $\vec{E}_1 = (2\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 4\bar{z}_0)$ $\vec{E}_2 = (4\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 8\bar{z}_0)$. Обе среды анизотропные.

26. Найти поток вектора плотности полного тока
$\bar{\delta}_{\text{пол}}$ =x^0 5+ y^{0}7+z^{0}8 через поверхность куба со стороной a=5 m. </q>
Ответ: 0.

27. Имеются 2 полубесконечных среды: изотропная (1-ая) и анизотропная (2-ая). В 1-ой среде плотность тока проводимости $\bar{j}_1 = \bar{x}_O \bar{j}$ и проводимость $\sigma_1 = \sigma$, во второй среде проводимость $\sigma_2 = \begin{vmatrix} \alpha\sigma & \beta\sigma & 0 \\ \beta\sigma & \alpha\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}$



Записать выражение вектора j_2 во 2-ой среде.
Ответ: $\bar{j}_2 = \bar{j}_1(\alpha \vec{x}_o + \beta \vec{y}_o)$

28. Как изменятся токи проводимости $j_{пр}$ и смещения $j_{см}$, если при тех же $\vec{E}$ *и* $\vec{H}$ параметры среды ε и σ учетверить?

Ответы: $j_{см}=4j_{смо}$; $j_{пр}=5\delta j_{про}$.

29. В некотором объеме свободного пространства имеется электрическое поле $\bar{E} = 10\overline{y_0}\, B/м$ и магнитное поле $\bar{H} = 15\overline{x_0}\, A/м$. Заряд $q = 1 \cdot 10^{-9}\, Кл$ впрыскивается в этот объем со скоростью $\bar{v} = 1 \cdot 10^6 \overline{z_0}\, м/с$. Определить силу, действующую на заряд и ее напряжение. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, Гн/м$.

Ответ: $28{,}84 \cdot 10^{-9} \overline{x_0}$

30. Вектор $\bar{E}$ электромагнитного поля равен $\bar{E} = E_0 \bar{x}_0 \sin(\omega t - \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot z)$.
Определить вектор $\bar{H}$.
Ответ: $\bar{H} = \sqrt{\varepsilon/\mu}\, E_0 \bar{y}_0 \sin(\omega t - \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot z)$.

31. По двум параллельным проводам, отстоящим один от другого на расстоянии L протекают постоянные однонаправленные токи I_1 и I_2. На каком расстоянии r от первого провода, на линии их соединяющей, расположена точка, на которой магнитное поле равно нулю? Ответ: $r = L \cdot I_1/(I_2 + I_1)$

32. Чему равен и как направлен вектор плотности тока проводимости $\vec{\delta}_{пр}\ \overline{j_{пр}}$, если $\overline{E} = \overline{x_0}E$, в $\sigma = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_2 & \sigma_0 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\vec{\delta}_{пр} = \sigma_1 E\overline{y_0} + \sigma_2 E\overline{z_0}$.

33. Электрон, летящий вдоль оси Z со скоростью $V = 10^6$ м/с, попадает в зону, где одновременно существуют стационарное электрическое и магнитное поля, имеющие вид: $\overline{E} = \bar{x}_a E_x$ и $\overline{B} = \bar{y}_0 B_y$, где $E_x = 1\ 10^{3\ В}$/м;

$B_y = 4$мТл. Определить величину силы, воздействующей на электрон.

Ответ: F=e·3·10^3, Н.

34. Среды разделены заряженной поверхностью, и в одной из них поле отсутствует. Каково электрическое поле в другой среде, если поверхностная плотность заряда ξ_s, а диэлектрическая проницаемость второй среды ε_2.

Ответ: E= $\xi_s/(2\varepsilon_{r2})$

35. Вектор $\overline{D}$ направлен под углом 45^0 к границе раздела двух сред диэлектрические проницаемости которых равны ε_1=1, $\varepsilon_2 = \sqrt{3}$. Поверхностная плотность заряда ξ=0. Определить угол α_2 между $\overline{D}_2$ и границей раздела.

Ответ: $\alpha_2 = 30^0$.

36.Относительная диэлектрическая проницаемость среды изотропного диэлектрика равна $\varepsilon_r = 9$. Чему равна электрическая восприимчивость?

Ответ: 8

37. По границе раздела сред протекает поверхностный ток $\vec{\eta}_S$. В первой среде $\overline{H} = 0$. Определить магнитное поле во второй среде вблизи поверхности.

Ответ : $\vec{\eta}_S$ /2

Глава 3. Электростатическое поле

Целью данного занятия является закрепление теоретического материала путем решения задач по следующим вопросам курса:

Электростатические поля, создаваемые заряженными телами.

Силы в электростатических полях.

3.1. Краткие теоретические сведения

Электростатическое поле описывается системой дифференциальных и интегральных уравнений, которые являются частным случаем общих уравнений Максвелла (2.1)÷(2.6) в предположении, что создающие его заряды не зависят от времени и не перемещаются в пространстве [1].

Интегральные уравнения:	Дифференциальные уравнения:
$\oint_e \vec{E} d\vec{l} = 0$; (3.1)	$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$; (3.1a)
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV = q$; (3.2)	$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ (3.2a)
материальное уравнение $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (3.3)	

3.1.1. Электростатический потенциал

Непосредственно из уравнений Максвелла ($\mathrm{rot}\vec{E} = 0$) следует, что электрическое поле является потенциальным, следовательно, его силовые линии начинаются и оканчиваются на зарядах и вектор напряженности электрического поля может быть представлен градиентом потенциала.

$$\vec{E} = -grad\varphi,\ \varphi_i - \varphi_2 = \int_{M_1}^{i\ 2} \vec{E} d\vec{\ell}\,. \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.2а) с учетом (3.3) принимает вид $div\varepsilon\ \vec{E} = \rho$.

Подстановка $\vec{E}$ в форме градиента потенциала в уравнение (3.2а) приводит к уравнению Пуассона, которое является основным уравнением для нахождения потенциала:

$$div(\varepsilon\, grad\varphi) = -\rho\,.$$

Для однородной среды уравнение Пуассона принимает вид объемного заряда,

$$divgrad\varphi = \nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon\,. \qquad (3.5)$$

Для неоднородной среды, при равенстве нулю объёмного заряда уравнение Пуассона преобразуется в уравнение Лапласа.

$$div(\varepsilon\, grad\varphi) = 0 \qquad (3.5а)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа дополняются граничными условиями на границах раздела сред:

Условия на границе металл – диэлектрик (М-Д)		Условия на границе двух диэлектриков (Д-Д)	
	$E_\tau = 0,$ $\varphi_{iåò} = const$ (3.6)		$E_{\tau_1} = E_{\tau_2},$ $\varphi_1 = \varphi_2$ (3.8)
	$D_n = \xi,$ $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \xi$ (3.7)		$D_{n_1} - D_{n_2} = \xi$ $D_{n_1} = D_{n_2}$ при $\xi = 0$ $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\xi$ (3.9)

Уравнения Пуассона и Лапласа применяются для решения краевых задач, в которых на электродах, расположенных в диэлектрике, заданы потенциалы или заряды и требуется определить электрическое поле в этом диэлектрике.

Существует широкий класс задач, в которых требуется определить поле по известному распределению зарядов. При решении таких задач большое значение имеют понятия: точечный заряд q, заряженная нить, поверхностный заряд ξ, объемный заряд ρ.

Точечным зарядом можно считать заряд q, расположенный на теле, линейными размерами которого можно пренебречь.

Под заряженной нитью понимают бесконечно длинный и тонкий проводник, имеющий линейную плотность заряда τ.

Если заряды распределены в пространстве дискретно или непрерывно, то в некоторой точке суммарному заряду соответствует суммарный потенциал (принцип суперпозиции).

На основании принципа суперпозиции решение уравнения Пуассона имеет вид:

для распределенного объемного заряда $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho dv}{r} \qquad (3.10)$$

для заряженной цилиндрической поверхности конечных размеров $$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau dl}{r} \qquad (3.11)$$

для поверхностных зарядов $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\xi}{r} dS \qquad (3.12)$$

для точечных дискретных зарядов $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \qquad (3.13)$$

Напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые точечным зарядом

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}_0\tau}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ и } \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}. \qquad (3.14)$$

Напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые заряженной нитью

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}_0 q}{2\pi\varepsilon r^2} \text{ и } \varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + C. \qquad (3.15)$$

3.1.2. Энергия электростатического поля. Емкость. Силы в электростатическом поле

Энергия электростатического поля может быть определена через плотность энергии электрического поля $\omega_{э} = \frac{1}{2}\varepsilon Å^2$ путём интегрирования её по объёму

$$W_{э} = \int_V \omega_{э} dv \qquad (3.16)$$

или через потенциал и заряды:

$$W_{Э} = \frac{1}{2}q\varphi,\ W_{э} = \int_V \rho\varphi dv,\ W_{э} = \int_s \xi_s\varphi ds\ ,\ W_{э} = \int_l \tau\varphi d\ell. \qquad (3.17)$$

Формулы для расчета энергии электрического поля соответствующие случаям (3.10)÷(3.13) приведены ниже:

$$W_{э} = \frac{1}{2}\int \rho\varphi dv,\ W_{э} = \frac{1}{2}\int_V \tau\varphi dv,$$

$$W_{э} = \frac{1}{2}\oint_S \xi_s dS \text{ и } W_{э} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i q_i.$$

В последней формуле случае не учтены взаимодействия заряженных тел.

Емкость системы, состоящей из двух заряженных проводников определяется как отношение заряда одного из проводников к разности потенциалов между ними

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2} \qquad (3.18)$$

Сила, действующая на точечный заряд q, помещённый в электростатическое поле, равна

$$\vec{F} = q\vec{E}, \qquad (3.19)$$

Сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 отстоящих на расстоянии r_{12} друг от друга, определяют с помощью закона Кулона:

$$\vec{F} = \vec{r}^{\,0}\,\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} \qquad (3.20)$$

Сила, действующая на заряженную поверхность при равномерно распределённом заряде

$$\vec{F} = \xi_S S\vec{E}, \qquad (3.21)$$

где *S*-площадь заряженной поверхности.

3.2. Примеры расчета электростатических полей

Задача №1

Две плоские металлические пластины разделены слоем однородного диэлектрика толщиной d с диэлектрической проницаемостью ε (конденсатор). На верхнюю пластину подан потенциал U, нижняя пластина заземлена (рис. 3.1). Найти: потенциал φ между пластинами, напряженность поля $\vec{E}$, вектор электрического смещения $\vec{D}$, заряд на одной из пластин конденсатора q, его емкость C. Линейные размеры пластин много больше размера d .

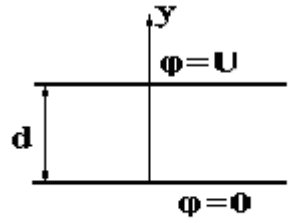


Рис. 3.1

Решение:

Выбираем прямоугольную систему координат, в которой ось y перпендикулярна поверхности пластин. В этом случае, можно считать потенциал φ зависящим только от координаты y. Решение проводим с помощью уравнения Лапласа (3.5а) с применением граничных условий для потенциала на границе раздела диэлектрик-металл (3.9).

Уравнение Лапласа $\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$ имеет общее решение $\varphi = Ay + B$, где A и B неизвестные постоянные подлежащие определению. Для их определения используем граничные условия: *а)* при $y = 0$ $\varphi = 0$; *б)* при $y = d$ $\varphi = U$.

В результате получим $B = 0$, $A = \frac{U}{d}$ и выражение потенциала $\varphi = \frac{U}{d}y$.

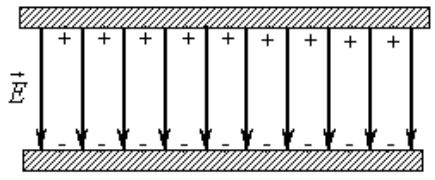


Рис. 3.2.

Как следует из решения, потенциал линейно возрастает от 0 до U при изменении координаты y от 0 до d.

Напряженность поля и электрическую индукцию определяем как $\vec{E} = -grad\varphi = -\vec{y}^0 \frac{d\varphi}{dy} = -\vec{y}^0 \frac{U}{d}$, $\vec{D} = \vec{y}^0 \varepsilon \frac{U}{d}$.(*)

Поверхностная плотность заряда определяется из выражений на верхней пластине $y = \mathrm{d}$ $\xi = \varepsilon \frac{d\varphi}{dn} = \varepsilon \frac{U}{d}$,

на нижней пластине $y = \mathrm{d}$ $\xi = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dn} = -D$.

Заряд пластины конденсатора $q = \xi S$,

емкость конденсатора $C = \frac{q}{U_1 - U_2} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\ S}{d}$.

На рисунке 3.2 изображены: распределение электрических зарядов на поверхностях электродов и электрическое поле между пластинами.

Задача №2

Сохраним условие задачи №1, но диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей конденсатор, принимаем $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\alpha y}$.

Решение:

Для данной задачи потенциал зависит от y, поэтому уравнение Лапласа $div\varepsilon\, grad\varphi = 0$ преобразуется к виду $\frac{d}{dy}(\varepsilon_0 e^{\alpha y} \frac{d\varphi}{dy}) = 0$ и удовлетворяется при $\varepsilon_0 \cdot e^{\alpha y} \cdot \frac{d\varphi}{dy} = A$, где A – неизвестная постоянная.

Потенциал

$\varphi = \int \frac{A}{\varepsilon_0} e^{-\alpha y} dy = -\frac{A}{\varepsilon_0 \alpha} e^{-\alpha ó} + B$.

Неизвестные постоянные A и B могут быть определены из граничных условий:

1. при $y = 0$ $\varphi = 0$, откуда $B = +\frac{A}{\varepsilon_0 \alpha} \Rightarrow \varphi = \frac{A}{\varepsilon_0 \alpha}(1 - e^{-\alpha y})$.

2. при $y = d$ $\varphi = U$ откуда $U = \frac{A}{\varepsilon_0 \alpha}(1 - e^{-\alpha d}) \Rightarrow A = \frac{U \varepsilon_0 \alpha}{(1 - e^{-\alpha d})}$.

Следовательно, $\varphi = \frac{U(1 - e^{-\alpha y})}{1 - e^{-\alpha d}}$.

Напряженность электрического поля $E_y = -\frac{d\varphi}{dy} = \frac{U \alpha e^{-\alpha y}}{1 - e^{-\alpha d}}$,

вектор электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\frac{\varepsilon U \alpha e^{-\alpha y}}{1 - e^{-\alpha d}}$.

Ёмкость конденсатора определяется с помощью известной формулы:

$C = \frac{q}{U}$.

Заряд при $y = 0$ равен $q = D_{y=0} S = \xi S = \frac{\varepsilon U S \alpha}{1 - e^{-\alpha d}}$. Используя (3.18), определяем

$$C = \frac{\varepsilon \alpha S}{1 - e^{-\alpha d}}.$$

Задача №3

Сохраним формулу задачи №1, но добавим условие, что между пластинами в диэлектрике размещен заряд с объемной плотностью ρ.

Решение:

В этом случае необходимо использовать уравнение Пуассона (3.5), из которого путём интегрирования определяется $\frac{d\varphi}{dy} = -\int \frac{\rho}{\varepsilon} dy = -\frac{\rho}{\varepsilon} y + A$,

а затем потенциал $\varphi = \int (-\frac{\rho}{\varepsilon} y + A) dy = -\frac{\rho y^2}{2\varepsilon} + Ay + B$

Граничные условия остаются такими же как в задаче № 1 B=0,

$A = \frac{U + \frac{\rho}{2\varepsilon} d^2}{d}$.

Окончательное выражение для потенциала имеет вид $\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon}(d \cdot y - y^2) + \frac{U}{d} y$, из которого следует, что граничные условия удовлетворяются.

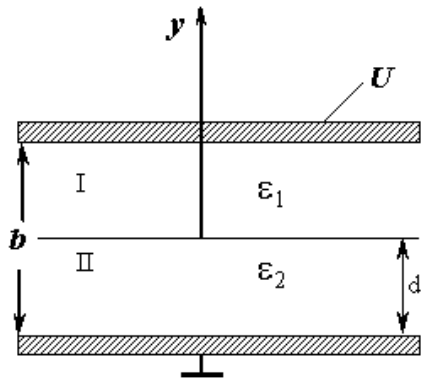


Рис. 3.3

Напряженность электрического поля (3.4) $E_{\text{о}} = -[\frac{\rho}{2\varepsilon}(d - 2y) + \frac{U}{d}]$ имеет.

Можно построить график зависимости $\varphi(y)$ при заданном отрицательном и положительном объемном заряде.

Задача №4

Между пластинами плоского конденсатора расположены два слоя диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2. Размеры слоев показаны на рисунке. 3.3. Определить потенциал, напряженность поля и емкость конденсатора.

Решение:

Пространство между пластинами разбиваем на две области: область I с диэлектриком, имеющую диэлектрическую проницаемость ε_1 и область II, имеющую диэлектрическую проницаемость ε_2. Для каждой из областей запишем уравнение Лапласа, т.к. $\rho = 0$ и его решение.

Для первой области

$\frac{d^2\varphi_1}{dy^2} = 0$, $\varphi_1 = Ay + B$.

Для второй области

$\frac{d^2\varphi_2}{dy^2} = 0$, $\varphi_2 = Cy + D$.

Для определения четырех неизвестных констант A, B, C, D нужно использовать четыре граничных условия:

При

$y = 0$	$y = 0$	$y = d$	$y = d$
$\varphi_1 = 0$	$\varphi_2 = U$	$\varphi_1 = \varphi$	$\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dy} = \varepsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dy}$

В результате будет получена система:

$$1)\ \begin{cases} 0 = \mathrm{A}\cdot 0 + \mathrm{B} \\ \mathrm{U} = \mathrm{C}\cdot \mathrm{b} + \mathrm{D} \\ \varepsilon_1 \mathrm{A} = \varepsilon_2 \mathrm{C} \\ \mathrm{A}\cdot d + \mathrm{B} = C\cdot d + D \end{cases}$$

Решение системы этих уравнений даёт определение констант A, B, C, D

$B = 0$, $A = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)\{U/d\ (\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$, $C = U/\{d\ (\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$,

$D = (U(\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1)d\ )/\{d\ (\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$.

Потенциалы в областях имеют вид и удовлетворяют граничным условиям:

Для первой области:

$\varphi_1 = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)Uy/\{d(\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$ при $y = 0 \quad \varphi_1 = 0$.

Для второй области:

$\varphi_2 = U(d(\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1)\cdot y)/\{d(\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$ при $y = d \quad \varphi_2 = \mathrm{U}$.

Напряженность электрического поля в первой и второй областях соответственно

$E_{y1} = -\frac{d\varphi_1}{dy} = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1)U/\{d(\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$;

$E_{y2} = -\frac{d\varphi_2}{dy} = -U/\{d\ (\varepsilon_2/\varepsilon_1 - 1) + b\}$.

Отношение $\frac{E_{y1}}{E_{y2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ или $D_{y1} = D_{y2}$, что говорит о выполнении граничных условий при $y = d$. Емкость двухслойного конденсатора является последовательным соединением емкостей

$C_1 = \varepsilon_1 S / d$, $C_2 = \varepsilon_2 S /(b - d)$, $C = C_1 C_2 /(C_1 + C_2)$.

Задача №4

Определить потенциал φ, напряженность электрического поля $\vec{E}$ и вектор электрического смещения $\vec{D}$, двухслойного коаксиального конденсатора длиной L. Параметры диэлектриков и размеры конденсатора приведены на рис. 3.4. Заряд на поверхности внутреннего проводника конденсатора равен q, внешний проводник конденсатора заземлен.

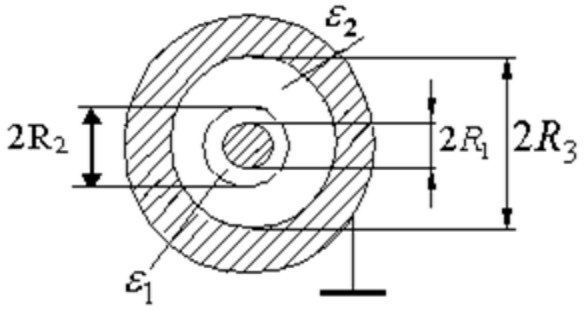


Рис. 3.4

Решение:

Для данной задачи, потенциал конденсатора описывается уравнением Лапласа в цилиндрической системы координат, в котором из соображений симметрии по координатам a u q, удерживается только одно слагаемое

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид $\varphi = A \ln r + B$ и для областей 1 и 2 запишется в виде:

$\varphi_1 = A_1 \ln r + B_1$; $R_1 \le r \le R_2$ (3.22)

$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2$; $R_2 \le r \le R_3$ (3.23)

$E_{1r} = -\frac{A_1}{r}$, $R_1 \le r \le R_2$, (3.24)

$E_{2r} = -\frac{A_2}{r}$, $R_2 \le r \le R_3$. (3.25)

Напряженность электрического поля выражается через градиент потенциала $\vec{E} = -grad\,\varphi = -\vec{r}^{\,0}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

Так как φ зависит только от r, то вектор $\vec{E}$ будет иметь одну составляющую E_r:

$$E_{1r} = -\frac{A_1}{r},\ R_1 \le r \le R_2, \quad (3.24)$$

$$E_{2r} = -\frac{A_2}{r},\ R_2 \le r \le R_3. \quad (3.25)$$

Для определения потенциала в данной, конкретной задаче необходимо определить неизвестные постоянные: A_1, A_2, B_1, B_2.

Для этого надо воспользоваться четырьмя граничными условиями для поля и потенциала.

при $r = R_3$ при $r = R_1$, при $r = R_2$

1) $\varphi_2 = 0$ 2) $D = \xi = q/(2\pi R_1 L)$ 3) $D_{n1} = D_{n2}$, 4) $\varphi_1 = \varphi_2$

Здесь ξ-поверхностная плотность заряда на внутренней поверхности проводника конденсатора.

Используем первое граничное условие:

$$\varphi_2 = A_2 \ln R_3 + B_2 = 0$$

откуда получим

$$-A_2 \ln R_3 = B_2$$

и, следовательно,

$$\varphi_2 = -A_2 \ln \frac{R_3}{r}.$$

Из второго граничного условия

При $r = R_1$, $D_{r1} = \varepsilon_1 E_{r1} = -\varepsilon_1 \frac{A_1}{R_1} = \frac{q}{2\pi R_1 L}$, откуда

$$A_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L} = -\xi.$$

Выражение (3.22) для потенциала φ_1 будет иметь вид $\varphi_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon L}\ln r + \hat{A}_1$

.

Используем третье граничное условие $D_{r1} = D_{r2}$ при $r = R_2$ (3.24) и (3.25)

$$-\frac{A_1}{R_2}\varepsilon_1 = -\frac{A_2}{R_2}\varepsilon_2,$$

откуда, зная A_1 получим

$$A_2 = A_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L}$$

Теперь можно полностью записать потенциал второй области

$$\varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_3}{r}.$$

Для полного определения потенциала φ_1 используем четвёртое, граничное условие $\varphi_1 = \varphi_2$ при $\mathrm{r} = \mathrm{R}_2$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_3}{R_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L} \ln R_2 + \hat{A}_1 \text{ откуда } B_1 = \frac{q}{2\pi L}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ell n R_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\ell n \frac{R_3}{R_2}\right).$$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_3}{R_2} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L} \ln R_2 + \hat{A}_1 \text{ откуда } B_1 = \frac{q}{2\pi L}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ell n R_2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\ell n \frac{R_3}{R_2}\right).$$

Откуда потенциал $\varphi_1 = \frac{q}{2\pi L}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ell n \frac{R_2}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ell n \frac{R_3}{R_2}\right)$.

Таким образом, основная часть задачи решена - потенциалы $u\ \varphi_1$ и φ_2 определены полностью

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi L}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ell n \frac{R_2}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ell n \frac{R_3}{R_2}\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln \frac{R_3}{r}.$$

Из их сравнения следует, что потенциал непрерывен на границе раздела диэлектрик – диэлектрик при $\mathrm{r} = \mathrm{R}_2$ Далее запишем выражения для $E_{\mathrm{r}1},\ E_{r2}, \mathrm{D}_{r1}, \mathrm{D}_{r2}$.

$$E_{r1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_1 L r},\ D_{r1} = \frac{q}{2\pi L r}.$$

$$E_{r2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_2 L r},\ D_{r2} = \frac{q}{2\pi L r}.$$

Перейдём от двухслойного конденсатора к однослойному, для чего положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon,$ тогда

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon L} \ln \frac{r}{R_1},\ \vec{E} = \vec{r}^{\,0} \frac{q}{2\pi\varepsilon L r}.$$

Задача №5.

В цилиндрическом объёме задан потенциал $\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$. Определить объёмную плотность заряда, создающего это поле.

Решение:

Чтобы по заданному закону распределения потенциала в пространстве

$\varphi(r,\mathbf{a},z)$ найти объёмный заряд, создающий это поле, необходимо использовать уравнение Пуассона (3.5).

В нашем случае поле зависит только от r, поэтому в уравнении Пуассона записанного в цилиндрической системе координат оставляем слагаемое, зависящее только от координаты r.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.26)$$

путём последовательного дифференцирования, находим выражение для объемной плотности заряда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r4r)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \frac{8r}{r}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \rho=-8\varepsilon_0.$$

Примером применения уравнения Пуассона является хорошо известная в электронике задача о нахождении распределения объёмного заряда между катодом и анодом электронно- лучевой трубки.

Задача №7.

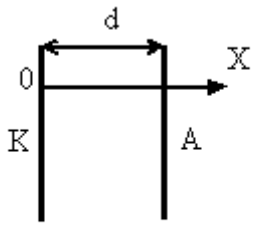


Рис. 3.5

Из плоского катода К вылетают электроны в направлении плоского анода А. Расстояние между электродами d много меньше их размеров. Катод заземлён, на анод подан потенциал U. Потенциал электрического поля между электродами меняется по закону $\varphi = kx^{4/3}$, здесь k –const (рис. 3.5).

Определить распределение объёмного заряда между электродами и поверхностный заряд на электродах.

Решение:

Для определения объемной плотности зарядов ρ в области между электродами следует использовать уравнение Пуассона.

Потенциал зависит только от координаты x. (краевыми эффектами пренебрегаем). Поэтому получим

$$\rho(x)=-\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{4}{9}\kappa\cdot\varepsilon\cdot x^{-2/3}.$$

Плотность поверхностных зарядов на катоде и на аноде определяется . граничными условиями (3.9) В нашем случае нормалью к катоду будет ось *x*. Поэтому поверхностная плотность заряда на катоде будет

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{\xi}{\varepsilon};\ \xi_{\hat{e}}=-\varepsilon\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{4}{3}\kappa\cdot\varepsilon\cdot x^{1/3}\Big|_{x=0}=0.$$

Аналогично нормаль к аноду противоположна по направлению оси *x*. Поэтому для анода

$$\xi_{à} = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=d} = \frac{4}{3}\kappa \cdot \varepsilon \cdot d^{1/3}. \quad (3.27)$$

Попробуем разобраться, почему при $x \to 0$ объемная плотность заряда $\rho(x) \to \infty$?

Движение электронов от катода к аноду приводит к появлению тока переноса $\vec{j}_{пер}$, величина которого в любом сечении, параллельном плоскостям катода и анода, должна быть, неизменной и равна

$$\vec{\delta}_{ïåð} = \rho\vec{\vartheta} = const, \quad (3.28)$$

где ϑ – скорость движения заряда. Отсюда $\rho \sim 1/\vartheta$.

Вылетевший из катода электрон имеет скорость ϑ, близкую к нулевой. Поэтому вблизи катода $\rho \to \infty$. По мере удаления от катода электрон разгоняется, ϑ растет и ρ непрерывно падает. Так как энергия движущейся частицы

$W = \frac{m\vartheta^2}{2} = e\varphi$, то $\vartheta \sim \sqrt{\varphi}$ и $\rho \sim \varphi^{-1/2}$, где $\varphi\varphi$ - потенциал в точке нахождения электрона с учетом влияния пространственного заряда.

Задача №6.

Определить потенциал и напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом $q = 1$ Кл в точке, удалённой от нёго на расстояние $r = 1\,r = 1$м. Относительная диэлектрическая проницаемость среды ε_r =4.

Решение:

Для точечного заряда (3.13).

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{1 \cdot 36\pi \cdot 10^{-9}}{4\pi 4} = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4} = 2{,}2510^{-9}\,\frac{B}{ì}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} = 2{,}25 \cdot 10^{-9}\,\hat{A}.$$

Просчитайте, как изменятся потенциал и напряженность поля, если этот заряд будет находиться в воздухе?

Задача №9

Получите выражение в точке M для потенциала φ, создаваемого точечным зарядом q, расположенным над идеально проводящей плоскостью на высоте h (рис. 3.6).

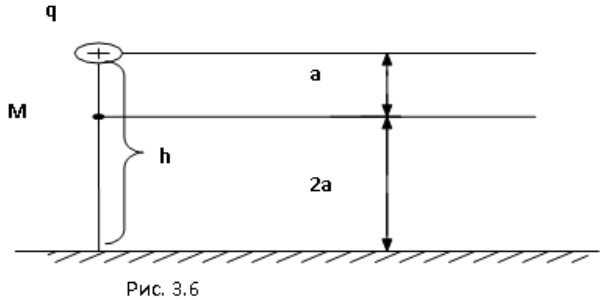


Рис. 3.6

Решение: Для решения следует использовать метод зеркального отображения и принцип суперпозиции. Метод зеркального отображения заключается в том, что металлическая поверхность заменяется зеркально отображенным зарядом $-q$. Используя этот метод и принцип суперпозиции, записываем выражение для потенциала в точке M.

$$\varphi = \varphi_{(q)} + \varphi_{(-q)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon 5a} = \frac{4q}{20\pi\varepsilon a} = \frac{q}{5\pi\varepsilon a}.$$

Электрическое поле и потенциал в точках, удаленных на расстояние r от заряженной нити, определяются формулами:

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}^{\,0}\tau}{2\pi\varepsilon r} \text{ и } \varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r + C.$$

Задача №10

Определить напряженность электрического поля и потенциал в точке M, расположенной в свободном пространстве, создаваемые тонкой нитью, на которой находится заряд с линейной плотностью $\tau = 0{,}01$ Кл/м. Расстояние от нити до точки M равно 1м.

Решение:

Для нити E *и* φ получены в предыдущей задаче. Тогда

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{36\pi}{2\pi \mathrm{l}}10^7 = 18\cdot 10^7 \text{ В/м};$$

Потенциал можно однозначно определить, задав точку, в которой он равен нулю, например при $r = r_1, \varphi = 0$

$$\tilde{N} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r_1 \text{ и } \varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r}{r_1} = 18\cdot 10^7 \ln\frac{r}{r_1}, \text{ В}.$$

Задача №11.

Над проводящей плоскостью, имеющей положительный поверхностный заряд ξ, на высоте h, параллельно ей подвешен заряженный провод с погонной плотностью заряда $+\tau$ (рис. 3.7). На какой высоте должен быть расположен провод, чтобы сила, действующая на него, равнялась нулю?

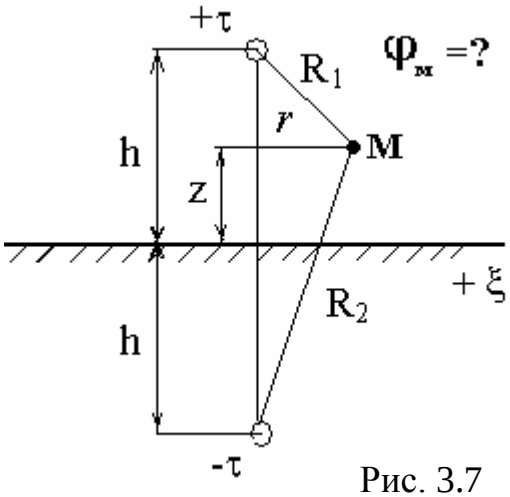


Рис. 3.7

Решение:

При решении используем метод зеркального отображения без учета заряда на плоскости и принцип суперпозиции потенциалов.

Для зарядов $+\tau$ и - τ в точке M потенциал не высоте h определяется из соотношения

$$\varphi_i = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ell nR_1 - \ell nR_2),$$

где $R_1 = \sqrt{(h-z)^2 + r^2}$ а $R_2 = \sqrt{(h+z)^2 + r^2}$,

При $r = 0$

$$\varphi_i = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}(\ell n(h-z) - \ell n(h+z)).$$

Поверхностный заряд, наводимый заряженной нитью на проводящей поверхности при $z = 0$ равен

$$\xi_s = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z_{z=0}} = -\frac{\tau}{2\pi}\frac{(h-z)+(h+z)}{h^2+z^2} = -\frac{\tau}{\pi h}.$$

Чтобы сила, действующая на провод была равна нулю, необходимо выполнить равенство

$$\xi = \xi_S = \frac{\tau}{\pi h}$$

откуда высота подвеса должна быть равна

$$h = \frac{\tau}{\pi\xi}.$$

На основании этого закона, в следующей задаче находится сила, с которой проводящие плоскости действуют на точечный заряд.

Задача №12

Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на расстояниях $a = 4$ см и $b = 3$ см от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол (рис. 3.8).

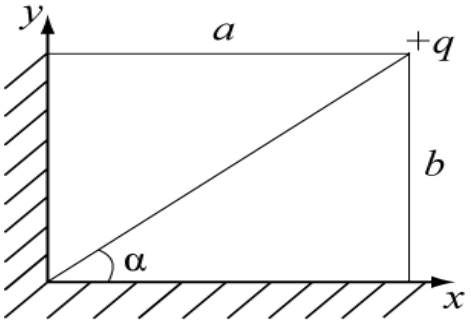


Рис. 3.8

Решение:

Применяем метод зеркальных изображений. Отобразим зеркально

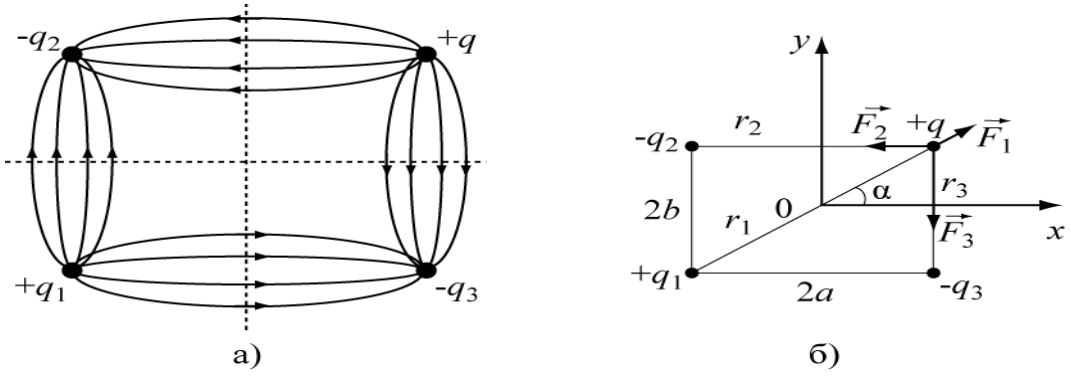


Рис. 3.9

заряд $+q$ в проводящих плоскостях. Получим дополнительные заряды $r=1$ $(-q_2)$, $(-q_3)$, как показано на рис. 3.9а, там же нарисованы электрические поля системы. Определяем силу, действующую на заряд q со стороны трех зарядов q_1, q_2, q_3 (направление силы от положительного заряда к отрицательному, рис. 3.9,б). Согласно принципу суперпозиции на заданный заряд действуют 3 силы, результирующая сила - векторная сумма трех составляющих:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

где F_1 - сила взаимодействия между зарядами $+q_1 и\ q$;

F_2 сила взаимодействия между зарядами $-q_2 и\ q$; F_3 сила взаимодействия между зарядами $-q_3 и\ q$.

Находим расстояния r_1, r_2, r_3 между зарядами

$$r_{2(-q2-+q)} = 2a = 8см,$$

$$r_{1(+q1--+q)} = \sqrt{4a^2 + 4в^2} = 10см,$$

$$r_{3\,(-q3-+q)} = 2b = 6см$$

Представим силу $\vec{F}_1$ в виде проекций на оси $x и\ y$

$$\vec{F}_1 = \left(\vec{x}^0 \cos\alpha + \vec{y}^0 \sin\alpha\right) \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon r_1^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon r_1^2}\left(0.8\vec{x}^0 + 0.6\vec{y}^0\right)$$

Поскольку сила $\vec{F}_2$ направлена против оси x, то проекция результирующей силы на ось x будет равна

$$F_{x=} = F_{1x} - F_2 = \frac{q^2 \cdot 0.8}{4\pi\varepsilon r_1^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon r_2^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon} 0.0076$$

Аналогично, определится проекция результирующего поля на ось y

$$F_{y=} = F_{1y} - F_3 = \frac{q^2 \cdot 0.6}{4\pi\varepsilon\varepsilon r_1^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon r_3^2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon} 0.0218$$

Величина результирующей силы составит

Ответ: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon} 0.0231$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Определить емкость плоского двухслойного конденсатора, размеры которого показаны на рис. 3.11.

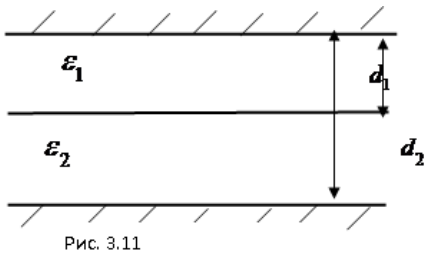


Рис. 3.11

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 (d_2 - d_1)}$.

2.Цилиндрический электронный поток радиуса R и величиной I_0 движется со скоростью v_0. Прямым интегрированием уравнения для потенциала найти потенциал и напряженность радиального электрического поля E_r на границе, которая действует на пучок и способствует его расфокусировке.

Ответ: $\varphi = -(\dfrac{I_0}{2\varepsilon_a v_0 R^2} + \dfrac{C}{R}), \qquad E_r = -(\dfrac{I_0}{\varepsilon_a v_0 R^3} + \dfrac{C}{R^2})$.

3. Определить напряженность электрического поля на прямой, являющегося осью симметрии равномерно заряженного кольца (рис. 3.12) пренебрежимо малой толщины, если его радиус есть r, а полный заряд кольца равен q

.

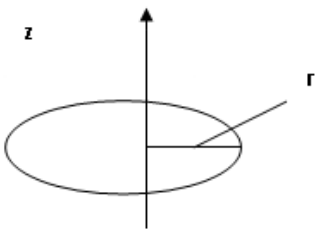


Рис. 3.12

Ответ: $E_z = \dfrac{q \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$.

4. Найти выражение электростатической энергии для сферического конденсатора, изображенного на рис. 3.13.

Ответ: $W^{Ý} = \dfrac{q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_a R_1 \cdot R_2}$.

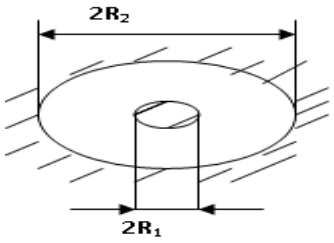


Рис. 3.13

5. Используя условия теоремы единственности, произведите выбор произвольных постоянных в выражении для потенциала $\varphi = \left(C_\lambda \cdot 1/r^\lambda + D_\lambda \cdot r^\lambda\right) \cdot \left(A_\lambda \cdot \cos\lambda \cdot \alpha + B_\lambda \cdot \sin\lambda \cdot \alpha\right.$ в области V. Изображенной на рис. 3.14.

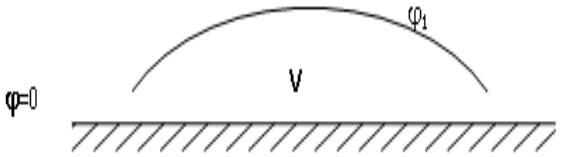


Рис. 3.14

: Ответ: $C_\lambda = A_\lambda = 0$, $\lambda = n$.

6.Определите энергию электростатического поля, запасенную в объёме цилиндра радиуса $R = 1$ и длиной $l = 1$. Ось цилиндра совпадает с осью OZ. Потенциал внутри цилиндра известен $\varphi = x^2 + y^2$.

Ответ: $\dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot \varepsilon$.

7.Найти распределение потенциала φ и напряженности поля между электродами, изображенными на рис. 3.15. Пластины при $r = 0$ изолированы друг от друга и

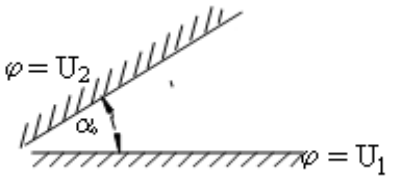


Рис. 3. 15

бесконечны в направлении r . При решении учесть, что φ зависит только от цилиндрической координаты α .

Ответ: $\varphi = \frac{U_2 - U_1}{\alpha_0} \cdot \alpha + U_1$, $E_\alpha = -\frac{U_2 - U_1}{r \cdot \alpha_0}$.

8.Во сколько раз увеличится ёмкость двухслойного конденсатора (рис. 3.16), если толщину первого слоя сделать равной нулю. $\varepsilon_2 = 2 \cdot \varepsilon_1$.

Ответ: В $\frac{1}{3}$ раза.

9.Грозовая туча, имеющая площадь 8км^2 ,находится на высоте 1,5 км от поверхности Земли. Между тучей и Землей образуется постоянное электрическое поле с напряженностью $E = 3 \cdot 10^5$ В/м во всех точках. Оцените энергию поля

Ответ: $4,78 \cdot 10^9$ *Дж* .

10.При проведении испытаний на электрический пробой коаксиальной линии передачи, образованной двумя цилиндрами с радиусами R_1 *и* R_2 ($R_2 > R_1$) было получено, что пробой наступает при разности потенциалов U_0 . Затем радиус внутреннего цилиндра был сокращён вдвое.

Определите для новой системы пробивную разность потенциалов.

Ответ: $U = U_0\ [1 + ln2 / ln(R_2 / R_1)]$.

11.Заряженный металлический шар, радиусом 3 см находится в воздухе. Известно, что при напряжённости поля 30 КВ/см в воздухе происходит пробой.

Определите предельно допустимый заряд шара, обеспечивающий отсутствие пробоя.

Ответ: $6,857 \cdot 10^{-9}$ Кл.

12.Бесконечная металлическая плоскость $6,6 \cdot 10^{-12}$ Кл/м^2. Найдите величину полей E *и* D в пространстве вблизи поверхности, предполагая проницаемость $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Ответ: $E = 0,373$ В/м; $D = \pm 3,3 \times 10^{-12}$ Кл/м^3.

13.Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами R_1=1 см, $R_2 = 2$см, выполненные из металла образуют конденсатор. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Определите ёмкость конденсатора на единицу длины.

Ответ: $0,08 \cdot 10^{-9} Ф / м = 0,08\ нФ / м$.

14.Задан потенциал $\varphi = 2 \cdot r^2 - 4$, где r - цилиндрическая координата. Определить объёмную плотность заряда, создающее это поле, (считать $\varepsilon = \varepsilon_0$). Ответ: $-8 \cdot \varepsilon_0$.

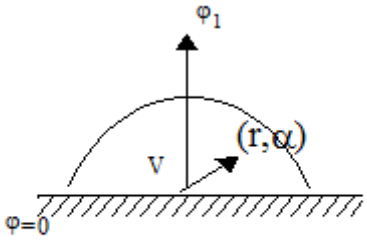


Рис. 3.17

15.Исходя из условия теоремы единственности, произведите выбор

произвольных постоянных в выражении для потенциала в области *V*, для координатной системы, показанной на рис. 3.17.

$$\varphi = \left(C_\lambda \cdot {1}/{r^\lambda} + D_\lambda \cdot r^\lambda\right) \cdot \left(A_\lambda \cdot \cos(\lambda \cdot \alpha) + B_\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot \alpha)\right)$$

Ответ: $C_\lambda = A_\lambda = 0$.

16 Над положительно заряженной, металлической плоскостью с поверхностной плотностью заряда ξ помещен точечный заряд $+q$. На какой высоте h сила, действующая на заряд равна нулю?

Ответ: $h = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{q}{\pi \cdot \xi}}$

17 Каков потенциал φ в точке M, создаваемый точечным зарядом q, расположенным над идеально проводящей плоскостью, как показано 3.18? Ответ: $\varphi = -\frac{q}{5 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot a}$.

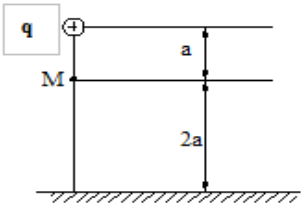


Рис. 3.18

18 Металлический шар радиусом a помещен в поле E_0 заданное уравнением $\varphi(r) = E_0\left({a^3}/{r^2} - r\right)\cos\theta$. Определить поверхностную плотность заряда ζ на шаре, если $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = E_n$.

Ответ: $\zeta = 3 \cdot \varepsilon \cdot E_0 \cos\theta$.

19 Во сколько раз увеличится ёмкость двухслойного конденсатора рис. 3.19, если толщину первого слоя сделать равной нулю. $\varepsilon_2 = 2 \cdot \varepsilon_1$ при сохранении расстояния между пластинами равно 2d.

Ответ: В 3/2 раза

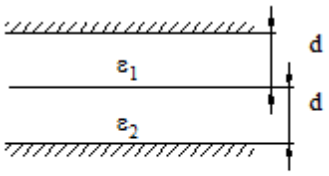


Рис. 3.19

20 Над землёй на высоте h подвешен провод с зарядом τ на единицу длины. Как изменится электрическая сила, действующая на провод, если его опустить до высоты $h/2$.

Ответ: Сила увеличится в 2 раза.

21 Над землёй на высоте h подвешен провод с зарядом τ на единицу длины. Как изменится электрическая сила, действующая на провод, если его опустить до высоты $h/2$.

Ответ: Сила увеличится в 2 раза.

22 При $x > 0$ диэлектрическая проницаемость зависит от x по закону $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{1+x}$. Определить потенциал φ полагая, что он зависит только от x и объемные заряды отсутствуют.

Ответ: $\varphi = C_1 \cdot \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2$.

23 Вектор напряженности электрического поля $\bar{E} = 3 \cdot x^2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot y^2 \cdot \bar{j}$. Найти разность потенциалов между точками $M_1(1,1,0)$ и $M_2(0,0,0)$ $\varphi(M_1) - \varphi(M_2)$.

Ответ: -2

24 Какова сила, действующая на точечный заряд q, находящийся над идеально проводящей плоскостью (см. рис. 3.21)?

Ответ: $\vec{F} = -\frac{\bar{i} \cdot q^2}{16 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot a^2}$.

25 Чему равен потенциал поля, если вектор напряженности электрического поля равен $\vec{E} = A \cdot \bar{x}_0 \cdot \sin(k \cdot x)$?

Ответ: $\varphi = \frac{A}{k} \cdot \cos(k \cdot x) + B$.

26.Разделить переменные в уравнении $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и записать частное решение, где $D - const$.

Ответ: $U = C_\lambda \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{D} \cdot t\right) \cdot \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

27.На большом расстоянии от системы тел, расположенных вблизи начала координат, потенциал поля имеет вид $\varphi = \frac{5}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Определить полный заряд тел.

Ответ: 10.

28.Дана напряженность электрического поля $\bar{E} = 2 \cdot y \cdot \bar{x_0} + 2 \cdot z \cdot \bar{z_0}$. Полагая, что в точке $z = 0$, $y = 0$ потенциал равен нулю, найти φ в любой точке пространства.

Ответ: $\varphi = -\left(z^2 + y^2\right) + c$.

29.В поле точечного заряда перемещается заряд $(-2 \cdot q)$ из ∞ в точку, отстоящую от первого заряда q на расстоянии r. Чему равна работа поля при этом?

Ответ: $A = \frac{q^2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}$.

30.Потенциал электростатического поля задан уравнением $\varphi = a \cdot x^3 + b \cdot y^2$. Определить заряд, сосредоточенный в единичном кубе, рёбра которого совпадают с осями декартовых координат.

Ответ: $q = -(6 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot \varepsilon$.

31. Поле в пространстве создается системой длинных, параллельных оси Z электродов, расположенных вблизи неё. Длина их столь велика, что поле, создаваемое ими, можно считать не зависящим от Z. Потенциал поля вдали от этой системы равен $\varphi = -\frac{\cos\alpha}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$, где α, r - цилиндрические координаты. Чему равен полный заряд на единицу длины электродов?

Ответ: $+\frac{1}{2}$.

32. Плоский конденсатор образован двумя пластинами радиуса R, находящимися на расстоянии d одна от другой. Нижняя пластина заземлена. Заряд верхней пластины равен $+q$. Определить потенциал поля в плоскости $d/2$. Краевыми эффектами пренебречь.

Ответ: $\varphi = \frac{q \cdot d}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}$.

33. Как изменится ёмкость плоского конденсатора, если диэлектрическую проницаемость заполняющей его среды увеличить в 2 раза, а площадь обкладок уменьшить в 4 раза?

Ответ: Уменьшится в 2 раза.

34. Какое из приведенных выражений соответствует потенциалу φ в точке O, создаваемому заряженной нитью с линейной плотностью заряда τ, имеющей вид полуокружности (см. рис. 3.23)?

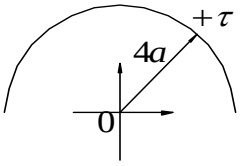


Рис. 3.23

Ответ: $\varphi(0) = \frac{\tau}{4 \cdot \varepsilon_0}$.

35 Какой из приведенных ниже векторов может быть вектором напряженности электростатического поля?

Ответ: $\vec{A} = y \cdot x \cdot \vec{x_0} + x \cdot z \cdot \vec{y_0} + x \cdot y \cdot \vec{z_0}$.

36 Определить напряженность поля E во второй области, если $\overline{E}_1 = 3 \cdot z \cdot \overline{x_0} + 5 \cdot x \cdot \overline{y_0} + 2 \cdot \overline{z_0}$. Граница в плоскости ZOX

см. рис. 3.24 .

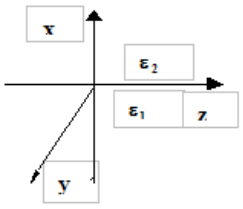


Рис. 3.24

Ответ: $\overline{E}_2 = 3 \cdot z \cdot \overline{x_0} + \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \cdot 5 \cdot x \cdot \overline{y_0} + 2 \cdot \overline{z_0}$

37. В области с равномерно распределенным объёмным зарядом с плотностью ρ_0, потенциал φ зависит только от x. Найти выражение для φ, где φ, A, B, C – const.

Ответ: $\varphi = -\frac{\rho_0}{2 \cdot \varepsilon} \cdot x^2 + A \cdot x + B$.

38 Каково будет выражение для плотности энергии электростатического поля и его потенциала?

Ответ: $\varpi = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon}, \overline{E} = -grad\varphi$.

39 Как записать выражение, соответствующе полю, изображенного на рисунке 3.25 цилиндрического конденсатора?

Ответ: $\varphi = U_0 \cdot \frac{\ln r / R_1}{\ln R_2 / R_1}$.

40 В безграничной среде задано распределение заряда $\rho = \rho_0 / r^2$, где ρ_0 - постоянная величина, а r - сферическая координата. Каким будет распределение потенциала?

Ответ: $\varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \cdot \ln r + \frac{C_1}{r} + C_2$.

41 Каков потенциал φ, создаваемый точечным зарядом, расположенным над идеально проводящей плоскостью, в точке М (рис.3.26)?

Ответ: $\varphi = \frac{q}{6 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot a}$.

42 Какой из приведенных ниже векторов может быть вектором напряженности электростатического поля?

Ответ: $\vec{A} = y \cdot z \cdot \vec{x_0} + x \cdot z \cdot \vec{y_0} + x \cdot y \cdot \vec{z_0}$.

Глава 4. Электромагнитное поле постоянных токов

Целью данного занятия является закрепление теоретического материала путем решения задач по следующим вопросам курса:

- Электрическое поле постоянного тока.
- Магнитное поле постоянного тока.
- Индуктивность и взаимная индуктивность.
- Энергия магнитного поля.

4.1. Электрическое поле постоянного тока

Для случая постоянного тока $(j \neq 0,\ \partial / \partial t = 0)$ система уравнений Максвелла для электрического поля имеет вид:

$$rot\vec{E} = 0, div\vec{D} = \rho, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{j}_{ПР} = \sigma \vec{E}\ , \qquad (4.1)$$

Первое уравнение (4.1) показывает, что электрическое поле постоянного тока подобно электростатическому полю потенциально. Но в отличие от электростатического. оно существует и в проводящей среде, где $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$. Если по проводнику протекает ток, то на его поверхности появляется отличная от нуля тангенциальная (касательная) составляющая напряженности электрического поля $\vec{E}$ (см. рис. 4.1). Отношение нормальной составляющей E_{n} к тангенциальной E_{τ} для хороших проводников имеет порядок 10^5, и E_{τ} пренебрежимо мало по сравнению с E_{n} .

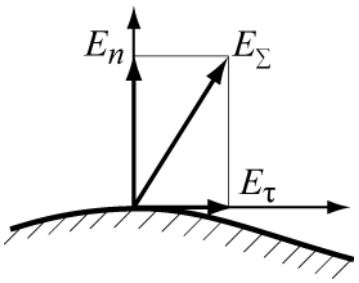


Рис. 4.1

При вычислении электрического поля в *идеальном диэлектрике*, окружающем проводник с постоянным током, можно пренебречь касательной составляющей напряженности электрического поля и считать, что электрическое поле в нем почти не отличается от электростатического.

Иное наблюдается *внутри проводника*. При наличии постоянного тока в проводящей среде существует электрическое поле, которое описывается следующей системой дифференциальных и интегральных уравнений :

$$rot\vec{E} = 0\ ,\ div\vec{j} = 0\ ,\ \vec{j}_{i\text{Ð}} = \sigma \vec{E}\ . \qquad (4.2)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0\ ,. \qquad (4.3)$$

Сопоставим систему уравнений (4.2) и (4.3) с уравнениями электростатического поля в среде, не содержащей зарядов,

$$rot\vec{E} = 0\ ,\ div\vec{D} = 0\ ,\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}\ , \qquad (4.4)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0, \oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = 0\,, \qquad (4.5)$$

Видим, что они совершенно одинаковы по форме. Уравнения электростатики (4.4) и (4.5) становятся справедливыми для электрического поля в проводящей среде, если электрическую индукцию $\vec{D}$ заменить в них плотностью тока $\vec{j}$, а диэлектрическую проницаемость ε – удельной проводимостью σ σ.

$$\vec{D} \to \vec{j} \text{ и } \varepsilon \to \sigma\,. \qquad (4.6)$$

Однако, тождественность уравнений еще не гарантирует тождественности их решений. Для этого необходимо также совпадение граничных условий.

Это совпадение имеет место только в слабо проводящих средах на границах с хорошими проводниками. Действительно, как следует из второго уравнения (4.3), нормальная составляющая $\vec{j}$ на границе двух сред непрерывна

$$j_{1n} = j_{2n}\,. \qquad (4.7)$$

Касательные составляющие в силу непрерывности E_τ $(E_{1\tau} = E_{2\tau})$ связаны соотношением

$$(j_{1\tau} / \sigma_1) = (j_{2\tau} / \sigma_2)\,. \qquad (4.8)$$

При достаточном различии проводимостей $\sigma_1 и\, \sigma_2$ составляющей $j_{1\sigma}$ можно пренебречь и считать вектор $\vec{j}_1$ нормальным к границе. Таким образом, совпадение граничных условий для векторов $\vec{D}$ в электростатике и $\vec{j}$ в проводящих средах имеет место только на границах хороших проводников (металлов) и слабо проводящих сред. В этих случаях решение соответствующей электростатической задачи может быть использовано для определения поля в слабо проводящей среде. В литературе этот метод называется *методом электростатической аналогии*.

Применительно к системе двух проводников (конденсатору) этот метод приводят к следующему соотношению между емкостью идеального (без потерь) конденсатора и проводимостью того же конденсатора но с потерями

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad (4.9)$$

Это соотношение обычно используется для вычисления сопротивления изоляции между хорошими проводниками.

4.2. Магнитное поле постоянного тока

Для случая постоянного тока $(\mathbf{j} \neq 0, \partial / \partial \mathrm{t} = 0)$ система уравнений Максвелла для магнитного поля имеет вид:

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	Уравнения Максвелла в интегральной форме
$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$	$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I$
$\mathrm{div}\vec{B} = 0$	(4.10)
$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ (4.11)

Если в области нет токов (магнитостатика), то в уравнениях (4.10) и (4.11) нужно положить $\vec{j} = 0$ и $I = 0$. В этом случае магнитное поле оказывается потенциальным и напряженность магнитного поля можно представить в виде:

$$\vec{H} = -grad\,\varphi^M, \qquad (4.12)$$

где φ^M - магнитостатический потенциал, который подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\varphi^M = 0. \qquad (4.13)$$

В тех случаях, когда в рассматриваемой области имеется ток ($\vec{j} \neq 0$) магнитостатический потенциал φ^M становится неоднозначной функцией. Разность значений между точками K_1 *и* K_2 зависит от контура, по которому выполняется интегрирование в формуле

$$\varphi_1^M - \varphi_2^M = \int_{K_1}^{K_2} \vec{H}d\vec{l}, \qquad (4.14)$$

а именно, при каждом обходе контура вокруг тока I в положительном направлении (так, чтобы контур образовывал с направлением, в котором течет ток, правовинтовую систему) значение интеграла в (4.14) возрастает на величину I.

Таким образом, магнитостатический потенциал φ^M не позволяет установить однозначно связь между стационарным магнитным полем и создающим его постоянным током. Для определения магнитного поля обычно вводят векторный потенциал $\vec{A}$, связанный с вектором $\vec{B}$ соотношением

$$\vec{B} = rot\vec{A} \qquad (4.15)$$

Векторный потенциал стационарного поля удовлетворяет векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{j}. \qquad (4.16)$$

Если токи сосредоточены в ограниченной области V, на поверхности S или протекают по контуру L, то решение уравнения (4.16) можно получить из соответствующей формулы для:

объемных токов	поверхностных токов	линейных токов
$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}}{R}dV$ (4.17)	$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\vec{j}_S}{R}dS$ (4.18)	$\vec{A}=\frac{\mu\, I}{4\pi}\int_L \frac{d\vec{\ell}}{R}$ (4.19)

где R - расстояние от элементов dv, dS или dl до точки, в которой вычисляется потенциал.

Переход от векторного потенциала $\vec{A}$ к напряженности магнитного поля $\vec{H}$ производится по формуле (4.15). Предположение, что пространство заполнено однородной изотропной средой приводит к следующим вариантам закона Био – Савара в интегральной форме

Для объемных токов	Для поверхностных токов	Для линейных токов
$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j},\vec{r}_0]}{R^2}dV$ (4.20)	$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{[\vec{j}_S,\vec{r}_0]}{R^2}dS$ (4.21)	$\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\int_L \frac{[d\vec{\ell},\vec{r}_0]}{R^2}$ (4.22)

Дифференциальная форма закона Био – Савара для линейных токов представляется в виде

$$d\vec{H}=\frac{I}{4\pi R^2}[d\vec{l},\vec{r}_0]. \qquad (4.23)$$

В таком виде закон Био-Савара определяет магнитное поле $d\vec{H}$ в точке M, создаваемое элементом тока $Id\ell$ (см. рис. 4.2).

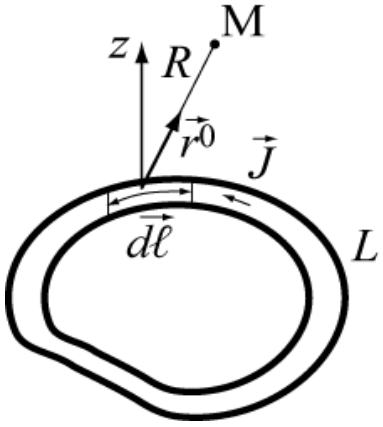


Рис. 4.2

4.3. Энергия магнитного поля постоянного тока

Известно, что с магнитным полем в объеме V связана магнитная энергия

$$W^M = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}dV = \frac{1}{2}\int_V \mu\vec{H}^2 dV \quad , \tag{4.24}$$

с плотностью энергии

$$w^i = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\mu\vec{H}^2}{2} \tag{4.25}$$

С учетом (4.15) и (4.16) выражение (4.24) приводится к виду

$$W^M = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\vec{j}dV \quad , \tag{4.26}$$

где магнитная энергия представлена через объемные токи и векторный потенциал. В случае линейных токов выражение для энергии магнитного поля упрощается. Например, формула (4.26) с учетом (4.19) для уединенного контура L с током I примет вид

$$W^M = \frac{J}{2}\oint_L \vec{A}d\vec{\ell}\,. \tag{4.27}$$

Применим к интегралу в (4.27) теорему Стокса (1.26), получим

$$\oint_L \vec{A}d\vec{\ell} = \int_S rot\ \vec{A}d\vec{S} = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \Phi\,, \tag{4.28}$$

где Φ – магнитный поток через поверхность S, опирающуюся на контур S. Подставив (4.28) в (4.27), получим

$$\mathrm{W}^M = \mathrm{I}\cdot\Phi/2\,. \tag{4.29}$$

В случае N N контуров выражение для W^M записывается:

$$W^M = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} I_n\hat{O}_n \quad , \tag{4.30}$$

где Φ_n - поток магнитной индукции, пронизывающий контур L_n, I_n - ток в контуре L_n.

4.4. Индуктивность и взаимная индуктивность

Так как поток магнитной индукции

$$\Phi = L\cdot I \tag{4.31}$$

пропорционален L –индуктивности контура, то

$$W^M = I\cdot\Phi/2 = LI^2/2 \tag{4.32}$$

В случае N контуров поток Φ_{nk} пропорционален току I_k:

$$\Phi_{nk} = M_{nk}I_k \tag{4.33}$$

Коэффициент пропорциональности $M_{n\mathrm{k}}$ при $k \neq n$ называют *взаимной индуктивностью* контуров L_k и L_n, а коэффициент M_{kk} *-собственной*

индуктивностью контура L_k Взаимная индуктивность определяется следующим выражением

$$M_{nk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L_n} \oint_{L_k} \frac{d\vec{l}_n d\vec{l}_k}{r} \qquad (4.34)$$

Формула симметрична относительно индексов n *и* k. Это значит, что совершенно такое же выражение будет получено и для взаимной индуктивности M_{kn}, определяемой равенством

$$\Phi_{kn} = M_{kn} I_n , \qquad (4.35)$$

где $\hat{O}_{kn}$ – магнитный поток (потокосцепление), обусловленный током контура L_n и проходящий через поверхность, ограниченную контуром L_k.

Формула (4.34) дает возможность вычислять в конкретных случаях взаимные индуктивности по одному лишь взаимному расположению контуров.

Как видно, взаимная индуктивность контуров L_k и L_n зависит только от параметров среды, взаимного расположения и не изменяется при перестановке индексов (свойство взаимности):

$$M_{nk} = M_{kn} . \qquad (4.36)$$

4.5. Примеры решения задач

Задача № 1

При изготовлении пластмассовой пленки широкая тонкая полоска протягивается со скоростью V через два последовательно расположенных ролика (см. рис. 4.4). В процессе протягивания пленка приобретает поверхностную плотность заряда ξ.

Определить напряженность магнитного поля в точке P, находящейся вблизи поверхности листа, в центре пролета между роликами. (Пленка предполагается бесконечно тонкой).

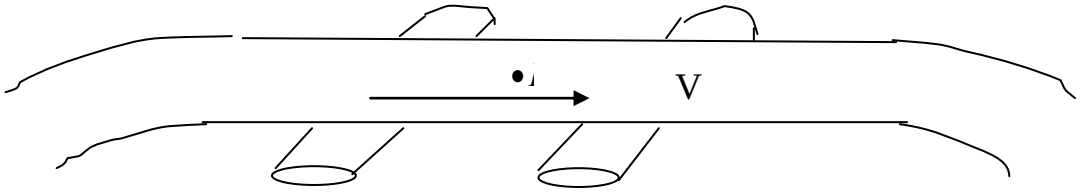


Рис. 4.4

Решение:

Плотность тока переноса $\vec{\delta}_n$. в уравнениях Максвелла равна $\vec{\delta}_n = \rho\vec{\upsilon}$,

В процессе протягивания заряженной (ξ) тонкой пленки со скоростью υ создается поверхностная плотность тока $\vec{\eta}$ и по аналогии запишем $\vec{\eta} = \xi\vec{\upsilon}$.

Силовые линии магнитного поля вблизи пленки, т. е., когда высота точки P над пленкой много меньше размеров пленки, должны быть параллельны поверхности пленки и по величине быть одинаковыми сверху и снизу пленки, но параллельны и направлены в противоположные стороны. Замыкаться они будут вне пленки (рис. 4.5).

Определим величину магнитного поля. Для определения H надо перпендикулярно поверхности пленки поставить плоскость θ и рассмотреть циркуляцию вектора H по прямоугольному контуру a-в-c-d с размерами $\Delta l \cdot \Delta h$, лежащему в плоскости θ ($\Delta l >> \Delta h$).

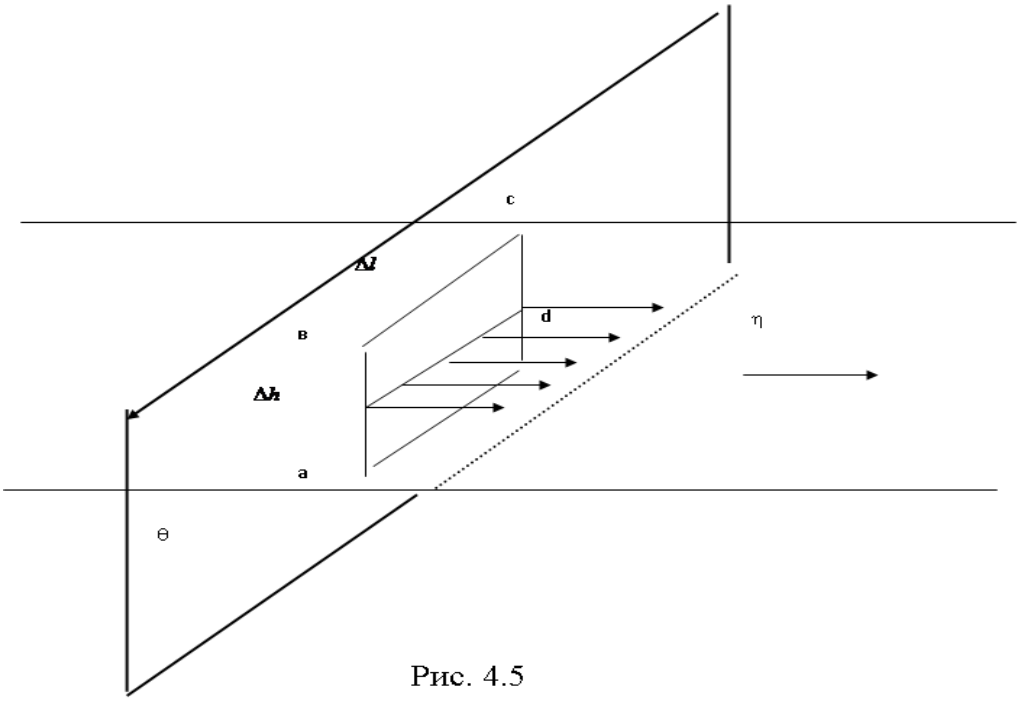


Рис. 4.5

Закон полного тока гласит, что

$$I = \oint_L \vec{H} d\vec{l} \ .$$

Если обходить контур по часовой стрелке, смотря вдоль тока I (правило буравчика), то направление обхода будет совпадать с направлением вектора H, тогда имеем $\mathrm{H}\Delta\ell + \mathrm{H}\Delta\ell = I = \eta\Delta\ell$.

Отсюда получаем $\mathrm{H} = \frac{\eta}{2}$ или $\mathrm{H} = \frac{\xi\upsilon}{2}$.

Задача № 2

По двум параллельным, прямолинейным проводникам текут токи $I_1 = 2A$ и $I_2 = 1A$. Расстояние между проводниками l (рис. 4.6). Где расположена линия, на которой магнитное поле равно нулю?

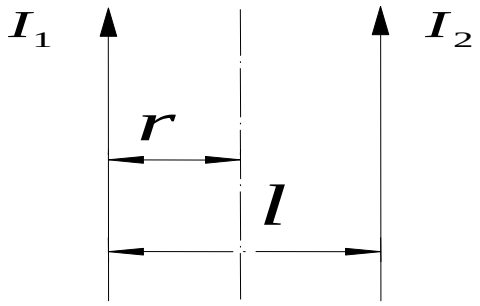


Рис. 4.6

Решение:

Уравнения Максвелла показывают, что напряженность магнитного поля на расстоянии r от постоянного прямолинейного тока I определяется из соотношения $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = 2\pi rH$, а циркуляция вектора $\vec{\mathbf{H}}$, согласно (4.30), равна току I. Следовательно, для первого и второго провода запишем уравнения

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}; \quad H_2 = \frac{I_2}{2\pi (l-r)}. \tag{4.34}$$

Используя правило буравчика, нетрудно показать, что на определенном расстоянии между проводами напряженность магнитного поля будет равна нулю, так как магнитные силовые линии в этом промежутке от обоих проводников имеют противоположное направление. Составляем равенство, из которого определим r.

$$\frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_2}{2\pi (l-r)}; \quad \frac{2}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi (l-r)};$$

$$2(l-r) = \mathrm{r}; 2l = 3r; \; r = 2l/3.$$

Ответ: $r = 2l/3$

Задача № 3

Постоянный ток I протекает по проводнику квадратной формы (рис. 4.7). Определить координаты точки, где магнитное поле, возбужденное током, является максимальным.

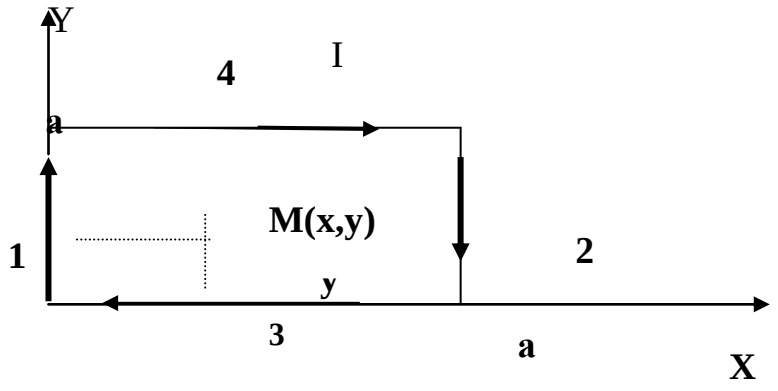


Рис. 4.7

Решение. Представим квадрат в виде 4-х линейных токов и используя (4.34), найдем поле $\vec{\mathbf{H}}$ от каждой пары $H_{M1} = \dfrac{I}{2\pi\, x}$; $H_{\grave{I}\ 2} = \dfrac{I}{2\pi\,(a-x)}$.

Аналогично

$$H_{M3} = \frac{I}{2\pi\, y};\ H_{\grave{I}\ 4} = \frac{I}{2\pi\,(a-y)};$$

Суммарное поле

$$H_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{4} H_{Mi} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}\right].$$

Ищем экстремум по X $\dfrac{dH_{\Sigma}}{dx} = 0 = \dfrac{I}{2\pi}\left[-\dfrac{1}{X_0^2} + \dfrac{1}{(a-x_0)^2}\right]$.

Отсюда

$$x_0^2 = a^2 - 2ax_0^2 + x_0^2; \quad 2x_0^2 = a; \quad x_0 = a/2.$$

Аналогично, получаем

$$y_0 = a/2.$$

Следовательно, внутри квадрата магнитное поле будет максимальным и равным.

Ответ: $H_{макс} = 4\dfrac{I}{2\pi\dfrac{a}{2}} = \dfrac{4I}{\pi\, a}$.

Задача № 4

По трубчатому проводнику с радиусами $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1$ (рис. 4.7) протекает постоянный ток с плотностью δ. Определить внутреннюю индуктивность отрезка проводника длиной l. Какой будет индуктивность (L) при $\mathrm{R}_1 = 0$?

В данной задаче индуктивность проще определить через магнитную энергию.

$$W^M = \frac{\mu}{2}\int\left|\vec{H}\right|^2 dV = \frac{1}{2}I^2 L$$

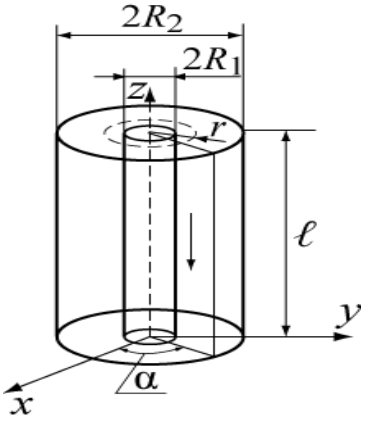


Рис. 4.7

Поскольку магнитное поле существует внутри и снаружи проводника, то магнитную энергию и индуктивность можно разделить на внутреннюю и внешнюю. Определим в этой задаче только внутреннюю индуктивность, поскольку для решения внешней задачи не хватает данных –не задан внешний контур с током.

Определим $I(r)$ и $H(r)$ в разных точках поперечного сечения рисунка 4.7. Для этого воспользуемся законом полного тока. $\oint\limits_L \vec{H}d\vec{\ell} = I$, в котором I есть ток, пронизывающий контур L. Согласно этому закону, магнитное поле

внутри трубы $(r < R_1)$ будет равно нулю, поскольку нет тока, пронизывающего контур в этой области. Внутри проводника $(R_1 \le r \le R_2)$ контур радиуса r будет пронизываться частью полного тока.

$$I(r) = \pi\left(r^2 - R_1^2\right).$$

Очевидно, что величина $I(R_2)$ дает полный ток в трубе. Магнитное поле внутри проводника определится как

$$H(r) = \frac{I(r)}{2\pi r} = \frac{j\left(r^2 - R_1^2\right)}{2r} \quad . \qquad (4.36)$$

Подставим полученное выражение в формулу для магнитной энергии (3.16) и будем интегрировать по объему проводника длиной *l*. Поскольку подынтегральная функция $H(r)$ зависит только от r, то элемент объема удобно представить в виде $dV = \ell \cdot 2\pi r dr$.

Определим магнитную энергию поля внутри проводника трубы

$$W^M = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{j^2 \cdot l \cdot 2\pi}{4} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r}{r^2}(r^2 - R_1^2)^2 dr = \frac{\mu\pi j^2 \cdot l}{4}\left\{\frac{1}{4}R_2^4 - \frac{1}{4}R_1^4 - R_1^2R_2^2 + R_1^4 + R_1^4 \ln\frac{R_2}{R_1}\right\} = \frac{1}{2}I^2L.$$

Откуда получаем *L* в виде следующего соотношения:

$$L = \frac{\mu \cdot l}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)^2}\left\{\frac{1}{4}R_2^4 + \frac{3}{4}R_1^4 - R_1^2R_2^2 + R_1^4 \ln\frac{R_2}{R_1}\right\}.$$

Из этой формулы при $R_1 = 0$ находится внутренняя индуктивность проводника длиной ℓ

$$L = \frac{\mu}{8\pi} \cdot \ell \qquad (4.37)$$

Задача №5

Два концентрических проводящих кольца с радиусами $R_1 << R_2$ лежат в одной плоскости. Поле там, где расположено малое кольцо, однородно и равно $B_2 \cong \mu \cdot I_2 / (2 \cdot R_2)$. Определить, как изменится взаимная индуктивность M_{12} колец, если радиус R_1 уменьшить вдвое, а R_2 вчетверо (рис. 4.8).

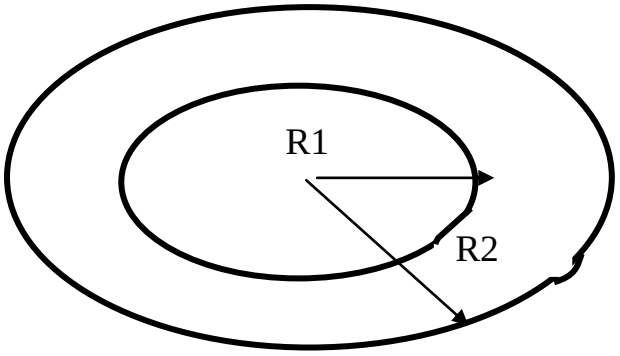


Рис. 4.8

Решение:

Взаимная индуктивность M_{12} определяется равенством

$$\Phi_{12} = M_{12}\mathrm{I}_2, \qquad (4.38)$$

где Φ_{12} - магнитный поток, обусловленный током контура большого кольца (2) и проходящий через площадку S_1, ограниченную контуром малого кольца (1).

$$\Phi_{12} = S_1 B_2 . \qquad (4.39)$$

Здесь $S_1 = \pi R_1^{\,2}$ - площадь, ограниченная малым кольцом, а величина магнитной индукции в центре большого витка B_2, согласно условию задачи

$$B_2 = \frac{\mu I_2}{2R_2}$$

Подставляя значения B_2 и S_1 в (4.39), вычислим поток Φ_{12}

$$\phi_{12} = B_2 \cdot S_1 = \frac{\mu I_2}{2R_2} \cdot \pi R_1^2 , \qquad (4.40)$$

тогда взаимная индуктивность контуров будет равна

$$M_{12} = \frac{\Phi}{I_2} = \frac{\mu \pi R_1^2}{2R_2}$$

И если теперь применить условия, требуемые в задаче, то получим, что взаимная индуктивность не изменится, т.е.

Ответ: $M'_{12} = \dfrac{\pi\mu\left(\dfrac{R_1}{2}\right)^2}{2(R_2/4)}$; $\dfrac{M'_{12}}{M_{12}} = 1$.

Задача № 6

Индуктивная катушка представляет собой N витков намотанных на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала с магнитной проницаемостью сердечника $\mu >> 1$.

Внутренний радиус катушки равен b, в поперечном сечении имеет форму квадрата со сторонами, равными a (рис. 4.9).

Определить индуктивность катушки, взаимную индуктивность системы, состоящей из этой катушки и длинного прямолинейного провода вытянутого вдоль оси симметрии катушки.

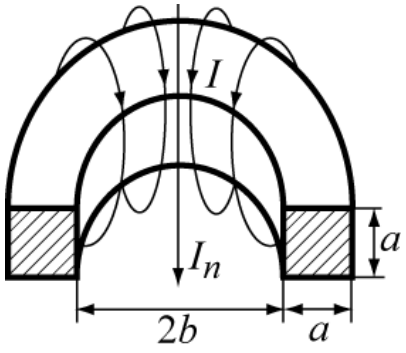


Рис. 4. 9

Решение:

Так как магнитная проницаемость сердечника велика, потоком рассеяния можно пренебречь. Магнитное поле в сердечнике имеет вид замкнутых кольцевых линий, пронизывающих N витков намотанного на нем провода. На основании закона полного тока, запишем это магнитное поле $H_\alpha = NI/2\pi r$, где r - расстояние от оси. Для определения индуктивности L, следует воспользоваться формулой (4.16)

$$\psi = LI \qquad (4.41)$$

или с применением формулы (4.18) $\psi_{lk} = \mathrm{M}_{lk} I_k$, где ψ_{ik} - потокосцепление.

Как определить магнитный поток?

Магнитный поток, проходящий через каждый из намотанных витков $\Phi_1 = \int_S \vec{\mathrm{B}} d\vec{S} = \int_S \mathrm{B} dS$; т.к. $\vec{B}$ *параллелен* $d\vec{S}$.

$$\Phi_1 = \mu \int_b^{b+a} \int_0^a \frac{I}{2\pi r} dz dr = \frac{\mu I a}{2\pi} \cdot \ln \frac{b+a}{b}, \quad m.к.\, dS = dz \cdot dr \quad . \qquad (4.42)$$

Поток, проходящий через все N витков

$$\psi = N\Phi_1 = \frac{\mu I N a}{2\pi} \ell n \frac{b+a}{b} \; ; \qquad (4.43)$$

Согласно (4.16), индуктивность катушки определится как отношение потокосцепления к току

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu \cdot \frac{N^2 a}{2\pi} \ell n \frac{b+a}{b} \quad . \qquad (4.44)$$

Следующей операцией, находим взаимную индуктивность катушки и провода, лежащего на оси тороида. Но сначала надо определить какое поле создается проводом в сердечнике тороида. Магнитный поток через один виток равен

$$\Phi_{12} = \mu \int_b^{b+a} \frac{I_2 a}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I_2 a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} \quad . \qquad (4.45)$$

Поток через все витки тороида следует определять из формулы (4.18)

$$\Psi_{12} = N\Phi_{12} = \mu \frac{I_2 a N}{2\pi} ln \frac{b+a}{b} \quad . \qquad (4.46)$$

Величина взаимной индуктивности будет равна

$$M_{1,2} = \frac{\mu_a \cdot b}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l}. \quad \mathrm{M}_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu a N}{2\pi} ln \frac{b+a}{b} = \frac{L}{N} . \qquad (4.47)$$

Задача № 7

По двум параллельным, прямолинейным проводникам текут токи $I_1 = 2A$ и $I_2 = 1A$. Расстояние между проводниками ℓ (рис. 4.10). Определите расположение линии, на которой магнитное поле равно нулю.

Решение:

Магнитное поле вне бесконечного проводника с током I было определено в разделе 1 (формула 4.18). $H = I / 2\pi r$.

Следовательно, для первого и второго проводов магнитные поля соответственно равны

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}, \quad H_2 = \frac{I_2}{2\pi(\ell - r)}.$$

Согласно правилу буравчика убеждаемся, что на линии l направление векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ будут противоположными. Следовательно, в некоторой точке M суммарная напряженность магнитного поля будет равна нулю. Приравняв H_1 и H_2, получим

$\frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_2}{2\pi(\ell - r)}$; Отсюда ответ: $r = 2\ell/3$

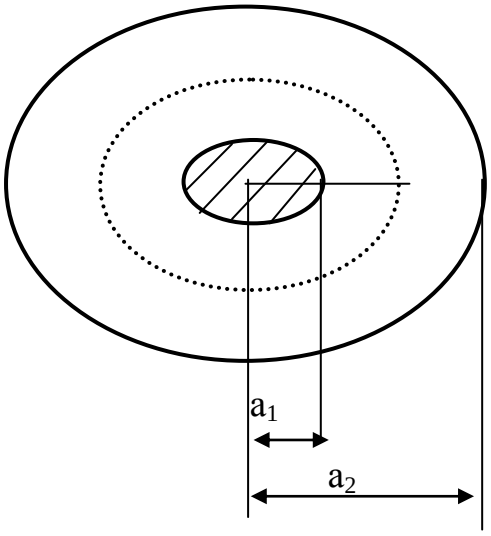


Рис. 4. 10

Задача № 8

Вычислить сопротивление изоляции на единицу длины коаксиального кабеля, заполненного диэлектриком с конечной проводимостью σ и заданным значением ε. Размеры кабеля заданы: радиус жилы a_1, радиус оплетки a_2 (рис. 4.11).

Решение:

Выясним какое явление будет наблюдаться в диэлектрике с $\sigma \neq 0$?

В диэлектрике с $\sigma \neq 0$ будет присутствовать ток проводимости $\delta = \sigma E$ (утечки). Направление этого тока будет совпадать с $\vec{E}$. Так как в коаксиальном кабеле поле направлено по радиусу, то и ток будет течь в том же направлении.

Для определения тока утечки I, протекающему по диэлектрику с жилы на оплетку, надо провести в диэлектрике цилиндрическую поверхность радиуса r, тогда

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S} = \delta \int_S dS = 2\pi r l \delta ;$$

$$dS = r_0 dS = r_0 \cdot \sigma E, \; u \; I = \vec{r}_0 \cdot \vec{\delta} = \vec{r}_0 \cdot \sigma E \text{, то } I = 2\pi r l \sigma E . \quad (4.48)$$

Сопротивление изоляции, определяется соотношением: $R = U/I$, где U – напряжение между внутренним и внешним проводниками кабеля. (Для справки $U = \varphi = \int_a^r E dr$). Подставим значение E, выраженное из (4.48).

$$U = \int_{a_1}^{a_2} E dr = \frac{I}{2\pi l \sigma} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi l \sigma} \ln \frac{a_2}{a_1} .$$

Ответ: $R = \dfrac{\ln \frac{a_2}{a_1}}{2\pi l \sigma}$.

Задача № 9

Определить проводимость плоского конденсатора, если заданы: S - площадь пластин, d – расстояние между ними, ε – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика в конденсаторе, σ – удельная проводимость диэлектрика. Определить мощность, выделяющуюся в конденсаторе в виде тепла, если к нему приложено напряжение U. Поле в конденсаторе считать однородным Дать численный ответ задачи, если $S = 10$ см^2,

$$d = 0.5 см, \varepsilon_г = 4, \ \sigma = 10^{-6} См/м, U = 100 \ В.$$

Решение:

Задачу можно решить двумя способами. В первом - получим формулу для проводимости путем следующих рассуждений. В диэлектрике конденсатора под действием напряженности поля E возникает ток утечки, подчиняющийся закону Ома $j_{пр} = \sigma E$. Поскольку поле в конденсаторе предполагается однородным, то $E = U/d$ и $I = j_{пр} S$.

Проводимость конденсатора определится как

$$G = I/U = \frac{\sigma \cdot S}{d}.$$

Второй способ состоит в использовании соотношения между емкостью и проводимостью (4.29). Емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon S}{d},$$

так что полученная выше формула для проводимости получается заменой ε на σ в формуле для емкости.

Проведем численные расчеты. Определим вначале емкость конденсатора. $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$=0,707 пФ,

$$G = 2 \cdot 10^{-8} См, \ P = U^2 \cdot G = 2 \cdot 10^{-4} Вт.$$

Задача № 10

Заземление представляет собой металлическую полусферу, погруженную в землю, как показано на рисунке 4.12. R –радиус заземления, r - расстояние от его центра до произвольной точки внутри земли. σ – удельная проводимость земли. К заземлению подводится ток I, который растекается в толще земли к другому заземлению, которое находится достаточно далеко. Определить сопротивление заземления, пренебрегая собственным сопротивлением металла, и шаговое напряжение на расстоянии $2м$ от заземления. Принять $R = 20$ см, $\sigma = 10^{-2} См/м$, $I = 1000 \ А$ (ток короткого замыкания на линии передачи)

Решение:

Поскольку расстояние до второго заземления предполагается большим, то поле в земле можно считать зависящим только от расстояния r и не

зависящим от угловых координат точки наблюдения. Плотность тока в земле на расстоянии будет равна $\delta_{пр} = I/(2\pi r^2)$. Из закона Ома $\delta_{пр} = \sigma E$ получим $E(r) = I/(2\pi\sigma r^2)$. Определим напряжение на заземлении по отношению к бесконечно удаленной точке

$$U = \int_R^\infty E(r)dr = \frac{I}{2\pi\sigma}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma R}.$$

Проводимость заземления будет равна $2\pi\sigma R$, а сопротивление - обратной величине. Конечно, формулу для проводимости заземления можно было получить проще, воспользовавшись методом электростатической аналогии, т.е. формулой (4.29). При этом нужно принять емкость полусферы равной половине емкости сферы, т.е. $C = 2\pi\varepsilon R$. Определим шаговое напряжение, т.е. напряжение между точками на поверхности земли на расстоянии одного шага $-l$

$$U_ш = \int_r^{r+l} E(r)dr = \frac{I}{2\pi\sigma}\int_r^{r+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{l}{r(r+l)}\right)$$

Проведем численные расчеты.

Сопротивление заземления $R_З = \frac{U}{I} = (2\pi\sigma R)^{-1}$=79,6 Ом. Шаговое напряжение на расстоянии $r = 2м$ длине шага $l = 0.8м$

$$U_ш = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{l}{r(r+l)}\right) = 2{,}27 \text{ кВ}$$

Таким образом, нахождение человека вблизи заземления при аварии на линии может быть опасным для жизни.

4.6. Задачи для самостоятельного решения

1.Вычислить магнитную энергию, сосредоточенную внутри единичного участка длины цилиндрического проводника, с протекающим по нему током I_0.

Ответ: $W_M = \frac{\mu_a \cdot I_0^2}{16\pi}$.

2.Чему равен магнитный векторный потенциал $\overrightarrow{A^m}$ в точке наблюдения, расположенной на оси кольцевого проводника с радиусом а и с током $I = 1A$ на расстоянии $1м$ от кольца?

Ответ: $\left|\overrightarrow{A^m}\right| = 0$.

3.Определить внутреннюю индуктивность L на единицу длины одиночного прямого круглого сечения провода с радиусом поперечного сечения R и с ее магнитной проницаемостью μ.

Ответ: $L = \frac{\mu}{8\cdot\pi}$.

4.Проводник круглого сечения радиуса a представляет кольцо радиуса $R >> a$. Определить индуктивность кольца.

Ответ: $L = mR/4$.

5. Два кольцевых проводника с радиусами $R_1 << R_2$ лежат в одной плоскости. Считая, что поле в центре большого кольца, где расположено малое кольцо, однородно и равно $B \cong \mu \cdot I_2 / (2 \cdot R_2)$. Определить взаимную индуктивность. Как изменится взаимная индуктивность колец, если радиус R_1 уменьшить вдвое, а R_2 - вчетверо.

Ответ: Останется неизменным

6 Вычислить сопротивление изоляции на единицу длины коаксиального кабеля, заполненного диэлектриком с проводимостью σ и заданным значением ε. Размеры кабеля заданы: радиус жилы a_1, радиус оплетки a_2 (см. рис.4.19).

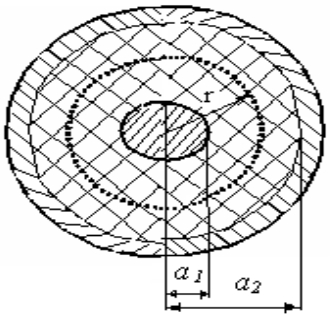


Рис.

Ответ: $R = \frac{ln\frac{a_2}{a_1}}{2\pi l\sigma}$.

7 По трем параллельным прямолинейным проводам протекают постоянные токи (рис. 4.20). Каждый провод удален от остальных на одинаковое расстояние. Укажите точку на поперечном сечении системы, где магнитное поле равно нулю.

Ответ: точка D.

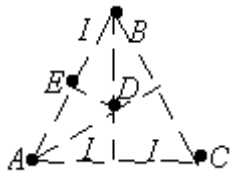


Рис. 4.20

8. Диэлектрик коаксиального кабеля имеет диэлектрическую проницаемость ε и удельную проводимость σ. Определить напряженность электрического поля внутри кабеля, если ток утечки на единицу длины задан I. Справка: $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

Ответ: $\vec{E} = \vec{r}^{\,0} \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot r}$.

9 Металлический шар радиуса R закопан на большую глубину в землю проводимость которой σ. Ток, вытекающий из поверхности шара, I. Получить выражение для разности потенциалов между шаром и любой точкой в почве, удаленной на r.

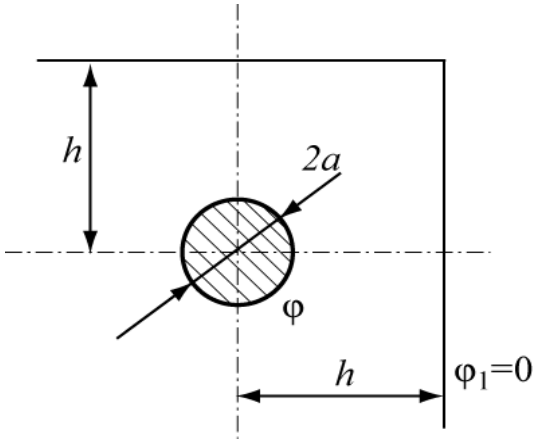


Рис. 4. 22

Ответ: $\mathrm{U} = \frac{\mathrm{I}}{4 \cdot \pi \cdot \sigma} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{\mathrm{r}} \right)$.

10 Определить собственную погонную индуктивность L прямолинейного проводника круглого сечения радиусом R и магнитной проницаемостью μ.

Ответ: $L = \frac{\mu}{8 \cdot \pi}$.

11 По прямолинейному проводу протекает ток $\mathrm{I} = \pi[$ A]. Определить напряженность магнитного поля в точке наблюдения, удаленной от провода на расстояние $\mathrm{r} = 0{,}5\mathrm{m}$?

Ответ: I/m. A/M.

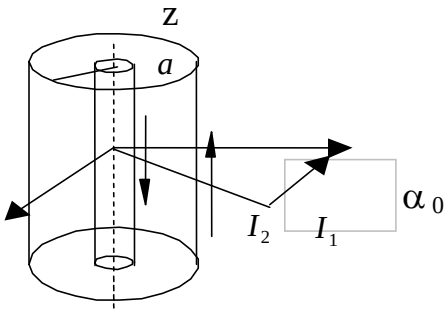


Рис. 4.21

12 Вдоль тонкостенной бесконечной трубы радиуса a и тонкого провода, расположенного вдоль оси трубы (рис. 4.21), протекают постоянные токи I_1 и $(-I_2)$. Определить магнитное поле в точках отстоящих от оси на расстояниях $a/2$ и $2 \cdot a$ в цилиндрической системе координат (r, z, a)?

Ответ: $H_\alpha = \frac{-I_2}{\pi \cdot a}; H_\alpha = \frac{I_1 - I_2}{4 \cdot \pi \cdot a}$.

13 Диэлектрик коаксиального кабеля имеет диэлектрическую проницаемость ε и удельную проводимость σ. Определить напряженность электрического поля внутри кабеля, если ток утечки на единицу длины задан I. Справка: $\mathrm{I} = \int_{\mathrm{S}} \vec{\mathrm{j}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$.

Ответ: $\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{r}}^{0} \cdot \frac{\mathrm{I}}{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \mathrm{r}}$.

14 Вычислить сопротивление заземлителя, выполненного в виде шара радиуса a. Шар закопан на глубину h на краю обрыва на расстоянии h от его края рис. 3.16. Проводимость почвы равна σ. Принять, что $a << h$.

Указание: Воспользоваться методом электростатической аналогии. При расчете емкости подобрать соответствующие зеркальные изображения шара и их заряды.

Ответ: $R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{h}\right]$.

15 Два коаксиальных проводящих кольца с радиусами $R_1 << R_2$ лежат в одной плоскости. Считая, что поле в центре большого кольца, т.е. там, где расположено малое кольцо, однородно и равно $B \cong \mu \cdot I_2 \diagup 2 \cdot R_2$. Определить, как изменится взаимоиндуктивность колец, если радиус R_1 уменьшить вдвое, а R_2 вчетверо.

Ответ: Останется неизменным

16 В среде с проводимостью σ_0 задано распределение потенциала $\varphi = 5 \cdot x^2 + 10 \cdot y + 5$. Определить плотность тока проводимости.

Ответ: $\vec{\delta} = 10 \cdot \sigma_0 \left(x \cdot \vec{x}_0 + \vec{y}_0\right)$

17 По прямолинейному проводу протекает ток $I = \pi(A)$. Какова напряженность магнитного поля в точке наблюдения, удаленной от провода на расстояние $\mathrm{r} = 0.5\mathrm{m}$?

Ответ: $1\frac{A}{m}$

18 Как изменится погонная индуктивность прямолинейного провода круглого сечения , если его толщину уменьшить в три раза?

Ответ: Останется неизменным

Глава 5. Плоские электромагнитные волны

Целью данного занятия является закрепление теоретического материала путем решения задач по следующим разделам курса:

- плоские волны в безграничных средах;
- отражение и преломление плоских волн на границе раздела двух сред;

В начале каждой части занятия приводятся краткие теоретические сведения; в конце занятия – задачи для самостоятельного решения с ответами.

5.1. Плоские волны в безграничных средах

5.1.1. Краткие теоретические сведения

Электромагнитная волна называется плоской, если ее фазовый фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью.

Предположим, что в идеальном диэлектрике ($\sigma = 0$) с параметрами ε, μ в направлении оси z распространяется плоская монохроматическая волна с линейной поляризацией, причем вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси x.

Мгновенные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могу быть представлены в виде:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{x}^0 E_0 Cos(\omega t - kz + \varphi),$$

$$\vec{H}(z,t) = \vec{y}^0 H_0 Cos(\omega t - kz + \varphi), \qquad (5.1)$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ - единичные вектора (орты) по осям $x\,u\,y, \omega = 2\pi f$ –круговая частота, φ - начальная фаза, $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ - волновое число (или постоянная распространения) в данной среде. Волновое число k определяет фазовую скорость v_ϕ и длину волны λ в данной среде:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k},\ \lambda == \frac{2\pi}{k}\ . \qquad (5.2)$$

Из формулы (5.1) видно, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в данном случае синфазны, отношение их амплитуд определяется через волновое (характеристическое) сопротивление среды Z_c. В идеальном диэлектрике

$$Z_c = \frac{Å_0}{Í_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ , \qquad (5.3)$$

где $Z_0 = 120\pi = 377$ Ом – волновое сопротивление вакуума.

где $-\vec{z}_0$ - орт в направлении распространения волны.

Для описания монохроматических полей удобно использовать метод комплексных амплитуд, согласно которому комплексные амплитуды полей (5.1) имеют вид (зависимость от времени принята в виде $e^{j\omega t}$)

$$\dot{\vec{E}}(z)=\vec{x}^0\dot{E}_0e^{-jkz},\ \dot{\vec{H}}(z)=\vec{y}^0\dot{H}_0e^{-jkz}\ , \qquad (5.4)$$

где $\dot{E}_0=E_0e^{j\varphi},\ \dot{H}_0=H_0e^{j\varphi}$ - комплексные амплитуды.

Если волна распространяется в направлении оси $-z$, то перед выражением kz в формулах (5.1) и (5.4) знак изменяется на «+».

Если среда проводящая (удельная объемная проводимость σ≠0), то это учитывается заменой ε на комплексную диэлектрическую проницаемость $\dot{\varepsilon}=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}$ в выражениях для волнового числа k и волнового сопротивления Z_c. Это приводит к тому, что волновое число k и волновое сопротивление Z_c становятся комплексными

$$\dot{k}=k'-ik''=\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-jtg\Delta)}\ ,\ Z_c=\sqrt{\frac{\mu\cdot\cos\Delta}{\varepsilon}}\cdot e^{j\frac{\Delta}{2}}, \qquad (5.5)$$

где Δ - угол потерь, который определяется из соотношения

$$tg\Delta=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}.$$

Наличие мнимой части волнового сопротивления в проводящих средах (средах с потерями) приводит к тому, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ сдвинуты по фазе по отношению друг к другу на угол $\Delta/2$. С учетом соотношений (5.5) комплексные амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (5.4) могут быть представлены в виде:

$$\dot{\vec{E}}(z)=\vec{x}^0\dot{E}_0e^{-k''z}e^{-jk'z},\ \dot{\vec{H}}(z)=\vec{y}^0\dot{H}_0e^{-k''z}e^{-jk'z}\ , \qquad (5.6)$$

из которого видно, что действительная часть комплексного волнового числа k' является постоянной распространения и по-прежнему определяет фазовую скорость и длину волны в данной среде по формулам (5.2), а мнимая часть комплексного волнового числа k'' характеризует убывание амплитуд поля вдоль направления распространения z и называется коэффициентом затухания. Из формулы (5.5) для k' и k'' можно получить следующие выражения:

$$k'=k_0\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+tg^2\Delta})}\ ,\quad k''=k_0\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+tg^2\Delta})}\ , \qquad (5.7)$$

где $k_0=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ - постоянная распространения в данной среде, если бы потери в ней отсутствовали. Расстояние, на котором амплитуда волны уменьшится в $e\approx 2.71$ раз, называется глубиной проникновения и обозначается δ. Очевидно, что

$$\delta=1/k''. \qquad (5.8)$$

Затухание амплитуды векторов E *или* H на расстоянии l

$$L = \left|\frac{\dot{E}(0)}{\dot{E}(l)}\right| = e^{k''l}$$

может быть выражено в неперах (Нп)

$$L[Hn] = \ln L = k''l$$

или в децибелах

$$L[\partial Б] = 20\lg e^{k''l} = k''l \cdot 20\lg e = 8,68k''l = 8,69L[Hn]. \qquad (5.9)$$

при этом $1\ Hn = 8.68$.

Среднее за период колебаний значение вектора Пойнтинга определяется через комплексные амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношением:

$$\vec{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*\right] \qquad (4.10)$$

и определяет среднюю по времени плотность потока мощности, т.е. среднюю за период колебаний энергию, переносимую волной за одну секунду через поверхность площадью $1м^2$, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если использовать связь амплитуд векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через волновое сопротивление среды (5.3), то формуле (4.10) можно придать вид:

$$\Pi_{ср} = \frac{\left|\dot{\vec{E}}\right|^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\dot{Z}_c}\right) = \frac{1}{2}\left|\dot{\vec{H}}\right|^2 \mathrm{Re}(\dot{Z}_c). \qquad (5.11)$$

В металлах $\mathrm{tg}\Delta >> 1$и поэтому формулы (5.7) упрощаются так, что

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\,\sigma}{2}}. \qquad (5.12)$$

Волновое сопротивление металлов выражается формулой

$$\dot{Z}_c = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \qquad (5.13)$$

Вектор $\vec{E}$ можно разложить на две ортогональные составляющие, (например, по осям $x\ и\ y$):

$$\dot{\vec{E}}(z) = (\vec{x}^0\dot{E}_x^0 + \vec{y}^0\dot{E}_y^0)e^{-j\dot{k}я}. \qquad (5.14)$$

В зависимости от соотношения амплитуд и фаз составляющих $\dot{E}_x^0$ и $\dot{E}_y^0$ выделяют три типа поляризации волны: линейную, круговую и эллиптическую. Линейной поляризации соответствуют случаи, когда либо одна из составляющих равна нулю, либо когда сдвиг фаз между ними равен 0 или 180^0. Круговая поляризация наблюдается при одновременном выполнении двух условий: равенстве амплитуд составляющих $E_x\ и\ E_y$ и сдвиге фаз между ними, равным $\pm 90^0$. В остальных случаях поляризация волны будет эллиптической. Учитывая, что сдвиг по фазе $\pm 90^0$ соответствует значению фазового множителя

$$e^{\pm i90^0} = \pm j\ ,$$

представим вектор $\vec{E}$ для волны с круговой поляризацией в виде:

$$\dot{\vec{E}}(z) = \dot{E}_0(\vec{x}^0 \pm i\vec{y}^0)e^{-j\dot{k}я} . \qquad (5.15)$$

При этом знак "–" соответствует правой круговой поляризации, при которой вектор $\vec{E}$ вращается с течением времени по часовой стрелке, если смотреть в направлении распространения волны.

Для аналитического представления полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоских волнах, распространяющихся в произвольном направлении, используют понятие волнового вектора $\vec{k}$, который по величине равен волновому числу k и направлен в сторону распространения волны. Выражение для вектора $\vec{E}$ в этом случае можно представить в виде

$$\dot{\vec{E}}(x,y,z) = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k}\vec{r}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} , \qquad (5.16)$$

где k_x, k_y, k_z - проекции вектора $\vec{k}$ на оси x, y, z декартовой системы координат.

5.1.2. Примеры решения задач

Задача №1

Плоская электромагнитная волна распространяется в свободном пространстве (вакууме). Задана комплексная амплитуда магнитного поля

$$\dot{\vec{H}}(y) = -\vec{z}_0 H_0 e^{-i(ky+\phi)} ,$$

Где начальная фаза $\varphi = 60^0$.

Определить:

1) Комплексную амплитуду электрического поля,

2) Мгновенные значения векторов E *и* H ,

3) Определить амплитуды полей E_0 *и* H_0 , если при $t = 0$ в точке $y = 0$ величина вектора E равна 1 *В/м*,

4) Определить величину векторов E *и* H в момент времени $t = 10^{-6}$ с в точке с координатой $y = 100$, если частота волны $f = 1$ МГц.

Решение:

Судя по зависимости H от координаты «*y*», волна распространяется в положительном направлении оси «*y*», в эту же сторону направлен вектор Пойнтинга. Изобразим систему координат (правовинтовую) и вектора $\vec{H}$ и $\vec{\Pi}$ см. рис 5.1.

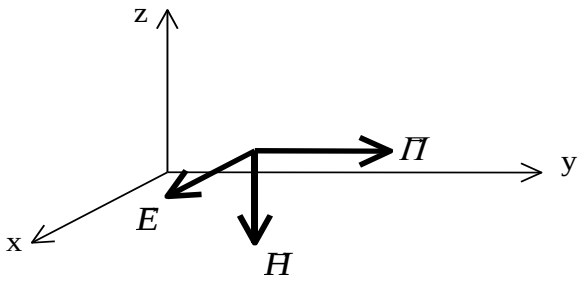


Рис.5.1. Правовинтовая система координат

Так как $\vec{\Pi} = \left[\vec{E} \cdot \vec{H}\right]$, то подберем такое направление вектора $\vec{E}$, чтобы векторное произведение $\left[\vec{E} \cdot \vec{H}\right]$ было направлено вдоль оси «y». Направление векторного произведения определяется по правилу буравчика, т.е. направлением движения правовинтового винта при его вращении от первого вектора ко второму по кратчайшему пути. Очевидно, что вектор $\vec{E}$ будет направлен по оси «x». Так как в идеальном диэлектрике вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ синфазны, то комплексная амплитуда вектора $\vec{E}$ будет иметь вид

$$\dot{\vec{E}}(y) = \vec{x}_0 E_0 e^{-j(ky+60^0)}.$$

Амплитуда E_0 определится через H_0 и волновое сопротивление среды, поскольку

$$\frac{E_0}{H_0} = Z_w^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}.$$

Таким образом, $E_0 = H_0 \cdot 120\pi$.

2) Мгновенные значения напряженностей E *и* H определяются через комплексные амплитуды как

$$\vec{E}(y,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(y) \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\vec{x}_0 E_0 \cdot e^{j(\omega t - ky - 60^0)}\right] = \vec{x}_0 E_0 \cos(\omega t - ky - 60^0).$$

Аналогично $\dot{\vec{H}}(y,t) = -\vec{z}_0 H_0 \cos(\omega t - ky - 60^0)$.

3) Определим E_0 из условия задачи

$$E(y=0, t=0) = E_0 \cos\left(-60^0\right) = 1B/м.$$

Отсюда

$$E_0 = 2\,{}^{B}\!/_{м} \;\; и \;\; H_0 = \frac{E_0}{Z_w^0} = \frac{2}{120\pi} = 5.305 \cdot 10^{-3}\,{}^{A}\!/_{м}.$$

4) Чтобы определить мгновенное значение векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ в заданной точке, подсчитаем значение фазы волны в этой точке для данного момента времени t. Для этого найдем значение волнового числа k. Поскольку фазовая скорость в вакууме равна с- скорости света, то

$$k = {}^{\omega}\!/_{c} = \frac{2\pi 10^6}{3 \cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3} 10^{-2}\,{}^{1}\!/_{\text{м}}.$$

Фаза волны в данной точке в заданный момент времени определится как

$$\Phi = \omega t - ky - 60^0 = 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} - \frac{2\pi}{3} 10^{-2} \cdot 100 - 60^0 = 180^0 .$$

Мгновенные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 \cos 180^0 = -\vec{x}_0 2 \ {}^{B}\!/_{м}, \qquad \vec{H} = -\vec{z}_0 H_0 \cos 180^0 = \vec{z}_0 5.305 \cdot 10^{-3} \ {}^{A}\!/_{м}.$$

Задача №2

. Плоская электромагнитная волна с частотой $f = 1$МГц распространяется в морской воде с параметрами $\varepsilon_r = 81, \sigma = 1 \frac{1}{\text{Îì} \cdot \text{ì}}$. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент затухания и волновое сопротивление среды.

Решение:

Вначале определим $\mathrm{tg}\Delta$, при этом учтем, что по условию задачи известна относительная диэлектрическая проницаемость ε_r, а в формулы входит полная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, где $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\hat{O}}{\text{ì}}$. Кроме того, не задана магнитная проницаемость воды, но известно, что вода не является ферромагнитным веществом и, поэтому $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\tilde{A}\text{í}}{\text{ì}}$. Согласно (5.5)

$$tg\Delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{36\pi \cdot 10^9}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 81} = \frac{2 \cdot 10^3}{9} \approx 2.22 \cdot 10^2 .$$

Так как $tg\Delta >> 1$, то на этой частоте морская вода ведет себя как проводник, т.е. амплитуда плотности тока проводимости много больше амплитуды плотности тока смещения. Определим k' и k'' по формулам (5.11).

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2}} = 1.987 \frac{1}{м} .$$

Совершаемая при этом ошибка по отношению к точным формулам (5.7) не превышает $4 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, коэффициент затухания равен $k'' = 1.987 \frac{1}{м}$.

Определим фазовую скорость и длину волны

$$\mathrm{v}_ф = \frac{\omega}{k'} = \frac{2\pi \cdot 10^6}{1.987} = 3.162 \cdot 10^6 \frac{м}{с} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{1.987} = 3.162 м .$$

Сравним эти значения с фазовой скоростью в пустоте (а) и в дистиллированной воде с параметрами $\varepsilon_r = 81, \ \sigma = 0$ (б).

а) $\mathrm{v}_ф = c = 3\cdot 10^8 \frac{м}{c};\quad \lambda_0 = \frac{c}{f} = 300м;$

б) $\mathrm{v}_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{81}} = 3.333\cdot 10^7 \frac{м}{c};\quad \lambda = \frac{v_ф}{f} = 33.33м.$

Определим волновое сопротивление среды

$$\dot{Z}_{\mathrm{w}} = \sqrt{\frac{\mu\cdot\cos\Delta}{\varepsilon}}\cdot e^{i\frac{\Delta}{2}}.$$

Поскольку $tg\Delta \approx 222 >> 1$ то $\cos\Delta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\Delta}} \approx \frac{1}{tg\Delta}$ и $\Delta \approx 90^0$.

$$\dot{Z}_w \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r tg\Delta}}\cdot e^{i45^0} = \sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 36\pi\cdot 10^9}{81\cdot 222}}e^{i45^0} \approx 2.811\cdot e^{i45^0}\ Ом.$$

Задача №3

Плоская электромагнитная волна с частотой $f = \mathbf{10^8}\,\mathbf{Гц}$ распространяется в среде с параметрами $\varepsilon_r = 2.25,\ \mathrm{tg}\Delta = 0.4,\ \mu_{\mathrm{r}} = 1$. Амплитуда электрического поля в плоскости $\mathbf{z = 0}$ равна **100** В/м. Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости $\mathrm{z} = 1м$ и ослабление волны на этом расстоянии.

Решение:

Найдем угол потерь $\Delta = arctg\,0.4 \approx 0.38$ рад $= 21.77^0$.

Определим волновое сопротивление среды

$$\dot{Z}_w = \sqrt{\frac{\mu\cdot\cos\Delta}{\varepsilon}}e^{i\frac{\Delta}{2}} = 120\pi\sqrt{\frac{\cos 0.38}{2.25}}e^{i0.19} = 242.2e^{i0.19}\ \text{Ом}.$$

Определим среднюю величину вектора Пойнтига в плоскости z=0 по формуле (5.11)

$$П_{ср}(0) = \frac{\left|\dot{\dot{E}}\right|^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\dot{Z}_w}\right) = \frac{10^4}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{242.2}e^{-i0.19}\right) = \frac{10^4}{2\cdot 242.2}\cos(0.19) = 20.27\ \text{Вт}.$$

Определим коэффициент затухания по формуле (5.7)

$$k'' = k_0\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+tg^2\Delta})} = \frac{2\pi 10^8}{3\cdot 10^8}\sqrt{2.25}\sqrt{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+0.4^2})} = 6.1656\cdot 10^{-1}\ {}^{1}\!/_{\text{м}}.$$

На расстоянии 1 м затухание вектора Пойнтинга составит

$e^{2k''\cdot 1} = 3.432$ или $\mathrm{L} = 10\lg(\mathrm{e}^{2\mathrm{k}''\cdot 1}) = 5.355$ дБ.

Задача №4

Среднее по времени значение вектора Пойнтинга в воздухе и идеальном диэлектрике с параметрами $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 9,\ \mu_{\mathrm{r}} = 1$ равно Вт/м^2. Определить:

1) средние по времени плотности энергии в этих средах,

2) амплитуды полей E *и* H .

Решение:

Вектор Пойнтинга связан с плотностью энергии и скоростью движения энергии соотношением $\vec{v}_{\acute{y}} = \frac{\vec{I}}{w}$. Скорость движения энергии монохроматических волн в идеальных диэлектриках совпадает с фазовой скоростью v_{ϕ}. Будем обозначать величины, относящиеся к воздуху цифрой «1» , а к диэлектрику – цифрой «2». Электрические и магнитные параметры воздуха можно считать такими же, как у вакуума. Таким образом, скорости энергии будут равны:

$$v_1 = {}^{1}\!\Big/\!_{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c = 3\cdot 10^8\ {}^{м}\!\Big/\!_{c};\quad v_2 = {}^{1}\!\Big/\!_{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = 10^8\ {}^{м}\!\Big/\!_{c}.$$

Плотность энергии в воздухе и в диэлектрике соответственно будет

$$w_1 = \frac{П_1}{v_1} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-8}\ {}^{\text{Дж}}\!\Big/\!_{\text{м}^3};\qquad w_2 = \frac{П_2}{v_2} = 10^{-8}\ {}^{\text{Дж}}\!\Big/\!_{\text{м}^3}.$$

Определим соотношение между плотностями электрической и магнитной энергии в идеальных диэлектриках. Известно, что средние по времени плотности этих энергий выражаются формулами

$$w_{E\tilde{n}\eth} = \frac{\varepsilon\left|\mathring{A}\right|^2}{4};\quad w_{\acute{I}\,\tilde{n}\eth} = \frac{\mu\left|\acute{I}\right|^2}{4} \qquad (5.19)$$

и их отношение равно 1, поскольку ${}^{E}\!\Big/\!_{H} = \sqrt{{}^{\mu}\!\Big/\!_{\varepsilon}}$. Таким образом, в любом идеальном диэлектрике плотности энергий электрического и магнитного полей всегда равны. В условиях данной задачи они будут равны

$$w_{1E} = w_{1H} = {}^{1}\!\Big/\!_{6}\cdot 10^{-8}\ {}^{\text{Äæ}}\!\Big/\!_{\text{ì}\ 3};\quad w_{2E} = w_{2H} = {}^{1}\!\Big/\!_{2}\cdot 10^{-8}\ {}^{\text{Äæ}}\!\Big/\!_{\text{ì}\ 3};$$

Из формул (5.19) получим

$$\left|E_1\right| = \sqrt{\frac{4w_{E1}}{\varepsilon_0}} = \sqrt{240\pi}\ {}^{B}\!\Big/\!_{м};\qquad \left|E_2\right| = \sqrt{80\pi}\ {}^{B}\!\Big/\!_{м};$$

$$\left|H_1\right| = \sqrt{\frac{4w_{H1}}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{60\pi}}\ {}^{A}\!\Big/\!_{м};\qquad \left|H_2\right| = \frac{1}{\sqrt{20\pi}}\ {}^{A}\!\Big/\!_{м}.$$

Конечно, эти же результаты могут быть получены так же из формулы (2.11).

Изобразим в относительных единицах соотношение между полями E *и* H , а также плотностями энергии и скоростями.На рисунке 5.4 в кубиках заключена одинаковая энергия, так что плотность энергии обратно пропорциональна объему куба. Таким образом, в электрически плотных диэлектриках (с большим ε) электрические поля меньше, чем в менее плотных, при одинаковой величине вектора Пойнтинга, хотя в каждом диэлектрике сохраняется равенство $w_E = w_H$.

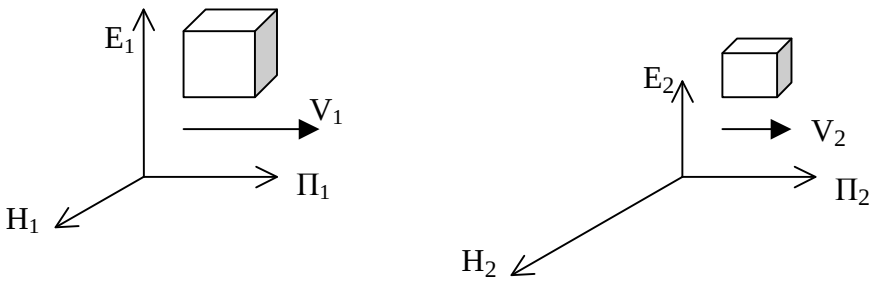


Рис. 5.4. Соотношение между полями E *и* H , плотностью энергии

5.2. Отражение и преломление плоских волн от границы раздела двух сред

5.2.1. Краткие теоретические сведения

По отношению к поверхности раздела двух сред различают волны с горизонтальной и вертикальной поляризацией. При вертикальной поляризации вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости падения волны, при горизонтальной – перпендикулярен ей, как показано на рисунке 5.5 .

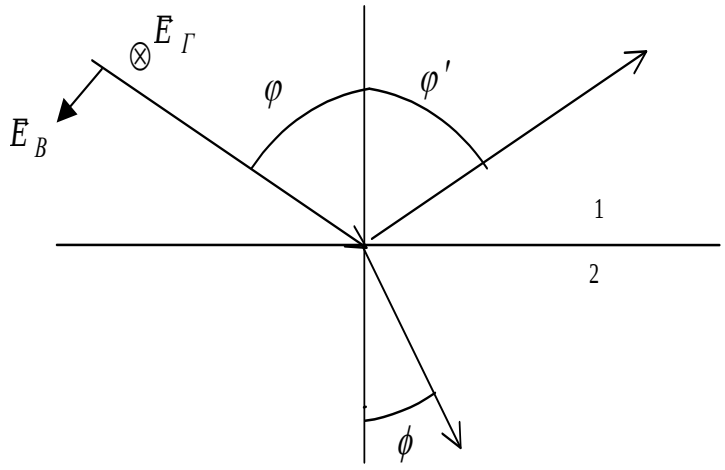


Рис. 5.5. Направления горизонтальной и вертикальной поляризаций.

При падении электромагнитных волн на границу раздела двух сред возникают отраженные и преломленные волны. Их направления распространения определяются законами Снеллиуса

$$\varphi' = \varphi, \quad \dot{k}_1 \sin\varphi = \dot{k}_2 \sin\psi . \qquad (5.20)$$

Амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ отраженной и преломленной волн по отношению к амплитудам падающей волны определяются коэффициентами отражения ($R_Г$ *и* R_B) и прохождения ($T_Г$ *и* T_B) :

$$\dot{R}_{\Gamma} = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{\dot{Z}_{w2}\cos\varphi - \dot{Z}_{w1}\cos\psi}{\dot{Z}_{w2}\cos\varphi + \dot{Z}_{w1}\cos\psi}; \quad \dot{T}_{\Gamma} = \frac{\dot{E}_{пр}}{\dot{E}_{пад}};$$

$$\dot{R}_{B} = \frac{\dot{H}_{отр}}{\dot{H}_{пад}} = \frac{\dot{Z}_{w1}\cos\varphi - \dot{Z}_{w2}\cos\psi}{\dot{Z}_{w1}\cos\varphi + \dot{Z}_{w2}\cos\psi}; \quad \dot{T}_{B} = \frac{\dot{H}_{пр}}{\dot{H}_{пад}}; \tag{5.21}$$

Формулы (5.21) называются формулами Френеля. Для обеих поляризаций (вертикальной и горизонтальной) выполняется соотношение:

$$1 + \dot{R} = \dot{T}. \tag{5.22}$$

Следует обратить внимание на то, что коэффициенты R и T определенные формулой (5.21) различаются для горизонтальной и вертикальной поляризации.

При падении волны на границу раздела двух идеальных диэлектриков могут наблюдаться два характерных явления: полное преломление и полное отражение. *Полное преломление* существует только при вертикальной поляризации падающей волны. Соответствующий угол падения называется углом Брюстера и определяется из соотношения

$$\sin\varphi_{Б} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \tag{5.23}$$

При падении волны из более «плотного» диэлектрика на границу с менее «плотным» ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) при углах падения $\varphi \geq \varphi_0$ (φ_0 - критический угол) наблюдается *полное отражение* для обеих поляризаций.

$$\sin\varphi_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \tag{5.24}$$

Модули коэффициентов отражения при углах падения $\varphi \geq \varphi_0$ равны 1. Поле во второй (менее плотной) среде представляет неоднородную плоскую, поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела с фазовой скоростью

$$v_{ф} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\sin\varphi} \tag{5.25}$$

и убывающую по амплитуде при удалении от границы по закону $e^{-\beta\cdot z}$, где

$$\beta = k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi - 1}, \quad \mathrm{k}_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2}. \tag{5.26}$$

При отражении от «оптически более плотной» среды, т.е. при условии

$$\left|\dot{k}_2\right| >> \left|k_1\right|, \tag{5.27}$$

угол преломления ψ согласно закону Снеллиуса стремится к нулю и преломленная волна распространяется практически перпендикулярно

поверхности, а вектора $\vec{E}_{np}$ и $\vec{H}_{np}$ становятся почти ей параллельными. При этом, на поверхности такой «плотной» среды выполняются приближенные *граничные условия Леонтовича*, которые могут быть записаны в векторной и скалярной формах

$$\dot{\vec{E}}_{t1} \approx \dot{Z}_{w2}\left[\dot{\vec{H}}_{t1} \cdot \vec{n}_0'\right] \qquad \text{или} \qquad \frac{\dot{E}_{t1}}{\dot{H}_{t1}} \approx \dot{Z}_{\text{w2}}, \tag{5.28}$$

где $\dot{E}_{t1}, \dot{H}_{t1}$ - тангенциальные составляющие полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в первой среде, $\vec{n}_0'$ -нормаль к поверхности, направленная во вторую среду, Z_{w2} – волновое сопротивление второй (более плотной) среды.

Значение приближенных граничных условий Леонтовича состоит в том, что они связывают тангенциальные составляющие полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в первой среде непосредственно с волновым сопротивлением Z_{w2} второй среды. Конечно, “строгие” граничные условия при этом также остаются справедливыми и, в частности, выполняется

$$E_{t1} = E_{t2} \approx E_2 \quad \text{и} \quad H_{t1} = H_{t2} \approx H_2 .$$

Граничные условия Леонтовича широко применяются для определения потерь мощности на нагрев проводников. При этом удобно использовать понятие поверхностного сопротивления проводника

$$\dot{Z}_S = \frac{\dot{E}_t}{\dot{\eta}}, \tag{5.29}$$

где $\dot{E}_t$ - тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ на поверхности проводника, $\dot{\eta}$ - плотность поверхностного тока. Можно показать, что поверхностное сопротивление металлов равно их волновому сопротивлению

$$\dot{Z}_S = \dot{Z}_{w2} = R_S + iX_S ,$$

где

$$R_S = X_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\Delta_0} . \tag{5.30}$$

Активная часть поверхостного сопротивления R_S оказывается равной активному сопротивлению проводника на постоянном токе, но имеющем толщину, равную глубине проникновения Δ_0.

5.2.2. Примеры решения задач

Задача №1

Плоская электромагнитная волна падает под углом $\varphi = 30^0$ из воздуха на границу раздела с идеальным диэлектриком с параметрами $\varepsilon_{\text{r}} = 4, \mu_{\text{r}} = 1$. Амплитуда вектора $\vec{E}$ падающей волны равна 1 в/м, поляризация – горизонтальная. Определить

1) амплитуды векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ отраженной и преломленной волн,

2) построить их мгновенные значения в окрестности точки падения,

3) среднюю по времени плотность мощности, переносимую каждой волной.

Решение:

1) Обозначим все величины, относящиеся к первой среде – воздуху цифрой «1», а ко второй среде – диэлектрику – цифрой «2».

Определим угол преломления из закона Снеллиуса (5.20)

$k_1 \sin\varphi = k_2 \sin\psi$, где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}$;

$$\sin\psi = \frac{k_1}{k_2}\cdot\sin\varphi = \frac{\sin 30^0}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4};\ \psi = 14^0 30';\quad \cos\psi = 0.968.$$

Определим коэффициент прохождения для волны с горизонтальной поляризацией по формулам (5.21) и (5.22).

$$T_\Gamma = \frac{2Z_{B2}\cos\varphi}{Z_{B2}\cos\varphi + Z_{B1}\cos\psi};\ Z_{B1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi;\ Z_{B2} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = 60\pi;$$

В результате получим $T_\Gamma = 0.618$ и $R_\Gamma = T_\Gamma - 1 = -0.382$.

Амплитуды векторов Е отраженной и преломленной волн определятся как

$$E_{пр} = T_\Gamma E_{пад} = 0.618\cdot 1\,{}^{B}\!/_{м} = 0.618\,{}^{B}\!/_{м} \quad \text{и}$$

$$E_{отр} = R_\Gamma E_{пад} = -0.382\,{}^{B}\!/_{м}.$$

Знак «–» у амплитуды отраженной волны означает противоположное направление электрического вектора отраженной волны по отношению к вектору E падающей волны. Амплитуды векторов H можно найти через векторы E и волновые сопротивления.

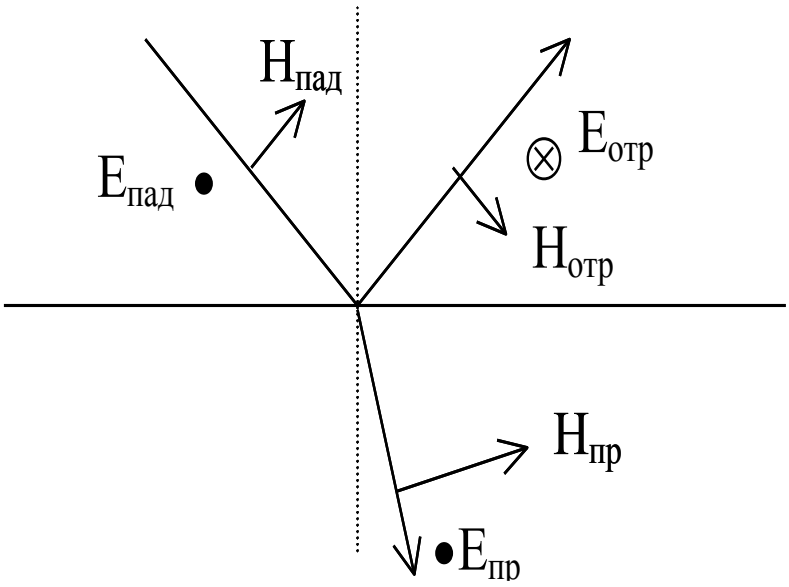


Рис. 5.6 Изображение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$

В полученных результатах следует обратить внимание на то, что $H_{пр} > H_{пад}$. Это можно объяснить тем, что вторая среда – электрически более плотная $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$, что приводит к уменьшению напряженности электрического и увеличению напряженности магнитного полей (см. задачу 5.5).

2) Построим поля E *и* H в падающей, отраженной и преломленной волнах.

Точки на рисунке (5.6) изображают вектора $\vec{E}$, направленные к нам (видно острие стрелы), кружок с крестиком – вектор E, направленный от нас (видно оперение стрелы). Изменение направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в преломленной волне связано с отрицательным значением коэффициента отражения R.

3) Определим средние значения векторов Пойнтинга во всех волнах. Поскольку вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в идеальном диэлектрике синфазны, то формула (10) упрощается

$$П_{ср} = \frac{1}{2}|E||H| = \frac{|E|^2}{2Z_w} = \frac{1}{2}|H|^2 Z_w .$$

$$П_{пад,ср} = \frac{1}{2}E_{пад}H_{пад} = 0.5 \cdot 1 \cdot 2.652 \cdot 10^{-3} = 1.326 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/\text{м}^2 ;$$

$$П_{отр,ср} = \frac{1}{2}E_{отр}H_{отр} = 0.5 \cdot 0.382 \cdot 1.013 \cdot 10^{-3} = 0.193 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/\text{м}^2 ;$$

$$П_{пр,ср} = \frac{1}{2}E_{пр}H_{пр} = 0.5 \cdot 0.618 \cdot 3.278 \cdot 10^{-3} = 1.013 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/\text{м}^2 .$$

Задача №2

Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны, возникающей при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_{г1} = 3.4, \mu_{г1} = 1$ на границу с воздухом - среда 2. Угол падения 45^0, частота поля $35\ ГГц$.

Решение:

Электрические параметры воздуха можно принять такими же, как у вакуума, т.е. $\varepsilon_{г2} = 1, \mu_{г2} = 1$. Определим угол полного отражения (5.24)

$$\varphi_0 = \arcsin(1/\sqrt{3.4}) = 32{,}8^0 .$$

Поскольку $\varphi > \varphi_0$, то в среде 2 будет существовать неоднородная плоская волна, называемая также поверхностной. Согласно формул (5.25) и (5.26), ее фазовая скорость и коэффициент убывания определяются выражениями

$$V_Ф = \frac{V_{Ф1}}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sin\varphi} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{3.4}\sin 45^0} = 2.308\cdot 10^8 \ {}^{м}\!/_{с}\ .$$

$$\beta_2 = k_2\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^2 - 1} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{c}\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^2 - 1} = 6.12\cdot 10^2 \ {}^{1}\!/_{м}\ .$$

Глубина проникновения поля во вторую среду Δ_0 определится как расстояние, на котором амплитуда поля уменьшится в «$e \approx$»2.71» раз.

$\Delta_0 = {}^{1}\!/_{\beta_2} = 1.64 мм$.

Таким образом, поле в воздухе на границе с дизлектриком распространяется вдоль границы со скоростью меньшей скорости света и "прижато" к границе с диэлектриком.

Задача №3

Плоская волна с частотой f =1МГц падает под углом 60^0 на поверхность металла с параметрами $\mu_r = 100, \sigma = 10^7$ См/м. Амплитуда электрического поля падающей волны 10 B / м. Определить среднее значение мощности, поглощаемой 1см^2 поверхности металла. Как результат зависит от поляризации падающей волны? Какая доля мощности падающей волны тратится на нагрев металла?

Решение:

Определим амплитуду вектора H падающей волны

$H_{пад} = {}^{E_{пад}}\!/_{Z_w^0}$, где Z_w^0=120π Ом – волновое сопротивление воздуха.

$H_{пад} = {}^{10}\!/_{120\pi} = 2.65\cdot 10^{-2} \ {}^{\text{А}}\!/_{\text{м}}$.

Среднее по времени значение вектора Пойнтинга в падающей волне равно

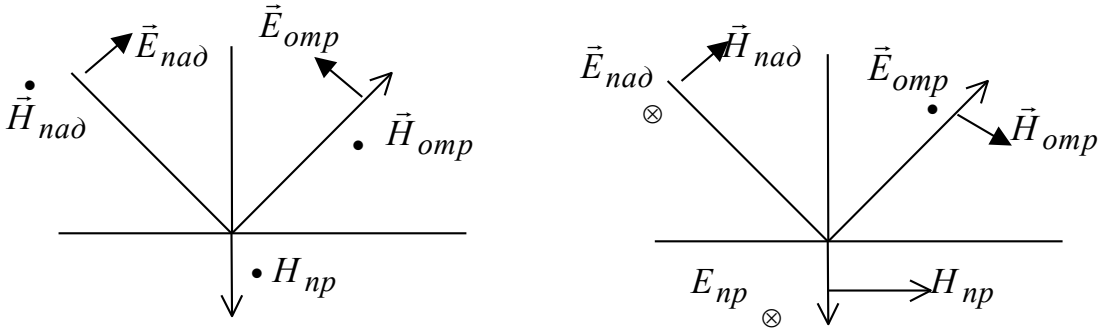
$$П_{пад,ср} = \frac{1}{2}E_{пад}H_{пад} = 0.1325 \ {}^{\text{Вт}}\!/_{\text{м}^2}\ .$$

Определим волновое сопротивление металла $Z_{w2} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$.

$$Z_{w2} = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\cdot 10^6\cdot 100\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^7}} = (1+i)\cdot 2\pi\cdot 10^{-3} \text{ Ом}.$$

Рассмотрим далее отдельно случаи вертикальной и горизонтальной поляризации (рис. 5.7). В соответствии с формулами (5.21), коэффициент отражения для металлов равен $R_B \approx 1;\ R_Г \approx -1$.

На границе раздела должны выполняться “строгие” граничные условия



а) вертикальная поляризация б) горизонтальная поляризация

Рис. 5.7

для тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в первой и второй средах:

$E_{t1} = E_{t2}$ и $H_{t1} = H_{t2}$,

где $E_{t1} = E_{падt} + E_{отрt}$ и $H_{t1} = H_{падt} + H_{отрt}$.

Из рис.5.7 видно, что при любой поляризации на поверхности металла почти полностью взаимно уничтожаются тангенциальные составляющие электрических и нормальные составляющие магнитных полей. В то же время нормальные составляющие электрического поля и тангенциальные составляющие магнитного поля фактически удваиваются по отношению к падающей волне.

а) Вертикальная поляризация.

При вертикальной поляризации

$$H_{пр} = H_{пад} + H_{отр} \approx 2H_{пад} = 5.3 \cdot 10^{-2} \ {}^{А}/_{м}.$$

Среднее значение вектора Пойнтинга в преломленной волне на границе раздела определится согласно формуле (5.11) как

$$П_{пр,ср} = \frac{1}{2}\left|H_{пр}\right|^2 \mathrm{Re}(Z_{w2}) = \frac{2.65^2 \cdot 10^{-4}}{2} 2\pi \cdot 10^{-3} = 2.2 \cdot 10^{-6} \ {}^{Вт}/_{м^2}.$$

Поток вектора $П_{ср}$ через поверхность S определяет среднюю мощность, переносимую волной через эту поверхность

$$P_{ср} = \int_S \vec{П}_{ср} \cdot \vec{n} ds,.$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности S.

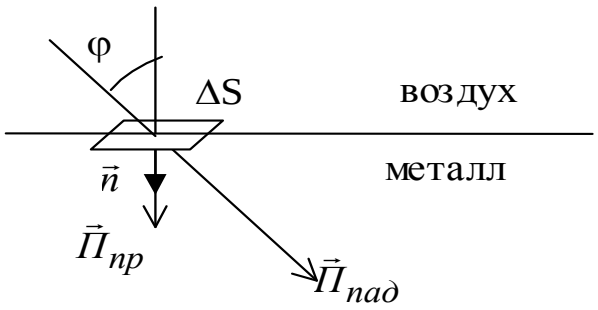


Рис. 5.8 Соотношение между величинами векторов Пойнтинга для падающей и преломленной волн.

Выберем в качестве поверхности S участок поверхности металла площадью $\Delta S = 1 см^2$ и направим нормаль внутрь металла см. рис 5.8.

Мощность, поглощаемая площадкой ΔS металла, определится как

$$P_{погл} = П_{пр,ср} \cdot \Delta S \cdot \cos 0^0 = 2.2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4} = 2.2 \cdot 10^{-10}\ Вт .$$

Мощность падающей волны, приходящаяся на эту же площадку, будет

$$P_{пад} = П_{пад,ср} \cdot \Delta S \cdot \cos 60^0 = 0.1325 \cdot 10^{-4} \cdot 0.5 = 6.625 \cdot 10^{-6}\ Вт .$$

Таким образом, при вертикальной поляризации отношение поглощенной и падающей мощностей составит

$$\frac{P_{погл}}{P_{пад}} = 0.332 \cdot 10^{-4}.$$

б) Горизонтальная поляризация.

При горизонтальной поляризации, как следует из рис. 5.7

$$H_{пр} = H_{падt} + H_{отрt} \approx 2H_{пад} \cdot \cos\varphi = 2.65 \cdot 10^{-2}\ А/м ,$$

то есть амплитуда магнитного поля преломленной волны уменьшилась в 2 раза по сравнению с вертикальной поляризацией. Очевидно, это приведет к уменьшению преломленной мощности в 4 раза и к уменьшению доли поглощенной мощности также в 4 раза, поскольку падающая мощность при этом не изменилась.

5.3. Задачи для самостоятельного решения

1 Морская вода имеет параметры $\varepsilon_r = 75, \sigma = 4\ См/м$. Определить относительную комплексную диэлектрическую проницаемость и тангенс угла потерь.

Ответ: $\dot{\varepsilon} = 6.63 \cdot 10^{-10} - i6.63 \cdot 10^{-6}\ Ф/м$; $\mathrm{tg}\Delta = 10^4$.

2 В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды полей

$$\dot{\vec{E}} = 5\vec{x}_0 - 8i\vec{y}_0 + 12e^{i30^0}\vec{z}_0\ В/м ; \quad \dot{\vec{H}} = 0.4e^{i45^0}\vec{x}_0 + 1.6e^{-i45^0}\vec{y}_0 - 0.75e^{-i60^0}\vec{z}_0\ А/м$$

Определить средний по времени вектор Пойнтинга.

Ответ: $\vec{П}_{ср} = -5.083\vec{x}_0 + 3.306i\vec{y}_0 + 3.960\ \vec{z}_0\ {}^{Вт}/_{м^2}$

3 Электромагнитная волна распространяется в вакууме. Частота волны $400МГц$. Определить длину волны и постоянную распространения.

Ответ: $\lambda = 0.75м;\ k = 8{,}378м^{-1}$.

4 Электромагнитная волна распространяется вдоль оси z. В плоскости $z = 0$ амплитуда вектора $E = 700$ В/м. Погонное затухание волны 0.2 дБ/м. Определить амплитуду вектора E в плоскости $z = 400м$.

Ответ: $E = 0.07\ В/м$.

5 Плоская электромагнитная волна с частотой $f = 800МГц$ распространяется в вакууме. Волновой вектор образует угол 30^0 с вектором $\vec{x}_0$ и угол 80^0 с вектором $\vec{y}_0$. Вычислите вектор $\vec{k}$.

Ответ: $\vec{k} = (8.884\vec{x}_0 + 6.283\vec{y}_0 \pm 6.283\vec{z}_0)\ {}^{1}/_{м}$

6 Найти фазовую скорость и длину волны в меди на частоте $f = 400МГц$, полагая, что параметры меди следующие: $\sigma = 5.7 \cdot 10^7\ {}^{См}/_{м}, \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ {}^{Гн}/_{м}$.

Ответ: $v_ф = 4188.5\ {}^{м}/_{с},\ \lambda = 4{,}19 \cdot 10^{-5}\ м$

7 Электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 250 В/м падает по направлению нормали на поверхность идеального диэлектрика с $\varepsilon_r = 3.2$. Найти модули средних по времени векторов Пойнтинга падающей, отраженной и преломленной волн.

Ответ: $П_{пад} = 82.9\ {}^{Вт}/_{м^2}$, $П_{отр} = 6.6\ {}^{Вт}/_{м^2}$, $П_{пр} = 76.3\ {}^{Вт}/_{м^2}$,

8 Плоская электромагнитная волна с горизонтальной поляризацией падает из воздуха под углом падения 60^0 на границу с диэлектриком, имеющим параметры $\varepsilon_r = 3.2,\ \mu_г = 1$. Амплитуда вектора E падающей волны 0.4 В/м.

Определить амплитуды векторов H отраженной и преломленной волн.

Ответ: $H_{отр} = 5.9 \cdot 10^{-4}\ {}^{А}/_{м},\ H_{пр} = 9.2 \cdot 10^{-4}\ {}^{А}/_{м}$,

9 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны, возникающей при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_r = 3.4,\ \mu_г = 1$ на границу раздела со средой 2 –воздухом с параметрами $\varepsilon_r = 1,\ \mu_г = 1$. Угол падения $\varphi = 45^0$, частота $f = 35$ ГГц.

Ответ: $v_ф = 2.308 \cdot 10^8\ {}^{м}/_{с}$, глубина проникновения $d = 1.64\ мм$

10 Плоская электромагнитная волна падает из воздуха на границу идеального диэлектрика с параметрами ($\varepsilon_r = 3.2,\ \mu_г = 1$) так, что отраженная волна отсутствует. Определить поляризацию падающей волны, углы падения и преломления, отношение векторов Пойнтинга преломленной и падающей волн.

Ответ: вертикальная, $\varphi = 49^0 40'$, $\psi = 25^0 12'$, $\Pi_{пр} / \Pi_{пад} = 0.716$

11 Плоская волна с частотой $f = 2\ ГГц$ с амплитудой вектора $E = 350$ В/м падает из вакуума по направлению нормали на поверхность металла с параметрами $\sigma = 2 \cdot 10^7\ См/м$, $\mu_r = 1$. Найти амплитуду касательной составляющей вектора E на границе раздела, а также среднее по времени значение вектора Пойнтинга прошедшей волны.

Ответ: $E_t = 0.0372(1+i)\ В/м$, $П_{пр,ср} = 3.4 \cdot 10^{-2}\ Вт/м^2$

12 На границу раздела двух сред падает под углом Брюстера электромагнитная волна, имеющая правую круговая поляризация. Какой будет поляризация отраженной и преломленной волны?

Ответ: отраженная-горизонтальная; преломленная-эллиптическая;

13 Волна с правой круговой поляризацией падает нормально из вакуума на металлическую поверхность. Какой будет поляризация отраженной волны?

Ответ: левая круговая

14 Амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны, распространяющейся в свободном пространстве, равна $60\pi \frac{В}{м}$. Какую мощность переносит волна через площадку с площадью $S = 4\ м^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны?

Ответ: 15π Вт

15 Электромагнитные волны в диэлектрических волноводах (например, в волоконных световодах) могут распространяться на большие расстояния путем многократных отражений от стенок (см. рисунок 5.9). Каким для этого должно быть соотношение между $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 ?

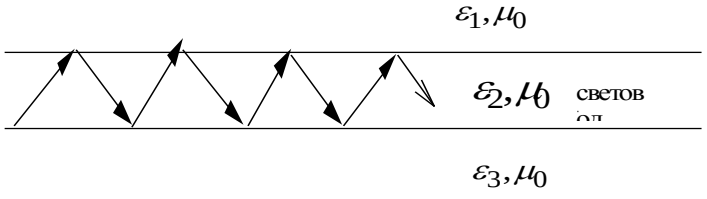


Рис.5.9. Движение волны в волокне

Ответ: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

16 При каком отношении диэлектрических проницаемостей сред $(\varepsilon_2 / \varepsilon_1)$ будет наблюдаться полное внутреннее отражение, если угол падения волны из первой среды равен 45^0, а магнитные проницаемости обеих сред одинаковы ?

Ответ: $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \le \frac{1}{2}$

17 Средняя мощность, переносимая плоской однородной волной через круглую площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, равна 0.6 Вт. Какова амплитуда напряженности электрического поля, если радиус площадки равен 1 м? $\varepsilon = \varepsilon_0;\ \mu = \mu_0$.

Ответ: 12 В/м

18 Мощность плоской электромагнитной волны уменьшается на метре пути в 20 раз. Определите коэффициент затухания волны в этой среде .

Ответ: 13 дБ/м

19 Амплитуда напряженности магнитного поля в волне, распространяющейся в свободном пространстве равна $\frac{1}{10\pi}$ А/м. Чему равна средняя мощность, переносимая волной через круглую площадку радиусом 1м, расположенную перпендикулярно распространению волны ?

Ответ: 0.6 Вт

20 Какова поляризация волны, распространяющейся в свободном пространстве, если вектор электрического поля задан в виде $\vec{E} = (3\vec{x}_0 + i3\vec{y}_0)e^{i(\omega t - kz)}$?

Ответ: круговая

21 Какова поляризация волны, распространяющейся в свободном пространстве, если вектор электрического поля задан в виде

$\vec{E} = (3\vec{x}_0 - 3\vec{y}_0)e^{i(\omega t - kz)}$?

Ответ: линейная *под углом* 45^0 *между осями* “$-x$” *и* “y”

22 Какова поляризация волны, распространяющейся в свободном пространстве, если вектор электрического поля задан в виде

$\vec{E} = (3\vec{x}_0 + i3\vec{z}_0)e^{i(\omega t - kz)}$?

Ответ: вектор $\vec{E}$ задан неверно

23 Какова поляризация волны, распространяющейся в свободном пространстве, если вектор электрического поля задан в виде $\vec{E} = E_0(\frac{1}{2}\vec{x}_0 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{z}_0)e^{i(\omega t - ky)}$?

Ответ: эллиптическая

24 Какова поляризация волны, распространяющейся в свободном пространстве, если вектор электрического поля задан в виде $\vec{E} = E_0\vec{x}_0\cos(\omega t - ky) + E_0\vec{z}_0\sin(\omega t - ky)$?

Ответ: круговая

25 На какой угол повернется вектор напряженности электрического поля волны с круговой поляризацией, распространяющейся в свободном пространстве, при прохождении расстояния $0.1м$. Частота колебаний $f = 1$ ГГц

Ответ: 120^0

Глава 6. Излучение электромагнитных волн

В данном разделе рассматриваются темы:

- Элементарные излучатели в свободном пространстве;
- Поля излучателей и параметры излучения
- Диаграммы направленности элементарных излучателей;
- Элементарные излучатели над идеально проводящей землей;

6.1. Краткие теоретические сведения

В курсе электромагнитные поля и волны [1] рассматриваются элементарные излучатели: электрический и магнитный диполи Герца и элемент Гюйгенса. Для определения электрических и магнитных полей, создаваемых излучателями, используются вспомогательные функции - электрический $\vec{A}$ и магнитный $\vec{A}_M$ векторные запаздывающие потенциалы. Чаще применяется электрический потенциал. При известных линейных токах возбуждения векторный потенциал определяется формулой [1]

$$\dot{\vec{A}}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\dot{\vec{\delta}}_{cm} e^{-ikr}}{r} dv \quad , \qquad (6.1)$$

где $\dot{\vec{\delta}}_{cm}$ - плотность сторонних токов, являющихся источником электрических и магнитных полей, $r-$ расстояние от точки объема V, где находятся токи $\dot{\vec{\delta}}_{cm}$ и точкой наблюдения M, k – волновое число.

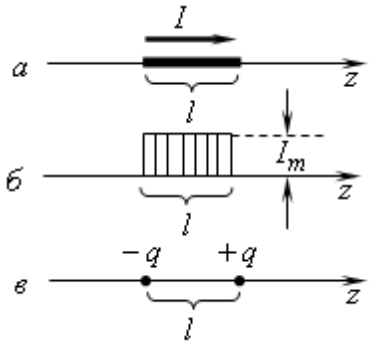


Рис.6.1. Элементарный электрический излучатель – диполь Герца

Электрическим диполем Герца (рис. 6.1) называется отрезок проводника, длиной l, по которому протекает переменный электрический ток I_{cm}, причем ток предполагается постоянным по длине диполя, $l << \lambda$, где λ - длина волны в данной среде. Для электрического диполя Герца векторный потенциал определяется наиболее просто, как

$$\dot{\bar{A}}(M) = \dot{I}_{cm.m}\frac{\mu\ell}{4\pi r}\left(\bar{r}_0\cos\theta - \bar{\theta}_0\sin\theta\right)e^{-jkr}. \tag{6.2}$$

где r – расстояние от середины диполя до точки наблюдения.

Поместим диполь в центре сферической системы координат, расположив его вдоль оси **z** (рис. 6.2).

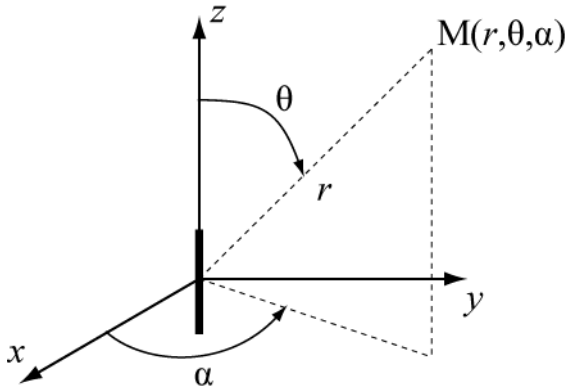


Рис.6.2 Диполь в системе координат

Выражения полей E и H в точке M, определяемые через векторный потенциал (6.2), представляют в общем виде достаточно сложные функции.

Для ближней и дальней зон излучения эти выражения существенно упрощаются.

Ближняя зона определяется условием $kr << \mathbf{1}$, или $r << \lambda / \mathbf{2}\pi.$

Комплексные амплитуды полей E и H в ближней зоне определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I_{CTm}l}{4\pi r^2}\sin\theta\cos\omega t\,; \\ E_r &= -i\frac{I_{CTm}l}{2\pi\varepsilon\omega\, r^2}\cos\theta\sin\omega t\,; \\ E_\theta &= -i\frac{I_{CTm}l}{4\pi\varepsilon\omega\, r^3}\sin\theta\cos\omega t\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Особенности полей в ближней зоне:

- Отсутствует зависимость от координат фазы полей;

- Амплитуды полей в ближней зоне зависят от координат так же, как поля электростатического диполя. Убывание амплитуд полей с увеличением расстояния, как $1/r^2$ или $1/r^3$.

- Поля $\dot{E}_\theta$ и $\dot{H}_\alpha$ сдвинуты по фазе на $90^0\,90^0$, поэтому среднее значение вектора Пойнтинга равно нулю. Это означает, что движение энергии вблизи диполя Герца носит, в основном, колебательный характер.

Дальняя зона определяется условием $kr >> \mathbf{1}$, или $r >> \lambda / \mathbf{2}\pi$.

Комплексные амплитуды полей E и H в дальней зоне определяются выражениями:

$$\dot{H}_\alpha = i\frac{klI_{cm}}{4\pi r}\sin\theta\cdot e^{-ikr};\qquad \dot{E}_r \approx 0;$$
$$\dot{E}_\theta = i\frac{klI_{cm}}{4\pi r}Z_c\sin\theta\cdot e^{-ikr}; \tag{6.4}$$

Характерные особенности полей в дальней зоне:

- Вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

- Поле элементарного электрического излучателя имеет характер сферической волны, поскольку фаза полей постоянна на сфере с радиусом r.

- Амплитуды полей убывают с расстоянием как $1/r$.

- Поля E и H синфазные и их отношение равно волновому сопротивлению данной среды для плоских волн – Z_c.

Среду будем считать идеальным диэлектриком ($\sigma = 0$). Среднее значение вектора Пойнтинга в дальней зоне не равно нулю

$$П_{ср} = \frac{1}{2}\frac{|E|^2}{Z_C} = \frac{1}{2}|H|^2 Z_C = \frac{(kI_{cm}l)^2}{32(\pi r)^2}Z_C\sin^2\theta. \tag{6.5}$$

Мощность, излучаемая диполем, вычисляется как интеграл по поверхности сферы от $П_{ср}$. Она имеет вид:

$$P_\Sigma = \frac{1}{2}|I_{cm}|^2 R_\Sigma, \tag{6.6}$$

где R_Σ - сопротивление излучения электрического диполя

$$R_\Sigma = \frac{2\pi Z_C}{3}(l/\lambda)^2, \tag{6.6а}$$

Нормированная диаграмма направленности по полю E (амплитудная диаграмма направленности) определяется выражением

$$F(\theta,\phi)=\frac{E(\theta,\phi)}{E_{\max}}, \tag{6.7}$$

где $E(\theta,\varphi)$ - амплитуда напряженности электрического поля при данных углах наблюдения; $E_{\max}$ - максимальное значение амплитуды электрического поля при постоянном расстоянии r. Для диполя Герца диаграмма направленности описывается функцией $F(\theta,\alpha) = |\sin\theta|$. В полярной системе координат диаграмма направленности имеет вид тела вращения вокруг оси диполя (рис.6.3).

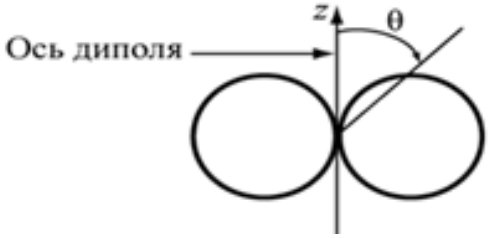


Рис.6.3 Электрический диполь Герца

Магнитный диполь Герца – воображаемый диполь Герца, в котором вместо электрического тока протекает фиктивный магнитный ток $I_{cm}^{м}$ Переход от формул (6.3) и (6.4), определяющих поля электрического диполя Герца, к соответствующим формулам для магнитного диполя Герца производится на основе *принципа перестановочной двойственности*

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \quad I_{cm} \leftrightarrow -I_{cm}^{м}, \quad \varepsilon \leftrightarrow -\mu \quad . \tag{6.8а}$$

Поля магнитного диполя в дальней зоне из(6.4) определяются соотношениями

$$\dot{E}_{\alpha} = -i\frac{lI^{m}_{cm}}{2r\lambda_0}\sin\theta\cdot e^{-ikr}; \qquad ;$$

$$\dot{H}_{\theta} = i\frac{lI^{m}_{cm}}{2\lambda_0 rZ_c}\sin\theta\cdot e^{-ikr}; \tag{6.9}$$

Магнитный диполь Герца может быть реализован в виде рамки с током малых размеров, периметр которой мал по сравнению с длиной волны. Рамочный излучатель представляет собой небольшую проволочную петлю площадью S, по которой протекает переменный электрический ток I_p .

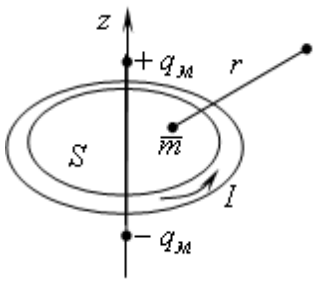


Рис.6.4.Элементарный магнитный излучатель

Если расположить рамку в начале координат так, чтобы ее ось была направлена вдоль оси z (рис.6.4), а в выражении (6.9) сделать замену в соответствии с равенством

$$I^{м}_{cm}\, l = -i\omega\mu\cdot I_{p}\, S, \tag{6.8б}$$

где $I_{cm}^{м}$ и l магнитный ток и длина диполя, I_p и S - электрический ток и площадь рамки, то получим поля магнитного диполя в дальней зоне

$$\dot{E}_\alpha = -\frac{I_p S \pi Z_c}{r\lambda^2_0}\sin\theta \cdot e^{-ikr}; \qquad ;$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{I_p S \pi}{r\lambda^2_0}\sin\theta \cdot e^{-ikr}; \tag{6.10}$$

Сопротивление излучения и диаграмма направленности рамочного излучателя определяются формулами

$$R^p_\Sigma = \frac{8\pi^3}{3} Z_C \frac{S^2}{\lambda^4} \cdot \; F(\theta,\alpha) = |\sin\theta| \tag{6.11}$$

Щелевой излучатель представляет собой металлическую плоскость, в которой прорезана щель длиной $l_{щ}$ и шириной $\tau_{щ}$ (рис. 6.5). Щель будет эквивалентна магнитному диполю Герца при условии, что длина её много меньше длины волны. Распределение вектора $\vec{E}$ по длине щели постоянно, магнитный ток диполя и напряжение на щели -$U_{щ}$ связаны соотношением $2U_{щ} = I^{м}_{ст}$. Щель может возбуждаться высокочастотным напряжением, подключенным к её кромкам.

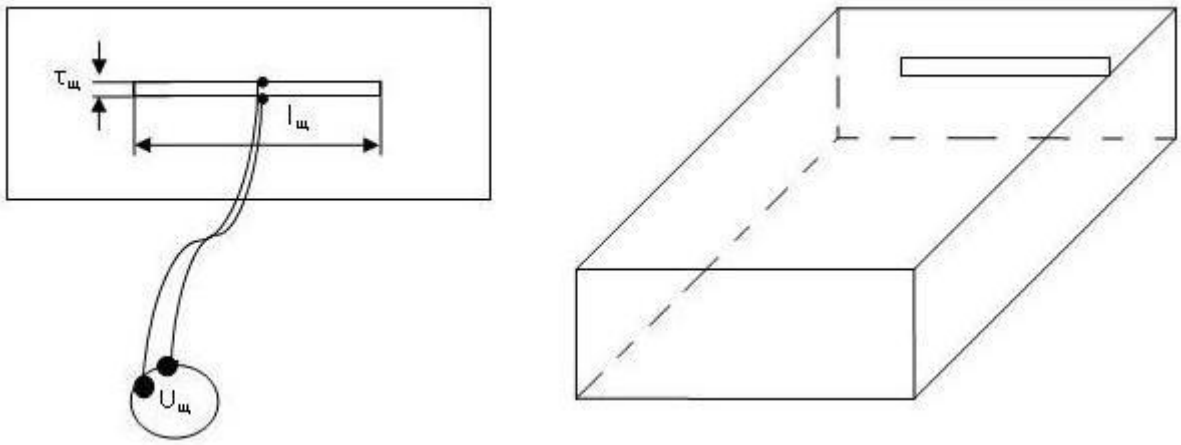


Рис. 6.5. Щелевой излучатель

Осуществляя в выражениях (6.9) подстановки $I^{м}_{ст} = 2U_{щ}$; $l = l_{щ}$, получим выражения для составляющих поля элементарного щелевого излучателя в дальней зоне при двустороннем возбуждении (в обе стороны от плоскости с диполем)

$$\dot{E}_\alpha = -i\frac{l_{щ}U_{щ}}{r\lambda_0}\sin\theta \cdot e^{-ikr};$$

$$\dot{H}_\theta = i\frac{l_{щ}U_{щ}}{\lambda_0 r Z_c}\sin\theta \cdot e^{-ikr}; \tag{6.12}$$

Мощность излучения щелевого излучателя

$$P_{\Sigma щ} = \frac{U^2{}_{щ}}{2R_{\Sigma щ}}, \tag{6.13}$$

Элемент Гюйгенса – участок фронта плоской волны с размерами много меньшими длины волны. Элемент Гюйгенса эквивалентен взаимно ортогональным электрическому и магнитному диполям Герца, расположенным в плоскости фронта волны (рис.6.6).

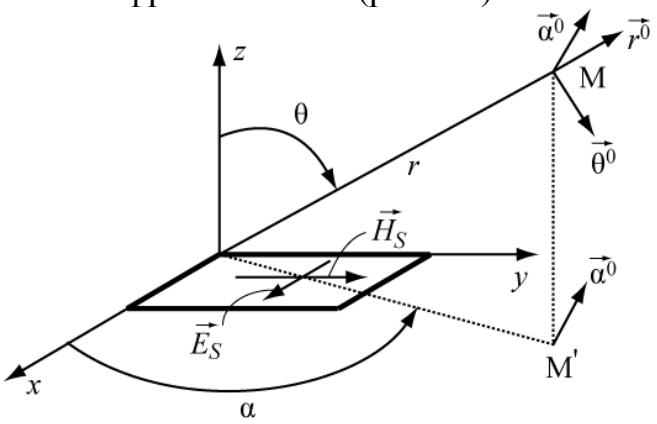


Рис.6.6.Элемент Гюйгнса

Поле элемента Гюйгенса в дальней зоне, в сферической системе координат, представляется в виде

$$\vec{\dot{E}} = -i\frac{\dot{E}_S \cdot S}{2\lambda r}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}_0\cos\alpha - \vec{\alpha}_0\sin\alpha)e^{-ikr},$$

$$\vec{\dot{H}} = -i\frac{\dot{E}_S \cdot S}{2\lambda r Z_c}(1+\cos\theta)(\vec{\theta}_0\sin\alpha + \vec{\alpha}_0\cos\alpha)e^{-ikr}, \tag{6.14}$$

где $\dot{E}_S$ - комплексная амплитуда напряженности электрического поля плоской волны на поверхности элемента Гюйгенса.

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в главных плоскостях ($\alpha = 0,\ \alpha = \pi/2$) определяется выражением

$$F(\theta,0) = F(\theta,\pi/2) = \frac{1+\cos\theta}{2}. \tag{6.15}$$

В полярной системе координат диаграмма направленности имеет вид кардиоиды (рис.6.7), причем максимум излучения направлен вдоль оси $z(\theta = 0)$.

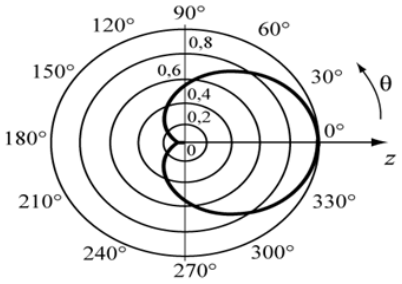


Рис.6.7 Кардиоида Элемента Гюйгенса

6.2. Примеры решения задач

Задача №1

Найти амплитуду тока в диполе Герца и излучаемую им мощность, если его длина $5\,см$ и в точке с координатами r = $1км$, $\theta = \pi/2$ амплитуда напряженности электрического поля $E_\theta = 10^{-4} В/м$. Частота колебаний 150 $МГц$.

Решение:

Определим излучаемую длину волны. Поскольку параметры среды не заданы, то будем полагать, что это – воздух (или вакуум)

$$\lambda = c/f = \frac{3\cdot 10^8 \ м/с}{150\cdot 10^6 \ 1/с} = 2м.$$

Определим величину kr для оценки. $kr = \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{2\pi}{2} 10^3 = \pi\cdot 10^3$.

Поскольку $kr >> 1$, то точка наблюдения находится в дальней зоне и поле определяется формулой (6.4).Запишем ее для амплитуды E_θ, опуская фазовые множители i и e^{-ikr}, и, учитывая для воздуха $Z_0 = W_0 = 120\pi \ Ом$,

$E_\theta = \frac{kI_{cm} l W_0}{4\pi r}\sin\theta$. Отсюда $I_{cm} = \frac{4\pi r E_\theta}{k l W_0 \sin\theta}$.

Подставляя значения r, θ, получим амплитуду тока в диполе

$$I_{cm} = \frac{4\pi 10^3 10^{-3}\cdot 2}{2\pi\cdot 0{,}05\cdot 120\pi \sin 90^o} = \frac{1}{1{,}5\pi} \approx 0{,}212\cdot A.$$

Сопротивление излучения диполя определяется формулой (6.6а)

$$R_\Sigma = \frac{2\pi W_0}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi^2 120}{3}\cdot\left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 = 5\pi^2\cdot 10^{-2} \approx 0.5\,Ом.$$

Средняя по времени мощность излучения определится как

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} I_{cm}^2 R_\Sigma = \frac{1}{2}\cdot 0{,}212^2\cdot 0{,}5 = 1.11\cdot 10^{-2}\ Вт.$$

Задача №2

Диполь Герца длиной $1м$ питается током частотой 1 $МГц$ и амплитудой $2А$. Определить напряженности электрического и магнитного полей на расстоянии $10м$ и $10\,км$ и построить зависимости их амплитуд от углов θ и α при этих расстояниях.

Решение:

Аналогично решению предыдущей задачи, определим величины *kr* для двух значений $r_1 = 10м$ и $r_2 = 10км$.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300\,м,\ kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 \approx 0.209,\ \ kr_2 \approx 209,$$

Таким образом, расстояние r_1 соответствует ближней зоне, а r_2 – дальней.

Поля в ближней зоне описываются формулами (6.3). При выполнении расчетов учтем, что для воздуха $\frac{1}{\omega\varepsilon} = \frac{W_0}{k}$.

$$H_\alpha = \frac{lI_{cm}}{4\pi r^2}\sin\theta = \frac{1 \cdot 2}{4\pi 10^2}\sin\theta \approx 1.59 \cdot 10^{-3}\sin\theta\ {}^{A}\!/_{м},$$

$$\dot{E}_\theta = i\frac{lI_{cm}}{4\pi\omega\varepsilon r^3}\sin\theta = i\frac{lI_{cm}W_0}{4\pi k r^3}\sin\theta = i\frac{9}{\pi}\sin\theta \approx i2.86\sin\theta\ {}^{B}\!/_{м},$$

$$E_r = i\frac{lI_{cm}}{2\pi\omega\varepsilon r^3}\cos\theta = i\frac{lI_{cm}W_o}{2\pi k r^3}\cos\theta = i\frac{18}{\pi}\cos\theta \approx i5.73\cos\theta\ {}^{B}\!/_{м}.$$

Таким образом, на расстоянии $10\,м$ от диполя будут присутствовать две компоненты вектора $\vec{E}$ и одна – вектора $\vec{H}$. Их диаграммы направленности в ближней зоне в полярной системе координат представлены на рис.6.8.

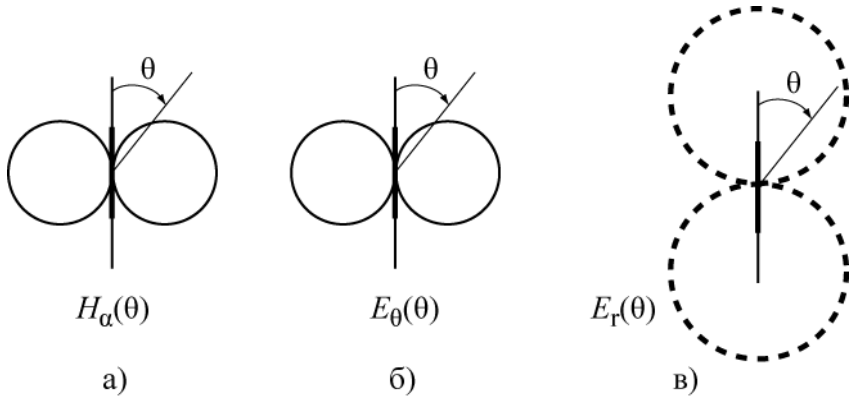


Рис. 6.8. Компоненты вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

На рисунке диполь выделен жирной линией. Следует обратить внимание на то, что в ближней зоне существует значительное продольное электрическое поле E_r и на сдвиг по фазе между полями E и H.

Поля в дальней зоне определяются формулами (6.4) . Определим амплитуду H_α

$$H_\alpha = \frac{kI_{cm}l}{4\pi r}\sin\theta = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{300 \cdot 4\pi \cdot 10^4}\sin\theta = 3.33 \cdot 10^{-7} \cdot \sin\theta\ {}^{\text{A}}\!/_{\text{м}}.$$

Электрическое поле имеет одну составляющую E_θ, которую можно определить через H_α и волновое сопротивление

$$E_\theta = W_0 \cdot H_\alpha = 120\pi \cdot 3.33 \cdot 10^{-7} \cdot \sin\theta = 1.256 \cdot 10^{-4} \cdot \sin\theta\ {}^{\hat{A}}\!/_{\grave{i}}.$$

Диаграмма направленности в дальней зоне описывается функцией $F(\theta) = \sin\theta$ и имеет вид изображенный на рис. 6.8а для H_α или рис. 6.8б для E_θ.

Задача №3

Мощность, излучаемая электрическим диполем Герца, находящимся в воздухе, в направлении максимального излучения равна $1{,}1\,Вт.$. Длина диполя составляет $0{,}1\lambda_0$. Определить напряженность электрического поля в дальней зоне в точке на расстоянии $10км$ от излучателя.

Решение:

В выражение (6.4) для напряженности электрического поля $E_\theta = \frac{I_{cm} l W_0}{2\lambda_0 r}\sin\theta$, подставим ток диполя $|I_{cm}|$, найденный из (6.6) $P_\Sigma = \frac{1}{2}|I_{cm}|^2 R_\Sigma$, а из (6.6а) найдем сопротивление излучения $R_\Sigma = \frac{2\pi W_0}{3}(l/\lambda)^2$. Получим выражение для определения напряженности электрического поля:

$$|I_{cm}| = \sqrt{\frac{2P_\Sigma}{R_\Sigma}} = \sqrt{\frac{2P_\Sigma \cdot 3}{2\pi W_0}(\lambda/l)^2}$$

$$E_\theta = \sqrt{\frac{2P_\Sigma \cdot 3}{2\pi W_0}(\lambda/l)^2}\cdot\frac{lW_0}{2\lambda_0 r}\sin\theta = \sqrt{\frac{P_\Sigma \cdot W_0 \cdot 3}{\pi}}\cdot\frac{1}{2r}\sin\theta = \sqrt{\frac{1{,}1\cdot 120\pi\cdot 3}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\cdot 10^4}\sin\theta$$

$$= 9{,}95\cdot 10^{-4}\quad В/м = 1\cdot 10^{-3}\quad В/м$$

Задача №4

Квадратная рамка с размерами сторон $15см$ создает амплитуду напряженности электрического поля $5\cdot 10^{-4} В/м$ на расстоянии 175км. Определить ток в рамке, если рабочая длина волны $5м$.

Решение:

Из выражений (6.10) определим амплитуду тока в рамке

$$I_{cm.э} = \frac{E_\phi \lambda_0^2 r}{S\pi Z_C \sin\theta},$$

Максимальная напряженность электрического поля получается при угле $\theta = \pi/2$. О среде нет никаких сведений, поэтому принимаем, что рамка находится в воздухе, т.е. $Z_C = W_0$. Находим ток

$$I_{ст.э} = \frac{E_\phi \lambda_0^2 r}{S\pi W_0} = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 5^2\cdot 15\cdot 10^3}{0{,}15^2\cdot 3{,}14\cdot 120\cdot 3{,}14} = 7.04 A$$

Задача №5

Определить сопротивление излучения двухстороннего щелевого излучателя, длина щели которого $l_{щ} = 2 см$, рабочая длина волны $\lambda_0 = 2 м$.

Решение:

Чтобы найти сопротивление излучения двухстороннего щелевого излучателя, найдем выражение мощности излучения.

Мощность излучения определяется интегралом по поверхности сферы от среднего значения вектора Пойнтинга, который зависит от выражений полей двухстороннего щелевого излучателя (6.12).

$$\vec{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[-i\frac{l_{щ}U_{щ}}{r\lambda_0}\sin\theta\cdot e^{-ikr}\vec{l}_{\varphi}\cdot(-i)\frac{l_{щ}U_{щ}}{\lambda_0\, rZ_c}\sin\theta\cdot e^{ikr}\vec{l}_{\theta}] =$$

$$= -\frac{1}{2}[\vec{l}_{\varphi}\vec{l}_{\theta}]\cdot\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}}{\lambda^2_0\, r^2 Z_c}\sin^2\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}}{\lambda^2_0\, r^2 Z_c}\sin^2\theta\cdot\vec{l}_r$$

$$P_{\Sigma} = \int_S \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}}{\lambda^2_0\, r^2 W_0}\sin^2\theta(\vec{l}_r\cdot\vec{l}_r)dS = \int_S \frac{1}{2}\cdot\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}}{\lambda^2_0\, r^2 W_0}\sin^2\theta\cdot r d\varphi\;\; r\sin\theta\, d\theta =$$

$$\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}\pi}{\lambda^2_0\, W_0}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{l^2_{щ}U^2_{щ}}{\lambda^2_0\, W_0} = \frac{U^2_{щ}}{2R_{\Sigma Щ}}$$

Формулу сопротивление излучения определяем из полученного выражения для мощности излучения

$$R_{\Sigma щ} = \frac{3}{8}\cdot\frac{W_0}{\pi}\cdot(\frac{\lambda_0}{l_{щ}})^2 \qquad (6.16)$$

$$R_{\Sigma щ} = \frac{3}{8}\cdot\frac{120\pi}{\pi}\cdot(\frac{2}{0{,}02})^2 = 4{,}5\cdot 10^5\;\; Ом$$

Задача №6

Определить мощность излучения рамки с током, если на расстоянии $r = 50 м$ в свободном пространстве, в экваториальной плоскости создается электрическое поле с амплитудой $\dot{E} = 100\ мВ/м$.

Решение:

Найдем мощность излучения рамки с током, используя вектор Пойнтинга и выражения полей (6.10).

$$\vec{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[-\frac{I_{pЭ}S\pi Z_c}{r\lambda^2_0}\sin\theta\cdot e^{-ikr}(\frac{I_{pЭ}S\pi}{r\lambda^2_0}\sin\theta\cdot e^{ikr})] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[-\frac{I^2_{pЭ}\,S^2\pi^2 Z_c}{r^2\lambda^4_0}\sin^2\theta]$$

$$P_{\Sigma p} = \int_S \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 I_{p\Э}^2 \pi^2 W_0}{\lambda^4{}_0\, r^2} \sin^2\theta (\vec{l}_r \cdot \vec{l}_r) dS = \int_S \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 I_{p\Э}^2 \pi^2 120\pi}{\lambda^4{}_0\, r^2} \sin^2\theta \; r d\varphi \; r \sin\theta d\theta$$

$$= 320\pi^4 (\frac{S}{\lambda^2})^2 I_{p\Э}^2$$

Из выражения (6.10) для амплитуды поля компоненты $\dot{E}_\alpha$ в экваториальной плоскости $\dot{E}_\alpha = -\frac{I_p S \pi Z_c}{r\lambda^2{}_0}$ найдем полезное соотношение

$$\frac{\dot{E}_\alpha r}{W_0 \pi} = -\frac{I_p S}{\lambda^2{}_0} \tag{6.17}$$

Подставляя (6.17) в полученное выражение мощности излучения рамки с током, найдем её

$$P_{\Sigma p} = 320\pi^4 (\frac{S}{\lambda^2})^2 I_{p\Э}^2 = 320\pi^4 (\frac{\dot{E}_\alpha r}{W_0 \pi})^2 = 320 \cdot \pi^4 \frac{0{,}1^2 \cdot 50^2}{120^2 \pi^4} = 0{,}56 \; Вт \tag{6.18}$$

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} |I_{cm}|^2 R_\Sigma \; ,$$

$$R_{\Sigma p} = \frac{2P_\Sigma}{I^2} = 640\pi^4 (\frac{S}{\lambda^2})^2 = 320\pi^4 (\frac{\dot{E}_\alpha r}{W_0 \pi})^2 = 320 \cdot \pi^4 \frac{0{,}1^2 \cdot 50^2}{120^2 \pi^4} = 0{,}56 \; Вт$$

Задача № 7

Определить диаграммы направленности в вертикальной и горизонтальной плоскостях диполя Герца, находящегося над идеально проводящей землей на высоте h. Рассмотреть случаи вертикального и горизонтального диполей для высоты $h = \lambda / 2$.

Решение:

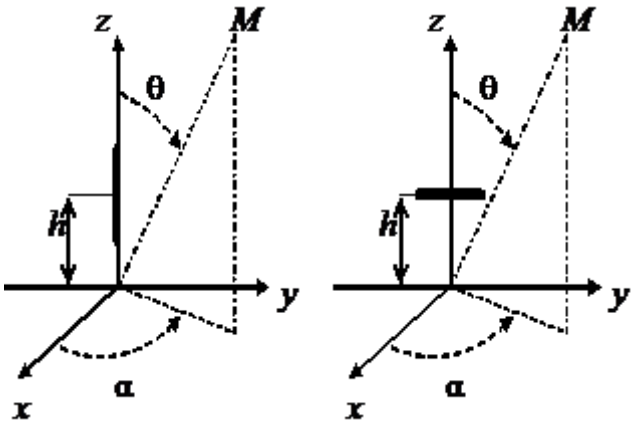


Рис. 6.9 Токи вертикального и горизонтального вибраторов

Выберем прямоугольную систему координат для обозначения координат диполей и сферическую систему координат - для определения координат точки наблюдения (рис. 6.9) Учет влияния идеально проводящей земли на излучение диполей можно провести методом зеркальных изображений. Рассмотрим вертикальный и горизонтальные диполи,

расположенные над поверхностью идеально проводящей земли (рис.6.9) Отметим для фиксированного момента времени на диполях положительные и отрицательные заряды и соответствующие им заряды на зеркальных изображениях диполей.

Покажем направление токов в диполях и их зеркальных изображениях от положительного заряда к отрицательному. Видно, что токи в вертикальном диполе и его зеркальном изображении имеют одинаковое направление, а в горизонтальном – противоположное.

Перейдем к определению диаграмм направленности. Изобразим на рисунке 6.10 условие задачи для вертикального диполя. В точке А расположен вертикальный диполь, в точке В – его зеркальное изображение с таким же направлением тока.

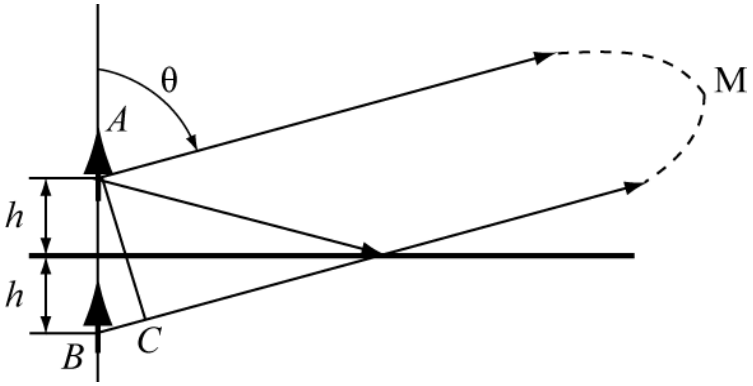


Рис. 6.10. Суперпозиция полей в точке М

Точка наблюдения M находится в дальней зоне, поэтому аправления распространения волн от диполя и его зеркального изображения (волны, отраженной от земли) параллельны и пересекаюся в бесконечно даленной точке.

Расстояния AM и BM отличаются на длину отрезка $BC = 2h\cos\theta$, это приводит к разности фаз полей в точке наблюдения

$$\Delta\varphi = k \cdot 2h\cos\theta = \frac{4\pi h}{\lambda}\cos\theta .$$

Амплитуды полей в прямой и отраженной волнах в бесконечно удаленной точке можно считать одинаковыми. Таким образом, сумма полей в точке M прямой волны и отраженной от земли будет пропорциональна выражению

$$1+e^{-i\Delta\phi} = e^{-i\Delta\phi/2}(e^{+i\Delta\phi/2}+e^{-i\Delta\phi/2}) = 2e^{-i\Delta\phi/2}\cdot\cos\frac{\Delta\phi}{2}.$$

Модуль этого выражения пропорционален функции направленности

$$F_3^{в}(\theta) = \left|\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\cos\theta\right)\right|, \qquad (6.19а)$$

которая может быть названа множителем земли. Амплитудная диаграмма направленности будет определяться, по-прежнему, собственной диаграммой направленности диполя в вертикальной плоскости

$F_0(\theta)=|\sin\theta|$. Таким образом, полная диаграмма направленности будет являться произведением диаграммы направленности вибратора в свободном пространстве на множитель земли.

$$F^{в}(\theta)=F_0^{в}(\theta)\cdot F_3^{в}(\theta)=|\sin\theta\cdot\cos(kh\cos\theta)|. \qquad (6.19б)$$

Видно, что диаграмма направленности в вертикальной плоскости не зависит от угла α и в пространстве представляет тело вращения вокруг оси *z*.

В горизонтальной плоскости ($\theta=\pi/2$) диаграмма направленности останется такой же, как у вертикального диполя в свободном пространстве, т.е. окружностью, поскольку множитель земли не зависит от азимутального угла α.

$$F^{в}(\alpha)\Big|_{\theta=90^0}=1$$

Для горизонтального диполя множитель земли будет другим, поскольку ток в зеркальном изображении противоположен по направлению току в исходном диполе

$$F_3^{г}(\theta)=\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|=\left|\sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\cos\theta\right)\right|. \qquad (6.20)$$

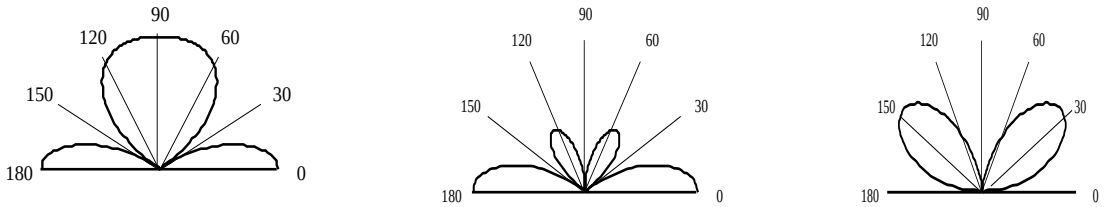
Собственная диаграмма направленности горизонтального диполя в вертикальной плоскости зависит от ориентации диполя относительно этой плоскости. На рисунке 6.8 ось диполя направлена вдоль оси *y*. Собственная диаграмма направленности в плоскости *xoz* является окружностью $F_0^{г}(\theta)\Big|_{\alpha=0}=1$, а в плоскости *yoz* - «восьмеркой»

$$F_0^{г}(\theta)\Big|_{\alpha=90^0}=|\cos\theta|.$$

Таким образом, полные диаграммы направленности в вертикальной плоскости - плоскости *xoz* (иногда ее называют экваториальной) и в плоскости *yoz* (соответственно – меридиональной) - представляются выражениями

$$F^{г}(\theta,\alpha=0)=\left|\sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\cos\theta\right)\right| \text{ в экваториальной плоскости,} \qquad (6.21)$$

$$F^{г}(\theta,\alpha=\pi/2)=\cos(\theta)\cdot\left|\sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\cos\theta\right)\right| \text{ в меридиональной плоскости} \qquad (6.22)$$



а) б) в)

Рис. 6.11 Множители земли для разного вида вибраторов

а - множитель земли для вертикального диполя $F_3^в(\gamma,\ \alpha - любое\ \gamma)$

б - диаграмма направленности вертикального диполя, $F^в(\gamma,\ \alpha - любое)$

в - диаграмма направленности горизонтального диполя. $F^г(\gamma, \alpha = \pi/2)$

На рис. 6.11 изображены зависимости множителя земли и диаграммы направленности в вертикальной плоскости для вертикального и горизонтального диполей для случая $h = \lambda/2$. Для удобства построения вместо угла θ использовался угол возвышения $\gamma = 90^0 - \theta,$ отсчитываемый от поверхности земли.

Диаграммы направленности обоих диполей в горизонтальной плоскости будут такими же, как при отсутствии земли, т.е. для вертикального диполя – окружность, для горизонтального – «восьмерка», такая же как на рис. 6.8б для $E_\theta(\theta)$. Это следует из того, что множитель земли не зависит от угла α.

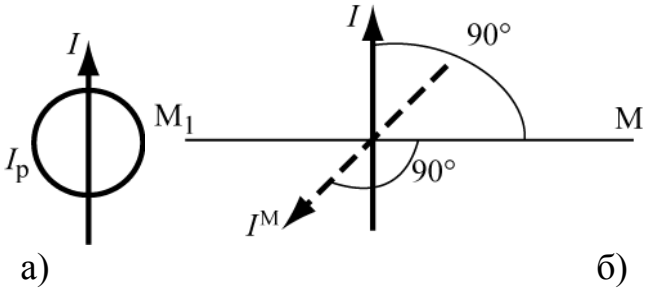
Задача №8

Для радиолюбительского вида спорта «охота на лис» применяются направленные антенны в виде диполя Герца и рамочной антенны, расположенные в одной плоскости, как показано на рисунке 6.13а.

Определить соотношение между амплитудами тока в диполе и рамке, при котором диаграмма направленности будет иметь направление нулевого излучения, если l - длина диполя S –, площадь рамки, f – частота токов в диполе и рамке.

Решение:

Известно, что рамка с током при ее малых размерах (по сравнению с длиной волны) по своим свойствам аналогична магнитному диполю Герца, перпендикулярному ее плоскости (рис.6.13б)



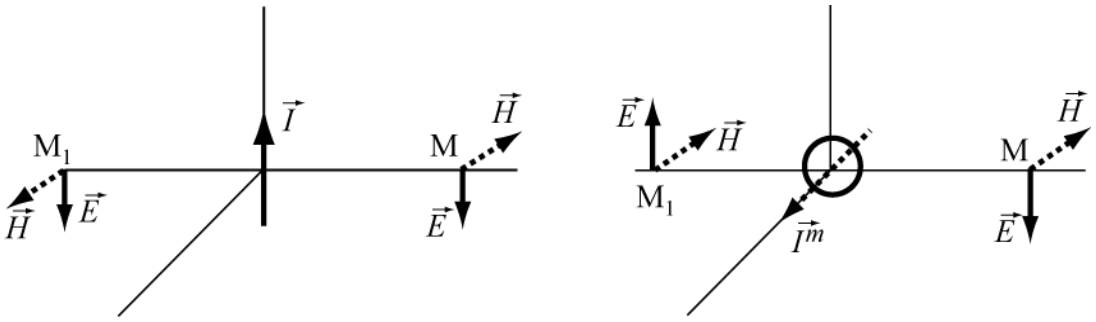
а) б)

Рис. 6.13 Рамка с током

Таким образом, данная конструкция представляет собой взаимно ортогональные электрический и магнитный диполи Герца и при определенных соотношениях между токами диполя и рамки может иметь направление нулевого излучения, как элемент Гюйгенса.

Рассмотрим поля $E\ и\ H$ от диполя (рис. 6.14а) и рамки (рис. 6.14б) в симметричных относительно начала координат точках $M\ и\ M_1$.

Векторы $\vec{H}$ от диполя (рис. 6.14а) направлены в противоположные стороны, поскольку ориентированы по касательной к силовой линии магнитного поля в виде окружности с центром в начале координат. Направления векторов $\vec{E}$ определяется через векторы Пойнтинга в этих точках, которые направлены от диполя. Для рамки в противоположные стороны направлены векторы $\vec{E}$, как касательные к силовой линии электрического поля в виде окружности, а направления векторов $\vec{H}$ определяются через векторы Пойнтинга. Для выбранных направлений токов I и $I^м$ поля от диполя и рамки в точке M складываются, а в точке M_1 - вычитаются.



а) б)

Рис 6.14 Поля E и H от диполя и рамки

Приравняем комплексные амплитуды полей, созданных диполем (6.4) и рамкой (6.9) в точках M и M_1 в дальней зоне. При этом нужно учесть, что формулы (6.4) и (6.9) определяют поля в разных системах координат, связанных с направлениями осей диполя и рамки. Направление на точки M и M_1 соответствует значению $\theta = 90^0$ для обоих диполей.

Подставляя в обе формулы $\theta = 90^0$ и приравнивая комплексные амплитуды векторов E получим

$$i\frac{kIlZ_c}{4\pi r}e^{-ikr} = \frac{I_p k^2 SZ_c}{4\pi r}e^{-ikr} \text{ или } iIl = I_p kS.$$

При выполнении этого условия поля в точке M будут складываться, а в точке M_1 - взаимно компенсироваться, так что диаграмма направленности будет иметь форму кардиоиды (рис.6.7). Мнимая единица **«i»,** присутствующая в этом условии, означает необходимый сдвиг фаз токов на 90^0.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

1.На расстоянии 15 *км* амплитуда напряженности электрического поля диполя Герца равна $10^{-4}\,В/м$. Определить мощность, излучаемую диполем, если его длина составляет $0{,}1\lambda_0$.

Ответ: $P_\Sigma = 2{,}5\cdot 10^{-2}$ Вт

2. Диполь Герца длиной $1м$ возбуждается на частоте $10\ МГц$ током с амплитудой $1А$. Определить амплитуды напряженности электрического и магнитного полей в экваториальной плоскости вибратора на расстоянии 1000м от него.

Ответ: $H = 1,67 \cdot 10^{-5}\ А/м$, $E = 6,28 \cdot 10^{-3}\ В/м.$

3. Как изменится результат предыдущей задачи для частоты $10\ кГц$?

Ответ: $H = 7,94 \cdot 10^{-5}\ А/м$, $E = 1,43 \cdot 10^{-4}\ В/м.$

4. Найти сопротивление излучения элементарного электрического диполя Герца при $l = 3см,\ \lambda_0 = 3м$. Определить мощность, излучения, если амплитуда тока в излучателе $1А$.

Ответ: $0,079\ Ом$. $39\ мВт$.

5. При расчете экранов для электромагнитного поля широко используется понятие волнового сопротивления среды для ближней зоны электрического и магнитного диполей Герца, которое определяется как отношение поперечных к направлению распространения составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Получите формулы для этих сопротивлений. О чем свидетельствует мнимый характер и зависимость от расстояния этих сопротивлений?

Ответ: $W_E = \dfrac{i}{kr};\ W_H = ikr$.

6. Найти составляющие поля диполя Герца длиной $10\ см$ в экваториальной плоскости на расстоянии $2м$, если частота колебаний составляет $30\ МГц$. Ток в диполе $0,72\ А$.

Ответ: $H_\alpha = 1,5 \cdot 10^{-6}\ А/м,\quad E_\theta = 0.6 \cdot 10^{-4}\ В/м$

7. Определить мощность, излучаемую на отрезке длиной $1\ м$ двухпроводной линии электропередачи, если по ней протекает ток с амплитудой $10\ А$. Расстояние между проводами $0.3м$.

Указание: рассматривать отрезок линии как рамку с током.

Ответ: $P_\Sigma = 1.1 \cdot 10^{-22}$ Вт

8.Рамочный излучатель диаметром $0,5м$ возбуждается током $0,3\ А$ на частоте $25\ МГц$. Найти амплитуду напряженности магнитного поля в плоскости рамки на расстоянии $10\ км$ и излучаемую мощность.

Ответ: $P = 2.61 \cdot 10^{-3}\ Вт, H = 1.3 \cdot 10^{-7}\ А/м$.

9. Найти составляющие поля электрического диполя Герца длиной $5\ см$ в экваториальной плоскости на расстоянии $10км$, если частота колебаний составляет $300\ МГц$. Амплитуда тока в излучателе $10А$.

Ответ: $H_\alpha = 0,25 \cdot 10^{-3}\ А/м,\quad E_\theta = 9,42 \cdot 10^{-3}\ В/м$

10. В направлении максимального излучения на расстоянии $10км$ от электрического диполя Герца амплитуда напряженности магнитного поля равна $H = 10^{-4}\ А/м$. Определить величину мощности излучения диполя в свободное пространство, если его длина составляет $0,1\lambda_0$??

Ответ: $P = 15,78\ Вт$

11. В круглой рамке диаметром $220 см$ течет ток $3А$. Вычислить напряженность магнитного поля рамки в направлении максимального излучения на расстоянии 100 м, если длина волны составляет 10 м.

Ответ: $H = 3 \cdot 10^{-2}\ А/м$

12. В замкнутой цепи, площадь которой составляет $3м^2$, течет ток с частотой $50\ Гц$ и амплитудой $10А$. Определить мощность, теряемую цепью на излучение.

Ответ: $P_{\Sigma} = 1,08 \cdot 10^{-20}\ Вт$

13.Определить направления максимумов и построить качественно диаграмму направленности в вертикальной плоскости горизонтального диполя Герца расположенного на высоте 1.5λ над идеально проводящей землей.

Ответ: $\theta = 33.55^0,\ 60^0,\ 80.4^0.$

14. Площадь некоторой плоской цепи переменного тока составляет $0.2\lambda^2$. Определить ее сопротивление излучения.

Ответ: $R_{\Sigma} = 12.47$ Ом

15. Излучатель в виде открытого конца прямоугольного волновода приближенно можно рассматривать как элемент Гюйгенса. Определить напряженность электрического поля на расстоянии 100м в направлении максимального излучения. Амплитуда напряженности поля на раскрыве волновода $E_S = 10^{-3} В/м$, площадь раскрыва волновода $2 \cdot 10^{-3} м^2$ рабочая частота 3 ГГц.

Ответ: $E = 2 \cdot 10^{-7} В/м.$

16. Элементарный щелевой излучатель (ширина щели $2мм$, длина $20мм$, рабочая частота $0,1ГГц$ создает в направлении максимального излучения на расстоянии $1000\ м$ плотность потока энергии $10^{-6} мВт/м^2$. Найти напряженность электрического поля между краями щели.

Ответ: 650,5 В/м

17. Вычислить среднюю во времени плотность потока энергии в поле элементарного электрического излучателя в вакууме на расстоянии $1000\ м$, если его длина $0,01\lambda$ а амплитуда тока $10А$. Найти излучаемую диполем мощность.

Ответ: $3,42 \cdot 10^{-7} Вт/м^2;\ 3,94\ Вт$

18. Элементарный щелевой излучатель при частоте 10^6 Гц создает в направлении максимального излучения на расстоянии $10м$ поток энергии плотностью $10^{-5} мВт/м^2$. Найти напряженность электрического поля между краями щели, если её длина $10м$ а ширина $1мм$.

Ответ: $8,24 \cdot 10^3$ В/м.

19. Элементарный магнитный излучатель представляет виток диаметром 1м, возбуждается током с амплитудой $10А$ на частоте $10МГц$. определить мощность и сопротивление излучения диполя в вакууме.

Ответ: $0,22$ *Ома*; 11 *Вт* ; 11 *Вт*. .

20. Найти длину элементарного электрического вибратора Герца, необходимую для создания в вакууме на расстоянии 1000м в направлении максимального излучения напряженности электрического поля с амплитудой 0,1 В/м, если рабочая частота 200 МГц, а амплитуда тока 1А.

Ответ: $0,79$*м* .

21. В отличие от задачи №5 раздела 5.2 диполь расположен в центре рамки перпендикулярно ее плоскости. Определить диаграмму направленности такой антенны и соотношение между токами диполя и рамки, при котором поляризация поля в плоскости рамки будет круговая.

Ответ: Диаграмма направленности такая же как у диполя. $I \cdot l = I_p \cdot kS$.

22. Построить диаграммы направленности горизонтального диполя Герца над идеально проводящей землей в вертикальной плоскости при $h = 2\lambda$. Сколько лепестков имеет эта диаграмма направленности в диапазоне углов θ *от* 0 *до* 90 градусов?

Ответ: четыре лепестка.

23. Амплитуда напряженности магнитного поля на расстоянии 100м от рамки с током в направлении ее максимального излучения составляет 3,6 мкА/м. Определить диаметр рамки, если частота равна 12 МГц, амплитуда тока 9А.

Ответ: 10 см.

24. Как изменится амплитуда магнитного поля диполя Герца в направлении максимального излучения, если расстояние до точки наблюдения увеличится с10 м до 1000 м? Частота волны а)3 МГц, б) 3 кГц.

Ответ: а) уменьшится примерно в 159 раз, б) Уменьшится в 10^4 раз.

25. Получить выражение для множителя земли, если излучатель расположен на высоте $h >> \lambda$ и землю нельзя считать идеально проводящей. Электрические параметры земли (ε, μ, σ), высоту расположения излучателя - h, длину волны – λ и поляризацию излучателя считать заданными.

Указание: В точке отражения падающую волну считать плоской, угол γ отсчитывать от поверхности земли.

Ответ: $F_з(\gamma) = 1 + |R(\gamma)|e^{i\Phi(\gamma)}$, где $\dot{R}(\gamma) = |\dot{R}(\gamma)|e^{i\psi(\gamma)}$ - комплексный коэффициент отражения, определяемый по формулам Френеля (4.26),

$\Phi(\gamma) = \psi(\gamma) - 2kh\sin(\gamma),\ k = 2\pi/\lambda$.

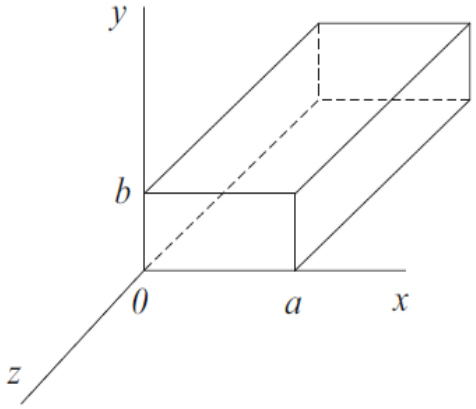
Глава 7. Электромагнитные поля в направляющих системах

В данном разделе рассматриваются задачи по темам:

- Электромагнитные волны в волноводах различных типов;
- Параметры распространяющейся волны;
- Выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей волн типа E и типа H;
- Структура электромагнитного поля;
- Передаваемая мощность и плотность потока мощности в волноводе;
- Затухание волны в волноводе, коэффициент ослабления волны.

7.1. Краткие теоретические сведения

Полая металлическая труба произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны, называется волноводом. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного (рис. 7.1), круглого (рис.7.2) сечений, реже – волноводы более сложного сечения, например $П$-образные и $Н$- образные.



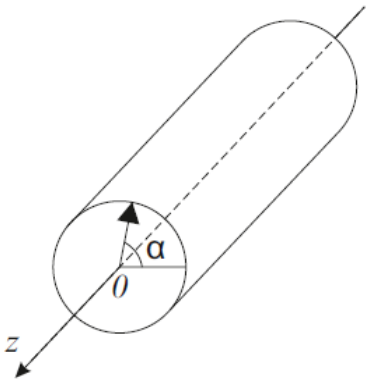


Рис.7.1.Прямоугольный волновод Рис.7.2.Цилиндрический волновод

Волноводы бывают однородные, когда форма поперечного сечения и параметры заполняющей среды постоянны вдоль координаты распространения волны. В неоднородных волноводах присутствует изменение формы поперечного сечения и изменение заполняющей среды (элементы - детали волноводного тракта).

В волноводах могут при определенных условиях распространяться волны электрического типа $(mun - E)$, у которых компоненты $H_z = 0$, а $E_z \neq 0$ (направление оси *z* совпадает с продольной осью волновода), и волны магнитного типа $(mun - H)$, у которых $E_z = 0$, а $H_z \neq 0$.

Из уравнений Максвелла получают инвариантные (справедливые для любой системы координат) соотношения, позволяющие определять

поперечные составляющие векторов полей через продольные для любого типа волны и любого волновода:

$$\gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = -i\beta \cdot grad_{\perp} \dot{E}_z + i\omega\mu \cdot [\vec{z}^0 \cdot grad_{\perp} \dot{H}_z], \quad (7.1)$$

$$\gamma_{\perp}^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = -i\beta \cdot grad_{\perp} \dot{H}_z - i\omega\varepsilon [\vec{z}^0 \cdot grad_{\perp} \dot{E}_z], \quad (7.2)$$

где $\vec{E}_{\perp} = \vec{x}^0 E_X + \vec{y}^0 E_y$, $\vec{H}_{\perp} = \vec{x}^0 H_X + \vec{y}^0 H_y$ *и* $grad_{\perp} = d\vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y}$ -для прямоугольного волновода;

$\vec{E}_{\perp} = \vec{r}^0 E_r + \vec{\alpha}^0 E_{\alpha}$, $\vec{H}_{\perp} = \vec{r}^0 H_r + \vec{\alpha}^0 H_{\alpha}$ *и* $\text{grad}_{\perp} = \vec{r}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha}$ -для случая круглого волновода;

$\gamma_{\perp}^2 = (\xi)^2 + (\eta)^2 = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$ - поперечное волновое число, аналогично $(\xi), (\eta)$ - волновые числа вдоль одной поперечной координаты .

Основные параметры волн в волноводах следующие

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{â}} = \frac{k}{K_d}$ - постоянная распространения волны в волноводе; (7.3)

$k = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}{\lambda_0}$ - волновое число в среде, заполняющей волновод; (7.4)

$K_d = \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{êð}}\right)^2}$ коэффициент дисперсии, (7.5)

где λ_0 - длина волны в свободном пространстве;

$\lambda_{кр}$ - критическая длина волны, определяется размерами и формой поперечного сечения волновода, а также типом волны E_{mn}, H_{mn}. Например, для прямоугольного волновода критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (7.6)$$

Основным (низшим) типом волны считается тот, у которого наибольшая критическая длина волны - $\lambda_{кр}$,

Основной тип волны в волноводе распространяется при условии

$$\lambda_{кр\ низшего\ типа} \succ \lambda_{кр\ высшего\ типа}, \quad (7.7)$$

Таблица 7.1. Параметры волны в любом волноводе:

Длина волны в волноводе	Фазовая скорость	Групповая скорость	Характеристическое сопротивление

$\lambda_в = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r} K_d}$ (7.8)	$V_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} K_d}$ (7.9)	$V_{гр} = \frac{c \cdot K_d}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ (7.10)	$Z_H = \frac{W_0}{K_d}$ (7.11) $Z_E = W_0 \cdot K_d$ (7.12) $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ (7.13)
	где c - скорость света		

Средняя мощность, переносимая волной любого типа в любом волноводе, определяется интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода

$$P_{ср} = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}\{\vec{z}^0 \cdot [\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}^*]\} dS \,. \qquad (7.14)$$

Коэффициент ослабления волны α равен сумме коэффициентов ослабления в металлических стенках $\alpha_і$ и диэлектрике, заполняющем волновод $\alpha_д$, т.е. $\alpha = \alpha_і + \alpha_д$. Потери в металле определяются в общем виде выражением

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S \cdot \int_l \left|\dot{H}_\tau\right|^2 dl}{\int_S \mathrm{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}^*] d\vec{S}}, \qquad (7.15)$$

где $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}$ - поверхностное сопротивление металла, $\dot{H}_\tau$ - составляющая магнитного поля, тангенциальная к поверхности стенок волновода.

Потери в диэлектрике определяются с помощью выражения

$$\alpha_д = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot tg\Delta_\varepsilon}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \cdot \qquad (7.16)$$

После получения из уравнений Гельмгольца выражений продольных компонент конкретного типа волны и подстановки в уравнения (7.1) и (7.2), удовлетворения граничным условиям (нуль тангенциальных составляющих вектора электрического поля на стенках), получают выражения для всех составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей.

7.1.1. Волноводы прямоугольного сечения

Волны типа E_{mn}

$$\dot{E}_x = -i\frac{\beta \pi m}{\gamma_\perp{}^2 a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_y = -i\frac{\beta\pi m}{\gamma_\perp{}^2 b}\cdot E_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z} \qquad (7.17)$$

$$\dot{E}_z = E_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_x = i\omega\varepsilon\frac{\pi m}{\gamma_\perp{}^2 b}\cdot E_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_y = -i\omega\varepsilon\frac{\pi m}{\gamma_\perp{}^2 a}\cdot E_0\cdot cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

Низшей волной электрического типа в прямоугольном волноводе является волна $\dot{E}_{11}$, картина поля которой изображена на рис. 7.3

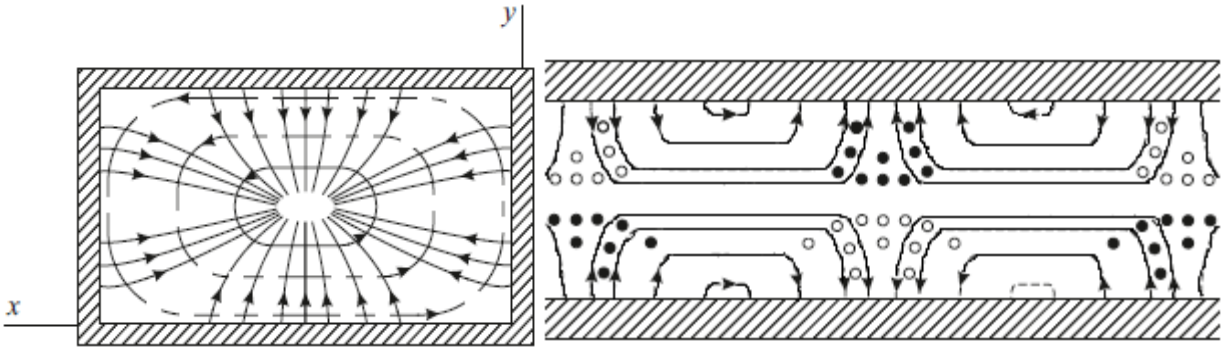


Рис.7.3. Картина распределения полей в волноводе на волне типа E_{11}

Волны типа H_{mn}

$$\dot{E}_x = i\omega\mu\frac{\pi m}{\gamma_\perp{}^2 b}\cdot H_0\cdot\cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_y = -i\omega\mu\frac{\pi m}{\gamma_\perp{}^2 a}\cdot H_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_z = 0$$

$$\dot{H}_x = i\frac{\beta\pi m}{\gamma_\perp{}^2 a}\cdot H_0\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z} \qquad (7.18)$$

$$\dot{H}_y = i\frac{\beta\pi m}{\gamma_\perp{}^2 b}\cdot H_0\cdot\cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_z = H_0\cos\left(\frac{\pi mx}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi ny}{b}\right)e^{-i\beta z},$$

где $\gamma_\perp^2 = \left(\frac{\pi\cdot m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\cdot n}{b}\right)^2 = (\frac{2\pi}{\lambda_{кр}})^2$ - поперечное волновое число; (7.19)

m, n – целые положительные числа;

a, b поперечные размеры широкой и узкой стенок волновода соответственно;

критическая длина волны прямоугольного волновода $\lambda_{кр}$ равна (7.6);

E_0, H_0 - амплитуды волны, определяются передаваемой мощностью.

Основной волной в прямоугольном волноводе при $a > b$ является волна H_{10} (рис. 7.4), ее критическая длина волны максимальна, и согласно (7.19), равна

$$\lambda_{кр H_{10}} = 2a \qquad (7.20)$$

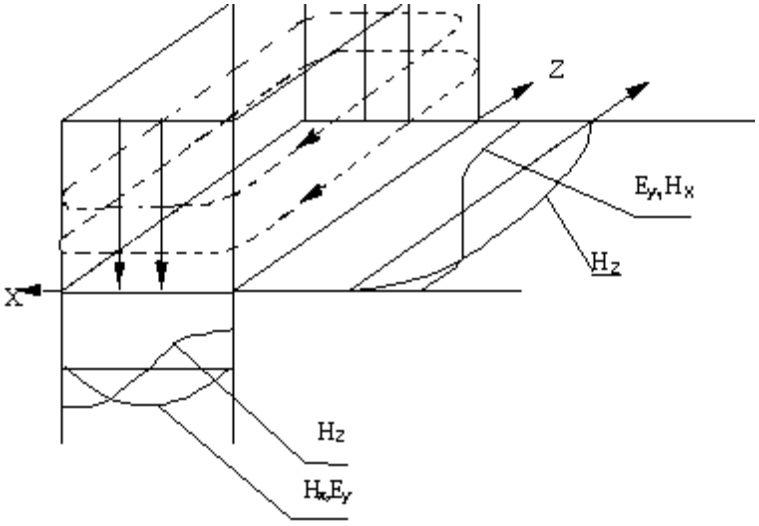


Рис.7.4. Структура поля волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе.

Ближайшими высшими типами являются волны H_{20}, H_{01}, H_{11}, картина силовых линий которых приведена на рис. 7.5

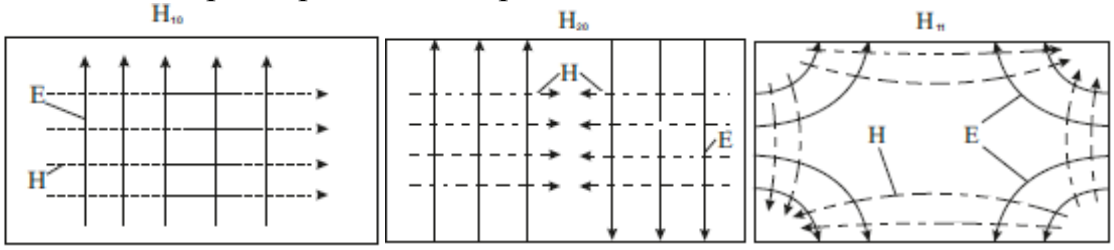


Рис.7.5.Картина векторных линий высших типов волн H_{20}, H_{01}, H_{11} в поперечном сечении.

Передача энергии осуществляется всегда на основном типе волны, пока выполняется условие (7.7), другие типы волн в волноводе не возбуждаются.

Средняя мощность (7.14), переносимая волной H_{10} в прямоугольном волноводе определяется из соотношения

$$P_{ср H_{10}} = \frac{abE_0^2}{4Z_H} \qquad (7.21)$$

Для волны H_{10} коэффициент затухания в прямоугольном медном волноводе рассчитывается по формуле

$$\alpha_m = \frac{R_s\left[\varepsilon_r + \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \frac{2b}{a}\right]}{W_0 \cdot b \cdot \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, [\frac{Hn}{м}]; или .. \alpha_m = \frac{0{,}104 \cdot \left[\varepsilon_r + \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \frac{2b}{a}\right]}{b \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}, [\frac{дб}{м}]. \quad (7.22)$$

7.1.2. Волноводы круглого сечения

Для волноводов круглого сечения (рис. 7.2), работающих на волнах типа H_{mn}, критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}} \quad (7.23)$$

где μ_{mn} -n корень производной функции Бесселя $J_m'(z) = 0$, a – радиус волновода. Для волн типа E_{mn} критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}} \quad (7.24)$$

где $\nu_{mn} - n$ – й корень функции Бесселя $J_m(z) = 0$. Значение корней μ_{mn} и ν_{mn} приведены в таблице 7.2.

Критическая длина волны $\lambda_{кр}$ в круглом волноводе максимальная у волны типа H_{11}

$$\lambda_{кр H_{11}} = 3.41a, \quad (7.25)$$

а ближайшим к ней типом волны является E_{01}, для которого

$$\lambda_{кр E_{01}} = 2.61a. \quad (7.26)$$

Таблица 7.2. Значения корней ν_{mn} функции Бесселя $J_m(z)$

m	n			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Значения корней μ_{mn} производных функции Бесселя $J_m'(x)$

m	n		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536

2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	1,.403

Выражения для составляющих векторов поля в круглом волноводе имеют вид

волны типа H_{mn}

$$\dot{E}_r = i\frac{\omega\mu}{\gamma_\perp{}^2 r} m \cdot H_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \sin(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_\varphi = i\frac{\omega\mu}{\gamma_\perp}\cdot H_0 \cdot J'_m(\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z} \qquad (7.27)$$

$$\dot{E}_z = 0$$

$$\dot{H}_r = -i\frac{\beta}{\gamma_\perp}\cdot H_0 \cdot J'_m(\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_\varphi = i\frac{\beta m}{\gamma_\perp{}^2 r}\cdot H_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \sin(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

Волны типа E_{mn}

$$\dot{E}_r = -i\frac{\beta}{\gamma_\perp}\cdot E_0 \cdot J'_m(\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z} \qquad (7.28)$$

$$\dot{E}_\varphi = i\frac{\beta m}{\gamma_\perp{}^2 r}\cdot E_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \sin(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{E}_z = E_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_r = -i\frac{\omega\varepsilon}{\gamma_\perp{}^2 r}\cdot m \cdot E_0 \cdot J_m(\gamma_\perp r)\cdot \sin(m\varphi)e^{-i\beta z}$$

$$\dot{H}_\varphi = -i\frac{\omega\varepsilon}{\gamma_\perp}\cdot E_0 \cdot J'_m \cdot (\gamma_\perp r)\cdot \cos(m\varphi)e^{-i\beta z}.$$

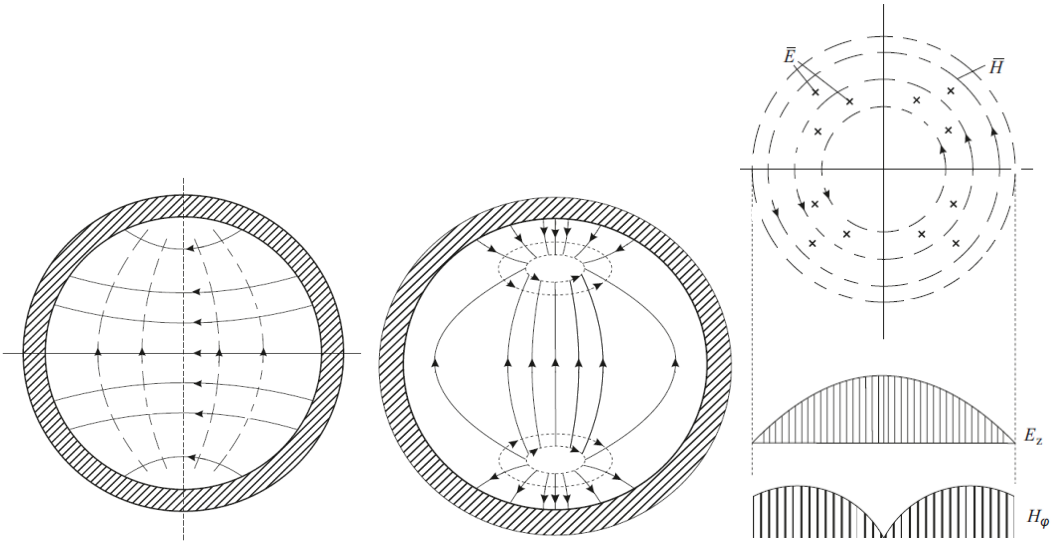
$$H_z = 0$$

Картины силовых линий некоторых типов волн в поперечном сечении приведены на рис. 7.6

Средняя мощность (7.14), переносимая волной H_{11} в круглом волноводе

$$P_{cpH_{11}} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28\cdot Z_H}, \qquad (7.29)$$

в (6.29) величина E_0 - максимальная амплитуда напряженности электрического поля для волны H_{11}.



а) *б)* *в)*

Рис.7.6. Структура полей в цилиндрическом волноводе волн типов: *а)* H_{11}, б) E_{11}, *в)* E_{01}.

Мощность, переносимая волной E_{01} в круглом волноводе, определяется [2]

$$P_{\text{ñð}E_{01}} = \frac{\pi \cdot E^2{}_0 \cdot \beta_{01}^2 \cdot a^4 \cdot J_1(\nu_{01})^2}{2 \cdot Z_E \cdot \nu_{01}^2} \quad \text{или} \quad Ð_{cpE_{01}} = \frac{0{,}778 \cdot E_0^2 \pi \omega \varepsilon \beta}{q_\perp} \tag{7.30}$$

Из соотношений (7.29), (7.30) находится амплитуда E_0 электрического поля соответствующего типа волны. Например, для волны E_{01} она равна

$$E_{0E_{01}} = \sqrt{\frac{2P_{\text{ñð}} \cdot Z_E \cdot \nu_{01}^2}{\pi \cdot \beta_{01}^2 \cdot a^4 \cdot J_1(\nu_{01})^2}} \,. \tag{7.31}$$

Средняя мощность, переносимая волной H_{01} определяется соотношением

$$Ð_{cpH_{01}} = \frac{H_0^2 \pi a^2 Z_H}{4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\hat{e}ð}} \right)^2 \tag{7.32}$$

Постоянные затухания ($\frac{íï}{ì}$) для волн в круглом волноводе [2] имеют вид

$$\alpha_i^{Å_{01}} = \frac{R_S}{a} \frac{1}{W_0} \frac{\lambda_{â}}{\lambda} \,, \tag{7.33а}$$

$$\alpha_i^{Í_{11}} = \frac{R_S}{a} \frac{1}{W_0} \frac{\lambda_{â}}{\lambda} \left[\frac{1}{1.841^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\hat{e}ð}} \right)^2 \right], \tag{7.33б}$$

$$\alpha_{\text{ì}}^{\text{í}\ mn} = \frac{R_S}{a}\frac{1}{W_0}\frac{\lambda_{\text{â}}}{\lambda}\left[\frac{m^2}{\mu_{mn}{}^2 - m^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{êð}}}\right)^2\right]. \qquad (7.33\text{в})$$

Электрические поля любого типа волн в волноводах можно использовать для нагрева, сушки или сублимации диэлектриков, имеющих конечную удельную проводимость σ. Для этого следует поместить тонкий слой диэлектрика, чтобы не изменилось первоначальное поле, в электрическое поле волны волновода и определить мощность тепловых потерь P_T в нем.

$$P_{\text{Ò}} = \int_{V\text{ä}} \sigma \cdot |E|^2 dV \quad [\text{Âò}] \text{ или } P_{\text{Ò}} = \omega\varepsilon_{\text{ä}} \cdot tg\Delta \cdot \int_{V\text{ä}} |E|^2 dV\ , \qquad (7.34)$$

где, например, для цилиндрического волновода $|E| = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2 + E_z^2}$, а для прямоугольного $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$.

Мощность тепловых потерь расходуется на нагрев диэлектрика. Процесс сопровождается повышением температуры диэлектрика и возгонкой влаги. Чтобы нагреть образец весом m *кг* на ΔT градусов (от $T_{\text{н}}$ - начальной до $T_{\text{к}}$- конечной температуры, т.е. $\Delta T = T_{\text{к}} - T_{\text{н}}$) при его удельной теплоемкости $\gamma\left[\frac{Дж}{кг \cdot К}\right]$, необходимо затратить [6] энергии

$$W = 4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T \quad [Дж]. \qquad (7.35)$$

Тепловая энергия связана с СВЧ мощностью и временем $\Delta t = t_k - t_i$ нагрева выражением

$$P_T = \frac{W}{\Delta t} \quad [Bm] \qquad (7.36\text{а})$$

Подставляя (7.36) в (7.36а), получаем соотношение, связывающее параметры диэлектрика с величиной мощности, требующейся для его нагрева

$$P_T = \frac{4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T}{\Delta t} \quad [B\,m] \qquad (7.36\text{б})$$

Можно определить из (6.36,б) температуру или время разогрева, если что-то одно будет известно.

$$\Delta T = \frac{P_T}{4.1868 \cdot m \cdot \gamma}\Delta t \quad [^0C], \ldots или \ldots t = \frac{4.1868 \cdot m \cdot \gamma \cdot \Delta T}{P_T}\ [c]. \qquad (7.37)$$

Коаксиальная линия (рис.7.7) относится к передающей линии, в которой может, с одной стороны, распространяться тип волны Т, а с другой стороны, более сложные волны, имеющие поперечные и продольные составляющие

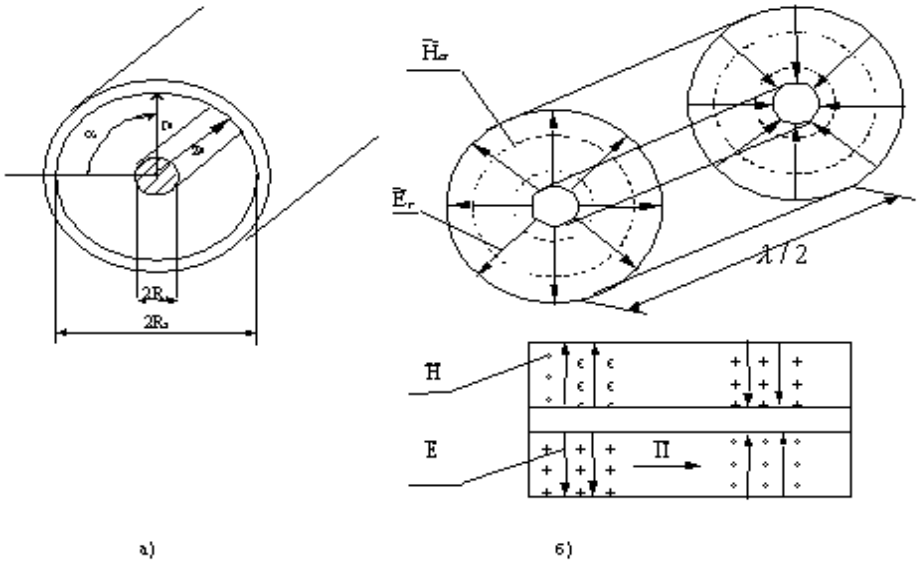


Рис. 7.7 Структура поля бегущей T волны в коаксиальном волноводе

векторов $\overline{\mathrm{E}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$. Для передачи энергии, в основном, применяются коаксиальные линии, по которым распространяются только Т волны. Для этого достаточно выполнить для минимальной длины волны передаваемого диапазона следующее условие

$$\lambda_{\min} \geq \pi(R_2 + R_1) \tag{7.38}$$

В такой линии электромагнитное поле будет представлено двумя компонентами:

$$\mathrm{E}_r = \frac{A}{r} \cdot e^{j(\omega \cdot t - \kappa \cdot z)} = \frac{U}{\ln R_2 / R_1} \cdot \frac{1}{r} e^{j(\omega \cdot t - \kappa \cdot z)},$$

$$\mathrm{H}_\alpha = \frac{A}{r Z_W} \cdot e^{j(\omega \cdot t - \kappa \cdot z)} = \frac{U}{Z_W \cdot \ln R_2 / R_1} \cdot \frac{1}{r} e^{j(\omega \cdot t - \kappa \cdot z)}, \tag{7.39}$$

где $\mathrm{A} = \mathrm{E}_0 \times \mathrm{R}_1$, E_0-напряженность электрического поля у поверхности внутреннего проводника; U - разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками (амплитуда напряжения).

$\mathrm{Z_W}$ - характеристическое сопротивление среды, для воздушного заполнения $\mathrm{Z_W} = 120 \cdot \pi$ Ом;

$\kappa = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_K}$ - фазовая постоянная волны в коаксиальной линии;

λ_K – длина волны в коаксиальной линии. При воздушном заполнении λ_0;

λ_0 – длина волны в свободном пространстве;

$R_1 \leq r \leq R_2$-текущая координата;

$e^{j(\omega \cdot t - k \cdot z)}$ - волновой множитель волны, бегущей вдоль оси z.

На рисунке 7.7б изображена структура поля в коаксиальной линии для бегущей волны типа Т.

Волновое сопротивление коаксиальной линии передачи определяется

$$Z_\alpha = \frac{U}{I} = 60\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} = 138\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \lg\frac{R_2}{R_1}. \qquad (7.40)$$

Переносимая мощность по линии передачи

$$P = \frac{E_{\max}^2 R_1^2}{120}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}, \ Bm \qquad (7.41)$$

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводниках коаксиальной линии передачи, определяется соотношением

$$\alpha_м = \frac{R_{S1}/R_1 + R_{S2}/R_2}{240\pi \ln\frac{R_2}{R_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}}, \ м^{-1}, \qquad (7.42)$$

R_{S1}, R_{S2} - поверхностные сопротивления металла внутреннего и внешнего проводников.

7.2. Примеры решения задач

Задача №1

В прямоугольном волноводе сечением $axb = 50x25\ мм^2$, с воздушным заполнением возбуждаются колебания с частотой $f = 7{,}5 ГГц$.

Определить, какие типы волн могут распространяться в волноводе и их длины волн (7,8).

Решение

Условие распространения волн (7.7) имеет, в нашем случае, вид $\lambda_0 < \lambda_{кр}$,

Согласно (7.19), для прямоугольного волновода

$$\lambda_{кр}^{H_{mn,}E_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}},$$

$m = 0,1,2,\ldots$; $n = 0,1,2,$ – для волн типа $H_{\text{mn,}}$

и $m = 1,2,\ldots$; $n = 1,2,3,\ldots.$ – для волн типа E_{mn}.

Определяя критические длины волн для разных индексов m и n, и проверяя выполнение неравенства, мы получим типы волн, распространяющиеся в волноводе.

Для заданной частоты f, найдем λ_0.

$$\lambda_0 = c / f = 3\times10^{10} / 7{,}5\cdot10^{9} = 4\ см.$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{5})^2 + (\frac{n}{2{,}5})^2}} = \frac{2}{\sqrt{(0{,}2m)^2 + (0{,}4n)^2}} \qquad (7.43)$$

Изменять в (7.43) следует индексы m и n, от малых значений до тех пор, пока неравенство $\lambda_0 < \lambda_{кр}$ перестает иметь место. Заметим, чем меньше индексы m и n, тем больше длины критических волн при неизменных a и b. Данные расчета заносим в таблицу 7.3.

Таблица 7.3

a и b	Условие распространения a и b 4 $см < l_{кртп}$ выполняются?	Для какого типа волны	Длина волны в волноводе
10	Да	H_{10}	$\lambda_B = 4{,}36$см
5,	Да	H_{20}	$\lambda_B = 6{,}66$см
5,0	Да	H_{01}	$\lambda_B = 6{,}66$см
4,47	Да	$H_{11,}E_{11}$	$\lambda_B = 8{,}95$см
	Далее все типы не распространяются		

Вывод: в волноводе, заданного сечения, на частоте 7.5 ГГц могут распространяться типы волн: H_{10} , H_{20}, $H_{01,..}H_{11,}E_{11}$.

Задача №2

Прямоугольный волновод с размерами поперечного сечения $a = 2{,}286\ см$,

$b = 1{,}016\ см$ возбуждается на частоте $f = 15 ГГц$. Определить, какие из распространяющихся типов магнитных волн возбуждаются в волноводе, заполненном воздухом, и их длины волн.

Решение:

Сначала находим длину волны в свободном пространстве:

$\lambda = c/f = 2$ см.

Известно, что для распространяющихся типов волн должно выполняться условие $\lambda/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} < \lambda_{кр}^{mn}$. Критические длины волн в прямоугольном волноводе определяются по формуле:

$$\lambda_{кр}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}.$$

В нашем случае

$$\lambda_{\text{кр}}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{2{,}286}\right)^2 + \left(\frac{n}{1{,}016}\right)^2}} = \frac{4{,}64}{\sqrt{(1{,}016m)^2 + (2{,}286n)^2}}.$$

Результаты вычислений заносим в таблицу:

$(1{,}016m)^2$	$(2{,}286n)^2$	$\lambda_{\text{кр}}$, см
$(1{,}016)^2$	0	4,57
$(2{,}032)^2$	0	2,286
0	$(2{,}286)^2$	2,032
0	$(4{,}57)^2$	1,016

Длины волн в волноводе рассчитываем по формуле

$$\lambda_в = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{кр}^{mn})^2}}.$$

Окончательно, распространяющимися типами волн и их длины волны будут:

H_{10}: $\lambda_{\text{кр}}^{10} = 4{,}57$ см, $\lambda_{\text{в}} = 2{,}22$ см;

H_{20}: $\lambda_{\text{кр}}^{20} = 2{,}286$ см, $\lambda_{\text{в}} = 4{,}13$ см;

H_{01}: $\lambda_{\text{кр}}^{01} = 2{,}032$ см, $\lambda_{\text{в}} = 11{,}31$ см.

Задача №3.

В прямоугольном волноводе сечением $axb = 23x10\ мм^2$, с воздушным заполнением возбуждаются колебания с частотой $f = 12\ ГГц$.

Определить, какие типы волн могут распространяться в волноводе и их параметры.

Решение

Условие распространения волн (6.7) имеет, в нашем случае, вид $\lambda_0 < \lambda_{кр}$.

Согласно (7.19), для прямоугольного волновода

$$\lambda_{кр}^{H_{mn},E_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}},$$

$m = 0,1,2,\ldots;\ n = 0,1,2,\ldots$ – для волн типа $H_{mn,}$

и $m = 1,2,\ldots;\ n = 1,2,3,\ldots.$ – для волн типа E_{mn}.

Определяя критические длины волн для разных индексов $m\,и\,n$, и проверяя выполнение неравенства, мы получим типы волн, распространяющиеся в волноводе.

Для заданной частоты f, найдем λ_0.

$$\lambda_0 = c / f = 3 \cdot 10^{10} / 12 \cdot 10^9 = 2,5\ см.$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{2,3})^2 + (\frac{n}{1,0})^2}} = \frac{4,6}{\sqrt{m^2 + (2,3n)^2}} \text{ см.} \qquad (7.44)$$

Изменять в (7.46) следует индексы $m\,и\,n$, от малых значений до тех пор, пока неравенство $\lambda_0 < \lambda_{кр}$ перестает иметь место. Заметим, чем меньше индексы $m\,и\,n$, тем больше длины критических волн при неизменных $a\,и\,b$. Данные расчета заносим в таблицу 7.4.

Таблица 7.4

$\lambda_{кр}[см]$	Условие распространения $2,5\ см < l_{кртп}$ выполняются ?	Для какого типа волны
4,6	Да	H_{10}
2,3	нет	H_{20}
2,0	Нет	H_{01}
1,84	Нет	$H_{11,}E_{11}$
1,016	Далее все типы волн не распространяются	Вывод: на частоте 12ГГц в волноводе $axb = 23x10\ мм^2$ может распространяться только волна H_{10}.

Определим для распространяющегося типа волны основные параметры: длину волны в волноводе (λ_B), фазовую $\left(v_ф\right)$ и групповую $\left(v_{гр}\right)$ скорости и волновое сопротивление $\left(Z_B\right)$, используя формулы (7.8 − 7.13), но сначала найдем коэффициенты дисперсии K_{dH10} (6.5), которым определяются основные параметры волны. Для распространяющихся волн коэффициенты дисперсии равны

$$K_d = \sqrt{1-(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}})^2 \frac{1}{\varepsilon_r}},$$

Результаты расчетов параметров внесем в таблицу 7.5.

Таблица 7.5

Тип волны	K_d	λ_B (см)	$V_ф$, м/с	$V_{гр}$, м/с	$Z_{B,}$ Ом	$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_B}, \frac{рад}{см}$
H_{10}	0,513	4,87	$5{,}85 \cdot 10^8$	$1{,}63 \cdot 10^8$	737	1,29

Что происходит с параметрами волн в случае $\lambda > \lambda_{кр}$?

Коэффициент дисперсии оказывается – мнимым: $K_d = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = i\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1} = i\xi$. Так как здесь $\xi = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 - 1}$ - чисто вещественная величина, длина волны в волноводе $\lambda_в = \frac{\lambda}{i\xi}$ - величина мнимая, фазовая постоянная распространения приобретает вид $\beta = \frac{2\pi i\xi}{\lambda}$; и влияет на фазовый член $e^{i\beta z} = e^{i(\frac{2\pi i\xi}{\lambda})z} = e^{-\frac{2\pi z\xi}{\lambda}}$, который становится действительной величиной.

Вывод: в случае $\lambda > \lambda_{кр}$ понятие длина волны, фазовая и групповая скорости теряют смысл, волновой процесс отсутствует, идет затухание поля по экспоненте.

Задача №4.

Определить длину волны (в волноводе), характеристическое сопротивление в круглом воздушном волноводе диаметром $2a = 25{,}4мм$ при распространении в нем на частоте 10 ГГц волны типа E_{01}.

Решение:

Критическая длина волны E_{01} определяется по формуле $\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}$,

где a — радиус волновода; $\nu_{mn} - n$-й корень уравнения Бесселя $J_m(x) = 0$. Значения корней ν_{mn} функций Бесселя $J_m(x)$ приведены в таблице 7.2.

Тогда $\lambda_{кр} = 1{,}31 \cdot 2a = 1{,}31 \cdot 25{,}4 = 33{,}3мм.$

Длина волны в волноводе равна

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{3{,}33}\right)^2}} = 6{,}91 \text{ см.}$$

Характеристическое сопротивление волновода находится по формуле

$$Z_c^{E_{mn}} = \frac{W_0}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon\mu - (\lambda/\lambda_{кр}^{mn})^2},$$

где $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом – волновое (характеристическое) сопротивление свободного пространства.

Проводим вычисления

$$z_c^{E_{01}} = 120\pi\sqrt{1-(\lambda/2{,}62a)^2} = 377\cdot 0{,}435 \cong 164 \text{ Ом.}$$

Задача №5.

Центрирование внутреннего проводника воздушного коаксиального волновода осуществляют с помощью диэлектрических шайб (рис. 7.8).

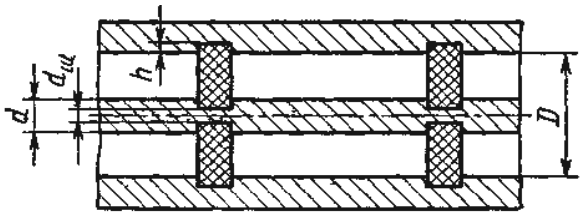


Рис.7.8. Коаксиальный волновод

Рассчитать диаметр D волновода и глубину h кольцевых проточек в нем, исходя из условия отсутствия отражений. Волновое сопротивление линии $W_{\text{в}} =$ 70 Ом, диаметр внутреннего проводника $d = 4{,}5мм$, диаметр отверстия в шайбе $d_{\text{ш}} = 3{,}0$ мм, относительная диэлектрическая проницаемость материала шайбы $\varepsilon =$ 2,3. Потерями пренебречь.

Решение

Воздушную коаксиальную линию с шайбами приближенно можно рассматривать как последовательное соединение отрезков двух регулярных линий, одна из которых является воздушной коаксиальной линией с размерами d и D, а другая – коаксиальной линией, полностью заполненной диэлектриком и имеющей размеры $d_{\text{ш}}$ и $(D+2h)$. Мощность из одной линии в другую может быть передана без отражения, если их волновые сопротивления равны: $W_B = W_{ВД}$, где $W_{ВД}$ – волновое сопротивление линии, заполненной диэлектриком. Из формулы для волнового сопротивления коаксиального тракта в [12] имеем

$$W_B = 60\ln\left(\frac{D}{4{,}5}\right) = 70 \text{ Ом, } W_{ВД} = 60\sqrt{\frac{1}{2{,}3}}\ln\left(\frac{D+2h}{3{,}0}\right).$$

Из первой формулы следует D = 14,45 мм. Приравнивая затем оба этих выражения, получаем уравнение для нахождения h.

$$70 = 39{,}56 \ln\left(\frac{14{,}45 + 2h}{3{,}0}\right).$$

Величина паза равна h = 1,58 мм. Полученное решение является приближенным, кроме сказанного выше, ещё и потому, что не учитывает локальные возмущения поля из-за скачков диаметров проводников.

Задача №6

Амплитудное значение продольной составляющей напряженности электрического поля в центре волновода с размером сечения $a*b = 5*2{,}5$ $см^2$ составляет 10^5 *В/м.* Частота сигнала – $7{,}5 \cdot 10^9$ *Гц*. Тип волны E_{11}. Диэлектрик - воздух.

Определить амплитуды составляющих электрического и магнитного полей.

Решение

Запишем компоненты поля (7.17) волны E_{11} , чтобы видеть, что необходимо подсчитать для нахождения амплитуд.

$$\begin{aligned}
\dot{E}_Z &= E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\
\dot{E}_X &= -i\frac{E_0\beta}{\gamma_\perp^2}\left(\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b}\right) \\
\dot{E}_y &= -i\frac{E_0\beta}{\gamma_\perp^2}\left(\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right) \\
H_x &= i\frac{\omega\varepsilon E_0}{\gamma_{\perp mn}^2}\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\,cos\frac{\pi y}{b} \\
H_y &= -i\frac{\omega\varepsilon E_0}{\gamma_{\perp mn}^2}\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\,\sin\frac{\pi y}{b} \\
\dot{H}_z &= 0
\end{aligned} \qquad (7.44)$$

Величина постоянной распространения волны в волноводе на типе E_{11}с учетом результатов таблицы 7.3, полученных при одинаковых исходных данных задачи №1, равна

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2} = \frac{6{,}28}{4}\sqrt{1-(4/4{,}47)^2} = 0.7\ 1/см$$

Величина поперечного волнового числа определяется (см. таблицу 7.3) соотношением

$$\gamma_\perp^2 = \kappa^2 - \beta^2 = (2\pi/\lambda_{кр})^2 = (6{,}28/4{,}47)^2 = 1{,}974\ см^{-1}$$

Определяем амплитуды составляющих электрического поля

$$\dot{E}_X = -\frac{E_0 \beta}{\gamma_\perp^2}\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi X}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} = -\frac{10^7 \cdot 0{,}7 \cdot 3{,}14}{1{,}974 \cdot 5}\cos\frac{\pi X}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b} = 2{,}23\cdot 10^4 \cos\frac{\pi X}{a}\cdot\sin\frac{\pi y}{b},\ B/м$$

$$\dot{E}_y = -\frac{E_0 \beta}{\gamma_\perp^2}\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} = -\frac{10^7 \cdot 0{,}7 \cdot 3{,}14}{1{,}974 \cdot 2{,}5}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} = 4{,}47\cdot 10^4 \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b},\ B/м$$

Амплитуды составляющих магнитного поля можно определить, применяя выражения характеристического сопротивления для волн типа Е (7.12)

$$Z_E = W_0 \cdot K_d \text{, где } K_d = \sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}$$

$$Z_E = 120\pi \cdot \sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2} = 377\sqrt{1-(0{,}04/0{,}0447)^2} = 168{,}5\ Ом$$

$$H_x = E_y/Z_E = 4{,}47\cdot 10^4/168{,}5 \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} = 265\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\ A/м \quad ,$$

$$H_y = E_X/Z_E = 2{,}23\cdot 10^4/168{,}5 \cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = 132{,}5\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\ A/м$$

Задача №7

Амплитудное значение продольной составляющей напряженности электрического поля в центре сечения волновода $a*b = 5*2{,}5\ см^2$ составляет $10^5\ В/м$. Частота сигнала – $7{,}5\cdot 10^9\ Гц$. Тип волны E_{11}. Диэлектрик - воздух.

Определить амплитуду поверхностной плотности продольных токов на широких стенках волновода (потерями в стенках пренебречь)

Решение

По стенкам волновода текут продольные токи, т.к. магнитное поле имеет только поперечные составляющие на волне типа E_{11}. Применяя закон полного тока, граничные условия и правило буравчика, получим амплитудные значения поверхностной плотности продольных токов. Берем полученные расчетные данные предыдущей задачи

$$j_Z = H_{X(при\ y=0,b)} = 265\sin\pi X/a\ ,A/м$$

Величина тока на внутренней поверхности верхней стенки

$$I_Z = \int_0^a j_Z \cdot dx = (j_Z)_{X=\frac{a}{2}}\int_0^a \sin\pi X/a\, dx = \frac{2a}{\pi}(j_Z)_{X=\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot 0{,}05}{\pi}265 = 8{,}45,\ A$$

Такой же величины ток протекает по поверхности нижней стенки

Задача №8

Амплитудное значение продольной составляющей напряженности электрического поля в центре сечения волновода $a\cdot b = 5\cdot 2{,}5\ см^2$ составляет $10^5\ В/м$. Частота сигнала – $7{,}5\cdot 10^9\ Гц$. Тип волны E_{11}. Диэлектрик - воздух. Определить плотность тока смещения в диэлектрике волновода.

Решение

Рассчитаем продольную составляющую плотности тока смещения, обусловленную продольной составляющей напряженности электрического поля (7.17)

$$j_{смZ} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_Z}{\partial t} = \omega\varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 7{,}5\cdot 10^9}{36\cdot 3{,}14\cdot 10^9}10^5 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} =$$

$$= 4{,}17\cdot 10^4 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad A/м^2$$

Интегрируя $j_{смZ}$ по всему поперечному сечению волновода, получим полную величину продольного тока смещения

$$J_{см} = \frac{4ab}{\pi^2}\omega\varepsilon_0 E_0 = \frac{4\cdot 0{,}05\cdot 0{,}025}{9{,}86}4{,}17\cdot 10^4 = 21{,}12\ A$$

.

Эта величина будет равна сумме продольных токов проводимости по стенкам волновода, т.к. токи проводимости замыкают токи смещения.

Задача №9.

Прямоугольный волновод заполнен диэлектриком. На частоте колебаний 10 ГГц и типе волны H_{10}. фазовая скорость оказалась равной 0,5 от скорости света в свободном пространстве. Определить относительную диэлектрическую проницаемость наполнителя ε_r, если сечение волновода $23x10\ мм^2$.

Решение

Воспользуемся соотношением, связывающим продольное волновое число (β) с волновым числом в среде (k_ε) и поперечным волновым числом $(\gamma_\perp)$.

$$\beta = \sqrt{k_0^2\varepsilon_r - \gamma_\perp^2}\ ; \qquad (7.46)$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \frac{\omega}{V_ф}$; $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\gamma_\perp = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$.

Из (7.9) и (7.5) получаем выражение фазовой скорости в волноводе, заполненном диэлектриком $v_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{\lambda кр}\right)^2}} = 0{,}5\cdot c$. Откуда

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda^2 + 4\cdot\lambda_{кр}^2}{\lambda_{кр}^2}. \qquad (7.47)$$

Величины $\lambda_{кр H10} = 2a = 4{,}6$ см. $\lambda = \frac{c}{f} = 3$ см.

Подставляя в (7.47) найденные величины длин волн, получим

$$\varepsilon_r = \frac{9 + 4 \cdot 21{,}16}{21{,}16} = 4{,}425$$

.

Задача № 10

Определить затухание волны типа H_{10} в отрезке прямоугольного медного волновода сечением 23 х 10 мм^2, длиной 2 м на частоте 8 ГГц.

Решение

Потери(L) в линии в $(\partial Б)$ длиной l определяются соотношением

$$L = 10\lg\frac{P_{вх}}{P_{вых}} = 20\lg\frac{|E_{вх}|}{|E_{вых}|}, \quad {}^{\partial Б} \tag{7.48}$$

где $|E_{вх}|$ - величина напряженности поля вначале отрезка $(l = 0)$,

$|E_{вых}|$ - величина напряженности поля на выходе отрезка $(l = 2м)$.

Так как

$$|E_{вых}| = |E_{вх}| e^{-\alpha l}. \tag{7.49}$$

Из (7.48) с учетом (7.49) получим

$$L = 20lg(e^{\alpha l}) = 8{,}68 \cdot \alpha l, \tag{7.50}$$

согласно (7.22), коэффициент потерь $(Нп/м)$ в стенках волновода равен

$$\alpha_{H10} = \frac{R_S \cdot \left[1 + \frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]}{W_0 \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\lambda_0 / 2a\right)^2}}, \tag{7.51}$$

параметры медных стенок $\mu_{cT} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\sigma_{Cu} = 5{,}8 \cdot 10^7$ См/м.

Определяем величины R_S и a_m^{H10}

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega \mu_{cT}}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5{,}8 \cdot 10^7}} = 2{,}33 \cdot 10^{-2}$$

, Ом.

$$\alpha_m^{H_{10}} = \frac{2{,}33 \cdot 10^{-2}\left[1 + \frac{20}{23}\left(\frac{3{,}75}{4{,}6}\right)^2\right]}{377 \cdot 0{,}01\sqrt{1 - \left(\frac{3{,}75}{4{,}6}\right)^2}} = 0{,}017$$

Нп/м.

Ответ: Потери мощности в волноводе длиной 2 м, согласно (7.50), составят $L = 8{,}68 \cdot 0{,}017 \cdot 2 = 0{,}3$ *дБ.*

Задача № 11

Определить размеры волновода, по которому на частоте $f = 2450 МГц$ должна поступать мощность от генератора к камере СВЧ печи на основном типе волны. Определить максимальную величину поля E в волноводе, если генератор СВЧ печи выдает мощность $1 кВт$.

Решение

Размеры сечения волновода *axb* следует определить для распространения основной волны H_{10}. Условия распространения этой волны запишутся в виде

$$\lambda_{кр H_{20}} < \lambda_0 < \lambda_{кр H_{10}} \text{ и } \lambda_{кр H_{10}} < \lambda_0 \qquad (7.53)$$

Учитывая (7.20) , определим $\lambda_{кр H_{10}} = 2a,\ \lambda_{кр H_{20}} = a,\ \lambda_{кр H_{01}} = 2b$.

Тогда условия (7.53) будут выполняться, если размеры удовлетворить неравенствам $\frac{\lambda_0}{2} < a < \lambda; a < b < \frac{\lambda_0}{2}$.

Возьмем, например, $a = 0{,}7\lambda; b = 0{,}4\lambda$. А так как длина волны генератора $\lambda = \frac{c}{f} = 12{,}245 см$, то получаются размеры волновода $a = 8{,}57 см;\ b = 4{,}9 см.$

Амплитуда поля E в волноводе на волне типа H_{10} определяется из)

$$E_m = 2\frac{\sqrt{\frac{P}{ab}}\cdot(120\pi)^{1/2}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right]^{1/4}} = 2\frac{\sqrt{\frac{1000}{8{,}57\cdot 4{,}9\cdot 10^{-4}}}\cdot 19{,}42}{\left[1-\left(\frac{12{,}245}{2\cdot 8{,}57}\right)^2\right]^{1/4}} = 11281{,}9\frac{A}{м} \qquad (7.52)$$

Замечание: величина поля E не превышает пробивного напряжения 30 кВ/см, при необходимости высота волновода *в* может быть уменьшена.

7.3. Задачи для самостоятельного решения

1 Определить мощность, переносимую волной типа H_{10}, в стандартном прямоугольном волноводе, имеющем поперечное сечение **2,3 х 1, см^2** если амплитудное значение напряженности электрического поля $E_{max} =$= **10^5 В / м.** Во всем ли диапазоне допустимых для распространения частот можно сохранить эту мощность без пробоя?

Ответ: В зависимости от частоты переносимая мощность меняется от 1 кВт ($при\ \lambda_{min}$) до 0,5 кВт ($при \lambda_{max}$).

2 Определите с какой частоты начинается запредельный режим (прекращается распространение волны) в волноводе прямоугольного сечения $72\ x\ 34\ мм^2$ для основного типа волны.

Ответ: при $f < 2{,}083\ ГГц$.

3 В каком отношении находятся волновые сопротивления волн E_{11} и H_{11} прямоугольного волновода при длине волны генератора, равной половине критической длины волны ($\lambda_0 = \frac{\lambda_{кр}}{2}$)?

Ответ: $W_{E_{11}} = \frac{3}{4} W_{H_{11}}$

4 В прямоугольном волноводе максимальное значение поперечной составляющей тока проводимости для волны H_{10} равно $j_{0x} = 1$ А/м.

Чему будет равняться напряженность продольной составляющей магнитного поля в точках $x = a/4;\ y = b/2$ *и* $x = 3a/4; y = b/2$?

Ответ: $H_z = 0{,}705$ А/м.

5 Отношение волновых сопротивлений волны E_{11} и H_{11} равно 2. На какой длине волны, выраженной в критических длинах волн, это возможно?

Ответ: $\lambda = \sqrt{0{,}5}\lambda кр$.

6 Величина напряженности электрического поля волны H_{10} в точке $x = a/2;\ y = b/2$ равна $E_y = 20$ В/м. Определить максимальное значение плотности тока смещения в волноводе, если рабочая частота колебаний $f = 9$ ГГц, волновод заполнен воздухом.

Ответ: $j_{max} = 14{,}145$ А/м.

7 В волноводе сечением 23 х 10 мм^2 распространяется волна типа H_{10}, на частоте 10 ГГц. Как изменится волновое сопротивление волновода, если длину волны увеличить на 25%.

Ответ: $\frac{z_{W2}}{z_{W1}} = 1{,}31$.

8 На частоте $f = 10$ ГГц затухание волны в волноводе, поперечное сечение которого 23 х 10 мм^2 по справочнику равно $0{,}25 дБ/м$. На каком расстоянии вдоль направления распространения волны величина поля E уменьшится на 20%?

Ответ: $l = 19{,}2 см$.

9 Напряженность электрического поля волны H_{10} в точке $x = a/3,\ y = 0$ равна $E_y = 18$ В/м. Чему равна плотность поверхностного заряда в средине (*при* $a/2$) широкой стенки волновода, заполненного воздухом?

Ответ: $\xi = 0{,}184 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2.

10 Чему равна относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей волновод, если длина волны λ_B в волноводе на основном типе волны равна длине волны в свободном пространстве?

Ответ: $\varepsilon_{\text{г}} = 1 + (\lambda / \lambda_{кр})^2$.

11 Средняя плотность потока мощности в точке $x = a/3,\ y = b/2$ для волны H_{10} равна $p_{ср} = 500$ *Вт/м*^{2}. Волновое сопротивление волновода $Z_H = 500$ *Ом*. Найти максимальную напряженность магнитного поля поперечной составляющей.

Ответ: $H_{xm} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ А/м.

12 Изобразите для прямоугольного волновода структуру поля волн типа H_{20}, E_{11} ,H_{11} и ответьте, в каких точках поперечного сечения напряженность электрического поля всегда равна нолю?

Ответ: при волне типа H_{20} на боковых стенках и на линии раздела стенки a пополам; при волне типа H_{11} - в углах и центральном сечении; при волне типа E_{11} – в углах волновода.

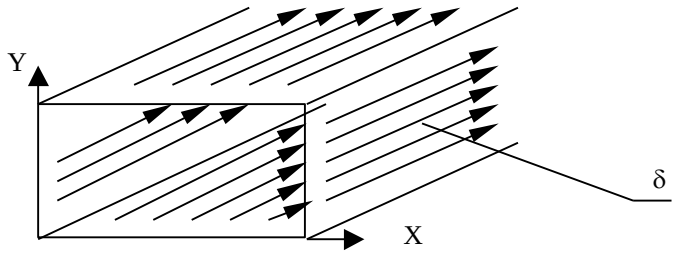
13 В прямоугольном волноводе распространяется волна типа H_{10}. Найти ширину волновода, если известно, что длина волны в волноводе при $\lambda_0 = 20$*см* в четыре раза короче длины волны в волноводе при $\lambda_0 = 10$*см* .

Ответ: 11,18 см.

14Амплитудное значение напряженности электрического поля при волне типа H_{10} в прямоугольном волноводе сечением $50x25$ *мм*^{2} составляет $10^5 B/м$ на частоте $7{,}5 \cdot 10^9$ *ГГц*. Определить величину амплитуды тока смещения.

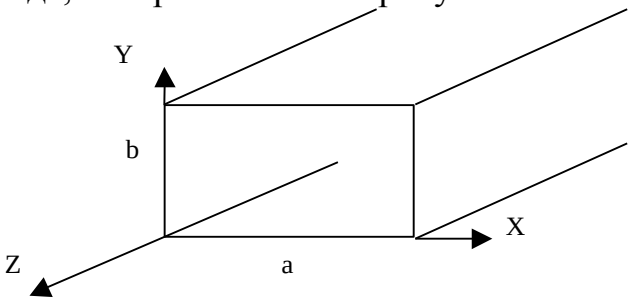
Ответ: 9,22 А.

15 Картина токов в момент $\text{t} - \text{const}$ в стенках прямоугольного волновода изображена ниже на рисунке. Для какого типа волны она справедлива? Какие компоненты тока имеются у этого типа волны?



Ответ: E_{11}; $j_Z(x,z)\Big|_{y=0;\,b}$; $j_Z(y,z)\Big|_{x=0;\,a}$ -продольный ток проводимости в во всех стенках.

16.Укажите набор правильных граничных условий для случая прямоугольного волновода, изображенного на рисунке.



Ответ: $\mathrm{H}_x\big|_{x=0,a} = 0; \mathrm{H}_y\big|_{y=0,b} = 0$

17 Какие типы волн наиболее широко используются для передачи энергии в прямоугольном, круглом и коаксиальном волноводах?

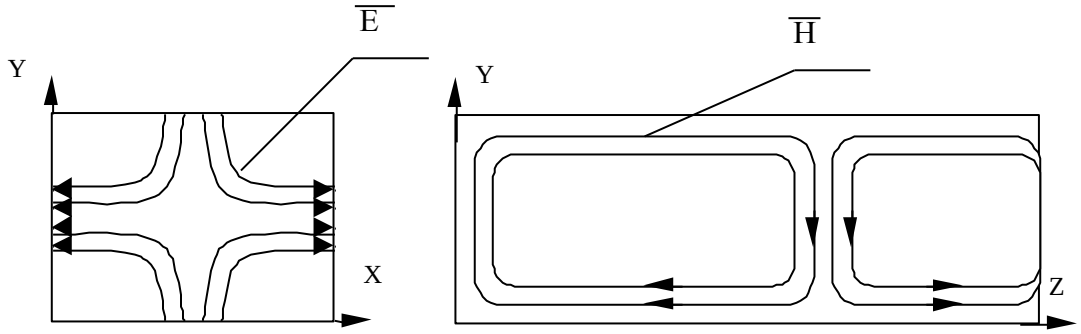
Ответ:

В круглом- H_{11}, в прямоугольном - H_{10}, в коаксиальном - Т

18 Определить размеры прямоугольного волновода a*b для работы в диапазоне частот от 3,2 ГГц до 4,0 ГГц на основном типе волны. Принять b=0.5*a

Ответ: $84 \times 42 мм^2$

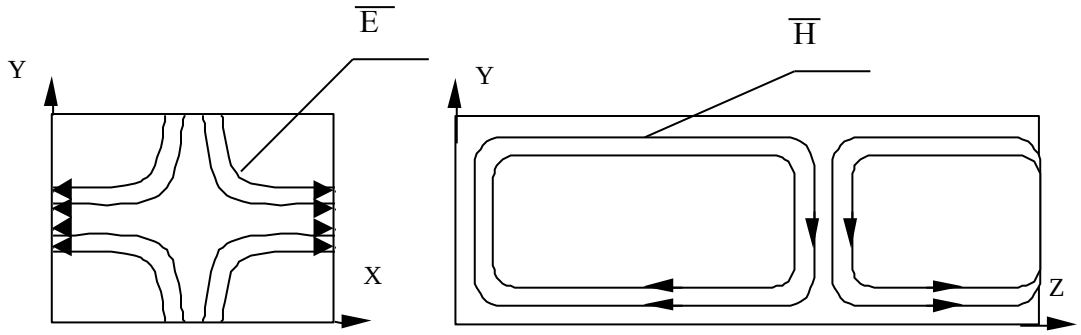
19 Для какого типа волны представлена структура поля в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода?



Ответ: H_{11}

20. Для нарисованной структуры поля в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода запишите функциональные зависимости

напряженности электрического поля от осей координат.

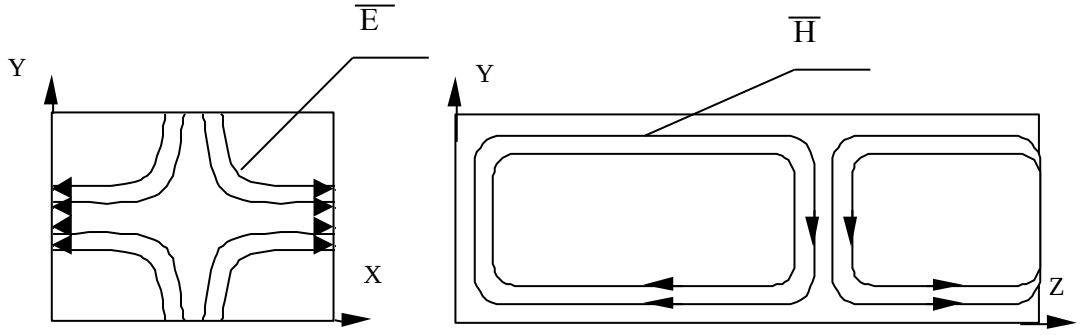


Ответ

$$E_x = E_{0x} cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_B})$$

$$E_y = E_{0y} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_B})$$

21 Для нарисованной структуры поля в поперечном и продольном сечениях прямоугольного волновода запишите функциональные зависимости напряженности магнитного поля от осей координат.



Ответ

$$H_x = H_{0x} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_B})$$

$$H_y = H_{0y} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_B})$$

$$H_z = H_{0z} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \sin(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda_B})$$

22 Как установить, что в прямоугольном волноводе ($a * b$) на частоте f может распространяться волна типа H_{20} ?

Ответ: Оценить выполнение неравенства $f > f_{кр H_{20}}$

23 Для каких типов волн в волноводе следует определять связь между поперечными компонентами полей (характеристическое сопротивление) по следующей формуле

$$\frac{\mathrm{E}_{\perp}}{\mathrm{H}_{\perp}} = W_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_r - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{пр}}\right)^2} \quad ?$$

Ответ: $\mathrm{E}_{волн}$

24. В волноводе $a*b = 10*5см^2$ напряженность электрического поля в максимуме волны основного типа равна $\mathrm{E}_m = 10^3 В/м$. Определите амплитуду поперечного и продольного магнитного поля, а также передаваемую мощность при длине волны в свободном пространстве 51 см.

Ответ: $\mathrm{H}_{xm} = 1{,}75 А/м, \mathrm{H}_{zm} = 1{,}99 А/м, P = 2{,}194 Вт$

25.Если известно расположение силовых линий электрического поля волны (например, волны типа H_{11}), то как можно изобразить линий магнитного поля на поперечном сечении волновода?

Ответ: линии полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно ортогональны.

Глава 8. Электромагнитные поля в объемных резонаторах

В данном разделе рассматриваются задачи по темам:

1. Электромагнитные волны в резонаторах различных типов;
2. Параметры резонаторов; Расчет геометрии;
3. Выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей колебаний типа E_{mnp} и типа H_{mnp};
4. Структура электромагнитного поля в резонаторах;
5. Объёмная плотность энергий на разных типах;
6. Мощность потерь в стенках резонатора.

8.1. Краткие теоретические сведения

В радиотехнике сверхвысоких частот в качестве колебательных систем используются замкнутые металлические объемы, называемые объемными резонаторами. Замкнутый объем образуется помещением металлических пластин на торцах отрезка передающей линии. Практическое применение находят прямоугольный (призматический), цилиндрический, коаксиальный, тороидальный объемные резонаторы (рис. 8.1). В первых двух видах существуют колебания типа E, для которых $\mathrm{H_Z} = 0$, и колебания типа H, у которых $E_Z = 0$. Посредством решения уравнений Гельмгольца для составляющих E_Z и $\mathrm{H_Z}$, при использовании соотношений (7.1), (7.2) и граничных условий для электрических полей получают выражения для составляющих поля в резонаторе, а также выражения для резонансной частоты.

В прямоугольном резонаторе (рис. 8.1*а*) собственные колебания будем классифицировать, используя поля E- и H-волн волновода. Поскольку каждому из типов волн волновода E_{mn} или H_{mn} соответствует бесконечный ряд собственных колебаний, различающихся числами p, будем говорить о типах собственных колебаний E_{mnp} или H_{mnp}.

Запишем выражения соответствующих полей:

E-колебания:

$$\dot{E}_{mz}^{mnp} = \bar{z}_0 E_0^{mnp} \sin\frac{m\pi X}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{L}$$

$$\dot{E}_{mx}^{mnp} = -\bar{x}_0 \frac{E_0^{mnp}}{\gamma_{\perp mn}^2}\frac{p\pi}{L}\left(\frac{m\pi}{a}\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}\right)\sin\frac{\pi pz}{L}\Bigg]$$

$$\dot{E}_{my}^{mnp} = \bar{y}_0 \frac{E_0^{mnp}}{\gamma_{\perp mn}^2}\frac{p\pi}{L}\left(\frac{n\pi}{b}\sin\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{p\pi z}{L}\Bigg] \qquad (8.1)$$

$$\dot{\bar{H}}_m^{mnp} = jE_0^{mnp}\frac{\omega_{mnp}\varepsilon}{\gamma_{\perp mn}^2}\left(\bar{x}_0\frac{n\pi}{b}\sin\frac{m\pi}{a}x\,cos\frac{n\pi Y}{b} - \bar{y}_0\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\frac{p\pi z}{L},$$

где E_0^{mnp} – амплитудный коэффициент, зависит от величины введенной в резонатор мощности.

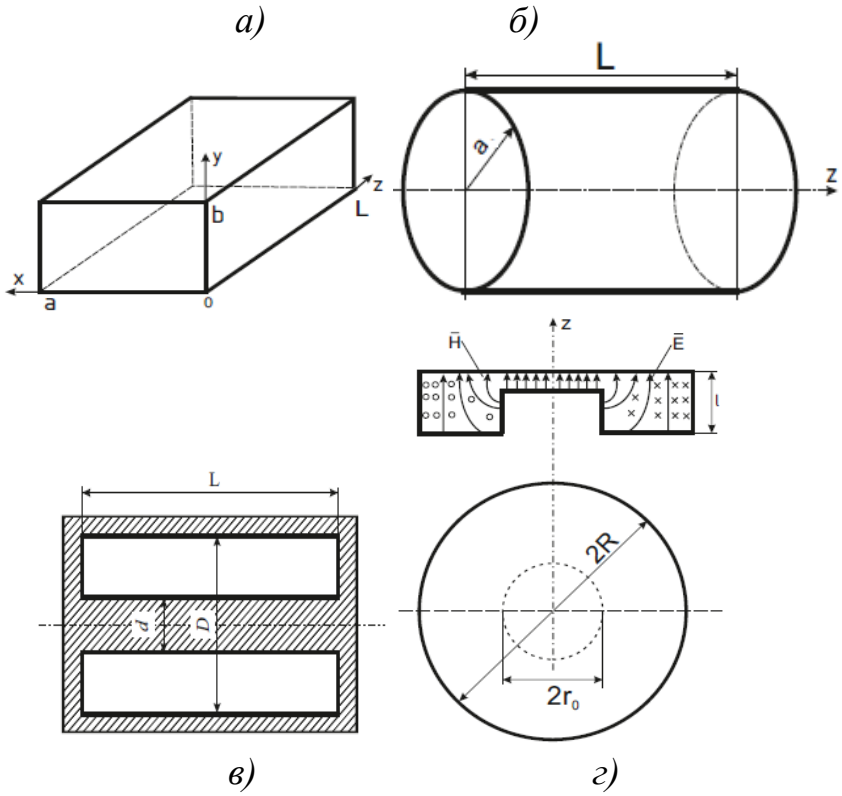


Рис.8.1 Типы резонаторов: *а)* прямоугольный; *б)* цилиндрский; *в)* коаксиальный; *г*) тороидальный

Индексы m, n, p могут принимать следующие значения: $m,n=1,2,3$ и $p=0,1,2,3$.

H-колебания:

$$\dot{\bar{E}}_m=-jH_0^{mnp}\frac{\omega_{mnp}\mu}{\gamma_{\perp mn}^2}\left(-\bar{x}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}+\bar{y}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\frac{p\pi z}{L},$$

$$\dot{\bar{H}}_m=H_0^{mnp}\left[\bar{z}_0\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{L}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\gamma_{\perp mn}^2}\frac{p\pi}{L}\left(\bar{x}_0\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}-\bar{y}_0\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\frac{p\pi z}{L}\right]. \quad (8.2)$$

$$\gamma_{\perp mn}^2=\left(\frac{\pi\cdot m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi\cdot n}{b}\right)^2$$

Для H -колебаний $m,n=(0),1,2,...$ и $p=0,1,2,\ldots$; нуль в скобках означает, что m и n не могут одновременно быть равными нулю, только поочередно.

Прежде чем анализировать собственные колебания прямоугольного резонатора, отметим, что записанное представление полей (8.1), (8.2) не является единственно возможным. Можно тремя различными способами выбирать продольную ось z, т.е. получать резонатор, мысленно

перегораживая три разных ортогонально ориентированных прямоугольных волновода, как показано на рис.8.2.а. Мы получим три различных классификации собственных колебаний.

Резонансная частота прямоугольного резонатора колебаний типа H_{mnp} и типа E_{mnp}, определяется выражением [1]

$$f_{0\,mnp} = \frac{C}{2\cdot\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{в}\right)^2+\left(\frac{p}{L}\right)^2}, \qquad (8.3)$$

где $a, в, L$ - геометрические размеры резонатора (рис.8.1)

ε_r и μ_r - относительные значения электрической и магнитной проницаемостей среды, заполняющей резонатор; в нашем случае для воздуха $\varepsilon_r=\mu_r=1$, m,n,p – целые числа; m – характеризует количество вариаций (полупериодов тригонометрической функции $\sin mx, \cos ny$) по оси x; n – по оси y. При расчёте резонансной частоты f_0 следует помнить, что для колебаний H_{mnp} индекс $p=1,2,3,\ldots$ (вариации по оси z), а для колебаний E_{mnp} возможны значения

$$p=0,1,2\ldots.$$

Возвращаясь к выбору индексов m,n,p в формулах (8.1) и (8.2), видим, что любая комбинация трех целых чисел, одно из которых может быть даже нулем, определяет один или несколько типов колебаний резонатора. Разные собственные колебания (в частности, E_{mnp} или H_{mnp}), имеющие одинаковые собственные частоты (8.3), называются вырожденными. Очевидно, что различные линейные комбинации полей такого рода также представляют собой собственные колебания.

Минимальная собственная частота вида колебания в резонаторе без потерь определяет его низший тип. Чтобы найти ее значение при заданных размерах a, b, и L, надо минимизировать выражение для ω_{mnp} (8.3) соответствующим выбором чисел m,n,p. Одно из них, которое отвечает наименьшему размеру резонатора, берется равным нулю, а каждое значение оставшихся величин – единице. Соответствующий тип колебаний резонатора называется основным или низшим им могут быть в зависимости от соотношения размеров E_{110}, H_{101}, H_{011}.

Структура поля низшего вида колебаний показана на рис.8.2,б при трех вариантах выбора системы координат. Каждый тип колебания характеризуется собственной структурой поля и собственной резонансной частотой f_0.

Под структурой электромагнитного поля понимают распределение и форму электрических и магнитных линий в резонаторе в

фиксированный момент времени. Структуру полей можно построить, пользуясь выражениями для компонент (8.1), (8.2) векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, полученных и путем решений уравнений Максвелла в прямоугольной системе координат для замкнутого призматического резонатора.

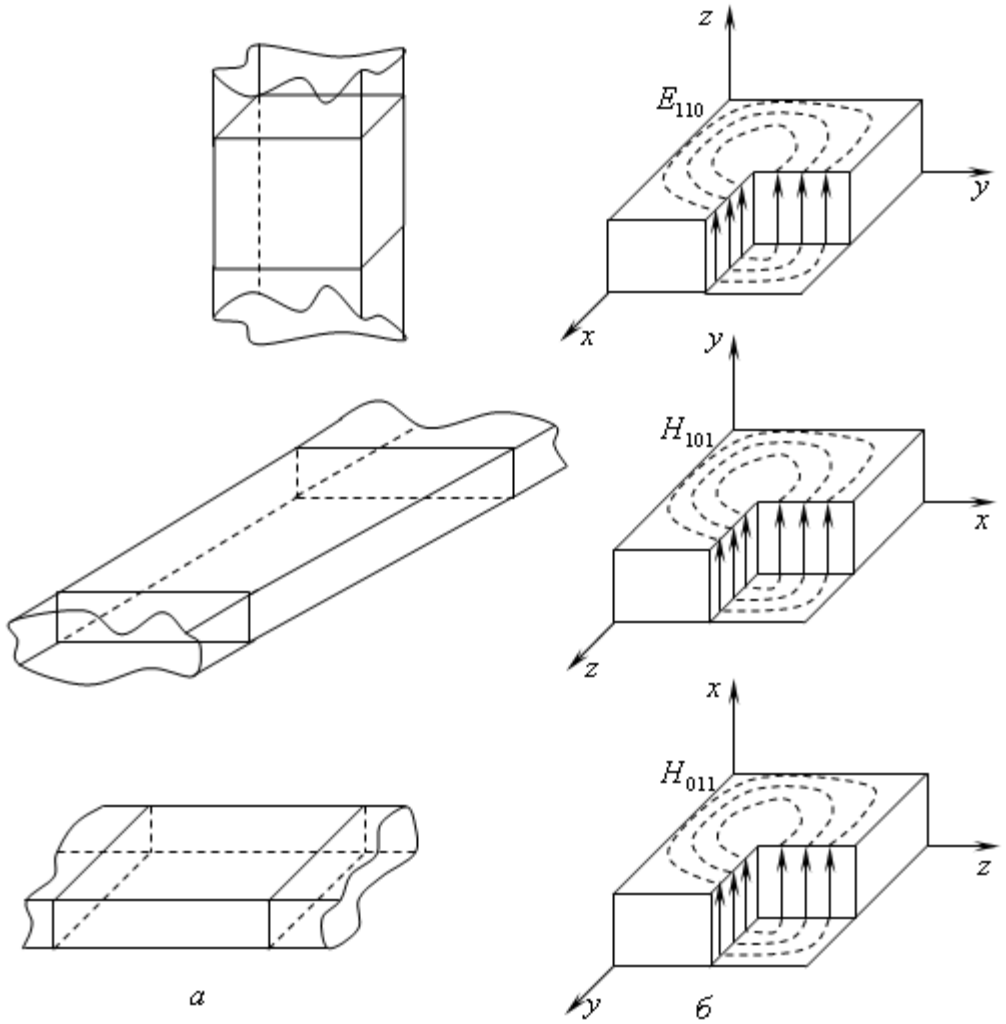


Рис. 8.2. Три различных классификации собственных колебаний прямоугольного резонатора в зависимости от выбора продольной оси z

Как следует из уравнений (8.1) и (8.2) каждая компонента поля в резонаторе зависит от трех координат x, y, z. Поэтому структура поля представляется объемной картиной (рис. 8.3.). Чтобы правильно изобразить ее в пространстве, необходимо учесть, что на рисунках зависимость компоненты от параллельной ей координаты отображается изменением ее длины вдоль этой координаты, (например, $H_z \sim \sin\frac{\pi}{L}z$ на рис.8.4.б отображено изменением длины силовой линии при изменении координаты z и т.д.). Зависимость компоненты от координаты, ортогональной ей, отображается густотой силовых линий (см. ту же компоненту $H_z \sim \cos m\frac{\pi}{a}x$, густота силовых линий которой изменяется вдоль x по закону соответствующей функции).

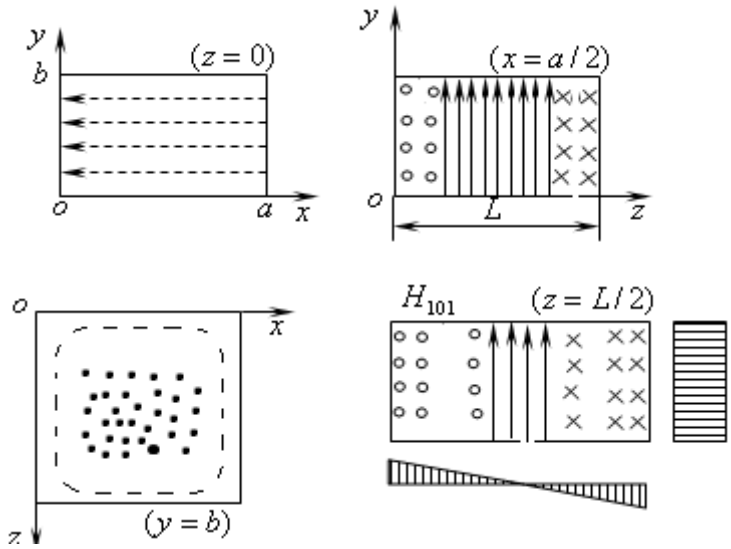


Рис.8.3. Структура поля H_{101} в прямоугольном резонаторе

Одна и та же структура поля соответствует разным обозначениям полей:, E_{110}, H_{101}, H_{011}. если изменять направления осей системы координат (рис.8.2). Нулевой индекс при этом будет соответствовать той оси (x, y или Z), вдоль которой поле однородно.

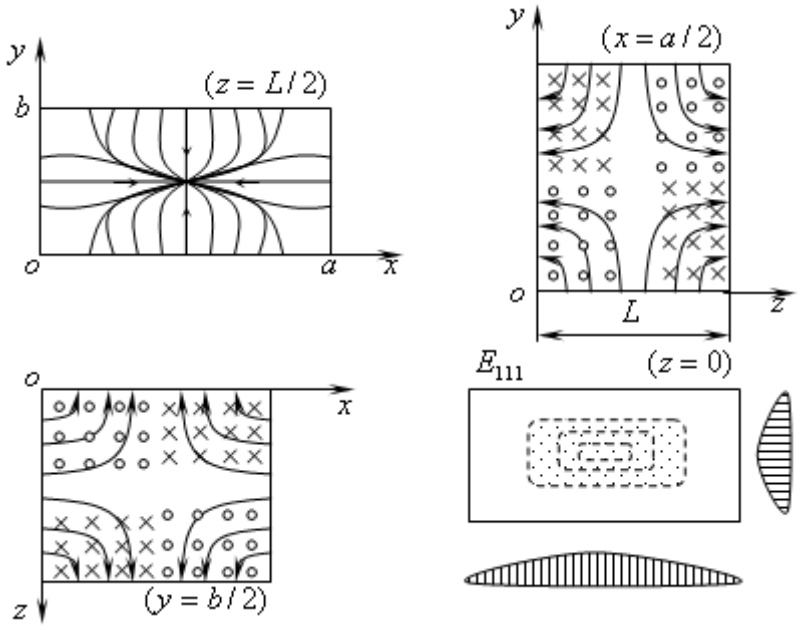


Рис.8.4. Структура поля E_{111} в прямоугольном резонаторе

Различие картин силовых электрических и магнитных линий от волноводных состоит в том, что в резонаторе они сдвинуты на $L/4$ (на $T/4$, где T - период колебаний) вдоль оси Z по отношению друг к другу. В резонаторе полные поля $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$ сдвинуты по фазе на 90°.

В объемных резонаторах при одной и той же его геометрии можно возбудить бесконечное количество видов колебаний, имеющих собственную структуру поля и собственную резонансную частоту f_{0mnp}.

Активная резонансная проводимость G (параметр резонатора) это отношение удвоенной мощности потерь в резонаторе к квадрату амплитуды напряжения между выбранными двумя точками внутренней поверхности резонатора

$$G_0 = \frac{2P_{пот.рез.}}{U^2} = \left|\int_1^2 E_l dl\right|^2 = \frac{2P_{пот.рез.}}{\left|\int_1^2 E_l dl\right|^2} \qquad (8.4)$$

Активная проводимость резонатора зависит от переменного напряжения, поэтому непрерывно изменяется при изменении точек отсчета.

Добротность объёмного резонатора для определённого типа колебаний определяют отношением

$$Q_0 = 2\pi \frac{W}{W_n} = 2\pi \frac{W}{P_n T} = \omega \frac{W}{P_n}, \qquad (8.5)$$

где W – запасённая при резонансе внутри резонатора электромагнитная энергия;

$$W = \int_V \varepsilon \frac{E^2}{2} dV = \int_V \mu \frac{H^2}{2} dV, \qquad (8.6)$$

E, H - амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей, V - объем резонатора.

W_n –энергия потерь за время одного периода T, $P_n = TW_n$ – мощность потерь.

Для колебаний типов E_{110}, H_{101}, H_{011} запасённая при резонансе внутри прямоугольного резонатора электромагнитная энергия равна

$$W = \frac{1}{8} \varepsilon E_{\max}^2 \; abL, \qquad (8.7)$$

где $E_{\max}$-максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе.

Различным типам колебаний резонатора соответствуют различные структуры поля, различные значения W и W_n и, следовательно, различные величины добротности.

Собственная добротность прямоугольных резонаторов рассчитывается по формулам, которые для типов колебаний H_{mnp} и E_{mnp} имеют вид:

$$Q_{0H_{mnp}} = \frac{\varpi^2{}_0}{2\delta} \frac{Lab\mu\varepsilon\, q_{mn}^2}{\left[aL\left\{\left(\frac{pm\pi^2}{aL}\right)^2 + q_{mn}^4\right\}^2 + bL\left\{\left(\frac{pn\pi^2}{bL}\right)^2 + q_{mn}^4\right\} + ab\left(\frac{p\pi q_{mn}}{L}\right)^2\right]}, \qquad (8.8a)$$

$$Q_{0E_{mnp}} = \frac{aLв\ q_{mn}^2}{2\delta\left[aL\left\{(\frac{pn}{в})^2\right\}+\left\{вL(\frac{pm}{a})^2\right\}+aвв_{mn}^2\right]}, \qquad (8.8б)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{c}$ -резонансная круговая частота резонатора;

$\delta = 0{,}064\, f_0^{-\frac{1}{2}}$ - глубина проникновения энергии поля в стенки резонатора;

$$q_{mn}^2 = \left(\frac{\pi\cdot m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\cdot n}{b}\right)^2 \text{ или } \gamma_{\perp mn}^2 = \left(\frac{\pi\cdot m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\cdot n}{b}\right)^2 \qquad (8.9)$$

В цилиндрическом резонаторе, длиной L или h, составляющие векторов поля колебаний H_{mnp} и E_{mnp} имеют следующий вид:

– колебания H_{mnp}

$$E_r = \frac{m}{r}A\cdot J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{R}r\right)\sin m\varphi\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \qquad (8.10,а)$$

$$E_\varphi = \frac{\mu_{mn}}{R}A\cdot J_m'\left(\frac{\mu_{mn}}{R}r\right)\cos m\varphi\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \qquad (8.10,б)$$

$$E_z = 0 \qquad (8.10,в)$$

$$H_r = -j\frac{\mu_{mn}}{\omega_0 R}\frac{p\pi}{h}AJ_m'\left(\frac{\mu_{mn}}{R}r\right)\cos m\varphi\cdot\cos\left(\frac{p\pi}{L}Z\right) \qquad (8.10,г)$$

$$H_\varphi = j\frac{p\pi m}{hr\omega_n}AJ_m\left(\frac{\mu_{mn}}{R}r\right)\sin m\varphi\cdot\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (8.10,е)$$

– колебания E_{mnp}

$$E_r = -\frac{\nu_{mn}}{R\omega_0}A\cdot J_m'\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\cos m\varphi\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \qquad (8.11,а)$$

$$E_\varphi = \frac{m}{r\omega_0}\frac{\pi p}{h}A\cdot J_m\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\sin m\varphi\cdot\sin\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \qquad (8.11,б)$$

$$E_z = (\frac{\nu_{mn}}{R})^2\frac{1}{\omega_0}\cdot AJ_m\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\cos m\varphi\cdot\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (8.11,в)$$

$$H_r = -j\frac{h}{r}AJ_m\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\sin m\varphi\cdot\cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \qquad (8.11,г)$$

$$H_\varphi = -\frac{\nu_{mn}}{R\omega_0}A\cdot J_m'\left(\frac{\nu_{mn}}{R}r\right)\cos m\varphi\cdot\cos\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \qquad (8.11,д)$$

$$H_z = 0 \qquad (8.11,e)$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$ число вариаций поля по координате φ;

$n = 1, 2, \ldots$ число вариаций поля по радиусу r;

$p = 0, 1, 2, \ldots$ число вариаций поля по оси z;

A - постоянная, определяемая подаваемой в резонатор мощностью;

$\mu_{mn} - \mathrm{n} - ый$ корень производной функции Бесселя $\mathrm{J}'_{\mathrm{m}}(\mathrm{r})\,m$-го порядка,

$\nu_{mn} - n -$ый корень функции Бесселя $\mathrm{J}_{\mathrm{m}}(\mathrm{r})$ $\mathrm{J}_{\mathrm{m}}(\chi \mathrm{r})\mathrm{m} -$го порядка. Первые значения этих корней приведены в таблице 8.1.

Так каждая компонента поля в резонаторе зависит от трех координат φ, r, z, то структура поля представляется объемной картиной (рис. 8.7.). Чтобы правильно изобразить ее в пространстве, необходимо учесть, что на рисунках зависимость компоненты от параллельной ей координаты отображается изменением ее длины вдоль этой координаты, (например, $E_z \sim \cos\frac{\pi}{h} z$ на рис. 8.7 отображено изменением длины силовой линии при изменении координаты z и т.д.). Зависимость компоненты от координаты, ортогональной ей, отображается густотой силовых линий (см. ту же компоненту $E_z \sim J_0(\frac{\nu_{01}}{R} z)$ густота силовых линий которой изменяется вдоль радиуса r по закону соответствующей функции Бесселя).

Таблица 8.1.Значения корней функции Бесселя

	ν_{mn}			μ_{mn}			
n / m	I	2	3	n / m	I	2	3
0	2,405	5,520	5,135	0	3,832	7,016	10,174
I	3,832	7,016	10,1741	I	I,841	5,335	8,536
2	5,135	8,417	11,620	2	3,052	6,705	9,965

Резонансная частота цилиндрического резонатора определяется выражением

$$f_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left(\frac{p}{2h}\right)^2}, \qquad (8.12)$$

$c = 3 \cdot 10^8$ м /с- скорость света в вакууме;

$\lambda_{кр}$- критическая длина волны для разных типов колебаний в резонаторе:

$$\lambda_{кр}{}^E = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр}{}^H = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}}; \qquad (8.13)$$

$$\lambda_{кр}{}^{E} = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр}{}^{H} = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}}\ ; \tag{8.13}$$

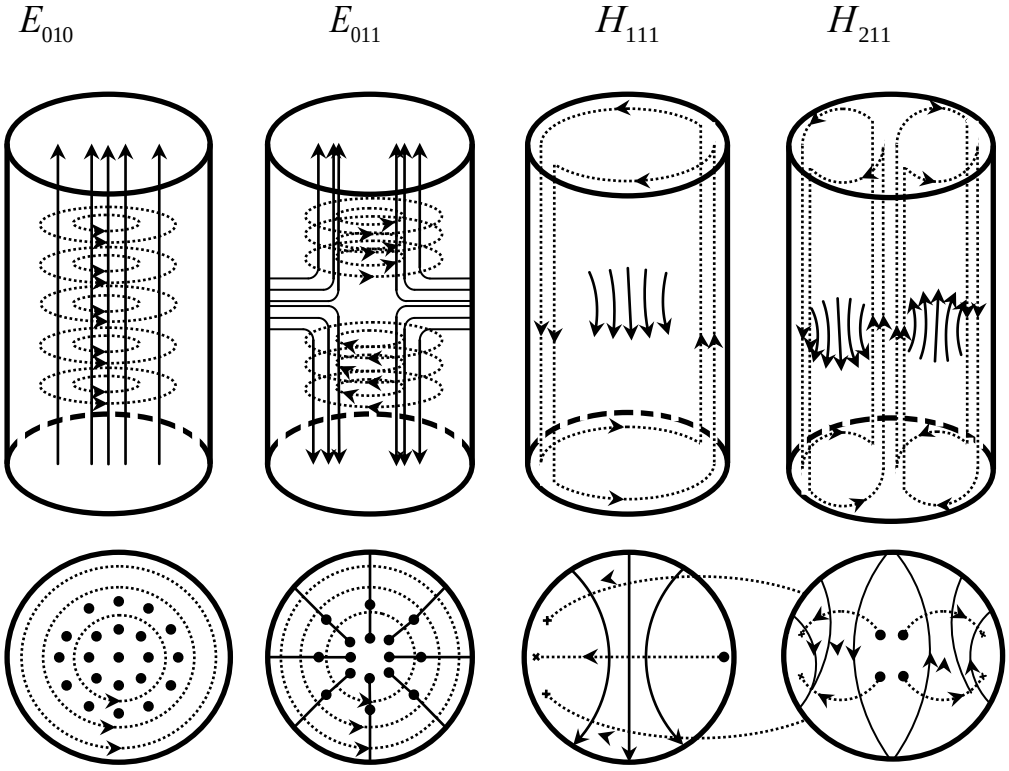


Рис. 8.7. Структуры полей в цилиндрическом резонаторе для колебаний типа H_{mnp} *и* E_{mnp} .

Критические длины волн некоторых типов колебаний приведены в таблице 8.2.

При расчёте резонансной частоты f_0 следует помнить, что для колебаний H_{mnp} индекс $p = 1,2,3,\ldots$, а для колебаний E_{mnp} возможны значения $p = 0,1,2,\ldots$

Таблица 8.2. Значения $\lambda_{кр}$ цилиндрического волновода

Типы волн	E_{01} E_{11} E_{21}	H_{01} H_{11} H_{21} H_{31}
$\lambda_{кр}$	2,613R 1,64R 1,223R	1,64R 3,41R 2,06R 1,496R

В цилиндрическом резонаторе основными типами (имеющие минимальные резонансные частоты) колебаний считаются колебания H_{111} *и*

E_{010}. Возможны вырожденные колебания, когда одному значению резонансной частоты f_0 соответствует несколько различных типов колебаний. В цилиндрических резонаторах все колебания с индексом $m \neq 0$ имеют двукратное вырождение, проявляющееся в повороте плоскости поляризации по координате φ на 90^0, т.е. структуры этих типов колебаний одинаковы, но по углу φ повернуты друг относительно друга на 90^0.

Запасенная в цилиндрическом резонаторе энергия вычисляется по формулам:

– Колебание типа E_{010}

$$W_{E010} = 0{,}423\varepsilon E_{\max}^2 a^2 h, \tag{8.14}$$

– Колебание типа E_{011}

$$W_{E\,011} = \varepsilon E_{\max}^2 a^2 h \frac{(\pi/h)^2 + (\nu_{01}/a)^2}{(2\nu_{01}/a)^2}, \tag{8.15}$$

– Колебание типа H_{011}

$$W_{H011} = 0{,}316\varepsilon E_{\max}^2 a^2 h; \tag{8.16}$$

– Колебание типа H_{111}

$$W_{H111} = 0{,}749\varepsilon E_{\max}^2 a^2 h \tag{8.17}$$

Собственная добротность Q_0 цилиндрических резонаторов рассчитывается для колебаний H_{mnp} *и* E_{mnp} по формулам, которые имеют вид:

– Колебание типа E_{010}

$$Q_{0E010} = \frac{\omega_p \mu}{2R_s} \cdot \frac{ah}{a+h}, \tag{8.18}$$

– Колебание типа E_{011}

$$Q_{0E011} = \frac{\omega_p \mu}{2R_s} \cdot \frac{ah}{2a+h} \tag{8.19}$$

– Колебание типа H_{011}

$$Q_{0H011} = \frac{\omega_p \mu}{2R_s} \cdot \frac{a^2 h \omega_p^2 \varepsilon\mu}{\mu_{01}^2 \frac{h}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{h^2}}; \tag{8.20}$$

– Колебание типа H_{111}

$$Q_{0\,H111} = \frac{\omega_p \mu}{2R_s} \cdot \frac{\lambda_p \left(1 - \frac{1}{\mu_{11}}\right)^2 \left[\mu_{11}^2 + \frac{a^2\pi^2}{h^2}\right]^{3/2}}{2\pi \left[\mu_{11}^2 + \frac{a^2\pi^2}{h^2} + \left(1 - \frac{2a}{l}\right)\frac{a^2\pi^2}{\mu_{11}^2 h^2}\right]}, \tag{8.21}$$

где $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$-резонансная длина волны резонатора для данного типа колебания.

$R_S = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2\sigma}}$ поверхностное сопротивление стенок резонатора. (8.22)

Если резонатор заполнен диэлектриком, то добротность его следует определять по формуле:

$$Q_{общая} = \frac{1}{1/Q_0 + tg\delta_э}, \quad (8.23)$$

где $tg\delta_э$ - тангенс угла потерь диэлектрика, заполняющего резонатор.

В коаксиальных резонаторах основной тип колебания $T_{mnp} = T_{001} = T_1$, резонансная длина волны которого при воздушном и диэлектрическом заполнении определяется формулами:

$$\lambda_0 = 2L, \ \lambda_{0\varepsilon} = 2L/\sqrt{\varepsilon_r}$$

т.е. длина резонатора равна половине длины волны в нем. Амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в коаксиальных резонаторах на основном типе колебания T_1 имеют вид:

$$\mathrm{E}_r = \frac{A}{r} \cdot \sin(\frac{p\pi}{L} z) e^{j\omega t} = \frac{U}{\ln R_2/R_1} \cdot \frac{1}{r} \sin(\frac{p\pi}{L} z) e^{j\omega t}, \quad (8.24)$$

$$\mathrm{H}_\alpha = \frac{A}{rZ_W} \cdot \cos(\frac{p\pi}{L} z) e^{j\omega t} = \frac{U}{Z_W \cdot \ln R_2/R_1} \cdot \frac{1}{r} \cos(\frac{p\pi}{L} z) e^{j\omega t},$$

где $\mathrm{A} = \mathrm{E}_0 \cdot R_1$, E_0, E_0-напряженность электрического поля у поверхности внутреннего проводника; U - разность потенциалов между внутренним и внешним проводниками (амплитуда напряжения)

Собственная добротность медного коаксиального резонатора находится по формуле (*размеры в сантиметрах*):

$$Q_o = \frac{2{,}4 \cdot 10^4}{\sqrt{\lambda_0}\left| 4/L + \frac{1/R_2 + 1/R_1}{2{,}3 \cdot \lg(R_2/R_1)} \right|}. \quad (8.25)$$

8.2. Примеры решения задач

Задача №1

В прямоугольном резонаторе, имеющем размеры: $a = 3\ см,\ в = 2\ см, l = 4\ см.$ см. Определить его резонансную длину волны и

резонансную частоту. Какой тип колебаний будет основным? Какой тип колебаний будет ближайшим к основному?

Решение:

Низшим – основным будет тип колебаний, у которого один индекс равен нулю, а два других – единице. Низшими могут быть типы $H_{101,}H_{011,}E_{110}$.

Формула резонансной частоты

$$f_{0\,mnp} = \frac{C}{2\cdot\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{в}\right)^2+\left(\frac{p}{L}\right)^2}\,, \qquad (8.26)$$

$\lambda_{0\,mnp} = C/f_{0\,mnp}$, где $C = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. $\lambda_{0\,mnp} = C/f_{0\,mnp}$

Подставляя в формулу частоты индексы $m,n,p,$, определим частоты и длины волн указанных типов колебаний

$H_{101} = 6,255\ ГГц,\quad \lambda_{101} = 6,255\ ГГц,$ – Основной тип волны.

$H_{011} = 13,72\ ГГц\quad \lambda_{011} = 2,186\ см$

$E_{110.} = 9,014 ГГц\qquad \lambda_{0\,110} = 3,328$ см

Задача №2

Цилиндрический объемный резонатор диаметром $2R = 5см$, длиной $l = 6см$ заполнен диэлектриком с параметрами $\varepsilon_r = 2,56;\ tg\,\delta_\varepsilon = 2\cdot10^{-4}$. Материал стенок - медь, удельная проводимость которой $\sigma = 5,7\cdot10^7\ См/м$. Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Найти резонансную частоту и добротность на этом колебании.

Решение

Из колебаний типа $H-$ основным является H_{111} резонансная частота которого $f_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)^2+\left(\frac{p}{2h}\right)^2}$, $\lambda_{кр}{}^H = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}} = 3,41R$.

Из колебаний типа E- основным является E_{010} резонансная частота определяется из выше приведенной формулы, если подставить $\lambda_{кр}{}^E = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}} = 2,613R$.

После подстановки критических длин волн и индексов p в резонансные частоты можно убедиться, что основным является колебание E_{010}

$$f_{0E_{010}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\sqrt{\left(\frac{1}{2,613R}\right)^2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\frac{1}{2,613R} = 3,521\cdot10^9\ МГц$$

Добротность определяем по формуле

$$Q_{0E010} = \frac{2\pi f_{0\,E_{010}} \mu_0 \mu_r}{2\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2\sigma}}} \cdot \frac{Rl}{R+l}$$

$$= \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}521 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}}{2\sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}521 \cdot 10^9 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5{,}7 \cdot 10^7}}} \cdot \frac{0{,}025 \cdot 0{,}06}{0{,}025 + 0{,}06} = 31323$$

$$Q_{0E010} = \frac{1}{\frac{1}{Q_{0E010}} + tg\delta_\varepsilon} = \cdot \frac{1}{\frac{1}{31323} + 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{0{,}3 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}} = 4{,}347 \cdot 10^3$$

Задача №3

Можно ли в коаксиальный резонатор, имеющий размеры R_1 = 6 мм, R_2 =24 мм, $L = 100\,мм$ и работающий на основном колебании типа T, накопить предельную энергию $0{,}55 \cdot 10^{-3}\,Дж$, если максимально допустимая напряженность электрического поля $30\ кВ/см$.

Решение:

Энергия, запасаемая в резонаторе, вычисляется по формуле

$$W = \int_V \varepsilon \frac{E^2}{2} dV$$

.

Электрическое поле основной волны в коаксиальном резонаторе имеет только радиальную составляющую (8.24)

$$\mathrm{E}_r = \frac{A}{r} \cdot \sin(\frac{p\pi}{L} z)$$

Определим накопленную энергию, учитывая при интегрировании выражение для элементарного объема в виде $\mathrm{dV} = R_1 \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{drdz}$

$$W = \int_V \varepsilon [\frac{A}{r} \cdot \sin(\frac{\pi}{L} z)]^2 \frac{1}{2} dV = \frac{\pi\varepsilon}{2} A^2 \cdot L \cdot \ln(\frac{R_2}{R_1}) \quad . \qquad (8.27а)$$

Максимальная напряженность электрического поля, согласно (8.24), существует в середине резонатора на поверхности внутреннего проводника, т.е. при $r = R$. Ее значение равно $\mathrm{E}_{мах} = A/R_1$, откуда $A = R_1 \cdot E_{MAX}$.

С учетом полученного выражения для A запасаемая энергия будет равна

$$W = \frac{\pi\varepsilon}{2} E^2{}_{мах} \cdot R_1 \cdot L \cdot \ln(\frac{R_2}{R_1}) \qquad (8.27б)$$

После численных подстановок, получаем

$$W = \frac{\pi\varepsilon}{2} A^2 \cdot L \cdot \ln(\frac{R_2}{R_1}) = 10{,}395 \cdot 10^{-4}\,Дж$$

Ответ: в коаксиальном резонаторе, указанных размеров можно накопить предельную энергию $0,55\cdot10^{-3}\,Дж$, так как $10,395\cdot10^{-4}\,Дж > 0,55\cdot10^{-3}\,Дж$.

Задача №4

Из отрезка стандартного прямоугольного волновода с поперечным сечением $а\cdot в = 72\cdot34$ мм образован прямоугольный объемный резонатор с резонансной частотой $3\,ГГц$ на колебании типа H_{101}. Определить длину резонатора. Как изменится резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r =3,7?

Решение:

Воспользуемся формулой (8.26), подставим индексы типа колебаний

$$f_{0H101} = \frac{C}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2}$$

и определим выражение для длины резонатора

$$L = \sqrt{\frac{1}{(2f_{0101}/C)^2 - (1/a)^2}} = 5,12см\,.$$

Если резонатор заполнить диэлектриком, то резонансная частота уменьшится в $\sqrt{\varepsilon_r}$ и станет равной

$$f_{0\varepsilon} = f_0/\sqrt{\varepsilon_r} = 3\cdot10^9/\sqrt{3,7} = 1,559\cdot10^9\,ГГц$$

Ответ: $L = 5,12см$, $f_0/f_{0\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_r} = 1,924\ раза$.

Задача №5

В прямоугольном резонаторе $a\cdot b\cdot L$ возбуждается тип колебаний H_{101}. Определить мощность потерь в стенках резонатора, при протекании токов проводимости.

Решение:

Картина силовых линий в прямоугольном резонаторе на типе колебаний H_{101} приведена на рис.8.3, из которой видно, что магнитное поле имеет две составляющие H_z и H_x, а согласно (8.2), равные

$$H_z = H_m\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{L}\quad H_x = -H_m\frac{\pi}{L}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{L}\,. \qquad (8.28)$$

В соответствии с граничными условиями для тангенциальных составляющих магнитного поля, ток проводимости равен $j_{пр} = H_\tau$ на границе. Направление токов определяется правилом вращения буравчика: движение буравчика совпадает с направлением магнитного поля, а направление токов совпадает с направлением вращения рукоятки в стенке резонатора. Мощность потерь в стенках можно разделить по пределам интегрирования на три интеграла: две боковых, две торцевых и по верхней –

нижней граням. Составляющая поля H_z в боковых стенках при $x=0$ *и* $x=a$ вызывает составляющую тока проводимости j_y. Потери в стенках прямоугольного резонатора

$$P_{пот}=2R_S\{\int_0^L\int_0^b(H_m\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{L})^2{}_{при x=0,\,a}\,dy\,dz+\int_0^a\int_0^b(H_m\frac{\pi}{L}(\frac{\pi}{a})^{-1}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{L})^2{}_{при z=0,L}\,dx\,dy+$$

$$+\int_0^a\int_0^L(H_m\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{L})^2{}_{при\ y=0,\,b}\,dx\,dz+\int_0^a\int_0^L(H_m\frac{\pi}{L}(\frac{\pi}{a})^{-1}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{L})^2{}_{при\ y=0,b}\,dx\,dz\}=$$

$$=2R_S{H^2}_m\{\frac{bL}{2}+(\frac{\pi}{L})^2(\frac{\pi}{a})^{-2}\frac{ab}{2}+\frac{aL}{4}+\frac{\pi}{L}(\frac{\pi}{a})^{-2}(\frac{aL}{4})\}=2R_S{H^2}_m\{\frac{bL}{2}+(\frac{a}{L})^2\frac{ab}{2}+\frac{aL}{4}(1+(\frac{a}{L})^2\},\ Вт$$

(8.29)

Задача №6

Для измерения параметров диэлектриков используется цилиндрический резонатор на колебании H_{012} как не имеющий продольных токов проводимости (рис.8.7). Открывается торцевая крышка, и резонатор полностью заполняется диэлектриком. Измеренные резонансные частоты резонатора без диэлектрика f_0, с диэлектриком $f_{0\varepsilon}$, и добротности без диэлектрика Q_0, с диэлектриком $Q_{0\varepsilon}$.

Вывести формулы для расчета относительной диэлектрической проницаемости

и тангенса угла диэлектрических потерь по измеренным величинам.

Решение:

Выражение для резонансной частоты колебания H_{012} .

$$f_{0\varepsilon}=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{1}{1{,}64\mathrm{R}}\right)^2+\left(\frac{2}{2L}\right)^2}=\frac{f_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ .$$

Из этого выражения получим формулу для определения относительной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_r=(\frac{C}{f_0})^2\{\left(\frac{1}{1{,}64\mathrm{R}}\right)^2+\left(\frac{1}{L}\right)^2\}=(\frac{f_0}{f_{0\varepsilon}})^2 \qquad (8.30)$$

Добротность резонатора, заполненного диэлектриком, определяется выражением:

$$Q_{0\,\varepsilon_r}=\frac{1}{\frac{1}{Q_0}+tg\delta_\varepsilon},$$

откуда

$$tg\delta_\varepsilon=\frac{1}{Q_{0\,\varepsilon_r}}-\frac{1}{Q_0} \qquad (8.31)$$

Задача №7

В прямоугольном медном резонаторе, имеющем размеры: $a = 5\,см, в = 3\,см$, l=5 см возбуждается колебание H_{101}. Определить его резонансную длину волны и резонансную частоту. Найти добротность на этом колебании.

Решение:

Воспользуемся формулой (8.26) для определения резонансной частоты

$$f_{0\,101} = \frac{C}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{L}\right)^2} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\sqrt{(\frac{1}{5\cdot 10^{-2}})^2 + (\frac{1}{5\cdot 10^{-2}})^2} = 4{,}24\,ГГц$$

Резонансную длину волны определяем :

$$\lambda_{0\ H101} = C \diagup f_{0101} = 7{,}07см$$

Для нахождения добротности резонатора можно воспользоваться несколькими способами. Первый, использовать соотношения (8.5), (8.6), для которых в задаче 5 найдены из (8.2) составляющие поля заданного типа колебания, получено выражение мощности потерь в стенках. Второй,- воспользоваться общей формулой (8.8а) для получения из неё выражения добротности нашего типа колебания. Третий, провести оценку добротности по упрощенной формуле, получив ее. Мы воспользуемся первым и третьим способами и сравним рассчитанные по формулам результаты.

$$W = \int_V \mu\frac{H^2}{2}dV = \frac{H^2{}_m}{2}\mu\int\int\int\{(\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{L})^2 + (\frac{a}{L}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{L})^2\}dxdydz$$

$$W = \frac{H^2{}_m}{8}\mu abL[1 + (\frac{a}{L})^2] \qquad (8.32)$$

$$P_{пот} = 2R_S H^2{}_m\{\frac{bL}{2} + (\frac{a}{L})^2\frac{ab}{2} + \frac{aL}{4}(1 + (\frac{a}{L})^2\}$$

$$Q_0 = \omega\frac{W}{P_n} = \frac{\omega\mu abL[1 + (\frac{a}{L})^2]}{16R_S\{\frac{bL}{2} + (\frac{a}{L})^2\frac{ab}{2} + \frac{aL}{4}(1 + (\frac{a}{L})^2\}} \qquad (8.33)$$

Получим упрощенную формулу оценки добротности для любого резонатора и типа колебаний в нем. Используем общую формулу добротности

$$Q_0 = \omega\frac{W}{P_n} = \frac{\omega\mu}{R_S}\frac{\int_V H_m^2 dV}{\int_S H_{\tau m}^2 dS}$$

и предположим, что вариации поля внутри резонатора отсутствуют, т.е.

$$H_m = H_{xm} = \text{const}, == H_{101}\ ,\ H_m^2 = H_{xm}^2 = \text{const},$$

тогда

$$Q_0 = \frac{\omega\mu}{R_S}\frac{V}{S} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega\mu/(2\sigma)}}\frac{V}{S} = \frac{2}{\sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}}\frac{V}{S} = \frac{2}{\delta}\frac{V}{S}\ ,$$

где $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ - глубина проникновения электромагнитной волны в стенки резонатора. Получена упрощенная формула практической оценки добротности любого резонатора

$$Q_0 = \frac{2}{\delta}\frac{V}{S} \qquad (8.34)$$

Рассчитаем добротность резонатора по (8.33), (8.34)

$$Q_0 = \frac{2}{\sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}}\frac{V}{S} = 13600 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2/2\cdot 3{,}14\cdot 4{,}24\cdot 10^9\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 5{,}95\cdot 10^7}}\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 5}{2\cdot(2\cdot 3\cdot 5+5\cdot 5)}$$

$$=$$

$$Q_0 = \frac{\omega\mu\, abL[1+(\frac{a}{L})^2]}{16R_S\{\frac{bL}{2}+(\frac{a}{L})^2\frac{ab}{2}+\frac{aL}{4}(1+(\frac{a}{L})^2\}} = \frac{1}{8\delta}\frac{V[1+(\frac{a}{L})^2]}{\{\frac{2bL}{4}+(\frac{a}{L})^2\frac{2ab}{4}+\frac{aL}{4}(1+(\frac{a}{L})^2\}} = \frac{V}{2\delta S}$$

Вывод. Формула (8.33) дает величину добротности в четыре раза меньше, чем (8.34). Не учет вариаций поля внутри резонатора приводит к завышению добротности, хотя позволяет быстро оценить ее величину.

8.3. Задачи для самостоятельного решения

1 В коаксиальном резонаторе из меди ($\sigma = 5{,}7\cdot 10^7\ См/м$), имеющем размеры $R_2 = 16\ мм,\ R_1 = 7 мм$ *и* $L = 50 мм$ возбуждается колебание T_1. Определить резонансную длину волны, резонансную частоту и собственную добротность.

Ответ: λ_0=10 *см* , $f_0 = 3\ ГГц,\ Q = 2{,}3\cdot 10^2$.

2 В прямоугольном резонаторе из меди ($\sigma = 5{,}7\cdot 10^7\ См/м$), имеющем размеры: $a = 58\ мм,\ в = 25\ мм, l = 40\ мм$ возбуждается колебание типа H_{101}. Определить резонансную частоту и собственную добротность.

Ответ: $\lambda_0 = 4{,}53$см, $f_0 = 4{,}53 ГГц$, Q_o = 1,1 10^4

3 В цилиндрическом объемном резонаторе из меди ($\sigma = 5{,}7\cdot 10^7\ См/м$), длиной $l = 5см$ возбуждается колебание типа H_{011}. Определить диаметр резонатора, чтобы он оказался настроенным на резонансную частоту $f_0 = 6825\ МГц$.

Ответ: $2a = 60\ мм$.

4 Определить собственную добротность цилиндрического объемного резонатора из меди длиной $l = 4см$. В резонаторе возбуждается колебание типа H_{011} с длиной волны $\lambda_0 = 2,5\ см$.

Ответ: $Q_0 = 2,35 \cdot 10^4$

5 Определить резонансную длину волны и резонансную частоту основного типа колебаний в кубическом резонаторе со стороной $20\ мм$.

Ответ: $\lambda_0 = 1,414см$, $f_0 = 21,216\ ГГц$,

6 Какой тип колебаний будет основным в прямоугольном резонаторе, имеющем размеры: $a = 4\ см, в = 2\ см, l = 3\ см$? Определить его резонансную частоту. Какой тип колебаний будет ближайшим высшим? Определить его резонансную частоту.

Ответ: $H_{101;;}\ f_0 = 6250\ МГц; E_{110};\ f_0 = 8386 МГц.$

7 Определить размеры кубического резонатора, низшая резонансная частота основного типа колебаний которого $5\ ГГц$.

Ответ: $42,4\ мм$

8 В цилиндрическом объемном резонаторе возбуждаются на одной частоте колебания типов H_{111} и $E_{010.}$. При каком отношении радиуса к длине цилиндрического резонатора это возможно?

Ответ: $a/L = 0,493$

9 Резонансная частота колебания типа E_{011} равна $10\ ГГц$. Диаметр цилиндрического объемного резонатора в два раза меньше его длины. Определить диаметр резонатора.

Ответ: $2,41\ см$

10 Стороны прямоугольного объемного резонатора относятся как $2:1:3$. Резонансная частота колебания типа H_{111} равна $8\ ГГц$. Определить размеры резонатора.

Ответ: $43,75мм : 21,88мм : 65,62\ мм$

11 В цилиндрическом объемном резонаторе возбуждаются на частоте $4\ ГГц$ колебание типа E_{010}, а на частоте $5\ ГГц$ возбуждается колебание типа H_{111}.

Определить размеры резонатора.

Ответ: $a = 2,871\ см; L = 3,795\ см.$

12 Резонатор с воздушным заполнением имеет резонансную частоту $10\ ГГц$. Какова будет резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 2,7$?

Ответ: ; $f_0 = 4,712\ ГГц$.

13 В коаксиальном резонаторе, имеющем размеры $R_2 = 20\ мм$, $R_1 = 6мм$ и $L = 60мм$ возбуждается колебание T_1. Определить резонансную длину волны и резонансную частоту.

Ответ: $\lambda_0 = 12\ см$, $f_0 = 2,5\ ГГц$.

14 Из отрезка стандартного прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения $а \cdot в = 23 \cdot 10\ мм^2$ образован прямоугольный объемный резонатор с резонансной частотой $10\ ГГц$ на колебании типа H_{102}. Определить длину резонатора. Как изменится резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 3,7$ ε_r=3,7 ?

Ответ: $L = 3,957\ см$; *Частота уменьшится в* $1,924$ *раза* .

15 Размеры цилиндрического объемного резонатора выбраны такими, что на одной и той же резонансной частоте возбуждаются в нем колебания типов H_{111} и E_{010}. Как изменяться резонансные частоты колебаний при заполнении диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 2,2$?

Ответ: Уменьшатся в $\sqrt{\varepsilon_r}$ раз.

16 Записать вектора электрического и магнитного полей в прямоугольном объемном резонаторе $a \cdot b \cdot L$ для колебания типа E_{011}. Какие особенности в структуре полей следует отметить (например, изменение полей по осям координат; количество эпюр, выполнение граничных условий)?

17 Цилиндрический объемный резонатор, предназначенный для измерения параметра ε_r диэлектриков, должен быть сделан разъемным, но стык двух частей не должен пересекать линий тока проводимости, чтобы не влиять на параметры резонатора. Можно ли удовлетворить этому требованию при работе на колебании типа E_{011}?

Ответ: можно; разъем лучше сделать на торце или на расстоянии $l \le (1/4)L$.

18 В прямоугольном резонаторе $a \cdot b \cdot L$ возбуждается тип колебаний $H_{011.}$. Какие составляющие плотности токов проводимости и смещения будут присутствовать в резонаторе, и от каких координатных осей они зависят?

Ответ: $\vec{j}_{см}(y,z) = \vec{x}_0 j_x(y,z),$

$\vec{j}_{пр}(y,z) = \vec{x}_0 j_{x\ пр}(y,z) + \vec{z}_0 j_{z\ пр}(y,z)$

19 В коаксиальном резонаторе возбуждается тип колебаний $T_{1.}$. Какие составляющие плотности токов проводимости и смещения будут присутствовать в резонаторе?

Ответ: $\vec{j}_{см} = \vec{r}_0 j_r$, $\vec{j}_{пр} = \vec{r}_0 j_{r\ пр} + \vec{z}_0 j_{z\,пр}$

20 Получите выражения для плотности токов проводимости и смещения в коаксиальном резонаторе возбужденном на типе колебаний $T_{1.}$.

Ответ:

$$\vec{j}_{см} = \vec{r}_0 j_{r\,см} = \vec{r}_0 \varepsilon \partial E_r / \partial t = j\vec{r}_0 \omega \varepsilon E_r = \vec{r}_0 \omega \varepsilon \frac{A}{r} \cdot \sin(\frac{p\pi}{L} z) e^{j(\omega t + 0{,}5\pi)},$$

$$\vec{j}_{пр} = \vec{r}_0 j_{r\ пр} + \vec{z}_0 j_{z\,пр} = \vec{r}_0 H_{r\,(при\ z=0;\ L)} + \vec{z}_0 H_{\varphi(при\ r=R_1;\ R_2)}$$

21 На основе прямоугольного волновода с размерами сечения $а \cdot в = 23 \cdot 10\ мм^2$ образован перестраиваемый резонатор, внутри которого перемещается поршень, изменяющий длину резонатора. Определить пределы перемещения поршня для изменения частоты в пределах $8-12\ ГГц$. Тип колебания в резонаторе H_{101}.

Ответ:

$14{,}89\ мм \le L \le 32{,}37\ мм$.

22 В прямоугольном резонаторе $а \cdot в \cdot L = \mathbf{20 \cdot 10 \cdot 30\ см}^3$ возбуждается основной тип колебаний H_{011}. Стенки резонатора посеребрены ($\sigma = 6{,}1 \cdot 10^7\ См/м$). Определить резонансную частоту и собственную добротность.

Ответ:

$f_0 = 2{,}575\ ГГц$, $Q_0 = 111{,}6 \cdot 10^2$

23 Определить собственную добротность цилиндрического объемного резонатора из меди ($\sigma = 5{,}7 \cdot 10^7\ См/м$) радиусом $а = 5см$, работающего на волне $10см$. В резонаторе возбуждается колебание типа E_{011}.

Ответ: $Q_0 = 17970$

24 Определить резонансную частоту и собственную добротность посеребренного ($\sigma = 6{,}1 \cdot 10^7\ См/м$) цилиндрического объемного резонатора. Диаметр и длина резонатора $5см$. В резонаторе возбуждается колебание типа $H_{011.}$ $H_{011.}$.

Ответ: $Q_0 = 37450$, $f_0 = 7{,}93\ ГГц$.

25 Цилиндрический объемный резонатор, диаметр которого равен длине, работает на колебании типа E_{010} . Резонансная частота $2 ГГц$. Резонатор заполнен полистиролом $(\varepsilon_r = 2,56)$, материал стенок латунь, имеет проводимость

$\sigma = 1,4 \cdot 10^7 \, См/м$. Определить добротность цилиндрического объемного резонатора. Какова будет добротность резонатора с таким же соотношением размеров и с той же резонансной частотой при воздушном заполнении?

Ответ: $Q_{o\varepsilon} = 1595$, $Q_0 = 12720$.

26 Определить резонансную частоту и добротность коаксиального резонаторе, работающего на основном типе колебаний T_1. Размеры резонатора: R_2=12,5 мм, R_1=4мм и L=120мм. Материал стенок латунь ($\sigma = 1,4 \cdot 10^7 \, См/м$).

Ответ: $Q_0 = 2695$, $f_0 = 1,25 \, ГГц$

Список литературы

1. Б.М. Петров Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. - М.: Горячая линия- Телеком, 2007.-558 с.

2. Л.А.Боков, В.А. Замотринский, А.Е. Мандель Электродинамика и распространение радиоволн: Уч. пособие. - Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники - Томск: ТУСУР, 2013. – 410 с.

3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: –М.:Наука.1989.–544 с.

4. Баскаков С.Н. Электродинамика и распространение радиоволн.− М.: Высш.шк.,1992.-416с.

5. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн»/ Под ред. С.И. Баскакова.- М.: Высшая школа, 1981, 208с.