

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Кафедра автоматизации обработки информации (АОИ)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к лабораторным работам и организации
самостоятельной работы для студентов направления

«Программная инженерия»

(уровень бакалавриата)

УДК 519.6
ББК 22.192
П29

Петкун Татьяна Александровна

П29 Вычислительная математика: Методические указания к лабораторным работам и организации самостоятельной работы для студентов направления «Программная инженерия» (уровень бакалавриата) / Т.А. Петкун. –Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023. –18 с.

Методические указания содержат постановку задач к выполнению лабораторных работ, варианты заданий и список литературы с описанием теории, необходимой для подготовки.

Одобрено на заседании каф. АОИ протокол №1 от 12 января 2023 г.

УДК 519.6
ББК 22.192

© Петкун Т.А, 2023
© Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023

Оглавление

1 Введение	4
2 Методические указания к проведению лабораторных работ	5
2.1 Лабораторная работа «Численные методы решения задач линейной алгебры»	5
2.2 Лабораторная работа «Численное интегрирование»	7
2.3 Лабораторная работа «Интерполяция таблично заданных функций»	8
2.4 Лабораторная работа «Численные методы решения задачи Коши»	9
2.5 Лабораторная работа «Численные методы решения задачи оптимизации функции многих переменных»	11
3 Методические указания для организации самостоятельной работы	13
3.1 Общие положения	13
3.2 Подготовка к лабораторным работам	13
3.3 Подготовка к контрольным работам	13
3.4 Исследование методов вычислительной математики, вынесенных для самостоятельного изучения	14
3.4.1 Численные методы решения нелинейных уравнений	14
3.4.2 Методы численного дифференцирования	14
3.4.3 Методы оптимизации функции одной переменной	15
3.4.1 Численные методы решения линейных краевых задач	15
Список литературы	16

1 Введение

Вычислительная математика является одной из дисциплин, необходимых для специалистов, работающих в различных областях. При изучении многих физических явлений, технологических процессов различных областей науки и техники, а также процессов, наблюдаемых в экономике, экологии и других сферах, часто не удается найти закон, связывающий рассматриваемые величины, т.е. зачастую возникает необходимость решения задачи, не имеющей аналитического решения. Основным инструментом в этом случае являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами.

Целью проведения лабораторных работ и организации самостоятельной деятельности по дисциплине «Вычислительная математика» является закрепление теоретического материала и получение навыков в создании вычислительных процедур, реализующих численные методы, в выборе оптимального численного метода решения данной задачи. Студент должен уметь оценивать погрешность используемого метода, анализировать полученный результат.

Форма отчетности

Студент демонстрирует работу программы, объясняет результат вычислений и предоставляет отчет.

2 Методические указания к проведению лабораторных работ

2.1 Лабораторная работа «Численные методы решения задач линейной алгебры»

Цель работы

Приобретение практических навыков приближенного решения задач линейной алгебры с использованием вычислительной техники.

Постановка задачи

Выделяют четыре основные задачи линейной алгебры:

- решение системы линейных уравнений $Ax = b$, где A – квадратная матрица, а x, b – векторы;
- вычисление определителя;
- нахождение обратной матрицы;
- определение собственных значений и собственных векторов матрицы.

В настоящей работе стоит задача: найти корни заданной системы линейных уравнений и вычислить обратную матрицу.

Задание

Дана система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$.

1. Написать процедуру для получения матрицы A и вектора b .

Размерность задачи $n=5$. Пример процедуры получения исходных данных на языке C++ Builder:

```
void Vvod (float** a, float* b)
{
    float x1 [4], s;

// Генерируем коэффициенты при неизвестных (матрица A)
    randomize;
    for (int i=0; i<5; i++)
        for (int j=0; j<5; j++)
            if (i != j) a[i][j] = float(random(7)+1);
            else a[i][j] = float(random(7)+1)*8;
```

```

// Генерируем корни
for (int i =0; i < 5; i++) x1[i] = random(5)-2;

// Считаем столбец свободных членов (вектор b)
for (int i = 0; i < 5; i++) {
    s = 0;
    for (int j = 0; j < 5; j++) s += a[i][j]*x1[j];
    b[i] = s;    } // end {i};
return;
} /* Vvod */

```

2. Решить систему методом LU- разложений или методом Гаусса.
3. Вычислить обратную матрицу.
4. Исследовать условие сходимости итерационных методов.
5. Решить систему методом простой итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.
6. Сравнить итерационные методы по скорости сходимости.
7. Сделать выводы.
8. Оформить отчет.

Рекомендуемая литература для теоретической подготовки

- [1] — с 52–114.
- [2] — с 43–89.
- [3] — с 48–69, 79–80.

2.2 Лабораторная работа «Численное интегрирование»

Цель работы

Изучение и сравнительный анализ методов численного интегрирования

Постановка задачи

Для функции $f(x)$ вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx \text{ с заданной точностью.}$$

Задание

Написать программу вычисления определенного интеграла заданным методом. Программа должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) имя подынтегральной функции необходимо передавать параметром;
- 2) предусмотреть обработку ситуации, когда заданная точность не может быть достигнута.
- 3) сделать выводы по работе, написать отчет.

Варианты заданий

Метод интегрирования/ Варианты					
Прямоугольников			Трапеций	Симпсона	Уэддля
Левых	Правых	Серединных			
1, 7, 13	2, 8, 14	3, 9, 15	4, 10, 16	5, 11, 17	6, 12, 18

Рекомендуемая литература для теоретической подготовки

- [1] — с 465–508.
- [2] — с 127–152.
- [3] — с 147–185.

2.3 Лабораторная работа «Интерполяция таблично заданных функций»

Цель работы

Научиться использовать методы приближения функций в случае, если исходные данные заданы в виде таблицы

Постановка задачи

Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Пусть y является функцией аргумента x . В нашем случае эта зависимость задается в табличном виде. Это означает, что на отрезке $[a, b]$ значениям x_i поставлены в соответствие значения y_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Эти значения — либо результаты расчета, либо набор данных, полученных экспериментально. Требуется определить значения функции внутри интервала $[a, b]$ в точках, отличных от узловых.

Задание

1. Программно получить исходные данные с помощью табулирования ранее описанной функции $f(x)$. Пример получения исходных данных на языке C++ Builder:

```
h = (b-a)/n;  
x[0] = a;  
y[0] = f(x[0]);  
for (int i = 0; i < n; i++) do  
{  
    x[i] = x[i-1] + h;  
    y[i] = f(x[i]);  
}
```

2. По формулам полиномов Лагранжа и Ньютона найти значения функции в двух точках интерполяции.

3. Оценить абсолютные погрешности результата.

4. Провести сплайн-интерполяцию и оценить ее погрешность.
5. Сделать выводы по работе, написать отчет.

Рекомендуемая литература для теоретической подготовки

[1] — с. 328–383, 431–464.

[2] — с. 100–126.

[9] — с. 55–58.

2.4 Лабораторная работа «Численные методы решения задачи Коши»

Цель работы

Изучение и сравнительный анализ методов численного решения ОДУ с начальными условиями

Постановка задачи

Задача с начальными условиями ставится так: найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что решение $y = \varphi(x)$ должно принимать вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка заданные числовые значения $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ при заданном $x = x_0$ независимой переменной x :

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad (*)$$

при $x = x_0$.

Условия (*) называются *начальными условиями*; числа $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — *начальными данными* решения, а задача отыскания решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения удовлетворяющего начальным условиям (*), — *задачей с начальными условиями* или *задачей Коши*.

В случае уравнения первого порядка получаем задачу Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $x = x_0, y = y_0$.

Задание

Решить задачу Коши на интервале $x \in [a, b]$ в n точках. В качестве

исходных данных использовать следующие дифференциальные уравнения с начальными условиями:

1. $y' = xy^3 - y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$

2. $y' = 4, 3x + 2y + e^{xy}, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 0.5]$

3. $y'' = 2y' + 2y = 2e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad x \in [0, 1]$

4. $y'' - 3y' = e^{5x}, \quad y(0) = 5.5, \quad y'(0) = 0.8, \quad x \in [0, 0.2]$

5.
$$\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \frac{y}{x} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

6.
$$\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

Для всех вариантов результаты решения представить в виде таблицы и графика.

Вариант 1. Написать программу решения дифференциального уравнения первым улучшенным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты.

Вариант 2. Написать программу решения дифференциального уравнения вторым улучшенным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты.

Вариант 3. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса второго порядка точности.

Вариант 4. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса третьего порядка точности.

Вариант 5. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Адамса четвертого порядка точности.

Вариант 6. Написать программу решения системы дифференциальных уравнений, используя схему Рунге-Кутты.

Вариант 7. Написать программу решения дифференциального уравнения методом Милна четвертого порядка точности.

Вариант 8. Написать программу решения дифференциального уравнения **второго** порядка методом Рунге-Кутты.

Вариант 9. Написать программу решения системы двух дифференциальных уравнений вторым улучшенным методом Эйлера.

Рекомендуемая литература для теоретической подготовки

[1] — с 533–585.

[9]— с 194–213.

[10]— с 184–237.

2.5 Лабораторная работа «Численные методы решения задачи оптимизации функции многих переменных»

Цель работы

Приобретение практических навыков для решения задач минимизации функции, зависящей от многих переменных с помощью численных методов.

Постановка задачи

Найти такой вектор $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, принадлежащий области допустимых значений области U , целевая функция от которого.

$$f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$$

Задание

С заданной точностью найти точку минимума в пространстве размерностью n для выбранной целевой функции. Координаты стартовой точки и точность решения задачи задаются с клавиатуры. На выходе указать координаты точки минимума, значение целевой функции в этой точке и количество обращений к целевой функции.

Вариант 1. Написать программу, реализующую метод Хука-Дживса.

Вариант 2. Написать программу, реализующую метод деформируемого многогранника.

Вариант 3. Написать программу, реализующую метод нахождения точки минимума с использованием регулярного Симплекса.

Вариант 4. Написать программу, реализующую метод сопряженных направлений Пауэлла.

Вариант 5. Написать программу, реализующую метод градиентного спуска.

Вариант 6. Написать программу, реализующую метод наискорейшего градиентного спуска.

Вариант 7. Написать программу, реализующую метод Ньютона.

Вариант 8. Написать программу, реализующую модифицированный метод Ньютона.

Вариант 9. Написать программу, реализующую метод Марквардта.

Вариант 10. Написать программу, реализующую метод Флетчера-Ривса.

Вариант 11. Написать программу, реализующую метод Миля и Кентрелла.

Примеры целевых функций:

1. $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$

2. $f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$

3. Функция Розенброка

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

4. Функция Пауэлла

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

5. Двумерная экспоненциальная функция

$$f(x_1, x_2) = \sum_a \left[\left(e^{-ax_2} - e^{-ax_1} \right) - \left(e^{-a} - e^{-10a} \right) \right]^2$$

Рекомендуемая литература для теоретической подготовки

[4] — с 67–122.

[9] — с 172–177.

[5] — с 151–221.

3 Методические указания для организации самостоятельной работы

3.1 Общие положения

Целями самостоятельной работы является получение навыков самостоятельного освоения разделов дисциплины.

Самостоятельная работа по дисциплине «Вычислительная математика» включает следующие виды активности студента:

- подготовка к лабораторным работам;
- подготовка к контрольным работам;
- исследование методов вычислительной математики, вынесенных для самостоятельной подготовки;
- подготовка к экзамену.

3.2 Подготовка к лабораторным работам

Для подготовки к лабораторным работам студентам необходимо изучить теоретический материал. Ознакомиться с численными методами решения поставленной задачи. Проанализировать возможные исходные данные.

3.3 Подготовка к контрольным работам

Для подготовки к контрольным работам студентам рекомендуется воспользоваться конспектами лекций, а также доступной литературой по предмету.

Перечень тем, подлежащих изучению

1. Теория погрешностей.
2. Решение нелинейных уравнений.
3. Аппроксимация функций.
4. Приближенно-аналитические методы решения задачи Коши.
5. Задача Коши. Пошаговый контроль точности.
6. Метод релаксации для решения СЛАУ.

3.4 Исследование методов вычислительной математики, вынесенных для самостоятельного изучения

3.4.1 Численные методы решения нелинейных уравнений

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Постановка задачи.
2. Методы отделения корней.
3. Методы проб, половинного деления, касательных, секущих, хорд, комбинированный, золотого сечения, итераций.

Методические рекомендации по изучению

Обратите внимание, что при использовании метода касательных, метода секущих, метода хорд и комбинированного метода важно правильно определить начальное приближение x_0 .

Рекомендуемые источники

[1] — с 190–242.

[9] — с 145–159.

[10] — с 90–99.

3.4.2 Методы численного дифференцирования

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Постановка задачи.
2. Методы вычисления y' и y'' для функции $y = f(x)$.

3. Методы вычисления $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$,
 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right)$ и $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, $i, j = \overline{1, n}$ для функции
 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4. Методы вычисления производных в случае, когда функция задана в табличном виде.

Методические рекомендации по изучению

Методы для вычисления 2 и 3 основаны на определении производной. В случае, если функция, подлежащая дифференцированию, задана в табличном виде, для численного решения задачи используются полиномы или сплайны.

Рекомендуемые источники

[1] — с 510–533.

[10] — с 127–139.

[9] — с 72–84.

3.4.3 Методы оптимизации функции одной переменной

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Постановка задачи .

2. Методы проб, сканирования, половинного деления, золотого сечения, Фибоначчи.

Методические рекомендации по изучению

Обратите внимание, что метод Фибоначчи отличается от остальных тем, что для его применения требуется заранее задать количество вычислений значений целевой функции. Это количество зависит от заданной точности.

Рекомендуемые источники

[4] — с 23–65.

[6] — с 3–43.

[9] — с 160–171.

3.4.1 Численные методы решения линейных краевых задач

Перечень вопросов, подлежащих изучению

1. Постановка задачи.

2. Методы сведения краевых задач к начальным.
- 2.1 Метод стрельб.
- 2.2 Метод дифференциальной прогонки.
3. Разностный метод.

Методические рекомендации по изучению

Обратите внимание, что при решении краевой задачи баллистическим методом используются численные методы решения нелинейных уравнений. В данном случае из всего перечня методов решения уравнений удобнее использовать метод половинного деления, или метод секущих. Для решения задачи разностным методом используется метод прогонки для решения систем линейных уравнений в случае трехдиагональной матрицы.

Рекомендуемые источники

- [1] — с 618–654.
- [3] — с 228–255.
- [9] — с 214–223.

Список литературы

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов : Учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. - 2-е изд., перераб. - М. : Высшая школа, 2005. - 847 с. (70 экземпляров).

2. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах : учебное пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1888-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212063> (дата обращения: 09.03.2023).

3. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0799-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210437> (дата обращения: 09.03.2023).

4. Лесин, В. В. Основы методов оптимизации : учебное пособие для вузов / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 344 с. — ISBN 978-5-507-44229-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/221324> (дата обращения: 09.03.2023).

5. Сборник задач по математике для вузов [] : учебное пособие для вузов / ред. А. В. Ефимов. Ч. 4 : Методы оптимизации уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : рекомендовано Мин.образования. - М. : Наука , 1990. - 302[2] с. (38 экз.)

6. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 512 с. — ISBN 978-5-8114-1887-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212129> (дата обращения: 10.03.2023).

Дополнительная литература

7. Срочко, В. А. Численные методы. Курс лекций : учебное пособие / В. А. Срочко. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 208 с. — ISBN 978-5-8114-1014-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210359> (дата обращения: 09.03.2023).

8. Протасов И.Д. Лекции по вычислительной математике / И. Д. Протасов. - М. : Гелиос АРВ, 2004. - 184 с (50 экземпляров).

9. Турчак, Л. И. Основы численных методов : учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2-е изд., перераб.и доп. — Москва :

ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 304 с. — ISBN 5-9221-0153-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2351> (дата обращения: 09.03.2023).

10. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / Н. В. Копченова, И. А. Марон. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 368 с. — ISBN 978-5-8114-8114-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/171859> (дата обращения: 09.03.2023).