Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Д.Н. Черепанов
Н.А. Ярушкина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Томск
2022

УДК 517
ББК 22.143
Ч-46

Рецензент:
Михальченко С.Г., зав. кафедрой промышленной электроники, д.-р. тех. наук, доцент

Черепанов, Дмитрий Николаевич
Ч-46 Линейная алгебра: методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» / Д.Н. Черепанов, Н.А. Ярушкина – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2022. – 53 с.

Настоящие методические указания по дисциплине «Математика», раздел «Линейная алгебра и решение СЛАУ», составлены с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника».

Методические указания содержат описание основных теоретических положений по разделу, примеры решения задач и их выполнения в Mathcad, задачи для самостоятельного решения обучающимися.

Одобрено на заседании кафедры промышленной электроники, протокол № 17 от 30.08.2022.

УДК 517
ББК 22.143

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Математика» является формирование научной картины мира на основе знания основных положений и методов математики; формирование способности привлекать для решения профессиональных задач соответствующий физико-математический аппарат; изучение основных математических понятий, их взаимосвязи; изучение методов расчета, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных инженерных задач, а также формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1: способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности.

Раздел «Линейная алгебры», является фундаментом курса математики, поскольку знания, умения и навыки, получаемые при его изучении, необходимы для освоения других разделов. Кроме того, успешное изучение этого раздела необходимо для понимания и усвоения других общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом. Линейная алгебра широко используется во всех разделах математики и ее приложениях. Особенно возросла роль линейной алгебры в связи с развитием вычислительной техники. Можно сказать, что любое математическое приложение в вычислительной практике на том или ином этапе сводится к решению алгебраической задачи. Логическая структура линейной алгебры проста, однако абстрактный характер алгебраических понятий затрудняет первоначальный опыт изучения раздела.

По окончанию освоения раздела «Линейная алгебра» обучающиеся должны демонстрировать следующие результаты обучения:

1) знать: основные понятия и утверждения алгебры матриц, теории линейных пространств, теории квадратичных форм;

2) уметь: решать системы линейных алгебраических уравнений; приводить квадратичные формы к каноническому виду и определять их тип;

3) владеть: основными методами анализа систем линейных алгебраических уравнений и квадратичных форм.

Материал раздела разбит на темы, каждая из которых содержат: теоретический материал; методические рекомендации по решению задач; типовые упражнения для решения на семинарах и указания для выполнения лабораторных работ в пакете прикладных программ «Mathcad», содержащем модули символьных вычислений.

Освоение раздела «Линейная алгебра» сопровождается выполнением индивидуального задания и его защитой, в качестве метода тестирования, определяющего уровень усвоения материала раздела. Возможно также проведение контрольных работ и тестирования в электронном курсе.

1 АЛГЕБРА МАТРИЦ

1.1 Основные теоретические положения

Понятие матрицы

Матрицей размера $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов, называется квадратная или прямоугольная таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Сами числа называются *элементами матрицы*.

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n, то матрица называется *квадратной порядка n*.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i – номер строки, $i = 1, \ldots, m$, j – номер столбца, $j = 1, \ldots, n$, на пересечении которых находится элемент:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В приложениях математики используются матрицы, элементами которых могут быть, например, векторы, функции, производные функций и другие математические объекты.

Виды матриц:

1. Если число строк матрицы не равно числу столбцов $(m \neq n)$, то матрица называется *прямоугольной*.

2. Если $m = n$ матрица называется *квадратной* матрицей порядка n.

Диагональ квадратной матрицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол называется *главной диагональю*, из правого верхнего угла в левый нижний – *побочной диагональю*.

3. *Нулевая* матрица – матрица, все элементы которой равны нулю (нулевая матрица не обязательно должна быть квадратной):

$$\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5. *Единичная* матрица – квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Квадратная матрица называется *треугольной* (*верхнетреугольной* или *нижнетреугольной*), если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

7. Матрица называется *ступенчатой*, если она содержит r ненулевых строк и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rk} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

8. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (*вектор-столбец* или *вектор-строка*).

9. Матрица $A^T = \left\{a_{ji}\right\}$ называется *транспонированной* по отношению к матрице $A = \left\{a_{ij}\right\}$, если в матрице A строки заменены на столбцы соответствующих номеров.

Две матрицы $A = \left\{a_{ij}\right\}$ и $B = \left\{b_{ij}\right\}$ называются *равными* ($A = B$), если:

1) размер (порядок) матриц совпадают;
2) соответствующие элементы матриц равны $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными* $\left(A \sim B\right)$, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Элементарные преобразования над матрицами:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Операции над матрицами:

1) умножение матрицы на число;
2) сложение (вычитание) матриц;
3) умножение матрицы на матрицу.

Операции умножения матрицы на число и сложение (вычитание) матриц называются *линейными*.

Умножением матрицы A на число λ называется матрица C, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$C = \lambda \cdot A = \left\{\lambda a_{ij}\right\}.$$

Суммой (*разностью*) двух матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой определяются равенствами:

$$C = A \pm B \text{ или } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

Операция сложения (вычитания) матриц определена только в случае, если матрицы имеют одинаковый размер.

Свойства линейных операций над матрицами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + \left(B + C\right) = \left(A + B\right) + C$;
3. $\lambda\left(A + B\right) = \lambda A + \lambda B$;
4. $\left(\lambda \cdot \mu\right) A = \lambda \cdot \left(\mu \cdot A\right)$;

5. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Произведением матрицы A размера $m\times n$ на матрицу B размера $n\times k$ называется матрица C размера $m\times k$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца равен сумме произведений элементов i-й строки первого сомножителя на элементы j-го столбца второго сомножителя:

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{sj}.$$

Замечания:

1. Операция умножения двух матриц определена, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

2. Операция умножения матриц не является коммутативной:

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

Если выполняется условие $A\cdot B=B\cdot A$, то говорят, что матрицы A и B *коммутируют* (называются *перестановочными*)

3. Операция умножения матриц обладает свойствами:

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C.$$

4. Если определены произведения $A\cdot E$ и $E\cdot A$, то имеют место равенства:

$$A\cdot E=A \text{ и } E\cdot A=A.$$

1.2 Примеры решения задач

Пример 1.1. Выполнить операции над матрицами

$$5\cdot\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&4&-3\end{pmatrix}^T-3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\\10&7\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$5\cdot\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&4&-3\end{pmatrix}^T-3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\\10&7\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\\0&-3\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&2\\4&-3\\10&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&10\\-5&20\\0&-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6\\12&-9\\30&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&4\\-17&29\\-30&-36\end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Выполнить операции над матрицами

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&0\\-5&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&4\\3&0&-5\end{pmatrix}^T.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&0\\-5&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&4\\3&0&-5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&0\\-5&6&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\\4&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2+8&9+0-10\\4-4+0&12+0+0\\-5-12+4&-15+0-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-1\\0&12\\-13&-20\end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&3\\2&0\\-1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}3&-1&-6\end{pmatrix}.$$

Определить, для каких матриц определены операции сложения и умножения, и выполнить эти операции.

Решение:

Матрица A имеет размер 2×3, матрица B имеет размер 2×3, матрица C имеет размер 3×2, матрица D имеет размер 3×1, матрица F имеет размер 1×3.

Следовательно, сумма матриц $A+B$ может быть найдена, так как матрицы A и B имеют одинаковый размер:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для A и B.

$A\cdot B$ и $B\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 2×3 и 2×3).

$A\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×2), полученная матрица будет иметь размер 2×2:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+(-2)\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 5+1\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

$C\cdot A$ можно найти (размерности матриц 3×2 и 2×3), полученная матрица будет иметь размер 3×3:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-2)+3\cdot 1 & 5\cdot 3+3\cdot 4\\ 2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-2)+0\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot 4\\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot(-2)+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -7 & 27\\ 2 & -4 & 6\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$A\cdot D$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 2×1:

$$A\cdot D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6+12\\ 0-3+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 13\end{pmatrix}.$$

$D\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 2×3); $A\cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 2×3 и 1×3); $F\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 1×3 и 2×3).

$B\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×2), полученная матрица будет иметь размер 2×2:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-6-2 & 9-0+2\\ 5-2+2 & 3-0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 11\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$$

$C\cdot B$ можно найти (размерности матриц 3×2 и 2×3), полученная матрица будет иметь размер 3×3:

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15+3 & -15-3 & 10-6\\ 6+0 & -6+0 & 4-0\\ -3+1 & 3-1 & -2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -18 & 4\\ 6 & -6 & 4\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

$B\cdot D$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 2×1:

$$B\cdot D=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+9+8\\ 2+3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\ -3\end{pmatrix}.$$

$D \cdot B$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 2×3); $B \cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 2×3 и 1×3); $F \cdot B$ нельзя найти (размерности матриц 1×3 и 2×3); $D \cdot B$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 2×3); $C \cdot D$ нельзя найти (размерности матриц 3×2 и 3×1); $D \cdot C$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 3×2); $C \cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 3×2 и 1×3); $F \cdot C$ можно найти (размерности матриц 1×3 и 3×2), полученная матрица будет иметь размер 1×2:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot5+(-1)\cdot2+(-6)\cdot(-1) & 3\cdot3+(-1)\cdot0+(-6)\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 3 \end{pmatrix}.$$

$D \cdot F$ можно найти (размерности матриц 3×1 и 1×3), полученная матрица будет иметь размер 3×3:

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -9 & 3 & 18 \\ 12 & -4 & -24 \end{pmatrix}.$$

$F \cdot D$ можно найти (размерности матриц 1×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 1×1:

$$F \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}.$$

1.3 Решение задач в Mathcad

Определение и ввод матрицы в рабочий документ Mathcad

Чтобы определить матрицу нужно:

1) ввести с клавиатуры имя матрицы и знак присваивания;

2) щелкнуть по кнопке *Панель векторов и матриц* в панели математических инструментов, чтобы открыть панель матричных операций;

3) открыть щелчком по кнопке *Матрица или вектор* окно диалога определения размерности матрицы и ввести размерность матрицы: число строк (Rows), число столбцов (Columns);

4) закрыть окно диалога, щелкнув по кнопке Ok.

По умолчанию в Mathcad координаты векторов, столбцы и строки матрицы нумеруются начиная с 0 (ORIGIN:=0). Поскольку в математической записи чаще используется нумерация с 1, удобно перед началом работы с матрицами определять значение переменной ORIGIN равным 1, выполнять команду ORIGIN:=1.

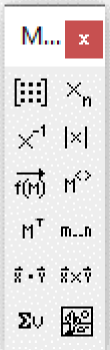
Функции определения матриц

– matrix(m, n, f) – создает и заполняет матрицу размерности m x n, элемент которой, расположенный в *i*-й строке, *j*-м столбце, равен значению $f(i, j)$ функции $f(x, y)$;

– diag(v) – создает диагональную матрица, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе v;

– identity(n) – создает единичную матрицу порядка *n*.

Используем для решения задач панель инструментов Матрица



Задаем индексацию элементов матриц с 1

$ORIGIN := 1$

Создаем и заполняем матрицу А размерности 3 x 4, элемент которой, расположенный в i -й строке, j -м столбце, равен значению f(i, j) функции f(x, y)

$f(x,y) := x + y$

$$A := matrix(3,4,f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

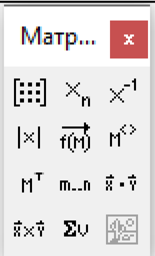
Создаем и заполняем диагональную матрицу В размерности 4 x 4

$i := 1..4 \qquad v_i := i$

$$B := diag(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1 – Способы создания матриц

Используем для решения задач панель инструментов Матрица



Задаем матрицы $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Задаем индексацию элементов матриц с 1

$ORIGIN := 1$

Выбираем в матрице А элемент, расположенный во второй строке и третьем столбце

$A_{2,3} = 6$

Извлекаем из матрицы В второй столбец $B^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Транспонируем матрицы $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Находим матрицу С

$$C := \left(-3 \cdot A + 2 \cdot A^T\right) \cdot B = \begin{pmatrix} 28 & 35 \\ -28 & -56 \\ -84 & -147 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу D

$$\boxed{D := \left(-3 \cdot A + 2 \cdot A^T\right) \cdot B^T = \blacksquare}$$

Эти измерения массива не соответствуют.

Получаем сообщение об ошибке, так как требование к количеству строк и столбцов перемножаемых матриц не выполняется

Рисунок 2 – Примеры операций над матрицами

1.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$. Найдите сумму элементов матрицы $a_{21}+a_{32}+a_{23}$.

2. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=2\cdot A-3\cdot B^T$.

3. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Укажите все произведения матриц, которые имеют смысл, и найдите эти произведения.

4. Найдите квадрат матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

5. Матрица C является произведением двух матриц

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите следующие элементы матрицы C: $c_{12}, c_{23}, c_{31,} c_{42}$.

2 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

2.1 Основные теоретические положения

Перестановки и инверсии

Любой множество, состоящее из n чисел $1,2,\ldots,n$, расположенных в произвольном порядке, называется *перестановкой* чисел $1,2,\ldots,n$ и обозначается $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где каждое a_k $(k=1,2,\ldots,n)$ является одним из чисел $1,2,\ldots,n$ и среди a_k нет одинаковых.

Если в перестановке $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ выбрать два числа a_i и a_j и, при этом, большее из них окажется расположенным в перестановке левее меньшего, тогда говорят, что числа a_i и a_j в данной перестановке образуют *инверсию*.

Понятие определителя квадратной матрицы

Пусть задана квадратная матрица A порядка n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные произведения по n элементов матрицы A, взятых из разных строк и столбцов, т.е. произведения вида $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$, где индексы столбцов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют некоторую перестановку из чисел $1, 2, \ldots, n$, индексы строк при этом располагаются в правильном порядке, т.е. без инверсий.

Число таких различных произведений будет равно числу различных перестановок из чисел $1, 2, \ldots, n$, т.е. равно произведению $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (факториал). Обозначим число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ через S. Число S будет зависеть от вида перестановки, т.е. $S = S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Определителем (*детерминантом*) квадратной матрицы порядка n называется алгебраическая сумма $n!$ слагаемых вида $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$, взятых со знаком плюс, если в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ число инверсий четно и со знаком минус, если число инверсий нечетно. Определитель принято обозначать $|A|$ ($\det(A)$ или Δ). Таким образом,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^S a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n},$$

где сумма берется по всем различным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; S – число инверсий в соответствующей перестановке.

Замечания:

1. При составлении произведения $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$ берется по одному элементу из каждой строки и каждого столбца.
2. Число слагаемых определителя порядка n равно числу $n!$.
3. Определитель – это число, которое ставится в соответствие только квадратной матрице.
4. Когда говорят о строках и столбцах определителя, имеют в виду строки и столбцы матрицы, которой соответствует этот определитель.

Методы вычисления определителей

1. *Определителем 2-го порядка* называется число, вычисляемое по формуле

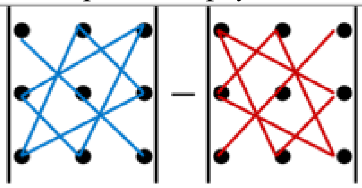
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т.е. определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

2. *Определителем 3-го порядка* называется число, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Для вычисления определителей 3-го порядка можно воспользоваться одним из правил:

Правило треугольников	*Правило Саррюса*
	$\begin{array}{ccc\|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$ $- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$
$\|A\| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.	

3. Метод *разложения по элементам строки или столбца* (вычисление определителя произвольного порядка)

Запишем вычислительную формулу для определителя третьего порядка, сгруппировав слагаемые, содержащие элементы первой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\right) + \left(a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\right) + \left(a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\right) =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{12}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = M_{13}.$$

Числа M_{11}, M_{12}, M_{13} называются *минорами второго порядка*, соответствующими элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}. С использованием миноров вычислительная формула для определителя третьего порядка принимает вид

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j}.$$

Полученная формула называется формулой *разложения определителя по элементам первой строки*.

По аналогии можно дать определение минора M_{ij}, соответствующего элементу a_{ij} матрицы A порядка n.

Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij}, называется определитель $(n-1)$-го порядка, соответствующий матрице, которая получается вычеркиванием из матрицы A i-й строки и j-го столбца.

Формулы для вычисления определителя n-го порядка методом разложения по элементам строки или столбца:

1. Вычисление определителя n-го порядка путем разложения по элементам k-й строки:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}M_{kj}, \ k - \text{фиксировано}, \ 1 \le k \le n.$$

2. Вычисление определителя n-го порядка путем разложения по элементам k-го столбца:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}M_{ik}, \ k - \text{фиксировано}, \ 1 \le k \le n.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя называется *минор этого элемента*, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где *i* – номер строки, а *j* – номер столбца, на пересечении которых находится элемент:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Свойства определителей

1. Величина определителя не меняется при транспонировании:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из свойства 1 следует, что строки и столбцы определителя равноправны, поэтому все остальные свойства будут сформулированы для строк, но они будут справедливы и для столбцов.

2. Определитель, содержащий строку (столбец) из одних нулей, равен нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Процедура, при которой меняются местами две любые строки (два любых столбца) определителя, называется *транспозицией*.

Транспозиция меняет знак определителя на противоположный:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{in} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя умножить на любое число λ, то величина определителя изменится в λ раз:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: в 1-ом в строке (столбце) с тем же номером стоят первые слагаемые, а во 2-ом – вторые:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Величина определителя не изменится, если к некоторой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+\lambda a_{in} & a_{j2}+\lambda a_{i2} & \dots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель, имеющий две строки (столбца), соответствующие элементы которых пропорциональны, равен нулю.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, расположенных на ее главной диагонали:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1. Определить во множестве чисел 1, 2, 3 возможные перестановки и число инверсий в каждой перестановке.

Решение:

Во множестве чисел 1, 2, 3 возможны следующие перестановки: $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(1,3,2)$ $(3,2,1)$, $(2,1,3)$.

Число инверсий в перестановках равно соответственно 0, 2, 2, 1, 3, 1.

Пример 2.2. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 5 + 6 = 11.$$

Пример 2.3. Вычислить определитель, используя правило треугольников $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$|A| = -2 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 3.$$

Пример 2.4. Вычислить определитель, используя свойства определителей $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & 50 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

По свойству 4 имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -10 & 30 & 50 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot (63 + 0 - 2 - 0 - 15 - 70) = -240.$$

Пример 2.5. Найти миноры элементов a_{13} и a_{22} определителя $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение:

Минор элемента $a_{13} = 4$:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 4 \cdot (-4) = 21.$$

Минор элемента $a_{22} = 4$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-4) = 14.$$

Пример 2.6. Найти алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{22} определителя $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 21 = 21.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 = 14.$$

Пример 2.7. Вычислить определитель разложением по первой строке

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

Разложим определитель по первой строке:

$$|A| = -2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(6+1) - 6\cdot(-3) + 1\cdot(-1) = 3.$$

Пример 2.8. Вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

Решение:

1-й способ

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 2, получим

$$|A| = \begin{vmatrix} -2-2\cdot(-1) & 6-2\cdot 2 & 1-2\cdot 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по первому столбцу:

$$|A| = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

2-й способ

Вычтем из третьего столбца второй, умноженный на 3, получим

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1-3\cdot 6 \\ -1 & 2 & -1-3\cdot 2 \\ 0 & 1 & 3-3\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -17 \\ -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по третьей строке:

$$|A| = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & -17 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -17 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

2.3 Решение задач в Mathcad

Для формирования матрицы, которая является блоком матрицы A, расположенным в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc, используется функция submatrix(A, ir, jr, ic, jc).

Для решения уравнений с одной неизвестной может быть использована команда solve.

Находим решение уравнения $\left|\begin{pmatrix} x-4 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Находим решение уравнения $\left|\begin{pmatrix} x-4 & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Рисунок 3 – Решение уравнений с одной неизвестной

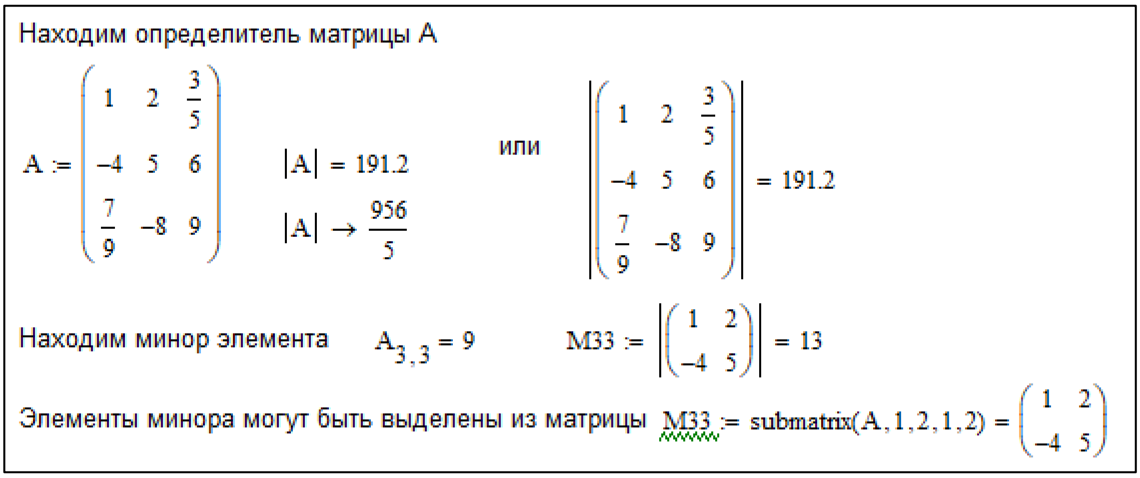


Рисунок 4 – Способы вычисления определителя матрицы

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите определители матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

2. Вычислите определители матриц $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 6\\ -6 & 10 & 9\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 1\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix}20 & 21 & 22\\ 0 & 5 & b\\ 0 & a & -2\end{vmatrix}$, если определитель $\begin{vmatrix}5 & a\\ b & -2\end{vmatrix}$ равен 0,5.

4. Дан определитель $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 5\\ 4 & a_{32} & -3 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$. Найдите минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} элемента a_{32}.

5. Решите уравнение $\begin{vmatrix}x^2-4 & 4\\ x-2 & x+2\end{vmatrix}=0$.

3 ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

3.1 Основные теоретические положения

Понятие обратной матрицы

Пусть A − квадратная матрица, тогда квадратная матрица, обозначаемая символом A^{-1} и удовлетворяющая условиям:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E,$$

называется матрицей, *обратной* к матрице A.

Квадратная матрица, определитель которой равен нулю (не равен нулю), называется *вырожденной* (*невырожденной*).

Методы нахождения обратной матрицы

1. Метод *алгебраических дополнений*

Алгоритм:

1. Вычислить определитель $|A|$. Если $|A| \neq 0$, то матрица *A* имеет обратную. Если $|A| = 0$, то матрица *A* не имеет обратной.

2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы *A*.

3. Построить и транспонировать матрицу из алгебраических дополнений (построить союзную матрицу).

4. Разделить все элементы полученной матрицы на $|A|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ – *союзная* матрица, составленная из алгебраических дополнений и затем транспонированная.

2. Метод *Гаусса-Жордана* (вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований)

Алгоритм:

1. Составить матрицу $D = (A\,|\,E)$, приписав к исходной матрице *A* справа единичную матрицу *E* того же порядка.

2. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу *D* так, чтобы обратить ее левую часть в единичную матрицу, тогда правая часть – это обратная матрица A^{-1}.

Матричные уравнения

Рассмотрим несколько типов матричных уравнений:

1. Уравнение типа $AX = B$.

Заданы матрицы *A*, *B*. Матрица *A* – невырожденная. Умножим матричное равенство слева на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B.$$

2. Уравнение типа $XA = B$.

Заданы матрицы *A*, *B*. Матрица *A* – невырожденная. Умножим матричное равенство справа на A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \;\Rightarrow\; XE = BA^{-1} \;\Rightarrow\; X = BA^{-1}.$$

3. Уравнение типа $AXB = C$.

Заданы матрицы *A*, *B*. Матрица *A* и *B* – невырожденные. Умножим матричное равенство слева на A^{-1}, справа на B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \;\Rightarrow\; EXE = A^{-1}CB^{-1} \;\Rightarrow\; X = A^{-1}CB^{-1}.$$

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.1. Найти матрицу, обратную к матрице A, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$$

следовательно матрица A имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-5) = -5, \qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot 4 = -4, \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2.$$

Построим матрицу из алгебраических дополнений

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу $\bar{A}$

$$\left(\bar{A}\right)^T = \tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Разделим все элементы полученной матрицы на $|A| = -14$, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\bar{A}\right)^T = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{14} \end{pmatrix}.$$

Выполняем проверку $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{2}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{5}{14} + 4 \cdot \frac{1}{14} & 2 \cdot \frac{4}{14} + 4 \cdot \frac{-2}{14} \\ 1 \cdot \frac{5}{14} - 5 \cdot \frac{1}{14} & 1 \cdot \frac{4}{14} - 5 \cdot \frac{-2}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример 3.2. Найти матрицу, обратную к матрице A, методом алгебраических дополнений, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Вычисляем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$$

следовательно матрица A имеет обратную.

2. Находим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 7 & -4\end{vmatrix}=-12,\quad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix}=4,\quad A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 7 & -4\end{vmatrix}=-26,\quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}5 & -6\\ 4 & -4\end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 7\end{vmatrix}=-19,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & 0\end{vmatrix}=18,\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-6,\quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=11.$$

Строим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}-12 & 4 & -5\\ -26 & 4 & -19\\ 18 & -6 & 11\end{pmatrix}.$$

3. Строим союзную матрицу (транспонируем матрицу из алгебраических дополнений):

$$\tilde{A}=\left(\bar{A}\right)^T=\begin{pmatrix}-12 & -26 & 18\\ 4 & 4 & -6\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}.$$

4. Делим все элементы полученной матрицы на $|A|=-14$, получим:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-12 & -26 & 18\\ 4 & 4 & -6\\ -5 & -19 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{14} & \frac{26}{14} & -\frac{18}{14}\\ -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{6}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} & -\frac{11}{14}\end{pmatrix}.$$

Выполняем проверку: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 4 & -6\\ 1 & 3 & 0\\ 4 & 7 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{12}{14} & \frac{26}{14} & -\frac{18}{14}\\ -\frac{4}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{6}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac{19}{14} & -\frac{11}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1}\cdot A=E$.

Пример 3.3. Найти матрицу, обратную к матрице A, методом Гаусса-Жордана, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение:

1. Составляем матрицу $D=\left(A\,|\,E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$.

2. Выполняем элементарные преобразования над строками матрицы D:

а) элементы первой строки матрицы D умножаем на (-1) и прибавляем к элементам второй и третьей строк

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

б) элементы второй строки умножаем на (-1) и прибавляем к элементам третьей строки

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

в) элементы третьей строки умножаем на (-2) и прибавляем к элементам второй строки

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(E \mid A^{-1}\right).$$

Получена $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Выполняем проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример 3.4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Введем следующие обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ найдем обратную матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3. Решение задач в Mathcad

Находим обратную к матрице A

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 240 \qquad A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{31}{80} & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{80} \\ \frac{13}{40} & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{40} \\ -\frac{1}{80} & \frac{11}{120} & \frac{13}{240} \end{pmatrix}$$

Выполняем проверку

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Находим обратную к матрице B

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad |B| = 0 \qquad B^{-1} \rightarrow \text{undefined}$$

Так как определитель матрицы B равен нулю, обратная матрица не определена

Рисунок 5 – Нахождение обратной матрицы

3.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите матрицу, обратную данной, и сделайте проверку: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Найдите матрицу, обратную данной, и сделайте проверку: $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.
3. Докажите свойство обратной матрицы $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ на примере матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Докажите свойство обратной матрицы $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ на примере матриц
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Решите матричные уравнения и сделайте проверку:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot X = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4 НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

4.1 Основные теоретические положения

Понятие и виды систем линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система m линейных уравнений с n неизвестными, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы, а числа b_i – *свободными членами.*

Решением системы называется совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при подстановке которых в систему получаем верные равенства.

Система, имеющая решение, называется *совместной*.

Система, не имеющая решения, называется *несовместной*.

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases},$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если $|A| \neq 0$, то система называется *невырожденной*. В противном случае СЛАУ называется *вырожденной*.

Методы решения невырожденных систем уравнений

1. *Матричный* метод

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в следующей матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Пусть $|A| \neq 0$, тогда существует A^{-1} и СЛАУ имеет решение

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

2. Метод *Крамера*

В случае, когда матрица A является квадратной и имеет обратную матрицу, решение СЛАУ можно найти по *формулам Крамера:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, Δ_j – определители, полученные из определителя матрицы A (обозначим Δ) заменой j-го столбца столбцом свободных членов системы уравнений.

Если $\Delta = 0$ и все определители $\Delta_j = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система не имеет решений.

4.2 Примеры решения задач

Пример 4.1. Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Вычисляем определитель матрицы A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 0 - 0 - 3 - 12 = -9 \neq 0$, следовательно, существует A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение системы уравнений: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 5$.

Пример 4.2. Решить методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ – формулы Крамера, где i =1, 2, 3.

$$\Delta = -9,\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36,\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-18}{-9} = 2,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{36}{-9} = -4,\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45}{-9} = 5.$$

4.3 Решение задач в Mathcad

Для решения определенных СЛАУ может быть использована функция lsolve(A, b), где A – основная матрица системы, b – столбец свободных членов уравнений.

Решаем СЛАУ

$$\begin{aligned} x1 + 6x2 + 3x3 &= 0 \\ 6x1 + 4x2 + 7x3 &= 3 \\ 9x2 + 4x3 &= 2 \end{aligned}$$

Выписываем основную матрицу системы и столбец свободных членов уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{lsolve}(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{69}{29} \\ -\frac{34}{29} \\ \frac{91}{29} \end{pmatrix}$$

Проверка $\quad A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Рисунок 6 – Решение СЛАУ с использования функции lsolve

Решаем СЛАУ

$$\begin{aligned} x1 + 6x2 + 3x3 &= 0 \\ 6x1 + 4x2 + 7x3 &= 3 \\ 9x2 + 4x3 &= 2 \end{aligned}$$

Выписываем основную матрицу системы и столбец свободных членов уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1} \cdot b \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{69}{29} \\ -\frac{34}{29} \\ \frac{91}{29} \end{pmatrix}$$

Проверка $\quad A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Рисунок 7 – Решение СЛАУ матричным методом

Решаем СЛАУ методом Крамера

$$x1 + 6x2 + 3x3 = 0$$
$$6x1 + 4x2 + 7x3 = 3$$
$$9x2 + 4x3 = 2$$

$\underline{ORIGIN} := 1$

Выписываем основную матрицу системы и столбец свободных членов уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Составляем частные определители, последовательно заменяя каждый столбец столбцом

$$A1 := \mathrm{augment}(b, \mathrm{submatrix}(A,1,3,2,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A2 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,3,1,1), b, \mathrm{submatrix}(A,1,3,3,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A3 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A,1,3,1,2), b) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := \frac{|A1|}{|A|} \to -\frac{69}{29} \qquad x2 := \frac{|A2|}{|A|} \to -\frac{34}{29} \qquad x3 := \frac{|A3|}{|A|} \to \frac{91}{29}$$

Проверка $\quad A \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Рисунок 8 – Решение СЛАУ методом Крамера

4.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему линейных уравнений методами Крамера и обратной матрицы, сделайте проверку:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 = 9. \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 = 10. \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 = -14. \end{cases}$

2. Решите систему линейных уравнений методами Крамера и обратной матрицы, сделайте проверку:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -7, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

3. Найдите значение параметра a, при котором СЛАУ имеет единственное решение, и это решение в зависимости от параметра: $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 - ax_3 = -3. \end{cases}$

5 РАНГ МАТРИЦЫ

5.1 Основные теоретические положения

Понятие ранга матрицы

Пусть A – матрица размера $m \times n$. *Ранг матрицы* – это максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы A. Обозначение $r = r(A) = \operatorname{rang}(A)$.

Любой минор порядка r, отличный от нуля, называется *базисным минором*.

Теорема (*о базисном миноре*).

Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы, а любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Свойства ранга

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку, то ее ранг не меняется.
3. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.
4. Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.

Ранг матрицы трапециевидной формы равен числу ее ненулевых строк.

Для приведения матрицы к трапециевидной форме используются следующие элементарные преобразования:

1) перестановка строк (столбцов);

2) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Методы нахождения ранга матрицы

1. Метод *окаймляющих миноров*.

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

2. Метод *Гаусса* (*элементарных преобразований*).

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ $\left(r \le \min(m,n)\right)$, равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

5.2 Примеры решения задач

Пример 5.1. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

Ранг заданной матрицы равен 1 $\left(r(A) = 1\right)$, т.к. все миноры второго порядка равны нулю.

Пример 5.2. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

Ранг заданной матрицы равен 2 $\left(r(B) = 2\right)$, т.к. есть минор 2-го порядка, не равный нулю (например, в левом верхнем углу $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$), а любой минор 3-го порядка равен нулю, т.к. содержит нулевую строку.

Пример 5.3. Найти ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение:

Ранг матрицы C не меньше 2, т.к. существует минор, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-6) = 7 \neq 0.$$

Ранг матрицы C равен 2, если $|C| = 0$. Для вычисления определителя первую строку, умноженную на (-3) прибавляем ко второй строке, а первую строку, умноженную на 5, прибавляем к третьей строке:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -14 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

В полученном определителе вторая и третья строки пропорциональны (коэффициент пропорциональности равен (-2)). По свойствам определителей, определитель с пропорциональными строками равен нулю.

Следовательно $\operatorname{rang}(C) = 2$.

Пример 5.4. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

двумя методами (окаймляющих миноров и элементарных преобразований).

Решение:

Метод окаймляющих миноров

Выбираем ненулевой элемент матрицы A, например $a_{13} = -4$. Находим окаймляющий минор второго порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Рассматриваем окаймляющие миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Метод элементарных преобразований

а) меняем местами первую и вторую строки

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix};$$

b) умножаем первую строку на 3 прибавляем к третьей строке

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 7\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix};$$

c) умножаем вторую строку на $\frac{11}{2}$ и прибавляем к третьей строке

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -11 & 22\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix};$$

c) умножаем вторую строку на $\frac{-5}{2}$ и прибавляем к четвертой строке

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Получена матрица ступенчатого вида с двумя ненулевыми строками. Значит $\operatorname{rang}(A)=2$.

5.3 Решение задач в Mathcad

Для вычисления ранга матрицы A используем функцию rank(A)

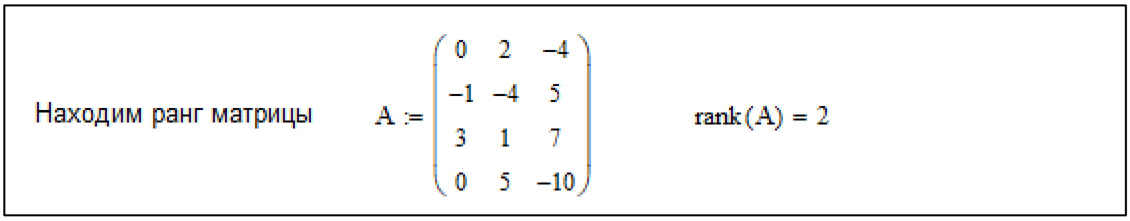


Рисунок 9 – Нахождение ранга матрицы

5.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите ранг матрицы методами окаймляющих миноров и элементарных преобразований:

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$; c) $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

2. Найдите значения λ, при которых матрица A имеет наименьший ранг

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Чему равен ранг при найденных значениях λ?

3. Найдите значения λ и μ, если они существуют, при которых ранг матрицы A равен двум

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ \lambda & -3 & 14 & 17 \\ 5 & -5 & 10 & \mu \end{pmatrix}.$$

6 ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

6.1 Основные теоретические положения

Понятие и виды систем линейных алгебраических уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система уравнений называется *неопределенной*, если она имеет более одного решения, и *определенной*, если решение единственное.

Решение произвольных систем линейных уравнений

Теорема (*Кронекера-Капелли*). Система линейных алгебраических уравнений совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Следствия из теоремы:

1) если $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A_{\text{р}})$, то СЛАУ несовместна (не имеет решений);

2) если $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_{\text{р}}) < n$, то СЛАУ является неопределенной (имеет бесконечное множество решений);

3) если $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_{\text{р}}) = n$, то СЛАУ является определенной (имеет ровно одно решение).

Правила решения произвольной СЛАУ:

1. Находим $r(A)$ и $r(A_{\text{р}})$. Если $r(A) \neq r(A_{\text{р}})$, система решения не имеет.

2. Если $r(A) = r(A_{\text{р}}) = r$, система совместна. В матрице A выделяем базисный минор. Те уравнения, коэффициенты которых не попали в базисный минор, отбрасываем, так как они по теореме о базисном миноре являются линейными комбинациями уравнений, коэффициенты которых попали в базисный минор. Если при этом окажется, что $r = n$ (число

неизвестных), то система будет иметь единственное решение, которое можно найти одним из способов, рассмотренных выше.

3. При $r < n$ перепишем систему, оставив слева те слагаемые, коэффициенты при неизвестных в которых попали в базисный минор, остальные слагаемые перенесем в правую часть уравнения. Неизвестные, оставшиеся слева, называют *зависимыми*, перенесенные вправо – *свободными*. Полученные в результате правые части будут свободными членами системы. В результате получили систему из r уравнений с r неизвестными, эквивалентную данной, определитель которой отличен от нуля. Решаем систему одним из методов, но заметим, что предпочтительнее в этом случае метод Гаусса. Если придавать свободным неизвестным конкретные значения, будем получать различные конкретные решения системы. Итак, при $r < n$ система будет иметь множество решений.

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными, имеющая вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases},$$

Матрица, получаемая из матрицы A в результате приписывания справа столбца свободных членов, называется *расширенной* матрицей системы и обозначается $A_{\text{р}}$:

$$A_{\text{р}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между элементарными преобразованиями линейной системы и операциями над строками расширенной матрицы:

– перестановка уравнений системы соответствует перестановке строк расширенной матрицы;

– умножение уравнения на ненулевое число соответствует умножению строки на это число;

– сложение уравнений системы соответствует сложению строк матрицы.

Решение исходной системы методом *Гаусса* представляет собой преобразование расширенной матрицы к треугольному или ступенчатому виду, выполняя элементарные преобразования только над строками:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1r} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ldots & a'_{2r} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a'_{rr} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

Матрица такого вида соответствует системе уравнений, решение которой начинается с решения последнего уравнения, затем результат подставляется в предпоследнее уравнение и т.д. При необходимости часть неизвестных рассматривается в качестве свободных параметров.

Отличие метода Жордана-Гаусса от классического метода Гаусса состоит в преобразовании матрицы системы *A* к матрице, в которой угловые элементы равны единице, а все остальные элементы равны нулю. В этом случае полученный правый столбец будет представлять искомые значения неизвестных.

Понятие однородной системы линейных уравнений

Однородной называется система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

В однородной системе все свободные члены равны нулю.

Если все свободные члены уравнений системы равны нулю, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Однородная система линейных уравнений всегда совместна. Она обязательно имеет нулевое *тривиальное* решение (возможно, не единственное) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Кроме того, для однородной системы всегда выполняется необходимое и достаточное условие $r(A) = r(A_\text{р})$ совместности СЛАУ.

Однородная система имеет *нетривиальное* решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных будет меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

Однородная система *n* уравнений с *n* неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A| = 0$ (т.к. в этом случае $r(A) < n$).

Свойства решения системы линейных однородных уравнений

Запишем решение однородной СЛАУ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

1. Если строка $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – решение системы, то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \ldots, \lambda k_n)$ – также решение этой системы.

2. Если строки $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и $e_1 = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ – решения системы, то при любых константах c_1 и c_2 их линейная комбинация $c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1k_1 + c_2l_1, c_1k_2 + c_2l_2, \ldots, c_1k_n + c_2l_n)$ – также решение этой системы.

Фундаментальная система решений

Система линейно независимых векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$, каждый из которых является решением однородной системы, называется *фундаментальной системой решений*, если каждое решение однородной системы является линейной комбинацией $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$.

Общее решение системы линейных однородных уравнений может быть представлено в виде

$$c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + \ldots + c_k\overline{e}_k,$$

где $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ – фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – произвольные постоянные и $k = n - r$.

Решения $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ можно получить, придавая свободным неизвестным поочередно значение 1, полагая остальные свободные неизвестные равными нулю.

Теорема (*о структуре общего решения неоднородной СЛАУ*). Общее решение совместной неоднородной системы линейных уравнений равно сумме какого-либо ее частного решения и общего решения однородной системы, соответствующей данной неоднородной.

Частное решение неоднородной системы можно получить, приравняв к нулю свободные неизвестные. Такое решение называется *базисным* решением (в выбранном базисе).

6.2 Примеры решения задач

Пример 6.1. Определить вид системы уравнений и найти ее решение

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Решение:

Второе уравнение системы получено из первого умножением на 3, следовательно, $r(A) = r(A_\text{р}) = 1 < n$, $n = 2$. Данная система является совместной, неопределенной, т.е. имеет множество решений. Выбираем в качестве базисной неизвестную x_2 и выражаем ее через свободную неизвестную x_1, тогда общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 - 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.2. Исследовать на совместность СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Определяем ранги основной и расширенной матриц методом элементарных преобразований

$$A_\text{р} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк, поэтому $\operatorname{rang}(A_\text{р}) = 3$. Матрица A также имеет ступенчатый вид с двумя ненулевыми строками, следовательно $\operatorname{rang}(A) = 2$. Так как $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(A_\text{р})$, то согласно теореме Кронекера-Капелли, система несовместна (т.е. не имеет решений).

Пример 6.3. Доказать, что СЛАУ имеет единственное решение (по теореме Кронекера-Капелли) и найти это решение методами Гаусса и Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$A_\text{р} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A_\text{р})=3$ (т.к. есть минор 3-го порядка – первые три строки и столбца, – отличный от нуля), следовательно, заданная СЛАУ является совместной определенной и имеет единственное решение.

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-6, \\ x_2+2x_3=6, \\ 9x_3=45. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-4, \\ x_3=5. \end{cases}$$

Продолжая преобразования, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с единичным базисным минором

$$A_\text{р}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Правый столбец полученной матрицы представляет искомые значения неизвестных.

Пример 6.4. Найти общее решение однородной системы уравнений и фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$$

Решение:

Приводим матрицу системы к ступенчатому виду и находим ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A_\text{р})=2.$$

Выбираем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Выписываем систему, оставляя в левой части уравнений базисные неизвестные, в правую часть переносим свободные неизвестные

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4, \\ -x_2=6x_3-5x_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=8x_3-7x_4, \\ x_2=-6x_3+5x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1=8c_1-7c_2, \\ x_2=-6c_1+5c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2. \end{cases}$$

Система уравнений является неопределенной, т.е. имеет бесконечное множество решений, которое может быть записано в виде фундаментальной системы решений

$$X\left(c_1,c_2\right)=\begin{pmatrix}8c_1-7c_2\\-6c_1+5c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}.$$

6.3 Решение задач в Mathcad

Для приведения матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором используем функцию rref(A).

Решаем СЛАУ

$$x1 + 6x2 + 3x3 = 0$$
$$6x1 + 4x2 + 7x3 = 3$$
$$9x2 + 4x3 = 2$$

Выписываем основную матрицу системы и столбец свободных членов уравнений

$$A := \begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\6 & 4 & 7\\0 & 9 & 4\end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad b := \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду с единичным базисным минором

$$C := \mathrm{augment}(A,b) = \begin{pmatrix}1 & 6 & 3 & 0\\6 & 4 & 7 & 3\\0 & 9 & 4 & 2\end{pmatrix} \qquad C1 := \mathrm{rref}(C) \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{69}{29}\\0 & 1 & 0 & -\frac{34}{29}\\0 & 0 & 1 & \frac{91}{29}\end{pmatrix}$$

Последний столбец матрицы C1 является решением системы

$$X := C1^{\langle 4\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix}-\frac{69}{29}\\-\frac{34}{29}\\\frac{91}{29}\end{pmatrix}$$

Проверка $\quad A\cdot X \rightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

Рисунок 10 – Решение СЛАУ методом Жордана-Гаусса

Решаем СЛАУ, заданную в матричном виде $A \cdot X = b1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad b1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Составляем расширенную матрицу системы и находим ее ранг

$$Ar1 := \mathrm{augment}(A, b1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(Ar1) = 4$$

Так как ранг матрицы A не равен рангу матрицы Ar1, система уравнений несовместна (не имеет решения).

Рисунок 11 – Исследование СЛАУ на совместность

Решаем СЛАУ, заданную в матричном виде $A \cdot X = b2$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad b2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Составляем расширенную матрицу системы и находим ее ранг

$$Ar2 := \mathrm{augment}(A, b2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(Ar2) = 3$$

Так как ранг матрицы A равен рангу матрицы Ar2, но меньше числа неизвестных, система уравнений имеет множество решений. Приводим матрицу Ar2 к ступенчатому виду. Выражаем базисные неизвестные x1, x2, x3 через свободные x4, x5

$$\mathrm{rref}(Ar2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Given

$x1 - x4 - x5 = 2$

$x2 + x4 + x5 = -1$

$x3 = 3$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы $X(x4, x5) := \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$ Проверка $A \cdot X(x4, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Рисунок 12 – Решение неопределенной СЛАУ

Для решения систем используется специальный вычислительный блок, состоящий из трех частей, идущих последовательно друг за другом:

– Given – ключевое слово;

– система, записанная логическими операторами в виде равенств и, возможно, неравенств;

– Find(x1,…,xm) – встроенная функция для решения системы относительно переменных x1,…, xm.

Вставлять логические операторы следует, пользуясь панелью инструментов Булевы операторы. Значение функции Find есть вектор, составленный из решения системы уравнений, а число элементов вектора равно число аргументов Find.

Решаем однородую СЛАУ, где

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \\ 3 & 12 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 10 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0 \qquad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Приводим матрицу А к ступенчатому виду

$$\mathrm{rref}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выражаем базисные неизвестные x1, x2, x5 через свободные x3, x4

Given

$$x1 - 2x3 - 8x4 = 0$$

$$x2 + x3 + 2x4 = 0$$

$$x5 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x3 + 8 \cdot x4 \\ -x3 - 2 \cdot x4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы $X(x3, x4) := \begin{pmatrix} 2 \cdot x3 + 8 \cdot x4 \\ -x3 - 2 \cdot x4 \\ x3 \\ x4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Проверка $A \cdot X(x3, x4) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Рисунок 13 – Решение однородной СЛАУ

6.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Исследуйте систему на совместность и решите ее, если она совместна:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Исследуйте на совместность, найдите общее решение и одно частное решение системы уравнений:

a) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4=1, \\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$

3. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0. \end{cases}$

7 СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

7.1 Основные теоретические положения

Понятие собственных векторов и собственных чисел

Пусть $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – линейный оператор и A – его матрица относительно базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Собственным вектором линейного оператора A (матрицы A) называется ненулевой вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, такой, что $A\cdot\bar{x} = \lambda\cdot\bar{x}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Систему $A\cdot\bar{x} = \lambda\cdot\bar{x}$ можно записать как $(A-\lambda E)\cdot\bar{x} = 0$ или в развернутом виде

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{1n}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Необходимым условием существования ненулевого решения системы является равенство нулю определителя $|A-\lambda E| = 0$.

Уравнение $|A-\lambda E| = 0$ относительно λ называется *характеристическим уравнением*, решением которого являются *собственные числа* λ матрицы A, соответствующие собственному вектору $\bar{x}$.

Собственные векторы, соответствующие собственным числам, находятся подстановкой значений λ поочередно в систему $(A-\lambda E)\cdot\bar{x} = 0$ и решением полученной системы.

Свойства собственных векторов

1. Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

2. Все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному числу, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство. Это подпространство является *линейной оболочкой* собственных векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m$, отвечающих собственному числу λ.

3. Если $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ – собственные векторы и отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, то система векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$, линейно независима.

4. Собственные числа линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не изменяются при изменении базиса.

5. Если в *n*-мерном линейном пространстве линейное преобразование имеет *n* попарно различных собственных значений, то существует базис из собственных векторов этого преобразования.

6. Для всякого линейного преобразования, матрица которого симметрична, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного преобразования.

7.2 Примеры решения задач

Пример 7.1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$$

Рассмотрим собственное число $\lambda_1 = 0$, найдем соответствующий ему собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 2 \\ 2 & 4-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система эквивалентна уравнению $x_1 = -2x_2$, и, если неизвестную x_1 выбрать в качестве базисной, а неизвестную x_2 – в качестве свободной, то общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1 \neq 0.$$

Таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 0$

$$\overline{x}_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим собственное число $\lambda_2 = 5$, найдем соответствующий ему собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=5} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 2 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0, \\ 2x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Полученная система эквивалентна уравнению $2x_1=x_2$, и, если неизвестную x_2 выбрать в качестве базисной, а неизвестную x_1 – в качестве свободной, то общее решение системы (собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_2=5$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ где } c_2\neq 0.$$

Таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2=5$

$$\overline{x}_{\lambda=5}=\begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Решение:

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}=0,$$

$$-\lambda(3-\lambda)(16-\lambda)-4(16-\lambda)=0 \Rightarrow (16-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=16,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-1.$$

Рассмотрим собственное число $\lambda_1=0$, найдем соответствующий ему собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=16}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -16x_1+2x_2=0, \\ 2x_1-13x_2=0, \\ 0=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=c_1 \end{cases}$$

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1=16$

$$\overline{x}_{\lambda=16}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1\neq 0.$$

Рассмотрим собственное число $\lambda_2=4$, найдем соответствующий ему собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=4}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0, \\ 2x_1-x_2=0, \\ 12x_3=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы получается из второго умножением на (-2), поэтому одну неизвестную принимаем за базисную, другую – за свободную. Полагаем $x_1=c_2$, получаем собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2=4$

$$\overline{x}_{\lambda=4}=\begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 0 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c_2\neq 0.$$

Рассмотрим собственное число $\lambda_3=-1$, найдем соответствующий ему собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=-1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Решаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ 2x_1+4x_2=0, \\ 17x_3=0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы получается из первого умножением на 2, поэтому одну неизвестную принимаем за базисную, другую – за свободную. Полагаем $x_2=c_3$, получаем собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_3=-1$

$$\overline{x}_{\lambda=-1}=\begin{pmatrix} -2c_3 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } c_3\neq 0.$$

7.3 Решение задач в Mathcad

Используем функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

– eigenvals(A) – вычисление собственных значений квадратной матрицы *A*;

– eigenvecs(A) – вычисление собственных векторов квадратной матрицы A; значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матрицы A; порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных функцией eigenvals(A);

– eigenvec(A, l) – вычисление собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению l.

Находим собственные числа линейного оператора, заданного матрицей

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Находим собственные векторы, соответствующие каждому собственному числу

$$\text{eigenvec}(A, 8) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A, -2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A, -3) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Находим все собственные векторы, соответствующие собственным числам

$$\text{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{18} & \frac{7}{6} \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 14 – Нахождение собственных чисел и собственных векторов

7.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

8 КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

8.1 Основные теоретические положения

Понятие квадратичной формы

Пусть $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты этого вектора в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. *Квадратичной формой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется линейная функция, определяемая по правилу

$$F(\overline{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j, \text{ где } a_{ij} = a_{ji},\ 1 \le i, j \le n.$$

Матрица $A = \{a_{ij}\}$ называется *матрицей квадратичной формы* в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$.

Вид матрицы квадратичной формы определяется базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, в котором задан вектор $\overline{x}$, и изменяется при переходе к другому базису по формуле

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H = H^T \cdot A \cdot H,$$

где H – матрица перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ к новому базису $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \ldots, \overline{e}_n'$. Столбцами этой матрицы будут координаты векторов ортонормированного базиса. Матрица H называется *ортогональной*, а линейное преобразование с такой матрицей *ортогональным преобразованием*.

Координаты вектора в базисе $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \ldots, \overline{e}_n'$ связаны с координатами в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ следующими соотношениями:

$$\overline{x} = H \cdot \overline{x}', \quad \overline{x}' = H^T \cdot \overline{x}.$$

Виды квадратичных форм

Квадратичная форма называется *невырожденной*, если $r(A) = n$ или $|A| \ne 0$. Ранг квадратичной формы равен рангу матрицы A.

Канонической называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных, т.е. квадратичная форма вида

$$\Phi(\overline{x}') = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}' \left(x_i'\right)^2.$$

Матрица канонической формы является диагональной.

Квадратичная форма $F(\overline{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если $F(\overline{x}) > 0$ $(F(\overline{x}) < 0)$ при всех $\overline{x} \ne 0$ и положительно (отрицательно) полуопределенной, если $F(\overline{x}) \ge 0$ $(F(\overline{x}) \le 0)$ при всех $\overline{x}$.

Миноры $M_1 = a_{11}$, $M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $M_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называются главными минорами квадратичной формы.

Теорема (*Критерий Сильвестра*). Квадратичная линейная форма $F\left(\overline{x}\right)$, заданная в $\mathbb{R}^n$, положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны, и отрицательно определена, если все ее главные миноры отличны от нуля, а их знаки чередуются, начиная с отрицательного.

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными* квадратичными формами.

Невырожденные квадратичные формы, не являющиеся положительно определенными или отрицательно определенными называются *знаконеопределенными* (*общего вида*) квадратичными формами.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду следует перейти к базису собственных векторов матрицы *A* квадратичной формы. Так как матрица квадратичной формы симметрична, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то все собственные числа вещественные, а соответствующие собственные векторы попарно ортогональны и, согласно свойству 6 собственных векторов, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы *A*. Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются *главными осями* квадратичной формы.

Если собственные числа различны, то соответствующие им собственные векторы образуют ортогональный базис, который следует нормировать, разделив координата каждого базисного вектора на его норму (длину). Тогда квадратичная форма принимает канонический вид, где коэффициентами являются собственные значения

$$\Phi\left(\overline{x}'\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(x_i'\right)^2.$$

Если среди собственных чисел есть одинаковые, то нужно сначала найти систему *n* линейно независимых собственных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, а затем построить ортогональный базис $\overline{e}_1{}', \overline{e}_2{}', \ldots, \overline{e}_n{}'$ по формулам (*процесс ортогонализации Шмидта*):

$$\overline{e}_1{}' = \overline{e}_1, \quad \overline{e}_k{}' = \overline{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \overline{e}_i{}', \quad k = 2, 3, \ldots, n, \quad c_i = \frac{\left(\overline{e}_k, \overline{e}_i{}'\right)}{\left(\overline{e}_i{}', \overline{e}_i{}'\right)}.$$

Положительным индексом инерции r^+ квадратичной формы называется число ее положительных собственных чисел, *отрицательным* r^- – число отрицательных собственных чисел, *индексом инерции* r – число ненулевых собственных чисел. Индекс инерции совпадает с рангом квадратичной формы.

Набор индексов инерции квадратичной формы называется ее *сигнатурой*. Сигнатура не меняется при переходе к канонической форме, поэтому: если все собственные числа имеют один и тот же знак, то квадратичная форма является знакоопределенной, если же часть собственных чисел имеют один знак, а остальные имеют противоположный знак, то квадратичная форма является знаконеопределенной.

8.2 Примеры решения задач

Пример 8.1. Определить, какие квадратичные формы являются положительно, отрицательно определенными или знаконеопределенными:

a) $F\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$;

b) $F\left(x_1, x_2\right) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2$;

c) $F\left(x_1,x_2,x_3\right)=-2x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

Решение:

a) Матрица квадратичной формы $F\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 26\end{pmatrix}$. Вычисляем главные миноры матрицы A: $M_1=1>0$, $M_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 26\end{vmatrix}=1>0$. Так как все главные миноры положительны, квадратичная форма является положительно определенной.

b) Матрица квадратичной формы $F\left(x_1,x_2\right)=-x_1^2-4x_2^2+2x_1x_2$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$. Вычисляем главные миноры матрицы A: $M_1=-1<0$, $M_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=3>0$. Так как знаки главных миноров чередуются, начиная с «-», квадратичная форма является отрицательно определенной.

c) Матрица квадратичной формы $F\left(x_1,x_2,x_3\right)=-2x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ имеет вид $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 4\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$. Вычисляем главные миноры матрицы A: $M_1=-2<0$, $M_2=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$, $M_3=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 4\\ -2 & 4 & 3\end{vmatrix}=-12<0$. Так как главные миноры отрицательны, квадратичная форма является знаконеопределенной.

Пример 8.2. Найти канонический вид квадратичной формы $F\left(x_1,x_2\right)=5x_1^2+8x_1x_2+5x_2^2$ к которому она приводится ортогональным преобразованием и указать одно из ортогональных преобразований.

Решение:

Матрица квадратичной формы имеет вид $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. Записываем характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\left(5-\lambda\right)^2-16=0.$$

Собственными числами матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к виду

$$\Phi\left(x_1',x_2'\right)=\left(x_1'\right)^2+9\left(x_2'\right)^2.$$

Для построения ортогонального преобразования находим собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы линейных алгебраических уравнений $\left(A-\lambda E\right)\bar{e}'=0$ при $\lambda_1=1$ находим собственный вектор $\bar{e}_1'=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^T$, тогда вектор $\bar{e}_2'=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$, ортогональный вектору $\bar{e}_1'$, является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_2=9$. Нормируя собственные векторы, составляем из столбцов их координат матрицу ортогонального преобразования

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$.

Пример 8.3. Найти канонический вид квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к которому она приводится ортогональным преобразованием и указать одно из ортогональных преобразований.

Решение:

Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Записываем характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к виду

$$\Phi(x_1', x_2', x_3') = 4(x_1')^2 + (x_2')^2 - 2(x_3')^2.$$

Для построения ортогонального преобразования находим нормированные собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы

$$\bar{e}_1' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T,\ \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^T,\ \bar{e}_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T,$$

и составляем из столбцов их координат матрицу ортогонального преобразования

$$H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$.

Пример 8.4. Найти канонический вид квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ к которому она приводится ортогональным преобразованием и указать одно из ортогональных преобразований.

Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$. Записываем характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 648\lambda + 2916 = -(\lambda-9)(\lambda-18)^2 = 0.$$

Собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к виду

$$\Phi\left(x_1', x_2', x_3'\right) = 9\left(x_1'\right)^2 + 18\left(x_2'\right)^2 + 18\left(x_3'\right)^2.$$

Для построения ортогонального преобразования находим нормированные собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 9$ имеет вид $\bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T$. При $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$ матрица однородной СЛАУ $(A - \lambda E)\bar{e}' = 0$ принимает вид $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, где вторая и третья строки линейно зависимы с первой. Следовательно, координаты соответствующего собственного вектора $\bar{e}_2' = \begin{pmatrix} e_{12}' & e_{22}' & e_{32}' \end{pmatrix}^T$ связаны одним уравнением

$$e_{12}' + 2e_{22}' + 2e_{32}' = 0.$$

Решение системы может быть записано в виде $c_1\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + c_2\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, где $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ – фундаментальна система линейно независимых решений. Выбирая в качестве базисных векторов $\bar{e}_2'$ и $\bar{e}_3'$ эти фундаментальные решения, получаем базис

$$\bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T,\ \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T,\ \bar{e}_3' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

который не является ортогональным. Проводим ортогонализацию (процесс ортогонализации Шмидта) по формулам

$$\bar{e}_1'' = e_1', \quad \bar{e}_2'' = \bar{e}_2' - \bar{e}_1'' \cdot \frac{\left(\bar{e}_2', \bar{e}_1''\right)}{\left(\bar{e}_1'', \bar{e}_1''\right)}, \quad \bar{e}_3'' = \bar{e}_3' - \bar{e}_2'' \cdot \frac{\left(\bar{e}_3', \bar{e}_2''\right)}{\left(\bar{e}_2'', \bar{e}_2''\right)}.$$

Так как $\left(\bar{e}_1', \bar{e}_2'\right) = 0$, $\left(\bar{e}_3', \bar{e}_2''\right) = 4$, $\left(\bar{e}_2', \bar{e}_2'\right) = 5$, получаем ортогональный базис

$$\bar{e}_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad \bar{e}_2'' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \bar{e}_3'' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Нормируя полученные векторы, составляем из столбцов их координат матрицу ортогонального преобразования

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

8.3 Решение задач в Mathcad

Приводим квадратичную форму к каноническому виду

$$F(x1,x2,x3) := 17\cdot x1^2 + 14\cdot x2^2 + 14x3^2 - 4\cdot x1\cdot x2 - 4\cdot x1\cdot x3 - 8\cdot x2\cdot x3$$

Записываем матрицу квадратичной формы и находим ее собственные числа

$$A := \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Канонический вид квадратичной формы

$$\Phi(y1,y2,y3) := 9y1^2 + 18\cdot y2^2 + 18\cdot y3^2$$

Находим собственные векторы

$$B := \mathrm{eigenvecs}(A) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Столбцы полученной матрицы B задают базис в новом линенйом пространстве, однако он не является ортогональным (кратность одного из собственных чисел больше 1). Проводим ортогонализацию базиса $\quad ORIGIN := 1$

$$C1 := B^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C2 := B^{\langle 2\rangle} - C1\cdot\frac{B^{\langle 2\rangle}\cdot C1}{C1\cdot C1} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C3 := B^{\langle 3\rangle} - C2\cdot\frac{B^{\langle 3\rangle}\cdot C2}{C2\cdot C2} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем полученные векторы и составляем матрицу ортогонального преобразования

$$H1 := \frac{C1}{|C1|} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad H2 := \frac{C2}{|C2|} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H3 := \frac{C3}{|C3|} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\cdot\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

$$H := \mathrm{augment}(H1,H2,H3) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\cdot\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

Рисунок 15 – Приведение квадратичной формы к каноническому виду и нахождение матрицы ортогонального преобразования

8.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность:

a) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$;

b) $x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 - x_1x_2$;

c) $6x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

d) $-8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

e) $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3$.

2. Найти ранг квадратичной формы:

a) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

b) $2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$;

c) $2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2$;

d) $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

e) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и записать соответствующий канонический вид квадратичной формы:

a) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

b) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2$;

c) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магазинникова, А.Л. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.Л. Магазинникова, Л.И. Магазинников. – Томск: ТУСУР, 2010. – 176 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2244 (дата обращения: 08.08.2022).
2. Магазинников, Л.И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л. – Томск: ТУСУР, 2007. – 162 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/37 (дата обращения: 17.08.2022).
3. Магазинников, А.Л. Лабораторный практикум по математике: Методические указания [Электронный ресурс] / А.Л. Магазинников. – Томск: ТУСУР, 2018. – 63 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/8103 (дата обращения: 03.10.2022).
4. Приходовский, М.А. Математика: Курс лекций [Электронный ресурс] / М.А. Приходовский. – Томск: ТУСУР, 2018. – 176 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7146 (дата обращения: 20.05.2022).
5. Приходовский, М.А. Математика: Курс практических занятий [Электронный ресурс] / М.А. Приходовский. – Томск: ТУСУР, 2018. – 180 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/7147 (дата обращения: 24.05.2022).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Панель операций с матрицами и векторами

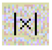
Панель векторных и матричных операций открывается щелчком по кнопке *Панель векторов и матриц* в панели математических инструментов.

За кнопками панели закреплены следующие функции:

 – определение размеров матрицы;

 – ввод нижнего индекса;

 – вычисление обратной матрицы;

 – вычисление определителя матрицы;

 – поэлементные операции с матрицами;

 – определение столбца матрицы;

 – транспонирование матрицы;

 – вычисление скалярного произведения векторов;

 – вычисление векторного произведения векторов;

 – вычисление суммы компонент вектора;

 – определение диапазона изменения переменной;

 – визуализация цифровой информации, сохраненной в матрице.

Функции определения матриц и операции с блоками матриц

– matrix(m, n, f) – создает и заполняет матрицу размерности $m \times n$, элемент которой, расположенный в i -й строке, j -м столбце, равен значению $f(i, j)$ функции $f(x, y)$;

– diag(v) – создает диагональную матрица, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе *v*;

– identity(n) – создает единичную матрицу порядка *n*;

– augment(A, B) – формирует матрицу, в первых столбцах которой содержится матрица *A*, а в последних – матрица *B* (матрицы *A* и *B* имеют одинаковое число строк);

– stack(A, B) – формирует матрицу, в первых строках которой содержится матрица *A*, а в последних – матрица *B* (матрицы *A* и *B* имеют одинаковое число столбцов);

– submatrix(A, ir, jr, ic, jc) – формирует матрицу, которая является блоком матрицы *A*, расположенным в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc.

Функции нахождения различных числовых характеристик матриц:

– last(v) – вычисление номера последнего элемента вектора *v*;
– lenght(v) – вычисление количества элементов *v* вектора;
– rows(A) – вычисление числа строк в матрице *A*;
– cols(A) – вычисление числа столбцов в матрице *A*;
– max(A) – вычисление наибольшего элемента в матрицы *A*;
– tr(A) – вычисление следа квадратной матрицы *A*;
– rank(A) – вычисление ранга матрицы *A*.

Функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры

– rref(A) – приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные операции со строками матрицы);

– eigenvals(A) – вычисление собственных значений квадратной матрицы *A*;

– eigenvecs(A) – вычисление собственных векторов квадратной матрицы *A*; значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матрицы *A*; порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных функцией eigenvals(A);

– eigenvec(A, l) – вычисление собственного вектора матрицы *A*, отвечающего собственному значению *l*;

– lsolve(A, b) – решение системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = b$.