ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

А.М. Голиков

МЕТРОЛОГИЯ И ЭЛЕКТРОРАДИОИЗМЕРЕНИЯ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ
(Метрологическое обеспечение защищенных телекоммуникационных систем)

Методические указания по практическим и семинарским занятиям для студентов специальностей

090106 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и
210403 «Защищенные системы связи»

2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники (ТУСУР)**

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой РТС

___________ Г.С. Шарыгин

“____” ______________ 2009 г.

МЕТРОЛОГИЯ И ЭЛЕКТРОРАДИОИЗМЕРЕНИЯ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ (Метрологическое обеспечение защищенных телекоммуникационных систем)

Методические указания по практическим и семинарским занятиям для студентов специальностей 090106 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и 210403 «Защищенные системы связи»

Разработчик
Доцент каф. РТС, к.т.н.
___________ А.М. Голиков
«_____» ___________ 2009 г.

2009

Рекомендовано к изданию кафедрой радиотехнических систем Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники

Голиков А.М. Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммуникационных системах**.** Методические указания по практическим и семинарским занятиям – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2009. - 82 с.

Приводятся указания по практическим и семинарским занятиям по дисциплине «Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммуникационных системах» для студентов специальности 090106 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» и по дисциплине «Метрологическое обеспечение защищенных телекоммуникационных систем для студентов специальности 210403 «Защищенные системы связи».

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ

Практические занятия направлены на закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях; объем занятий – 9 часов.

Практические занятия направлены на изучение элементов теории погрешностей и обработки результатов измерений, и основ измерения вероятностных характеристик случайных процессов в рамках, предусмотренных рабочей программой по изучаемым дисциплинам.

Предусмотрен тестовый контроль полученных знаний в объеме, предусмотренном рейтинговой раскладкой для данных дисциплин. Тестовый контроль проводится в виде контрольных работ по изучаемым темам.

2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИН

В результате изучения дисциплин студенты должны

иметь представление:

- о государственной системе стандартизации;
- о научной и законодательной метрологии;
- о государственной системе метрологического обеспечения эксплуатации средств измерений.

знать:

- основы теории точности измерений;
- принципы построения и функционирования аналоговых и цифровых измерительных приборов;
- теоретические основы метрологии и электрорадиоизмерений;
- методы и средства обеспечения единства и точности измерений;
- особенности градуировки средств измерений;

- перспективы развития электрорадиоизмерительньной техники;

уметь:

- проводить измерения параметров элементов радиотехнических цепей и сигналов, оценивать погрешности измерений;
- эксплуатировать электрорадиоизмерительную технику;
- работать с научно-технической литературой по тематике курса;
- творчески применять теоретические знания в практической работе;
- правильно выбрать метод и средство измерения, наиболее оптимальные для решения поставленной задачи;
- самостоятельно разбираться по техническим описаниям в принципе работы, назначении и возможностях средств измерений;

иметь навыки:

- работы с измерительной аппаратурой;
- работы с документацией на средства измерения.

3. СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЙ

1. Теория погрешностей и обработка результатов измерений

1 Введение

Цель измерений – получение результата, т.е. оценки истинного значения физической величины. Для этого измерения необходимо проводить с возможно большей достоверностью и точностью. Но какими бы точными и совершенными ни были средства и методы измерений и как бы тщательно измерения ни выполнялись, их результат всегда отличается от истинного значения измеряемой величины, т.е. определяется с некоторой погрешностью. Погрешности возникают из-за несовершенства применяемых методов и средств измерений, непостоянства влияющих на результат измерения величин и индивидуальных особенностей оператора (экспериментатора) и пр.

Чтобы получить объективные данные о точности результата измерения физической величины, необходимо оценить полученные погрешности. Поскольку любые измерения практически всегда сопровождаются появлением различных погрешностей, в том числе и случайных, то обработка результатов измерений должна содержать операции над случайными величинами. Эти операции выполняют методами теории вероятности и математической статистики. Статистическая обработка результатов измерений – обработка измерительной информации с целью получения достоверных данных. Множество задач, решаемых с помощью измерений, определяет и разнообразие видов статистической обработки их результатов.

Если прямое измерение физической величины проведено один раз (так называемое однократное прямое измерение), то результатом измерения является непосредственное показание средства измерения. При этом за погрешность результата измерения часто принимают погрешность средства измерения. Кстати, при использовании термина «результат измерения» следует четко указать, к чему он относится: показанию средства измерения, исправленному или не исправленному результату, и проводилось ли усреднение результатов нескольких измерений. Следует отметить, что исправленным результатом измерений называется полученное с помощью средства измерения значение величины и уточненное путем введения в него необходимых поправок на действие предполагаемых систематических погрешностей.

В случае многократных наблюдений результат измерения и его погрешность находят различными методами статистической обработки всех выполненных наблюдений.

2 Теория погрешностей

2.1 Погрешности измерений и их классификация

Измерение можно считать законченным, если с наибольшей точностью найден не только результат измерения, но и проведена оценка его погрешности, т.е. качество результатов измерений принято характеризовать, указывая их точность или погрешности.

Под качеством измерений понимают совокупность свойств, обусловливающих получение результатов этих измерений с требуемыми точностными характеристиками, в необходимом виде и установленные сроки. Качество измерений характеризуется, прежде всего, такими показателями, как точность (погрешность), правильность и достоверность. Точность результата измерений - основная характеристика качества измерений, отражающая близость к нулю погрешности этого результата.

Введение в теоретической метрологии понятия «погрешность» требует четкого разграничения трех терминов: истинного и действительного значений измеряемой величины и результата измерения, поскольку результат измерения представляет собой приближенную оценку истинного значения величины, найденную путем измерения.

В метрологии определение «погрешность» является одним из центральных, причем в нем отражены понятия «погрешность результата измерения» и «погрешность средства измерения». Хотя эти два понятия отражают разные причины влияния на точность измерений, они близки друг к другу и обычно их классифицируют по одинаковым признакам.

Погрешностью результата измерения называется отклонение найденного значения от истинного значения измеряемой физической величины. Поскольку истинное значение измеряемой величины неизвестно, то при количественной оценке погрешности пользуются действительным значением физической величины. Напомним, что действительное значение физической величины находится экспериментально и оно настолько близко к истинному значению, что для конкретно поставленной измерительной задачи может быть использовано вместо него.

Погрешность средства измерения представляет собой разность между показаниями средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины. Эта погрешность характеризует точность результатов измерений, проводимых используемым средством.

Как одну из основных характеристик результата измерения, погрешность необходимо оценить. Очевидно, что погрешность можно оценить до (априорное) и после (апостериорное) измерения. Априорное оценивание – это проверка возможности обеспечить требуемую точность измерений, проводимых в заданных условиях выбранным методом с помощью конкретных средств измерений. Оно проводится в случаях:

- нормирования метрологических характеристик средств измерений;
- разработки методик выполнения измерений;
- выбора средств измерений для решения конкретной измерительной задачи;
- подготовки измерений, проводимых с помощью конкретного средства измерения.

Апостериорную оценку погрешностей проводят тогда, когда априорная оценка неудовлетворительна или получена на основе типовых метрологических характеристик, а требуется учесть индивидуальные свойства используемого средства измерения. Такую оценку следует рассматривать как коррекцию априорных оценок. Погрешность результата измерения можно оценить с разной точностью на основании различной исходной информации. Поэтому различают измерения с точной, приближенной и предварительной оценкой погрешностей.

При измерениях с точной оценкой погрешности учитывают индивидуальные метрологические свойства и характеристики примененных средств измерения, анализируют метод измерений, контролируют условия измерений. Понятие «точной» оценки условно, так как это сделать принципиально невозможно.

Если измерения ведут с приближенной оценкой погрешности, то учитывают лишь метрологические характеристики средства измерения и оценивают их влияние на результат только при отклонении условий измерения от нормальных.

Измерения с предварительной оценкой погрешности выполняют по типовым методикам, нормативными документами, в которых указаны методы и условия измерений, типы и погрешности используемых средств измерений и на основе этих данных заранее оценена возможная погрешность результата.

По форме количественного выражения погрешности делятся на:

- абсолютные;
- относительные;
- приведенные.

Абсолютной погрешностью Δ выражаемой в единицах измеряемой величины, называют отклонение результата измерения x от истинного значения $x_и$

$$\Delta = x - x_и \qquad (2.1)$$

Разновидностью абсолютной погрешности является предельная (максимальная) погрешность Δ_m - погрешность, больше которой в данном измерительном эксперименте не может быть.

Абсолютная погрешность характеризует значение и знак полученной погрешности, но не определяет качество самого измерения. Характеристикой качества измерения является точность измерения, отражающая меру близости результата измерения к истинному значению измеряемой величины. Высокой точности измерений соответствует малая погрешность. Например, измерение напряжения с амплитудой 10 и 100В может быть выполнено с идентичной абсолютной погрешностью $\Delta = \pm 1\text{В}$. Однако качество первого измерения хуже второго. Поэтому для сравнения качества измерений используют относительную погрешность.

Относительной погрешностью δ называют отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta = \Delta / x_и \tag{2.2}$$

Мерой точности измерений служит показатель точности, обратный модулю относительной погрешности: $K_т = 1/|\delta|$. Часто относительную погрешность δ выражают в процентах: $\delta = 100\Delta/x_и\,\%$. Поскольку обычно $\Delta \ll x_и$ то относительная погрешность может быть определена как $\delta \approx \Delta/x$ или $\delta \approx 100\,\Delta/x\,\%$.

Если измерение выполнено однократно и за абсолютную погрешность результата измерения Δ принята разность между показанием прибора и истинным значением измеряемой величины $x_и$, то из (2.2) следует, что значение δ уменьшается с ростом $x_и$.

Приведенной погрешностью γ, выражающей потенциальную точность измерений, называют отношение абсолютной погрешности Δ к некоторому нормирующему значению X_N (например, к конечному значению шкалы):

$$\gamma = 100\frac{\Delta}{X_N}\,\% \tag{2.3}$$

Из определения погрешности не следует, что она состоит из каких-либо составляющих. Деление погрешности на составляющие введено для удобства обработки результатов измерений исходя из характера их проявления. В процессе формирования метрологии было обнаружено, что погрешность не является постоянной величиной. Элементарным анализом установлено, что одна ее составляющая проявляется как постоянная величина, а другая – изменяется непредсказуемо.

По характеру (закономерности) проявления погрешности делят на:

- систематические (Systematic error);
- случайные (Random error);

• грубые (промахи).

Систематические погрешности Δ_c – составляющие погрешности измерений, сохраняющиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при многократных измерениях величины в одних и тех же условиях. Их отличительным признаком является то, что они могут быть предсказаны и обнаружены. Систематическая погрешность одного средства измерения, как правило, будет отличаться от систематической погрешности другого аналогичного средства измерения, вследствие чего для группы однотипных средств измерений систематическая погрешность может иногда рассматриваться как случайная величина, обладающая некоторыми, но не всеми свойствами случайной величины, изучаемой в теории вероятностей и математической статистике.

Систематические погрешности выявляют детальным анализом их возможных источников и уменьшают введением соответствующей поправки, применением более точных приборов, калибровкой приборов с помощью рабочих мер и т. п.

Случайные погрешности $\overset{\circ}{\Delta}$ – составляющие погрешности измерений, изменяющиеся случайным образом по значению и знаку при повторных измерениях одной и той же физической величины в одних и тех же условиях. Случайные составляющие погрешности измерений приводят к неоднозначности показаний и проявляются при повторных измерениях одной и той же физической величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Они могут быть вызваны, например, неправильным функционированием электронных элементов измерительного устройства.

Описание и оценка случайных погрешностей возможны только на основе теории вероятностей и математической статистики (математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов).

Грубые погрешности (промахи) — погрешности, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях измерения. Они возникают из-за неучтенных внешних воздействий. Так, грубые погрешности могут быть вызваны кратковременными скачками питающего напряжения при включении в сеть мощных потребителей энергии. Промахи могут быть обусловлены и неправильными действиями оператора, в частности возникающими ошибками при списывании им показаний измерительного прибора. В случае однократного измерения обнаружить грубую погрешность нельзя. При многократных наблюдениях грубые погрешности выявляют и исключают в процессе статистической обработки результатов наблюдений.

Итак, если не учитывать грубые погрешности, абсолютную погрешность измерения Δ, определяемую выражением (2.1), можно представить суммой систематической и случайной составляющих:

$$\Delta = \Delta_c + \overset{\circ}{\Delta} \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) следует, что абсолютная погрешность, как и результат измерения, является случайной величиной.

По причинам возникновения погрешности принято делить на:

- методические;
- инструментальные;
- внешние;
- субъективные (личные).

Методические погрешности возникают из-за несовершенства метода измерений, некорректности алгоритмов или формул, по которым производят вычисления результатов измерений, из-за влияния выбранного средства измерения на измеряемые параметры сигналов и т.д. Если, например, вольтметр имеет недостаточно высокое входное сопротивление, то его подключение к схеме способно изменить в ней распределение токов и напряжений. При этом результат измерения будет отличаться от действительного.

Методическую погрешность можно уменьшить путем применения более точного метода измерения.

Инструментальные (аппаратурные) погрешности возникают из-за несовершенства средств измерения, т.е. от их собственных погрешностей. Уменьшить инструментальные погрешности можно применением более точного прибора.

Внешние погрешности связаны с отклонением одной или нескольких влияющих величин от нормальных значений или выходом их за пределы нормальной области.

Субъективные погрешности вызваны ошибками экспериментатора при отсчете показаний (погрешности от небрежности и невнимания экспериментатора).

По характеру проявления измеряемой величины в процессе измерений различают погрешности:

- статические;
- динамические.

Статические погрешности возникают при измерении установившегося во времени значения измеряемой величины.

Динамические погрешности имеют место при динамических измерениях, когда измеряемая физическая величина изменяется во времени. Причина появления динамических погрешностей состоит в несоответствии скоростных (временных) характеристик прибора и скорости изменения измеряемой величины.

По условиям эксплуатации средств измерений различают погрешности:

- основную;
- дополнительную.

Основная погрешность средств измерений имеет место при нормальных условиях эксплуатации, оговоренных в регламентирующих документах.

Дополнительная погрешность средств измерений возникает из-за выхода какой-либо из влияющих величин за пределы нормальной области значений.

Полностью исключить погрешности практически невозможно, а вот установить пределы возможных значений погрешностей измерения, следовательно, повысить точность выполнения измерений необходимо.

2.2 Методы уменьшения систематических погрешностей

Источниками систематических составляющих погрешности измерения могут быть объект и метод измерения, средства измерения, условия измерения и экспериментатор. При этом оценивание систематических составляющих представляет достаточно трудную метрологическую задачу. Важность ее определяется тем, что знание систематической погрешности позволяет ввести соответствующую поправку в результат измерения и тем самым повысить его точность. Трудность же состоит в сложности обнаружения систематической погрешности, поскольку ее невозможно выявить путем повторных измерений (наблюдений).

Действительно, будучи постоянной по величине для данной группы наблюдений, систематическая погрешность никак визуально не проявится при повторных измерениях одной и той же величины и, следовательно, оператор затруднится ответить на вопрос – имеется ли систематическая погрешность в наблюдаемых результатах. Таким образом, проблема обнаружения систематических погрешностей едва ли не главная в борьбе с ними.

Обычно систематическая погрешность результата измерения рассматривается по составляющим в зависимости от источников их возникновения.

В основу классификации систематических погрешностей положена закономерность их поведения во времени.

По характеру изменения во времени систематические погрешности разделяют на постоянные и переменные.

Постоянными называют такие систематические погрешности измерения, которые остаются неизменными (сохраняют величину и знак) в течение всей серии измерений.

Переменными называют погрешности, изменяющиеся в процессе измерения. Наличие существенной переменной систематической погрешности искажает оценки характеристик случайной погрешности. Поэтому она должна обязательно выявляться и исключаться из результатов измерений.

В теоретической метрологии принято считать, что систематические погрешности можно обнаружить и исключить из результата измерения. Однако в реальных условиях полностью исключить систематическую составляющую погрешности невозможно. Всегда остаются какие-то неисключенные факторы, которые нужно учитывать и которые будут вызывать систематическую погрешность измерения. Это значит, что систематическая погрешность тоже случайна и ее определение обусловлено лишь установившимися традициями обработки и представления результатов измерения.

Для результата измерения не обнаруженная систематическая составляющая погрешности гораздо опаснее случайной погрешности: если случайная составляющая вызывает вариацию (разброс) результатов, то систематическая – устойчиво их искажает (смещает). Результаты измерений, содержащие систематическую погрешность, относятся к неисправленным. В любом случае отсутствие или незначительность (пренебрежение) систематической погрешности надо доказать.

Постоянные систематические погрешности можно обнаружить только путем сравнения результатов измерений с другими, полученными с использованием более точных методов и средств измерения. В ряде случаев систематическую погрешность можно исключить путем устранения источников погрешности до начала измерений (профилактика погрешности), а в процессе измерений – внесением известных поправок в результаты измерений. Профилактика – наиболее рациональный способ снижения погрешности, который заключается в устранении влияния, например, температуры (термостатированием и термоизоляцией), магнитных полей (магнитными экранами), вибраций и т.п. Сюда же относятся регулировка, ремонт и поверка средств измерений.

Метод замещения обеспечивает наиболее полную компенсацию постоянной систематической погрешности. Суть данного метода состоит в такой замене измеряемой величины $x_и$ известной величиной A, получаемой с помощью регулируемой меры, чтобы показание измерительного прибора сохранилось неизменным. Значение измеряемой величины считывают в этом случае по указателю меры. При использовании данного метода погрешность неточного измерительного прибора устраняют, а погрешность измерения определяют только погрешностью самой меры и погрешностью отсчета измеряемой величины по указателю меры.

Метод компенсации погрешности по знаку используют для устранения постоянной систематической погрешности, у которой в зависимости от условий измерения изменяется только знак. При этом методе выполняют два измерения, результаты которых соответственно есть $x_1 = x_и + \Delta_c$ и $x_2 = x_и - \Delta_c$, где $x_и$ - измеряемая величина. Среднее значение из полученных результатов $(x_1 + x_2)/2 = x_и$ представляет собой окончательный результат измерения, не содержащий погрешности $\pm\Delta_c$. Данный метод наиболее часто применяют при измерении экстремальных значений (максимума и нуля) неизвестной физической величины.

Метод введения поправок позволяет достаточно просто вычислить и исключить из результата измерения систематические погрешности. Напомним, что поправка C - величина, одноименная с измеряемой $x_и$, вводимая в результат измерения $x = x_и + \Delta_c + C$ с целью исключения систематической погрешности. В случае принимают $C = -\Delta_c$ и систематическая погрешность полностью исключается из результата измерения.

Поправки определяют экспериментально или путем специальных теоретических исследований и задают в виде формул, графиков или таблиц.

Ввод одной поправки позволяет исключить влияние только одной составляющей систематической погрешности. Для устранения всех составляющих в результат измерения приходится вводить несколько поправок.

Метод противопоставления применяется в радиоизмерениях для уменьшения постоянных систематических погрешностей при сравнении измеряемой величины с известной величиной примерно равного значения, воспроизводимой соответствующей образцовой мерой.

Данный метод, является разновидностью метода сравнения, при котором измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений.

Метод рандомизации (от англ. *random* – случайный, беспорядочный; в переводе на русский означает; перемешивание, создание беспорядка, хаоса) основан на принципе формального перевода систематических погрешностей в случайные. Этот метод позволяет эффективно уменьшать постоянную систематическую погрешность (методическую и инструментальную) путем измерения некоторой величины рядом однотипных приборов с последующей оценкой результата измерений в виде математического ожидания (среднего арифметического значения) выполненного ряда наблюдений. В данном методе при обработке результатов измерений используются случайные изменения погрешности от прибора к прибору.

Поясним действие метода рандомизации простым примером. Пусть некоторая физическая величина измеряется n раз (число n достаточно велико) однотипными приборами, имеющими систематические погрешности одинакового происхождения. Для одного прибора эта погрешность – величина постоянная, но от прибора к прибору она изменяется случайным образом. Поэтому если измерить неизвестную величину n приборами и затем вычислить математическое ожидание всех результатов, то значение погрешности существенно уменьшится (как и в случае усреднения случайной погрешности).

Рассмотрим некоторые методы, применяющиеся для обнаружения и уменьшения переменных и монотонно изменяющихся во времени систематических погрешностей.

Метод симметричных наблюдений весьма эффективен при выявлении и исключении систематической погрешности, являющейся линейной функцией соответствующего аргумента (амплитуды, напряжения, времени, температуры и т.д.).

Положим, что измеряют физическую величину x_u, а результаты наблюдений x_i зависят от времени t. Для выявления характера изменения погрешности выполняют ряд наблюдений через равные промежутки времени Δt. Пусть выполнено пять наблюдений физической величины $x_1 - x_5$ в моменты времени $t_1 - t_5$. Вычислим средние арифметические значения двух пар наблюдений $(x_1 + x_5)/2$ и $(x_2 + x_4)/2$. Наблюдения в этих парах проведены в моменты t_1, t_5 и t_2, t_4, симметричные относительно момента t_3.

При линейном характере изменения погрешности полученные средние значения измеряемой величины должны быть одинаковы. Убедившись в этом, результаты наблюдений запишем как $x_i = x_u + kt_i$, где k – некоторая постоянная. Пусть при измерениях получены значения $x_1 = x_u + kt_1$ и $x_2 = x_u + kt_2$. Решение полученной системы из двух уравнений дает значение измеряемой величины x_u свободное от переменной систематической погрешности:

$$x_u = \frac{x_2 t_1 - x_1 t_2}{t_1 - t_2}.$$

Метод анализа знаков неисправленных случайных погрешностей. Когда знаки неисправленных случайных погрешностей чередуются с некоторой закономерностью, имеет место переменная систематическая погрешность. Если у случайных погрешностей последовательность знаков «+» сменяется последовательностью знаков «-» или наоборот, то присутствует монотонно изменяющаяся систематическая погрешность. Если же у случайных погрешностей группы знаков «+» и «-» чередуются, то имеет место периодическая систематическая погрешность.

Графический метод является наиболее простым методом, используемым для обнаружения переменной систематической погрешности в ряде результатов наблюдений. При этом методе рекомендуется построить график, на который нанесены результаты наблюдений в той последовательности, в какой они были получены. На графике через точки наблюдений проводят плавную линию, которая выражает тенденцию результата измерения, если она существует. Если тенденция не прослеживается, то переменную систематическую погрешность считают практически отсутствующей.

3.1.2.3 Аналитическое представление и оценка случайных погрешностей

Если при проведении с одинаковой тщательностью и в одинаковых условиях ряда наблюдений одной и той же физической величины получены отличающиеся друг от друга результаты, то это свидетельствует о наличии в них случайных погрешностей. Каждая такая погрешность обусловлена одновременным воздействием на результат наблюдения многих случайных возмущений и сама является случайной величиной. При этом оценить результат отдельного наблюдения и исправить его введением поправки невозможно. С определенной долей уверенности можно утверждать, что истинное значение измеряемой величины находится в интервале результатов наблюдений от $x_{\min}$ до $x_{\max}$, где $x_{\min}$, $x_{\max}$ - соответственно нижняя и верхняя границы интервала. Вместе с тем остается неясным, чему равна вероятность появления того или иного значения погрешности, какое из множества лежащих в этом интервале значений величины принять за результат измерения и какими показателями охарактеризовать случайную погрешность результата.

Чтобы ответить на эти вопросы, необходим совершенно иной, чем при анализе систематических погрешностей, подход. Этот подход базируется на рассмотрении результатов наблюдений, результатов измерений и случайных составляющих погрешностей как случайных величин. Методы теории вероятностей и математической статистики позволяют установить вероятностные (статистические) закономерности появления случайных погрешностей и на основании этих закономерностей дать оценки результата измерения и его случайной погрешности.

Чтобы удобнее было анализировать точность измерений, ниже предполагается, что абсолютная погрешность результата измерений (2.4) является случайной, т.е. $\Delta = \overset{\circ}{\Delta}$, и обозначается Δ.

Для описания свойств случайной величины в теории вероятностей используют понятие закона (функции) распределения вероятностей случайной величины (в данном случае случайной погрешности Δ). Различают две формы описания закона распределения: интегральную и дифференциальную. В метрологии преимущественно используется дифференциальная форма — закон распределения плотности вероятностей случайной величины.

Рассмотрим формирование дифференциального закона распределения плотности вероятностей случайной величины с помощью гистограммы на примере измерений с многократными наблюдениями (рис.2.1).

Пусть проведено n последовательных измерений одной и той же физической величины x и получена группа ее значений $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Расположим результаты наблюдений в порядке возрастания их номеров от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ и затем найдем размах ряда $X = x_{\max} - x_{\min}$. Разделив размах ряда на

k равных интервалов $\Delta x = X/k$, подсчитаем количество наблюдений n_k одинаковых значений величины x, попадающих в свой интервал Δx.

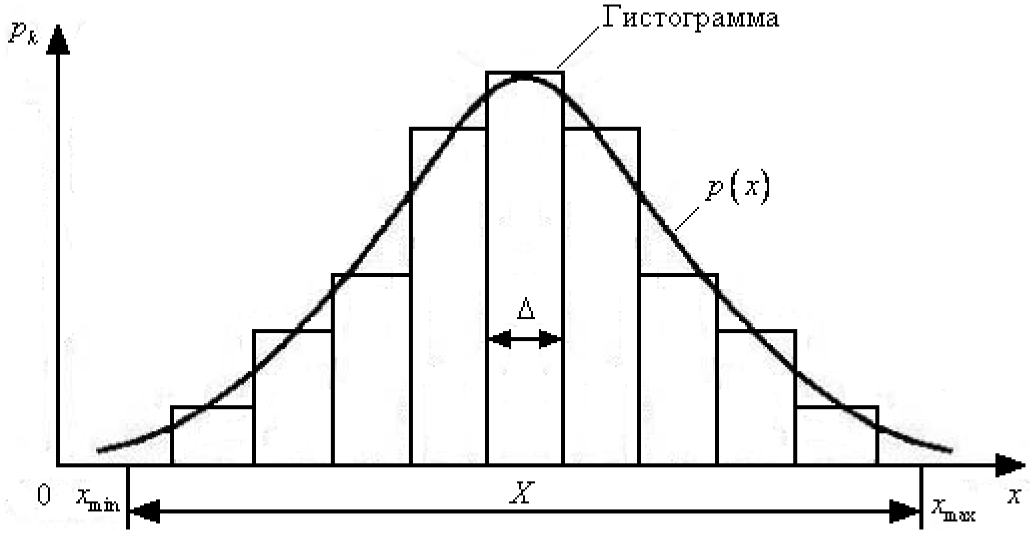

Рисунок 2.1 - Гистограмма распределения результатов ряда наблюдений

Представим полученные результаты графически, нанеся, на оси абсцисс значения физической величины x и обозначив границы интервалов с одинаковыми ее значениями, а по оси ординат — относительную частоту попаданий туда этих значений $p_k = n_k/n$. Построив на диаграмме прямоугольники, основанием которых является ширина интервалов Δx, а высотой $p_k = n_k/n$, получим диаграмму, дающую представление о плотности распределения результатов наблюдений в данном опыте. Площадь, заключенная под графиком, пропорциональна числу наблюдений n. Построенная на рис.2.1 диаграмма называется гистограммой и характеризует распределение числа результатов измерений исследуемой величины в зависимости от их значения. Ее максимум находится при истинном значении измеряемой величины. За пределами гистограммы справа и слева остаются пустые интервалы, в которых точки, соответствующие серединам этих интервалов находятся на оси абсцисс.

Если распределение случайной величины x статистически устойчиво, то можно ожидать, что при повторных сериях наблюдений той же величины, в тех же условиях, относительные частоты попаданий ее значений в каждый интервал будут близки к первоначальным. Это означает, что, построив гистограмму один раз, при последующих сериях наблюдений можно с определенной долей уверенности заранее предсказать распределение результатов наблюдений по интервалам.

При увеличении числа интервалов и соответственно уменьшении их длины гистограмма все более приближается к гладкой кривой. При бесконечном увеличении числа наблюдений $n \to \infty$ и бесконечном уменьшении ширины интервалов $\Delta x \to 0$ ступенчатая кривая, огибающая гистограмму, перейдет в плавную кривую $p(x)$ (см. рис.2.1), называемую кривой одномерной плотности распределения вероятностей (одномерной плотностью вероятностей) случайной величины, а уравнение, описывающее ее, — дифференциальным законом распределения. Кривая плотности вероятностей всегда неотрицательна и подчинена условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

Закон распределения дает полную информацию о свойствах случайной величины и позволяет ответить на поставленные вопросы о результате измерения и его случайной погрешности.

Если перейти от переменной x, т.е. измеряемой величины, к переменной Δ, отражающей случайную погрешность, то дифференциальный закон (плотность вероятностей) распределения случайной погрешности Δ можно записать в общепринятом виде:

$$p(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta}, \qquad (2.5)$$

где $dF(\Delta)$ - вероятность нахождения значений погрешности Δ в интервале $d\Delta$.

Интегральным законом распределения случайной погрешности Δ называют функцию $F(\Delta_г)$, выражающую вероятность P того, что случайная погрешность находится в интервале от $-\infty$ до некоторого значения, меньшего граничного $\Delta_\text{г}$:

$$F(\Delta_\text{г}) = P(-\infty < \Delta < \Delta_\text{г}) = \int_{-\infty}^{\Delta_\text{г}} p(\Delta)\,d\Delta. \qquad (2.6)$$

Функция $F(\Delta_\text{г})$ неубывающая и определена так, что $F(-\infty)=0$ и $F(\infty)=1$. Интерес представляет поиск вероятности P, с которой погрешность измерений находится в заданном интервале погрешностей $(\Delta_{\text{г}1},\Delta_{\text{г}2})$, где $\Delta_{\text{г}1}$ и $\Delta_{\text{г}2}$ - нижняя и верхняя границы этого интервала. Записывают вероятность как $P(\Delta_{\text{г}1} \le \Delta \le \Delta_{\text{г}2})$ и в общем случае $0 \le P \le 1$. Если $P = 0{,}6$ и выполнено 100 измерений, то считают, что 60 значений Δ попадают в интервал $(\Delta_{\text{г}1},\Delta_{\text{г}2})$.

Для определения вероятности $P(\Delta_{\text{г}1} \le \Delta \le \Delta_{\text{г}2})$ можно использовать и интегральный и дифференциальный законы распределения. Между законами имеется такая связь:

$$P(\Delta_{\text{г}1} \le \Delta \le \Delta_{\text{г}2}) = \int_{\Delta_{\text{г}1}}^{\Delta_{\text{г}2}} p(\Delta)\,d\Delta. \qquad (2.7)$$

В практических расчетах чаще применяют дифференциальный закон, так как он более наглядно описывает свойства случайной погрешности.

Из физических представлений следует, что вероятность нахождения погрешности на интервале всех возможных ее значений, т.е. на интервале $(-\infty,\infty)$, равна $P(-\infty \le \Delta \le \infty)=1$.

Часто необязательно описывать случайную погрешность с помощью законов распределения плотности вероятностей, а достаточно охарактеризовать числами отдельные ее свойства. Такие числовые характеристики называют моментами. Напомним, что моменты являются начальными, если величины отсчитывают от начала координат, и центральными, если величины отсчитывают от центра распределения.

Для рассматриваемых ниже симметричных законов $p(\Delta)$ применяется в основном центральный момент второго порядка, называемый дисперсией:

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 p(\Delta)\, d\Delta. \qquad (2.8)$$

Дисперсия D характеризует рассеяние погрешностей относительно центра распределения $\Delta = 0$.

Поскольку дисперсия D имеет размерность квадрата погрешности измерения, то обычно используют среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D}$, которое имеет размерность самой погрешности.

В метрологии при анализе случайных погрешностей (равно и при анализе случайных величин) чаще применяют нормальный (Гаусса) и треугольный законы, а также закон распределения Стьюдента.

Нормальный закон распределения погрешностей применяют при следующих предположениях:

- погрешность может принимать непрерывный ряд значений в интервале $\pm\infty$;
- при выполнении значительного числа наблюдений большие погрешности Δ появляются реже, чем малые, а частота появления погрешностей, идентичных по абсолютной величине и противоположных; знаку, одинакова.

Одномерная плотность вероятностей для нормального закона распределения погрешностей имеет вид

$$p(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.9)$$

Чем σ меньше, тем выше точность измерений. Это следует из графиков функции (2.9) для разных σ (рис. 2.2). По мере уменьшения σ рассеяние случайных погрешностей Δ относительно центра их распределения, т.е. в данном случае относительно значения $\Delta = 0$, уменьшается. При нормальном законе распределения погрешностей Δ формула расчета вероятности $P(\Delta_{г1} \le \Delta \le \Delta_{г2})$ находится подстановкой (2.9) в (2.7). Для симметричного интервала, т.е. $\Delta_{г1} = -\Delta_г$ и $\Delta_{г2} = \Delta_г$:

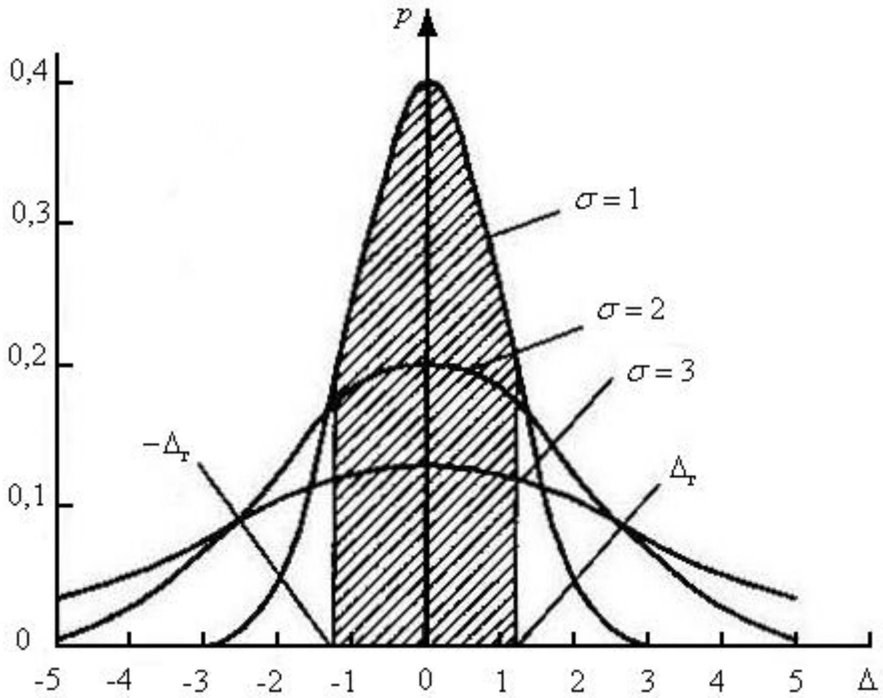

Рисунок 2.2 – Графики нормального закона распределения

$$P\left(-\Delta_{г} \le \Delta \le \Delta_{г}\right) = 2\int_{0}^{\Delta_{г}} p(\Delta)\,d\Delta = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\Delta_{г}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}\,d\Delta\,. \qquad (2.10)$$

Отметим геометрическую интерпретацию вероятности распределения случайных погрешностей (2.10). На графике, представленном на рис. 2.2, для конкретного значения СКО σ вероятность численно равна площади S заштрихованной фигуры, ограниченной функцией $p(\Delta)$, отрезком оси погрешностей Δ от $-\Delta_{г}$ до $\Delta_{г}$ и ординатами $p(-\Delta_{г})$, $p(\Delta_{г})$. Чем шире заданный интервал погрешностей $(-\Delta_{г}, \Delta_{г})$, тем больше площадь S, т.е. выше вероятность попадания случайных погрешностей измерений Δ в этот интервал. Для интервала случайных погрешностей $(-\infty, \infty)$ вероятность $P(-\infty \le \Delta \le \infty) = 1$.

Чтобы вычислить вероятность (2.10), удобнее в интеграле ввести новую, переменную $t = \Delta/\sigma$. При этом его верхний предел интегрирования заменяется на $z = \Delta_{г}/\sigma$, а правая часть выражения (2.10) преобразуется в известный, табулированный интеграл $\Psi(z)$, называемый интегралом вероятностей:

$$P(-z \le t \le z) = \Psi(z) = 2\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (2.11)$$

Функция $\Phi(z)$, называемая в математике функцией Лапласа, выражает вероятность попадания случайной величины t в интервал $(0, z)$. Значения интеграла вероятностей $\Psi(z)$ приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Значения интеграла вероятностей $\Psi(z)$

z	$\Psi(z)$	z	$\Psi(z)$	z	$\Psi(z)$	z	$\Psi(z)$
0,00	0,000	0,70	0,516	1,40	0,839	2,25	0,976
0,10	0,080	0,80	0,576	1,50	0,866	2,50	0,988
0,20	0,159	0,90	0,632	1,60	0,890	2,75	0,994
0,30	0,236	1,00	0,683	1,70	0,911	3,00	0,9973
0,40	0,311	1,10	0,729	1,80	0,928	3,30	0,9990
0,50	0,383	1,20	0,770	1,90	0,943	3,50	0,9995
0,60	0,452	1,30	0,806	2,00	0,955	4,00	0,9999

Если задавать границу погрешностей $\Delta_г$ в значениях СКО σ, то легко определить параметр $z = \Delta_г / \sigma$, а затем искомую вероятность по таблицам функции $\Psi(z)$. Можно выполнить и обратный поиск, т.е. по заданной вероятности и функции $\Psi(z)$ определить параметр z, далее $\Delta_г = z\sigma$ и интервал $(-\Delta_г, \Delta_г)$. По таблице 2.1 находят вероятности (2.10) для имеющих практическое значение интервалов погрешностей $(-\Delta_г, \Delta_г)$, представленных в СКО σ:

$$P(-2\sigma/3 \le \Delta \le 2\sigma/3) = 0{,}500;$$

$$P(-\sigma \le \Delta \le \sigma) = 0{,}683; \quad P(-3\sigma \le \Delta \le 3\sigma) = 0{,}997$$

Общепринято, что погрешность результатов измерений в $2\sigma/3$ названа равновероятной (так как при этом $P = 0{,}5$). Погрешность, равную 3σ, считают в телекоммуникационных системах и радиотехнике максимальной и ее записывают в виде $M = 3\sigma$. Из тысячи выполненных измерений при $P = 0{,}997$ только три их погрешности Δ выходят пределы интервала $(-3\sigma, 3\sigma)$.

При нормальном законе распределения случайной погрешности Δ_i за истинную величину $x_u = A$ принимают ее оптимальную оценку $x = A$, равную оценке m_1 математического ожидания m_1 выполненного ряда наблюдений $(x_1, x_2, ..., x_n)$, т.е. полагают, что

$$x = A = m_1 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (2.12)$$

есть результат измерения.

Отметим, что такие оценки, как x (а также точечные оценки вида m_1, σ и D, см.далее) принято помечать волнистой чертой — тильдой.

Закон распределения Стьюдента удобен при обработке результатов небольшого числа $(2 \le n < 20)$ многократных наблюдений справедлив, когда плотность вероятности случайных погрешностей распределена по нормальному закону. Закон описывает распределение плотности вероятности $p(t_x)$ случайной величины

$$t_x = \Delta_x / \sigma = (x - x_u) / \sigma \,. \qquad (2.13)$$

где σ — *оценка* СКО результата измерения x.

Этот закон учитывает число выполненных наблюдений n и задается функцией

$$p(t_x)\big|_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}}\left(1 + \frac{t_x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} . \qquad (2.14)$$

где $n \ge 2$, $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$ — известные в математике гамма-функции (интегралы Эйлера).

На рис. 2.3 приведены графики закона распределения Стьюдента (семейство распределений Стьюдента) вида (2.14) для различного числа наблюдений n. Для сравнения на этом же рисунке показан график нормированного нормального распределения $p_{\text{н}}(t)$, у которого СКО $\sigma = 1$, а случайная относительная погрешность (в данном случае — нормированная) $t = \Delta/\sigma$ принята равной t_x.

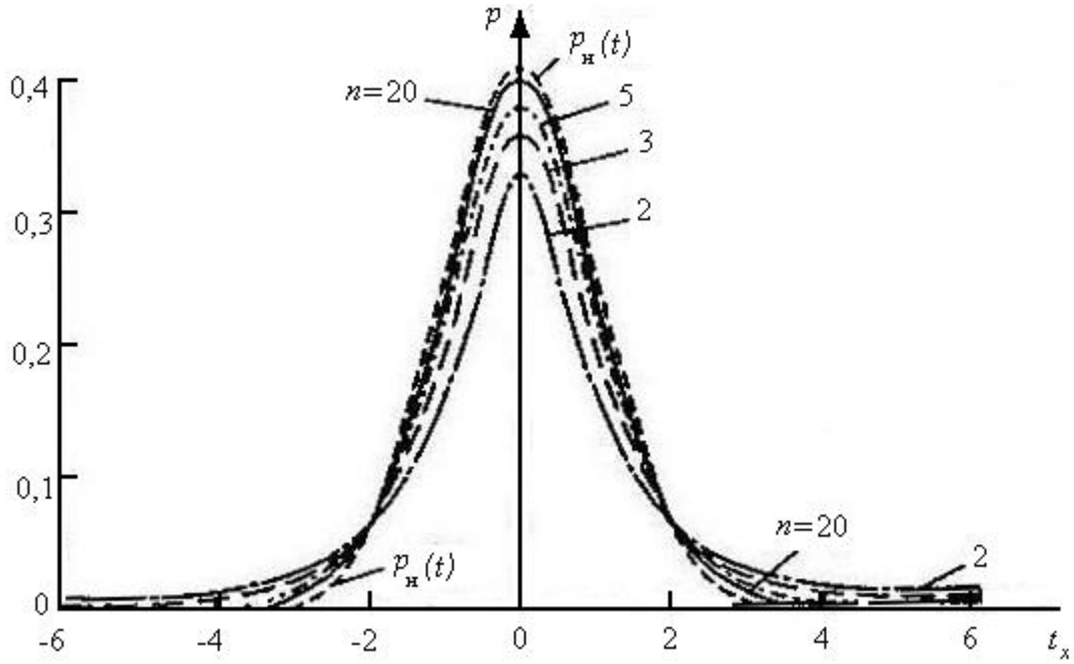

Рисунок 2.3 – Графики закона распределения Стьюдента $p(t_x)\big|_n$ для различных n и нормированного нормального распределения $p_{\text{н}}(t)$ при $t = t_x$

Из анализа графиков, представленных на рис. 2.3, следует, что закон распределения Стьюдента при числе наблюдений $n > 20$ практически совпадает с нормальным нормированным законом $p_{\text{н}}(t)$, а при $n \le 20$ отличается от него тем значительнее, чем меньше n. Отличия законов состоят в увеличении рассеяния погрешностей t_x относительно их центра $t_x = 0$ по мере уменьшения числа наблюдений n. При этом следует ожидать уменьшения вероятности P попадания относительных случайных погрешностей t_x в некоторый заданный интервал $(-t_{\text{г}}, t_{\text{г}})$.

Для поиска подобной вероятности достаточно подставить соотношение (2.14) в формулу, аналогичную (2.7), но в которой переменная Δ заменена на относительную t_x, а пределы интеграла $\Delta_{г1}$ и $\Delta_{г2}$ - на равные относительные $\pm t_г = \pm\Delta_г / \sigma$.

Параметр $t_г$ называют в математике коэффициентом Стьюдента и для него принято специальное обозначение. При расчетах случайных погрешностей измерений задают некоторую доверительную вероятность $P_д = P$ и число проводимых наблюдений n. Поэтому этот коэффициент обозначают через $t(P_д, n)$. Значения коэффициента Стьюдента приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Коэффициенты Стьюдента

n	$P_д = 0,5$	$P_д = 0,6$	$P_д = 0,7$	$P_д = 0,8$	$P_д = 0,9$	$P_д = 0,95$	$P_д = 0,98$	$P_д = 0,99$
2	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
3	0,82	1,06	1,34	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93
4	0,77	0,98	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,74	0,94	1,19	1,53	2,13	2.78	3,75	4,60
6	0,73	0,92	1,16	1,48	2,02	2,62	3,37	4,03
7	0,72	0,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,71	0,90	1,12	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50
9	0,71	0,89	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
10	0,70	0,88	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
16	0,69	0,87	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
25	0,69	0,86	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80

При использовании на практике коэффициентов Стьюдента задаются доверительной вероятностью $P_д > 0,9$.

Равномерный закон распределения имеет погрешности квантования в цифровых приборах, округления при расчетах, отсчета показаний стрелочного прибора, определения момента времени для концов временного интервала при измерении частоты и периода методом дискретного счета. Сумма этих погрешностей образует трапецеидальные распределения с различными отношениями сторон. При этом распределении все значения случайных погрешностей результата измерений расположены в интервале $(-\Delta_m, \Delta_m)$, где Δ_m - максимальная погрешность (рис. 3.1.2.4).

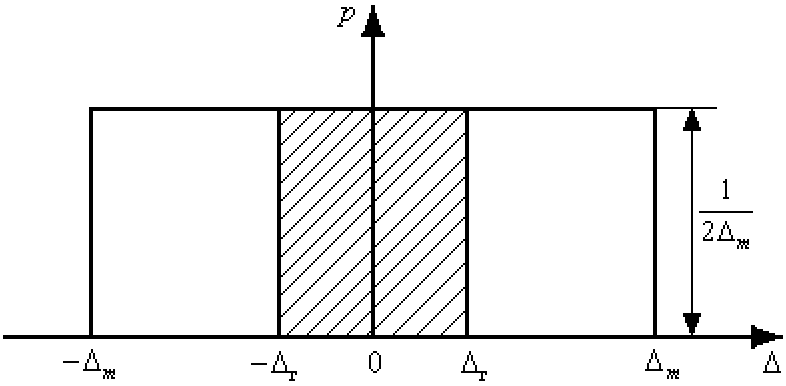

Рисунок 2.4 – Равномерный закон распределения

Математически плотность вероятности равномерного закона распределения случайных погрешностей описывается формулой:

$$p(\Delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta_m}, & -\Delta_m \le \Delta \le \Delta_m; \\ 0, & \Delta < -\Delta_m,\ \Delta > \Delta_m. \end{cases} \tag{2.15}$$

Вероятность того, что случайная погрешность измерений Δ находится в симметричном интервале $(-\Delta_г, \Delta_г)$, определяют с помощью формулы (2.7):

$$P(-\Delta_г \le \Delta \le \Delta_г) = \int_{-\Delta_г}^{\Delta_г} p(\Delta)\,d\Delta = \frac{1}{2\Delta_m} 2\int_{-\Delta_г}^{\Delta_г} d\Delta = \frac{\Delta_г}{\Delta_m} \tag{2.16}$$

На графике плотности вероятности (см. рис.2.4) площадь заштрихованного прямоугольника с основанием $2\Delta_г$ и высотой $1/(2\Delta_m)$ равна вероятности (2.16).

Для равномерного закона распределения, симметричного относительно центра $\Delta = 0$, расчет СКО σ случайной погрешности выполняется по формуле (2.8):

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 p(\Delta)\,d\Delta} = \sqrt{\frac{1}{2\Delta_m}\int_{-\Delta_m}^{\Delta_m} \Delta^2 d\Delta} = \sqrt{\frac{\Delta_m^2}{3}} = \frac{\Delta_m}{\sqrt{3}} \tag{2.17}$$

Треугольный закон распределения (закон Симпсона) характерен для случайных погрешностей цифровых измерительных приборов, в которых измеряемая величина преобразуется в пропорциональный интервал времени $T_{сч}$ называемый временем счета. Измерение этого интервала выполняется с помощью счетных импульсов стабильного генератора, имеющих заданный период следования T_0. В связи со случайным положением счетных импульсов относительно интервала $T_{сч}$, а также случайным соотношением между периодом T_0 и временем счета $T_{сч}$ треугольный закон представляет собой *композицию* (соединение) двух равномерных законов с равными максимальными погрешностями Δ_m. График треугольного закона распределения случайных погрешностей приведен на рис.2.5.

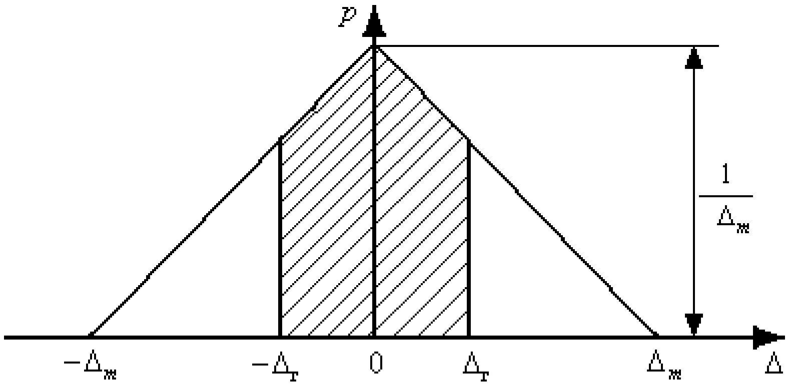

Рисунок 2.5 – Треугольный закон распределения

Для треугольного закона функция распределения плотности вероятности случайных погрешностей задается следующими соотношениями:

$$p(\Delta)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_m+\Delta}{\Delta_m^2}, & -\Delta_m\le\Delta\le 0;\\ \dfrac{\Delta_m-\Delta}{\Delta_m^2}, & 0\le\Delta\le\Delta_m;\\ 0, & -\Delta_m>\Delta;\ \Delta>\Delta_m.\end{cases} \qquad (2.18)$$

Для этого закона вероятность того, что погрешность измерения Δ раполагается в интервале $(-\Delta_г,\Delta_г)$, находится по формулам (2.7).и (2.18).

$$P(-\Delta_г<\Delta<\Delta_г)=2\int_0^{\Delta_г}\frac{\Delta_m-\Delta}{\Delta_m^2}d\Delta=2\frac{\Delta_г}{\Delta_m}-\left(\frac{\Delta_г}{\Delta_m}\right)^2 \qquad (2.19)$$

Заштрихованная область на рис. 2.5 численно равна вероятности (2.19). Среднее квадратическое отклонение σ несложно определить путем подстановки в (2.8) первого или второго выражения для $p(\Delta)$ из (2.18). В результате несложных вычислений получаем $\sigma = \Delta_m / \sqrt{6}$.

3 Обработка результатов измерений

3.1 Прямые измерения с многократными наблюдениями и обработка их результатов

Многократные наблюдения проводят при наличии значительных случайных погрешностей. Задача обработки результата измерений состоит в том, чтобы по результатам наблюдений определить наилучшую оценку измеряемой физической величины $x_{и}$ и интервал, в котором она находится с заданной вероятностью. Эту задачу решают статистической обработкой результатов наблюдений, основанной на гипотезе о нормальном распределении случайных погрешностей. Приведенная ниже методика обработки результатов измерений дана для прямых измерений с многократными независимыми и равноточными наблюдениями.

3.1.1 Исключение систематических погрешностей из результатов наблюдений

Точность результата многократных наблюдений тем выше, чем меньше систематическая погрешность. Поэтому ее важно исключить, для чего:

- устраняют источники систематических погрешностей до измерений;
- определяют поправки и вносят их в результат измерения;
- оценивают границы неисключенных систематических погрешностей (границы НСП измерения — значение суммы всех отдельных составляющих НСП измерения).

Оценка результата измерения и его СКО.

Для удобства анализа результатов и погрешностей измерений предположим, что при выполнении n многократных наблюдений одной и той же величины $x_{\text{и}}$ постоянная систематическая погрешность полностью исключена $(\Delta_{\text{с}} = 0)$. Тогда результат i-го наблюдения находят с некоторой абсолютной случайной погрешностью $\Delta_i = \overset{\circ}{\Delta}_i = x_i - x$.

Оценку СКО ряда наблюдений определяют по формуле (3.1):

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}\,. \tag{3.1}$$

Затем вычисляют оценку СКО результата измерения $\sigma_{\text{ср}} = S(A)$, которая характеризует степень разброса значений $x = A$ по отношению к истинному значению $x_{\text{и}}$ для различных n:

$$\sigma_{\text{ср}} = S(A) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,. \tag{3.2}$$

Рассмотрим случай измерений с многократными наблюдениями, когда результат i-го наблюдения содержит и случайную и постоянную систематическую погрешности: $x_i = x_{\text{и}} + \overset{\circ}{\Delta}_i + \Delta_{\text{с}}$. Подстановка значений x_i в формулу (2.12) позволяет получить оценку результата измерений

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = x_{\text{и}} + \Delta_{\text{с}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overset{\circ}{\Delta}_i\,. \tag{3.3}$$

3.1.2 Обнаружение и исключение грубых погрешностей

При статистической обработке результатов многократных наблюдений иногда выясняется, что некоторые результаты аномальны, т.е. отличаются от остальных и значительно превышают ожидаемую погрешность. Аномальные результаты могут быть проявлением случайного характера погрешностей или особенностей измеряемой величины. Эти результаты следует сохранить для последующей обработки. Однако появление аномальных результатов может быть и обусловлено факторами, не отражающими сущность эксперимента, и необходимо проверить, не являются ли они грубыми погрешностями, подлежащими исключению.

Решение данной задачи выполняют общими методами проверки статистических гипотез в предположении нормального распределения результатов наблюдений. Проверка гипотезы состоит в утверждении, что результат *i*-го наблюдения x_i, не содержит грубой погрешности, а значит, является найденным значением измеряемой величины. Используя определенные, статистические критерии, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если эти удается, то результат наблюдения рассматривают как грубую погрешность и его исключают.

Разработка и анализ методов исключения грубых погрешностей имеют большое практическое значение, поскольку при использовании сложной измерительной аппаратуры доля аномальных результатов может достигать $10...15\%$ общего числа измерений.

Задачу исключения аномальных результатов однозначно решить в общем виде невозможно, поскольку для принятия такого решения необходим тщательный анализ конкретных целей эксперимента, особенностей измерительной аппаратуры и характера поведения измеряемой величины. Особую осторожность следует проявлять тогда, когда исследуются процессы с мало изученными характеристиками.

В ряде случаев основанием для исключения аномальных результатов могут служить эвристические предпосылки, связанные, например, с воспоминаниями оператора о нарушениях условий эксперимента. Если же проведение эксперимента и обработку его результатов осуществляют с помощью компьютеров, то необходимы формальные признаки исключения грубых погрешностей.

Наиболее распространенным методом исключения результатов, содержащих грубые погрешности, является, метод цензурирования результатов измерений - исключение результатов, погрешности которых превышают установленные границы цензурирования $\pm x_{\text{ц}}$.

Критерий оценки нормальности закона распределения при известном СКО.

При исключении грубых погрешностей из результатов наблюдений по этому критерию проводят следующие операции.

1.Результаты группы; из n наблюдений (объем выборки) упорядочивают по возрастанию $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. По (2.12) и (3.2) вычисляют оценки среднего арифметического значения x и СКО наблюдений σ этой выборки. Для предполагаемых промахов, например, результаты x_1 и x_n проводят расчет коэффициентов:

$$t_1 = \frac{|x_1 - x|}{\sigma}, \qquad t_n = \frac{|x_n - x|}{\sigma}. \tag{3.4}$$

2.Задаются уровнем значимости критерия ошибки q. Очевидно, что этот уровень должен быть достаточно малым, чтобы вероятность ошибки была невелика. Из таблицы 3.1 по заданному параметру q и числу наблюдений n находят предельное (граничное) значение коэффициента:

$$t_г = \frac{\max|x_1 - x|}{\sigma}. \tag{3.5}$$

3.Сравнивают коэффициенты, определяемые по формулам (3.4) и (3.5). Если выполняются условия $t_1 > t_г$ и $t_n > t_г$, то значения x_1 и x_n относят к промахам и исключают из результатов наблюдений.

Таблица 3.1 – Предельное значение коэффициента $t_{\text{г}}$

Число набл.	Предельное значение $t_{\text{г}}$ при уровне значимости q				Число набл.	Предельное значение $t_{\text{г}}$ при уровне значимости q			
n	0,100	0,075	0,050	0,025	n	0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15	12	2,13	2,20	2,29	2,41
4	1,42	1,44	1,46	1,48	13	2,17	2,24	2,33	2,47
5	1,60	1,64	1,67	1,72	14	2,21	2,28	2,37	2,50
6	1,73	1,77	1,82	1,89	15	2,25	2,32	2,41	2,55
7	1,83	1,88	1,94	2,02	16	2,28	2,35	2,44	2,58
8	1,91	1,96	2,03	2,13	17	2,31	2,38	2,48	2,62
9	1,98	2,04	2,11	2,21	18	2,34	2,41	2,50	2,66
10	2,03	2,10	2,18	2,29	19	2,36	2,44	2,53	2,68
11	2,09	2,14	2,23	2,36	20	2,38	2,46	2,56	2,71

Критерий «трех сигм».

При использовании этого критерия устанавливают границы цензурирования $x_{\text{ц}} = 3\sigma$. Чаше всего критерий применяют для результатов измерений, распределенных по нормальному закону, и одним из граничных параметров при этом служит оценка СКО измерений.

Считается, что результат измерения, полученный с уровнем значимости ошибки $q \leq 0,003$, маловероятен и его относят к грубым погрешностям, если $|x_i - x| > 3\sigma$. Оценки x и σ вычисляют без учета экстремальных значений величин x_i. Данный критерий хорошо работает при числе измерений $n \geq 20 - 50$.

3.1.3 Доверительные границы случайной погрешности

При измерениях интерес представляет определение доверительного интервала $\left(A-\Delta_\text{г}, A+\Delta_\text{г}\right)$, в котором с заданной доверительной вероятностью $P_\text{д}$ находится измеряемая величина $x_\text{и}=A_\text{и}$. Напомним, что в доверительном интервале, равном $2\Delta_\text{г}$, погрешности $\pm\Delta_\text{г}$ называют доверительными границами случайной погрешности результата измерения, а $A_\text{н}=A-\Delta_\text{г}$ и $A_\text{в}=A+\Delta_\text{г}$ – нижней и верхней границами доверительного интервала. Доверительную вероятность запишем как

$$P\left(A-\Delta_\text{г}<A<A+\Delta_\text{г}\right)=P_\text{д}.$$

Границы доверительного интервала принято указывать симметричными относительно результата измерения. При технических измерениях доверительную вероятность устанавливают $P_\text{д}=0,95$.

При нормальном законе распределения поиск доверительной границы $\Delta_\text{г}$, выполняется с помощью интеграла вероятностей $\Psi(z)$. Задаются доверительной вероятностью $P_\text{д}$ и по таблице 2.1 находят г, соответствующее $\Psi(z)=P_\text{д}$. Учитывая z и оценку СКО результата измерений $\sigma_\text{ср}=S\left(A\right)$ определяют доверительную границу случайной погрешности

$$\Delta_\text{г}=\varepsilon=zS\left(A\right). \tag{3.6}$$

Аналитически нижнюю $A_\text{н}$ и верхнюю $A_\text{в}$ границы доверительного интервала представляют в следующем виде:

$$A_\text{н}=A-zS\left(A\right);\; A_\text{в}=A+zS\left(A\right).$$

Определим доверительные границы при распределении Стьюдента, коэффициенты $t\left(P_\text{д},n\right)$ которого приведены в табл. 2.2. Тогда по заданной доверительной вероятности $P_\text{д}$ и числу наблюдений nя находят коэффициент Стьюдента $t\left(P_\text{д},n\right)$. Далее определяют доверительную границу случайной погрешности результата измерения

$$\Delta_\text{г}=\varepsilon=t\left(P_\text{д},n\right)S\left(A\right), \tag{3.7}$$

а также границы доверительного интервала:

$$A_{\text{н}} = A - t\left(P_{\text{д}}, n\right) S\left(A\right); \quad A_{\text{в}} = A + t\left(P_{\text{д}}, n\right) S\left(A\right). \tag{3.8}$$

При одной и той же доверительной вероятности с уменьшением числа наблюдений доверительный интервал увеличивается, т. е. точность измерений ухудшается.

3.1.4 Границы неисключенных систематических погрешностей результата измерения

Неисключенные систематические погрешности принято рассматривать как случайные с равномерным симметричным законом распределения плотности вероятности и определять каждую границами $\pm\theta_i$. Причем в качестве границы θ_i, принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений.

Общую границу $\theta = \theta\left(P_{\text{д}}\right)$ числа r НСП вычисляют по формуле

$$\theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\theta_i^2}\,, \tag{3.9}$$

где k – коэффициент, зависящий от r, принятой доверительной вероятности $P_{\text{д}}$ и связи между составляющими погрешностей θ_i.

Данная доверительная вероятность $P_{\text{д}}$ должна быть равна той, которая была принята при расчете доверительной границы случайной погрешности результата измерения. При $P_{\text{д}} = 0,9$ коэффициент $k = 0,95$; при $P_{\text{д}} = 0,95$ - $k = 1,1$; при $P_{\text{д}} = 0,99$ - $k = 1,4$. При других вероятностях коэффициент k определяют по установленному стандарту.

Границы погрешности результата измерения.

Обычно на погрешность результата измерения с многократными наблюдениями влияют случайные погрешности и НСП. Тогда границы погрешности результата измерения $\pm\Delta$ оцениваются так.

1. Если значение общей границы погрешности $\theta < 0,8S\left(A\right)$, то НСП пренебрегают, считая их несущественными по сравнению со случайными

погрешностями, и полагают, что граница погрешности результата измерения $\Delta_{\text{г}} = \varepsilon = t\left(P_{\text{д}}, n\right) S\left(A\right)$.

2. При значении $\theta > 8S\left(A\right)$ пренебрегают случайной погрешностью по сравнению с НСП и полагают, что граница погрешности результата измерения $\Delta = \theta$.

3. Если $0{,}8S\left(A\right) < \theta < 8S\left(A\right)$, границу погрешности результата измерения вычисляют путем композиции распределений случайных погрешностей и НСП, рассматриваемых как случайные величины:

$$\Delta_{\text{г}} = KS_{\Sigma}. \tag{3.10}$$

Здесь K - коэффициент, зависящий от соотношения случайной погрешности и НСП; S_{Σ} - оценка суммарного СКО результата измерения.

Коэффициент K и оценку суммарного СКО S_{Σ} вычисляют по следующим формулам:

$$K = \frac{\varepsilon + \theta}{S\left(A\right) + \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\theta_i^2/3\right)}}; \tag{3.11}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\left(\theta_i^2/3\right) + S^2\left(A\right)}. \tag{3.12}$$

Соответствующим стандартом регламентирована и форма записи результатов измерений. Для симметричных доверительных границ погрешности результат измерения величины $x_{\text{и}} = A$ представляется в форме

$$x_{\text{и}} = A \pm \Delta\left(P_{\text{д}}\right). \tag{3.13}$$

где A — оценка результата измерения, определяемого по (2.12).

3.2 Прямые однократные измерения

Большинство технических измерений являются прямыми однократными. Прямые однократные измерения проводятся в случаях, если: отсутствует возможность повторных измерений, при измерениях может произойти разрушение объекта измерения, имеет место экономическая целесообразность. Эти измерения возможны лишь при определенных условиях:

- объем априорной информации об объекте измерении такой, что определение измеряемой величины не вызывают сомнений;
- изучен метод измерения, его погрешности либо заранее устранены, либо оценены;
- средства измерений исправны, а их метрологические характеристики соответствуют установленным нормам.

При прямых однократных измерениях используют единственное значение отсчета показаний прибора. Являясь случайным, однократный отсчет x включает в себя инструментальную, методическую и личную составляющие погрешности измерения, в каждой из которых могут быть выделены систематические и случайные составляющие. Поэтому до измерения должна быть проведена априорная оценка составляющих погрешности с использованием всех доступных данных. При определении доверительных границ погрешности результата измерений доверительная вероятность принимается, как правило, равной 0,95. Оценивание погрешностей прямых однократных измерений можно разделить на точное и приближенное.

3.2.1 Прямые однократные измерения с точным оцениванием погрешностей

Главной особенностью однократного измерения является то, что законы распределения случайных составляющих неизвестны и представление о них формируют лишь на основе ограниченной априорной информации.

Достаточно легко, путем поверки или по паспортным данным можно получить оценку систематической погрешности измерительного прибора, а анализом метода измерения — оценку систематической погрешности методического характера. При наличии в документации на применяемый измерительный прибор сведений о дополнительных систематических погрешностях, обусловленных влияющими величинами, эти погрешности также необходимо оценивать и учитывать.

После исключения из результата всех известных систематических погрешностей считают, что погрешность исправленного результата $x_{\text{и}} = A \pm \Delta\left(P_{\text{д}}\right)$ состоит из неисключенных остатков систематических и случайных составляющих погрешностей. Неисключенные систематические погрешности переводят в категорию случайных и оценивают каждую составляющую своими границами. При этом рекомендуется распределение вероятностей принимать равномерным, если погрешности заданы границами, и нормальным, если они заданы СКО.

В качестве границ составляющих НСП можно принимать пределы допустимых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, используемых при поверке в качестве образцовых, погрешности расчетных поправок и т.д. Если каждая НСП оценена своей индивидуальной границей $\varepsilon_i\left(P\right)$, то доверительные границы суммарной НСП определяют по формуле (3.9).

Если случайные составляющие погрешности представлены своими СКО S_i, определенными предварительно опытным путем по результатам многократных наблюдений, либо доверительными границами, найденными экспериментально, то

$$\varepsilon = t\left(P_{\text{д}}, n\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{r} S_i^2}\,, \tag{3.14}$$

где $t\left(P_{\text{д}}, n\right)$ — коэффициент Стьюдента, взятый из табл. 2.2.

Когда случайные составляющие погрешности измерений представлены доверительными границами $\varepsilon_i\left(P\right)$, соответствующими одинаковой доверительной вероятности $P = P_{\text{д}}$, тогда значение $\varepsilon = \varepsilon\left(P_{\text{д}}\right)$ рассчитывают по следующей формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i^2 \left(P\right)}\,. \tag{3.15}$$

Получив по отдельности оценки НСП и случайной погрешности результата однократного измерения, их целесообразно сопоставить. Если необходимо учитывать обе составляющие, то их суммируют по формуле (3.12).

Стандартом регламентирована форма записи результата прямого однократного измерения величины, аналогичная (3.13): $x_{\text{и}} = A \pm \Delta\left(P_{\text{д}}\right)$.

3.2.2 Прямые однократные измерения с приближенным оцениванием погрешностей

При приближенной оценке погрешностей, как и при точной, необходимо перед началом измерений провести предварительную оценку составляющих погрешности результата измерения. Эту информацию получают из опыта проведения подобных измерений, нормативно-технической документации на используемые средства измерений и других источников. Если оценка погрешности превышает допустимую, то следует выбрать более точное средство измерений или изменить методику измерения.

В простейшем случае погрешность равна пределу допускаемой абсолютной основной погрешности средства измерения $\Delta_{\text{СИ}}$, определяемой по нормативно-технической документации, если измерения проводились в нормальных условиях. При этом результат измерения можно записать в виде $x_{\text{и}} = A \pm \Delta_{\text{СИ}}$, т.е. без указания доверительной вероятности, которая подразумевается как $P_{\text{д}} = 0{,}95$. Если же измерения проводились в условиях, отличающихся от нормальных, то следует определять и учитывать пределы дополнительных погрешностей, а затем суммировать их с основными.

3.3 Косвенные измерения

Напомним, что при косвенных измерениях измеряемая физическая величина A является известной функцией f ряда других измеряемых величин — аргументов $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m$. Аргументы, т.е. перечисленные измеряемые величины, подвергаются прямым измерениям, а величину A вычисляют по формуле

$$A = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right). \qquad (3.16)$$

Каждый из аргументов измеряется с некоторой погрешностью, вносящей определенный вклад в результат косвенного измерения. Для оценки этих погрешностей важно разделение косвенных измерений на линейные и нелинейные косвенные измерения.

При линейных косвенных измерениях формула (3.16) запишется в следующем виде:

$$A = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \,, \qquad (3.17)$$

где b_i — постоянные коэффициенты при искомых аргументах x_i.

В случае нелинейных косвенных измерений соотношение (3.16) будет представлять собой уже другие, отличные от (3.17), функциональные зависимости.

Погрешности измерения аргументов могут быть заданы либо своими границами Δx_i либо доверительными границами $\Delta x\left(P_{\text{д}}\right)_i$ с доверительными вероятностями $P_{\text{д}i}$. Если число аргументов невелико (меньше пяти), то простая оценка погрешности результата ΔA получается суммированием предельных погрешностей (без учета знака), т.е. подстановкой границ $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ в формулу

$$\Delta A = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \Delta x_i^2} \,. \qquad (3.18)$$

На практике эта оценка завышена, поскольку подобное суммирование сводится к тому, что погрешности измерения всех аргументов одновременно совпадают по знаку и имеют максимальное значение. Обычно вероятность такого совпадения близка к нулю. Чтобы найти более реалистичную оценку, проводят статистическое суммирование погрешностей аргументов. Полагая, что в заданных границах погрешности аргументов распределены равномерно, доверительные границы $\Delta A\left(P_{\text{д}}\right)$ погрешности результата косвенного измерения рассчитывают как

$$\Delta A\left(P_{\text{д}}\right)=k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \Delta x_i^2}\ . \qquad (3.19)$$

Здесь коэффициент k определяют так же, как и аналогичные коэффициенты для формулы (3.9).

Если погрешности измерения аргументов заданы доверительными границами с одинаковыми доверительными вероятностями, то, считая распределение этих погрешностей нормальным, доверительные границы находят по формуле

$$\Delta A\left(P_{\text{д}}\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \left[\Delta x_i\left(P_{\text{д}}\right)\right]^2}\ . \qquad (3.20)$$

При нелинейных косвенных измерениях возникают существенные сложности статистической обработки результатов и погрешностей, связанные с изменением законов распределения аргументов x_i при их функциональных преобразованиях. Поэтому проводят приближенную оценку погрешности результата косвенного измерения на основе линеаризации функции (3.16).

Запишем выражение для полного дифференциала функции A через частные производные по аргументам x_i:

$$dA=\frac{\partial A}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial A}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial A}{\partial x_m}dx_m\,. \qquad (3.21)$$

Согласно известному в математике определению, полный дифференциал функции является приращением этой функции, вызванным малыми приращениями ее аргументов. Поскольку погрешности измерения аргументов всегда величины малые по сравнению с номинальными значениями аргументов, то справедлива замена в (3.21) дифференциалов аргументов dx_i на погрешности измерений Δx_i, а дифференциала функции dA на погрешность результата измерения ΔA:

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial A}{\partial x_m}\Delta x_m . \qquad (3.22)$$

Анализ формулы (3.22) позволяет получить простые правила оценивания погрешности результата косвенного измерения.

Правило 1. Погрешности в суммах и разностях. Если аргументы (для упрощения возьмем два) x_1 и x_2 измерены с погрешностями Δx_1 и Δx_2 и измеренные значения используются для вычисления суммы или разности $A = x_1 \pm x_2$, то суммируют абсолютные погрешности без учета знака: $\Delta A = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Правило 2. Погрешности в произведениях и частных. Если измеренные значения x_1 и x_2 используют для вычисления $A = x_1 \cdot x_2$, или $A = x_1 / x_2$, то суммируют относительные погрешности $\delta A = \delta x_1 + \delta x_2$, где $\delta x = \Delta x / x$.

Правило 3. Измеренная величина умножается на константу. Если x используют для вычисления произведения $A = B \cdot x$, в котором B не имеет погрешности, то $\delta A = |B| \cdot \delta x$.

Правило 4. Возведение в степень. Если аргумент x используют для вычисления степени $A = x^n$, то $\delta A = n\delta$.

Правило 5. Погрешность в произвольной функции одной переменной. Если величину x используют для вычисления функции $A(x)$, то относительная погрешность

$$\delta A = \frac{dA}{dx}\delta x .$$

Вывести эти правила можно самостоятельно. Использование приведенных правил позволяет получить не слишком завышенную оценку предельной погрешности результата нелинейного косвенного измерения при не очень большом числе аргументов $(m < 5)$.

Результат косвенного измерения представляют формулой (3.13), используемой для прямых измерений с многократными наблюдениями

$$x_{\text{и}} = A \pm \Delta\left(P_{\text{д}}\right),$$

в которой учитывается доверительная вероятность.

4. Метрологические характеристики средств измерений и их нормирование

Чтобы обеспечить единство измерений, знать степень соответствия информации об измеряемой величине, содержащейся в выходном сигнале, ее истинному значению, иметь возможность взаимно заменять средства измерений, метрологические характеристики последних нормируют.

Метрологические характеристики — это характеристики свойств средства измерения, оказывающие влияние на результат измерения и его погрешности. Характеристики, устанавливаемые нормативно-техническими документами, называются нормируемыми, а определяемые экспериментально — действительными. Для этих целей используют нормированное значение погрешности, под которой понимают погрешность, являющуюся предельной для данного типа средств измерения.

К метрологическим характеристикам средств измерений относят те, которые оказывают влияние на результаты и погрешности измерений. К ним относят:

- градуировочные характеристики, определяющие зависимость выходного сигнала от входного; номинальное значение меры; пределы измерения; цена деления шкалы; вид и параметры цифрового кода;
- динамические характеристики, отражающие инерционные свойства средств измерений и позволяющие оценить динамические погрешности;
- инструментальные составляющие погрешности измерения;
- функции влияния, отражающие зависимость метрологических характеристик средств измерений от воздействия влияющих величин или неинформативных параметров (напряжение, частота сети и т.д.).

Метрологические характеристики нормируют для нормальных условий эксплуатации средств измерений. Нормальными считают условия, при которых изменением метрологических характеристик под воздействием влияющих величин можно пренебречь.

Для нормальных условий применения средства измерения нормативными документами предусмотрены:

• нормальная область значений влияющей величины (диапазон значений): температура окружающей среды — $\left((20 \pm 5\right)^{\circ} C$; относительная влажность — $(65 \pm 15)\%$; практическое отсутствие электрических и магнитных полей; напряжение питающей сети — $(220 \pm 4,4) В$; частота питающей сети — $(50 \pm 1) Гц$ и т.д.; положение прибора — горизонтальное с отклонением от горизонтального $\pm 2^{\circ}$;

• рабочая область значений влияющей величины — область значений влияющей величины, в пределах которой нормируют дополнительную погрешность или изменение показаний средства измерений;

• рабочие условия измерений — условия измерений, при которых значения влияющих величин находятся в пределах рабочих областей. Например, для амперметра нормируют изменение показаний, вызванное отклонением частоты переменного тока от 50 Гц (частоту 50 Гц в данном случае принимают за нормальное значение частоты); для измерительного конденсатора — дополнительную погрешность на отклонение температуры окружающего воздуха от нормальной.

Важной метрологической характеристикой является погрешность средств измерения — инструментальная погрешность измерения.

Инструментальную погрешность в нормальной области значения влияющих величин называют основной. Превышение значения влияющей величины за пределы нормальной области значений может привести к возникновению составляющей инструментальной погрешности, называемой дополнительной.

Для средств радиоизмерений основная и дополнительная погрешности нормируются отдельно. Пределы допускаемых дополнительных погрешностей устанавливают в виде дольного значения предела допускаемой основной погрешности. Для оценки дополнительных погрешностей в документации на средство измерения указывают нормы изменения показаний при выходе условий измерения за пределы нормальных.

4.1 Классы точности средств измерений

При измерениях в повседневной жизни повышенная точность нужна не всегда. Вместе с тем определенная информация о возможной инструментальной составляющей погрешности результата измерения необходима и поэтому она должна быть каким-либо образом отражена. Характеристики, установленные ГОСТ 8.009-84 ГСИ. «Нормируемые метрологические характеристики средств измерений» в полной мере описывают метрологические свойства средств измерений. Однако в настоящее время в эксплуатации находится достаточно большое число средств измерений, метрологические характеристики которых нормированы несколько по-другому, а именно на основе классов точности. Общие положения деления средств измерений по классу точности устанавливает ГОСТ 8.401-80 ГСИ. «Классы точности средств измерений. Общие требования».

Класс точности — обобщенная характеристика средства измерения, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами средств измерений, влияющими на точность, значения которых устанавливают в соответствующих стандартах. Отметим такое примечание: «Класс точности средств измерений характеризует их свойства в отношении точности, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполненных с помощью этих средств». Это значит, что класс точности дает возможность судить о том, в каких пределах находится погрешность средств измерений одного типа, но не характеризует точности измерений, выполняемых этими средствами, так как грешность зависит и от метода измерений, и от условий измерений и т.д. Последнее важно учитывать при выборе средства измерения в зависимости от заданной точности измерений.

Средство измерений может иметь два и более класса точности. Например, при наличии у него двух или более диапазонов измерений одной и той же физической величины ему можно присвоить два или более класса точности. Приборы, предназначенные для измерения нескольких физических величин, также могут иметь различные классы точности для каждой измеряемой величины.

Классы точности устанавливают на средство измерения (в технических условиях или стандартах) при разработке на основании исследований и испытаний их представительной партии. Пределы допускаемых погрешностей нормируют и выражают в форме абсолютной $(\Delta_{\text{СИ}} = \Delta)$, относительной $(\delta_{\text{СИ}} = \delta)$ или приведенной $(\gamma_{\text{СИ}} = \gamma)$ погрешностей (далее индекс «си» для упрощения опущен). Форма выражения зависит от характера изменения погрешностей в пределах диапазона измерений и условий применения и назначения средства измерения. Пределы допускаемых погрешностей средств измерений определяют аналогично погрешностям измерений соответственно по формулам (2.1), (2.2) и (2.3).

В общем случае, зная класс точности средства измерения, из (2.3) можно найти максимально допустимое значение абсолютной погрешности для всех точек диапазона:

$$\Delta_{\text{СИ доп}} = \gamma_{\text{СИ}} X_N / 100 . \qquad (4.1)$$

Абсолютная погрешность средств измерений Δ состоит из аддитивной (суммируемой с измеряемой величиной) и мультипликативной (умножаемой на измеряемую величину) составляющих. Аддитивная составляющая образуется, например, из-за неточности установки на нуль перед измерением и т.д. Мультипликативные погрешности появляются вследствие изменения коэффициента усиления усилителя, коэффициента передачи цепи.

Пределы допускаемой основной погрешности.

Максимальная основная погрешность измерительного прибора, при которой он разрешен к применению, называют пределом допускаемой основной погрешности.

Пределы допускаемой абсолютной основной погрешности устанавливают по одной из формул:

$$\Delta = \pm a; \tag{4.2}$$

$$\Delta = \pm(a + bx). \tag{4.3}$$

где x — значение измеряемой величины; a, b — положительные числа.

Формула (4.2) описывает аддитивную составляющую погрешности. Нормирование в соответствии с (4.3) означает, что в составе погрешности средства измерения присутствует сумма аддитивной и мультипликативной составляющих. В соотношениях (4.2) и (4.3) значения Δ и x выражают либо в единицах измеряемой величины, либо в делениях шкалы прибора. Класс точности обозначают заглавными латинскими буквами (L, M, C) или римскими цифрами (I, II, III), к буквам можно присоединять индексы в виде арабской цифры.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности, в %,

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N}100 = \pm p. \tag{4.4}$$

Здесь X_N — нормирующее значение, выраженное в единицах абсолютной погрешности Δ; p — отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда предпочтительных чисел:

$$1 \cdot 10^n; 1{,}5 \cdot 10^n; 2 \cdot 10^n; 2{,}5 \cdot 10^n; 4 \cdot 10^n; 5 \cdot 10^n; 6 \cdot 10^n, . \tag{4.5}$$

где $n = 1, 0, -1, -2$ и т. д.

Для измерительных приборов с равномерной шкалой принимают X_N равным большему из пределов измерений или большему из их модулей, если нулевая метка находится на краю диапазона измерений; сумме модулей пределов измерений, если нулевое значение находится внутри диапазона измерения.

Если погрешность задана формулой (4.2), т.е. $\Delta = \pm a$, то пределы допускаемой относительной основной погрешности, в %,

$$\delta = \frac{\Delta}{x} 100 = \pm q. \qquad (4.6)$$

Здесь q — отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда предпочтительных чисел в (4.5).

Когда допускаемая абсолютная основная погрешность задана формулой (4.3), пределы допускаемой относительной основной части, в %,

$$\delta = \frac{\Delta}{x} 100 = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_{\text{к}}}{x} \right| - 1 \right) \right]. \qquad (4.7)$$

где c — суммарная относительная погрешность прибора в конце диапазона измерения; d — аддитивная относительная погрешность прибора, $X_{\text{к}}$ — конечное значение диапазона измерений; c, d —отвлеченные положительные числа, выбираемые из ряда предпочтительных чисел в (4.5), причем всегда $c > d$.

Числа a, b, c, d в (4.3) и (4.7) связаны между собой следующими соотношениями:

$$c = b + d; \quad d = a / |X_{\text{к}}|. \qquad (4.8)$$

Таким образом, для средств измерений, у которых аддитивная и мультипликативная составляющие соизмеримы, предел относительной допускаемой основной погрешности выражается трехчленной формулой (4.7). Обозначение класса точности для этих средств измерений состоит из двух чисел, выражающих c и d в процентах и разделенных косой чертой (c/d), например класс точности 0,05/0,02. Такое обозначение удобно, так как первый его член c равен относительной погрешности средства измерения в наиболее благоприятных условиях, когда измеряемая величина $x = X_{\text{к}}$. При этом, согласно формуле (4.7), $\delta = c$ в %. Второй член формулы (4.7) характеризует увеличение относительной погрешности измерения при уменьшении x, т.е. аддитивной составляющей погрешности. К описанной группе средств измерений относятся цифровые приборы.

Пределы допускаемой дополнительной погрешности.

Предел допускаемой дополнительной погрешности (она может быть вызвана изменением влияющих величин) - наибольшая дополнительная погрешность, при которой средство измерения может быть допущено к применению. Например, для прибора класса точности 1,0 приведенная дополнительная погрешность при изменении температуры на 10°С не должна превышать ±1%. Это означает, что при изменении температуры среды на каждые 10°С добавляется дополнительная погрешность 1%.

Предел допускаемой абсолютной дополнительной погрешности средства измерения $\Delta_{ДСИ}$ может указываться в виде:

• постоянного значения для всей рабочей области влияющей величины;

• отношения предела допускаемой дополнительной погрешности, соответствующего предписанному интервалу влияющей величины, к этому интервалу;

• зависимости предела $\Delta_{ДСИ}$ от влияющей величины.

Правила и примеры обозначения классов точности средств измерений приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Правила и примеры обозначения классов точности

Формула выражения основной погрешности	Пределы Допускаемой основной погрешности	Обозначение класса точности	
		в документации	на приборе
Абсолютная $\Delta = \pm a$	$\pm a$	L	L

$\Delta = \pm(a+bx)$	$\pm(a+bx)$	М	М
Приведенная, в % $\gamma = \frac{\Delta}{X_N}100 = \pm p$	$\gamma = \pm 1,5\%$	1,5	1,5
Относительная, в % $\delta = \frac{\Delta}{x}100 = \pm q$	$\delta = \pm 0,5\%$	0,5	0,5
Относительная, в % $\delta = \pm\left[c + d\left(\left\lvert\frac{X_к}{x}\right\rvert - \right.\right.$	$\delta = \pm 0,02/0,0$	$c/d = 0,02/0,0$	$0,02/0,0$

5. Информационные характеристики средств измерений

В последние годы наблюдается внедрение методов теории информации в процессы получения измерительных данных. С точки зрения этой теории суть измерения состоит в сужении интервала неопределенности меры информации от значения, известного перед его проведением, до величины, называемой энтропийным интервалом неопределенности $\Delta_э$. Одним из основных понятий теории информации является так называемая условная энтропия $H(x)$, которая для плотности вероятности распределения погрешностей $\rho(x)$ определяется по формуле

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\left[\ln \rho(x)\right] dx. \qquad (5.1)$$

Условная энтропия характеризует неопределенность наших знаний (сведений), остающуюся после получения (после проведения измерений) значения измеряемой величины при свойственном ей законе распределения вероятностей.

Поскольку все средства измерения предназначены для получения измерительной информации, необходимо особо остановиться на их информационных характеристиках.

Согласно основному положению теории информации (теорема теории информации сформулирована К.Шенноном), получаемое в результате измерения количество информации I равно уменьшению неопределенности, т.е. разности энтропии, до и после измерения:

$$I = H(x) - H\left(\frac{x}{x_и}\right). \tag{5.2}$$

(апостериорная, т.е. полученная после измерений) энтропия, т.е. энтропия величины x при условии, что получен результат измерений $x_и$. Очевидно, что условная энтропия определяется законом распределения погрешности Δ средства измерения:

$$H\left(\frac{x}{x_и}\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\Delta)\left[\ln \rho(\Delta)\right] d\Delta. \tag{5.3}$$

Если погрешность измерения распределена равномерно на интервале $[-\Delta_m, +\Delta_m]$, то условная энтропия

$$H\left(\frac{x}{x_и}\right) = -\int_{-\Delta_m}^{+\Delta_m} \frac{1}{2\Delta_m}\left(\ln \frac{1}{2\Delta_m}\right) d\Delta = \ln(2\Delta_m). \tag{5.4}$$

Для нормального закона распределения погрешности со среднеквадратическим отклонением σ условная энтропия

$$H\left(\frac{x}{x_и}\right) = -\int_{-\Delta_m}^{+\Delta_m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta. \tag{5.5}$$

Опустив достаточно сложные выкладки, приведенные в специальной литературе, окончательно запишем:

$$H\left(\frac{x}{x_и}\right) = \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi \mathrm{e}}\right). \tag{5.6}$$

где e - основание натурального логарифма.

Из сравнения формул (5.1) и (5.6) нетрудно заметить, что измерительные приборы, имеющие различные законы распределения погрешностей, могут давать одинаковое количество информации при измерении одной величины. Для рассматриваемого случая это выполняется при $2\Delta_m = \sigma\sqrt{2\pi e}$. Поэтому в качестве характеристики воздействия на точность измерения погрешности с произвольным законом распределения используют ее энтропийное значение.

В метрологии энтропийным значением погрешности измерения принято считать наибольшую величину погрешности при равномерном законе распределения, которая вносит такое же дезинформационное действие, как и погрешность с любым другим законом распределения плотности вероятности.

Так, например, если погрешность распределена нормально, то энтропийное значение погрешности

$$\Delta_э = 0,5\sqrt{2\pi e}\,\sigma = \sqrt{0,5\pi e}\,\sigma \approx 2,07\sigma\,. \qquad (5.7)$$

Подобным образом определяется энтропийное значение погрешности для любого конкретного закона распределения плотности вероятности.

В общем виде зависимость между энтропийным и среднеквадратическим значениями погрешности может быть представлена в виде

$$\Delta_э = k_э\sigma\,, \qquad (5.8)$$

где $k_э$ — энтропийный коэффициент.

Энтропийный коэффициент $k_э$ зависит от вида закона распределения плотности вероятностей погрешностей. Для равномерного распределения энтропийный коэффициент

$$k_р = \frac{\Delta_э}{\sigma} = \sqrt{3} \approx 1,73\,, \qquad (5.9)$$

а для нормального распределения

$$k_н = \sqrt{0,5\pi e} \approx 2,07\,, \qquad (5.10)$$

Рассчитанные величины энтропийного коэффициента характеризуют область его значений, соответствующую большинству реальных одномодальных (с одной вершиной) законов распределения плотностей вероятности погрешности.

Из теории погрешностей известно, что при одинаковых среднеквадратических значениях погрешности дезинформационное действие погрешности с любым законом распределения меньше дезинформационного действия погрешности, распределенной по нормальному закону.

При использовании информационного подхода к измерениям проводится сравнение приборов по количеству информации, получаемой при измерении, т.е. по энтропийному значению погрешности.

Некоторые метрологи в области радиотехнических измерений считают энтропийную погрешность более точной и отвечающей современному информационному подходу к характеристике процесса измерения физических величин. Информационный подход позволяет с единых позиций анализировать измерительные устройства как в статическом, так и в динамическом режимах работы, оптимизировать технические характеристики и оценить предельные возможности тех или иных средств измерений.

Однако классические методы оценки погрешности измерений также имеют свои преимущества и по-прежнему широко применяются в метрологии.

Заключение

Оценивая погрешности измерения, следует понимать, что уровень точности, к которому необходимо стремиться, должен определяться критериями технической и экономической целесообразности. В метрологии установлено, что увеличение точности измерения вдвое удорожает само измерение в два-три раза. В то же время, уменьшение точности измерения в производстве ниже определенной нормы приводит к появлению существенного брака изделий. При установлении точности измерений важно также учитывать их значимость. В одних случаях недостаточная точность получаемой измерительной информации имеет небольшое или локальное значение, в других – играет исключительно важную роль: от точности измерения могут зависеть как здоровье и жизнь людей, так и научное открытие.

2. Измерение вероятностных характеристик случайных процессов

1. Введение

В системах связи и радиотехнических устройствах большую роль играют случайные процессы: напряжение собственных шумов аппаратуры, сигналы других радиотехнических систем, шумовые сигналы и т.д. Анализ различных задач показывает, что практически любой сигнал, несущий информацию, можно рассматривать как случайный, точнее стохастический (от греческого Stochfstikos – умеющий угадывать, проницательный). Стохастический процесс – процесс, течение которого зависит от случая и для которого определена вероятность того или иного его течения. Изучение случайных процессов требует применения статистических методов анализа. При статистическом подходе нет необходимости определять точный результат отдельного измерения, а можно основываться на исследовании множества опытов. При анализе множества опытов удается найти закономерности и количественные соотношения, характеризующие случайный процесс в среднем.

2 Общие сведения

При исследованиях случайный процесс отражают его отдельными реализациями. Полное представление о случайном процессе можно получить с помощью бесконечной совокупности его реализаций, или их так называемого ансамбля.

Ансамбль реализаций – математическая абстракция, аналитическая модель случайного процесса. Конкретные реализации, наблюдаемые при исследованиях, представляют собой физические процессы, явления или объекты и входят в ансамбль как его неотъемлемая часть. Например, ансамблем реализаций случайного процесса является группа сигналов, наблюдаемых одновременно с помощью многоканального осциллографа на выходах идентичных генераторов шумового напряжения.

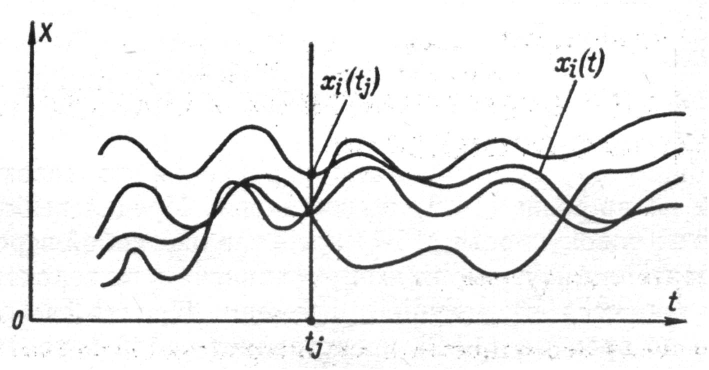

Рисунок 2.1 - Ансамбль реализаций случайного процесса

2.1 Вероятностные характеристики случайных процессов

Пусть случайный процесс описан некоторой обобщенной случайной функцией *X(t).* Конкретный вид *x1(t),x2(t),.....xk(t),…*этой функции процесса, полученной в результате проведенного эксперимента (например, измерения), позволяет определить все ее параметры, после чего она становится уже (в некоторой мере условно) *детерминированным сигналом*. Следовательно, случайная функция *X(t)* совмещает в себе характерные признаки случайной величины и детерминированной функции.

При фиксированном значении аргумента *t* случайная функция превращается в случайную величину, а в результате каждого отдельного опыта становится уже детерминированной функцией. Выберем некоторый момент времени *t1*. Совокупность отдельных мгновенных значений всех реализаций ансамбля в заданный момент времени *t1* также будет некоторой случайной величиной *X(t1)*, называемой сечением случайного процесса. Эта случайная величина может иметь любые заранее неизвестные значения в возможном интервале ее нахождения и измерения.

Достаточно полной характеристикой случайной величины *X(t1)* является интегральная функция распределения *F(x)*, которую определяют как вероятность того, что все значения случайной величины *X(t1)* не превышают некоторого заданного уровня переменной *x*:

$$F(x) = P[X(t1) \le x]$$

Если случайная величина $X(t1)$ во времени непрерывна, то удобнее пользоваться одномерной плотностью вероятности:

$$p(x,t1) = F(x)/dx$$

Если задаться каким-либо интервалом a,b изменения параметра x случайной величины $X(t1)$, то вероятность попадания случайной величины $X(t1)$ в интервал a,b будет равна:

$$p(x,t1)dx = F(b) – F(a) = P[\, a \le X(t1) \le b]$$

Если параметр $a \to \infty$, а параметр b принимает текущее значение переменной x, тогда интегральная функция распределения имеет следующий вид:

$$F(x) = P\left[-\infty \prec X(t_1) \le x\right] = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x,t_1)dx$$

2.2 Числовые характеристики случайных процессов

Случайные процессы наиболее полно описываются законами распределения плотности вероятности: одномерным, двумерным и т.д. Однако, оперировать с такими функциями зачастую сложно, поэтому в практической метрологии стараются обойтись характеристиками и параметрами этих законов, которые описывают случайные процессы не полностью, а частично. К важнейшим из них относятся математическое ожидание и дисперсия.

Измерение параметров и характеристик случайного процесса существенно упрощается при его стационарности и эргодичности.

Стационарным называют случайные процессы, статистические характеристики которых не изменяются во времени. Свойства стационарных процессов характеризуют следующими условиями: математическое ожидание стационарного случайного процесса постоянно $m_x(t) = m_x = const$; дисперсия по сечениям является постоянной величиной $D_x(t) = D_x = const$.

Обычно все реальные радиотехнические и информационные случайные процессы относятся к стационарным. Подавляющее большинство стационарных случайных процессов обладают свойством эргодичности. Случайный процесс является эргодическим, если усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по времени одной реализации в пределах бесконечно длинного интервала *Tx*. Конечно, здесь понятие «бесконечно длинного интервала» достаточно условно.

Определим основные числовые характеристики стационарного эргодического случайного процесса.

Математическое ожидание (среднее значение) случайного процесса вычисляют путем усреднения (эта операция обозначена чертой над функцией) значений заданной реализации:

$$m_x = \overline{x(t)} = \lim_{T_x \to \infty} \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} x(t)dt$$

Дисперсия случайного процесса (разброс значений возле среднего значения, отклонение от среднего значения):

$$D_x = \sigma_x^2 = \lim_{T_x \to \infty} \frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} \left[x(t) - m_x \right]^2 dt$$

Различают две группы статистических характеристик случайных процессов: распределение его значений во времени (математическое ожидание, дисперсия, функции распределения, функции корреляции); распределение энергии процесса по частоте (спектральная плотность).

3 Аналоговые методы и приборы для измерения математических ожиданий и дисперсий

Измерение (точнее – оценка, но более понятен и привычен термин «измерение») математического ожидания и дисперсии производят аналоговыми и цифровыми приборами.

Рассмотрим аналоговые методы и приборы для измерения математических ожиданий и дисперсий. Усредняющее устройство является идеальным интегратором. Если функция *X(t)* представляет ток или напряжение, то в роли аналогового интегратора могут выступать интегрирующие *RC* – цепочки или интегратор на операционном усилителе с емкостной отрицательной обратной связью (рисунок 3.1):

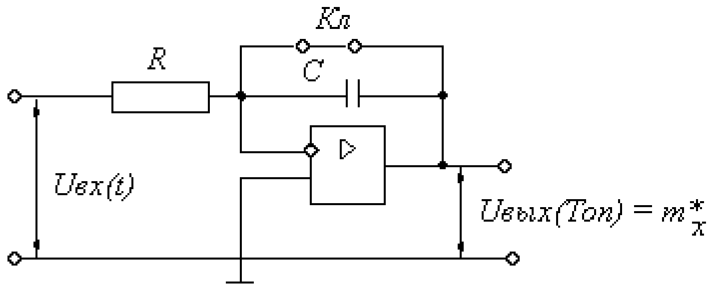

Рисунок 3.1 – Интегратор на ОУ с емкостной отрицательной обратной связью

С помощью замкнутого ключа *Кл* задают время интегрирования (опроса) входного сигнала *Tоп = Tx*. При $t = 0$ ключ размыкается и находится в этом положении до момента $t = T_{оп}$, после чего замыкается. За время $T_{оп}$ происходит усреднение входного сигнала $U_{вх}(t)$. Через замкнутый ключ и ОУ конденсатор разряжается практически мгновенно. Для получения оценки среднего значения исследуемого напряжения $U(t)$ необходимо измерить выходное напряжение $U_{вых}(T_{оп})$ на интервале времени $T_{оп}$. Среднее значение входного напряжения:

$$m_x^* = K \cdot U_{вх}(T_{оп}),$$

где K - коэффициент усиления усилителя, входящего в измеритель.

На рисунке 3.2 приведена схема средства измерений математического ожидания случайного процесса

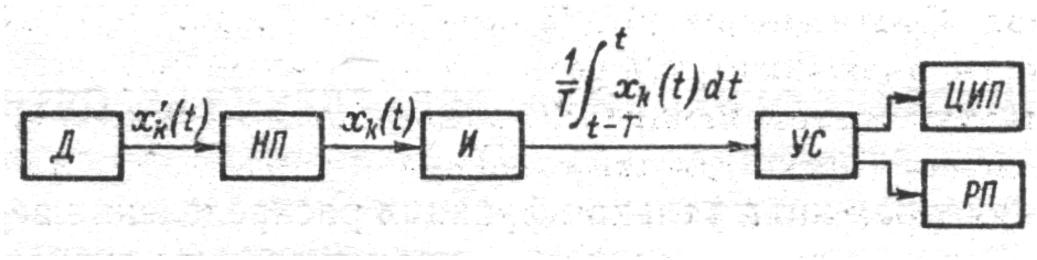

Рисунок 3.2 – Схема средства измерений математического ожидания случайного процесса.

На рисунке *Д*—преобразователь измеряемой величины в электрический сигнал (датчик); *НП* — нормирующий преобразователь, превращающий входной сигнал в стандартный по виду и диапазону значений; *И* — интегратор; УС — устройство сопряжения, обеспечивающее согласование выхода интегратора со входами цифрового вольтметра и регистрирующего прибора;

ЦИП — цифровой прибор (например, цифровой вольтметр);

РП—регистрирующий прибор (самопишущий прибор).

Рассмотрим измерение дисперсии. Для измерения дисперсии можно использовать вольтметр среднего квадратического значения. Для получения центрированного значения вольтметр должен иметь «закрытый вход», т.е. не пропускать постоянную составляющую.

Возможны различные варианты построения устройств для измерения дисперсии случайного процесса — дисперсиометров. На рисунке 3.3 приведена структурная схема средства измерений дисперсии случайного процесса.

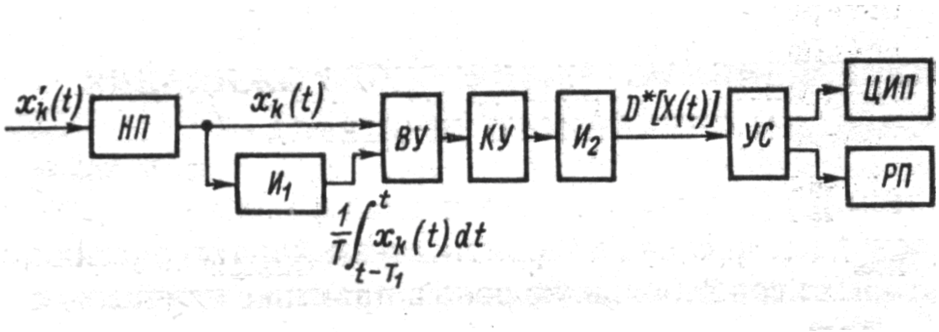

Рисунок 3.3 - Структурная схема средства измерений дисперсии случайного процесса

На рисунке *НП* — нормирующий преобразователь; *И1* и *И2* — интеграторы; *ВУ*— вычитающее устройство; *КУ*— квадратирующее устройство; *УС* — устройство сопряжения; *ЦИП* — цифровой прибор; *РП* — регистрирующий прибор.

4 Анализ распределения вероятностей

В приборах для измерения (имеем в виду оценку) интегральной функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $p(x)$ используют методы, основанные на связи между функциями вероятностей и временем пребывания случайного процесса в интервале заданных значений x.

Рассмотрим *измерение интегральной функции распределения аналоговым методом*. Данный метод измерения интегральной функции распределения иллюстрирует рисунок 4.1, где показаны структурная схема измерителя и графики, поясняющие его работу.

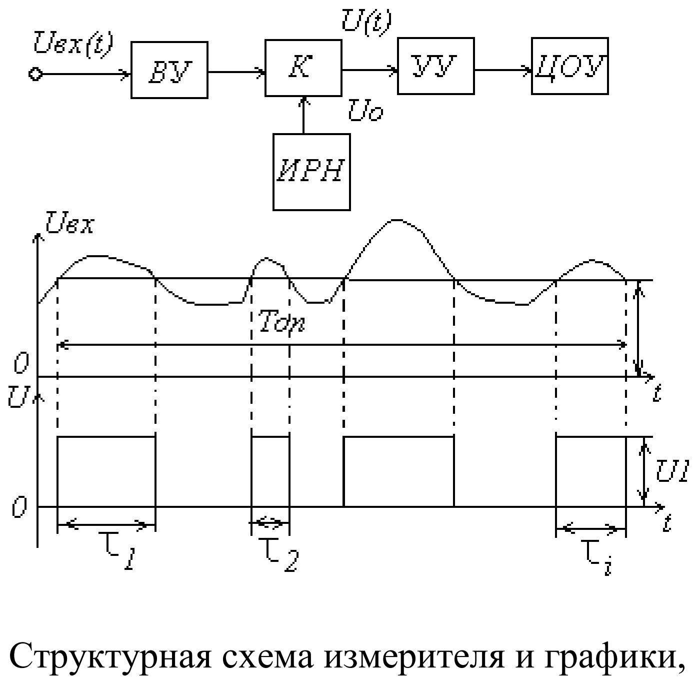

Рисунок 4.1 - Структурная схема измерителя и графики, поясняющие его работу

Структурная схема аналогового измерителя содержит входное устройство ВУ, компаратор К, источник регулируемого напряжения ИРН, усредняющее устройство УУ и цифровое отсчетное устройство ЦОУ. Анализируемую реализацию $U_{вх}(t)$ через входное устройство, обеспечивающее необходимую интенсивность исследуемого процесса на входе основных блоков, подают на компаратор. Компаратор выполняет роль амплитудного селектора с определенным порогом срабатывания U_0, устанавливаемого источником регулируемого напряжения. При срабатываниях компаратора на его выходе возникает последовательность импульсов $u(t)$ постоянной амплитуды U_1 и случайной длительностью τ_i, которая в любой момент времени пропорциональна интервалу пребывания анализируемой функции выше установленного значения порогового напряжения U_0. Выходные импульсы компаратора поступают на усредняющее устройство, которое осуществляет усреднение за один цикл измерения. Это устройство выполняют в виде интегратора или фильтра низких частот. Сигнал с выхода УУ поступает на ЦОУ. Если при измерениях менять порог U_0, то на экране дисплея (при его подключении к выходу УУ) можно получить график функции распределения.

Рассмотрим *измерение плотности вероятности аналоговым методом*. На рисунке 4.2 представлена структурная схема измерителя плотности вероятности случайного процесса.

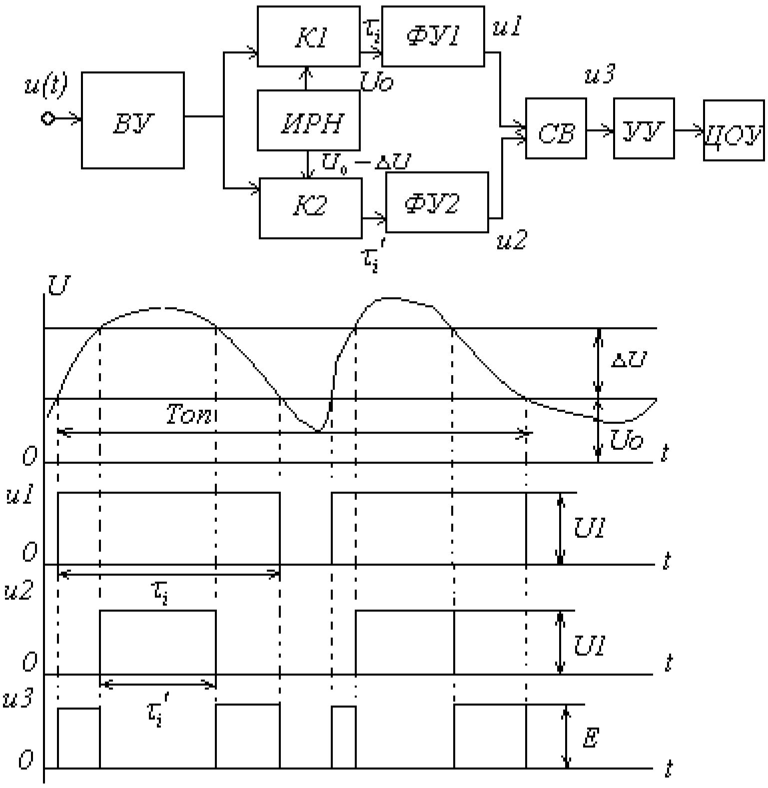

Рисунок 4.2 - Структурная схема измерителя плотности вероятности случайного процесса и графики, поясняющие его работу

Структурная схема измерителя плотности вероятности случайного процесса содержит два одинаковых канала. В обоих каналах этого измерителя устанавливают уровни селекции по напряжению U_0 и $U_0+\Delta U$. В данной схеме: ВУ – входное устройство; К1 и К2 – компараторы; ИРН – источник регулируемого напряжения, вырабатывающий фиксированные уровни напряжения U_0 и $U_0+\Delta U$; ФУ1 и ФУ2 – формирующие устройства; СВ – схема вычитания; УУ – усредняющее устройство; ЦОУ – цифровое отсчетное устройство.

Исследуемая реализация $U(t)$ через входное устройство поступает на компараторы К1 и К2. На выходе компаратора К1 формируются импульсы, длительность τ_i которых соответствует интервалам времени, когда напряжение реализации $U(t)\succ U_0$. Для компаратора К2 длительность выходных импульсов τ_i' соответствует интервалам времени, когда напряжение реализации $U(t)\succ(U_0+\Delta U)$. Далее импульсы с обоих компараторов поступают на соответствующие формирующие устройства ФУ1 и ФУ2, на выходе которых вырабатываются импульсные напряжения u_1 и u_2 с одинаковой амплитудой импульсов U_1. Схема вычитания измерителя вырабатывает импульсы напряжения u_3 длительностью $(\tau_i - \tau_i')$ и амплитудой E. Длительность импульсов выходного напряжения u_3 схемы вычитания соответствует интервалам времени, когда $U_0 \prec u(t) \prec (U_0 + \Delta U)$. Усреднение этих импульсов за время накопления определяет некоторый уровень напряжения, соответствующий оценке плотности вероятности процесса. Итак, напряжение на выходе УУ дает оценку значения плотности вероятности.

5 Определение корреляционных функций

Математическое ожидание и дисперсия не полностью определяют случайных процесс, поскольку не могут характеризовать связь между двумя его сечениями при различных значениях времени. Для этого используют *корреляционную функцию*, часто называемую *автокорреляционной (АКФ)*. Корреляционная функция – неслучайная функция $R(t_1, t_2)$, описывающая статистическую связь между мгновенными значениями случайной функции, разделенными заданным интервалом времени $\Delta t = t_2 - t_1$. При равенстве аргументов, т.е. $t_2 = t_1$, АКФ численно равна дисперсии. Корреляционная функция всегда неотрицательна.

Для измерения значений функций корреляции применяют *коррелометры*. Устройства, позволяющие получить при измерениях график всей функции корреляции (коррелограмму), получили название коррелографов.

В радиоизмерениях вводят удобный для анализа степени связи сигнала и копии, или разных сигналов, числовой параметр – *интервал корреляции*, равный ширине основания АКФ.

При исследовании связи между случайными реализациями случайного процесса $x_1(t)$ и $x_2(t)$ используют *взаимокорреляционную функцию* (ВКФ):

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T_{on}\to\infty} \frac{1}{T_{on}} \int_0^{T_{on}} x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

Оценку функции корреляции можно находить последовательно во времени или одновременно (параллельно; многоканальные коррелометры). Соответственно различают коррелометры двух типов: последовательного и параллельного анализа. Работа первых основана на перемножении исследуемых процессов; вторых – на представлении искомой функции корреляции тригонометрическим рядом Фурье.

5.1 Коррелометры с перемножением сигналов

Структурная схема коррелометра с перемножением сигналов представлена на рисунке 5.1:

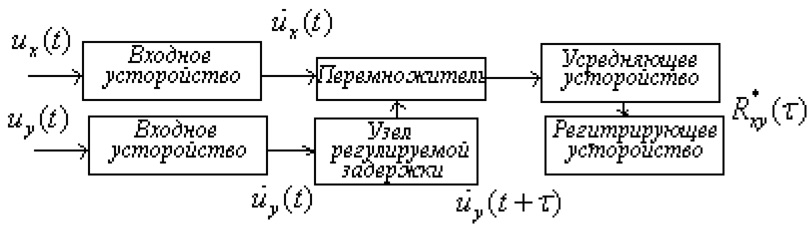

Рисунок 5.1 - Структурная схема коррелометра с перемножением сигналов

Структурная схема коррелометра с перемножением сигналов содержит входные устройства 1 и 2, идеальный перемножитель, узел регулируемой задержки во времени одного из исследуемых процессов на величину τ, усредняющее и регистрирующее устройства. В схеме при измерениях функции корреляции каждому значению задержки τ устанавливается постоянное напряжение, которое регистрируют. Кривую, построенную по этим точкам, принимают как оценку функции корреляции исследуемых процессов. При анализе АКФ на входные устройства 1 и 2 подают один и тот же сигнал, а при анализе ВКФ – подают два различных сигнала.

5.2 Коррелометры с аппроксимацией сигналов

Как периодический процесс, АКФ можно представить в виде обобщенного ряда Фурье по системе ортонормированных функций $v_i(\tau)$:

$$R(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i v_i(\tau)$$

где c_i - некоторые постоянные коэффициенты ряда.

При представлении функции корреляции в виде ряда, информация о ней содержится в значениях коэффициентов разложения c_i. Поэтому задача оценки функции корреляции в этом случае состоит в вычислении коэффициентов разложения на интервале $t_1 \dots t_2$ по известной формуле:

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} u(t) v_k(t) dt$$

Коэффициенты c_i можно определить по одной реализации случайного стационарного эргодического процесса с помощью специальных фильтров. При анализе оценку функции корреляции формируют по найденным коэффициентам разложения с помощью устройств, работающих по алгоритму $R(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i v_i(\tau)$ при конечном числе слагаемых. Задерживать исследуемый сигнал во времени не требуется. Поэтому коррелометры не имеют устройств задержки.

В качестве примера рассмотрим коррелометр виброакустический Т-2001 (течеискатель).

Рисунок 5.2 – Коррелометр виброакустический Т-2001 (течеискатель)

Назначение:

Прибор Т-2001 предназначен для оперативного поиска и локализации мест утечек жидких сред из скрытых трубопроводов, работающих под давлением. Испытания прибора Т-2001 на водопроводных и тепловых сетях в различных регионах России показали, что он позволяет правильно выявлять более 90% контролируемых утечек, включая небольшие и скрытые утечки.

Отличительные особенности:

Уникальный алгоритм автоматизированного поиска утечек с помощью вычислений функции взаимной корреляции и функции когерентности и других функций измеряемых сигналов, позволяющий определять утечки с высокой точностью. Автоматизированный режим расчета скорости распространения звука от утечки Мобильность и компактность.

Краткое описание:

Прибор "Т-2001" является 2-х канальным анализатором сигналов, в котором используется усовершенствованный спектрально-акустический метод поиска утечек. Метод отработан в реальных условиях в процессе аварийных устранений утечек на водопроводах и тепловых сетях. Режим поиска утечек запускается из специального окна управления, которое позволяет осуществлять поиск утечек в АВТОМАТИЧЕСКОМ и в ДИАЛОГОВОМ режимах работы оператора. Для автоматического поиска оператор должен только установить полосу анализа (по максимуму кросс-спектра), ввести скорость звука и расстояние между датчиками. Прибор выдает расстояние до утечки от центра между датчиками или от любого из двух датчиков. В диалоговом режиме оператор может самостоятельно искать утечку по максимумам функции кросскорреляции, непосредственно на дисплее. Точность определения места утечки составляет 0,1% от длины обследуемого участка. Специальные режимы расчета скорости звука, когда она неизвестна, и подавления паразитных периодических сигналов (от насосов, транспорта и т.п.) позволяют существенно повысить точность определения утечки. Прибор "Т-2001" обнаруживает утечку и в том случае, если предполагаемое место аварии визуально определено неверно и утечка находится не между исследуемыми колодцами, а на одном из соседних участков. Испытания прибора "Т-2001" на Нижегородских водопроводах и тепловых сетях показали, что он выявляет более 90% контролируемых утечек.

Корреляционный течеискатель ТКР-4102 с радиоканалом (новый прибор).

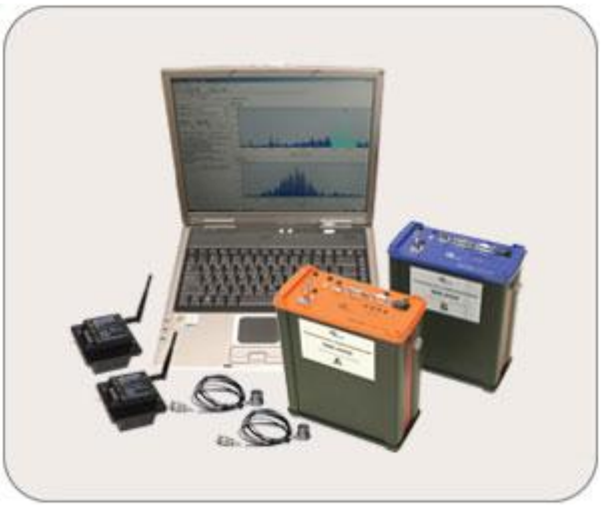

Рисунок 5.3 - Корреляционный течеискатель ТКР-4102 с радиоканалом (новый прибор).

Течеискатель ТКР-4102 позволяет оперативно осуществлять поиск и локализацию мест утечек жидкости (воды и т.п.) из скрытых трубопроводов, работающих под давлением.

Течеискатель ТКР-4102 представляет собой распределенную мобильную систему, состоящую из нескольких модулей: - двух датчиков, воспринимающих сигналы утечки, двух рабочих (измерительных) станций для сбора данных, двух выносных модемов, осуществляющих связь по радиоканалу и базового компьютера (ноутбука) для автоматизированного расчета и отображения координаты утечки.

Принципиальным отличием течеискателя ТКР-4102 от существующих приборов подобного класса является *универсальный канал передачи* данных от датчиков к базовой станции обработки информации.

В зависимости от конкретной ситуации и городских транспортных условий могут быть использованы:

- цифровой радиоканал повышенной надежности передачи данных;
- шина RS-485 при повышенных радиопомехах и относительно спокойных транспортных условиях.

Рабочая среда: пар, легкие нефтепродукты. Диаметр трубопровода(50-1200)мм Рабочее давление: (0,5-50 атм) Минимальный диаметр утечки:(5-10)мм

Технические характеристики:

Частотный диапазон: (1 – 9000) Гц

Динамический диапазон: 90 дБ

Длина контролируемого участка: не менее 600 м (зависит от типа и состояния трубы, условий укладки).

Погрешность определения местоположения утечки: не более 0,1% от длины участка (усредненная оценка)

Время работы без подзарядки измерительных станций: до 16 час.

Условия работы на открытых площадках: (-15...+55)С для измерительных станций; (-5...+45)С для ноутбука; (-60...+150)С для датчиков.

Габаритные размеры (измерительные станции):(220Х250Х70) мм;

Масса измерительной станции: 2,4 кг

6 Спектральный анализ случайных процессов

Оценку спектральной плотности мощности (спектра мощности) случайного процесса выполняют двумя методами: по выборочной функции корреляции и путем фильтрации процесса.

6.1 Выборочная оценка функции корреляции

Спектральная плотность и функция корреляции случайного процесса связаны теоремой Хинчина – Винера, выражаемой прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

где $W_x(\omega)$ - спектральная плотность мощности; $R_x(\tau)$ - корреляционная функция мощности случайного процесса.

Данный способ оценки спектральной плотности мощности случайного процесса широко распространен в связи с применением высокоэффективных алгоритмов БФП, существенно облегчающих вычислительные операции и уменьшающих их число. Пользуясь алгоритмами БФП, можно определить спектральную плотность на основании исследуемой реализации стационарного эргодического процесса.

6.2 Метод фильтрации

Метод фильтрации основан на пропускании реализации $u_x(t)$ через измерительное устройство, состоящее из каскадного соединения узкополосного фильтра с полосой пропускания Δf и настроенного на определенную частоту f, квадратичного элемента (квадратора), интегратора и дисплея. Структурная схема измерителя спектра мощности представлена на рисунке 6.1:

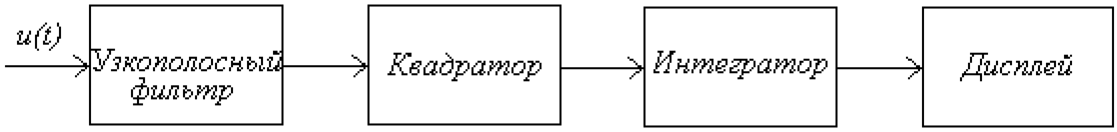

Рисунок 6.1 - Структурная схема измерителя спектра мощности

Для уменьшения погрешностей измерений необходимо произвести сглаживание оценки спектральной плотности мощности случайного процесса, которое заключается в следующем. Находят выборочную спектральную плотность для k реализаций случайного процесса. Сглаженную оценку спектральной плотности для каждой частоты вычисляют как среднее арифметическое значение выборочных оценок, соответствующих отдельным реализациям за период накопления (опроса).

Если случайный процесс является стационарным и эргодическим, то требуемые наборы реализаций можно получить из одной реализации путем разбиения ее по времени на части нужного интервала. Дисперсия оценки зависит от количества реализаций, по которым произведено усреднение. Чем больше число реализаций, тем меньше дисперсия сглаженной оценки спектральной плотности.

Рассмотрим несколько примеров.

Многофункциональный анализатор спектра А17.

Рисунок 6.2 - Многофункциональный анализатор спектра А17

Многофункциональный анализатор спектра А17 предназначен для измерения параметров спектральных составляющих сигналов, корреляционной структуры сигналов, генерации электрических сигналов с нормированными метрологическими параметрами. Подключение анализатора к ПЭВМ осуществляется по шине USB 2.0 или по интерфейсу Ethernet. Питание - от блока питания 220 В -> 12 В, входящего в комплект поставки или от внешней или внутренней аккумуляторной батареи 12 В. Встроенный усилитель для датчиков со встроенной электроникой позволяет подключать вибродатчики и микрофоны стандарта ICP без использования промежуточных усилителей. Анализатор может функционировать в автономном режиме (без участия компьютера) в режиме регистратора сигналов и записывать результаты во внутренний накопитель до 2ГБ. К одному компьютеру можно подключать до 20 анализаторов спектра и создавать многоканальные измерительные системы.

Отличительной особенностью данного устройства является возможность решения широкого круга задач измерения сигналов и диагностики оборудования при небольших габаритах и малом весе. Таким образом, для обслуживания большого количества измерительных точек потребуется всего один анализатор А17-U8 и Ноутбук.

Измерение уровней шума и уровней вибрации, аттестация испытательного оборудования, диагностика зубчатых передач, подшипников, роторов и турбин, длительная непрерывная регистрация сигналов - все это можно осуществлять с помощью анализатора А17-U8.

Одновременный опрос всех каналов системы выгодно отличает ее от аналогичных приборов, представленных на нашем рынке. Сигналы измеряются и анализируются с высокой точностью.

Возможно горизонтальное или вертикальное исполнение анализатора.

Возможность обработки сигналов в реальном масштабе времени, а также обработки записанных временных реализаций.

По всем спектральным и корреляционным функциям дополнительно могут отображаться спектрограммы и коррелограммы. Дополнительно можно наблюдать срезы спектрограмм по времени и частоте.

Анализатор спектра соответствует требованиям 3 группы ГОСТ 22261 "Средства измерений электрических и магнитных величин".

Основные технические характеристики:

Аналоговый вход (АЦП)	
Количество аналоговых входов по напряжению и ICP	4, 8 ... 160
Частотные диапазоны одновременно анализируемых сигналов	0...20, 0...200, 0...2 000, 0...20000 Гц
Частота преобразования по каждому каналу	до 500 кГц
Количество разрядов АЦП	16
Антиэлайзинговая фильтрация сигналов	до 40 кГц
Максимальное входное напряжение при единичном коэффициенте усиления	± 10 В
Программируемые коэффициенты усиления	20, 40, 60 дБ
Динамический диапазон	90 дБ
Идентичность каналов в полосе пропускания	0,1 %
Межканальная разность фаз	1 град на 10 кГц
Уровень собственных шумов во всей полосе пропускания при максимальном коэффициенте усиления, приведенный к входу	1 мкВ
Аналоговый выход (ЦАП)	
Количество аналоговых выходов	1
Диапазон частот генерируемого синусоидального сигнала	0,03... 20 000 Гц
Предел допускаемой относительной погрешности установки частоты для диапазона 0...20 000 Гц	± 0,1 %
Предел допускаемой относительной погрешности установки частоты для диапазона 0,03...10 Гц	± 10 %
Количество разрядов ЦАП	16
Значение выходного напряжения по постоянному току	± 10 В
Пределы допускаемой погрешности установки выходного	± (0,2 % + 2 мВ)

постоянного и переменного напряжения	
Коэффициент гармоник генерируемого синусоидального сигнала	0, 1 %
Дополнительные характеристики	
Объем встроенной энергонезависимой памяти	до 2 Гб
Суммарная частота дискретизации при записи на встроенный накопитель по всем включенным каналам	до 75 кГц
Время записи на встроенный накопитель по всем каналам при максимальной частоте	14 часов
Скорость обмена по шине Ethernet	100 Мбит/с
Скорость обмена по шине HighSpeed USB 2.0	480 Мбит/с
Габаритные размеры	160 x 270 x 70 мм
Вес	1 кг (1,9 кг с аккумулятором)
Возможность синхронизации с другими анализаторами спектра	

A17-U2 - 2-канальный переносной анализатор спектра низкочастотного диапазона.

Рисунок 6.3 - A17-U2 - 2-канальный переносной анализатор спектра низкочастотного диапазона

Основные области применения:

- измерение и нормирование уровней шума и уровней вибрации в октавных и 1/3-октавных спектральных полосах;
- диагностика зубчатых передач, роторов и турбин;
- диагностика подшипников;
- поверка вибродатчиков и микрофонов;
- автономные измерения в полевых условиях;
- непрерывный мониторинг состояния механизмов;
- гидроакустические измерения.

Анализатор спектра будет незаменим при необходимости проведения различного рода испытаний, не допускающих использование стационарной измерительной аппаратуры, и, в то же время, не уступит ей по техническим и метрологическим характеристикам. Встроенный накопитель объемом до 200 Мб позволяет собирать данные в автономном режиме для последующей обработки на ПЭВМ. Малый вес и габариты позволяет использовать его в труднодоступных местах при диагностике вращающихся механизмов, зубчатых передач, подшипников и турбин. Возможность обработки сигналов в реальном масштабе времени, а также обработки записанных временных реализаций.

Основные технические характеристики:

Аналоговый вход (АЦП)	
Количество аналоговых входов	2
Частотные диапазоны одновременно анализируемых сигналов	0...10, 0...100, 0...1 000, 0...10000, 0...20000 Гц
Частота преобразования по каждому каналу	до 50 кГц
Количество разрядов АЦП	20
Антиэлайзинговая фильтрация сигналов	до 20 кГц
Максимальное входное напряжение при единичном коэффициенте усиления	± 8,4 В
Программируемые коэффициенты усиления	20, 40, 60 дБ
Динамический диапазон при частотном диапазоне до 100 Гц	126 дБ
Динамический диапазон при частотном диапазоне до 1 кГц	116 дБ
Динамический диапазон при частотном диапазоне до 10 кГц	106 дБ
Динамический диапазон при частотном диапазоне до 100 кГц	96 дБ
Межканальная разность фаз	1 град на 10 кГц
Уровень собственных шумов во всей полосе пропускания при максимальном коэффициенте	1 мкВ

усиления, приведенный к входу	
Аналоговый выход (ЦАП)	
Количество аналоговых выходов	1
Диапазон частот генерируемого синусоидального сигнала	0,03... 20 000 Гц
Предел допускаемой относительной погрешности установки частоты для диапазона 0...200 000 Гц	± 0,1 %
Предел допускаемой относительной погрешности установки частоты для диапазона 0,03...10 Гц	± 10 %
Количество разрядов ЦАП	16
Значение выходного напряжения по постоянному току	± 4 В
Пределы допускаемой погрешности установки выходного постоянного и переменного напряжения	± (0,2 % + 2 мВ)
Коэффициент гармоник генерируемого синусоидального сигнала	0,1 %
Дополнительные характеристики	
Объем динамической памяти	до 32 Мб
Объем встроенной энергонезависимой памяти	до 200 Мб
Скорость обмена по шине HighSpeed USB 2.0	480 Мбит/с
Габаритные размеры	115 x 180 x 35 мм
Вес	0,4 кг
Возможность внешней синхронизации и запуска по цифровому разъему	

7 Оценка погрешностей при центрировании нестационарных случайных процессов

Реальные технологические процессы являются нестационарными случайными процессами (НСП). Для моделирования большинства из них можно рекомендовать аддитивную и аддитивно-мультипликативную модели:

$X(t) = j_1(t) + Z(t)$

$X(t) = j_1(t) + j_2(t)*Z(t)$

где $j_1(t)$, $j_2(t)$ - детерминированные функции времени, $Z(t)$ - стационарный случайный процесс, характеризующийся нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Центрирование предполагает переход от процесса вида $X(t)$ к процессу $X^*(t)$:

$$X^*(t) = X(t) - M[X(t)]$$

где $M[X(t)]$ - математическое ожидание.

Поскольку анализ процессов выполняется по одной реализации и за конечный интервал времени, то от вероятностных характеристик осуществляется переход к оценкам этих характеристик. При этом к оценкам предъявляются требования несмещенности (оценка, среднее значение которой равно истинному значению параметра), эффективности (способ оценки обеспечивает минимальную дисперсию) и состоятельности. Для математического ожидания такой характеристикой, как известно, является среднее значение на множестве экспериментальных данных. Точность центрирования будет зависеть от точности получения оценки математического ожидания. Основные источники погрешности определяются выбранным оператором усреднения, конечной длиной реализации и дискретизацией по времени.

8 Заключение

Измерения вероятностных характеристик случайных процессов (статистические измерения) составляют один из наиболее быстро развивающихся разделов измерительной техники. В настоящее время область распространения статистических методов исследования и обработки сигналов измерительной информации практически безгранична. Связь, навигация, управление, диагностика (техническая, медицинская), исследование среды и многие другие области немыслимы без знания и использования свойств сигналов и помех, описываемых их вероятностными характеристиками.

Потребность в изучении свойств случайных процессов привела к развитию соответствующих методов и средств (преимущественно электрических). Появление анализаторов функций распределения вероятностей, коррелометров, измерителей математического ожидания, дисперсиометров и других видов измерителей вероятностных характеристик открыло новые возможности в области создания современной информационной и управляющей техники.

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммуникационных системах: Учебник для вузов / В.И. Нефедов, А.С. Сигов, В.К. Битюков и др.; Под редакцией В.И. Нефедова и А.С. Сигова. – 3-е изд., перераб. И доп. – М.: Высшая школа, 2005. – 599 с.
2. Метрология, стандартизация и технические измерения: Учебное пособие / В.А. Шалимов. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 149 с.
3. Метрология, стандартизация и сертификация: Учебное пособие. В 2-х частях / Г.И. Шевелёва. — Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2006. — Ч.1. — 136 с.
4. Метрологическое обеспечение систем передачи: Учебное пособие для вузов/ Б.П. Хромого, В.Л. Серебрин, А.Л. Сенявский и др.; Под ред. проф Б.П. Хромого. – М.: Радио и связь, 1991. – 392 с.
5. Бакланов И.Г. Технологии измерений в современных телекоммуникациях. – М.: ЭКО-ТРЕНД, 1998. – 139 с.
6. Крылова Г.Л. Основы стандартизации, сертификации, метрологии. Учебник для вузов. – 2-е изд. перераб. И доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 711 с.
7. Петраков А.В., Лагутин В.С. Защита абонентского телетрафика. – М.: Радио и связь, 2001. – 504 с.
8. Колинько Т.А. Измерения в цифровых системах связи. Практическое руководство. – К.: ВЕК+, К.: НТИ 2002. - 320 с.
9. Дж. Скотт Хогдал. Анализ и диагностика компьютерных сетей. – М.: Изд-во «Лори», 2001. – 353 с.
10. Эд. Уилсон. Мониторинг и анализ сетей. Методы выявления неисправностей. – М.: Изд-во «Лори», 2002. – 350 с.

11. Иванов А.В. Контроль соответствия в телекоммуникациях и связи. Часть 1. – М.: Компания САЙРУС СИСТЕМС, 2001. – 375 с.
12. Бакланов И.Г. Тестирование и диагностика систем связи. – М.: Эко-Трендз, 2001. – 264 с.
13. Бакланов И.Г. Технологии измерений в первичной сети. Часть 1. Системы Е1, PDH, SDH. – М.: Эко-Трендз, 2000. – 142 с.
14. Бакланов И.Г. Технологии измерений в первичной сети. Часть 2. Системы синхронизации, B-ISDN, ATM. – М.: Эко-Трендз, 2000. – 149 с.
15. Шмалько А.В. Цифровые сети связи: планирование и построение. – М.: Эко-Трендз, 2001. – 282 с.
16. Кузьнецов В.И. Радиосвязь в условиях радиоэлектронной борьбы. – Воронеж.: ВНИИС, 2002. – 403 с.