Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Е.А. Шельмина

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению лабораторных, практических и самостоятельных работ студентов направлений 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника

Томск
2022

УДК 519.85
ББК 22.18
Ш45

Рецензент:
Истомина Н.Ю., к.т.н., доцент каф. ЭМИС ТУСУР

Шельмина, Елена Александровна
Методы оптимизации: методические указания по выполнению лабораторных, практических и самостоятельных работ студентов направлений 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника / Е.А. Шельмина. – Томск: Томск.гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2022. – 25 с.

Методические указания для студентов ВУЗов посвящены изучению методов оптимизации. Описываются основные разделы дисциплины «Методы оптимизации», приведены задания для практических и лабораторных работ.

Одобрено на заседании каф. ЭМИС протокол № 1 от 31.08.2022 г.

УДК 519.85
ББК 22.18

Оглавление

Введение

Понятие оптимальности и понятие процесса оптимизации используется практически во всех областях человеческой деятельности. Это такие отрасли, как экономика, инженерия, менеджмент, а также социальные, биологические и некоторые другие науки. Термин «оптимальный» чаще всего трактуется как благоприятный, максимальный (минимальный), наиболее эффективный и т. д. Ежедневно, не всегда осознавая это, каждый человек решает задачу: как получить наибольший эффект при ограниченных ресурсах. Фактически это решение задачи оптимизации.

Другими словами, оптимизация – это выбор наилучшего решения. Математическая теория оптимизации включает в себя фундаментальные результаты и численные методы, позволяющие найти наилучший вариант из множества возможных альтернатив без их полного перебора и сравнения.

Целью курса «Методы оптимизации» является изучение основных категорий и методов оптимизации как современного научного направления, возможностей и особенностей использования оптимизационных методов в решении практических задач оптимального управления.

К задачам данного курса можно отнести:

- освоение базовых знаний алгоритмов и методов оптимизации;
- получение навыков практической работы по решению оптимизационных задач;
- освоение численных методов решения математических задач.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

– знать основные критерии уровня образования для совершенствования своего интеллектуального и общекультурного уровня; способы проведения научных исследований с помощью методов оптимизации; математические и естественнонаучные методы, в том числе и методы оптимизации, для решения нестандартных задач;

– уметь применять методы оценки и планирования ресурсов для совершенствования своего интеллектуального и общекультурного уровня; проводить научные исследования; самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте;

– владеть способами развития своего интеллектуального и общекультурного уровня; методикой организации научных исследований; навыками решения нестандартных задач с помощью математических, естественнонаучных знаний, в том числе и с применением методов оптимизации.

1 Задания для практических работ

Практическая работа 1. Методы безусловной оптимизации

Задание 1. Найти минимум целевой функции:

$$f\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1 - 3\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 + x_1 \cdot x_2 .$$

Решение. Частные производные $f\left(x_1, x_2\right)$ по x_1 и x_2 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 6 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1 - 2 \end{cases}$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6 = 0 \\ 2x_2 + x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы уравнений даёт результат:

$$\begin{cases} x_1 = 3,33333 \\ x_2 = -0,666667 \end{cases}$$

Таким образом, экстремум целевой функции является точка с координатами $\left[3,33333; -0,666667\right]$, значение целевой функции, в которой: $f\left[3,33333; -0,666667\right] = -0,3778.$

Для определения характера стационарной точки составим матрицу Гессе.

$$\nabla^2 f\left(X\right) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_1 X_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_1 X_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_2 X_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_2 X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_n X_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_n X_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} = 2 ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 X_2} = 1 ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 X_1} = 1 ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = 2.$$

$$\nabla^2 f\left(X\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 .$$

Так как матрица Гессе для заданной функции – положительно определенная матрица, то стационарная точка является точкой минимума.

Практическая работа 2. Методы условной оптимизации

Задание 1. Найти условный минимум в задаче:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$x_1 + x_2 - 2 \le 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа: $L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$ и запишем необходимые условия:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda \ge 0 \end{cases}$$

Решим систему для двух случаев.

Если $\lambda = 0$, то решение системы в этом случае будет $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, что является и решением неравенства $x_1 + x_2 - 2 \le 0$.

В стационарной точке $(0,0)$ проверим достаточные условия: $d^2L = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0$, значит в точке $(0,0)$ функция имеет условный минимум $f(0,0) = 0$, который совпал с безусловным минимумом этой функции.

Если $\lambda \ne 0$, то в этом случае $x_1 + x_2 - 2 = 0$. Решаем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ \lambda(x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda \ge 0 \end{cases}$$

Решение системы $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\lambda = -2$. Так как $\lambda < 0$, то в этой точке не выполняются необходимые условия существования условного минимума [4].

Практическая работа 3. Задачи линейного программирования

Задание 1. На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода ткани на пошив одного изделия приведены в таблице 1.1. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида.

Составить математическую постановку задачи и решить симплекс-методом.

Таблица 1.1 – Исходные данные к заданию 1

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида		Общее количество ткани (м)
	1	2	
I	1	–	180
II	–	1	210
III	4	2	800
Цена одного изделия	9	6	

Решение. Решение задачи осуществлено с использованием симлекс-метода и программы MS Excel (рисунок 1.1).

Функция	F(x) = 9x1 + 6x2
Огр 1	x1 <= 180
Огр 2	x2 <= 210
Огр 3	4x1 + 2x2 <= 800

x1 + x3 = 180
x2 + x4 = 210
4x1 + 2x2 + x5 = 800

БП	B	x1	x2	x3	x4	x5	симп. отн.
x3	180	1	0	1	0	0	180
x4	210	0	1	0	1	0	
x5	800	4	2	0	0	1	200
F(x0)	0	-9	-6	0	0	0	

БП	B	x1	x2	x3	x4	x5	симп. отн.
x1	180	1	0	1	0	0	
x4	210	0	1	0	1	0	210
x5	80	0	2	-4	0	1	40
F(x0)	1620	0	-6	9	0	0	

БП	B	x1	x2	x3	x4	x5	симп. отн.
x1	180	1	0	1	0	0	180
x4	170	0	0	2	1	-0,5	85
x2	40	0	1	-2	0	0,5	-20
F(x0)	1860	0	0	-3	0	3	

БП	B	x1	x2	x3	x4	x5
x1	95	1	0	0	-0,5	0,25
x3	85	0	0	1	0,5	-0,25
x2	210	0	1	0	1	0
F(x0)	2115	0	0	0	1,5	2,25

x1 = 95
x2 = 210
F(x) = 9*95 + 6*210 = 2115

Ответ: 2115 изделий

Рисунок 1.1 – Решение задачи линейного программирования

Практическая работа 4. Транспортная задача

Задание 1. Имеются 3 пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и 5 пунктов потребления этого груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На пунктах A_i $(i = 1, 2, 3)$ груз находится соответственно в количествах a_1, a_2, a_3 условных единиц. В пункты B_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ требуется доставить соответственно b_j условных единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_i в B_j определена матрицей $C = \{c_{ij}\}$.

$a_1 = 175$, $a_2 = 150$, $a_3 = 125$, $b_1 = 105$, $b_2 = 75$, $b_3 = 50$, $b_4 = 145$, $b_5 = 75$.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 12 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 11 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Составить математическую постановку задачи, построить опорный план методом минимального элемента или северо-западного угла. Найти оптимальный план методом потенциалов.

Решение. Решение задачи осуществлено с использованием метода минимального элемента, метода потенциалов и программы MS Excel (рисунки 1.2–1.3).

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3	5	6	6	175
a2	12	9	7	8	6	150
a3	11	5	6	7	10	125
Потребности	105	75	50	145	75	

Сумма a	450	Модель замкнутая (сбалансированная)
Сумма b	450	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5	6	6	100
a2	12	9	7	8	6	150
a3	11	5	6	7	10	125
Потребности	105	0	50	145	75	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6	6	50
a2	12	9	7	8	6	150
a3	11	5	6	7	10	125
Потребности	105	0	0	145	75	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6(50)	6	0
a2	12	9	7	8	6	150
a3	11	5	6	7	10	125
Потребности	105	0	0	95	75	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6(50)	6	0
a2	12	9	7	8	6(75)	75
a3	11	5	6	7	10	125
Потребности	105	0	0	95	0	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6(50)	6	0
a2	12	9	7	8	6(75)	75
a3	11	5	6	7(95)	10	30
Потребности	105	0	0	0	0	

Рисунок 1.2 – Решение задачи методом минимального элемента

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6(50)	6	0
a2	12	9	7	8	6(75)	75
a3	11(30)	5	6	7(95)	10	0
Потребности	75	0	0	0	0	

	b1	b2	b3	b4	b5	Запасы
a1	10	3(75)	5(50)	6(50)	6	0
a2	12(75)	9	7	8	6(75)	0
a3	11(30)	5	6	7(95)	10	0
Потребности	0	0	0	0	0	

a1 = 0		
a1 + b2 = 3	0 + b2 = 3	b2 = 3
a1 + b3 = 5	0 + b3 = 5	b3 = 5
a1 + b4 = 6	0 + b4 = 6	b4 = 6
a3 + b4 = 7	a3 + 6 = 7	a3 = 1
a3 + b1 = 11	1 + b1 = 11	b1 = 10
a2 + b1 = 12	a2 + 10 = 12	a2 = 2
a2 + b5 = 6	2 + b5 = 6	b5 = 4

	10	3	5	6	4
0	10	3(75)	5(50)	6(50)	6
2	12(75)	9	7	8	6(75)
1	11(30)	5	6	7(95)	10

F(x) =	3120
Ответ: 3120 у.е.	

Рисунок 1.3 – Решение задачи методом потенциалов

Практическая работа 5. Задачи целочисленного программирования

Задание. Решить задачу целочисленного программирования методом Гомори и методом ветвей и границ:

$$\max L = 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \text{ при ограничениях } \begin{array}{l} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 9 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \le 11 \end{array}.$$

Решение. Решение задачи осуществлено с использованием программы MS Excel (рисунки 1.4–1.8).

f = 2x1 + 4x2 - 4x3	f = 2x1 + 4x2 - 4x3 + 0x4 + 0x5 → max	//приводим к канонической фо
2x1 + 7x2 + 5x3 <=9	2x1 + 7x2 + 5x3 + x4 = 9	
7x1 + x2 + 3x3 <=11	7x1 + x2 + 3x3 + x5 = 11	

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5
		2	4	-4	0	0
x4	9	2	7	5	1	0
x5	11	7	1	3	0	1
zj - cj	0	-2	-4	4	0	0

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5
		2	4	-4	0	0
x2	9/7	2/7	1	5/7	1/7	0
x5	68/7	47/7	0	16/7	-1/7	1
zj - cj	36/7	-6/7	0	48/7	4/7	0

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5
		2	4	-4	0	0
x2	41/47	0	1	29/47	7/47	-2/47
x1	68/47	1	0	16/47	-1/47	7/47
zj - cj	300/47	0	0	336/47	26/47	6/47

x1 = 68/47 = 1 21/47

x2 = 41/47

x3 = 0

F(x) = 2 * 68/47 + 4 * 41/47 - 4 * 0 = 6 18/47

b1 - a11 * x1 - a12 * x2 - a13 * x3 - a14 * x4 - a15 * x5 <= 0	41/47 - 29/47x3 - 7/47x4 - 45/47x5 <= 0
b1 = b1 - [b1] = 41/47 - 0 = 41/47	41/47 - 29/47x3 - 7/47x4 - 45/47x5 + x6 = 0
a11 = a11 - [a11] = 0 - 0 = 0	
a12 = a12 - [a12] = 1 - 1 = 0	
a13 = a13 - [a13] = 29/47 - 0 = 29/47	
a14 = a14 - [a14] = 7/47 - 0 = 7/47	
a15 = a15 - [a15] = -2/47 + 1 = 45/47	

Рисунок 1.4 – Решение задания методом Гомори (итерация 1)

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	41/47	0	1	29/47	7/47	-2/47	0
x1	68/47	1	0	16/47	-1/47	7/47	0
x6	-41/47	0	0	-29/47	-7/47	-45/47	1
zj - cj	300/47	0	0	336/47	26/47	6/47	0

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	41/45	0	1	29/45	7/45	0	-2/45
x1	59/45	1	0	11/45	-2/45	0	7/45
x5	41/45	0	0	29/45	7/45	1	-47/45
zj - cj	-94/15	0	0	-106/15	-8/15	0	-2/15

x1 = 1 14/45
x2 = 41/45
x3 = 0
F(x) = 2 * 1 14/45 + 4 * 41/45 - 4 * 0

b1 - a11 * x1 - a12 * x2 - a13 * x3 - a14 * x4 - a15 * x5 - a16 * x6 <= 0
b1 = b1 - [b1] = 41/45 - 0 = 41/45
a11 = a11 - [a11] = 0 - 0 = 0
a12 = a12 - [a12] = 1 - 1 = 0
a13 = a13 - [a13] = 29/45 - 0 = 29/45
a14 = a14 - [a14] = 7/45 - 0 = 7/47
a15 = a15 - [a15] = 0 - 0 = 0
a16 = a16 - [a16] = -2/45 + 1 = 43/45

41/45 - 29/45x3 - 7/45x4 - 43/45x6 <= 0
41/45 - 29/45x3 - 7/45x4 - 43/45x6 + x7 = 0

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x2	41/45	0	1	29/45	7/45	0	-2/45	0
x1	59/45	1	0	11/45	-2/45	0	7/45	0
x5	41/45	0	0	29/45	7/45	1	-47/45	0
x7	-41/45	0	0	-29/45	-7/45	0	0	1
zj - cj	-94/15	0	0	-106/15	-8/15	0	-2/15	0

Рисунок 1.5 – Решение задания методом Гомори (итерация 2)

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x2	41/43	0	1	29/43	7/43	0	0	-2/43
x1	50/43	1	0	6/43	-3/43	0	0	7/43
x5	82/43	0	0	58/43	14/43	1	0	-47/43
x6	41/43	0	0	29/43	7/43	0	1	-45/43
zj - cj	-264/43	0	0	-300/43	-22/43	0	0	-6/43

x1 = 1 7/43
x2 = 41/43
x3 = 0
F(x) = 2 * 50/43 + 4 * 41/43 - 4 * 0

b1 - a11 * x1 - a12 * x2 - a13 * x3 - a14 * x4 - a15 * x5 - a16 * x6 - a17 * x7<= 0
b1 = b1 - [b1] = 41/43 - 0 = 41/43
a11 = a11 - [a11] = 0 - 0 = 0
a12 = a12 - [a12] = 1 - 1 = 0
a13 = a13 - [a13] = 29/43 - 0 = 29/43
a14 = a14 - [a14] = 7/43 - 0 = 7/43
a15 = a15 - [a15] = 0 - 0 = 0
a16 = a16 - [a16] = 0 - 0 = 0
a17 = a17 - [a17] = -2/43 + 1 = 41/43

41/43 - 29/43x3 - 7/43x4 - 41/43x7 <= 0
41/43 - 29/43x3 - 7/43x4 - 41/43x7 + x8 = 0

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x2	41/43	0	1	29/43	7/43	0	0	-2/43	0
x1	50/43	1	0	6/43	-3/43	0	0	7/43	0
x5	82/43	0	0	58/43	14/43	1	0	-47/43	0
x6	41/43	0	0	29/43	7/43	0	1	-45/43	0
x8	-41/43	0	0	-29/43	-7/43	0	0	-41/43	1
zj - cj	-264/43	0	0	-300/43	-22/43	0	0	-6/43	0

Рисунок 1.6 – Решение задания методом Гомори (итерация 3)

БП	A0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x2	1	0	1	29/41	7/41	0	0	0	-2/41
x1	1	1	0	1/41	-4/41	0	0	0	7/41
x5	3	0	0	87/41	21/41	1	0	0	-47/41
x6	2	0	0	58/41	14/41	0	1	0	-45/41
x7	1	0	0	29/41	7/41	0	0	1	-43/41
zj - cj	-6	0	0	-282/41	-20/41	0	0	0	-6/41

x1 = 1	f(x) = 2*1 + 4*1 - 4*0 = 6
x2 = 1	Ответ: 6
x3 = 0	

Рисунок 1.7 – Решение задания методом Гомори (итерация 4)

По симплекс-методу из 1 части x1 = 68/47, x2 = 41/47, x3 = 0, f(x) = 300/47

Выбираем x1 как имеющее максимальное значение cj

2x1 + 7x2 + 5x3 <= 9	2x1 + 7x2 + 5x3 <= 9
7x1 + x2 + 3x3 <= 11	7x1 + x2 + 3x3 <= 11
x1 <= 1	x1 >= 2
x1 >= 0	x1 >= 0
x2 >= 0	x2 >= 0
x3 >= 0	x3 >= 0
x1 = 1	Нет решения
x2 = 1	
x3 = 0	
f(x) = 6	

Выбираем x2

2x1 + 7x2 + 5x3 <= 9	2x1 + 7x2 + 5x3 <= 9
7x1 + x2 + 3x3 <= 11	7x1 + x2 + 3x3 <= 11
x2 = 0	x2 >= 1
x1 >= 0	x1 >= 0
x2 >= 0	x2 >= 0
x3 >= 0	x3 >= 0
x1 = 1,571	x1 = 1
x2 = 0	x2 = 1
x3 = 0	x3 = 0
f(x) = 3,143	f(x) = 6

Рисунок 1.8 – Решение задания методом ветвей и границ

Практическая работа 6. Численные методы

Задание 1. Осуществить программную реализацию численного метода золотого сечения для поиска минимума функции:

$$f(x) = x_2 + 2x - 4,\ x \in [-10; 20].$$

Задание 2. Осуществить программную реализацию численного метода согласно варианту для поиска минимума функции методом Ньютона-Рафсона:

$$f(x, y) = \frac{A_1}{1 + \left(\frac{x - a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y - c_1}{d_1}\right)^2} + \frac{A_2}{1 + \left(\frac{x - a_2}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{y - c_2}{d_2}\right)^2}.$$

$A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 3$, $b_2 = 3$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 3$.

Решение задания 1. На рисунке 1.9 представлено решение задания 1 в пакете MS Excel.

Итерация	an	bn	bn-an	x1	x2	F(x1)	F(x2)
1	-10	20	30	1,458591	8,541409	1,044669	86,03849
2	-10	8,541409	18,54141	-2,91805	1,459462	-1,32107	1,048952
3	-10	1,459462	11,45946	-5,62302	-2,91751	16,37235	-1,32314
4	-5,62302	1,459462	7,082486	-2,91785	-1,24572	-1,32186	-4,93962
5	-2,91785	1,459462	4,377309	-1,24592	-0,21246	-4,93952	-4,37979
6	-2,91785	-0,21246	2,705382	-1,88452	-1,24579	-4,21763	-4,93959
7	-1,88452	-0,21246	1,672053	-1,24587	-0,85111	-4,93955	-4,97783
8	-1,24579	-0,21246	1,033329	-0,85111	-0,60715	-4,97783	-4,84567
9	-1,24579	-0,60715	0,638646	-1,00186	-0,85108	-5	-4,97782
10	-1,24579	-0,85108	0,394713	-1,09503	-1,00184	-4,99097	-5
11	-1,09503	-0,85108	0,243951	-1,00185	-0,94426	-5	-4,99689
12	-1,09503	-0,94426	0,150773	-1,03744	-1,00185	-4,9986	-5
13	-1,03744	-0,94426	0,093185	-1,00185	-0,97985	-5	-4,99959
14	-1,03744	-0,97985	0,057593	-1,01545	-1,00185	-4,99976	-5
15	-1,01545	-0,97985	0,035595	-1,00185	-0,99345	-5	-4,99996
16	-1,01545	-0,99345	0,021999	-1,00704	-1,00185	-4,99995	-5
17	-1,00704	-0,99345	0,013597	-1,00185	-0,99864	-5	-5
18	-1,00704	-0,99864	0,008403	-1,00383	-1,00185	-4,99999	-5
19	-1,00383	-0,99864	0,005194	-1,00185	-1,00062	-5	-5
20	-1,00185	-0,99864	0,00321	-1,00062	-0,99987	-5	-5
21	-1,00062	-0,99864	0,001984	-0,99987	-0,9994	-5	-5
22	-1,00062	-0,9994	0,001226	-1,00016	-0,99987	-5	-5
23	-1,00062	-0,99987	0,000758	-1,00033	-1,00016	-5	-5

x =	-1,00024
F(x) =	-5

ε =	0,001
ϕ =	1,618
f(x) =	x^2 + 2x - 4

Рисунок 1.9 – Решение задания 1

Решение задания 2. Для выполнения данного задания воспользуемся математическим пакетом MathCAD.

В среде MathCAD зададим необходимую функцию и начальные приближения (рисунок 1.10).

$$f(x,y) := 2\cdot\exp\left[-\left[\frac{(x-1)}{2}\right]^2-(y-2)^2\right]+1\,\exp\left[-\left[\frac{(x-3)}{3}\right]^2-\left[\frac{(y-1)}{3}\right]^2\right]$$

$$x0 := 1 \qquad y0 := -1 \qquad k(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad k0 := k(x0,y0) \qquad k0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.10 – Функция и начальные данные

Далее находим частные производные функции, градиент и матрицу Гессе (рисунок 1.11).

$$f1(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow -e^{-\left(\frac{1}{3}\cdot x-1\right)^2-\left(\frac{1}{3}\cdot y-\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\left(\frac{2\cdot x}{9}-\frac{2}{3}\right) - 2\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\right)^2-(y-2)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$f2(x,y) := \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow -e^{-\left(\frac{1}{3}\cdot x-1\right)^2-\left(\frac{1}{3}\cdot y-\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\left(\frac{2\cdot y}{9}-\frac{2}{9}\right) - 2\cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\right)^2-(y-2)^2}\cdot(2\cdot y-4)$$

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} f1(x,y) \\ f2(x,y) \end{pmatrix} \qquad e := 10^{-6}$$

$$I(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f1(x,y) & \frac{d}{dy}f1(x,y) \\ \frac{d}{dx}f2(x,y) & \frac{d}{dy}f2(x,y) \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.11 – Производные функции, градиент и матрица Гессе

Далее добавим программируемую часть, где зададим количество шагов n за которое будет найден минимум, начальные значения x_0, y_0 и условия вычислений, при которых будет находится x и y до тех пор, пока не будет достигнуто значение, меньшее ξ (рисунок 1.12).

```
NR(f,x0,y0) := | (n ← 0  x ← x0  y ← y0)
               | (k2 ← k(x0,y0)  k1 ← f(x0,y0))
               | while [(k2 − k1)^T·(k2 − k1) > e]
               |   | k1 ← k2
               |   | k2 ← k1 − I(x,y)^(−1)·f(x,y)
               |   | (x ← k2_0  y ← k2_1)
               |   | n ← n + 1
               | (x)
               | (y)
               | (n)
```

Рисунок 1.12 – Нахождение минимума функции

Добавим элемент расчета, чтобы вывести полученный результат вычислений (рисунок 1.13).

$$NR(f,x0,y0) = \begin{pmatrix} -49.646332 \\ -50.803363 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.13 – Полученные результаты нахождения минимума функции

2 Задания для лабораторных работ

Для закрепления теоретического материала и навыков, полученных на практических занятиях, необходимо выполнить представленные ниже лабораторные работы на следующие темы: методы многомерной безусловной оптимизации, методы условной оптимизации (задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств), задача линейного программирования (симплекс-метод), транспортная задача (методы построения опорного плана: метод минимального элемента и северо-западного угла, метод нахождения оптимального плана: метод потенциалов), задача целочисленного программирования (метод Гомори и метод ветвей и границ), численные методы (численные методы одномерной и многомерной оптимизации).

Лабораторная работа 1. Методы многомерной безусловной оптимизации

Задание 1.

1. Исследовать функцию $z(x,y)$ на экстремум.
2. Написать программу на языке программирования высокого уровня (C/C++, C#, Java, Python и др.), реализующую это исследование или воспользоваться математическим пакетом (Mathcad, Smath Studio, Maple и т.д.).
3. Оформить отчет.

№ варианта	Целевая функция	№ варианта	Целевая функция
1.	$z(x,y)=x^2+xy+y^2-12x-3y$	6.	$z(x,y)=3x^3+y^3-x-3y^2-1$
2.	$z(x,y)=3-x^2+xy-y^2+2x-y$	7.	$z(x,y)=x^2y^2-2xy^2-6x^2y+12xy$
3.	$z(x,y)=x^2-xy+y^2+3x+6y$	8.	$z(x,y)=x^4+y^4-2x^2$
4.	$z(x,y)=3(x^2+y^2)-x^3+4y$	9.	$z(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$
5.	$z(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$	10.	$z(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

Пример. Исследовать функцию $z(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}-xy$ на экстремум.

Решение. Решение приведенной задачи реализовано в математическом пакете Smath Studio (рисунки 2.1, 2.2).

Математический пакет SMath Studio может применяться для численного и аналитического решения различных математических задач. Например, для решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем уравнений, нахождения экстремумов функций, вычисления производных и интегралов и др. математических задач.

Данный программный продукт имеет набор встроенных функций для работы с матрицами, строками, файлами и др. Кроме того, в пакете имеются основные операторы программирования (условный оператр if, операторы цикла for и while), есть возможность создания собственных пользовательских функций. Также возможно построение двух- и трехмерных графиков.

Для решения поставленной перед нами задачи, нам понадобятся инструменты нахождения производных и функция roots(), которая позволяет находить корни системы нелинейных уравнений.

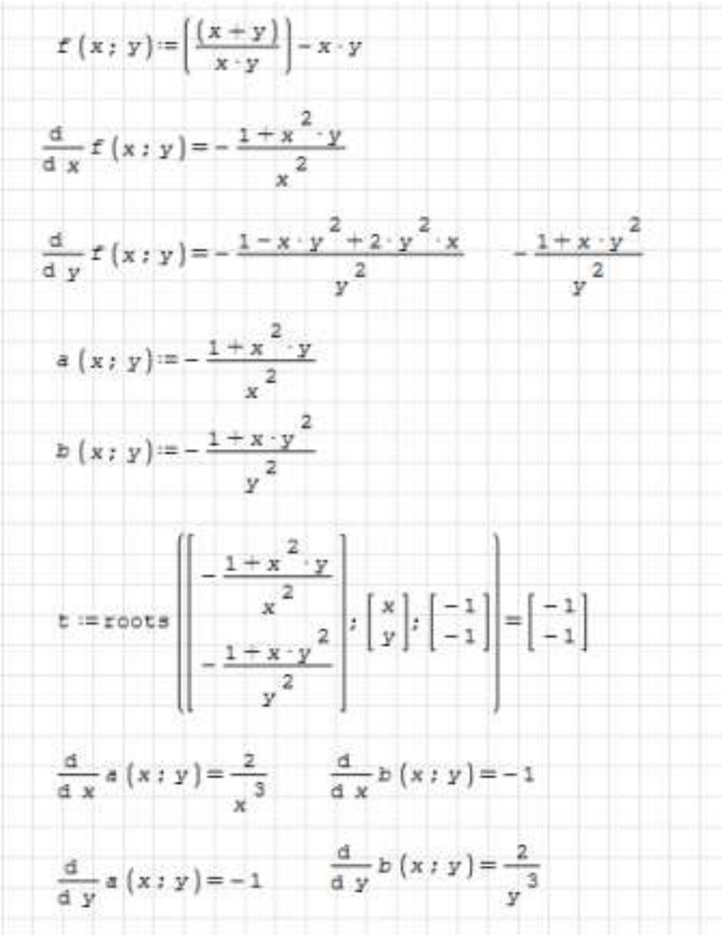

Рисунок 2.1 – Нахождение экстремума функции с использованием пакета Smath Studio

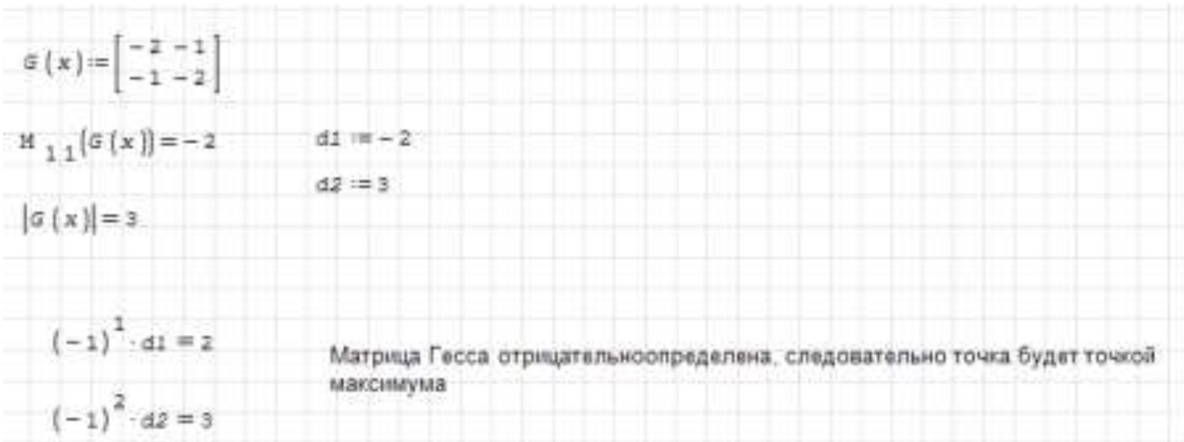

Рисунок 2.2 – Определение типа точки экстремума с использованием пакета Smath Studio

Лабораторная работа 2. Методы условной оптимизации

Задание 1.

1. Найти экстремум целевой функции с учетом заданного ограничения в виде равенства.
2. Написать программу на языке программирования высокого уровня (C/C++, C#, Java, Python и др.), реализующую это исследование или воспользоваться математическим пакетом (Mathcad, Smath Studio, Maple и т.д.).
3. Оформить отчет.

№ варианта	Целевая функция
1.	$f(x,y)=5-3x-4y$, $x^2+y^2=25$
2.	$f(x,y)=1-4x-8y$, $x^2-8y^2=8$
3.	$f(x,y)=x^2+xy+y^2$, $x^2+y^2=1$
4.	$f(x,y)=2x^2+12xy+y^2$, $x^2+4y^2=25$
5.	$f(x,y)=xy$, $x+y-1=0$
6.	$f(x,y)=x^2+y^2$, $3x+2y-6=0$
7.	$f(x,y)=x^2-y^2$, $2x-y-3=0$
8.	$f(x,y)=xy^2$, $x+2y-1=0$
9.	$f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$, $x-y-\frac{\pi}{4}=0$
10.	$f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y-4$, $x+y+3=0$

Задание 2.

1. Найти экстремум целевой функции с с учетом ограничения – неравенства.
2. Написать программу на языке программирования высокого уровня (C/C++, C#, Java, Python и др.), реализующую это исследование или воспользоваться математическим пакетом (Mathcad, Smath Studio, Maple и т.д.).
3. Оформить отчет.

№ варианта	Задание
1.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ в круге $\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2\le 9$
2.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=$ $=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-4x_1$ в замкнутой области $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $2x_1+3x_2\le 12$
3.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=x_1x_2+x_1+x_2$ в квадрате $1\le x_1\le 2$, $2\le x_1\le 3$
4.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=x_1x_2$ в круге $x_1^2+x_2^2\le 1$
5.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=$ $=x_1^2+x_2^2+x_1-x_2$ в треугольнике $x_1\le 1$, $x_2\le 1$, $x_1+x_2\ge 1$
6.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=1-x_1^2-x_2^2$ в круге $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 1$
7.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=$ $=\sin x_1+\sin x_2+\cos(x_1+x_2)$ в замкнутой области $0\le x_1\le\frac{3\pi}{2}$, $0\le x_2\le\frac{3\pi}{2}$
8.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1,x_2)=$ $=\sin x_1+\sin x_2+\sin(x_1+x_2)$ в замкнутой области $0\le x_1\le\frac{\pi}{2}$, $0\le x_2\le\frac{\pi}{2}$

№ варианта	Задание
9.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2 \sin(x_1 + x_2)$ в замкнутой области $0 \le x_1 \le \pi$, $0 \le x_2 \le \pi$
10.	Найти наименьшее и наибольшее значение функции $F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ в круге $x_1^2 + x_2^2 \le 1$

Пример. Найти экстремум целевой функции $f(x, y) = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$, относительно заданного уравнения связи $x^2 + y^2 = 2$.

Решение. Решение приведенной задачи реализовано в математическом пакете Smath Studio с помощью метода Лагранжа (рисунок 2.3).

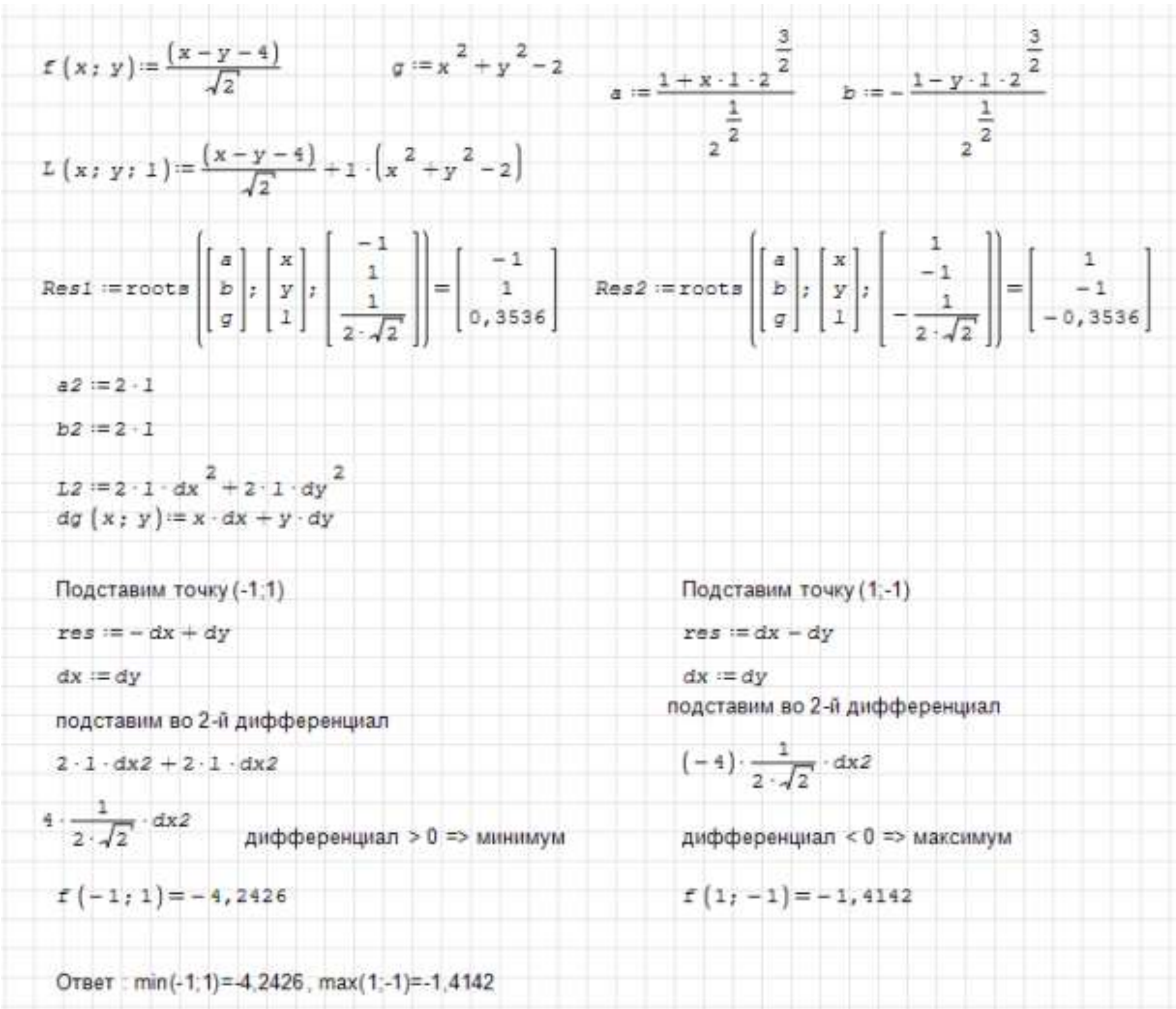

Рисунок 2.3 – Решение задачи условной оптимизации с ограничениями в виде равенств с использованием пакета Smath Studio

Пример. Найти экстремум функции:

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \\ g_1(x) = \dfrac{x_1^2}{4} + x_2^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

Решение. Решение приведенной задачи реализовано в математическом пакете Smath Studio методом Лагранжа (рисунок 2.4).

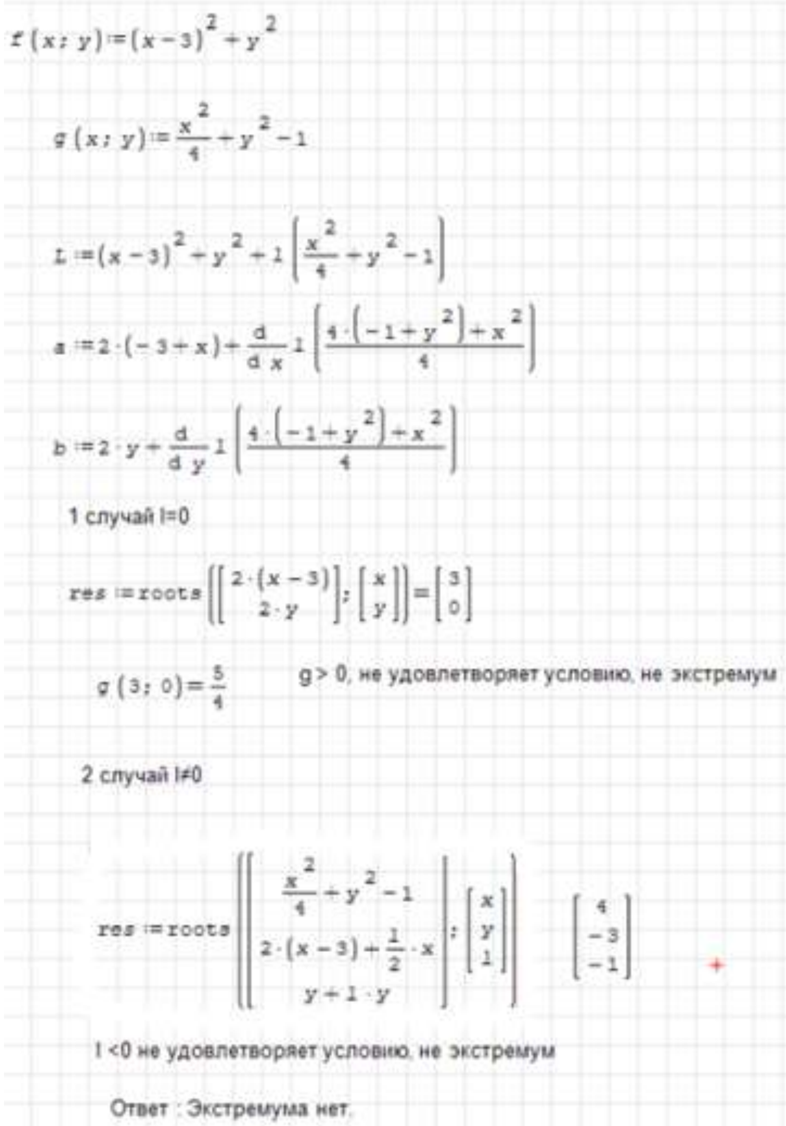

Рисунок 2.4 – Решение задачи условной оптимизации с ограничениями в виде неравенств с использованием пакета Smath Studio

Лабораторная работа 3. Задача линейного программирования

Задание. Согласно приведенной ниже таблицы, составить целевую функцию и ограничения для ЗЛП. Полученную задачу решить симплекс-методом.

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина I вида (куб. м)	0,2	0,1	40
Древесина II вида (куб. м)	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-часов)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (тыс. руб.)	600	800	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Пример. Предприятие выпускает два вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часов) на единицу продукции вида		Общий ресурс рабочего времени (станко-часов)
	1	2	
Токарное	1	3	300
Фрезерное	2	1	180
Шлифовальное	1	–	80
Прибыль от реализации (руб.)	2	3	

Решение 1. Решение данной задачи реализовано симплекс-методом с использованием языка программирования высокого уровня C++. Листинг кода программы приведен ниже (листинг 1). Результат выполнения программы представлен на рисунке 2.5.

```
Листинг 1
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <windows.h>
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <math.h>

using namespace std;
int main()
{
	double x1=1, x2=3, x3=0, x4=0, y1=2, y2=1, y3=0, y4=0, z1=1, z2=0, z3=0, z4=0;
	setlocale(LC_ALL, «RUSSIAN»);

	if (x1 != 0)
	{
		x3 = 600 / x1;
		x1 = 300 / x1;
	}
	if (x2 != 0)
	{
		x4 = 900 / x2;
		x2 = 300 / x2;
	}
	if (x3 < x4)
	{
		x3 = x4;
		x1 = x2;
	}
	if (y1 != 0)
	{
		y3 = 360 / y1;
		y1 = 180 / y1;
	}
	if (y2 != 0)
	{
		y4 = 540 / y2;
```

```
		y2 = 180 / y2;
	}
	if (y3 < y4)
	{
		y3 = y4;
		y1 = y2;
	}
	if (z1 != 0)
	{
		z3 = 160 / z1;
		z1 = 80 / z1;
	}
	if (z2 != 0)
	{
		z4 = 240 / z2;
		z2 = 80 / z2;
	}
	if (z3 < z4)
	{
		z3 = z4;
		z1 = z2;
	}
	cout <<»\nМаксимальная прибыль = « << x3 + y3 + z3
		<< «\nПРоизводство на ТОКАРНОМ оборудовании = « << x1
		<< «\nПРоизводство на ФРЕЗЕРНОМ оборудовании = « << y1
		<< «\nПРоизводство на ШЛИФОВАЛЬНОМ оборудовании = « << z1<<endl;

	system(«pause»);
	return 0;}
```

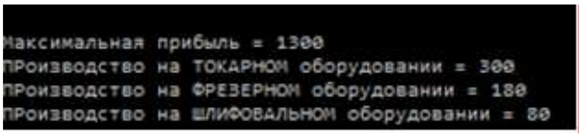

Рисунок 2.5 –Решение задачи линейного программирования

Лабораторная работа 4. Транспортная задача

Задание. Имеются 3 пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и 5 пунктов потребления этого груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На пунктах A_i $(i=1,2,3)$ груз находится соответственно в количествах a_1, a_2, a_3 условных единиц. В пункты B_j $(j=1,2,3,4,5)$ требуется доставить соответственно b_j единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_i в B_j определена матрицей $C=\{c_{ij}\}$. Составить распределительную таблицу и решить задачу методом потенциалов.

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1.	$a_1=390$, $a_2=450$, $a_3=400$ $b_1=310$, $b_2=250$, $b_3=150$, $b_4=440$, $b_5=90$	6.	$a_1=250$, $a_2=190$, $a_3=200$ $b_1=180$, $b_2=100$, $b_3=130$, $b_4=140$, $b_5=90$

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
	$C=\begin{pmatrix}20&11&10&12&12\\25&9&13&14&10\\24&7&10&13&22\end{pmatrix}$		$C=\begin{pmatrix}8&2&5&3&4\\3&7&9&5&6\\2&9&6&5&4\end{pmatrix}$
2.	$a_1=300$, $a_2=360$, $a_3=400$ $b_1=150$, $b_2=350$, $b_3=300$, $b_4=150$, $b_5=110$ $C=\begin{pmatrix}9&15&7&20&3\\8&6&9&3&2\\10&7&11&15&20\end{pmatrix}$	7.	$a_1=180$, $a_2=210$, $a_3=190$ $b_1=100$, $b_2=150$, $b_3=130$, $b_4=120$, $b_5=80$ $C=\begin{pmatrix}6&4&5&7&2\\5&3&7&4&8\\4&7&3&5&6\end{pmatrix}$
3.	$a_1=270$, $a_2=390$, $a_3=290$ $b_1=150$, $b_2=100$, $b_3=250$, $b_4=340$, $b_5=110$ $C=\begin{pmatrix}9&4&6&5&6\\17&11&15&3&7\\20&9&15&7&25\end{pmatrix}$	8.	$a_1=310$, $a_2=250$, $a_3=240$ $b_1=290$, $b_2=110$, $b_3=170$, $b_4=130$, $b_5=100$ $C=\begin{pmatrix}7&9&5&6&3\\4&6&8&6&7\\6&4&9&5&2\end{pmatrix}$
4.	$a_1=380$, $a_2=450$, $a_3=420$ $b_1=230$, $b_2=200$, $b_3=400$, $b_4=270$, $b_5=230$ $C=\begin{pmatrix}15&9&7&13&10\\14&10&3&14&7\\16&8&10&12&17\end{pmatrix}$	9.	$a_1=280$, $a_2=200$, $a_3=220$ $b_1=110$, $b_2=100$, $b_3=220$, $b_4=180$, $b_5=90$ $C=\begin{pmatrix}10&4&5&8&6\\7&3&6&9&10\\9&8&3&7&5\end{pmatrix}$
5.	$a_1=150$, $a_2=230$, $a_3=250$ $b_1=110$, $b_2=100$, $b_3=200$, $b_4=140$, $b_5=80$ $C=\begin{pmatrix}8&3&5&7&5\\7&9&3&7&4\\8&7&5&6&9\end{pmatrix}$	10.	$a_1=170$, $a_2=230$, $a_3=180$ $b_1=95$, $b_2=130$, $b_3=120$, $b_4=155$, $b_5=80$ $C=\begin{pmatrix}10&9&3&7&5\\9&7&5&12&13\\8&5&7&6&4\end{pmatrix}$

Лабораторная работа 5. Задача целочисленного линейного программирования

Задание. Решить задачу методом Гомори и методом ветвей и границ.

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1.	$\max L=4x_1+3x_2$ при ограничениях	6.	$\max L=3x_1+2x_2+2x_3$ при ограничениях $\begin{cases}4x_2+3x_3\le 7\\6x_1+5x_2+x_3=12\end{cases}$

	$\begin{cases} -6x_1+5x_2\le 14 \\ 3x_1+x_2\le 17 \\ -7x_1+3x_2\ge -44 \end{cases}$		
2.	$\max L=5x_1-3x_2$ при ограничениях $\begin{cases} -6x_1+8x_2\le 11 \\ -7x_1+x_2\le 5 \\ 7x_1-3x_2\le 13 \end{cases}$	7.	$\max L=-4x_1+x_2$ при ограничениях $\begin{cases} -7x_1+13x_2+3x_3\le 7 \\ x_1-6x_2+7x_3\le -9 \end{cases}$
3.	$\max L=2x_1+4x_2-4x_3$ при ограничениях $\begin{cases} 2x_1+7x_2+4x_3\le 9 \\ 7x_1+x_2+3x_3\le 11 \end{cases}$	8.	$\max L=-10x_1-14x_2-21x_3$ при ограничениях $\begin{cases} 2x_1+2x_2+7x_3\ge 14 \\ 8x_1+11x_2+9x_3\ge 12 \\ 9x_1+6x_2+3x_3\ge 10 \end{cases}$
4.	$\max L=x_1-3x_2-x_3+2x_4$ при ограничениях $\begin{cases} 2x_1+x_3-3x_4\le 12 \\ 3x_1-x_2+x_4\le 20 \end{cases}$	9.	$\max L=4x_1+3x_2+8x_3$ при ограничениях $\begin{cases} 21x_1-17x_2+19x_3\le 77 \\ 6x_1+4x_2+3x_3\le 29 \\ 10x_1+11x_3\le 65 \end{cases}$
5.	$\max L=x_1+10x_2$ при ограничениях $\begin{cases} 3x_1+4x_2\le 23 \\ -x_1+2x_2=4 \\ 2x_1+3x_2\le 14 \end{cases}$	10.	$\max L=2x_1+3x_2+4x_3$ при ограничениях $\begin{cases} x_1+5x_2+13x_3=37 \\ -9x_1+7x_2+4x_3\le 20 \\ -x_1+8x_2\ge 8 \end{cases}$

Лабораторная работа 6. Численные методы

Задание 1. Осуществить программную реализацию численного метода согласно варианту для поиска минимума функции.

Номер варианта	Целевая функция	Метод
1.	$f(x)=x^3-x,\ x\in[0;1]$	Метод Фибоначчи
2.	$f(x)=x^5-x^2,\ x\in[0;1]$	Метод перебора
3.	$f(x)=-x/e^x,\ x\in[0;3]$	Метод дихотомии
4.	$f(x)=x^4-x,\ x\in[0;1]$	Метод золотого сечения
5.	$f(x)=x^4/\ln x,\ x\in[1{,}1;1{,}5]$	Метод Фибоначчи
6.	$f(x)=(x+5)^4,\ x\in[-10;15]$	Метод перебора
7.	$f(x)=\cos(x),\ x\in[0;\pi]$	Метод дихотомии
8.	$f(x)=\sin(x),\ x\in[-\pi/2;\pi/2]$	Метод золотого сечения
9.	$f(x)=x^4-x,\ x\in[0;1]$	Метод Фибоначчи
10.	$f(x)=x^5-x^2,\ x\in[0;1]$	Метод перебора

Задание 2. Осуществить программную реализацию численного метода согласно варианту для поиска максимума заданной функции:

Для нечетных вариантов целевая функция имеет вид:

$$f(x,y)=A_1\exp\left\{-\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2-\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2\right\}+A_2\exp\left\{-\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2-\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2\right\}.$$

Для четных вариантов целевая функция имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{A_1}{1+\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2+\left(\frac{y-c_1}{d_1}\right)^2}+\frac{A_2}{1+\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2+\left(\frac{y-c_2}{d_2}\right)^2}.$$

Номер варианта	A_1	A_2	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	Метод поиска
1.	3	2	2	2	1	3	2	3	2	1	метод Марквардта
2.	2	3	3	1	1	1	2	1	1	3	метод градиентного спуска
3.	1	2	3	2	1	2	2	2	1	1	метод наискорейшего спуска
4.	2	1	1	2	2	2	1	1	3	2	метод сопряженных градиентов
5.	3	1	3	3	2	1	2	1	1	3	метод Ньютона
6.	2	1	1	3	2	3	2	1	1	3	метод Ньютона–Рафсона
7.	3	1	2	1	1	2	3	1	2	1	метод градиентного спуска
8.	2	1	2	3	3	1	2	1	1	3	метод наискорейшего спуска
9.	2	3	1	1	2	3	1	3	2	3	метод сопряженных градиентов
10.	3	2	2	2	1	3	2	3	2	1	метод Ньютона

Задание 3.

Решить задачу нелинейного программирования с использованием барьерных и штрафных функций. Условие: целевая функция из задания № 1 лабораторной работы № 2. Ограничения приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Варианты ограничений

Номер варианта	Ограничение	Номер варианта	Ограничение
1.	$x-y\le 1,\ 0\le x\le 4$	6.	$3x+2y\le 6$
2.	$x+y\le 1$	7.	$2x+y\le 2$
3.	$x+3y\le 3$	8.	$2x+3y\le 6$
4.	$3x+y\le 3$	9.	$3x+y\le 3$
5.	$2x-2y\le 1$	10.	$2x-2y\le 1$

3 Указания к самостоятельной работе студентов (СРС) и контрольные вопросы для оценивания

Виды самостоятельной работы

1. Выполнение индивидуальных практических заданий на темы: «Методы безусловной оптимизации», «Методы условной оптимизации», «Задачи линейного программирования», «Транспортная задача», «Задачи целочисленного программирования», «Численные методы».
2. Подготовка отчетов по лабораторным работам на темы: «Методы многомерной безусловной оптимизации», «Методы условной оптимизации», «Задачи линейного программирования», «Транспортная задача», «Задачи целочисленного программирования», «Численные методы».
3. Текущая проработка теоретического материала учебников и лекций.
4. Подготовка к лабораторным работам.
5. Подготовка к промежуточному тестированию.
6. Подготовка к экзамену.