

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

О. В. Гальцева

Теория ошибок и обработка результатов измерений
Методические указания по проведению практических занятий

Томск
2021

УДК 528.11
ББК 22.19
Г 177

Рецензент:

Лобода Ю.О., доцент каф. управления инновациями ТУСУР,
канд. пед. наук

Гальцева, Ольга Валерьевна

Г 177 Теория ошибок и обработка результатов измерений: Методические указания по проведению практических занятий/ О.В. Гальцева. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2021. – 16 с.

Методические указания содержат рекомендации и материалы, необходимые для проведения практических занятий по дисциплине «Теория ошибок и обработка результатов измерений». Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по программам магистратуры.

Одобрено на заседании кафедры УИ, протокол № 6 от 24.12.2021.

УДК 528.11
ББК 22.19

© Гальцева О.В., 2021
© Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2021

Оглавление

1. Общие положения	4
1 Общие требования к проведению практических занятий.....	5
2 Техническое обеспечение практических занятий.....	6
3 Прием результатов выполнения практических заданий.....	6
4 Терминология дисциплины.....	7
5 Пример практического занятия	10
6 План практических занятий	15
Список рекомендуемой литературы	16

1. Общие положения

Данные методические указания разработаны для студентов, обучающихся в Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники (далее - Университет) по программам магистратуры.

Структура дисциплины «Теория ошибок и обработка результатов измерений» предполагает проведение практических занятий. Практические занятия предназначены для закрепления материала, полученного в лекционном курсе, самостоятельного изучения и обсуждения материалов дисциплины, предусмотренных рабочей программой. Полученные навыки и знания могут быть полезны при проектировании и внедрении на предприятиях инфраструктурных систем и элементов, планировании и оптимизации проектов и процессов с помощью современных информационных технологий. Рекомендации по выполнению самостоятельной работы студентов приведены в соответствующих методических указаниях.

В ходе проведения практических занятий студентам прививаются навыки поиска информации, работы с учебно-методической документацией, умения увязывать теоретические знания с практикой, четко излагать свои мысли, отвечать на вопросы, оформлять и представлять результаты работы.

Рекомендации подготовлены с целью помочь студентам в успешном освоении дисциплины и подготовке и прохождении промежуточных этапов аттестации.

1 Общие требования к проведению практических занятий

Практические занятия по дисциплине «Теория ошибок и обработка результатов измерений» проводятся согласно учебному расписанию. В ходе практических занятий студент участвует в обсуждении темы, обозначенной на предыдущем занятии и выполняет практические задания, полученные от преподавателя. Практические задания выполняются студентами очной формы обучения индивидуально под контролем со стороны преподавателя. Все консультации осуществляются преподавателем.

Во время проведения практических занятий студентам в аудитории запрещается:

- Разговаривать между собой на любые темы без разрешения преподавателя.
- Консультировать друг друга.
- Передавать друг другу материалы, являющиеся результатом выполнения заданий.
- Производить шум, мешающий остальным сосредоточиться на выполнении задания.
- Пользоваться наушниками, берушами и другими приспособлениями, не позволяющими отчетливо слышать указания преподавателя.
- Читать литературу, конспекты и другие записи, не относящиеся к изучаемому предмету.
- Находиться в помещении аудитории в верхней одежде, если температура выше 18°C.
- Приносить верхнюю одежду с собой и размещать ее на стуле/столе, если в учебном корпусе работает гардероб.

В случае однократного нарушения преподаватель должен предупредить студента. При повторном нарушении в течении одного занятия студент из аудитории удаляется.

Студент имеет право:

- Уточнять полученные задания у преподавателя.
- Пользоваться любыми доступными методическими материалами по данной дисциплине.
- Просить консультации у преподавателя, если он в текущий момент не распределяет задания, не принимает выполненные работы и не консультирует другого студента.
- Пользоваться для выполнения практических заданий собственным ноутбуком или планшетным компьютером.

Преподаватель, давая консультацию студенту, указывает раздел технической документации или методической литературы, в которой имеется ответ на вопрос студента. Если необходимые сведения в документации и литературе отсутствуют, то преподаватель должен дать устные пояснения или продемонстрировать практические действия, приводящие к требуемому результату для повторения студентом.

2 Техническое обеспечение практических занятий

Практические занятия должны проводиться в аудитории, оборудованной:

- Доской и маркерами.
- Проектором и экраном.
- Персональными компьютерами, не менее одного на двух студентов группы, удовлетворяющих требованиям:
 - доступ в сеть Internet;
 - современный графический редактор для разработки моделей и схем.

3 Прием результатов выполнения практических заданий

За выполнение каждого задания преподаватель выставляет студенту оценку. Оценка выполнения задания складывается из трех равнозначных компонентов:

- Время выполнения задания. Фиксируется с момента получения задания до момента сдачи отчета. Измеряется в астрономических часах. Сравняется с нормативным временем выполнения.
- Полнота и правильность выполнения задания. Экспертная оценка преподавателя.
- Аккуратность при выполнении текстовых и графических материалов.

Во время приема выполненной работы преподаватель вправе требовать у студента обоснования представленных материалов.

Преподаватель должен объявить студенту поставленную ему оценку за выполнение задания, а в случае возникновения непонимания, объяснить причины ее выставления. В случае, если оценка неудовлетворительно, студент имеет право повторно предъявить результат выполнения, но не более двух раз в течение одного занятия. При этом для вычисления оценки время, затраченное на исправление, прибавляется к общему времени выполнения задания.

Выставленная оценка влияет на оценку студента по контрольной точке и среднюю оценку за практические занятия.

До конца семестра студент должен получить оценку по всем заданиям, предусмотренным настоящими указаниями. За работы, результаты выполнения которых не были предъявлены преподавателю для оценивания, выставляется оценка неудовлетворительно. Студенты, имеющие среднюю оценку за практические занятия ниже удовлетворительной, к итоговой аттестации по предмету не допускаются.

4 Терминология дисциплины

Чтобы свободно ориентироваться в материалах дисциплины студенту следует ознакомиться с применяемой терминологией:

- **Измерение** – процесс получения опытным путем числового соотношения между измеряемой величиной, характеризующей некоторый объект или явление, и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.
- **Единица измерения физической величины** – величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице.
- Значение физической величины – оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения.
- **Прямыми** называют измерения, при которых значение искомой физической величины находится непосредственно из опыта с помощью специальных технических средств (мер, измерительных приборов и т.п.). Например, измерение длины прямоугольной крышки стола рулеткой является прямым измерением.
- **Косвенными** называют измерения, результат которых получается на основе прямых измерений ряда величин X_1, X_2, \dots, X_m , связанных с искомой величиной Y известной функциональной зависимостью $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$.
Например, для определения площади s прямоугольной крышки стола можно осуществить прямые измерения ее длины a и ширины b , а затем вычислить искомую площадь s по формуле $s = ab$.
К косвенным измерениям прибегают в случаях, когда прямые измерения невозможны, чрезмерно сложны или не обеспечивают необходимой точности и надежности результата.
- **Методика измерений** – совокупность приемов использования средств измерения, подготовки объекта к измерениям и условий измерения. Она обеспечивает неизменность состояний объекта и средств измерения в процессе измерения (насколько это возможно или целесообразно в каждом конкретном случае). В частности, в ряде случаев очень важно минимизировать взаимное влияние измеряемого объекта и средства измерения.
- **Ошибка (погрешность) измерения** – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины, вызванное искажениями, которые имеют место при любом измерении.

В зависимости от **источника возникновения** различают 2 вида погрешностей:

- **методические** – порождаются несовершенством методики измерения;
- **приборные (инструментальные)** – обусловлены несовершенством технических средств, используемых при измерении.

По **характеру проявления** ошибки принято делить на 3 вида: систематические, случайные и грубые (промахи).

- **Систематические ошибки** – это ошибки, величина и знак которых остаются

постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины.

Источниками систематических ошибок, как правило, являются упомянутые выше методические и инструментальные погрешности.

Примерами **методических ошибок**, имеющих систематический характер, могут служить:

- отклонения объекта, подвергаемого измерению, от принятой идеальной модели;
- использование упрощающих предположений и приближенных формул при описании физических явлений и расчетах результатов косвенных измерений.

Так, в учебно-исследовательских работах часто пренебрегают силами трения, растяжения и массой нитей, сопротивлением соединительных проводов и контактов при измерениях физических величин с помощью электрических цепей.

Примерами **инструментальных ошибок** систематического характера являются ошибки, обусловленные:

- несопадением исходного положения указателя с нулевой отметкой шкалы прибора;
- несоответствием условий эксплуатации прибора нормальным;
- несоответствием действительного значения меры, с помощью которой выполняются измерения, ее номинальному значению;
- погрешностями в изготовлении шкал приборов и др.

При выполнении измерений необходимо иметь в виду, что систематические погрешности способны существенно исказить результат измерения и не могут быть уменьшены путем увеличения числа повторных измерений. Уменьшить систематические погрешности можно путем введения **поправок** к результату измерения. Поправки можно вычислить в том случае, если выявлено существование систематических погрешностей, вскрыты их действительные причины, известны закономерности, определяющие их значение. Поэтому прежде чем приступить к измерению, необходимо выяснить все возможные источники систематических погрешностей и принять меры к их устранению или определению. Полностью исключить систематические ошибки практически невозможно.

- **Случайные ошибки** – это ошибки, величина и знак которых изменяются случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Факторы, вызывающие появление случайных ошибок, проявляются неодинаково при различных повторных измерениях. В силу случайного характера их проявления оказать на них целенаправленное воздействие невозможно. Однако с помощью теории вероятностей и методов статистики случайные погрешности измерений могут быть количественно определены и охарактеризованы в их совокупности, причем тем надежнее, чем больше раз проводились измерения.

- **Грубые ошибки (промахи)** – это погрешности измерения, значительно превышающие по величине ожидаемую при данных условиях погрешность. Источниками грубых ошибок могут служить неправильные действия экспериментатора, резкое кратковременное нарушение условий измерений и др.

Например, запись экспериментатором значения 31 вместо 81, снятие показаний вольтметра в момент резкого изменения напряжения в сети. Разработаны

статистические критерии, с помощью которых выявляются промахи. Они могут быть выявлены также путем самоконтроля и повторных наблюдений. Очевидно, что измерения, содержащие промахи, должны исключаться из рассмотрения как не заслуживающие доверия.

5 Пример практического занятия

Тема практического занятия 1 «Введение. Виды и цели измерений».

Цель: научить студентов для измеренных физических величин оценивать погрешности и их надежности (доверительной вероятности), ознакомить с различными случаями единичных и многократных измерений.

Задание 1

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Оценка погрешности и ее надежности для измеренной величины». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Результаты всех измерений, на каком бы высоком уровне они ни проводились, подвержены некоторым ошибкам (погрешностям). В науке слово «погрешность» не означает что-то неправильное. Погрешность означает неизбежную ошибку, которая сопутствует всем измерениям. Погрешности (ошибки) нельзя отнести к промахам экспериментатора; вы не можете избежать их, стараясь быть очень внимательными. Лучшее, на что вы можете рассчитывать, — это свести погрешности к возможному минимуму и грамотно рассчитать их величины.

Несколько слов следует сказать о принятой в теории погрешностей терминологии. Данная терминология стихийно складывалась на протяжении многих десятилетий, и это привело к тому, что для одних понятий имеется по несколько синонимов, тогда как разные величины называются одинаково. Система наименований, предложенная в Государственных стандартах СССР 1970-го и 1974-го годов, иногда кажется неудачной. В частности, замена широко распространенного в мировой литературе термина «ошибка измерений» термином «погрешность измерений» представляется неоправданной.

Слово «погрешность» (от «грешить») как бы возлагает ответственность за отклонение результата измерения от истинного значения на лицо, проводившее измерения. На самом деле такие отклонения имеют совершенно объективные причины, и лишь в случае так называемых грубых погрешностей, или промахов, можно говорить о вине, или «грехе», экспериментатора. Мы будем оперировать и термином «ошибка», и термином «погрешность», получившим широкое распространение в отечественной литературе в советский период.

Также не очень удачным кажется термин «наблюдение», введенный вместо общепринятого «единичное измерение». Обычно под наблюдением понимают качественное описательное суждение об объекте или явлении, а не количественное определение его характеристик.

Теория ошибок — наука, занимающаяся изучением и оценкой погрешностей, целью которой является определение погрешностей в измерениях и нахождение способов их уменьшения, если это необходимо. Анализ погрешностей — существенная часть любого научного эксперимента, и поэтому теория ошибок должна занимать важное место в любом университетском курсе обучения экспериментальным наукам. Теория ошибок не является самой важной частью такого курса, но иногда ею пренебрегают или неправильно используют, что недопустимо. Результатом такого подхода становится бессмысленный ритуал, при котором студент добавляет несколько строчек вычислений в конце каждого отчета по лабораторной работе не потому, что он понимает смысл проделанного, а просто по той причине, что так требует преподаватель. Нужно понимать, что, не располагая информацией о погрешности измерения, нельзя сделать какого-либо правильного заключения, и более того, можно просто впасть в заблуждение о значении полученных результатов.

Теория ошибок — предмет, при обсуждении которого часто возникают споры, и ни

одно изложение не может быть таким, чтобы с ним все согласились. Например, следует ли использовать квадратичное сложение погрешностей или складывать их абсолютные значения? К результатам каких измерений применимы статистические методы, а к каким эти методы не подходят? Спорных вопросов можно попытаться избежать, если отдавать предпочтение доступности изложения, а не абсолютной строгости, что в физической литературе вполне допустимо.

Задание 2

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Методы измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Метод измерений — прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерений.

По общим приемам получения результатов измерений различают: 1) прямой метод измерений; косвенный метод измерений. Первый реализуется при прямом измерении, второй — при косвенном измерении.

В соответствии с РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения к числу основных методов измерений относят метод непосредственной оценки и методы сравнения: дифференциальный, нулевой, замещения и совпадений.

Непосредственный метод — метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия, например, измерения силы тока амперметром.

Методы сравнения с мерой — методы, при которых измеряемая величина сравнивается с величиной, воспроизводимой мерой:

дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Примером дифференциального метода может служить измерение вольтметром разности двух напряжений, из которых одно известно с большой точностью, а другое представляет собой искомую величину;

нулевой метод — при котором разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины, например, измерительный мост;

метод замещения — метод сравнения с мерой, в котором измеренную величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод замещения применяется при измерении сопротивления с поочередным замещением его из магазина сопротивлений;

метод совпадений — метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов. Примером использования данного метода может служить измерение частоты наблюдением при помощи осциллографа фигур Лиссажу.

Фигуры Лиссажу — в общем случае незамкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Ниже показано наблюдение фигуры Лиссажу на экране осциллографа.

Задание 3

С помощью поиска в интернет подберите информацию по непосредственному методу измерений и изучите; напишите эссе на тему «Непосредственный метод измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Непосредственный метод — метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия, например, измерения силы тока амперметром.

Задание 4

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – дифференциальному методу; напишите эссе на тему «Дифференциальный метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Примером дифференциального метода может служить измерение вольтметром разности двух напряжений, из которых одно известно с большой точностью, а другое представляет собой искомую величину

Задание 5

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – нулевой метод; напишите эссе на тему «Нулевой метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

нулевой метод — при котором разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины, например, измерительный мост

Задание 6

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – методу замещения; напишите эссе на тему «Метод замещения как метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю

Метод замещения — метод сравнения с мерой, в котором измеренную величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод замещения применяется при измерении сопротивления с поочередным замещением его из магазина сопротивлений

Задание 7

С помощью поиска в интернет подберите информацию по методу сравнения с мерой – методу совпадений; напишите эссе на тему «Метод совпадений как метод сравнения с мерой». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю

Метод совпадений — метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов. Примером использования данного метода может служить измерение частоты наблюдением при помощи осциллографа фигур Лиссажу.

Задание 8

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Ошибки (погрешности) измерений». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Погрешности измерений. Процесс измерения неизбежно сопровождается ошибками, которые вызываются несовершенством измерительных средств, нестабильностью условий проведения измерений, несовершенством самого метода и методики измерений, недостаточным опытом и несовершенством органов чувств человека, выполняющего измерения, а также другими факторами.

Погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, называется абсолютной. Она не всегда является информативной. Например, абсолютная погрешность 0,01 мм может быть достаточно большой при измерениях величин в десятые доли миллиметра и малой при измерениях величин, размеры которых превышают несколько метров.

Более информативной величиной является относительная погрешность, под которой

понимают отношение абсолютной погрешности измерения к ее истинному значению (или математическому ожиданию).

Именно относительная погрешность используется для характеристики точности измерения.

По своему характеру (закономерностям проявления) погрешности измерения подразделяются на систематические, случайные и грубые промахи.

К систематическим погрешностям измерений относят погрешности, которые при повторных измерениях остаются постоянными или изменяются по какому-либо закону.

Систематические погрешности измерения при измерении одним и тем же методом и одними и теми же измерительными средствами всегда имеют постоянные значения. К причинам, вызывающим их появление, относят:

погрешности метода или теоретические погрешности; инструментальные погрешности;

погрешности, вызванные воздействием окружающей среды и условий измерения.

Случайные погрешности измерений – это погрешности, принимающие при повторных измерениях различные, независимые по знаку и величине значения, не подчиняющиеся какой-либо закономерности.

Влияние случайных погрешностей измерений выражается в разбросе полученных результатов относительно математического ожидания, поэтому количественно наличие случайных погрешностей хорошо оценивается среднеквадратическим отклонением (СКО).

Случайные погрешности измерений, не изменяя точности результата измерений, тем не менее, оказывают влияние на его достоверность.

При этом дисперсия среднего арифметического ряда измерений всегда имеет меньшую погрешность, чем погрешность каждого определенного измерения. Если необходимо повысить точность результата (при исключенной систематической погрешности) в 2 раза, то количество измерений надо увеличить в 4 раза.

Грубые погрешности измерений (промахи) — это погрешности, приводящие к явным искажениям результатов измерения.

При оценке грубых промахов прибегают к обычным методам проверки статистических гипотез.

Задание 9

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Оценка погрешности и ее надежности для измеренной величины». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Под измерением понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения разделяют на прямые и косвенные. При прямых измерениях измеряемая величина определяется по показаниям измерительного прибора. При косвенных измерениях измеряемая величина вычисляется из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью. В экспериментальной лаборатории чаще всего используются косвенные измерения.

Экспериментальные исследования проводятся, как правило, для решения двух основных задач.

Определение искомой физической величины и оценка ее погрешности и надежности (доверительной вероятности). В первом приближении эта задача решается единичным прямым или косвенным измерением физической величины и оценкой погрешности измерения на основе разумных соображений, погрешностей измерительных приборов и специальных правил, полученных в теории ошибок. Более точно первая задача решается путем проведения многократных измерений одной и той же искомой физической величины и

статистической обработки этих измерений.

Задание 10

Изучите самостоятельно следующий материал и на его основе с помощью поиска в интернет подберите информацию и напишите эссе на тему «Определение параметров зависимости двух измеряемых физических величин и погрешности этих параметров». Задание выполняется индивидуально и сдается преподавателю.

Определение параметров зависимости двух измеряемых физических величин и погрешности этих параметров. Эта задача решается измерением одной физической величины при изменении другой физической величины и исследованием зависимости этих величин. Первое приближение дает графический метод, когда каждое измеренное значение физической величины наносится на график в виде точки со своим доверительным интервалом, ограниченным черточками ошибок. В середине доверительного интервала лежит измеренная точка, а его общая длина равна удвоенной абсолютной погрешности, определенной из результатов прямых или косвенных измерений. Через черточки ошибок или вблизи от них проводится неломаная линия, отображающая характер измеренной зависимости.

Более точное решение второй задачи достигается аппроксимацией экспериментальной зависимости какой-либо известной математической функцией с помощью статистического метода наименьших квадратов.

При проведении экспериментальных исследований необходимо помнить, что почти все измерения подвержены как случайным, так и систематическим погрешностям. Учет случайных ошибок совершенно отличен от учета систематических ошибок. Статистические методы дают достоверную оценку случайных погрешностей и указывают на точно определенный способ уменьшения их величины. Систематические погрешности трудно оценить и иногда даже обнаружить. Опытный ученый должен уметь предвидеть возможные источники систематических ошибок и обеспечить условия, при которых все оставшиеся систематические ошибки будут значительно меньше необходимой точности. Для этого потребуются, например, поверка измерительных приборов по принятым стандартам, их исправление или приобретение более совершенных приборов. Далее будем рассматривать эксперименты, для которых все источники систематических погрешностей выявлены и приняты меры, чтобы эти ошибки были намного меньше требуемой точности.

6 План практических занятий

Практическое занятие 1 «Введение. Виды и цели измерений»

Практическое занятие 2 «Статистический анализ многократных измерений».

Практическое занятие 3 «Аппроксимация методом наименьших квадратов»

Практическое занятие 4 «Правила определения и вычисления погрешностей. Как определять и приводить погрешности»

Практическое занятие 5 «Практические рекомендации вычисления погрешностей для случаев прямых и косвенных однократных и многократных измерений»

Список рекомендуемой литературы

1. Лебедев, В. Н. Основы обработки экспериментальных данных с использованием табличного процессора Excel : учебное пособие / В. Н. Лебедев, Г. А. Ураев. - Санкт-Петербург : РГПУ им. Герцена, 2021. - 56 с.
2. Логунова, О. С. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ : учебник / О.С. Логунова, П.Ю. Романов, Е.А. Ильина. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 377 с.
3. Шевченко, А. С. Лабораторный практикум по численным методам: Практикум / Шевченко А.С. - Москва :НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 199 с.