



**Кафедра Сверхвысокочастотной
и Квантовой Радиотехники**

Ж.М. Соколова, А.Е. Мандель

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное-методическое пособие
по выполнению курсовой работы для студентов специальности
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и
специальности «Радиотехника»

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра сверхвысокочастотной и квантовой радиотехники
(СВЧ и КР)

Ж.М.Соколова, А.Е. Мандель

Электромагнитные поля и волны

Учебное-методическое пособие
по выполнению курсовой работы для студентов
специальности «Инфокоммуникационные технологии и
системы связи» и специальности «Радиотехника»

2018

УДК 621.382.63

Рецензент:

проф. каф. СВЧ и КР

С.Н.Шарангович

Ж.М.Соколова, А.Е. Мандель

Электромагнитные поля и волны. Учебное-методическое пособие по выполнению курсовой работы для студентов специальности «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и специальности «Радиотехника». – Томск.: ТУСУР, 2018. –108 с.

В пособии рассматриваются некоторые вопросы теории электромагнитного поля, приложенные к конкретным темам разрабатываемых практических устройств и элементов системы, и необходимые при расчете геометрических размеров, электрических параметров, картин распределения электромагнитных полей в системах.

Предлагаемые рекомендации последовательного выполнения задания по курсовой работе предназначены для студентов специальности «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», и специальности «Радиотехника».

УДК 621.382.63

© Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2018
© Соколова Ж.М.,
Мандель А.Е., 2018

Оглавление

1. Общие вопросы по курсовой работе	5
1.1. Цель и задачи курсовой работы.....	5
1.2. Тематика курсовых работ.....	5
1.3. Содержание курсовой работы.....	8
1.3.1. Этапы работы.....	8
1.3.2. Структура курсовой работы.....	8
2. Основные соотношения теории ЭМП и В	9
2.1 Система уравнения Максвелла и волновые уравнения.....	9
2.2. Связь между поперечными и продольными составляющими векторов	10
2.3. Решение однородных уравнений Гельмгольца в разных средах	11
2.4. Условия, определяющие типы поляризации изучаемых волн	16
3. Распространение волн в трёхслойном диэлектрике	20
3.1. Явления на границе диэлектриков.	20
3.2. Анализ коэффициента прохождения волны T	24
4. Многослойные периодические диэлектрические структуры	27
4.1. Введение.....	27
4.2. Принципы расчета поля в многослойной периодической структуре ...	29
4.3. Плоские волны в периодической структуре - в зеркале	30
4.4. Вывод дисперсионного уравнения.....	32
4.5. Анализ дисперсионного уравнения и выводы	38
5. Плоские волны при анализе усиления и генерации в диоде Ганна	42
5.1. Основные уравнения электромагнитного поля для диода Ганна	45
5.2. Дисперсионное уравнение для волн в диоде Ганна	48
5.3. Анализ дисперсионного уравнения	50
6. Плоский диэлектрический (планарный) волновод	52
6.2. Волны электрического типа E_m или TM_m	58
6.3. Дисперсионные уравнения.....	61

6.4. Анализ дисперсионного уравнения и выводы	62
6.6. Фазовая скорость волн в слоях	66
6.7. Картина распределения полей в слоях.....	67
6.8. Структура электромагнитного поля в волноводном слое.....	68
7. Круглый диэлектрический волновод	70
7.1. Введение.....	70
7.2. Поля волн в круглом диэлектрическом волноводе (ДВ)	71
7.3. Уравнение собственных значений и дисперсионное уравнение.....	74
7.4. Анализ дисперсионного уравнения.....	77
7.5. Параметры основного типа волны HE_{10} в ДВ.....	80
7.6. Решение дисперсионного уравнения (7.19) или (7.20).....	81
7.7. Распределение мощностей в волноводе.....	82
7.8. Поля симметричных мод E_{0l} - и H_{0l} в ДВ.....	84
7.9. Построение структуры поля симметричной моды H_{0l}	85
8. Резонаторы оптического диапазона	88
8.1. Общие сведения о резонаторах.....	88
8.2. Фазовое условие резонанса и длина резонатора.....	90
8.3. Диэлектрические резонаторы	91
8.3.1. Поля колебаний типа H_{m0p} (TE_{m0p}) в резонаторах	92
8.3.2. Поперечные числа и резонансные частоты резонатора	94
8.3.3. Построение структуры электромагнитных полей в резонаторе или картины изменения полей в поперечной плоскости	96
8.3.4. Добротность диэлектрического резонатора	97
8.4. Открытые резонаторы.....	98
8.4.1. Реальные открытые цилиндрические резонаторы.....	99
8.4.2. Добротность открытого резонатора	101
8.4.3. Электромагнитные поля колебаний в открытом резонаторе	105
Литература	106

1. Общие вопросы по курсовой работе

1.1. Цель и задачи курсовой работы

Целью курсовой работы по дисциплинам «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн» является развитие и закрепление навыков применения теории электромагнитных полей для решения практических задач при расчете установок или устройств. В процессе самостоятельной работы студентом (под руководством преподавателя) решаются следующие задачи:

- составление последовательности организационных мер и приемов при выполнении работ большого объема;
- изучение вопросов теории, необходимых для выполнения задания;
- наработка навыков получения из общей теории электромагнитного поля математической модели или формул для полного решения задачи;
- применение полученной математической модели или формул для решения конкретной задачи и обоснование конечных результатов;
- составление схемы установки и методики необходимых измерений;
- развитие навыков использования справочной литературы и поиска необходимых данных (включая источники в Интернет);

Курсовая работа выполняется по индивидуальным заданиям.

Общее руководство осуществляет преподаватель.

В процессе выполнения работы студент должен правильно организовать свой труд, регулярно работать над заданием, проявлять максимум инициативы и самостоятельности для решения поставленных задач.

1.2. Тематика курсовых работ

Тематика предлагаемых курсовых работ определяется рабочей программой по дисциплинам «Электромагнитные поля и волны» и «Электродинамика и распространение радиоволн». Темы предлагаемых курсовых работ можно выделить в такие разделы:

1. Разработка планарных волноводов для распространения волн Е или Н типов в оптическом диапазоне волн.

2. Разработка диэлектрических волноводов круглого сечения для распространения волн типа - Е или типа - Н в оптическом диапазоне.
3. Разработка резонаторов для оптического диапазона волн.
4. Разработка многослойного диэлектрического зеркала для отражения и пропускания оптического диапазона волн.
5. Обыкновенные и необыкновенные волны в анизотропных средах (намагниченный феррит или плазма) и схема установки для обнаружения эффекта Фарадея или эффекта Коттона–Мутона.
6. Разработка СВЧ установок разогрева диэлектриков в полях бегущих волн (на прямоугольном или цилиндрическом металлических волноводах).
7. Микроволновые камеры прямоугольного или цилиндрического сечения для бытовых и промышленных применений в режиме стоячей волны. [разд.6].
8. Установка для измерения электродинамических параметров диэлектриков в заданном диапазоне частот.
9. Разработка устройств со слоями диэлектрика на волноводе прямоугольного сечения.
10. Установка исследования поляризационных характеристик радиоволн.
11. Разработка гребенчатого металлического волновода для распространения волн в заданном диапазоне частот.
12. Установка исследования дифракции радиоволн на щелях (прямоугольных, круглых).
13. Расчет электрического возбудителя волн в прямоугольном волноводе.
14. Установка для теплового воздействия электромагнитного поля плоской волны заданной мощности и частоты на диэлектрическую среду.
15. Плоские волны при анализе диода Ганна, условия распространения, усиления или генерации.
16. Особенности распространения волн и разработка элементов на коаксиальном волноводе.
17. Компьютерная установка измерения электромагнитных полей элементарных вибраторов (разных типов) в ближней или дальней зонах.

18. Математическая модель компьютерной лабораторной работы измерения коэффициентов отражения и преломления для различных сред и поляризации электромагнитных полей.

Наличие большого числа разделов (каждый раздел включает 3÷4 варианта, отличающиеся параметрами слоев, типами волн, формой поперечного сечения электродинамической системы, рабочей частотой, величиной входных мощностей и т.д.) способствует учету индивидуальных особенностей студента и стимулирует его интерес к выполняемой работе. Студентам с хорошей базовой подготовкой по физике, математике и информатике рекомендуется выбирать более сложные темы. Для тех тем, которые не рассматриваются в данном пособии, рекомендуемая для работы литература указана в перечне разделов.

В каждой работе студент должен выполнить графический материал, которым может быть, в соответствии с темой задания, либо эскизный чертеж электродинамической системы, либо структурная схема измерителя параметров, либо характеристики системы и картины электромагнитных полей, построенные по разработанным компьютерным программам.

В данном пособии будут рассмотрены вопросы теории по темам: 1, 2, 3, 4, 15 (литература к ним будет указана в соответствующих главах). Вопросы теории по темам: 6, 7, 8, 14 будут рассмотрены в пособии, часть 2. Вопросы теории по темам: 5, 9, 10, 11, 13, 17 достаточно хорошо изложены в литературе, и студенты могут самостоятельно и детально их изучить и применить в устройствах. Вопросы теории по темам 12, 16, 18 также изложены в литературе, но рекомендуется выбирать их студентам с хорошей подготовкой по информатике.

1.3. Содержание курсовой работы

1.3.1. Этапы работы

В результате выполнения курсовой работы студент должен получить представление обо всех этапах решения поставленной задачи: от использования общей теории (уравнения Максвелла, граничные условия, энергия поля, поляризация волн и т. д.) до получения требуемых формул для расчета или математической модели для последующего использования вычислительной техники; провести необходимые расчеты с использованием соответствующих данных по заданию, а в необходимых ситуациях дать оценку точности полученным результатам и соотношениям.

После получения задания по курсовой работе студент последовательно выполняет следующие этапы, входящие в рейтинговую систему оценки:

- анализ технического задания;
- составление схемы последовательности выполнения задания;
- выбор и обоснования метода решения задачи; выполнение основных расчетов предложенного варианта задания;
- выбор и обоснование использования программного обеспечения для расчета и построения основных характеристик;
- оформление курсовой работы;
- защита работы.

1.3.2. Структура курсовой работы

Объем курсовой работы составляет приблизительно 20-25 страниц машинописного текста формата А4 [1,2,3]. В текстовый документ последовательно следует включить следующие части:

- титульный лист; - задание; - реферат; - список условных сокращений и обозначений, если используются таковые; - содержание; - введение; - основная часть, включающая все этапы выполнения курсовой работы; - заключение; - список использованной литературы; - приложения.

2. Основные соотношения теории ЭМП и В

2.1 Система уравнения Максвелла и волновые уравнения

В основе теории электромагнитных полей лежит полная система уравнений Максвелла, которая в дифференциальной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \vec{B} &= \mu \vec{H}, \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} + \vec{J}^{cm}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \vec{J} -вектор плотности тока, включающий плотности тока проводимости и тока стороннего; ток переноса свободных зарядов $\vec{J}_{nep} = \rho \vec{v}$ принят отсутствующим.

Система уравнений Максвелла вместе с системой граничных условий для тангенциальных и нормальных компонент полей вида

$$\begin{aligned} E_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} & \quad D_{1n} - D_{2n} = \xi \\ \dot{H}_{1\tau} - \dot{H}_{2\tau} = \eta_{нов} & \quad B_{1n} = B_{2n} \end{aligned} \quad \text{на границе 2-х сред,} \quad (2.2)$$

образует математический аппарат для нахождения электромагнитных полей.

Система уравнений (2.1) после преобразований (использования символического метода, применения операции rot к первым двум соотношениям, использования векторного тождества и закона сохранения заряда $\operatorname{div} \vec{J}_m = -j\omega\rho_m$, переходит в дифференциальные уравнения второго порядка относительно векторов поля \vec{E} или \vec{H} .

$$\nabla^2 \vec{H}_m + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{H}_m = -\operatorname{rot} \dot{\vec{J}}_m, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{E}_m = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{J}}_m + j\omega \mu \dot{\vec{J}}_m. \quad (2.4)$$

Это неоднородные уравнения Гельмгольца. Полагая сторонний ток и ток переноса отсутствующими ($J_m = 0$), и вводя обозначение:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}, \quad (2.5)$$

получим однородные уравнения Гельмгольца для волновых процессов:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (2.7)$$

2.2. Связь между поперечными и продольными составляющими векторов

Уравнения (2.6), (2.7) записаны для векторов \vec{E}, \vec{H} , но составляющие этих векторов также удовлетворяют волновым уравнениям. Их решение предполагает нахождение шести составляющих электрического и магнитного полей. Ниже показывается, что поперечные составляющие в направляющих системах однозначно связаны с продольными составляющими. Поэтому достаточно решить волновые уравнения только для составляющих E_z и H_z , чтобы потом, используя соотношения связи, найти поперечные составляющие. Получим это соотношение связи.

Пусть зависимость векторов от координаты z будет в виде бегущих волн

$$\dot{\vec{E}}_m = \bar{e}_0 E_0 e^{-i\beta z}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \bar{h}_0 H_0 e^{-i\beta z}, \quad (2.8)$$

где \bar{e}_0, \bar{h}_0 – направляющие орты векторов электрического и магнитного полей.

Запишем векторы и оператор набла ∇ (оператор Гамильтона) в виде суммы продольной и поперечных составляющих, т.е.

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_{\perp} + \bar{z}_0 \dot{E}_z; \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_{\perp} + \bar{z}_0 \dot{H}_z; \quad \nabla = \nabla_{\perp} + \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_{\perp} - \bar{z}_0 i\beta. \quad (2.9)$$

Здесь обозначено ∇_{\perp} - оператор набла по поперечным координатам.

Найдем проекции уравнений (2.7) на поперечную плоскость, используя (2.9),

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_{\perp} &= (\nabla \times \dot{\vec{H}})_{\perp} = [(\nabla_{\perp} - \bar{z}_0 i\beta) \times (\dot{\vec{H}}_{\perp} + \bar{z}_0 \dot{H}_z)]_{\perp} = \\ &= [\nabla_{\perp} \times \dot{\vec{H}}_{\perp} + \nabla_{\perp} \dot{H}_z \times \bar{z}_0 - i\beta(\bar{z}_0 \times \dot{\vec{H}}_{\perp}) - i\beta(\bar{z}_0 \times \bar{z}_0)]_{\perp} = \\ &= \nabla_{\perp} \dot{H}_z \times \bar{z}_0 - i\beta(\bar{z}_0 \times \dot{\vec{H}}_{\perp}) = \text{grad}_{\perp} \dot{H}_z \times \bar{z}_0 + i\beta(\dot{\vec{H}}_{\perp} \times \bar{z}_0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где grad_{\perp} - означает проекцию выражения grad в поперечной плоскости.

Уравнения (2.6) и (2.7) теперь записываются в виде

$$\begin{aligned} grad_{\perp} \dot{H}_z \times \vec{z}_0 + i\beta(\dot{H}_{\perp} \times \vec{z}_0) &= i\omega\epsilon \dot{\vec{E}}_{\perp} \\ grad_{\perp} \dot{E}_z \times \vec{z}_0 + i\beta(\dot{E}_{\perp} \times \vec{z}_0) &= -i\omega\mu \dot{\vec{H}}_{\perp} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Умножая все члены любого из уравнений (2.11) векторно на \vec{z}_0 , например, второго, получим, что после двойного умножении поперечного вектора на орт \vec{z}_0 он поворачивается в поперечной плоскости на угол π , т.е. изменяется знак перед слагаемыми, стоящими слева. Тогда можно записать $-grad_{\perp} \dot{E}_z - i\beta \dot{\vec{E}}_{\perp} = -i\omega\mu(\dot{\vec{H}}_{\perp} \times \vec{z}_0)$. Выразим отсюда $(\dot{\vec{H}}_{\perp} \times \vec{z}_0)$ и подставим в уравнение (2.11), получим с учетом (2.5)

$$-i\omega\mu[grad_{\perp} \dot{H}_z \times \vec{z}_0] - i\beta grad_{\perp} \dot{E}_z + \beta^2 \dot{E}_{\perp} = \omega^2 \epsilon\mu \dot{\vec{E}}_{\perp} = k^2 \dot{\vec{E}}_{\perp}.$$

$$g^2 = k^2 - \beta^2. \text{ Откуда } \vec{E}_{\perp} = -\frac{i\beta}{g^2} grad_{\perp} E_z - \frac{i\omega\mu}{g^2} [z_0 grad_{\perp} H_z].$$

Для записи уравнения поперечных компонент вектора $\dot{\vec{H}}_{\perp}$ через продольные используем принцип перестановочной двойственности, при котором $\epsilon_r \Rightarrow -\mu_r; \mu_r \Rightarrow -\epsilon_r; \vec{E} \Rightarrow \vec{H}; \vec{H} \Rightarrow \vec{E}$. Получаем окончательно выражения справедливые для любой системы координат:

$$\vec{H}_{\perp} = -\frac{i\beta}{g^2} grad_{\perp} H_z + \frac{i\omega\epsilon}{g^2} [z_0 grad_{\perp} E_z], \quad (2.12)$$

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{i\beta}{g^2} grad_{\perp} E_z - \frac{i\omega\mu}{g^2} [z_0 grad_{\perp} H_z]. \quad (2.13)$$

2.3. Решение однородных уравнений Гельмгольца в разных средах

Уравнения Гельмгольца (2.6), (2.7) являются трехмерными дифференциальными 2-го порядка. С помощью их можно решать задачи о распространении волн в свободном пространстве, в волноводах различного поперечного сечения, где пространство ограничено металлическими плоскостями по одной, по двум, по трем координатным осям, или в диэлектрических средах, замкнутых по одной, двум направлениям, или неограниченных. В зависимости от типа направляющих сред волновые уравнения при решении возможно упрощать.

Плоские волны в неограниченных средах

Плоская волна - это волна, фронт (поверхность равных фаз) которой представляет собой плоскость. В плоскости фронта волны, т.е. при перемещении в направлениях, перпендикулярных её движению (ось z), не происходит никаких изменений, что математически записывается:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

В этом случае уравнения (2.6), (2.7) преобразуются в одномерные уравнения:

$$\frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \quad \frac{d^2 \dot{\vec{H}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (2.15)$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка, для которых составляются и решаются характеристические уравнения, а затем записывается решения (2.20)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^0 &= \bar{h}_0 (B_1 \cdot e^{-ikz} + B_2 \cdot e^{ikz}), \\ \dot{\vec{E}}_m^0 &= \bar{l}_0 (A_1 \cdot e^{-ikz} + A_2 \cdot e^{ikz}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $e^{\pm ikz}$ - является фазовым членом волны, при «-» в показателе волна движется в положительном (прямом) направлении оси z , при знаке «+» - движение волны происходит в отрицательном (обратном) направлении оси z . Если нет препятствий на пути движения волны в прямом направлении, то нет слагаемого со знаком.

Между амплитудами полей A и B в плоской прямой волне существует связь $Z = A/B = \sqrt{\mu/\epsilon} = Z_0 \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}$, параметр Z - называется характеристическим (волновым) сопротивлением.

Электрическое и магнитное поля всегда взаимно ортогональны и также они ортогональны в плоской волне по отношению к направлению движения волны.

Волны между пластинами (ограничение по одной координате)

В случае распространения волн по координате z , но в ограниченном вдоль одной оси (например, x) пространстве, т.е. как бы между двумя безграничными плоскостями, то уравнения Гельмгольца (2.6), (2.7) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m}{\partial z^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}_m}{\partial z^2} + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (2.17)$$

Если волна бежит вдоль оси z , она может быть записана в виде

$$\dot{\vec{E}}_m(x, z) = \vec{l}_0 A(x) e^{-i\beta z}, \quad (2.18)$$

где β – постоянная распространения в продольном направлении (по оси z), тогда (2.17) после подстановки (2.18) запишется

$$\frac{\partial^2 E_m(x)}{\partial x^2} + (k^2 - \beta^2) E_m(x) = 0 \quad (2.19)$$

Обозначая $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$ и решая дифференциальное уравнение (2.19), путем составления и решения характеристического уравнения, получим

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m(x, z) &= \vec{l}_0 \cdot [A_1 \cos(\gamma x) + A_2 \sin(\gamma x)] \cdot e^{-i\beta z}, \\ \dot{\vec{H}}_m(x, z) &= \vec{h}_0 Z^{-1} [A_1 \cos(\gamma x) + A_2 \sin(\gamma x)] \cdot e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (2.20)$$

или это же решение можно представить в другой форме

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &= \vec{l}_0 \left[B_1 e^{i\gamma x} + B_2 e^{-i\gamma x} \right] e^{-i\beta z}, \\ \dot{\vec{H}}_m &= \vec{h}_0 Z^{-1} \cdot \left[B_1 e^{i\gamma x} + B_2 e^{-i\gamma x} \right] e^{-i\beta z}, \end{aligned} \quad (2.20б)$$

где $Z = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2}}$ – характеристическое сопротивление среды.

Волны в среде, ограниченной по двум координатам r и φ

Уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат записываются обычно для Z -ой компоненты в виде

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0, \quad \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \quad (2.21)$$

где оператор набла имеет вид $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. (2.22)

Вдоль оси z бегущие волны, компоненты E_z и H_z следует искать в виде:

$$E_z = E_{mz}(r, \alpha) e^{-i\beta z}, \quad H_z = H_{mz}(r, \alpha) e^{-i\beta z}, \quad (2.23)$$

Согласно (2.23) и (2.24) $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2$; и обозначая $g^2 = \kappa^2 - \beta^2$; где g - попе-

речное число, β - продольное волновое число, из (2.21) получим

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \alpha^2} + g^2 E_z = 0, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \alpha^2} + g^2 H_z = 0 \quad (2.24)$$

Проведем решение уравнения (2.24) в цилиндрической системе координат для произвольной скалярной функции F методом разделения переменных

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \alpha^2} + g^2 F = 0, \quad (2.25)$$

согласно которому функция F ищется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной своей переменной $F = R(r)\Phi(\alpha)$ (2.26)

Подставляя (2.26) в (2.27) и все слагаемые поделим на $R\Phi/r^2$, получаем

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + g^2 r^2 = 0. \quad (2.27)$$

Обозначим слагаемое $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -n^2$ (2.28)

где n – любое число. Подставляем n в (2.27)

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + R[r^2 g^2 - n^2] = 0. \quad (2.29)$$

Решение уравнения (2.28), аналогично (2.20) представляется в двух видах

$$\Phi = A_1 e^{in\alpha} + B_1 e^{-in\alpha} \quad \text{или} \quad \Phi = A_1 \cos(n\alpha) + B_1 \sin(n\alpha). \quad (2.30)$$

Оба решения (2.30) справедливы, при изменении угловой координаты на величину $\alpha = \alpha + 2\pi n$ должны удовлетворять условию однозначности, при котором $\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + 2\pi n)$, и которое выполняется при целых значениях $n=0,1,2,\dots$

Поскольку выбор начала отсчёта угла φ произволен, без нарушения общего анализа можно брать его таким, чтобы можно было положить $B_1=0$. Тогда функцию Φ при необходимости можно брать в любой из форм записи

$$\Phi = A_1 \cos(n\alpha) \quad \text{или} \quad \Phi = A_1 e^{in\alpha} \quad (2.31)$$

Решение уравнения (2.29) выражается через функции Бесселя первого $J_n(rg)$ и второго $N_n(rg)$ рода n - го порядка, если $gr > 0$ (что выполнено)

$$R(r) = C_1 J_n(rg) + C_2 N_n(rg) \quad (2.32)$$

На рисунке 2 приведены графики изменения функций Бесселя, $J_n(x)$ и $N_n(x)$

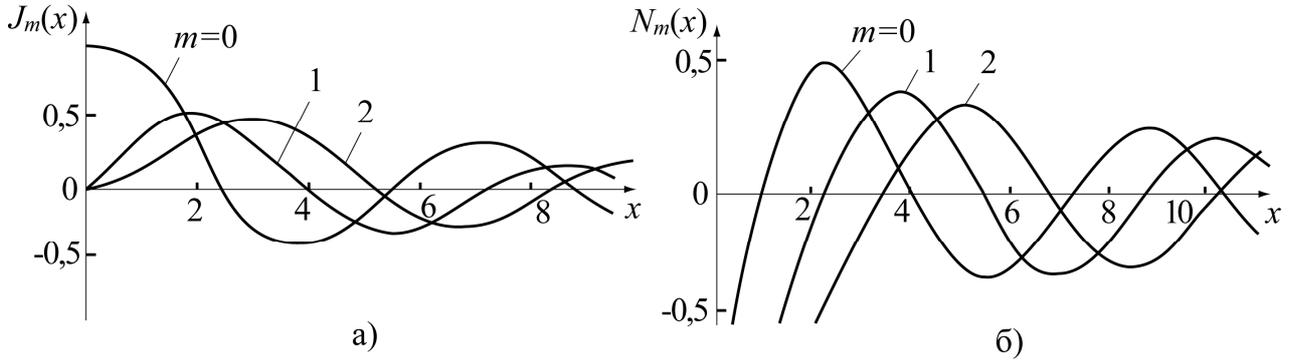


Рис. 2.1. Графики изменения функции Бесселя J_m и N_m .

при действительном аргументе x (у нас $x = gr$). При $r \rightarrow 0$ функции Бесселя второго рода $N_n(rg)$ стремятся к минус бесконечности, что не удовлетворяет условиям конечных значений амплитуды и величины передаваемой мощности. Поэтому константу $C_2 = 0$. Решение уравнения (2.25) с учетом (2.23) и (2.26) запишем в виде

$$F(r, \alpha) = A_1 \cdot C \cdot J_n(\sqrt{\kappa^2 - \beta^2} \cdot r) e^{in\alpha} e^{i(\alpha r - \beta z)} = DJ_n(gr) e^{in\alpha} e^{-i\beta z} \quad (2.33)$$

или $F(r, \alpha) = DJ_n(gr) \cos(n\alpha) e^{-i\beta z}$

Для нахождения поперечных составляющих поля через продольные используют инвариантные соотношения (2.12) и (2.13). Можно использовать одно уравнение, например (2.12) и применить затем принцип перестановочной двойственности. Составляющие поля получаются в разделах 7 и 10, ниже дана справка в виде формул для цилиндрического волновода. $\bar{H}_\perp = \bar{r}_0 H_r + \bar{\varphi}_0 H_\varphi$;

$$\text{grad}_\perp H_z = \bar{r}_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} + \bar{\varphi}_0 \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi}; \quad \left[\bar{z}_0 \cdot \text{grad}_\perp H_z \right] = \begin{vmatrix} \bar{r}_0 & r \bar{\varphi}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} & \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} & 0 \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Рассмотренная процедура решения волнового уравнения является общей для любого круглого волновода (металлического, диэлектрического). Нахождение констант интегрирования зависит от граничных условий, т.е. конкретных форм и размеров.

2.4. Условия, определяющие типы поляризации изучаемых волн

В радиотехнике широкое применение получили поля линейной, круговой и эллиптической поляризации. В электромагнитной волне векторы электрического и магнитного полей в каждый момент времени определенным образом ориентированы в пространстве. Если векторы поля, изменяясь по абсолютной величине, не изменяют своего направления в пространстве, то такие волны называют поляризованными линейно. Под плоскостью поляризации понимают плоскость, проходящую через вектор \vec{E} в направлении распространения волны. У линейно-поляризованной волны плоскость поляризации не меняет своей ориентации в пространстве.

Ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} зависит от источника, создающего волну, и векторы \vec{E} и \vec{H} могут менять свою величину и направление. Поляризация электромагнитной волны определяется видом траектории, описываемой концом вектора электрического поля в фиксированной точке пространства. На рисунке 2.2 представлены мгновенные картины электрического поля линейно-поляризованной плоской волны (а), поляризованной по кругу (б) и эллиптически поляризованной волны (в).

Поскольку процесс распространения волны можно рассматривать как перемещение мгновенной картины с фазовой скоростью волны, то в фиксированной точке пространства будет наблюдаться в случае линейной поляризации возвратно поступательное колебание конца вектора \vec{E} , в случае круговой поляризации - перемещение его по окружности и в случае эллиптической - по эллипсу.

Пусть плоская волна движется вдоль оси z и имеет составляющие вектора \vec{E}

$$\dot{E}_x = E_{xm} e^{i(-kz + \varphi_x)}, \quad \dot{E}_y = E_{ym} e^{i(-kz + \varphi_y)}, \quad (2.35)$$

где φ_x и φ_y – фиксированные фазовые углы.

Тогда, предполагая гармоническую зависимость поля от времени, запишем выражения для мгновенных значений составляющих электрического поля

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x); \quad E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y). \quad (2.36)$$

Длину вектора \vec{E} и угол, который он образует с осью x , находим из формул

$$E(z,t) = \sqrt{(E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x))^2 + (E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y))^2}; \quad (2.37)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) / [E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)]$$

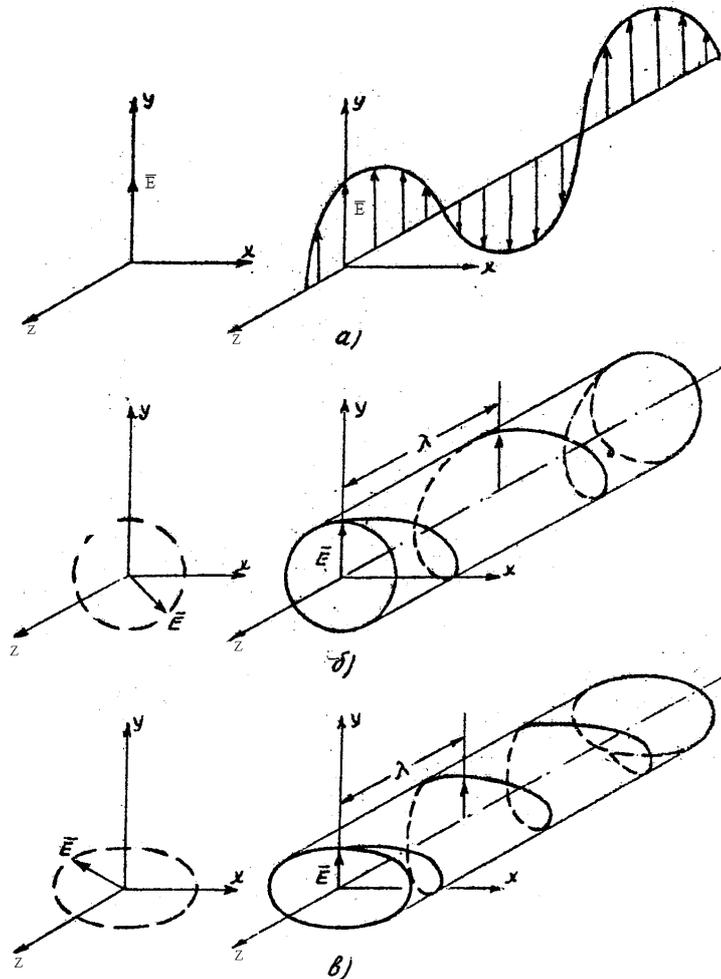


Рисунок 2.2. Виды поляризации электромагнитной волны: а) - линейная поляризация; б) - круговая поляризация; в) - эллиптическая поляризация .

Зависимость угла α от z и t определяет поляризацию волны

1) Положим $\varphi_y = \varphi_x$, амплитуды любые. Тогда из (2.37) следует, что

$$E(z,t) = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi_x); \quad (2.38)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(E_{ym} / E_{xm})$$

т.е. направление вектора \vec{E} остается в пространстве неизменным, а длина его изменяется по закону косинуса. Это линейно поляризованная волна.

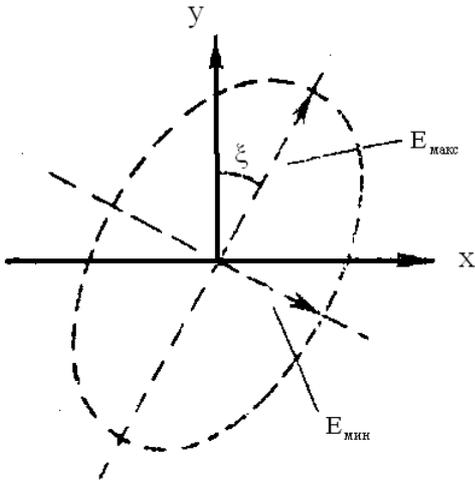
2) Положим $E_{xm} = E_{ym}$ и $\varphi_y = \varphi_x - \pi/2$, поляризация круговая, т.к. получаем

$$E(z,t) = E_{xm}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\cos(\omega t - kz + \varphi_x - \pi/2)}{\cos(\omega t - kz + \varphi_x)} = \omega t - kz + \varphi_x. \quad (2.39)$$

Длина вектора \vec{E} остается постоянной а угол, образуемый им с осью абсцисс, линейно изменяется от времени и координаты. Конец вектора описывает в плоскости $z = const$ окружность, вращаясь с угловой скоростью ω против часовой стрелки, если смотреть навстречу движению волны. В момент времени t геометрическим местом конца вектора \vec{E} является винтовая линия (спираль) с шагом $\lambda = 2\pi/k$. При увеличении координаты z вектор \vec{E} поворачивается по часовой стрелке. Такая волна имеет левую круговую поляризацию. Если $\varphi_y = \varphi_x + \pi/2$, то направление вращения вектора \vec{E} изменяется на противоположное (волна с правой круговой поляризацией). Можно получить параметрическое уравнение траектории конца вектора \vec{E} в фиксированной точке пространства. Для этого вещественные части комплексных амплитуд представим в виде $\text{Re } \dot{E}_x = x$ и $\text{Re } \dot{E}_y = y$ и будем рассматривать их как координаты точки на плоскости XY . Для определения вида траектории поляризации рассматриваемой волна необходимо, разложив $\cos(\omega t - kz + \varphi_x)$, $\cos(\omega t - kz + \varphi_y)$, исключить из уравнений (2.36) время. Искомую зависимость можно получить в виде

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} - 2 \frac{xy}{E_x E_y} \cos \phi = \sin^2 \phi, \quad (2.40)$$

где $\phi = \varphi_y - \varphi_x$ – разность фаз составляющих \dot{E}_x и \dot{E}_y . Соотношение (2.40) представляет собой уравнение эллипса или поляризационного эллипса. Внутри этого эллипса вектор \vec{E} совершает вращение с периодически изменяющейся скоростью, причем полный оборот происходит за период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Основными геометрическими параметрами, характеризующими поляризацию эллипса, являются: коэффициент эллиптичности τ и угол ξ . Коэффициентом эллиптичности τ в некоторой точке наблюдения называют отношение максимальной полуоси к минимальной полуоси эллипса в данной точке. Угол ξ – угол между большой осью эллипса и осью ординат выбранной прямоугольной системы координат (рисунок 2.3). Выражения угла ξ и коэффициента эллиптичности τ запишем [41] в виде:



$$\xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2 \cos \phi \cdot E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2} \right), \quad (2.41)$$

$$\tau = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \approx \sqrt{\frac{E_x + E_y \operatorname{tg}^2 \xi}{E_y^2 + E_x^2 \operatorname{tg}^2 \xi}} \quad (2.42)$$

$$E_{\min} \approx \sin \phi \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \xi}{E_x^2 + E_y^2 \operatorname{tg}^2 \xi}} \cdot E_x E_y,$$

$$E_{\max} \approx \sin \phi \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \xi}{E_y^2 + E_x^2 \operatorname{tg}^2 \xi}} \cdot E_x E_y \quad (2.43)$$

Рис. 2.3. Параметры эллипса

Рассмотрим ряд частных случаев уравнения (2.42):

1) Разность фаз равна $\phi = 2\pi n$ или $\phi = \pi(2n - 1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уравнение (2.46) при этом превращается в уравнение прямой: $\frac{x}{E_x} = \pm \frac{y}{E_y}$.

В этих случаях говорят, что волна линейно поляризована. Параметр τ линейно-поляризованной волны равен бесконечности. Если $E_x \neq 0$, а $E_y = 0$, плоскость поляризации совпадает с плоскостью $y=0$ (XZ). Значение угла ξ равно нулю.

2) Если разность фаз $\phi = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$, (угол $\xi = 0$, если $E_x > E_y$, и $\xi = \frac{\pi}{2}$, если $E_x < E_y$) получаем эллипс, $\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1$. В общем случае при произвольной разности ϕ получается уравнение эллипса, оси которого наклонены по отношению к осям x и y .

3) Если разность фаз $\phi = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n$ и одновременно $E_x = E_y$, то уравнение (2.40) представляет собой уравнение окружности, то есть имеет место круговая поляризация, для круговой поляризации $\tau = 1$.

3. Распространение волн в трёхслойном диэлектрике

Тема курсовой работы: **Установка измерения ε и толщины d листовых материалов в свободном пространстве.** Технические требования: Рабочая длина волны – задана;

Точность измерений 0,5%; Указать необходимые приборы для установки; Исследуемый диэлектрик неограничен в плоскости падения волны.

В работе необходимо рассмотреть вопросы теории нормального падения плоских волн на границу раздела двух диэлектриков. Определить изменение амплитуды и фазы прошедшей волны и получить математическую модель для расчета диэлектрической проницаемости ε и толщины d измеряемого образца. Составить компьютерную программу расчета и построения графиков ε и толщины d измеряемого образца от длины волны.

3.1. Явления на границе диэлектриков.

Коэффициенты отражения и преломления

Измерение параметров диэлектриков на разных частотах, при разных температурах, напряженностях электрического поля имеет важное практическое и научное значение. Существуют различные методы измерения: резонаторные, волноводные, калориметрические, интерференционные, методы, основанные на отражении и прохождении волн, и т.д. Математические модели в установках для измерения параметров диэлектриков в большинстве из них базируется на использовании теории поля.

Методы, основанные на отражении и прохождении волн через диэлектрик, позволяют исследовать образцы различных форм с приемлемой точностью. Диэлектрик с толщиной $d=2a$, относительной диэлектрической проницаемостью ε_2 , магнитной проницаемостью $\mu_2 = \mu_0$ расположен в свободном пространстве (ε_0, μ_0) . Плоская волна заданной амплитуды распространяется вдоль оси x (слева - направо) и падает нормально из первой среды на границу раздела воздух - диэлектрик (рис.3.1). Получить математические выражения для расчета значений $\varepsilon_{2r} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}$ и толщины d листового диэлектрика (не ограни-

ченного по осям y и z) от измеряемых величин амплитуды отраженной и прошедшей через слой диэлектрика волн в заданном диапазоне частот.

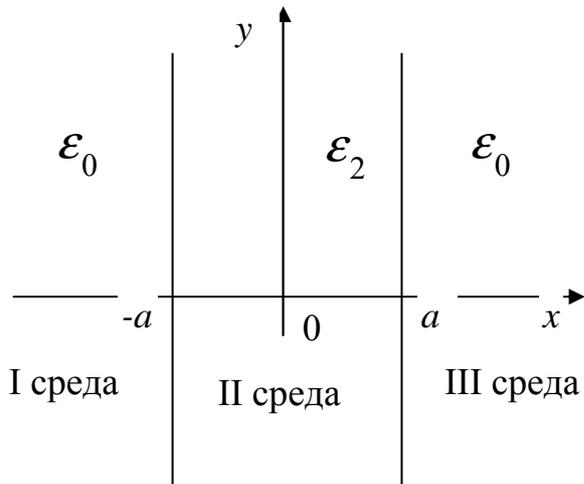


Рис.3.1. Листовой диэлектрик

Представим поле плоской волны в первой среде с учетом (2.16) в виде:

$$\begin{cases} E_{nad}^I = E_0 e^{-ikx} \\ H_{nad}^I = \frac{E_0}{Z_1} e^{-ikx} \end{cases} \quad (3.1a)$$

Положим для простоты $E_0 = 1$.

Тогда отраженную волну в первой среде запишем в виде:

$$\begin{cases} E_{omr}^I = R e^{ikx}, & H_{omr}^I = \frac{-R}{Z_1} e^{ikx}, \end{cases} \text{ где } k_1 = \frac{\omega}{c}, Z_1 = 120\pi, R = E_{nad}^I / E_{omr}^I; \quad (3.1б)$$

Поле во второй среде (поле падающей и отраженной плоской волны в диэлектрике в общем виде):

$$\begin{cases} E_{nad}^{II} = A e^{-ik_2 x} \\ H_{nad}^{II} = \frac{A}{Z_2} e^{-ik_2 x} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} E_{omr}^{II} = B e^{ik_2 x} \\ H_{omr}^{II} = \frac{-B}{Z_2} e^{ik_2 x} \end{cases}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}, \quad (3.1в)$$

где A и B амплитуды падающей и отраженной волны в диэлектрике.

Поле в третьей среде, в воздухе:

$$E_{np}^{III} = T e^{-ik_1 x}, \quad H_{np}^{III} = \frac{T}{Z_1} e^{-ik_1 x}, \quad (3.1г)$$

где T – коэффициент прохождения волны через 2-ю среду.

К этим трем средам применим граничные условия для тангенциальных компонент векторов электромагнитного поля, с учетом отсутствия поверхностных токов, в виде:

$$\text{при } x = -a: \begin{cases} E_{nad}^I + E_{обр}^I = E_{nad}^{II} + E_{обр}^{II} \\ H_{nad}^I + H_{обр}^I = H_{nad}^{II} + H_{обр}^{II} \end{cases};$$

$$\text{при: } x = a \begin{cases} E_{nad}^{II} + E_{обр}^{II} = E_{np}^{III} \\ H_{nad}^{II} + H_{обр}^{II} = H_{np}^{III} \end{cases};$$

Проведем подстановку в граничные условия соотношений (3.1а ÷ 3.1г):

$$1e^{ik_1 a} + Re^{-ik_1 a} = Ae^{ik_2 a} + Be^{-ik_2 a}; \quad (3.2)$$

$$1e^{ik_1 a} - Re^{-ik_1 a} = \frac{Z_1}{Z_2} \left(Ae^{ik_2 a} - Be^{-ik_2 a} \right); \quad (3.3)$$

$$Te^{-ik_1 a} = Ae^{-ik_2 a} + Be^{+ik_2 a}; \quad (3.4)$$

$$Te^{-ik_1 a} = \frac{Z_1}{Z_2} \left(Ae^{-ik_2 a} - Be^{+ik_2 a} \right). \quad (3.5)$$

Заменим $k_2 a = \alpha$, $k_1 a = \beta$. Разложим $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$: (3.5а)

$$(1 + R) \cos \beta + i(1 - R) \sin \beta = (A + B) \cos \alpha + i(A - B) \sin \alpha; \quad (3.2а)$$

$$(1 - R) \cos \beta + i(1 + R) \sin \beta = \frac{Z_1}{Z_2} \{ (A - B) \cos \alpha + i(A + B) \sin \alpha \}; \quad (3.3а)$$

$$(A + B) \cos \alpha + i(B - A) \sin \alpha = \frac{Z_1}{Z_2} \{ (A - B) \cos \alpha + i(A + B) \sin \alpha \}; \quad (3.6)$$

Для проведения дальнейших преобразований используем обозначение

$$A + B = X, \quad A - B = Y \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + R) \cos \beta + i(1 - R) \sin \beta &= X \cos \alpha + iY \sin \alpha \\ (1 - R) \cos \beta + i(1 + R) \sin \beta &= \frac{Z_1}{Z_2} (Y \cos \alpha + iX \sin \alpha) \\ X \cos \alpha - iY \sin \alpha &= \frac{Z_1}{Z_2} (Y \cos \alpha - iX \sin \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Из третьего равенства системы (3.8) получаем:

$$X = Y \frac{Z_1 \cos \alpha + iZ_2 \sin \alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \quad (3.9)$$

Правая часть первого уравнения системы (3.8) при подстановке (3.9) преобразуется к виду:

$$X \cos \alpha + iY \sin \alpha = Y \left\{ \frac{Z_1 \cos^2 \alpha + iZ_2 \sin \alpha \cos \alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} + i \sin \alpha \right\} = Y \left\{ \frac{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \right\} \quad (3.10)$$

Правая часть второго уравнения системы (3.8) преобразуется:

$$Y \cos \alpha + iX \sin \alpha = Y \left\{ \cos \alpha + i \sin \alpha \frac{Z_1 \cos \alpha + iZ_2 \sin \alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \right\} = Y \left\{ \frac{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \right\} \quad (3.11)$$

Из первого и второго уравнений системы (3.8) после преобразования получим (от левой части уравнения получаем показательную форму):

$$\begin{aligned} & \frac{(1+R) \cos \beta + i(1-R) \sin \beta}{(1-R) \cos \beta + i(1+R) \sin \beta} = \\ & = \left(\frac{Z_2}{Z_1} \right) \frac{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}{Z_2 \cos 2\alpha + iZ_1 \sin 2\alpha} = \frac{e^{i\beta} + \text{Re}^{-i\beta}}{e^{i\beta} - \text{Re}^{-i\beta}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Используем обозначение $\dot{R} = \text{Re}^{-j\beta}$ в уравнении (3.12)

$$\frac{e^{i\beta} + \dot{R}}{e^{i\beta} - \dot{R}} = \frac{Z_2 Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2^2 \sin 2\alpha}{Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + iZ_1^2 \sin 2\alpha}. \quad (3.13)$$

Приведем (3.13) к общему знаменателю, перегруппируем, выразим $\dot{R} / e^{i\beta}$, тогда получим

$$\frac{\dot{R}}{e^{i\beta}} = \frac{i(Z_2^2 - Z_1^2) \sin 2\alpha}{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_1^2 + Z_2^2) \sin 2\alpha}; \quad \dot{R} = e^{i2\beta} \frac{i(Z_2^2 - Z_1^2) \sin 2\alpha}{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_1^2 + Z_2^2) \sin 2\alpha} \quad (3.14)$$

Начнем преобразование коэффициента прохождения волны T .

Из (3.3), подставляя (3.5), (3.7), затем (3.9), получим:

$$\begin{aligned} \dot{T} e^{-j\beta} &= (A+B) \cos \alpha - i(A-B) \sin \alpha = X \cos \alpha - iY \sin \alpha = \\ &= Y \left\{ \frac{Z_1 \cos \alpha + iZ_2 \sin \alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \cos \alpha - i \sin \alpha \right\} = Y \frac{Z_1}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.2) с учетом (3.5), (3.7), (3.9) получаем:

$$e^{i\beta} + \mathring{R}e^{-i\beta} = Y \left\{ \frac{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}{Z_2 \cos \alpha + iZ_1 \sin \alpha} \right\} \quad (3.16)$$

Разделим (3.15) на (3.16) и получим $\frac{\mathring{T}e^{-i\beta}}{e^{i\beta} + \mathring{R}e^{-i\beta}} = \frac{Z_1}{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}$, откуда

$$\mathring{T} = e^{i\beta} \frac{Z_1 (e^{i\beta} + \mathring{R}e^{-i\beta})}{Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha}. \quad (3.17)$$

Соотношение (3.17) приведем к другому виду, преобразовав числитель с помощью (3.14), т.е.

$$\begin{aligned} e^{i\beta} + \mathring{R}e^{-i\beta} &= e^{i\beta} \left[1 + \frac{i(Z_2^2 - Z_1^2) \sin 2\alpha}{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_1^2 + Z_2^2) \sin 2\alpha} \right] = \\ &= e^{i\beta} \frac{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + 2iZ_2^2 \sin 2\alpha}{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_1^2 + Z_2^2) \sin 2\alpha} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Далее, подставляя (3.18) в (3.17), получаем

$$T = e^{i2\beta} \frac{Z_1 (Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha) 2Z_2}{(Z_1 \cos 2\alpha + iZ_2 \sin 2\alpha) (2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_2^2 + Z_1^2) \sin 2\alpha)}.$$

Откуда, после преобразований, коэффициент прохождения принимает вид:

$$\mathring{T} = e^{i2\beta} \frac{2Z_1 Z_2}{2Z_1 Z_2 \cos 2\alpha + i(Z_2^2 + Z_1^2) \sin 2\alpha} = |T| e^{i \arg T}, \quad (3.19)$$

$$\text{где } |T| = \frac{2Z_1 Z_2}{\sqrt{4Z_1^2 Z_2^2 \cos^2 2\alpha + (Z_2^2 + Z_1^2)^2 \sin^2 2\alpha}} \quad (3.20)$$

3.2. Анализ коэффициента прохождения волны T

Анализ (3.20) даст результаты, позволяющие использовать их при разработке измерительных установок:

Случай 1: если $\alpha = 0; \frac{\pi}{2}; \pi;$, где $\alpha = k_2 a$, то $|T_{\max}| = 1$, что наблюдается при

$\frac{2\pi}{\lambda_{\partial}} a = \frac{2m\pi}{4}$, $d=2a$. Вывод: $|T_{\max}| = 1$ наблюдается при толщине листового ди-

электрика $d = 2m \frac{\lambda_{\partial}}{4}$, где $m = 0,1,2,\dots$; (3.21a)

λ_{∂} - длина волны в диэлектрике.

Случай 2: если $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, то $|T_{\min}| = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2^2 + Z_1^2} \leq 1$; причем $Z_2 < Z_1$.

$$|T_{\min}| < 1 \text{ при } d = (2m+1) \frac{\lambda_{\partial}}{4}, \text{ где } m = 0,1,2,\dots \quad (3.21б)$$

Случай 3: если изменять частоту генератора и при этом измерять величину коэффициента прохождения через лист, то *разница между частотами*, когда значения T становятся *min* и *max*, определяет параметры d и ε_r :

$$\frac{\pi}{4} = \Delta\alpha = \Delta k_2 a = \frac{2\pi\Delta f}{c} d \sqrt{\varepsilon_r} \text{ или} \quad (3.22)$$

$$\Delta f = \frac{c}{8d\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (3.23)$$

Фиксируя величину T_{\min} , можно получить ее связь с параметром ε_r

$$T_{\min} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2^2 + Z_1^2} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_r} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)} = \frac{2}{x + \frac{1}{x}}, \text{ где } x = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (3.24)$$

Для определения толщины диэлектрика d и параметра ε_r имеется:

Вариант первый, когда используются два уравнения (3.23) и (3.24)

$$\begin{cases} \frac{2}{T_{\min}} = x + \frac{1}{x}, \\ d \cdot x = \frac{c}{8\Delta f}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Неизвестные параметры d и ε_r определяются так. При изменении частоты f , измеряется и строится зависимость коэффициента $T(f)$ исследуемого ди-

электрика, из которой определяется разность частот Δf между величинами T_{min} и T_{max} , и величина T_{min} , а с помощью (3.25) находим d и ε_r .

Второй вариант предполагает, что в точке наблюдения измеряется изменение фазы коэффициента прохождения T сигнала при наличии и отсутствии листа. При отсутствии листа на частоте f_0 (начальная частота измерений), согласно (3.5а) и (3.19) $T_0 = e^{i2\beta} - e^{i2\alpha} = e^0 = 1$, ($\alpha = \beta$) ($Z_1 = Z_2$), т.е. фаза волны при отсутствии листа должна быть принята равной 0° .

При расположении листа перпендикулярно распространению электромагнитных волн, изменяется аргумент коэффициента прохождения T , который из соотношения (3.19) может быть определен с учетом (5) в виде

$$\begin{aligned} \arg T &= 2\beta - \operatorname{arctg} \left(\frac{Z_2^2 + Z_1^2}{2Z_1Z_2} \operatorname{tg} 2\alpha \right) = \\ &= \frac{2\pi d}{\lambda_0} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \right) = \Delta\varphi \\ \sqrt{\varepsilon_r} &= x; \quad \alpha = k_2 a; \quad \text{т.к. } d \cdot x = \frac{c}{8\Delta f}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi f c}{c \cdot 8\Delta f} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f}{4 \Delta f} \right); \\ \begin{cases} \Delta\varphi = \frac{2\pi f_0}{c} d - \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \operatorname{tg} \frac{\pi f_0}{4 \Delta f} \right), \\ \frac{c}{8\Delta f} = d\sqrt{\varepsilon_r}; \end{cases} & \quad (3.26) \end{aligned}$$

Система (3.26) представляет систему трансцендентных уравнений для определения d и $\sqrt{\varepsilon_r}$ от измеряемых величин Δf и $\Delta\varphi$, может решаться численными или графическим методами. Следует рассчитать и построить графики ε и толщины d измеряемого образца при изменении длины волны.

Итак, определяя изменение амплитуды и фазы прошедшей волны при изменении частоты, можно рассчитать диэлектрическую проницаемость ε и толщину d измеряемых образцов.

4. Многослойные периодические диэлектрические структуры

Тема курсовой работы: **Разработка многослойного зеркала для оптического диапазона волн.**

Технические требования: Рабочая длина волны задана (например, 0,7 мкм);

Параметры слоев зеркала заданы (например, MgF_2 - показатель преломления 1,38; ZnS - показатель преломления 2,3); Размеры слоев $\lambda/4$ мкм;

Коэффициент отражения волн от структуры задается (например, 0,98).

В работе необходимо рассмотреть вопросы многослойного зеркала, которые не даются в теории (на лекциях), но опираются на теорию плоских волн в неограниченной в двух направлениях периодической структуре и могут быть понятны студенту. Необходимо получить дисперсионное уравнение для этого случая и провести расчет и построения графиков затухания поля от длины волны в полосе непропускания.

4.1. Введение

Многослойные диэлектрические структуры используются в СВЧ диапазоне в качестве замедляющих систем генераторов и усилителей в приборах СВЧ, в антенной технике.

Периодические диэлектрические слоистые структуры обладают свойствами фильтров, что весьма привлекательно для оптических приложений. Выбором толщины слоев и параметров материала можно добиться того, что в некоторой, необходимой для практического применения, полосе частот фильтр будет работать в полосе непропускания. А при достаточно большом числе слоев волны не проходят через него, и структура работает как очень хорошее отражающее зеркало. Такие зеркала используются в оптических резонаторах лазеров всех типов. Достоинства зеркал в их избирательности. Зеркала выполняют так, чтобы для используемых длин волн излучение накачки было бы хорошо отражаемым (фильтр находился бы в полосе непропускания), а для не используемого излучения (обычно это длины волн инфракрасного и ультрафиолетового диапазона), фильтр работал бы в полосе пропускания, и излучение выходило бы через него не попадая на активный элемент. При проектировании многослой-

ных отражательных структур их строят так, чтобы на центральной частоте (длине волны λ) работы отражателя толщина каждого слоя составляла $\lambda/4$ в соответствующем диэлектрике. Период структуры включает в себя два рядом стоящие слоя (с показателями преломления n_1 и n_2).

Таблица 4.1. Параметры структур и их показатели преломления для зеркал

Слои с высоким показателем преломления n			Слои с низким n	
сернистый цинк	ZnS	$n=2,3$	MgF ₂	$n=1,38$
окисел титана	TiO ₂	$n=2,65$	SiO ₂	$n=1,45$
окисел циркония	ZrO ₂	$n=2,1$	3NaF, AlF ₃	$n=1,36$

Используются и другие материалы.

При использовании этих веществ в элементах следует при расчете учитывать дисперсию, т.е. зависимость коэффициента преломления n от длины волны (например, для TiO₂ зависимость $n(\lambda)$ приведена на рисунке 4.1. Для соединений с малыми коэффициентами преломления n дисперсия выражена слабее.

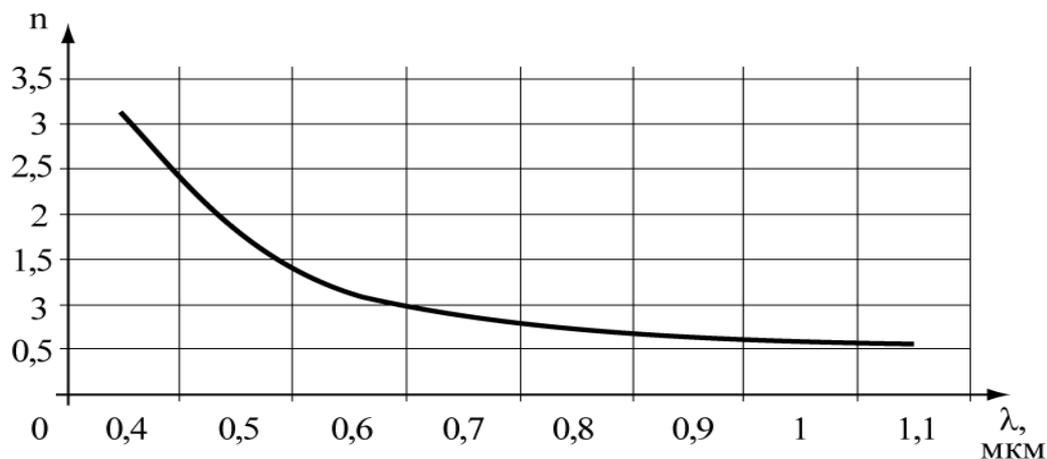


Рис.4.1. Зависимость коэффициента n от длины волны соединения TiO₂.

В спектроскопии высокой разрешающей силы, в технике лазеров, в физике тонких диэлектрических слоев большое значение имеет многолучевая интерференция. Многолучевая интерференция может возникать при многократных отражениях светового пучка внутри плоскопараллельной пластины или при отражениях в многослойных структурах.

На многолучевой интерференции основано действие интерференционных светофильтров. Эти светофильтры имеют весьма узкие полосы пропускания, в

видимой области спектра, обычно порядка 1-2 нм. Многолучевая интерференция используется также в многослойных диэлектрических зеркалах. Такие зеркала, коэффициент отражения которых доведен до 99,9%, в значительной мере определяют прогресс в лазерной технике.

Многослойные диэлектрические структуры являются частным случаем структур с периодическим изменением параметров. Такие структуры, как при статических своих параметрах, так и при динамических (меняющихся во времени) широко используются в голографических системах записи информации, акустооптических устройствах (например, в коллинеарных акустооптических фильтрах) и вообще в устройствах функциональной электроники. В последних из упомянутых применений структура является динамической и во всех случаях непрерывной. Распространение радиоволн в сложных средах и в средах с плавной периодической неоднородностью имеет много общего.

В данной работе рассматриваются вопросы математического анализа свойств многослойных диэлектрических зеркал при заданных параметрах диэлектрических слоев, при условии распространения в них плоских волн.

4.2. Принципы расчета поля в многослойной периодической структуре

Будем полагать структуру неограниченной (рис.4.2) в направлении распространения волны. Период структуры пусть включает два слоя, и равен $d=d_1+d_2$. В областях 1 и 2 различны как показатели преломления, так и толщины слоев. Электромагнитное поле в такой системе подчиняется уравнениям Максвелла. В силу параллельности границ слоев, в качестве решения этих уравнений следует взять выражения для плоских волн (2.16). Очевидно, что в каждой области должны существовать как прямые, так и отраженные волны. Векторы \vec{E} и \vec{H} будут тангенциальными к границе раздела слоев. Следовательно, на границах должны выполняться соотношения :

$$E^{(1)}\Big|_{x=d_1} = E^{(2)}\Big|_{x=d_1}, \quad H^{(1)}\Big|_{x=d_1} = H^{(2)}\Big|_{x=d_1} \quad (4.1)$$

Очевидно, что эти уравнения будут содержать в качестве неизвестных 4 амплитуды волн (по две в каждой области) и граничных условий (4.1) окажется

недостаточно. В качестве второго условия можно использовать условие периодичности структуры. Для периодических структур справедлива теорема Флоке, которая утверждает, что при перемещении на период структуры d поле в периодической структуре должно воспроизводиться с точностью до фазового множителя $e^{-j\varphi}$, где φ -фазовый сдвиг поля на период структуры d , т.е.

$$E^{(1)}|_{x=0} = E^{(2)}|_{x=de^{j\varphi}}, \quad H^{(1)}|_{x=0} = H^{(2)}|_{x=de^{j\varphi}} \quad (4.2)$$

Обычно величину фазового сдвига φ связывают с величиной постоянной распространения волны в структуре $\beta = \frac{\varphi}{d}$, которая характеризует средний фазовый сдвиг на единицу длины структуры. После удовлетворения уравнений (4.1), (4.2) и решения полученных соотношений, будут найдены величины φ , β и амплитуды волн в этой структуре. При этом может быть получен один из двух результатов: либо φ вещественно, и тогда волны распространяются в структуре без затухания; либо φ - комплексно, и тогда волны распространяется с большим затуханием, связанным, в основном, с процессом отражения волн от границы раздела сред. В первом случае структура работает в полосе пропускания, во втором – в полосе непропускания.

4.3. Плоские волны в периодической структуре - в зеркале

Многослойное диэлектрическое зеркало – это устройство, полученное путём последовательного нанесения на подложку чередующихся слоёв с высоким и низким коэффициентом преломления. В качестве подложки используют стекло, кварц и другие, прозрачные для излучения материалы.

Электромагнитная волна, проходя через период структуры (слой с высоким и низким коэффициентом преломления) частично отражается от него, остальная же часть проходит дальше, где встречается с ещё одним периодом и таким же образом на нём происходит частичное отражение и прохождение. Тогда подбирая определённое количество слоев, добиваемся необходимого коэффициента отражения волны от структуры.

Расположим декартовую систему координат таким образом, чтобы плоскость yoz (рис.4.2) приходилась на начало периода структуры $d=d_1+d_2$. Среда 1 характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1 , среда 2 – проницаемостями ε_2 и μ_2 . Для оптического диапазона волн примем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, показатели преломления диэлектриков n_1 и n_2 . Падающая плоская однородная электромагнитная волна

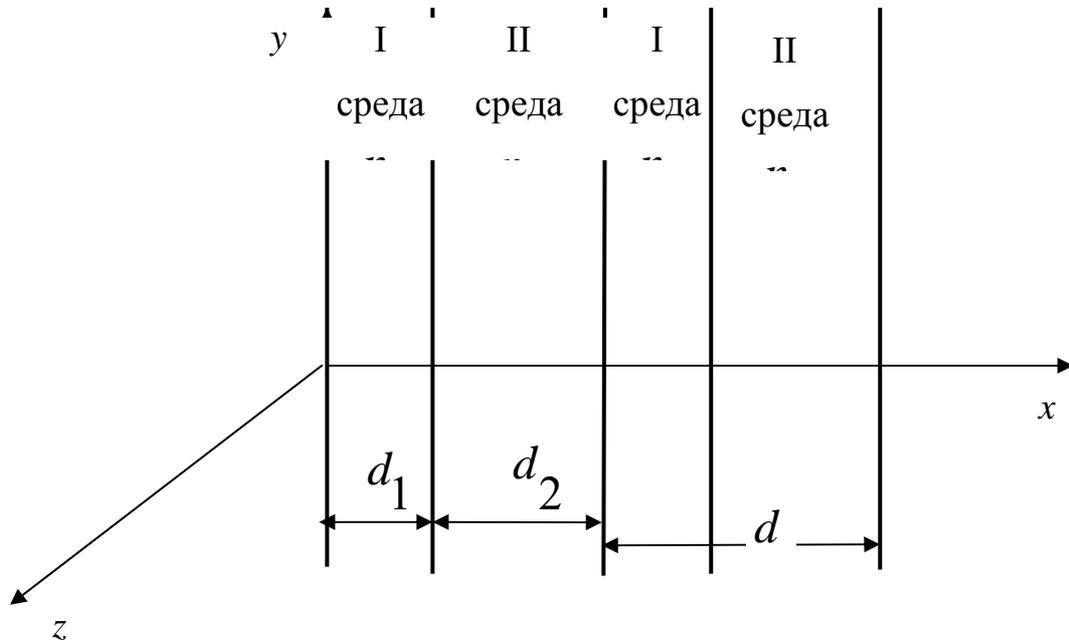


Рис. 4.2 – Модель периодов диэлектрического зеркала распространяется слева направо в направлении оси x и будет иметь вид:

$$\vec{H}_m^0 = \vec{z}_0 A e^{-ik_1 x}, \quad \vec{E}_m^0 = \vec{y}_0 A Z_1 e^{-ik_1 x}, \quad (4.3)$$

где $Z_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1} = Z_0 / n_1$ - волновое сопротивление; $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = k_0 n_1$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Отражённая волна в среде 1 имеет вид:

$$\vec{H}_m^- = -\frac{\vec{z}_0 B e^{ik_1 x}}{Z_1}, \quad \vec{E}_m^- = \vec{y}_0 B e^{ik_1 x}. \quad (4.4)$$

Суммарное поле в первой среде должно быть записано в виде:

$$\vec{H}_m^1 = \vec{z}_0 \left(\frac{A e^{-ik_1 z}}{Z_1} - \frac{B e^{ik_1 z}}{Z_1} \right), \quad \vec{E}_m^1 = \vec{y}_0 (A e^{-ik_1 z} + B e^{ik_1 z}) \quad \text{при } 0 \leq x \leq d_1 \quad (4.5)$$

Поле во второй среде также следует представить как суперпозицию двух полей: прошедшей через первую границу диэлектриков и отраженной, но уже от другой границы

$$\vec{H}_m^{(2)} = \vec{z}_0 \left(\frac{Ce^{-ik_2 x}}{Z_2} - \frac{De^{ik_2 x}}{Z_2} \right), \quad \vec{E}_m^{(2)} = \vec{y}_0 (Ce^{-ik_2 x} + De^{ik_2 x}) \text{ при } d_1 \leq x \leq d_2, \quad (4.6)$$

где $Z_2 = Z_0 / n_2 = 120\pi / n_2$ - волновое сопротивление второй среды; $k_2 = k_0 n_2$, - волновое число во второй среде и $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c}{f}$ - в свободном пространстве.

4.4. Вывод дисперсионного уравнения

Применяем граничные условия (4.1) для тангенциальных составляющих полей (4.5), (4.6), для границы раздела внутри структуры, т.е. при $x=d_1$ получаем:

$$\left(\frac{Ae^{-ik_1 d_1}}{Z_1} - \frac{Be^{ik_1 d_1}}{Z_1} \right) = \left(\frac{Ce^{-ik_2 d_1}}{Z_2} - \frac{De^{ik_2 d_1}}{Z_2} \right), \quad (4.7)$$

$$(Ae^{-ik_1 d_1} + Be^{ik_1 d_1}) = (Ce^{-ik_2 d_1} + De^{ik_2 d_1})$$

приводим (4.7) к общему знаменателю, используя соотношения для Z_1, Z_2

$$n_1 (Ae^{-ik_1 d_1} - Be^{ik_1 d_1}) = n_2 (Ce^{-ik_2 d_1} - De^{ik_2 d_1}), \quad (4.8)$$

$$Ae^{-jk_1 d_1} + Be^{jk_1 d_1} = Ce^{-jk_2 d_1} + De^{jk_2 d_1}.$$

Равенства (4.8) дополним равенствами, полученными из (4.2)

$$n_1 (A - B) = n_2 (Ce^{-ik_2 d} - De^{ik_2 d}) e^{i\varphi}, \quad (4.9)$$

$$A + B = (Ce^{-ik_2 d} + De^{ik_2 d}) e^{i\varphi}.$$

Объединяя уравнения (4.8) и (4.9), получаем систему однородных уравнений с пятью неизвестными (A, B, C, D, ϕ) .

$$\begin{cases} n_1(Ae^{-ik_1d_1} - Be^{ik_1d_1}) = n_2(Ce^{-ik_2d_1} - De^{ik_2d_1}), \\ Ae^{-jk_1d} + Be^{jk_1d} = Ce^{-jk_2d_1} + De^{jk_2d_1}, \\ n_1(A-B) = n_2e^{i\varphi}(Ce^{-ik_2d} - De^{ik_2d}), \\ A+B = e^{i\varphi}(Ce^{-ik_2d} + De^{ik_2d}). \end{cases} \quad (4.10)$$

Можно составить определитель и решить его относительно φ , но это приведет к очень громоздким преобразованиям. Поэтому будем последовательно находить A и B , затем исключим их из других уравнений. Затем найдем C и D . Приступим к преобразованиям. Выразим из третьего и четвертого уравнений (4.10) постоянные A и B

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{i\varphi}}{2} \left[C \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_2d} + D \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_2d} \right], \\ B &= \frac{e^{i\varphi}}{2} \left[C \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_2d} + D \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_2d} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используем теперь два первых уравнения системы (4.10) для исключения в них постоянных величин A и B

$$\begin{aligned} C \left[e^{ik_2d_1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d} \right] = \\ D \left[-e^{ik_2d_1} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{ik_2d} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1d_1} e^{ik_2d} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} C \left[e^{-ik_2d_1} \frac{n_2}{n_1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d} \right] = \\ D \left[\frac{n_2}{n_1} e^{ik_2d_1} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{ik_2d} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1d_1} e^{ik_2d} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поделим друг на друга (4.13), (4.12). правую и левую части, сократим на $e^{-ik_2d_1}$, при этом учтем, что $d=d_1+d_2$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n_2}{n_1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d_2} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1d_1} e^{-ik_2d_2}}{1 - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1d_1} e^{-ik_2d_2} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1d_1} e^{-ik_2d_2}} = \end{aligned}$$

$$= - \frac{\frac{n_2}{n_1} - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1 d_1} e^{ik_2 d_2} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1 d_1} e^{ik_2 d_2}}{1 - \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{ik_1 d_1} e^{ik_2 d_2} + \frac{e^{i\varphi}}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-ik_1 d_1} e^{-ik_2 d_2}} \quad (4.14)$$

Анализируя (4.14), можно заметить, что выражение имеет вид

$$\frac{\frac{n_2}{n_1} - e^{i\varphi} a}{1 - e^{i\varphi} b} = - \frac{\frac{n_2}{n_1} - e^{i\varphi} a^*}{1 - e^{i\varphi} b^*}, \quad (4.15)$$

где a и b коэффициенты перед $e^{i\varphi}$ в числителе и знаменателе левой части (4.14), (4.15) и их сопряженные величины a^* и b^* . Запишем (4.15) в виде

$$\frac{n_2}{n_1} - \frac{n_2}{n_1} e^{i\varphi} b^* - e^{i\varphi} a + e^{2i\varphi} a b^* = - \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_2}{n_1} e^{i\varphi} b + e^{i\varphi} a^* - e^{2i\varphi} a^* b \quad (4.16)$$

Преобразуем (4.16), перенеся все слагаемые влево.

$$2 \frac{n_2}{n_1} - e^{i\varphi} [a + a^* + \frac{n_2}{n_1} (b + b^*)] + e^{i\varphi} b + e^{i\varphi} (b^* a + a^* b) = 0. \quad (4.17)$$

$$\text{где} \quad a + a^* + \frac{n_2}{n_1} (b + b^*) =$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_1 d_1 - k_2 d_2) + \frac{n_2}{n_1} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) + \\ & + \frac{n_2}{n_1} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \cos(k_1 d_1 - k_2 d_2) = \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(k_1 d_1 - k_2 d_2) \end{aligned}$$

$$ab^* = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) e^{i(k_1 d_1 + k_2 d_2)} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) e^{-i(k_1 d_1 - k_2 d_2)} \right] =$$

$$\left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) e^{2ik_1 d_1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) e^{-2ik_1 d_1} \right]$$

$$a^* b = \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) e^{-2ik_1 d_1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) e^{+2ik_1 d_1} \right].$$

$$\text{Откуда } ab^* + a^*b = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right] = 2 \frac{n_2}{n_1}.$$

Подставим эти выражения в (4.17), поделим (4.17) на $e^{i\varphi}$ и учтем, что $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$, получим

$$\cos \varphi = \frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(k_1 d_1 - k_2 d_2) \right] \quad (4.18)$$

Это уравнение можно записать в несколько другом виде

$$\cos \varphi = \cos(k_1 d_1) \cdot \cos(k_2 d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin(k_1 d_1) \cdot \sin(k_2 d_2) \quad (4.19)$$

Полученное уравнение является дисперсионным уравнением, с помощью которого можно определять на заданной частоте и заданных размерах d_i слоев величину фазового сдвига волны на периоде структуры φ , или решать обратную задачу. Уравнение (4.19) называется дисперсионным. Из него находится коэффициент затухания и число слоев для построения зеркала с заданными параметрами коэффициента отражения.

Примечание

Систему уравнений (4.10) можно решать с помощью других преобразований. Вводим замену функций для упрощения выражения (4.10):

$$e^{ik_1 d} = a, \quad e^{ik_2 d} = b, \quad e^{i\varphi} = c. \quad (4.20)$$

Тогда система (4.10) принимает вид:

$$\begin{cases} A \frac{1}{a} + Ba = C \frac{1}{b} + Db \\ A \frac{n_1}{a} - Bn_1 a = C \frac{n_2}{b} - Dn_2 b \\ A + B = C \frac{1}{b} c + Dbc \\ An_1 - Bn_1 = C \frac{n_2}{b} c + Dn_2 bc \end{cases} \quad (4.21)$$

Выразим из первых двух уравнений (4.21) постоянные A и B , записав их в виде:

$$A \frac{n_1}{a} + Bn_1 a = C \frac{n_1}{b} + Dn_1 b, \quad A \frac{n_1}{a} - Bn_1 a = C \frac{n_2}{b} - Dn_2 b.$$

Вычитая из одного равенства другое и суммируя, получаем

$$2Bn_1a = C\left(\frac{n_1}{b} - \frac{n_2}{b}\right) + D(n_1b + n_2b), \quad 2A \frac{n_1}{a} = C\left(\frac{n_1}{b} + \frac{n_2}{b}\right) + Db(n_1 - n_2).$$

Откуда выражаем A и B

$$\left. \begin{aligned} A &= C\left(\frac{a}{2b} + \frac{n_2a}{2n_1b}\right) + D\left(\frac{ab}{2} - \frac{n_2ab}{2n_1}\right) \\ B &= C\left(\frac{1}{2ab} - \frac{n_2}{2n_1ab}\right) + D\left(\frac{b}{2a} + \frac{n_2b}{2n_1a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Подставим (4.22) в оставшиеся два уравнения (4.21), получим:

$$C\left(\frac{a}{2b} + \frac{n_2a}{2n_1b}\right) + D\left(\frac{ab}{2} - \frac{n_2ab}{2n_1}\right) + C\left(\frac{1}{2ab} - \frac{n_2}{2n_1ab}\right) + D\left(\frac{b}{2a} + \frac{n_2b}{2n_1a}\right) = C\frac{1}{b}c + Dbc$$

$$C\left(\frac{a}{2b} + \frac{n_2a}{2n_1b}\right) + D\left(\frac{ab}{2} - \frac{n_2ab}{2n_1}\right) - C\left(\frac{1}{2ab} - \frac{n_2}{2n_1ab}\right) + D\left(\frac{b}{2a} + \frac{n_2b}{2n_1a}\right) = C\frac{n_2}{n_1b}c - Dbc\frac{n_2}{n_1}$$

сгруппируем попарно слагаемые и вынесем общие множители:

$$\frac{C}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} + \frac{D}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab + \frac{C}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} + \frac{D}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a} = C\frac{1}{b}c + Dbc,$$

$$\frac{C}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} + \frac{D}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab - \frac{C}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} - \frac{D}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a} = C\frac{n_2}{n_1b}c - Dbc\frac{n_2}{n_1},$$

переносим слагаемые, содержащие C , в левую часть равенства, а слагаемые с D в правую:

$$\frac{C}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} + \frac{C}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} - C\frac{1}{b}c = Dbc - \frac{D}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab - \frac{D}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a} \quad (4.23)$$

$$\frac{C}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} - \frac{C}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} - C\frac{n_2}{n_1b}c = -\frac{D}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab + \frac{D}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a} - Dbc\frac{n_2}{n_1} \quad (4.24)$$

Поделим выражение (4.23) на (4.24) сократим общие коэффициенты:

$$\frac{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} - \frac{1}{b}c\right]}{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{1}{ab} - \frac{n_2}{n_1b}c\right]} = \frac{\left[bc - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a}\right]}{\left[-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)ab + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\frac{b}{a} - \frac{n_2}{n_1}bc\right]},$$

получим

$$\frac{\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)a^2 + \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) - 2ac}{\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)a^2 - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) - 2\frac{n_2}{n_1}ca} = \frac{\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)a^2 + \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) - 2ca}{\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)a^2 - \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) + 2\frac{n_2}{n_1}ca}. \quad (4.25)$$

Освободимся от знаменателей и введём замену:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} \\
 x' &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} \\
 y &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{ab} \\
 y' &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{ab}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Тогда уравнение (4.25) примет вид:

$$(x - c) \left(y + \frac{n_2}{n_1} c\right) = (y - c) \left(x' - \frac{n_2}{n_1} c\right)$$

Перемножим скобки и перегруппируем:

$$\begin{aligned}
 xy' + x \frac{n_2}{n_1} c - cy' - \frac{n_2}{n_1} c^2 &= x'y - y \frac{n_2}{n_1} c - cx' + \frac{n_2}{n_1} c^2 \\
 \frac{n_2}{n_1} (x + y) - y' + x' &= 2 \frac{n_2}{n_1} c + (x'y - xy') c^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Возвращаясь к замене (4.26) получаем:

$$\begin{aligned}
 &\frac{n_2}{n_1} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{a \cdot b} \right] - \\
 &- \frac{n_2}{n_1} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{a \cdot b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} \right] = \\
 &2 \frac{n_2}{n_1} c + \left[\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{a \cdot b} \right] \right] - \\
 &- \left[\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{a \cdot b} \right] \right] \cdot c^{-1}
 \end{aligned}$$

После упрощения получаем:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{n_2}{n_1} (c + c^{-1}) &= \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab + \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} + \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{ab} \right] + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) ab - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{b}{a} - \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{a}{b} + \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \frac{1}{ab} \right] \right).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Используем замену (4.20) и разложение косинуса $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$ вместо формулы (4.28) получим:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) = & \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) + \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1) \right] + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{n_1}{n_2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \cos(k_1 d_1 + k_2 d_2) - \frac{n_1}{n_2} \left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) \right] \end{aligned}$$

Распишем сумму косинусов и перегруппируем:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) = & \frac{1}{4} \left(\left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) (\cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2)) \right) \quad \text{или} \\ & + \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) (\cos(k_2 d_2) \cos(k_1 d_1) - \sin(k_2 d_2) \sin(k_1 d_1)) \right) \\ \cos(\varphi) = & \frac{1}{4} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) + \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \right] \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) + \\ & \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) - \left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right) \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) \right] \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2) \end{aligned}$$

Преобразуем выражения в скобках и получим уравнение аналогичное (4.19):

$$\cos(\varphi) = \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2). \quad (4.29)$$

4.5. Анализ дисперсионного уравнения и выводы

а) Полученное дисперсионное уравнение представляет зависимость фазового набега волны φ на периоде многослойной структуры d , имеющей различные диэлектрические параметры сред и размеры слоев. Если будет задана рабочая частота, то можно определить величину затухания волны, рабочую полосу частот.

Пусть на центральной частоте f_0 заданного диапазона каждый слой является четвертьволновым. Тогда $k_1^0 d_1 = k_2^0 d_2 = \pi/2$. Из (4.19) получим

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cos \pi - \left(1 - \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} \left[2 + 2 \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (4.30)$$

Если заданы виды материалов слоев, то коэффициенты преломления известны. Например, для $\text{MgF}_2 - n_1=1,38$, $\text{ZnS} - n_2=2,3$; тогда $\cos \varphi_0 = -1,13$.

Отрицательное значение $\cos \varphi_0$ и больше единицы говорит о том, что угол φ_0 комплексная величина, лежащая во второй четверти, т.е. $\varphi_0 = \pi + i\beta = \varphi' + i\varphi''$.

$\cos \varphi_0 = \cos(\pi - i\beta) = \cos \pi \cos i\beta + \sin \pi \cdot \sin i\beta = -ch\beta$, так как

$$ch\beta = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = 1,13, \text{ откуда } e^{2\beta} - 2,26e^\beta + 1 = 0$$

Решая это квадратное уравнение относительно e^β , получим $e^\beta = 1,656$, а $e^{-\beta} = 0,6$. Это означает, что при прохождении одного периода структуры поле уменьшает свою амплитуду в 1,656 раза. Если структура будет иметь N периодов, то поле уменьшится по амплитуде в $e^{N\beta}$ раз, т.е коэффициент прохождения T по N периодов равен $T = e^{-N\beta}$, а выражение для отраженной волны находится как $R = 1 - T = 1 - e^{-N\beta}$. Так например, при $N=8$ величина $T = e^{-8\beta} = 0,0168$ раза и, следовательно, отражение от такой структуры будет равно $R = 1 - 0,0168 \cong 0,983$.

По расчетным зависимостям коэффициента прохождения и коэффициента отражения слоев (рис.4.3) можно оценить вклад каждого периода структуры.

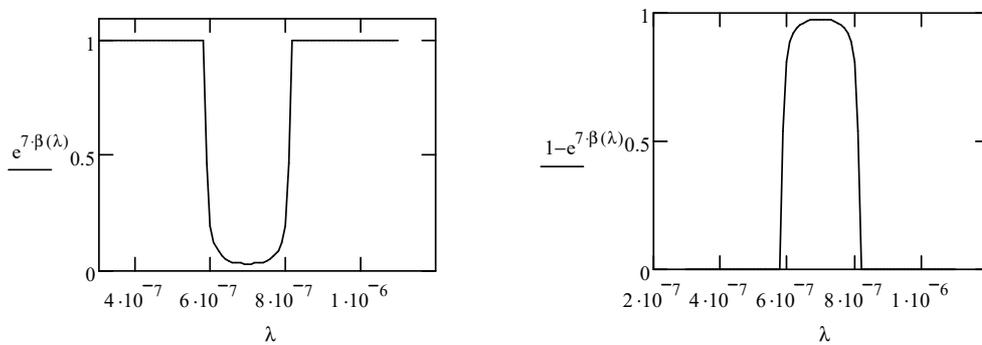


Рис. 4.3. Зависимости коэффициента прохождения и коэффициента отражения от длины волны для структуры оптического зеркала из $N=8$ периодов.

b) Можно найти амплитудно - частотную характеристику структуры вблизи средней частоты диапазона ($\lambda = \lambda_0$). Для этого введем $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ следующим образом

$$k_1 d_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0};$$

$k_2 d_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \Delta \lambda}{2 \lambda_0}$. Подставляя эти выражения в (4.19), получим

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= -\frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} \left[\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} + \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2 \right] = \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{n_1}{n_2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \left(1 + \cos \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}\right) - 2 \frac{n_2}{n_1} \left(1 - \cos \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}\right) \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \left(\cos \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0}\right)^2 - 2 \frac{n_2}{n_1} \left(\sin \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0}\right)^2 \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right] \left(\sin \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Полагая вновь $\varphi = \pi + i\beta = \varphi' + i\varphi''$, получим

$$e^{2\beta} - 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) + 1\right] \cdot \left(\sin \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0}\right)^2 \right\} \cdot e^\beta + 1 = 0 \tag{4.32}$$

С помощью (4.32) находятся зависимости от длины волны для $e^{\beta(\lambda)}$ и $\beta(\lambda)$ (рис.4.4)

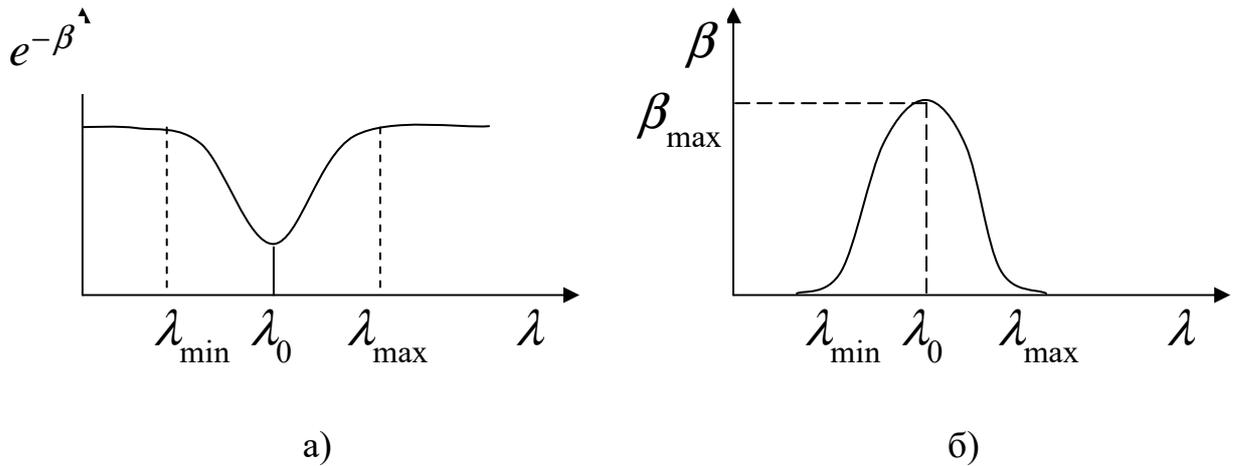


Рис. 4.4. Графики ослабления и прохождения поля от рабочей длины волны

Зависимость постоянной распространения волны от частоты $\beta(\omega)$ называется дисперсионной характеристикой структуры. Если структура работает в полосе не пропускания, то значение $\beta(\omega)$ позволяет определить полосу частот фильтра по заданному уровню пропускания. Поэтому следует построить графики ослабления поля $e^{-\beta(\lambda)}$ и $\beta(\lambda)$ как функции длины волны или частоты и найти границы полосы запираания фильтра для созданной структуры.

с). На границе полосы пропускания $\beta = 0$, $e^\beta = 1$ и из (4.32) получим соотношение для определения полосы пропускания многослойной структуры в

$$\text{виде} \quad (\sin \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0})^2 = \frac{\frac{1}{2} (\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}) - 1}{\frac{1}{2} (\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}) + 1} \quad (4.33)$$

Откуда полоса пропускания $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \pm \eta$. Например, для $\text{MgF}_2 - \text{ZnS}$ (табл.4.1):

$$(\sin \pi \frac{\Delta \lambda}{2 \lambda_0})^2 = \frac{1,33 - 1}{1,33 + 1} = \frac{0,133}{2,133} = 0,062 \text{ ., что дает } \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \pm 0,16.$$

Итак, полоса пропускания этой многослойной структуры составляет $\approx 30\%$.

В действительности полоса пропускания зеркала будет меньшей. Если число слоев N , то величина пропускания фильтра составит $e^{N\beta}$. Если мы допускаем увеличения величины пропускания в два раза по сравнению с тем, что мы имеем при $\lambda = \lambda_0$, то следует учитывать, что это возможно при $e^{-N\beta(\lambda_{cp})} = 2e^{-N\beta(\lambda_0)}$. Отсюда получаем уравнение для расчета граничной длины

$$\text{волны } \lambda_{cp} \quad e^{\beta(\lambda_{cp})} = e^{\beta(\lambda_0)} \cdot e^{-\frac{1}{N} \cdot \ln 2}, \quad (4.34)$$

Решение этого уравнения следует получать из графика $e^{\beta(\lambda)}$.

Выводы

1. Дисперсионное уравнение для многослойной диэлектрической структуры (4.19) может быть построено при различных параметрах сред и размерах слоев.
2. Периодическая структура из чередующихся слоев с высоким и низким показателями преломления способна обеспечивать высокие затухания поля в полосе пропускания. При $8 \div 10$ периодах структуры ослабление не менее $50 \div 60$ раз.
3. По частотным передаточным характеристикам структуры можно определять ширину полосы непропускания. По уровню 3 дБ от минимума коэффициента передачи полоса структуры уменьшается при увеличении числа N .
4. После построения и анализа всех графиков, получаемых в работе, можно привести конкретные числовые данные.

5. Плоские волны при анализе усиления и генерации в диоде Ганна

Тема курсовой работы: **Анализ усиления и генерации волн в диоде Ганна с помощью теории плоских волн.**

Технические данные: Исходный полупроводниковый материал - задается; концентрация доноров $n=10^{15} \div 10^{20}$; длина образца, площадь сечения; напряжения на диоде $1 \div 10$ В; ток в максимуме $340 \div 370$ мА; желаемая частота генерации $8 \div 11$ ГГц.

Вопросы, подлежащие рассмотрению: Принцип устройства и работы диода Ганна; построение зависимостей ВАХ, скорости от напряженности и от температуры, подвижности от концентрации и температуры (ход всех характеристик необходимо пояснить). Плоские волны в образце, их параметры и дисперсионное уравнение. Получение условий усиления и генерации в заданном частотном диапазоне.

Введение

Диод Ганна представляет собой полупроводниковый (п/п) кристалл с омическими контактами на противоположных гранях. В отличие от других п/п приборов диод Ганна не имеет $p-n$ переходов. Название диода связано с явлением открытым в 1963 г. Ганном в подобных структурах. Оказалось, что при подаче на диод напряжения от источника постоянного напряжения в диоде возникают периодические колебания тока с частотой, лежащей в диапазоне СВЧ. Эта генерация СВЧ колебаний имеет критический характер и возможна лишь при напряжении на диоде больше некоторого порогового значения $U_{пор}$. Период колебаний оказывается прямо пропорционален длине кристалла. Причина возникновения СВЧ колебаний связана с особенностями нелинейной зависимости тока в диоде от напряжения на нем. Эта зависимость описывается уравнением

$$I = \alpha \cdot (1 - k)e^{(1-\alpha)} + k(1 - e^{-\alpha} + \alpha e^{1-2\alpha}), \quad (5.1)$$

где $\alpha = U/U_0$; $k = I_s/I_0$ - коэффициент качества диода ($k=0,4 \div 0,5$ диод считается хорошим; $k=0,8 \div 0,9$ - среднего качества); I_s - ток насыщения; I_0 -

максимальная величина тока; $U_0 = U_{пор}$ – напряжение на диоде при максимальной величине тока; U – текущая величина напряжения. Зависимость (5.1) рассчитывается при заданных параметрах тока и напряжения и имеет вид (рис.5.1). Главным является участок при $U > U_{пор}$. На этом участке ток с ростом напряжения падает. Определив для переменного тока динамические проводимость или сопротивление $\sigma_{\partial} = \frac{\partial i}{\partial u}$, $R_{\partial} = \frac{\partial U}{\partial i}$, можно заметить, что при постоянном напряжении $U > U_{пор}$ величины $R, \sigma < 0$. Если активное сопротивление

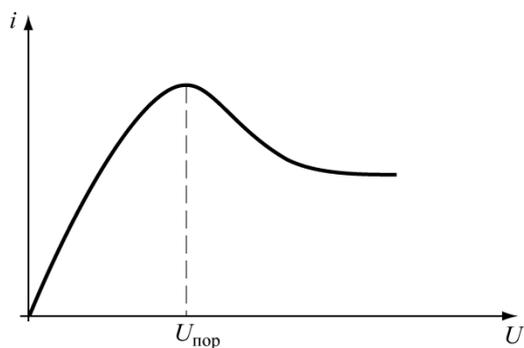


Рис. 5.1. Вольт амперная характеристика диода Ганна.

среды $R_{\partial} < 0$ или $\sigma_{\partial} < 0$, то $P = i^2 R_{\partial} < 0$, значит колебания нарастают, т.е. «электронная» мощность P выделяется активной средой.

Физическая причина падающего участка тока на вольтамперной характеристике связана с особенностями зависимости энергии электрона от его импульса в зоне проводимости материала п/п. Связь кинетической энергии с импульсом имеет вид $E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, где p – импульс, m – масса электрона, V – скорость его. Полная энергия $E = E_0 + \frac{p^2}{2m}$, где E_0 – потенциальная энергия на дне зоны проводимости и зависимость E от p показана на рис.5.2. Как видно, здесь существует один энергетический минимум, вблизи дна которого и находятся в основном все электроны зоны проводимости. Кривизна этой энергетической

ямы определяется массой m носителя заряда. Чем выше кривизна, тем меньше масса m . В ряде п/п зависимость $E(p)$ при больших p имеет другой вид (рис.5.3)

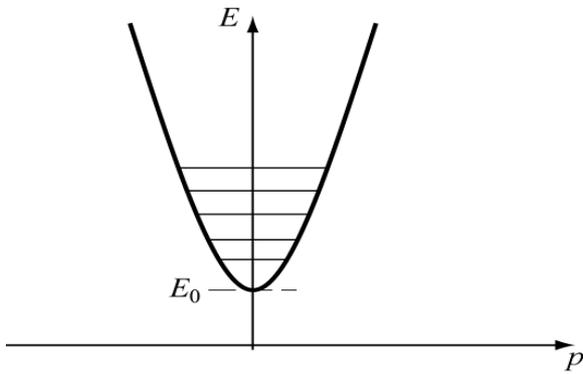


Рис. 5.2. Зависимость E -энергии от p - импульса

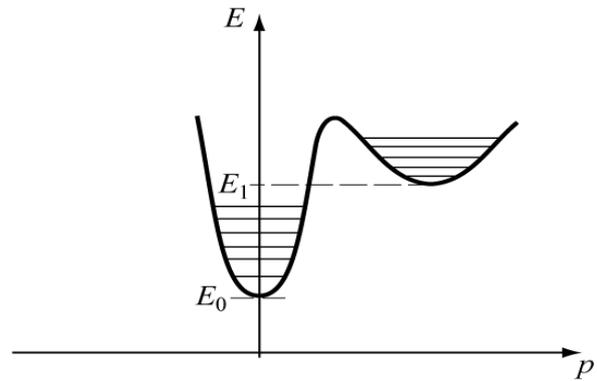


Рис. 5.3. Зависимость E -энергии от p - импульса в двух долинном материале

. Как видно, здесь имеется два энергетических минимума E_0 и E_1 . В отсутствии внешнего электрического поля все электроны находятся в первом из них с энергией E_0 . В этом минимуме зависимость $E(p)$ имеет большую кривизну и, следовательно, носители обладают малой массой и высокой подвижностью, что означает также высокую проводимость. Действительно, плотность тока проводимости можно записать в двух формах

$$\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E} \text{ или } \vec{j}_{np} = en\vec{V}, \quad (5.2)$$

где σ - проводимость материала полупроводника, n - число электронов в объеме. Для скорости \vec{V} и импульса $m\vec{V}$ справедливо уравнение движения Ньютона

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\vec{V}) = e\vec{E} - \frac{m\vec{V}}{\tau}, \quad (5.3)$$

где τ - время релаксации импульса; величина $\frac{m\vec{V}}{\tau}$ - характеризует уменьшение импульса за счет релаксации, т.е столкновений электрона с решеткой и передачи ей импульса и энергии. В твердых телах τ мало по сравнению с периодом колебаний. Инерционным членом $\frac{\partial(m\vec{V})}{\partial t}$ можно пренебречь, и из (5.3) получим

$$\vec{V} = e\tau\vec{E}/m \quad (5.3a)$$

$$\vec{j}_{np} = (\vec{E}e^2\tau \cdot n) / m \quad (5.4)$$

$$\text{Сравнивая (5.4) с (5.1), получаем } \sigma = (\vec{E}e^2\tau \cdot n) / m = |e|n\mu \quad (5.5)$$

где $\mu = |e|\tau / m$ - подвижность носителей - является характеристикой материала.

В сильном электрическом поле, когда скорость электронов \vec{V} оказывается большой, велик и импульс- $p = m\vec{V} = e\tau\vec{E}$ и основная часть электронов оказывается в энергетическом минимуме с энергией E_1 . В этой области эффективная масса m , как видно из рис. 5.3, велика (в GaAs примерно в 40 раз больше) и соответственно подвижность электронов и проводимость σ падают по мере заполнения электронами дна зоны вблизи $E = E_1$. Резкое падение σ с ростом E приводит к падению тока как функции напряжения (рис.5.1).

5.1. Основные уравнения электромагнитного поля для диода Ганна

Основные уравнения теории электромагнитного поля могут быть применены к анализу работы диода Ганна. Поэтому анализ ЭМП и В в диоде Ганна начнем с уравнений Максвелла, которые преобразуем для последующей работы

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{полн}}, \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{div}\vec{B} = 0, \text{div}\vec{D} = \rho.$$

Так как размеры диода малы, то поле в диоде можно рассматривать как квазистатическое, членом $\partial\vec{B}/\partial t$ и вообще магнитным полем можно пренебречь. Взяв div от первого уравнения, получаем ноль, остальные имеют вид:

$$\text{rot}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{D} = \rho, \quad \text{div}\vec{j}_{\text{полн}} = 0. \quad (5.6)$$

В выражении полного тока учитываем все три составляющие: ток смещения $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, ток проводимости $\vec{j}_{\text{пр}} = en\vec{V}(E)$ и «сторонний» диффузионный ток $\vec{j}_{\text{диф}} = -eD_0 \text{grad}(n)$, где D_0 - коэффициент диффузии. Ток получим в виде

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \varepsilon \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + en\vec{V}(E) - eD_0 \text{grad}(n) \quad (5.7)$$

Запишем выражение для объемной плотности заряда ρ . В состоянии равновесия заряд электронов полностью компенсирован зарядом решетки, поэтому $\rho = 0$. При движении электронов их распределение в пространстве образца мо-

жет стать неравномерным и этот заряд может оказаться не скомпенсированным. Тогда можно записать для объемной плотности заряда

$$\rho = e(n - n_0), \quad (5.8)$$

где n_0, n – однородное и неоднородное распределение концентрации заряда в решетке. В результате получаем следующие три уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \epsilon \vec{E} + \operatorname{div}(en \vec{V}(E)) - e \operatorname{div}(\vec{D}_0 \operatorname{grad}(n)) \quad (5.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{e}{\epsilon} (n - n_0), \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (5.10)$$

Из конструкции диода следует, что электрическое поле \vec{E} должно быть направлено от положительно заряженного электрода к отрицательному и может изменяться в этом же направлении. Примем это направление за ось Ox , тогда $\vec{E} = E(x)\vec{x}_0$. При этом уравнение $\operatorname{rot}(\vec{E}) = 0$ обращается в тождество, так как $\operatorname{rot}(\vec{E} = E(x)\vec{x}_0) \equiv 0$. Примем, что концентрация n -также изменяется только от оси x , тогда уравнения для \vec{E} и n (5.9) и (5.10) с учетом (5.8) примут вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n V_x(\vec{E}) - \frac{\partial}{\partial x} (D_0 \frac{\partial n}{\partial x}) = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon} (n - n_0) \quad (5.12)$$

Из (5.3а) следует, что в силу того, что заряд электрона $e < 0$, \vec{V} и \vec{E} направлены встречно; следовательно, если $E_x = E > 0$, то $V_x = -V < 0$. Заменим поэтому V_x на $-V$ в формуле (5.11). Коэффициент диффузии носителей D_0 зависит от подвижности носителей и температуры. В первом приближении он равен

$$D_0 = (\mu_n K_\sigma T) / |e| = K_\sigma T \tau / m \quad (5.13)$$

K_σ -константа Больцмана, $\mu_n = |e| \tau / m$ - подвижность электронов, таким образом D_0 также зависит от приложенного поля E . Окончательно основные уравнения для анализа работы диода Ганна принимают вид при $q = |e| = -e$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[n V(E) + D_0(E) \frac{\partial n}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{q}{\varepsilon}(n - n_0), \quad (5.15)$$

Параметры модели диода Ганна

Для решения уравнений (5.14)÷(5.15) необходимо знать зависимость $V(E)$ и $D(E)$. Эти зависимости находятся из экспериментальных данных. Для *GaAs* $V(E)$ приведена в виде

$$V(E) = \frac{\mu_n E + V_{нас} \left(\frac{E}{E_{нор}}\right)^4}{1 + \left(\frac{E}{E_{нор}}\right)^4}, \quad (5.16)$$

где $\mu_n = \frac{n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2}{n_1 + n_2}$ - эффективная подвижность носителей.

При $E \ll E_{нор}$ скорость носителей равна $V = \mu_n E$. При больших $E \gg E_{нор}$, $V(E) \rightarrow V_{нас}$. Величины μ_n и $V_{нас}$ и $E_{нор}$ являются параметрами математической модели (5.16) для $V(E)$. Экспериментально установлено, что для *GaAs*

$$E_{нор} = 4000 \frac{В}{см} = 4 \cdot 10^5 \frac{В}{м}, \quad V_{нас} = 10^7 \frac{см}{с} = 10^5 \frac{м}{с} \quad (5.17а)$$

Подвижность электронов в слабом поле зависит от концентрации носителей и температуры. При $T = 300^0 К$

$$\mu_n = \frac{\mu_i}{1 + \sqrt{10^{-17} n_0}}, \quad (5.17б)$$

где $\mu_i = 8 \cdot 10^3 \frac{см^2}{В \cdot с} = 0,8 \frac{м^2}{В \cdot с}$; n_0 - концентрация донорных примесей, для *GaAs*.

обычно $n_0 = 2(10^{14} - 10^{16}) \frac{1}{см^3}$. Поэтому при любой температуре ($T \neq 300^0 К$)

$$\mu_n(T) = \mu_n(300/T)^{1,14} \quad (5.17в)$$

Величина $V_{нас}$ так же зависит от T

$$V_{нас} = V_{нас}(300)(300/T)^{0,7} \quad (5.17г)$$

В задании на курсовую работу для разных приборов и материалов параметры μ_i , n_0 и T обычно задаются, зависимость $V(E)$ строится, ее вид (рис.5.4)

Работа прибора в генераторном или усилительном режиме возможна в режиме $E > E_{пор}$ ($V < V_{пор}$). Для этого следует вычислить для заданных n_0 и T , $V_{пор}$ и $E_{пор}$

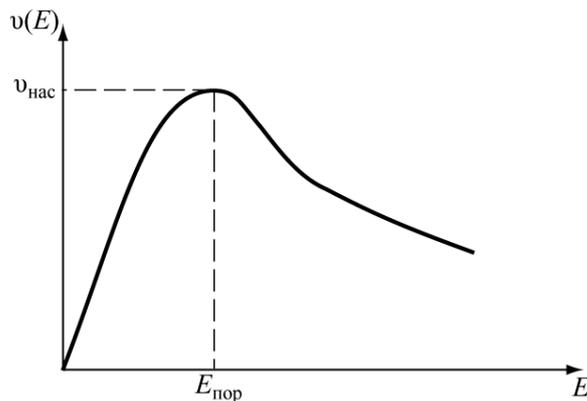


Рис. 5.4. Зависимость скорости носителей от напряженности поля E в образце диода.

Коэффициент диффузии в первом приближении, когда зависимостью параметров от напряженности поля E можно пренебречь, следует вычислять по формуле (5.13).

5.2. Дисперсионное уравнение для волн в диоде Ганна

Пусть помимо приложенного постоянного поля E_0 в диоде Ганна распространяется плоская волна, имеющая небольшую амплитуду. Определим ее характеристики. Используем символический метод расчета и полагаем

$$E(x,t) = E_0 + E_1 e^{i(\omega t - kx)},$$

где ω - частота колебаний плоской волны, k - волновое число, E_1 - амплитуда волны, причем $E_1 \ll E_0$. Величину скорости движения носителей $V(E)$ разложим в ряд по малой величине E_1

$$V(E) = V(E_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} E_1 e^{i(\omega t - kx)}, \quad D_{\partial}(E) \approx D_{\partial}(E_0) = D_{\partial}.$$

Поле E_1 вызовет соответствующую модуляцию величины n - концентрации носителей $n = n_0 + n_1 e^{i(\omega t - kx)}$

Подставляем эти выражения в (5.14) и затем в (5.15)

$$i\omega n_1 e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(n_0 + n_1 e^{i(\omega t - kx)}) \left(V(E_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} E_1 e^{i(\omega t - kx)} \right) + D_{\partial} \frac{\partial}{\partial x} (n_0 + n_1 e^{i(\omega t - kx)}) \right] = 0.$$

Отсюда, пренебрегая произведением $n_1 E_1$ и выпуская экспоненту, получим

$$i\omega n_1 + ikn_1 V(E_0) + ikn_0 \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} E_1 + k^2 D_\partial n_1 = 0 \text{ или}$$

$$[i\omega + ikV(E_0) + k^2 D_\partial] n_1 + ikn_0 \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} E_1 = 0 \quad (5.18)$$

$$-ikE_1 = -\frac{q}{\varepsilon} n_1 \quad (5.19)$$

Для того чтобы система однородных уравнений (5.18) и (5.19) имела решение, определитель ее должен быть равен нулю. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} i\omega + ikV(E_0) + k^2 D_\partial & ikn_0 \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} \\ + \frac{q}{\varepsilon} & -ik \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим дисперсионное уравнение, связывающее круговую частоту ω и постоянную распространения k

$$\omega = -kV(E_0) + i(k^2 D_\partial + n_0 \frac{q}{\varepsilon} \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0}) \quad (5.20)$$

5.3. Анализ дисперсионного уравнения

Проведем анализ дисперсионного уравнения для двух случаев.

В первом случае, считаем заданной частоту ω и будем определять зависимость $k(\omega)$. Как видно из (5.20), параметр k при этом будет комплексным. Запишем его $\dot{k} = k' - jk''$, где k' - коэффициент фазы; k'' - коэффициент затухания.

Подставим \dot{k} в (5.20) и выделяем из него вещественную и мнимую части

$$\begin{aligned} \{\omega\} &= -k'V(E_0) + 2D_\partial k'k'', \\ 0 &= k''V(E_0) + (k'^2 - k''^2)D_\partial + n_0 \frac{q}{\varepsilon} \left. \frac{\partial V}{\partial E} \right|_{E=E_0} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Будем полагать, что коэффициент затухания волны k'' не очень велик по сравнению с коэффициентом фазы волны k' , т.е. $k'' \ll k'$.

Тогда из первого уравнения (5.21) находим коэффициент фазы

$$k' = -\frac{\omega}{V(E_0)} \quad (5.22)$$

А из второго уравнения системы (5.21) находим коэффициент затухания

$$k'' = -n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{V(E_0)} \frac{\partial V}{\partial E} \Big|_{E=E_0} - \frac{\omega^2}{V(E)^2} \frac{D_\partial}{V(E)} \quad (5.23)$$

Так как коэффициент фазы $k' < 0$, то волна распространяется против оси ОХ. Поскольку постоянное поле E_0 направлено по оси ОХ (от плюса к минусу), анодный электрод располагается у нас вначале координат, при $x=0$, то $k' < 0$ означает, что волны зарождаются на катоде и бегут к аноду.

В обычных условиях, т.е. при $E < E_{нор}$, коэффициент затухания $k'' < 0$, т.к. $\partial V / \partial E = \mu_n > 0$, а это означает, что волна затухает в направлении своего распространения. Однако, если $E > E_{нор}$, величина $\partial V / \partial E < 0$ и тогда слагаемое в (5.23) $(-n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial E})$ становится положительным и будет больше $\frac{\omega^2}{V^2} \frac{D}{V}$. В результате чего k'' изменит свой знак. Это означает, что волна будет усиливаться в направлении своего распространения.

Коэффициент усиления на единицу длины будет

$$K_{yc} = -n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial E} - \frac{\omega^2}{V^2} \frac{D_\partial}{V}, \quad (5.24)$$

а усиление волны на длине кристалла L составит

$$K = e^{K_{yc}L} \quad (5.25)$$

Для заданной частоты ω студент в своей работе должен рассчитать и построить зависимость $K_{yc} = f(E)$, которая будет имеет вид как на рисунке 5.5; определить E при котором $K_{yc} = \max$. Определить длину L диода Ганна и усиление в режиме слабого сигнала из условия $(k')L = \omega L / V = 2\pi$. Возможная область усиления находится при $E_1 < E_0 < E_2$. Максимум усиления достигается при $E = E_{\max}$. В этой точке и следует найти L и K (5.25) и напряжение $U = E_{\max}$, которое необходимо подать на диод Ганна.

Второй случай, когда полагаем заданной величину k и будем находить частоту ω . Случай, когда задано k (вещественное), а отыскивается ω , рассматривается аналогично. В этом случае комплексными будут частоты $\dot{\omega} = \omega' - i\omega''$.

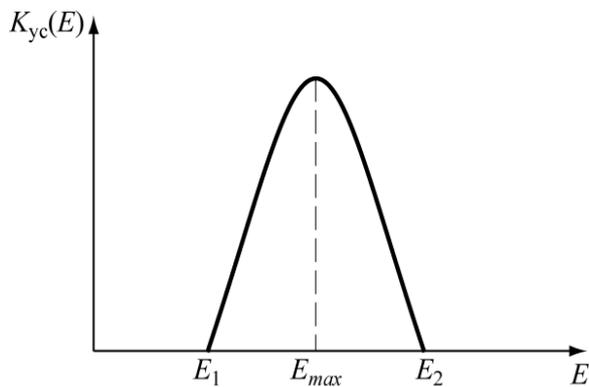


Рис. 5.5. График зависимости коэффициента усиления от напряженности электрического поля в диоде Ганна.

Из (5.18) и (5.19) получим

$$\omega' = -kV(E) \quad , \quad (5.26)$$

$$\omega'' = k^2 D_0 + n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial E} . \quad (5.27)$$

То что $\frac{\omega'}{k} = -V(E)$ характеризу-

ет отрицательную скорость означает, что волна бежит против оси ОХ, т.е. от катода к аноду. Из (5.27) видно, что $\omega'' > 0$ будет всегда, когда $\partial V / \partial E > 0$.

В этом случае волна

$e^{j(\omega t - kx)} = e^{-\omega'' t} e^{(\omega' t - kx)}$ затухает во времени. Когда же

$n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial E} + k^2 D_0 < 0$ и $\omega'' < 0$ сигнал будет усиливаться при $kL = 2\pi$. Необходимо

построив зависимость $\omega'' = f(E)$ и найти область усиления сигнала.

Выводы

1. Дисперсионное уравнение для анализа режимов усиления и генерации в диоде Ганна позволяет определить коэффициент фазы и коэффициент затухания волны при различных концентрациях носителей в образцах на частоте ω .

2. При заданной частоте ω и $E > E_{пор}$, величина $\partial V / \partial E < 0$, и тогда $k'' < 0$, т.е. волна усиливается в направлении распространения.

3. При заданной величине постоянной распространения k при условии $n_0 \frac{q}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial E} + k^2 D_0 < 0$ и $\omega'' < 0$ сигнал будет усиливаться при $kL = 2\pi$.

4. Конкретные числовые данные должны быть приведены в выводах после построения и анализа всех графиков, получаемых в работе.

6. Плоский диэлектрический (планарный) волновод

Тема курсовой работы: **Разработка планарного волновода для интегральной оптики.**

Технические данные: Рабочая длина волны задана (например, 0,5 мкм);

Параметры слоев задаются (например, $n_1=1.64$; $n_2=1.72$; $n_3=n_1$);

Тип волны в планарном волноводе задается (например, H_{10});

Мощность на входе волновода задается (например, 0,5 мВт).

В работе необходимо: Решить уравнения Максвелла; получить выражения для электромагнитных полей; получить дисперсионное уравнение для расчета геометрии волноводного слоя, определения диапазона длин волн, в пределах которого распространяется только указанный тип волны; определить мощности, распространяющиеся внутри слоев. Изобразить картины электромагнитных полей в слоях.

6.1. Волны магнитного типа H_m (TE_m)

Оптические волноводы (световоды) – это направляющие диэлектрические структуры, по которым может распространяться электромагнитная энергия в видимой или инфракрасной областях спектра. Явление распространения электромагнитных волн по оптическим волноводам может быть рассмотрено строго с позиций волновой теории, т.е. уравнений Максвелла и соответствующих граничных условий.

Планарный диэлектрический волновод представляет трехслойную структуру (рис.6.1) с размерами, не ограниченными в двух направлениях y и z . Средний (второй) слой толщиной d имеет самый высокий показатель преломления, т.е.: $n_2 > n_1$ и $n_2 > n_3$, причем, $n_1 < n_3 < n_2$. На границах второго слоя с первым и третьим выполняются условия полного внутреннего отражения.

Среды планарного волновода изотропные, не имеют потерь, магнитная проницаемость их одинакова и равна проницаемости воздуха μ_0 . Световая волна распространяется во втором слое вдоль оси z , отражаясь полностью от границ раздела (рис.6.1). В таком диэлектрическом волноводе возможны волны типа H ($H_z \neq 0, E_z = 0$) и типа E ($E_z \neq 0, H_z = 0$), а также гибридные - EH.

Рассмотрим волну типа Н. Направим вектор \vec{E} вдоль неограниченной координаты y , $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, тогда вектор \vec{H} будет лежать в плоскости, ортогональной y , т.е. иметь две составляющие H_x, H_z .

Задача: решить уравнения Максвелла для системы из трех диэлектрических сред, удовлетворить его граничным условиям и получить дисперсионное уравнение, необходимое для определения постоянной распространения во второй среде. Определить размеры второй среды, позволяющие распространять волну заданного типа.

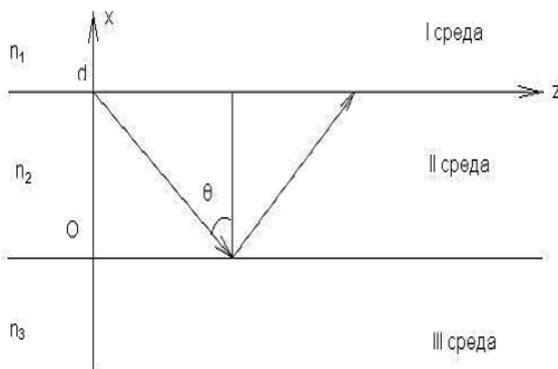


Рис.6.1 – Планарный волновод в сечении $y=const$

Уравнения Максвелла в отсутствии сторонних токов и потерь в среде имеют вид:

$$\text{rot}\vec{H} = +i\omega\epsilon\vec{E}; \text{rot}\vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}. \quad (6.1)$$

Для определения выражений составляющих электромагнитного поля из уравнения (6.1) запишем его в виде определителей с учетом имеющихся компонент векторов:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{bmatrix} = i\omega\epsilon\vec{E}; \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (6.2)$$

Раскроем (6.2) и получим равенства для составляющих векторов в виде

$$\begin{cases} H_x = \frac{\partial E_y}{i\omega\mu\partial z}; & H_z = -\frac{\partial E_y}{i\omega\mu\partial x}; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon E_y \end{cases} \quad (6.3)$$

После подстановки H_x и H_z в (6.3) в третье соотношение и введения обозначений волнового числа свободного пространства $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$; n – показателя преломления среды, равного $n = \sqrt{\epsilon_r}$, получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 E_y = 0 \quad (6.4)$$

Для бегущей волны вдоль оси z (2.13) решение может быть записано в виде:

$$E_y(z) = E_{ym} e^{-i\beta z}, \quad (6.5)$$

где β – постоянная распространения волны в продольном направлении, E_{ym} – амплитуда волны. Уравнение (6.4) после подстановки (6.5) запишется

$$\frac{\partial^2 E_{ym}}{\partial x^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) E_{ym} = 0. \quad (6.6)$$

В (6.6) обозначим δ значение постоянной в поперечном направлении

$$\delta^2 = (n^2 k_0^2 - \beta^2), \quad (6.7)$$

получим

$$\frac{\partial^2 E_{ym}}{\partial x^2} + \delta^2 E_{ym} = 0. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) определяет поведение электрического поля E_y в поперечном направлении x . В случае кусочно-однородной диэлектрической структуры (рис.6.1) уравнение (6.8) справедливо отдельно в каждой из трех однородных сред, но при выполнении следующих условий:

а) амплитуды полей на бесконечности должны быть равны нулю, т.е.

$$E_y(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0 \text{ и } E_y(x)|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (6.9)$$

б) отсутствие потока энергии в поперечном направлении в первой и третьей средах, что эквивалентно резкому уменьшению полей вне второй среды. Для выполнения этого условия поле в 1 и 3 средах в уравнении (6.7) у постоянной δ необходим знак минус, т.е.

$$\delta^2 = \beta^2 - n^2 k_0^2, \text{ при } \beta > n k_0. \quad (6.10a)$$

в) во второй среде поле в поперечном направлении должно изменяться по гармоническому закону. Для этого необходимо, чтобы уравнение (6.9) имело комплексно-сопряженные корни, т.е.

$$\delta^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2, \text{ где } \beta < n k_0. \quad (6.10б)$$

Используя решение (6.8) с учетом условий (6.9), (6.10а) и (6.10б), получим выражения электромагнитных полей в каждом слое.

Первая среда: ($x \geq d$) – покровный слой, поверхностная волна $\beta > n_1 k_0$

$$\delta_1 = \gamma = \sqrt{\beta^2 - n_1^2 k_0^2} > 0 \quad (6.11a)$$

Уравнение (6.8) должно иметь вид
$$\frac{d^2 E_y^I}{dx^2} - \gamma^2 E_y^I = 0.$$

Составляя характеристическое уравнение ($p_{1,2} = \pm\gamma$), получаем решение

$$E_y^I = \left[A e^{\gamma(x-d)} + B e^{-\gamma(x-d)} \right] e^{-i\beta z}. \quad (6.12a)$$

Учитывая условие (6.9), коэффициент А в (6.12а) необходимо приравнять нулю. Подставим значение поля E_y^I в систему (6.4), получим выражения полей моды H в первой среде в комплексном виде:

$$\dot{E}_y^I = B e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z}; \quad \begin{cases} \dot{H}_x^I = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} B e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_z^I = \frac{\gamma}{i\omega\mu_0} B e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z} \end{cases} \quad (6.13a)$$

Вторая среда ($0 < x < d$), $\beta < n_2 k_0$ - волноводный слой, постоянная

$$\delta_2 = \chi = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - \beta^2} > 0. \quad (6.11б)$$

Уравнение (6.8) с учетом (6.11б) и его решение принимают вид:

$$\frac{\partial^2 E_y^{II}}{\partial x^2} + \chi^2 E_y^{II} = 0, \quad (\text{характеристическое уравнение } p_{1,2} = \pm i\chi),$$

$$E_y^{II} = \left(C e^{i\chi x} + D e^{-i\chi x} \right) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{или} \quad E_y^{II} = [C \cos(\chi x) + iD \sin(\chi x)] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (6.14)$$

Подставив (6.13) в (6.3) получим

$$\begin{cases} E_y^{II} = [C \cos(\chi x) + iD \sin(\chi x)] e^{i(\omega t - \beta z)} \\ H_x^{II} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} [C \cos(\chi x) + iD \sin(\chi x)] e^{i(\omega t - \beta z)} \\ H_z^{II} = -\frac{\chi}{i\omega\mu_0} [-C \sin(\chi x) + iD \cos(\chi x)] e^{i(\omega t - \beta z)} \end{cases} \quad (6.13б)$$

Третья среда: ($x \leq 0$), $\beta > n_3 k_0$ - базовый слой.

$$\delta_3 = \xi = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2} > 0 \quad (6.12B)$$

$$E_y^{III} = \left[M e^{\xi x} + N e^{-\xi x} \right] e^{i(\omega t - \beta z)}$$

Используя (6.3) и (6.9), полагая $N=0$, получим:

$$\begin{cases} E_y^{III} = M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ H_x^{III} = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ H_z^{III} = -\frac{\xi}{i \omega \mu_0} M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \end{cases} \quad (6.13B)$$

Для определения констант B, C, D, M воспользуемся граничными условиями для тангенциальных компонент векторов на границе диэлектрических сред

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}:$$

1) $E_y^I = E_y^{II}$ при $x=d$ и любом значении z получаем соотношение

$$B = C \cos(\chi d) + iD \sin(\chi d) \quad (6.15a)$$

2) $H_z^I = H_z^{II}$ при $x = d$ и любом значении z получаем соотношение

$$\frac{\gamma}{i \omega \mu_0} B e^{-\gamma(d-d)} e^{i(\omega t - \beta z)} = -\frac{\chi}{i \omega \mu_0} [-C \sin(\chi d) + iD \cos(\chi d)] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{или}$$

$$\gamma B = \chi [C \sin(\chi d) + iD \cos(\chi d)] \quad (6.15b)$$

3) $E_y^{II} = E_y^{III}$ при $x=0$ и любом значении z имеем

$$[C \cos(\chi \cdot 0) + iD \sin(\chi \cdot 0)] e^{i(\omega t - \beta z)} = M e^{\xi \cdot 0} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad \text{откуда } C = M \quad (6.15B)$$

4) $H_z^{II} = H_z^{III}$ при $x = 0$ и и любом значении z :

$$i \chi D = \xi M \quad (6.15Г)$$

Четыре однородных линейных уравнения (6.15a) – (6.15Г) объединим в систему относительно B, C, D, M :

$$\begin{cases} B = C \cos(\chi d) + iD \sin(\chi d) \\ C = M \\ \gamma B = \chi [C \sin(\chi d) + iD \cos(\chi d)] \\ i\chi D = \xi M \end{cases} \quad (6.16)$$

Нетривиальное решение (6.16) существует, когда определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos(\chi d) & -i \sin(\chi d) \\ \frac{\gamma}{\chi} & -\sin(\chi d) & i \cos(\chi d) \\ 0 & -\xi & i\chi \end{vmatrix} = 0$$

В данном определителе столбцы соответствуют множителям B, C и D соответственно. Раскрывая определитель, получим соотношение:

$$\begin{aligned} -\chi \sin(\chi d) + \xi \cos(\chi d) + \gamma \cos(\chi d) + \frac{\gamma \xi}{\chi} \sin(\chi d) &= 0 & \frac{\gamma}{\chi} + \frac{\xi}{\chi} \\ -\chi \operatorname{tg}(\chi d) + \xi + \gamma + \frac{\gamma \xi}{\chi} \operatorname{tg}(\chi d) &= 0 & \cdot \operatorname{tg} \chi d = \frac{\frac{\gamma}{\chi} + \frac{\xi}{\chi}}{1 - \frac{\gamma \xi}{\chi^2}} \text{ откуда} \end{aligned}$$

$$\chi d = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{\gamma}{\chi} + \frac{\xi}{\chi}}{1 - \frac{\gamma \xi}{\chi^2}} \right] + \pi \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

здесь m – индекс типа волны в волноводном слое для координаты x . Рассматриваемые моды (типы волн) обозначаются H_m .

Уравнение (6.17) является дисперсионным уравнением волн типа H_m , распространяющихся в диэлектрическом волноводе, которое связывает параметры ε , μ_0 трех сред и геометрию второго слоя d с рабочей частотой f . Уравнение (6.17) может быть преобразовано к виду:

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad \text{при условии } xy < 1.$$

Условие удовлетворяется, т.к. $\gamma \xi < \chi^2$, что следует из (6.12а)÷(6.12в). Тогда запишем (6.17) в виде:

$$\chi d = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\chi} + \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\chi} + \pi \cdot m; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.18a)$$

Примечание : Если среды 1 и 3 (рис.6.1) будут иметь одинаковый показатель преломления ($n_1=n_3$) - случай симметричного волновода, тогда $\gamma = \xi$, а уравнение (6.18а) приводится к виду

$$\chi d = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma}{\chi^2 - \gamma^2}\right) + \pi m. \quad (6.18б)$$

В случае, когда один из слоев будет металлическим, величину поперечной постоянной в нем, γ или ξ , следует считать равной нулю, а дисперсионное уравнение (6.18), например, в случае $\xi = 0$, принимает вид:

$$\chi d = \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\chi} + \pi m \quad (6.18в)$$

6.2. Волны электрического типа E_m или TM_m

В случае поперечно-магнитной волны $H_z=0$, при условии $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, отличными от нуля, будут компоненты электромагнитного поля E_z , H_y , E_x , т.е. $\vec{H} = H_y \vec{y}_0$, $\vec{E} = E_x \vec{x}_0 + E_z \vec{z}_0$. Получение выражений для составляющих полей и дисперсионного уравнения можно сделать, применяя принцип перестановочной двойственности к уравнениям и выражениям предыдущего параграфа, но можно повторить получение этих выражений. Из (6.3) и (6.6)

$$E_x = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad H_y = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (6.20)$$

Для каждой из сред вводя свои поперечные постоянные δ_i , и учитывая требование конечности полей при $x \rightarrow \pm\infty$, получаем из (6.20) решения.

Первая среда (рис.6.1) характеризуется: $\infty > x \geq d$, $\beta > n_1 k_0$.

Обозначим $\delta_1 = \gamma = \sqrt{\beta^2 - n_1^2 k_0^2} > 0$, тогда уравнение (6.20) принимает вид

$$\frac{\partial^2 H_y^1}{\partial x^2} - \gamma^2 H_y^1 = 0, \text{ а его решение } H_y^1 = \left[A e^{\gamma(x-d)} + B e^{-\gamma(x-d)} \right] e^{i(\omega t - \beta z)}$$

Чтобы при $x \rightarrow \infty$ величина вектора оставалась конечной, следует $A = 0$.

Поле в первой среде с учетом соотношений (6.19) будет иметь вид:

$$\begin{cases} H_y^I = B e^{-\gamma(x-d)} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ E_x^I = \frac{\beta}{\omega \epsilon_1} B e^{-\gamma(x-d)} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ E_z^I = -\frac{\gamma}{i \omega \epsilon_1} B e^{-\gamma(x-d)} e^{i(\omega t - \beta z)} \end{cases} \quad (6.21)$$

Вторая среда - волноведущий слой: $0 < x < d$, $\beta < n_2 k_0$, $\delta_2 = \chi = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - \beta^2} > 0$, составляющие поля волны типа E для этого слоя

$$\begin{aligned} E_x^{II} &= \frac{\beta}{\omega \epsilon_2} \left[C e^{-i\chi x} + D e^{i\chi x} \right] e^{i(\omega t - \beta z)}; \quad H_y^{II} = \left[C e^{-i\chi x} + D e^{i\chi x} \right] e^{i(\omega t - \beta z)}; \\ E_z^{II} &= \frac{\chi}{\omega \epsilon_2} \left[-C e^{-i\chi x} + D e^{i\chi x} \right] e^{i(\omega t - \beta z)} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Третья среда: $x < 0$, $\beta > n_3 k_0$, $\delta_3 = \xi = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2} > 0$. Поле имеет вид:

$$\begin{cases} H_y^{III} = M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ E_x^{III} = \frac{\beta}{\omega \epsilon_3} M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \\ E_z^{III} = \frac{\xi}{i \omega \epsilon_3} M e^{\xi x} e^{i(\omega t - \beta z)} \end{cases} \quad (6.23)$$

Для упрощения записи выражений полей вводим обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\chi}{\omega \epsilon_2}; \quad \alpha_3 = \frac{\xi}{\omega \epsilon_3} \quad (6.24)$$

Выделим из (6.21)÷(6.23) составляющие, входящие в граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z^I = i\alpha_1 B e^{-\gamma(x-d)} \\ E_z^{II} = -\alpha_2 C e^{-i\chi x} + \alpha_2 D e^{i\chi x} \\ E_z^{III} = -i\alpha_3 M e^{\xi x} \end{array} \right\} e^{-i\beta z}; \quad \left\{ \begin{array}{l} H_y^I = B e^{-\gamma(x-d)} \\ H_y^{II} = C e^{-i\chi x} + \alpha_2 D e^{i\chi x} \\ H_y^{III} = M e^{\xi x} \end{array} \right\} e^{-i\beta z}$$

Запишем граничные условия:

при $x=0$: а) $H_y^{II} = H_y^{III}$ и б) $E_z^{II} = E_z^{III}$; при $x=d$: в) $H_y^I = H_y^{II}$ и г) $E_z^I = E_z^{II}$.

Удовлетворяем граничным условиям, получим равенства:

из а) $C + D = M$; из условия б) $-C + D = -i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} M$;

из в) $B = Ce^{-i\chi d} + De^{i\chi d}$; из г) $i\alpha_1 B = -\alpha_2 Ce^{-i\chi d} + \alpha_2 De^{i\chi d}$.

Определим C, D из первых двух равенств

$$D = \frac{1}{2} M \left(1 - i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right); C = \frac{1}{2} M \left(1 + i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right) \quad (6.25)$$

Введем обозначения в третье и четвертое равенства

$Ce^{-i\chi d} = C_1$; $De^{i\chi d} = D_1$, тогда $B = C_1 + D_1$ и $i\alpha_1 B = -\alpha_2 C_1 + \alpha_2 D_1$, откуда

$$D_1 = \frac{1}{2} B \left(1 + i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right), C_1 = \frac{1}{2} B \left(1 - i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right).$$

Переходим к прежним обозначениям:

$$Ce^{-i\chi d} = \frac{1}{2} B \left(1 - i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right); De^{i\chi d} = \frac{1}{2} B \left(1 + i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right). \quad (6.26)$$

В (6.25), (6.26) делим одно выражение на другое и приравниваем

$$\frac{C}{D} = \frac{\left(1 + i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)}{\left(1 - i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)} = \frac{\left(1 - i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)}{\left(1 + i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)} e^{2i\chi d} \quad (6.27)$$

Преобразуем в (6.27) комплексные выражения

$$e^{2i\chi d} = \frac{\left(1 + i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)}{\left(1 - i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)} \cdot \frac{\left(1 + i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)}{\left(1 - i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)}, \quad \begin{aligned} \dot{Z}_1 &= 1 + i \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = |Z_1| e^{i\varphi_1}, \quad \text{где } \varphi_1 = \arctg \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \\ \dot{Z}_2 &= 1 + i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = |Z_2| e^{i\varphi_2}, \quad \text{где } \varphi_2 = \arctg \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$e^{2i\chi d} = \frac{|Z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |Z_2| e^{i\varphi_2}}{|Z_1| e^{-i\varphi_1} \cdot |Z_2| e^{-i\varphi_2}} = e^{2i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (6.28a)$$

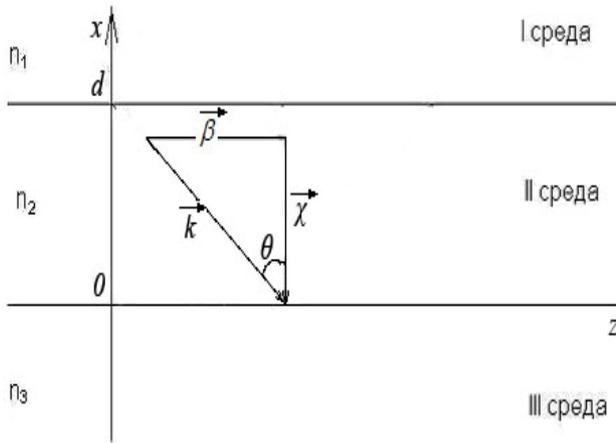


Рис.6.2. Векторный треугольник постоянных распространения

Из равенства комплексных функций в (6.28а) следует фазовое соотношение

$$\chi d = \varphi_1 + \varphi_2 + \pi m \quad (6.29)$$

Подставляем φ_1, φ_2 из (6.28) в (6.29), получим

$$\chi d = \arctg \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \arctg \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \pi m \quad (6.30)$$

В соотношение (6.30) подставим введенные обозначения из

(6.24), получим

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_1} \cdot \frac{\omega \epsilon_2}{\chi} = \frac{\gamma}{\chi} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2; \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\xi}{\omega \epsilon_3} \cdot \frac{\omega \epsilon_2}{\chi} = \frac{\xi}{\chi} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^2 \quad \text{и окончательно}$$

$$\chi d = \arctg \left[\frac{\gamma}{\chi} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] + \arctg \left[\frac{\xi}{\chi} \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^2 \right] + \pi m. \quad (6.31)$$

Выражение (6.31) есть дисперсионное уравнение планарного диэлектрического волновода для волны типа $E_m = E_{m0}$, где m-число вариаций (переходов через ноль) косинуса или синуса вдоль поперечной оси x.

6.3. Дисперсионные уравнения

Дисперсионные уравнения (6.17) и (6.31) преобразуем к виду, удобному для расчетов, графического построения и последующего анализа.

Воспользуемся векторным треугольником коэффициентов распространения (рис.6.2) в волноводном слое и выражениями в виде

$$\beta = n_2 k_0 \sin \theta; \quad \chi = n_2 k_0 \cos \theta \quad (6.32)$$

где β - коэффициент фазы волны, распространяющейся вдоль оси z, χ - поперечное волновое число стоячей волны, k_2 - волновое число волны, распространяющихся в среде с показателем преломления n_2 . С учетом $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ -

заданная длина волны), а также соотношений (6.11a)÷(6.11в), из (6.32) получим систему для поперечных постоянных величин во всех средах:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \theta - n_1^2}, & \chi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2 - n_2^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \cos \theta, \\ \xi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 \sin^2 \theta - n_3^2}, & \beta = \sqrt{k_2^2 - \chi^2}. \end{cases}, \quad (6.33)$$

Подставим значения γ, χ, ξ из (6.33) в (6.17), получим функцию:

$$F(\theta)_{Em} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi n_2 \cos \theta} \left[\arctg \left(\frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \theta - n_1^2}}{n_2 \cos \theta} \right) + \arctg \left(\frac{\sqrt{n_2^2 \sin^2 \theta - n_3^2}}{n_2 \cos \theta} \right) + \pi n \right] \quad (6.34)$$

Введем величину $N_m = n_2 \sin \theta$, называемую эффективным показателем преломления. Тогда (6.33) и (6.34) можно записать в виде

$$\begin{cases} \gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{N_m^2 - n_1^2}, & \chi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - N_m^2}, & \xi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{N_m^2 - n_3^2}, \end{cases} \quad (6.35)$$

$$G(\theta)_{Hm} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi \sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \left[\arctg \left(\frac{\sqrt{N_m^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \right) + \arctg \left(\frac{\sqrt{N_m^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \right) + \pi n \right] \quad (6.36)$$

После подстановок типа (6.35) в уравнение (6.31) оно принимает вид:

$$F(\theta)_{Em} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi \sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \left[\arctg \frac{n_2^2}{n_1^2} \left(\frac{\sqrt{N_m^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \right) + \arctg \frac{n_2^2}{n_3^2} \left(\frac{\sqrt{N_m^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_2^2 - N_m^2}} \right) + \pi n \right] \quad (6.37)$$

6.4. Анализ дисперсионного уравнения и выводы

1. Дисперсионное уравнение (6.36) или (6.37) позволяет получить условия существования в планарном волноводе, распространяющейся моды. Так при заданных параметрах среды n_1, n_2, n_3 и длины волны λ существование моды с индексом m возможно при определенной величине эффективного показателя преломления $N_m = n_2 \sin \theta$, т.е. при определенном угле падения θ волны на границу раздела. Чтобы корни, входящие в функцию \arctg дисперсионного уравнения (6.36) или (6.37) были вещественными числами и волна распространялась бы только в слое, должно выполняться неравенство

$$N_m^2 - n_{1,3}^2 \geq 0 \text{ или } n_2^2 \sin^2 \theta - n_{1,3}^2 \geq 0, \text{ или углы } \theta_{1,2} \geq \arcsin \frac{n_{1,3}}{n_2}. \quad (6.38)$$

При различных значениях величин показателей преломления сред $n_{1,2,3}$ из (6.38) следует рассчитать угол $\theta_{кр} = \theta_{\max} \geq \max[\theta_1, \theta_2]$, который называется **углом отсечки**. При углах $\theta < \theta_{\max}$ (меньших критического) работать нельзя, т.к. начинается распространение волны в покровном или в базовом слоях, а не только в планарном слое волновода. Например, отсечка волноводной моды наблюдается при $N_m = n_3$, если $n_1 < n_3 < n_2$.

2. Необходимо построить семейство дисперсионных кривых $G(\theta)_{H_m}$, $F(\theta)_{E_m}$ (6.36) или (6.37) при изменении угла θ в пределах $\theta_{\max} \leq \theta \leq \pi/2$, соответствующих разным модам, т.е. значениям m , при заданных параметрах n_1, n_2, n_3 . На рисунке 6.3, к примеру, представлены такие дисперсионные зависимости для разных H_m -мод трехслойного планарного волновода. Т.к. величина

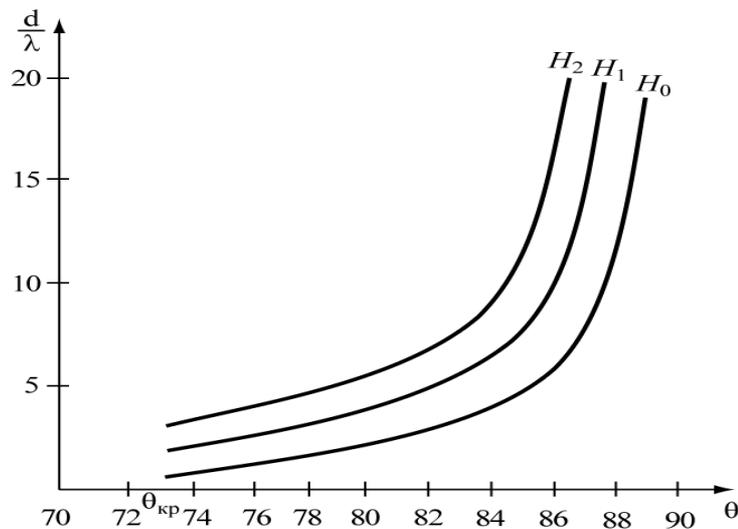


Рис. 6.3. Дисперсионные характеристики для волн типов H_0, H_1, H_2

$N_m = n_2 \sin \theta$ изменяется в ограниченных пределах $n_1 < N_m < n_2$, то при заданной толщине волновода d число существующих мод также конечное.

3. Если $n_1 \neq n_3$ и $n_3 > n_1$, то для каждой моды на заданной длине волны λ существует (рис 6.3) критическая толщина волноводного слоя $d_{крт}^{(H_m)}$, $d_{крт}^{(E_m)}$, соот-

ветствующая отсечке волноводной моды ($N_m = n_3$) (при которой прекращается распространение волны), определяемая из соотношений:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_{\text{кр}m}^{(H_m)} = \frac{\pi m + \arctg \sqrt{\frac{(n_3^2 - n_1^2)}{(n_2^2 - n_3^2)}}}{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}} \quad (6.39)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_{\text{кр}m}^{(E_m)} = \frac{\pi m + \arctg \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{\frac{(n_3^2 - n_1^2)}{(n_2^2 - n_3^2)}}}{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}} \quad (6.40)$$

4. Если $m=0$, то из (6.39) и (6.40) получается минимальная толщина волновода для моды H_0 и E_0 . Очевидно, в случае симметричного волновода ($n_1 = n_3$) минимальная толщина волновода будет равна нулю.

5. При заданной длине волны из рис.6.3 следует, что имеется интервал для толщины волноводного слоя, при котором наблюдается режим одна мода

$$d_{\text{кр.ближайшего типа}} > d > d_{\text{кр.рабочего типа волны}} \quad (6.41)$$

Обратное, для заданной толщины волновода существует интервал длин волн, соответствующий работе на одной моде. При увеличении толщины d и $\lambda - \text{const}$, растет число распространяющихся в планарном волноводе мод.

6. Фазовое соотношение (6.29) и (6.18) позволяют определить набег фаз на толщине волновода - χd , состоящий из суммы фазовых сдвигов при отражении волны от первого и третьего слоев и фазы πm , определяемой модой.

В курсовой работе следует рассчитать для заданных параметрах сред n_1, n_2, n_3 , длине волны λ и моде с индексом m дисперсионную характеристику, размер волноводного слоя, полосу рабочих частот, угол отсечки и критические углы, фазовые набег и параметры γ, χ, ξ в диапазоне частот.

6.5. Определение мощности, распространяющейся внутри слоев

Средняя за период мощность, проходящая по волноводу через единицу его ширины (по оси y), определяется формулой:

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{H}}^*]_z dx \quad (6.42)$$

Для волн типа H_m , после раскрытия векторного произведения с учетом имеющихся компонент в планарном волноводе, средняя за период мощность, передаваемая вдоль оси z , равна:

$$P = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_y \dot{H}_x^* dx = \frac{1}{2W} \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx. \quad (6.43)$$

где W – волновое сопротивление среды, равное $W = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$, (6.44)

Чтобы найти выражение передаваемой мощности моды H_m , в системе (6.17) выразим все коэффициенты через любой один, например C , который будет являться амплитудным коэффициентом и определяться мощностью волны, распространяющейся в волноводе.

$$\left\{ B = C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right], \quad D = \frac{\xi}{i\chi} C, \quad M = C \right. \quad (6.45)$$

С учетом (6.45), выражения для полей (6.14), (6.15) и (6.16) принимают вид:

$$\dot{E}_y^I = C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z}; \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{H}_x^I &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_z^I &= \frac{\gamma}{i\omega\mu_0} C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-\gamma(x-d)} e^{-i\beta z} \end{aligned} \right. \quad (6.46)$$

$$\dot{E}_y^{II} = C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-i\beta z}; \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{H}_x^{II} &= -\frac{\beta}{\omega\mu_0} C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_z^{II} &= -\frac{\chi}{i\omega\mu_0} C \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right] e^{-i\beta z} \end{aligned} \right. \quad (6.47)$$

$$\dot{E}_y^{III} = C e^{\xi\chi} e^{-i\beta z}; \quad \dot{H}_x^{III} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} C e^{\xi\chi} e^{-i\beta z}; \quad \dot{H}_z^{III} = -\frac{\xi}{i\omega\mu_0} C e^{\xi\chi} e^{-i\beta z} \quad (6.48)$$

Найдем выражения мощностей (6.43) в различных слоях

Первая и вторая среды

$$P^I = \frac{C^2}{2W^I} \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right]^2 \int_d^\infty e^{-2\gamma(x-d)} dx = \frac{C^2}{2W^I} \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right]^2 \int_0^\infty e^{-2\gamma x} dx,$$

$$P^I = \frac{C^2}{4W^I \gamma} \left[\cos \chi d + \frac{\xi}{\chi} \sin \chi d \right]^2, \text{ где } W^I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 n_1^2}} \quad (6.49)$$

$$W^{II} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 n_2^2}}, \quad P^{II} = \frac{C^2}{2W^{II}} \int_0^d \left[\cos(\chi x) + \frac{\xi}{\chi} \sin(\chi x) \right]^2 dx =$$

$$= \frac{C^2}{2W^{II}} \int_0^d \left[\cos^2(\chi x) + 2 \frac{\xi}{\chi} \sin(\chi x) \cos(\chi x) + \left(\frac{\xi}{\chi} \right)^2 \sin^2(\chi x) \right] dx \quad (6.50)$$

$$\text{Третья среда } W^{III} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 n_3^2}}; \quad P^{III} = \frac{C^2}{2W^{III}} \int_{-\infty}^0 e^{2\xi x} dx = \frac{C^2}{4W^{III} \xi} \quad (6.51)$$

Величины мощностей при найденных значениях постоянных распространения в поперечном направлении (γ, χ, ξ) и значении угла ввода (6.38), могут быть рассчитаны.

Если задана величина вводимой мощности (по заданию), то можно определить коэффициент C . Для этого сумму мощностей в трёх слоях следует положить равной заданной мощности P .

$$P^I + P^{II} + P^{III} = P \quad (6.52)$$

После нахождения мощности, передаваемой в волноводном слое, следует определить параметр **коэффициент локализации рабочей моды** Γ_p в виде $\Gamma_p = \frac{P^{II}}{P} \cdot 100\%$, оценивая при этом качество волновода. Величину коэффициента локализации рабочей Γ_p можно оптимизировать, поскольку она изменяется от толщины слоя d , угла θ , параметров среды n_1, n_2, n_3 .

6.6. Фазовая скорость волн в слоях

Фазовая скорость волны в волноводном слое это параметр, который определяется величиной β следующим образом: $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$, из (6.32) $\beta = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta$,

поэтому

$$v_\phi = \frac{c}{n_2 \sin \theta} \quad (6.55)$$

Сравнивая (6.55) со скоростью распространения волны в диэлектрике с параметрами $\varepsilon_2\mu_0$, получим $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}} < v_{\phi}$, откуда следует, что волна в слое по отношению к скорости света в неограниченном диэлектрике является быстрой.

Фазовая скорость поверхностных волн в 1-й и 3-й средах также может быть определена с учетом (6.12а) и (6.12в)

$$v_{\phi 1} = \frac{\omega}{\sqrt{k_0^2 n_1^2 + \gamma^2}} = \frac{c}{n_3 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_1^2}}}; \quad v_{\phi 3} = \frac{\omega}{\sqrt{k_0^2 n_3^2 + \xi^2}} = \frac{c}{n_3 \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_3^2}}}.$$

Преобразуем, например $v_{\phi 3}$, представив корень в виде $\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_3^2}} = 1 + K_{33}$, где

$$K_{33} = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_3^2}} - 1, \quad K_{31} = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_1^2}} - 1$$

коэффициент замедления для 3-го слоя и для первого. Тогда фазовая скорость волны в 3-ей среде

$$v_{\phi 3} = \frac{c}{n_3(1 + K_{33})}, \quad \text{в первой } v_{\phi 1} = \frac{c}{n_1(1 + K_{31})}.$$

Коэффициент замедления характеризует уменьшение фазовой скорости в покровных диэлектрических слоях по сравнению со скоростью света в этих диэлектриках. В курсовой работе следует построить зависимости постоянных распространения, фазовых скоростей и коэффициентов замедления от частоты для всех слоев и сделать выводы.

6.7. Картина распределения полей в слоях

Картина распределения составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} в слоях для заданного типа волны строится в поперечном направлении (вдоль оси x , при y, z - постоянных) представляет интерес, т.к. наглядно позволяет проверить выполнение граничных условий, характерное влияние значения индекса “ m ” на изменение полей в волноводном слое и изменение по экспоненте полей в слоях (скорость затухания), прилежащих к волноводному слою.

На рис 6.4 (в качестве примера) представлена зависимость изменения компоненты $H_y(x)$ для моды E_1 . Построение картины распределения полей выполняется с помощью выражений (6.46), (6.47), (6.48). Для этого следует подставить в уравнения все найденные коэффициенты (γ, χ, ξ, C) , фазу волны положить равной постоянному значению (например, $\varphi = \omega t - \beta z = 0$). Далее, изменяя координату x в пределах геометрии соответствующих слоев, получают зависимость каждой компоненты электромагнитного поля.

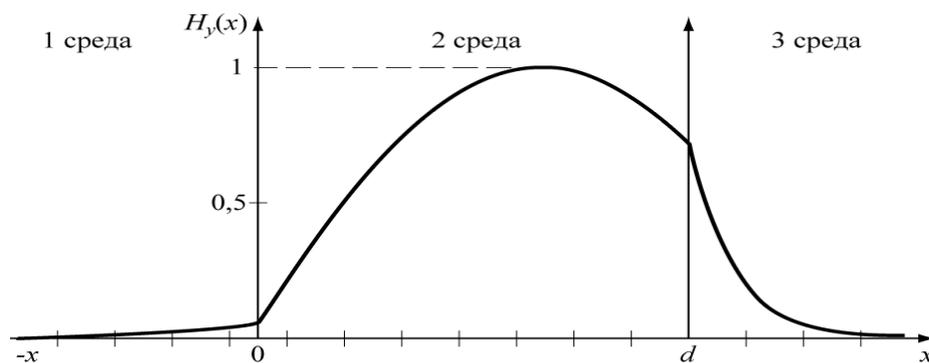


Рис. 6.4. Изменение составляющей магнитного поля $H_y(x)$ в трехслойном волноводе с параметрами $n_1 < n_3 < n_2$ на волне типа E_1 .

Если по заданию необходимо определить поляризационную характеристику (см. раздел 2) или найти уравнение силовой линии для вектора, то делать это следует для вектора с 2-мя компонентами.

6.8. Структура электромагнитного поля в волноводном слое

Распределение векторов \vec{E} и \vec{H} в пространстве волновода (по координатам x, z) на заданном типе волны при фиксированном времени называют структурой электромагнитного поля. Структура поля строится либо по эюграм, либо по уравнениям векторной линии. Во втором случае следует записать мгновенные выражения составляющих вектора для слоя, в котором будет строиться структура поля, с учетом найденной амплитуды и коэффициентов. Уравнение

векторной линии имеет вид

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}, \quad (6.56)$$

где a_x, a_y, a_z - компоненты вектора, поле которого желательно построить.

Например, для моды H_1 во второй среде, для вектора \vec{H} . Из (6.47) находим

$$\begin{cases} H_x'' = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} C \left[\cos(\chi x) + \frac{\xi}{\chi} \sin(\chi x) \right] \cos(\omega t - \beta z) \\ H_z'' = \frac{\chi}{\omega\mu_0} C \left[\frac{\xi}{\chi} \cos(\chi x) - \sin(\chi x) \right] \sin(\omega t - \beta z) \end{cases} \quad (6.57)$$

Видно, что векторная линия \vec{H} лежит в плоскости xoz , имея две компоненты.

В соотношение (6.53) подставляются H_x и H_z (6.54), проводится разделение функций по переменным интегрирования (x, z) (для четных функций ($\cos(\chi x)$) и для нечетных ($\sin(\chi x)$) отдельно составляются выражения), интегрируются равенства. Получают две функциональные зависимости координаты z от координаты x и константы интегрирования (например, a_N) для четных и не четных случаев. Затем, задается величина постоянной $a_N \rightarrow a_1$, и изменением координаты $0 < x < d$, получают координаты z . Построив эту зависимость, отмечаем на ней величину $a_1 - const$, видим, что она замкнутая кривая. Задавая другое значение константе - a_2 , получаем следующую линию вектора \vec{H} . Вектор \vec{E} (6.47) представлен одной компонентой вида $E_y''(x, z) = C \left[\cos(\chi x) + \frac{\xi}{\chi} \sin(\chi x) \right] \cos(\omega t - \beta z)$, и отображается в структуре густотой силовых линий в координатах x и z . На рис. 6.5, в качестве примера, приведены структуры полей моды E_{20} и моды E_{30}

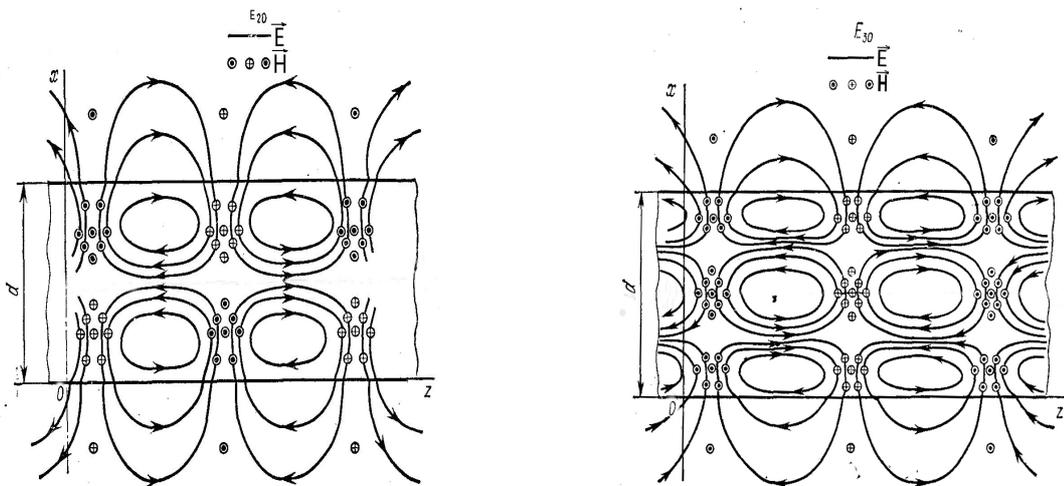


Рис.6.5. Структура электромагнитного поля моды E_{20} и моды E_{30} для симметричного планарного волновода.

7. Круглый диэлектрический волновод

Тема курсовой работы: **Разработка круглого оптического волновода.**

Технические требования: Рабочая частота f_0 ;

Параметры слоев: n_1 ; n_2 ; $n_3=n_0$;

Тип волны в волноводе задается (например, H_{10});

Мощность на входе волновода P мВт.

Задача и цель работы: определение составляющих электромагнитного поля диэлектрического волновода круглого сечения; получение дисперсионного уравнения и расчет геометрии оптического волновода, определение диапазона волн, в пределах которого распространяется только заданный тип волны; определение параметров волны: постоянной распространения β , фазовой скорости, длины волны; определение мощности, передаваемой по волокну. Изображение картины электромагнитных полей в волноводе.

7.1. Введение

Реальные волноводы, используемые в оптической связи, представляют собой гибкие волокна из прочных диэлектрических материалов. Поперечное сечение таких волноводов имеет размеры, сравнимые с размерами человеческого волоса. Диэлектрический волновод круглого сечения (рис.7.1) для оптического диапазона волн, называется также волокном в оболочке, имеет следующие параметры: диэлектрический цилиндр радиуса a_1 (**волокно**), выполнен из материала с показателем преломления n_1 , окружен концентрическим диэлектрическим цилиндром (**оболочка**) радиуса a_2 из материала с показателем преломления n_2 , оболочка, в свою очередь, окружена **защитным покрытием** n_3 .

Показатель преломления сердцевины может быть постоянным, ступенчатым или градиентным, показатель преломления оболочки обычно постоянен по сечению. Показатель преломления сердцевины должен быть больше показателя преломления оболочки. Обычно выполняется условие $n_1 > n_2$ и $\mu_1=\mu_2=\mu_0=\mu$. Область II на распространение волны в волокне не оказывает существенного влияния, так как вся энергия (информация) передается по сердцевине и лишь ее ма-

лая часть – по оболочке, и представляет экспоненциально спадающее вдоль радиуса поле. Но область II поддерживает волокно в пространстве, защищая от воздействия среды, температуры и нарушений границы. Размер радиуса a_2 берётся таким, чтобы вне этой области II, в пространстве защитного покрытия, поле полностью отсутствовало.

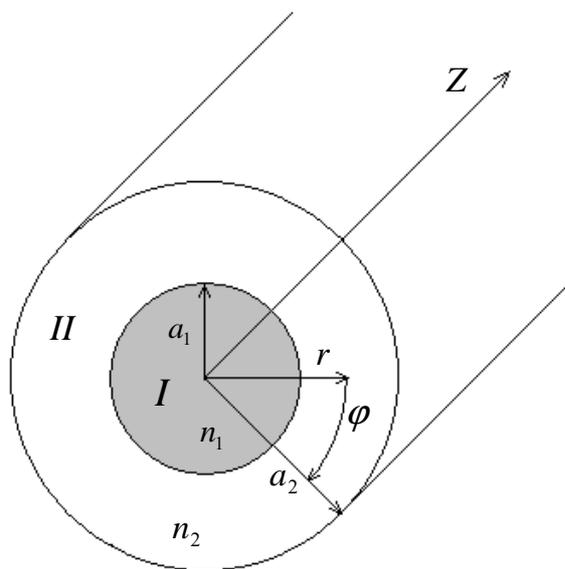


Рис.7.1. Поперечное сечение волокна в оболочке.

Вторая причина использования оболочки связана с механизмом распространения поля в волокне. На определенной частоте волокно способно направлять конечное число типов волн (мод). Если диаметр сердцевины ($2a_1$) много больше длины волны оптического диапазона, то возможно существование большого числа мод, т.к. для многомодовых волноводов справедливо условие $2a_1 \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \gg 1$,

Если желательно ограничить число мод, то это можно сделать выбором радиуса волокна. Размер радиуса сердцевины при одномодовом режиме работы a_1 должен быть как можно меньше. Если нельзя сделать малой величиной радиус a_1 , то делают его несколько микрон, а условием n_1 / n_2 близким к единице, добиваются одномодового режима.

7.2. Поля волн в круглом диэлектрическом волноводе (ДВ)

Будем считать волокно идеальным диэлектриком без потерь, в котором показатель преломления постоянный, сторонние токи отсутствуют и свободные заряды $\rho = 0$. Для выполнения поставленной задачи необходимо решить волновые уравнения (2.24), получить компоненты векторов поля, удовлетворить их граничным условиям. Так как металлические стенки в диэлектрическом волноводе отсутствуют, то возможно существование в нем как гибридных мод (EH , HE), когда одновременно $E_z \neq 0$, $H_z \neq 0$, так и простейших мод (E , H).

Для 1-ой и 2-ой сред, волновые уравнения Гельмгольца (2.24) будут одинаковы по форме, отличия только будут после решения их в константах интегрирования и в поперечных числах, зависящих от диэлектрических проницаемостей и условий конечности полей. Воспользуемся общим решением уравнения Гельмгольца (2.33) из раздела 2

$$F(r, \alpha) = D \cdot J_n(\sqrt{\kappa^2 - \beta^2} \cdot r) e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} = D J_n(g r) e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \quad (7.1)$$

Для нахождения поперечных составляющих поля в разных средах используем инвариантные соотношения (2.12) и (2.13). Найдем поля в каждой среде ДВ.

Область 1– волокно (рис 7.1), для которой параметры имеют вид:

$$r < a_1, \quad n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad \kappa_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_1} = \kappa_0 n_1, \quad g \Rightarrow \chi = \sqrt{\kappa_1^2 - \beta^2} > 0, \quad (7.2)$$

$\beta = k_1 \sin \theta = k_0 n_1 \sin \theta$ (см. рис.6.2), тогда

$$\chi = \kappa_0 \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta} = \kappa_0 n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = k_0 n_1 \cos \theta \quad (7.3)$$

При определении электромагнитных полей в волокне вместо функции F в (7.1) подставляем продольные составляющие $E_{z\phi}$ и $H_{z\phi}$, используем (2.34) для получения других составляющих поля и введем индекс «в» в обозначения составляющих поля волокна. Тогда

$$\begin{aligned} E_{z\phi} &= A J_n(\chi r) e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \\ E_{r\phi} &= -\frac{i}{\chi^2} [A \beta \chi J_n'(\chi r) + i \omega \mu_0 \frac{n}{r} B J_n(\chi r)] \cdot e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \\ E_{\alpha\phi} &= -\frac{i}{\chi^2} [i \beta \frac{n}{r} A J_n(\chi r) - \chi \omega \mu_0 B J_n'(\chi r)] \cdot e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} H_{z\phi} &= B J_n(\chi r) e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \\ H_{r\phi} &= -\frac{i}{\chi^2} [-i \omega \varepsilon_1 \frac{n}{r} A J_n(\chi r) + \chi \beta B J_n'(\chi r)] \cdot e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \\ H_{\alpha\phi} &= -\frac{i}{\chi^2} [\chi \omega \varepsilon_1 A J_n'(\chi r) + i \beta \frac{n}{r} B J_n(\chi r)] \cdot e^{i n \alpha} e^{-i \beta z} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Штрих в функциях Бесселя - дифференцирование их по аргументу χr (рис.7.2).

Область II - оболочка, при $r > a_1$; $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$; $g \Rightarrow \gamma = \sqrt{\kappa_2^2 - \beta^2} < 0$

Поле в оболочке должно уменьшаться с ростом радиуса r , поперечная постоянная в (7.2) должна быть $g < 0$, т.е. должна быть мнимой величиной:

$$g \Rightarrow i\gamma = \pm i\sqrt{\beta^2 - \kappa_2^2}, \text{ т.е. } \beta > \kappa_2 \quad (7.6)$$

Решением уравнения (2.33) для 2-ой области при мнимых аргументах будут модифицированные функции Ханкеля первого рода и второго рода

$$K_n^{(1)}(i\gamma r) = \sqrt{\frac{2}{\pi i \gamma r}} \cdot e^{-\gamma r - i[(n+0,5)\frac{\pi}{2}]} \quad (7.7)$$

$$K_n^{(2)}(-i\gamma r) = \sqrt{\frac{2}{-\pi i \gamma r}} \cdot e^{\gamma r - i[(n+0,5)\frac{\pi}{2}]}$$

В этих функциях аргумент мнимый, при больших его значениях в области $a_1 < r < \infty$ функции становятся пропорциональными: $K_n^{(1)}(i\gamma r) \Rightarrow e^{-\gamma r}$; $K_n^{(2)}(-i\gamma r) \Rightarrow e^{\gamma r}$. Очевидно, только функция $K_n^{(1)}(i\gamma r)$ с экспоненциальным спадом вдоль радиуса с физической точки зрения является подходящей для описания поля мод в оболочке. А функция $K_n^{(2)}(-i\gamma r)$ должна быть отброшена, поскольку она экспоненциально растёт с ростом r . Окончательно поля в оболочке, с индексом «0», будут иметь следующий вид:

$$E_{z0} = CK_n^{(1)}(i\gamma r)e^{in\alpha}$$

$$E_{r0} = -\frac{1}{\gamma^2} [\beta\gamma CK_n^{(1)'}(i\gamma r) + \omega\mu_0 \frac{n}{r} DK_n^{(1)}(i\gamma r)] \cdot e^{in\alpha} \quad (7.8)$$

$$E_{\alpha 0} = -\frac{1}{\gamma^2} [\beta \frac{n}{r} CK_n^{(1)}(i\gamma r) - \gamma\omega\mu_0 DK_n^{(1)'}(i\gamma r)] \cdot e^{in\alpha}$$

$$H_{z0} = DK_n^{(1)}(i\gamma r)e^{in\alpha}$$

$$H_{r0} = -\frac{1}{\gamma^2} [-\omega\varepsilon_2 \frac{n}{r} CK_n^{(1)}(i\gamma r) + \gamma\beta DK_n^{(1)'}(i\gamma r)] \cdot e^{in\alpha} \quad (7.9)$$

$$H_{\alpha 0} = -\frac{1}{\gamma^2} [\gamma\omega\varepsilon_2 CK_n^{(1)'}(i\gamma r) + \beta \frac{n}{r} DK_n^{(1)}(i\gamma r)] \cdot e^{in\alpha}$$

Множитель $e^{-i\beta z}$ в этих уравнениях опущен. Для определения постоянных А,В,С,Д используем **граничные условия** для тангенциальных компонент:

$$\text{при } r=a, \alpha \text{-любом} \begin{cases} E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \\ H_{\tau 1} = H_{\tau 2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} E_{r\theta} = E_{r0} \\ H_{r\theta} = H_{r0} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} E_{\alpha\theta} = E_{\alpha 0} \\ H_{\alpha\theta} = H_{\alpha 0} \end{cases}. \quad (7.10)$$

Подчиняя уравнения (7.4), (7.5) и (7.8), (7.9) граничным условиям, получаем

$$AJ_n(\chi a) = CK_n^{(1)}(i\gamma a) \quad (7.11)$$

$$\frac{\beta}{\chi^2} \frac{n}{a} AJ_n(\chi a) + \frac{i\omega\mu}{\chi} BJ_n'(\chi a) = -\frac{\beta n}{\gamma^2 a} CK_n^{(1)}(i\gamma a) + \frac{\omega\mu}{\gamma} DK_n^{(1)}(i\gamma a) \quad (7.12)$$

$$BJ_n(\chi a) = DK_n^{(1)}(i\gamma a) \quad (7.13)$$

$$-i \frac{\omega\epsilon_1}{\chi} AJ_n'(\chi a) + \frac{\beta}{\chi^2} \frac{n}{a} BJ_n(\chi a) = -\frac{\omega\epsilon_2}{\gamma} CK_n^{(1)}(i\gamma a) + \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{n}{a} DK_n^{(1)}(i\gamma a) \quad (7.14)$$

Если из (7.11) и (7.13) выразить амплитудные коэффициенты С,Д, т.е.

$$C = A \frac{J_n(\chi a)}{K_n^{(1)}(i\gamma a)} \text{ и } D = B \frac{J_n(\chi a)}{K_n^{(1)}(i\gamma a)}, \quad (7.15)$$

и подставить в (7.12) и (7.14), то после преобразования, получим соотношение между амплитудами z-ых компонент электрического и магнитного полей:

$$\frac{B}{A} = \frac{i a \chi \gamma [\epsilon_1 J_n'(\chi a) K_n^{(1)}(i\gamma a) + i \epsilon_2 \chi J_n(\chi a) K_n^{(1)}(i\gamma a)]}{n \omega (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu \beta J_n(\chi a) K_n^{(1)}(i\gamma a)}. \quad (7.16)$$

При проведении преобразований было использовано равенство

$$\chi^2 + \gamma^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu \quad (7.17)$$

7.3. Уравнение собственных значений и дисперсионное уравнение

Из системы однородных уравнений (7.11.6.17) ÷ (7.14.6.20), исключая А,В,С,Д, можно определить постоянную распространения β , составив определитель. Система однородных уравнений имеет решение только в том случае, если определитель этой системы уравнений равен нулю. Условие равенства нулю определителя называется **уравнением собственных значений** для нахождения собственных значений β направляемых мод волнового уравнения Гельмгольца. Составим определитель:

$$\begin{vmatrix}
 A & B & C & D \\
 J_n(\chi a) & 0 & -K_n^{(1)}(i\gamma a) & 0 \\
 \frac{n}{a} \frac{\beta}{\chi^2} J_n(\chi a) & \frac{i\omega\mu}{\chi} J_n'(\chi a) & \frac{n}{a} \frac{\beta}{\gamma^2} K_n^{(1)}(i\gamma a) & -\frac{\omega\mu}{\gamma} K_n^{(1)'}(i\gamma a) \\
 0 & J_n(\chi a) & 0 & -K_n^{(1)}(i\gamma a) \\
 -i \frac{\omega\varepsilon_1}{\chi} J_n'(\chi a) & \frac{n}{a} \frac{\beta}{\chi^2} J_n(\chi a) & \frac{\omega\varepsilon_2}{\gamma} K_n^{(1)'}(i\gamma a) & \frac{n}{a} \frac{\beta}{\gamma^2} K_n^{(1)}(i\gamma a)
 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.18)$$

Вычисление [26] определителя (7.18) приводит к дисперсионному уравнению для определения собственных значений β в виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 a \gamma^2 J_n'(\chi a) \\ \varepsilon_2 \chi J_n(\chi a) \end{bmatrix} + i\gamma a \begin{bmatrix} K_n^{(1)'}(i\gamma a) \\ K_n^{(1)}(i\gamma a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \gamma^2 J_n'(\chi a) \\ \chi J_n(\chi a) \end{bmatrix} + i\gamma a \begin{bmatrix} K_n^{(1)}(i\gamma a) \\ K_n^{(1)'}(i\gamma a) \end{bmatrix} = \left[n \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{\beta \kappa_2}{\chi^2} \right]^2 = D_n \quad (7.19)$$

При проведении преобразований снова была использована формула (7.17).

Функция $K_n^{(1)}(i\gamma r) \Rightarrow K_n^{(1)}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}$ называется функцией Мак-

дональда от мнимого аргумента и при $\gamma \gg 1$ быстро уменьшается (рис. 7.3).

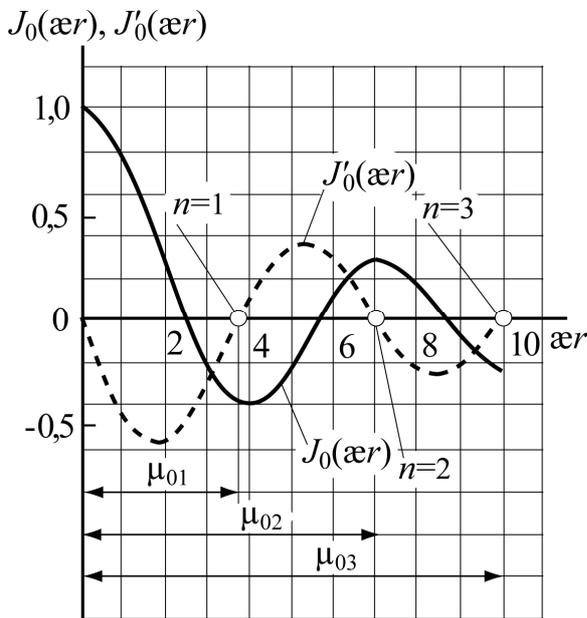


Рис.7.2. Зависимости функции Бесселя нулевого порядка и ее производной от аргумента χr .

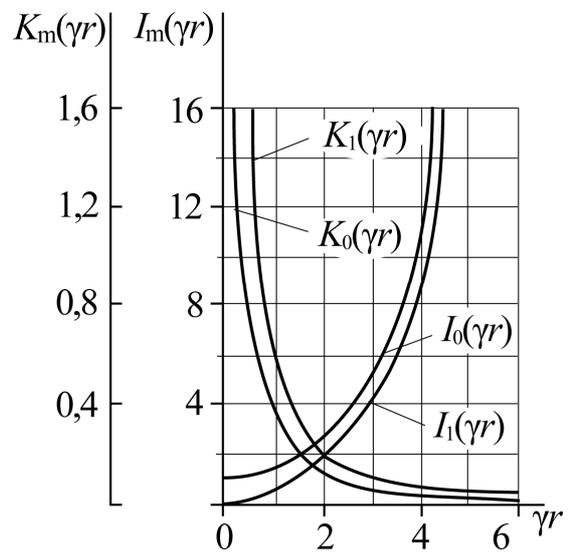


Рис.7.3. Зависимости функции Макдональда первого рода и Ханкеля ($I_0(\gamma r)$, $I_1(\gamma r)$ -второго рода) от аргумента γr .

Дисперсионное уравнение D_n (7.19.6.24) можно получить в более компактной форме. Если ввести обозначения нормированных поперечных [15] чисел

$$\chi a = \bar{\chi}, \quad \gamma a = \bar{\gamma}; \text{ обозначение функциям}$$

$$s_n(\bar{\chi}) = \frac{1}{\bar{\chi}} \frac{J_n'(\bar{\chi})}{J_n(\bar{\chi})}, \quad t_n(\bar{\gamma}) = \frac{-K_n'(\bar{\gamma})}{\bar{\gamma} K_n(\bar{\gamma})}; \quad (7.19a)$$

при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ выражение нормированной частоты в виде

$$F = k_2 a \sqrt{\varepsilon \mu - 1} = \frac{2\pi a}{\lambda_2} \sqrt{\varepsilon \mu - 1} = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (7.19б)$$

соотношение $\frac{\beta^2}{k^2} \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right) = \frac{\bar{\chi}^2 + \varepsilon \mu \bar{\gamma}^2}{\bar{\chi}^2 + \bar{\gamma}^2} \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right) = \frac{\varepsilon \mu}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}$, то получим (7.19в)

$$D_n(\bar{\chi}, \bar{\gamma}) = [\varepsilon \cdot s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})] \cdot [\mu \cdot s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})] - n^2 \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right) \left(\frac{\varepsilon \mu}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right) = 0 \quad (7.20)$$

$$D_1 = [\varepsilon \cdot s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})] \cdot [\mu \cdot s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})],$$

$$D_2 = n^2 \left(\frac{1}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right) \left(\frac{\varepsilon \mu}{\bar{\chi}^2} + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \right), \text{ причем } D_1 = D_2 \quad (7.21)$$

Полученные соотношения (7.19), (7.20) или (7.21) называются **дисперсионными уравнениями** и представляют решение задачи о распространении направляемых мод в оптическом волокне с оболочкой. Но уравнение (7.19) или (7.20) связывают два неизвестных параметра $\bar{\chi}$ и $\bar{\gamma}$. Для их определения необходимо еще одно уравнение. Его мы получим из (7.2) и (7.6), в которых продольное волновое число β для быстрых (в волокне) и медленных (в оболочке) волн имеет одинаковую величину и позволяет записать выражение

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu = \omega^2 \varepsilon_1 \mu - \chi^2 = \beta^2. \quad (7.22)$$

Умножая (7.22) на a^2 , т.е. нормируя, получим

$$(a\gamma)^2 + (a\chi)^2 = (a\omega)^2 \mu (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (a\omega)^2 \mu \varepsilon_0 (n_1^2 - n_2^2) \quad (7.23)$$

или $\gamma(\bar{\gamma})^2 + (\bar{\chi})^2 = \bar{R}^2 = (R \cdot a)^2$, где $R^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0 (n_1^2 - n_2^2)$

Совместное решение уравнений (7.20) или (7.21) и (7.23), позволяет определить значения поперечных чисел $\bar{\gamma}, \bar{\chi}$, продольного числа - β из (7.22), и,

следовательно, параметров волны. Решение будет рассмотрено дальше.

7.4. Анализ дисперсионного уравнения

1. В круглом диэлектрическом волноводе в общем случае при разных $n \geq 1$ существуют все шесть составляющих электромагнитного поля (7.4), (7.5). Такие поля называют гибридными модами и обозначают EH_{nm} или HE_{nm} . Индексу n соответствует изменение поля по угловой координате. Индекс m означает номер корня функции Бесселя (вводится далее, рис.7.2 и таблица 1) и дает изменение полей по радиусу. Каждому значению индекса n соответствует два решения дисперсионного уравнения (7.20), отличающихся отношением коэффициентов B/A в (7.16):

$$\frac{E_z(r, \alpha)}{H_z[r, \pi/(2n)]} = \frac{B}{A} = Z_{02} \frac{\mu s_n(\chi a) - t_n(\gamma a)}{n \left(\frac{1}{\chi a^2} - \frac{1}{\gamma a^2} \right) \frac{\beta}{\kappa_2}} = Z_{02} \sqrt{\frac{\mu s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})}{\varepsilon s_n(\bar{\chi}) - t_n(\bar{\gamma})}} = Z_{02} M \quad (7.24)$$

где Z_{02} волновое сопротивление для 2-й среды. Численный анализ показывает, что для одного из решений дисперсионного уравнения значение квадратного корня меньше, а для другого больше единицы. Если $M < 1$, то гибридная волна обозначается HE_{nm} , если $M > 1$, то тип EH_{nm} .

2. Частным случаем решения задачи о полях в круглом диэлектрическом волноводе является случай $n=0$, отсутствие изменений поля моды по углу α , поля такие называются симметричными. Тогда в соотношении (7.19) правая часть оказывается равной нулю. При этом (7.19) распадается на два различных уравнения *собственных значений*: для поперечно-электрических (**TE**) и поперечно-магнитных (**TM**) - мод.

$$\text{TM-моды} \quad \frac{\varepsilon_1 \gamma J_1(\chi a)}{\varepsilon_2 \chi J_0(\gamma a)} + i \frac{K_1^{(1)}(i\gamma a)}{K_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0 \quad (7.25)$$

$$\text{TE-моды} \quad \frac{\gamma J_1(\chi a)}{\chi J_0(\gamma a)} + i \frac{K_1^{(1)}(i\gamma a)}{K_0^{(1)}(i\gamma a)} = 0 \quad (7.26)$$

Здесь использовано для преобразования производных соотношение $Z_0^1 = -Z_1$, справедливое для любых цилиндрических функций.

Чтобы показать, что (7.26) соответствует моде TE , надо положить $n=0$, тогда в (7.16) амплитуда $B=\infty$. Чтобы сохранить B конечным, необходимо $A=0$. Это означает, что в (7.4) продольная компонента E_z обращается в нуль, т.е. мода, становится типа H или TE , и удовлетворяет уравнению собственных значений (7.26)

Если удовлетворяется (7.25), необходимо сначала воспользоваться равенством (7.20), чтобы исключить в (7.16) n в знаменателе. В результате этих преобразований получается одинаковое для обеих симметричных мод уравнение

$$B = in \frac{\omega(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\beta J_n(\chi a) K_1^{(1)}(i\gamma a)}{\chi \gamma a [\gamma J_n'(\chi a) K_1^{(1)}(i\gamma a) + i\chi J_n(\chi a) K_1^{(1)'}(i\gamma a)]} A. \quad (7.16б)$$

Составляющие полей получаются из (7.4), (7.5), (7.8), (7.9) и, очевидно, для электрического типа это $E_{re}, E_{ze}, H_{\phi e}$, для магнитного - $H_{re}, H_{ze}, E_{\phi e}$.

3. Важным параметром любой моды является **частота отсечки, или граничная, или критическая частота**, на которой перестает существовать (отсекается) мода как физическая волновая структура. Поле этой моды в оболочке на граничной частоте больше не уменьшается по экспоненте при удалении от волокна. Степень уменьшения поля с увеличением радиуса определяется величиной γ и функцией $K_n^{(1)}(\gamma r)$. При больших значениях γ функция экспоненциально падает (рис.7.3), а поле оказывается сконцентрированным внутри волокна и немного в оболочке. С уменьшением γ поле волновода переходит в пространство оболочки, т.е. оказывается вне волокна. При $\gamma=0$ поле почти выходит из волокна в оболочку (7.6). Частота, при которой это происходит, и называется частотой отсечки и определяется условием $\gamma = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} = 0$, а после подстановки

в (7.22) $\chi_c = \frac{\omega_c}{v_2} = \frac{2\pi f_c}{(\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mu_0})^{-1}}$, критическая частота равна

$$f_c = \frac{\chi_c a}{2\pi a \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mu_0}} = \frac{c}{\lambda_c} \quad (7.27)$$

В таблице 7.1 приведены функции и их корни, определяющие критический режим наиболее часто используемых мод, а также выражения длин волн и частот критического режима.

Таблица 7.1. Соотношения для критического режима всех мод .

Значения n	Моды E_{nm}, H_{nm}	Функция для определения f_c	Номер корня функции b_{nm}	Значение корня функции $b_{nm} = \chi_c a$	Формула критической длины волны или частоты
0	TE_{0m}, TH_{0m} $m \geq 1$	$J_0(\chi_c a) = 0$	b_{01}	2,045	$\lambda_{c0m} = \frac{2\pi a}{b_{0m}} \sqrt{\epsilon_{1r} - 1}$
			b_{02}	5,52	
			b_{03}	8,654	
1	$HE_{10}, EH_{1m}, HE_{1m}$ $m \geq 1$	$J_1(\chi_c a) = 0$	b_{11}	0	$\lambda_{c11} = \infty$
			b_{12}	3,83	$\lambda_{c1m} = \frac{2\pi a}{b_{1m}} \sqrt{\epsilon_{1r} - 1}$
			b_{13}	7,02	$f_c = c / \lambda_c$
			b_{21}	2,445	$\lambda_{cmm} = \frac{2\pi a}{b_{mm}} \sqrt{\epsilon_{1r} - 1}$
b_{22}	5,538				
2, 3,	EH_{nm}	$J_n(\chi_c a) = 0$	b_{23}	8,417	$f_c = \frac{\chi_c a}{2\pi a \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu}}$
			b_{31}	10,173	

4. Основным типом волны называется мода, критическая частота которой минимальная или равна нулю (или критическая длина волны которой равна бесконечности). Из таблицы 7.1, видно, что в ДВ основным является гибридный тип волны HE_{10} ($\lambda_{c11} = \infty$). Ближайшими к нему будут моды TE_{01} и TH_{01} .

5 Фазовая скорость волн определяется с учетом (7.2), (7.19), (7.22)

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_2 \cdot k_2}{\beta} = \frac{v_2}{\sqrt{1 + (\gamma/k_2)^2}} = v_2 \sqrt{\frac{\chi^2 + \bar{\gamma}^2}{\chi^2 + \epsilon_r \mu_r \bar{\gamma}^2}} \quad (7.28)$$

$$\text{где } \gamma^2 + \omega^2 \epsilon_2 \mu = \beta^2, \quad (k_2 a)^2 = \frac{\bar{\chi}^2 + \bar{\gamma}^2}{\epsilon_r \mu_r - 1},$$

$$(\beta a)^2 = (k_2 a)^2 + \bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{\chi}^2 + \bar{\gamma}^2}{\epsilon_r \mu_r - 1} + \bar{\gamma}^2 = \frac{\bar{\chi}^2 + \epsilon_r \mu_r \bar{\gamma}^2}{\epsilon_r \mu_r - 1}$$

При $(\frac{\gamma}{\chi})^2 \leq 0,01$ можно пользоваться выражением для скорости в виде

$$v_\phi = v_2 [1 - 0,5(\epsilon_r \mu_r - 1) \cdot (\gamma/\chi)^2] \quad (7.29)$$

7.5. Параметры основного типа волны HE₁₀ в ДВ

Граничный радиус круглого ДВ на моде HE₁₀ определяется равенством

$$\gamma r_0 = 1, \text{ откуда } r_0 = 1/\gamma = a/\bar{\gamma}. \quad (7.30)$$

Напряженность поля в оболочке при удалении от волокна убывает сначала быстро при малых расстояниях, а потом по экспоненте, но при больших расстояниях медленнее, чем по экспоненте. Поэтому границей зон быстрого и медленного спада поля, согласно функции Макдональда (рис.7.3), принимается $\gamma r_0 = 1$. Граничный радиус не должен быть очень большим, разумной величиной считается $r_0 \leq 1000 a$ или $\bar{\gamma} \geq 10^{-3}$.

Другим критерием для r_0 должно быть требование, чтобы фазовая скорость в волокне (7.28) была меньше v_2 скорости в оболочке хотя бы на 0,01%, что приводит (даже при $\varepsilon_{1r} = 2 \div 2,5$) к условию $\bar{\gamma} \geq 0,04\bar{\chi}$,

Нижняя f_n частота рабочего диапазона определяются формулой

$$f_n = 0,9c / (2\pi a \sqrt{\varepsilon_{1r} - 1}) \quad (7.31)$$

Верхняя f_e частота устанавливается из условия распространения одной моды, т.е. исключением двух мод TE₀₁ и TH₀₁: $f_e < f_{c\text{ TH } 01, \text{ TE } 01}$.

Интервал рабочих частот или длин волн основной моды в ДВ определяются (с учетом данных таблицы 7.1) неравенствами:

$$0,9c / (2\pi a \sqrt{\varepsilon_{1r} - 1}) < f_{\text{ HE } 10} < \frac{2,405c}{2\pi a \sqrt{(\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r})}}. \quad (7.32)$$

$$\lambda_{c\text{ TE } 01, \text{ TH } 01} < \lambda < \infty ;$$

$$\frac{2\pi a \sqrt{(\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r})}}{2,405} < \lambda < \infty$$

Радиус волокна для работы на заданной частоте f_0 моды HE₁₀ можно определить, для чего надо удовлетворить следующему неравенству

$$f_0 = f_{\text{ HE } 10} < f_{c\text{ TH } 01, \text{ TE } 10} = \frac{2,405}{2\pi a \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\mu}.$$

Возьмем заданную рабочую частоту меньше критической на 20÷30%, т.е. равенство можно удовлетворить, если принять $f_0 = f_{c\text{ TE } 10} / (1,2 - 1,3)$. Тогда

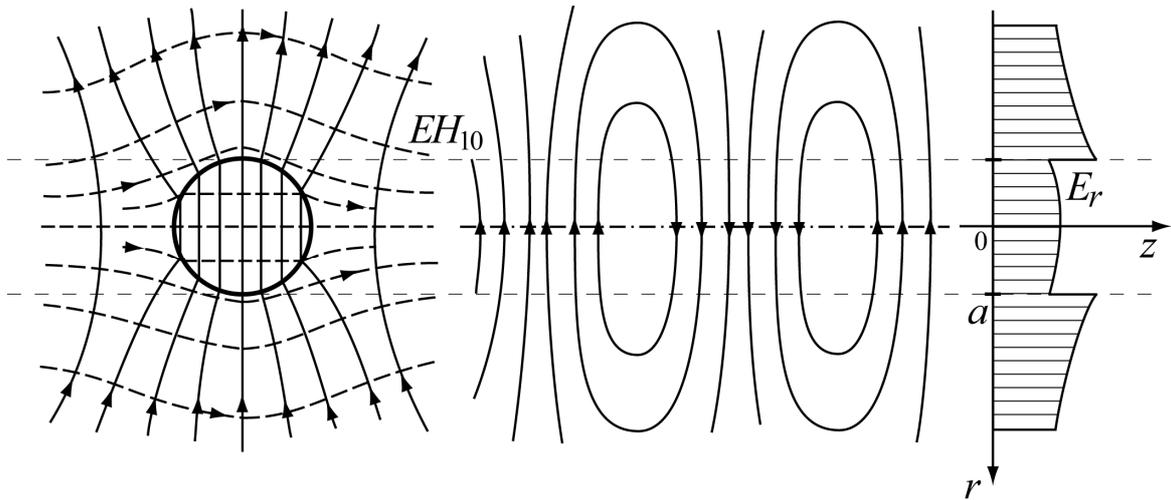


Рис. 7.4. Структура электромагнитного поля гибридной моды HE_{10}

$$f_0 = \frac{2,405}{(1,2 - 1,3) \cdot 2\pi a \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu}} = \frac{2,405 c}{(2,4 \div 2,6) \cdot \pi a \sqrt{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{2r})}}; \quad (7.33)$$

$$a = \frac{(0,319 \div 0,295) \cdot c}{f_0 \sqrt{(\epsilon_{r1} - \epsilon_{2r})}}$$

Полоса рабочих частот на моде HE_{10} определяется из неравенства (7.32)

$$0,9c / (2\pi a \sqrt{\epsilon_{1r} - 1}) < f_{0HE10} < \frac{2,405c}{2\pi a \sqrt{(\epsilon_{1r} - \epsilon_{2r})}}]. \quad (7.32a)$$

С повышением частоты за предел (7.32a) появляются симметричные моды H_{01} и E_{01} , полоса рабочих частот которых находится в пределах неравенств

$$\frac{2,405}{2\pi a \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu}} < f_{H_{01}, E_{01}} < \frac{3,83}{2\pi a \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mu}} \quad (7.34)$$

Для симметричных волн H_{01} и E_{01} радиус волокна находится из условия

$$2,405 \frac{c}{f} < a_{H_{01}, E_{01}} < 3,83 \frac{c}{f}. \quad (7.35)$$

Структура поля основной гибридной моде HE_{10} приведена на рис 7.4.

7.6. Решение дисперсионного уравнения (7.19) или (7.20)

а) для заданных величин частоты, параметров среды ω_0, ϵ, μ и индекса n типа волны определяется R из (7.23);

б) задается ряд нормированных значений $\chi a = \bar{\chi}$ от нуля до пяти (например) с небольшим шагом, и с помощью (7.23) для найденного R , определяется ряд зна-

чений $a\gamma = \bar{\gamma}$ и строится четверть окружности радиуса R (7.23б) в координатах $\bar{\chi}$ (по горизонтали), $\bar{\gamma}$ (по вертикали);

в) построение дисперсионной зависимости проводим по уравнению (7.20) или (7.19). Будем использовать тот же ряд задаваемых значений $\chi a = \bar{\chi}$ для нахождения функции $s_n(\bar{\chi})$ с помощью (7.19а) и рис.7.2 и для соответствующих найденных значений $a\gamma = \bar{\gamma}$, определяем функции $t_n(\bar{\gamma})$ из (7.19а) и рис.7.3. Подставив все величины в (7.21), находим D_1, D_2 .

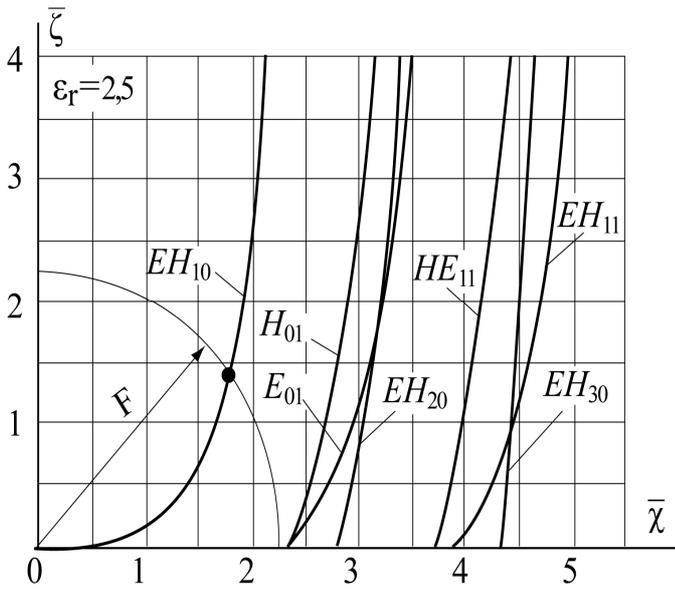


Рис.7.5. К решению дисперсионных уравнений.

г) если $D_1 \neq D_2$, то изменяем величину $a\gamma = \bar{\gamma}$ около найденных соответствующих значений так, чтобы функции $D_1 = D_2$ уравнились. Равенство $D_1 = D_2$ определяет конкретную величину $a\gamma$, соответствующую величине χa . Наносим полученные точки расчета значений $\bar{\chi}, \bar{\gamma}$ на плоскость, где построена четверть окружности, и проводим зависимость (7.20). Да-

лее, находится точка пересечения кривой четверть окружности и кривой дисперсионного уравнения (7.19) или (7.20). На рис.7.5 приведены решения дисперсионного уравнения для разных типов волн в круглом диэлектрическом волноводе.

д) из (7.22) находится соответствующее значение $\beta a = \bar{\beta}$, величина фазовой скорости из (7.28), длина волны в волокне.

7.7. Распределение мощностей в волноводе

Поток энергии, передаваемый по волноводу, распределяется между волокном и оболочкой. Интегрируя вектора Пойнтинга по поперечному сечению

каждой из этих областей, получаем переносимую мощность и коэффициент локализации моды ξ

$$P_e = P_1 = \int_{S1} \bar{\Pi} \cdot d\vec{S}; P_0 = P_2 = \int_{S2} \bar{\Pi} \cdot d\vec{S}, \xi = P_1 / P_2. \quad (7.36)$$

С ростом частоты концентрация поля в волокне увеличивается, поэтому коэффициент ξ будет изменяться от нуля на граничной частоте до бесконечности на очень высоких частотах.

Для ДВ круглого сечения среднее по времени значение мощности через площадку dS , нормальную к направлению распространения волны равно

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \operatorname{Re} \int_{r=0}^a [E_r H_\alpha^* - E_\alpha H_r^*] r dr \cdot d\alpha, P_2 = \pi \int_{r=a}^{\infty} \operatorname{Re} [E_r H_\alpha^* - E_\alpha H_r^*] \cdot r dr$$

Для основного типа волны HE_{10} можно предложить следующую формулу для компьютерного расчета коэффициента локализации моды $\xi_{HE_{10}}$.

$$\xi_{HE_{10}} = \frac{\bar{\gamma}^2 \left[\frac{K_1(\bar{\gamma})}{J_1(\bar{\chi})} \right]^2}{\bar{\chi}^2} \frac{CDA + C_1 D_1 B}{CNA_1 + C_1 N_1 B}, \quad (7.37)$$

где $A = [J_0^2(\bar{\chi}) + J_1^2(\bar{\chi})], B = [J_2^2(\bar{\chi}) - J_1(\bar{\chi}) \cdot J_3(\bar{\chi})],$
 $A_1 = [K_0^2(\bar{\gamma}) + K_1^2(\bar{\gamma})], B_1 = [K_1^2(\bar{\chi}) - K_1(\bar{\chi}) \cdot K_3(\bar{\chi})]$

$$C = \frac{c}{v_1} \sqrt{a_1} + 1, C_1 = \frac{c}{v_1} \sqrt{a_1} - 1, D = (\varepsilon_{1r} \frac{v_1}{c} \sqrt{a_1} + 1), D_1 = (\varepsilon_{1r} \frac{v_1}{c} \sqrt{a_1} - 1),$$

$$N = (\frac{v_1}{c} \sqrt{a_1} + 1), N_1 = (\frac{v_1}{c} \sqrt{a_1} - 1), \text{ где } a_1 = \frac{s_1(\bar{\chi}) + t_1(\bar{\gamma})}{\varepsilon_{1r} \cdot s_1(\bar{\chi}) + \varepsilon_{1r} \cdot t_1(\bar{\gamma})}, \text{ а величины}$$

$$s_1(\bar{\chi}) = \frac{J_1'(\bar{\chi})}{\bar{\chi} J_1(\bar{\chi})}, t_1(\bar{\gamma}) = \frac{K_1'(\bar{\gamma})}{\bar{\gamma} K_1(\bar{\gamma})}.$$

На рис.7.6 приведены кривые, характеризующие зависимости $\xi_{HE_{10}}$ от $\frac{a}{\lambda}$ для разных отношений $\varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$. Используя математическую модель для расчета коэффициента локализации моды студент для своих заданных параметров и типа волны может рассчитать зависимость $\xi(\frac{a}{\lambda})$.

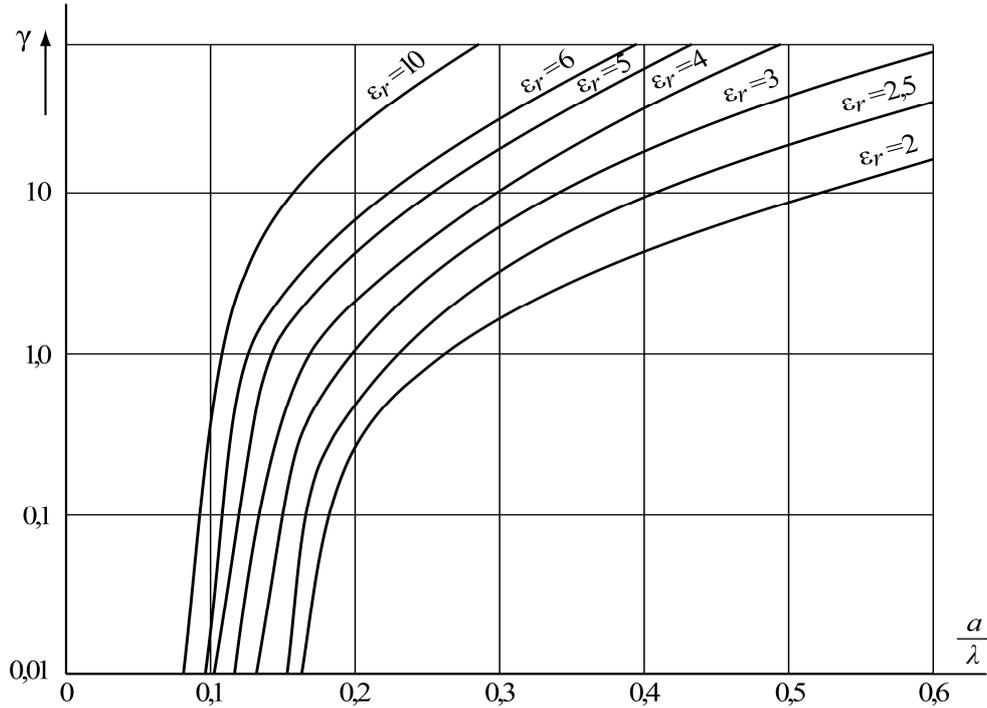


Рис.7.6. Зависимости коэффициента локализации моды от $\frac{a}{\lambda}$ при разных ϵ_r .

7.8. Поля симметричных мод E_{01} - и H_{01} в ДВ

Переход от продольных составляющих поля к поперечным осуществляется с помощью формул (2.12), (2.13), (2.34) и выражений (7.4), (7.5) и (7.8), (7.9)

Для волн электрического типа, $H_z=0$:

$$E_r = -i \frac{\beta}{\chi^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} e^{-ihz}; \quad E_\varphi = -i \frac{\beta}{r\chi^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial \varphi} e^{-ihz}; \quad E_z = E_{z0} e^{-ihz};$$

$$H_r = i \frac{\omega \epsilon_a}{r\chi^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial \varphi} e^{-ihz}; \quad H_\varphi = -i \frac{\omega \epsilon_a}{\chi^2} \frac{\partial E_{z0}}{\partial r} e^{-ihz}; \quad H_z = 0.$$

Для волн магнитного типа, $E_z=0$:

$$H_r = -\frac{\beta}{\chi^2} \frac{\partial H_{z0}}{\partial r} e^{-j\beta z}; \quad H_\varphi = -i \frac{\beta}{r\chi^2} \frac{\partial H_{z0}}{\partial \varphi} e^{-j\beta z};$$

$$H_z = H_{z0} e^{-j\beta z}; \quad E_r = -i \frac{\omega \mu_a}{r\chi^2} \frac{\partial H_{z0}}{\partial \varphi} e^{-j\beta z}; \quad E_\varphi = -i \frac{\omega \mu_a}{\chi^2} \frac{\partial H_{z0}}{\partial r} e^{-j\beta z}; \quad E_z = 0.$$

Составляющие поля волны H_{01} , добавлен индекс μ в обозначения проекций:

для внутренней области записываются:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{r1\mu} &= -i \frac{\beta}{\chi} J_0'(\chi r) B e^{-i\beta z}; \dot{H}_{\phi1\mu} = 0; \dot{H}_{z1\mu} = J_0(\chi r) B e^{-i\beta z}; \dot{E}_{r1\mu} = 0; \\ \dot{E}_{\phi1\mu} &= i \frac{\omega \mu_a}{\chi} J_0'(\chi r) B e^{-i\beta z}; \dot{E}_{z1\mu} = 0: \end{aligned} \quad (7.38)$$

для внешней области волновода:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{r2\mu} &= i \frac{\beta}{\gamma} K_0'(\gamma r) D e^{-i\beta z}; \dot{H}_{\phi2\mu} = 0; \dot{H}_{z2\mu} = K_0(\gamma r) D e^{-i\beta z}; \dot{E}_{r2\mu} = 0; \\ \dot{E}_{\phi2\mu} &= -i \frac{\omega \mu_0}{\gamma} K_m'(\gamma r) D e^{-i\beta z}; \dot{H}_{z2\mu} = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Удовлетворяя граничным условиям у поверхности диэлектрического стержня уравнения (7.38) и (7.39), получим дисперсионное уравнение (7.26)

$$\frac{\mu_a J_0'(\chi a)}{\chi J_0(\chi a)} = - \frac{\mu_0 K_0'(\gamma a)}{\gamma K_0(\gamma a)} \quad (7.40)$$

Из выражения для продольного волнового числа

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \chi^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \gamma^2} \text{ найдём связь между } \chi \text{ и } \gamma.$$

Помножив его на a^2 и перегруппировав члены, получаем:

$$(\gamma a)^2 + (\chi a)^2 = (\omega a)^2 (\mu_a \varepsilon_0 - \mu_0 \varepsilon_a) \quad (7.41)$$

Величины χ и γ находим, решая графически уравнения (7.40) и (7.41),

полагая при этом, что критическая частота равна $f_c = \frac{\chi_c a}{2\pi a \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mu_0}}$;

$$\chi_c a = 2,405 = b_{01}; \omega = 2\pi f = 2\pi c / \lambda; \omega_{кр} = 2\pi f_c = \frac{b_{01} \cdot c}{a(\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0)};$$

$\omega_{кр} = \frac{2\pi c \cdot 1,2}{\lambda}$; $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$; $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$. Откуда радиус волновода равен

$$a = \frac{b_{01} \cdot c}{\frac{2 \cdot \pi \cdot c \cdot 1,2}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)}.$$

7.9. Построение структуры поля симметричной моды H_{01}

Построение структуры поля, как известно, проводится по эпюрам или по уравнению силовых линий электромагнитного поля (6.56) в волноводе. Прове-

дем построение поля по эпюрам. Для этого запишем составляющие поля быстрой волны (в волокне) типа - H_{01} :

$$\begin{aligned}\dot{H}_{r1\mu} &= -i\frac{\beta}{\chi}J'_0(\chi r)Be^{-i\beta z}; & H_{\varphi1\mu} &= 0; \\ \dot{H}_{z1\mu} &= J_0(\chi r)Be^{-i\beta z}; & E_{r1\mu} &= 0; \\ \dot{E}_{\varphi1\mu} &= i\frac{\omega\mu_a}{\chi}J'_0(\chi r)Be^{-i\beta z}; & E_{z1\mu} &= 0;\end{aligned}$$

Введем обозначения в эти уравнения $\frac{\beta}{\chi}B = A_1$; $\frac{\omega\mu_a}{\chi}B = A_2$. Тогда:

$$\dot{H}_r = -iA_1J'_0(\chi r)e^{-i\beta z} = A_1J'_0(\chi r)e^{-i(\beta z + \frac{\pi}{2})} \quad \dot{H}_z = BJ_0(\chi r)e^{-i\beta z}, \quad \dot{E}_\varphi = iA_2J'_0(\chi r)e^{-i\beta z}$$

Приведенные выражения записаны через комплексные амплитуды поля. Чтобы построить картину поля в волноводе, надо от комплексных амплитуд поля перейти к мгновенным значениям и далее зафиксировать время.

Переход осуществляется с помощью следующих формул:

$$H_r(t) = \text{Re}(H_r e^{i\omega t}), \quad H_z(t) = \text{Re}(H_z e^{i\omega t}), \quad E_\varphi(t) = \text{Re}(E_\varphi e^{i\omega t})$$

Преобразуем исходные уравнения

$$H_r(t) = \text{Re}\left(-A_1J'_0(\chi r)e^{i(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2})}\right) = \text{Re}\left[\left(-A_1J'_0(\chi r)\left[\cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\omega t - \beta z)\right]\right)\right]$$

$$H_z(t) = \text{Re}\left(J_0(\chi r)Be^{i(\omega t - \beta z)}\right) = \text{Re}\left[\left(BJ_0(\chi r)\left(\cos(\omega t - \beta z) + i\sin(\omega t - \beta z)\right)\right)\right]$$

$$E_\varphi(t) = \text{Re}\left(iA_2J'_0(\chi r)e^{i(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2})}\right) = \text{Re}\left[\left(iA_2J'_0(\chi r)\left[\cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\omega t - \beta z)\right]\right)\right]$$

Отбрасывая мнимые части, получаем мгновенные значения составляющих полей в волокне для моды H_{01} :

$$\begin{aligned}H_r(r, z, t) &= A_1J'_0(\chi r)\sin(\omega t - \beta z) = A_1J_1(\chi r)\sin(\omega t - \beta z) \\ H_z(r, z, t) &= BJ_0(\chi r)\cos(\omega t - \beta z) = BJ_0(\chi r)\cos(\omega t - \beta z) \\ E_\varphi(r, z, t) &= -A_2J'_0(\chi r)\sin(\omega t - \beta z) = -A_2J_1(\chi r)\sin(\omega t - \beta z)\end{aligned}\tag{7.42}$$

Теперь следует зафиксировать время, например, положим $t=0$.

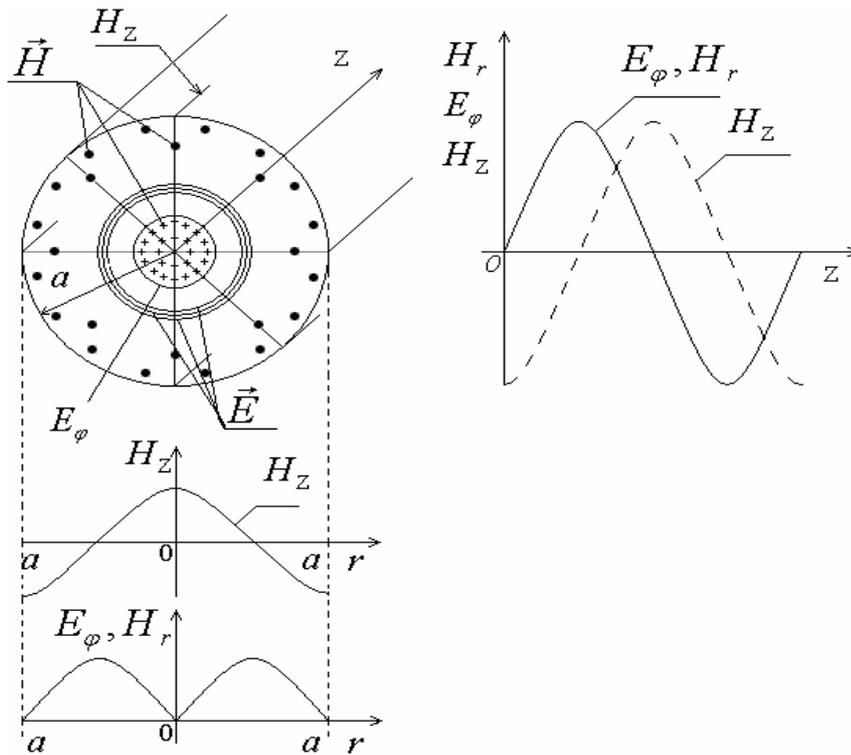


Рис.7.7. Структура поля для симметричной моды H_{01}

По полученным соотношениям можно построить эпюры, а по ним картину поля – структуру – внутри волновода (рис.7.7). Эпюра это график зависимости функции распределения составляющей вектора поля в заданной плоскости. Например, на рисунке 7.7 внизу, изображены эпюры составляющих полей в

плоскости поперечного сечения при изменении поперечной координаты, в данном случае радиуса в пределах $0 \leq r \leq a$, изменение угла $0 < \varphi < 2\pi$ дает симметричную картину. На рисунке справа представлены эпюры составляющих полей вдоль продольной оси z . Виден сдвиг между поперечными и продольной составляющими.

Проделав преобразования (7.42) с выражениями для медленных волн в оболочке (7.39), получаем при $t = 0$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H_{r2}(r, z) &= A_3 K_0'(\gamma r) \sin(\beta z); & H_{z2}(r, z) &= DK_0(\gamma r) \cos(\beta z); \\ E_{\varphi 1}(r, z) &= -A_4 K_0'(\gamma r) \sin(\beta z) \end{aligned} \quad (7.43)$$

По этим соотношениям можно построить, используя значения функций $K_0(\gamma r)$ и $K_0'(\gamma r)$ рис 7.3, картину полей в оболочке волновода при изменении радиуса в пределах $a < r < \infty$ для найденного γ . Из соотношений (7.43) видно, что поле вне волновода затухает в соответствии с поведением функции $K_0(\gamma r)$ и $K_0'(\gamma r)$.

8. Резонаторы оптического диапазона

8.1. Общие сведения о резонаторах

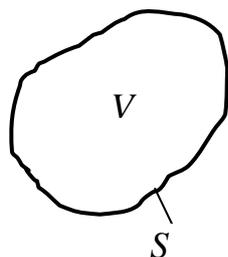
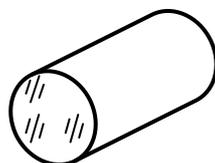
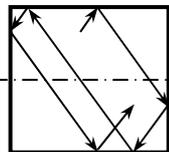


Рис. 8.1
Объёмный
резонатор.



а)



б)

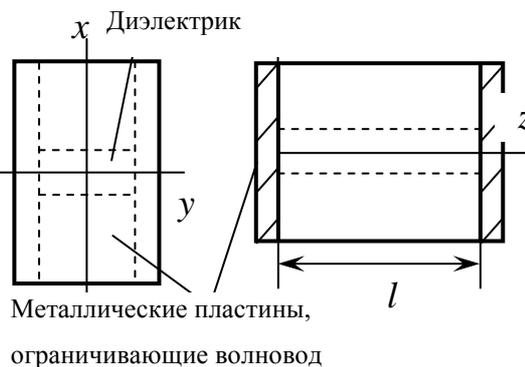


Рис. 8.3 Диэлектрический резонатор между металлическими пластинами в разных плоскостях.

Объёмным резонатором называется совокупность металлических и (или) диэлектрических тел, внутри или вблизи которых концентрируется переменное электромагнитное поле. Область существования этого поля V можно отделить от остального пространства условной границей S , излучение энергии через которую отсутствует или очень незначительно (рис. 8.1). Количество энергии, запасённой в электромагнитном поле объёмного резонатора, зависит от частоты. Вблизи некоторых частот (длин волн), называемых собственными, количество запасённой энергии, так же как и в колебательном контуре вблизи его резонансной частоты, резко увеличивается. Поэтому резонатор – это колебательный контур для диапазона СВЧ или оптического диапазона. В сантиметровом, миллиметровом диапазоне волн резонаторы имеют замкнутую металлическую оболочку, внутри которой сосредоточено электромагнитное поле. Поэтому они называются *закрытыми* или *полыми*. Наряду с ними существуют *открытые резонаторы*, электромагнитное поле которых сосредоточено в определённом пространстве, но быстро убывает при удалении из этого пространства или от поверхности тел, образующих резонатор. К открытым резонаторам относятся диэлектрические (рис. 8.2), диэлектрические в металлическом экране (рис. 8.3), зеркальные для оптического диапазона волн (рис. 8.4). Типы колебаний в резо-

наторах обозначаются E_{mnp} , H_{mnp} и TEM_{mnp} , где индекс p означает число полуволн вдоль продольной оси, m , n – число изменений соответствующей функции вдоль поперечных осей. Если индексы m , n , p имеют малые значения, то колебания называются простейшими типами.

Основные размеры объёмного резонатора или собственные длины волн простейших типов колебаний имеют одинаковый порядок по величине при параметрах заполняющей среды $\epsilon \sim \epsilon_0$ и $\mu \sim \mu_0$. На основании этого можно утверждать, что в сантиметровом диапазоне волн резонатор должен иметь вдоль любой оси размеры, исчисляемые сантиметрами, в миллиметровом диапазоне – миллиметрами и, наконец, в оптическом – микронами.

Совершенно ясно, что резонаторы с простейшими типами колебаний E_{mnp} или H_{mnp} в оптическом диапазоне и даже в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн неприменимы. Нужно применять резонаторы с высшими типами колебаний (индексы m , n , p больших значений), которые характеризуются более высокими собственными частотами, и соответственно, размерами много больше длины волны. Но с увеличением индексов собственные частоты соседних типов колебаний будут отличаться друг от друга незначительно. В результате чего наступает эффект перекрытия резонансных кривых разных мод и резонатор теряет свои резонансные свойства. Именно такая картина наблюдается и используется в резонаторах микроволновых печей (см. глава 10). Это утверждение справедливо для любых резонаторов при $p \gg 1$.

Совокупность собственных частот образуют спектр резонатора. Число колебаний ΔN , приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$, определяется формулой Релея-Джинса

$$\Delta N = \frac{V}{2\pi^2 v^3} \omega^2 \Delta\omega, \quad (8.1)$$

где V – объём резонатора; $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ – скорость распространения электромагнитной волны в среде резонатора. Из (8.1) вытекает, что при постоянном объёме ре-

резонатора по мере повышения частоты число собственных колебаний, расположенных в единичной полосе частот, непрерывно увеличивается. В конце концов спектр собственных частот резонатора становится весьма плотным, т.е. разность между соседними значениями резонансных частот ω_{mnp} оказывается ничтожно малой.

Если резонатор необходимо использовать в качестве колебательной системы, то следует сделать спектр собственных частот более редким. Это можно осуществить путём удаления боковых стенок, для которого (8.1) примет другой вид

$$\Delta N = \frac{2l}{\pi c} \Delta \omega .$$

Таким способом резонатор стал *открытым*. Физически возник-

новение колебаний того или иного типа в объёмных резонаторах можно трактовать как результат многократных отражений электромагнитной волны от стенок, при этом каждому типу колебаний соответствует строго определённый ход лучей отражённой волны. Если в резонаторе боковые стенки удалить, то в нём, очевидно, могут существовать лишь те типы колебаний, которые образуются путём отражения волны от торцевых стенок. Все другие типы колебаний при этом исчезнут. В результате спектр собственных частот открытого резонатора оказывается более редким по сравнению со спектром замкнутого резонатора.

Основными параметрами любого резонатора являются: *резонансная частота, собственная добротность, резонансная проводимость*. При разработке резонаторов необходимо параметры его связать с геометрией для заданного типа колебаний. Далее будут изложены вопросы теории некоторых резонаторов для оптического (диэлектрический и открытый резонаторы) и СВЧ диапазонов (цилиндрический для СВЧ печей и призматический), позволяющие выполнить курсовую работу по разработке резонаторов.

8.2. Фазовое условие резонанса и длина резонатора

Условием резонанса (условием образования стоячих волн в любых резонаторах) является синфазное сложение волн в любом сечении линии, т.е. полный сдвиг по фазе ($\Delta\varphi$) должен быть кратен целому числу $2\pi p$.

$$\Delta\varphi = \beta l + \varphi_{np} + \beta l + \varphi_{л} = 2\pi p, \quad (8.2)$$

где $\varphi_{np}, \varphi_{л}$ – сдвиг фазы волны при её отражении от правого и левого торца, равен нулю при отражении от металла или от идеально отражающей поверхности; l – длина резонатора; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\partial}}$ – параметр волны, λ_{∂} – длина волны в среде,

p - целое число. Из (8.2) получаем $\Delta\varphi = 2\beta l = 2\pi p$, откуда $\frac{2\pi}{\lambda_{\partial}} l = \pi p$ или

$$\lambda_{\partial p} = \frac{2l}{p}, \text{ или } l = p \frac{\lambda_{\partial}}{2} \quad (8.3)$$

Вывод: длина резонатора l кратна числу резонансных полуволн, и может быть определена, если известна длина волны в среде. Собственная резонансная частота резонатора с учетом (8.3) равна

$$f_{op} = \frac{v_{\partial}}{\lambda_{\partial p}}; f_{op} = \frac{v_{\partial} p}{(2l)}, \quad (8.4)$$

где v_{∂} – скорость волны в диэлектрической среде.

8.3. Диэлектрические резонаторы

Тема курсовой работы: **Рассчитать призматический диэлектрический резонатор.** Технические данные: Рабочая длина волны λ мкм.;

Параметры диэлектрического слоя: ϵ_r ; Тип колебания в резонаторе H_{m0p} .

В работе необходимо: получить выражение для составляющих векторов заданного типа колебания в резонаторе, воспользовавшись решением волнового уравнения для диэлектрических волноводов; получить характеристическое уравнение; рассчитать геометрию резонатора для указанного типа колебаний и заданной длины волны; определить добротность резонатора; изобразить картину электромагнитного поля в резонаторе.

8.3.1. Поля колебаний типа H_{m0p} (TE_{m0p}) в резонаторах

Диэлектрический резонатор для оптического диапазона волн выполняется на основе симметричного планарного диэлектрического волновода прямоугольной формы сечения. Чтобы из волновода получить резонатор, следует волновод ограничить по оси z с двух сторон и чтобы в резонаторе возбудить колебание типа H_{m0p} (к примеру), в волноводе должна распространяться волна типа H_{m0} (поперечно-электрическая). Волна типа H_{m0} имеет составляющие поля: H_x , E_y , H_z (гл.6). Параметры диэлектрического слоя - ϵ_{r2} .

Допустим, что диэлектрический волновод будет бесконечной протяженности вдоль поперечной координаты y (плоский планарный волновод - глава 6), и составляющие векторов поля не будут зависеть от этой координаты. В случае волн магнитного типа с составляющими H_x, H_z, E_y можно брать диэлектрическую пластину конечных размеров вдоль оси y , и размещать по этой оси y даже две металлические пластины (рис.8.3). При этом составляющие полей всегда удовлетворяют граничным условиям. Такой металлодиэлектрический волновод можно использовать в качестве резонатора, ограничивая его по оси z . В случае волн электрического типа в резонаторе, диэлектрическая пластина вдоль оси y не должна ограничиваться металлическими стенками.

Итак, диэлектрический резонатор конструктивно представляет симметричную структуру (относительно оси x) с размерами: без ограничений в направлении y , длиной l вдоль оси z , с толщиной среднего слоя $2a$, имеющего показатель преломления $\epsilon_{r2} > 1$, расположенную в среде с проницаемостью ϵ_0 , и ограниченный по z (в случае волн типа Н и по y) металлическими стенками.

Анализ планарного диэлектрического волновода сделан (гл. 6) для любого типа волны. Поэтому возьмем некоторые соотношения из гл. 6, необходимые для расчета геометрии резонатора на заданном типе волны.

Для получения выражений составляющих электромагнитного поля колебания типа H_{m0p} внутри пластины и вне (рис.8.3) воспользуемся готовыми решениями (6.13б) - (6.14)

Поле в диэлектрической пластине ($-d < x < d$) –резонаторе (рис.8.3)

$$\beta < n_2 k_0 \text{ – волноводный слой, } \chi = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - \beta^2} > 0: \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_y = i \frac{\omega \mu}{\chi} [-A_1 \sin(\chi x) + A_2 \cos(\chi x)] e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_x = -i \frac{\beta}{\chi} [-A_1 \sin(\chi x) + A_2 \cos(\chi x)] e^{-i\beta z} \\ \dot{H}_z = [A_1 \cos(\chi x) + A_2 \sin(\chi x)] e^{-i\beta z} \end{cases} \quad (8.6)$$

Поле вне пластины при $(x \geq \pm d)$ когда $\beta > n_1 k_0$ и

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - n_1^2 k_0^2} > 0 \quad (8.7)$$

$$\begin{cases} \dot{E}_{yв} = i \frac{\omega \mu}{\gamma} B e^{-\gamma x} e^{-i\beta z}, \quad \dot{H}_{xв} = -i \frac{\beta}{\gamma} B e^{-\gamma x} e^{-i\beta z}, \quad \dot{H}_{zв} = B e^{-\gamma x} e^{-i\beta z} \end{cases} \quad (8.8)$$

Можно рассматривать отдельно четные и нечетные колебания. В первом случае считают $A_1=0$ (изменение поля вдоль оси x происходит по четному закону $\cos \chi x$), во втором $A_2=0$. Оба случая рассматриваются одинаково.

Будем рассматривать далее **четные колебания поля H_{m0p}** .

Поле в резонаторе (внутри пластины без индексов и вне – с индексом «в») представляет стоячие волны отмечены индексом «с» (сумма падающей волны с индексом «n», направленной по оси z , и отраженной волны с индексом «o», направленной в противоположную сторону оси z , т.е. $-z$):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{xc} &= \dot{H}_{xn} + \dot{H}_{xo}, & \dot{E}_{yc} &= \dot{E}_{yn} + \dot{E}_{yo}, & \dot{H}_{zc} &= \dot{H}_{zn} + \dot{H}_{zo}, \\ \dot{H}_{xcв} &= \dot{H}_{xnв} + \dot{H}_{xov}, & \dot{E}_{ycв} &= \dot{E}_{ynв} + \dot{E}_{yov}, & \dot{H}_{zcв} &= \dot{H}_{znв} + \dot{H}_{zov}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

и должно быть записано в виде (добавлен индекс c - сумма волн):

$$\begin{cases} E_{yc} = i \frac{\omega \mu}{\chi} \cos(\chi x) (A_2 e^{-i\beta z} + A_3 e^{i\beta z}) \\ H_{xc} = i \frac{\beta}{\chi} \cos(\chi x) (A_3 e^{i\beta z} - A_2 e^{-i\beta z}) \\ H_{zc} = \sin \chi x (A_2 e^{-i\beta z} + A_3 e^{i\beta z}) \end{cases} \cdot \begin{cases} \dot{E}_{yвс} = i \frac{\omega \mu}{\gamma} e^{-\gamma x} (B_2 e^{i\beta z} + B_1 e^{-i\beta z}) \\ \dot{H}_{xвс} = i \frac{\beta}{\gamma} e^{-\gamma x} (B_2 e^{i\beta z} - B_1 e^{-i\beta z}) \\ \dot{H}_{zвс} = e^{-\gamma x} (B_2 e^{i\beta z} + B_1 e^{-i\beta z}) \end{cases} \quad (8.10)$$

Применяем граничные условия для тангенциальных составляющих суммарного поля при $z=0$ и $z=l$ (на металлических пластинах) и определим постоянную β и соотношения между коэффициентами A_2, A_3, B_2, B_1 .

$$E_\tau = E_{yc} = 0 \quad \text{при } z=0, z=l, \quad E_{\tau\theta} = E_{y\theta} = 0 \quad \text{при } z=0, z=l \quad (8.11)$$

Из первого и четвертого уравнений системы (8.10) при $z=0$ имеем $A_2 = -A_3, B_1 = -B_2$. Подставляя эти коэффициенты в (8.10) и применяя формулы Эйлера, получим

$$\begin{cases} E_{yc} = 2 \frac{\omega\mu}{\chi} A_2 \cos(\chi x) \sin(\beta z), \\ H_{xc} = -2i \frac{\beta}{\chi} A_2 \cos(\chi x) \cos(\beta z), \\ H_{zc} = -2i A_2 \sin \chi x \sin(\beta z), \end{cases} \begin{cases} \dot{E}_{y\theta} = 2 \frac{\omega\mu}{\gamma} B_1 e^{-\gamma x} \sin(\beta z), \\ \dot{H}_{x\theta} = -2i \frac{\beta}{\gamma} B_1 e^{-\gamma x} \cos(\beta z), \\ \dot{H}_{z\theta} = -2i B_1 e^{-\gamma x} \sin(\beta z). \end{cases} \quad (8.12)$$

Продольное число β находится из второго граничного условия при $z=l$

$$\sin(\beta l) = 0, \quad \beta l = p\pi, \quad \text{откуда } \beta = p\pi/l \quad (p=1, 2, 3 \dots). \quad (8.13)$$

При равенстве числа $p=0$ исчезают все составляющие поля в (8.12), поэтому оно исключено из ряда p .

8.3.2. Поперечные числа и резонансные частоты резонатора

Для определения поперечных волновых чисел χ, γ и резонансных частот резонатора используем граничные условия при $x=a$ (толщина пластины $2a$) для тангенциальных составляющих полей (8.12) в виде:

$$E_{yc} = \dot{E}_{y\theta}, \quad H_{zc} = \dot{H}_{z\theta} \quad \text{при } x=a. \quad (8.13\text{б})$$

На основании этих граничных условий получим два соотношения:

$$\frac{\mu}{\chi} A_2 \cos(\chi a) = \frac{\mu_0}{\gamma} B_1 e^{-\gamma a}, \quad A_2 \sin \chi a = B_1 e^{-\gamma a}.$$

Делим левые и правые части этих соотношений друг на друга, получим трансцендентное уравнение

$$\frac{\mu_0}{\mu} \chi a \cdot \text{tg}(\chi a) = \gamma \quad (8.14)$$

Воспользуемся (8.13) и выражениями (8.5), (8.7) в виде

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 \mu \varepsilon - \chi^2} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 \mu_0 \varepsilon_0 + \gamma^2}$$

для получения резонансной частоты резонатора, при известных χ , γ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu \varepsilon} \left\{ \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 + \chi^2 \right\}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left\{ \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 - \gamma^2 \right\}}. \quad (8.15)$$

Соотношение (8.15) возводим в квадрат, проводим преобразования и умножаем на a^2 все члены, получим

$$\left(\frac{ap\pi}{l} \right)^2 (\mu_r \varepsilon_r - 1) = (\chi a)^2 + (\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \gamma a)^2. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.14) умножим на $\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} \chi a \cdot \operatorname{tg}(\chi a) = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \cdot \gamma a \quad (8.17)$$

Уравнения (8.17) и (8.16) представляют систему для нахождения χ , γ , решаются либо графически, либо с помощью ЭВМ. Графически делается так:

а) строится несколько графиков функции $\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} \chi a \cdot \operatorname{tg}(\chi a) \right)$ уравнения

(8.17) в координатах χa - по горизонтали, $\gamma a \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ - по вертикальной оси. Тангенс в (8.17) функция периодическая, а χa ее угол, который следует для четных функций изменять от 0 до $\pi/2$, затем от π до $3\pi/2$, или от 2π до $5\pi/2$, исключая получение отрицательных значений у функции тангенса, т.к. правая часть (8.17) имеет положительные значения;

б). если размер $2a$ неизвестен и его необходимо определить, то следует воспользоваться соотношениями (6.39) или (6.40) и условием (6.41)

в) уравнение (8.16) представляет окружность в тех же координатах (пункт а). Если задать число p и параметры системы a , l , μ_r , ε_r , то можно построить окружность, т.к. радиус её будет известен и равен

$$R = (a p \pi \sqrt{\mu_r \varepsilon_r - 1}) / l; \quad (8.18)$$

г) точки пересечения графиков окружности и $x \operatorname{tg} x$ дают значения корней χa и $\gamma a \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$, из которых определяют при известных a, μ_r, ε_r числа χ, γ и затем резонансную частоту из (8.15).

д) Тип волны в резонаторе обозначают H_{m0p} . Первому корню четной волны, лежащему в интервале углов от 0 до $\pi/2$, присваивают индекс $m=0$, второму корню из интервала углов от π до $3\pi/2$, присваивают индекс $m=2$ и т. д. Поле по оси y не меняется, второй индекс в обозначении волны равен нулю. Третий индекс соответствует ряду p из (8.13).

Нечетные волны исследуются аналогично и углы χa будут лежать в интервалах от $\pi/2$ до π , от $3\pi/2$ до 2π и т.д.

е) Следует определить как разделены в разработанном резонаторе резонансные частоты, изменением индекса p , определяя разницу ближайших резонансных частот.

8.3.3. Построение структуры электромагнитных полей в резонаторе или картины изменения полей в поперечной плоскости

Для построения картины изменения полей в диэлектрическом резонаторе в поперечной плоскости следует воспользоваться выражениями для составляющих поля (8.12), подставив в них найденные константы $\gamma, \chi, \omega_0, \beta$ и a, l . Из условия (8.13б) определяются амплитуды A_2, B_1 , все подставляется в составляющие полей в пластине и вне. Затем, изменяя координату x , строится картина полей $E_y(x), H_x(x), H_z(x)$ при $z = \text{const}$ для заданного типа колебаний.

Для построения структуры электромагнитных полей в резонаторе следует использовать уравнение векторных линий для вектора с двумя компонентами, в нашем случае для вектора \vec{H} . Методика построения силовых линий рассмотрена в главе «Планарный волновод».

После построения картины изменения полей и структуры электромагнитных полей в резонаторе следует сделать анализ достоверности полученных результатов, в котором необходимо отметить: выполнение граничных условий; со-

ответствие заданным числам m , p числа вариаций вдоль оси x и количества полуволн вдоль оси z ; какие наблюдаются фазовые сдвиги в структуре полей векторов \vec{E} и \vec{H} в резонаторе, как изменяются поля за резонатором и т.д.

8.3.4. Добротность диэлектрического резонатора

Собственной добротностью Q_0 называется умноженное на круговую резонансную частоту (ω_0) отношение энергии запасённой в резонаторе (W) к средней мощности потерь в резонаторе (P_{cp}):

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_{cp}}. \quad (8.19)$$

Запасенную энергию можно выразить через либо максимальную магнитную, либо максимальную электрическую энергии

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mu |\dot{H}|^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon |\dot{E}|^2 dV \quad (8.20)$$

Мощность потерь в резонаторе состоит из потерь P_{cm} в металлических стенках, имеющих удельную проводимость σ_{cm} и магнитную проницаемость μ_{cm} , потерь $P_{изл}$ в окружающей резонатор среде с параметрами ε_0 и потерь в материале диэлектрика P_∂ на его конечной проводимости

$$P_{cm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{cm} \omega_0}{2 \sigma_{cm}}} \int_{S_{cm}} |\dot{H}_\tau|^2 dS; \quad P_{изл} = \int_{S_{бок}} \vec{\Pi} d\vec{S}; \quad (8.21)$$

$$P_\partial = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\dot{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \Delta_\varepsilon (\omega_0 \varepsilon) \int_V |\dot{E}|^2 dV, \quad (8.22)$$

где $\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_{ec} \cdot \dot{H}_{ec}]$, $S_{бок} = l \cdot y$, ($y=1$), $H_\tau = H_x$ при $z=0$ или l ;

V - объём диэлектрического резонатора;

Так как все составляющие полей в пластине и вне её найдены (8.26), то подставляя их в формулы (8.20) - (8.22), а затем в (8.19) и интегрируя, находим выражение добротности резонатора.

8.4. Открытые резонаторы

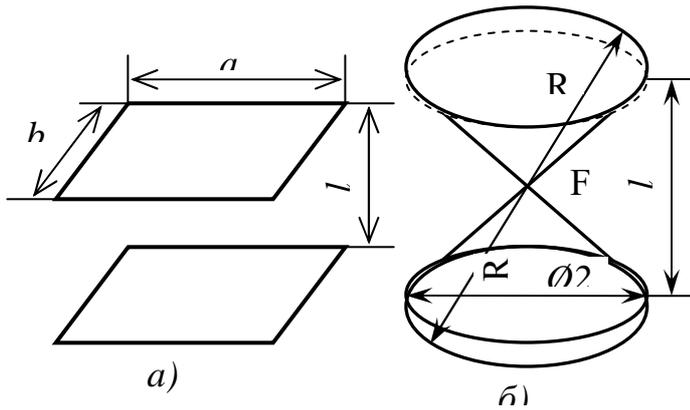


Рис. 8.4 Открытые зеркальные резонаторы с плоскими (а) и со сферическими конфокальными (б) зеркалами.

Открытый резонатор представляет собой систему из двух (иногда более) зеркал (рис. 8.4), отражающих друг другу пучок лучей. Отражатели помещают в свободном пространстве, либо между ними располагается конечных продольных размеров диэлектрический волновод (рис. 8.3).

Зеркала резонатора обычно выполняют из нескольких чередующихся четвертьволновых слоев диэлектриков с большими и малыми значениями ε_r , их коэффициент отражения составляет $|r| > 0,99$. Указанный принцип положен в основу создания многослойных отражателей (глава 4- для оптического диапазона). Металлы для этой цели применяются редко, так как коэффициент отражения от их поверхности в оптическом диапазоне недостаточен.

Размеры открытого резонатора (диаметр зеркал, расстояние между ними) берутся значительно больше длины волны, поэтому довольно точное представление о его работе можно получить с помощью геометрической оптики. Отражающийся от зеркал пучок света создаёт стоячую волну на частоте f_0 . Условием резонанса является синфазное сложение волн в любом сечении линии (8.2).

Обычно длина резонатора в лазерах составляет несколько десятков сантиметров, а $\lambda_{\partial p} \leq 10$ мкм, тогда из (8.3) численное значение p очень велико, т.е. используются колебания высших типов (по продольной оси). Разность между резонансными частотами (8.4) двух соседних мод при p больших

На миллиметровых и субмиллиметровых волнах, а тем более в оптическом диапазоне применяются открытые резонаторы. Открытый резонатор представляет собой систему из двух (иногда более) зеркал (рис.

$\Delta F = f_{0(p+1)} - f_{0p} = v_{\partial} / (2l)$ оказывается значительно меньше каждой из этих частот. Например, при $l = 10$ см и $v_{\partial} = c$, $\Delta F = 1,5$ ГГц, на длине волны $\lambda = 10$ мкм (частота $f = 3 \cdot 10^{13}$ Гц = 30 ТГц) число $p = f / \Delta F = 2 \cdot 10^4$, т.е. на указанной длине резонатора укладывается порядка $2 \cdot 10^4$ полуволн. Плотность спектра собственных колебаний в открытом резонаторе – число колебаний ΔN на интервал частот Δf определяется $\Delta N_0 / \Delta f = 1 / \Delta F = 2l / v_{\partial}$, что, в $2\pi S / \lambda^2$ раз меньше, чем в закрытом объёмном резонаторе объёмом $V = Sl$, для которых справедлива формула Релея-Джинса (8.1).

Стоячие волны в открытых резонаторах могут образовываться и в случае, если между распространяющимся лучом и продольной осью резонатора будет угол $\theta > 0^\circ$. При этом изменяется фазовое условие (8.2) стоячих волн и резонансная частота (8.4)

$$l \cos \theta = p \lambda / 2; \text{ откуда } f_{op} = v_{\partial} p / (2l \cos \theta) \quad (8.23)$$

Форма и размеры пучка лучей определяются формой и размерами зеркала. Для зеркал в виде круга диаметром $2a$, при больших размерах ($2a \gg \lambda$ и любом угле θ) между зеркалами вдоль оси z распространяются электромагнитные волны, называемые **поперечными модами** TEM_{mp} открытого резонатора, т.к. их продольные составляющие поля на несколько порядков меньше поперечных.

8.4.1. Реальные открытые цилиндрические резонаторы

Рассмотрим цилиндрический открытый резонатор в координатах (φ, r, z) , у которого торцевыми стенками являются круглые многослойные зеркала, боковые стенки - отсутствуют. Обычно в резонатор включают устройство, фиксирующее плоскость поляризации вектора \vec{E} , поэтому поля в открытых резонаторах плоско поляризованные.

При конечных размерах диаметра зеркала открытые резонаторы называются реальными. Типы колебаний в них по-прежнему TEM_{mp} или T_{mp} , ин-

декс n – число вариаций поля по углу φ ; m – число вариаций по радиусу r ; p – число полувольт по оси z . Основной является мода TEM_{00p} , при которой $m=0, n=0$. Индекс p в обозначении типа колебания иногда опускают, т.к. он $p \gg m, n$. Основной тип колебания TEM_{00p} имеет резонансные частоты

$$f_0(p) = p \cdot F, \text{ где } F = v_0 / (2l) \quad (8.24)$$

Резонансные частоты для колебаний TEM_{nmp} определяются соотношением:

$$f_0^{nmp} = [p + m + 0,5n] \cdot F \quad (8.25)$$

Колебания TEM_{nmp} , различающиеся по индексам m и n , называются в открытых резонаторах **угловыми модами**, а различающиеся по индексу p – **аксиальными модами**.

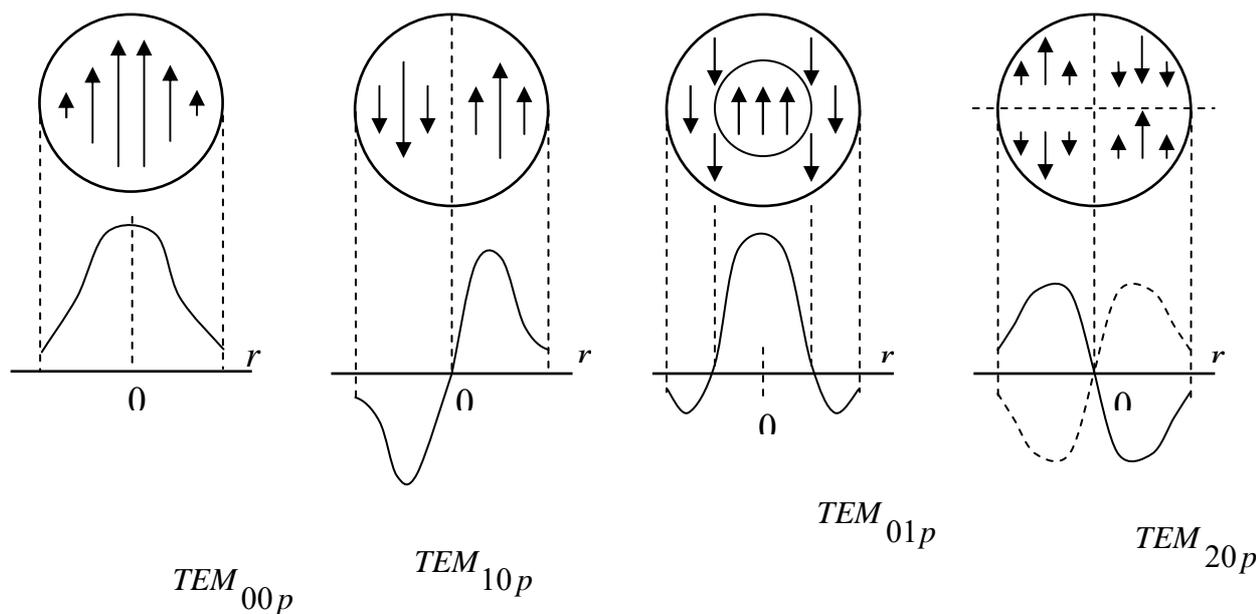


Рис.8.5 Распределения электрического поля для четырёх простейших угловых мод в плоскости $z=const$ в цилиндрическом резонаторе.

Каждый тип колебаний, имея индексы m, n , характеризуется определенной структурой поля. На рис. 8.5 показаны картины распределения электрического поля в резонаторе для четырёх простейших мод в поперечной плоскости. Видно, что при малых индексах n и m поле сконцентрировано в центре зеркала,

затем быстро спадает к краям. Что уменьшает дифракционные потери на краю зеркала.

С увеличением индексов m и n повышается напряжённость электрического поля на краю зеркал и возрастают дифракционные потери. Моды с большими индексами m и n в открытых резонаторах существовать не могут.

Из (8.25), резонансные частоты колебаний TEM_{10p} и TEM_{01p} оказываются в промежутке между частотами TEM_{00p} , а частоты колебаний TEM_{00p} совпадают с TEM_{20p} , т.е. наблюдается вырождение колебаний. Режим работы открытого резонатора считают **одномодовым**, если в нём возбуждены только колебания TEM_{00p} , т.е. когда структура поля в поперечной плоскости соответствует основной угловой моде, но допускаются колебания с разными p ,

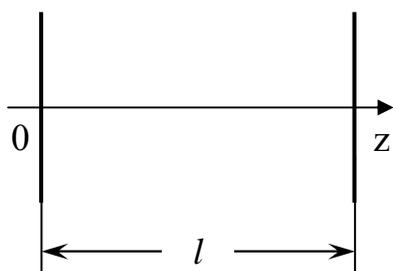


Рис. 8.6. Открытый резонатор с плоскими зеркалами.

т.е. наличие разных аксиальных мод.

В **многомодовом** режиме в открытом резонаторе наблюдается несколько различных угловых мод TEM_{nmp} , отличающиеся индексами n и m .

Резонатор с плоскими зеркалами, называемый интерферометром Фабри - Перо (рис.8.6), концентрирует пучок волн в меньшей степени, чем конфокальный. При круглой апертуре в нём создаются такие же волны, но с большей напряжённостью на краях зеркал. Поэтому дифракционные потери в этом случае больше (пунктирные линии на рис. 8.7). Резонансные частоты колебаний при плоских зеркалах рассчитываются по формуле (8.25).

8.4.2. Добротность открытого резонатора

Представим поле резонатора в виде двух волн равных амплитуд, распространяющихся вдоль оси z в противоположных направлениях и взаимно переходящих при отражениях одна в другую. Совокупность таких волн образует стоячую волну. В действительности же в резонаторе чисто стоячей волны нет, так

как небольшая часть электромагнитной энергии поглощается отражающими зеркалами, а также излучается в окружающее пространство вследствие дифракции волн на краях зеркал.

Пусть запасённая энергия W делится поровну между полями прямой и обратной волн. Энергия прямой волны, заключённая на промежутке $0 \leq z \leq l$ (рис. 8.6), проходит через сечение $z=l$ за время l/v_{zp} , где $v_{zp} = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = v$. Средний поток энергии этой волны через поперечное сечение резонатора за

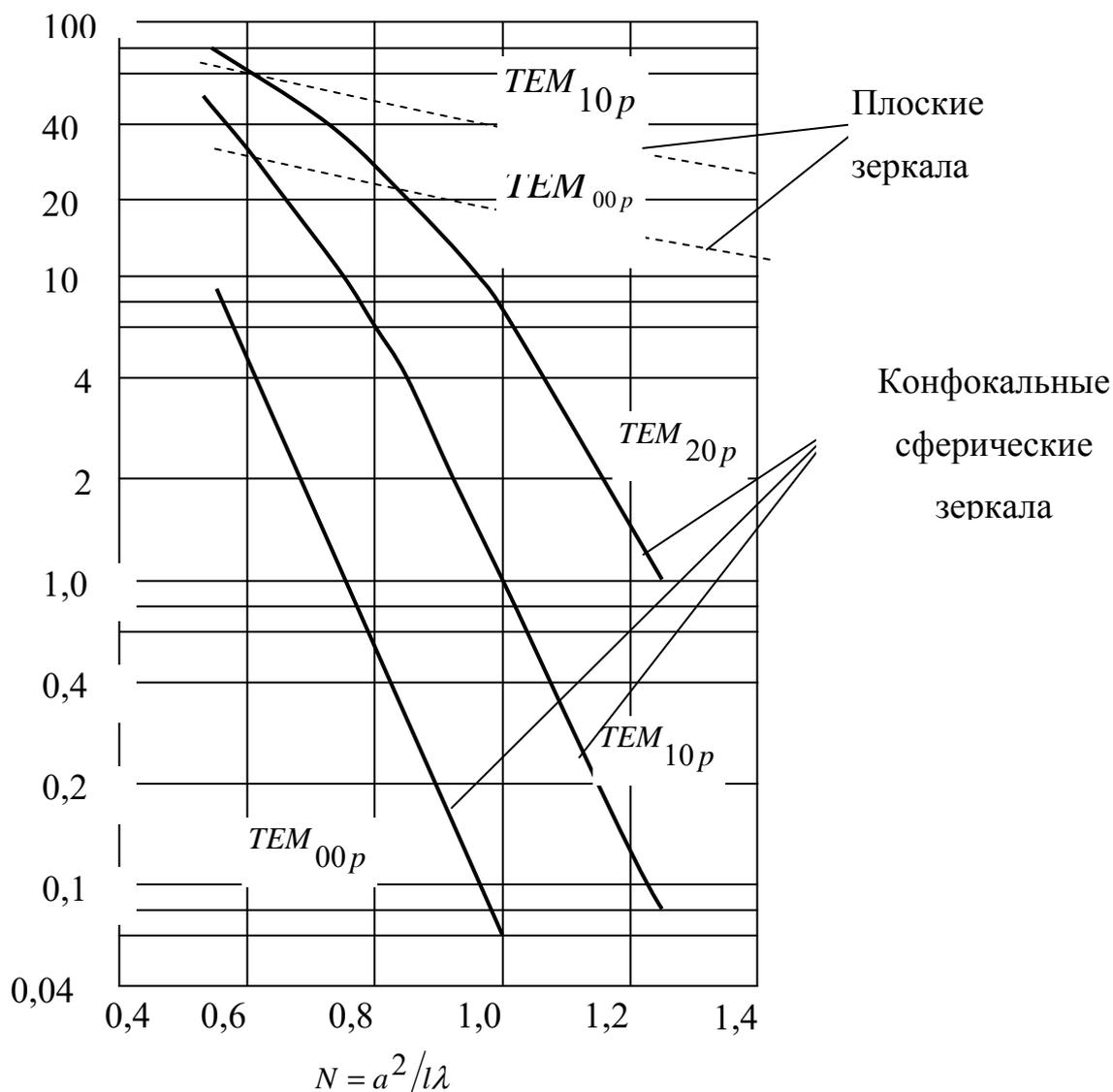


Рис. 8.7. Зависимость дифракционных потерь мощности $p_{диф}$ % (вертикальная ось) от N за один цикл движения волны (отражение от двух зеркал) для разных мод в конфокальном резонаторе.

единицу времени равен $(W/2)(v/l)$ и определяет среднюю (за период колебаний) мощность падающей волны, ибо усреднение за время l/v , если длина резонатора $l = p(\lambda_0/2)$, даёт тот же результат, что и усреднение за период колебаний.

При падении волны на отражающую поверхность (зеркало) в плоскости $z=l$ часть энергии её теряется. Средняя мощность этих потерь в плоскости $z=l$ приближённо равна $\frac{W}{2l}v(1-R^2)$; где R^2 – коэффициент отражения плоской волны по мощности. Такая же мощность теряется и при отражении от зеркала в плоскости $z=0$. Стало быть, полная мощность потерь в резонаторе в два раза больше и определяется выражением

$$P_{cp} = \frac{W}{l}v(1-R^2). \quad (8.26)$$

Подставим найденное значение мощности потерь в выражение добротности

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_{cp}} = \frac{\omega_0}{v} \cdot \frac{l}{1-R^2} = \frac{k \cdot l}{1-R^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{l}{1-R^2}. \quad (8.27)$$

Полученная формула характеризует добротность открытого резонатора без учёта дифракционных потерь. Если учесть потери на краях зеркала за счёт дифракции и не идеального отражения от зеркала, то формула Q_0 примет вид

$$Q_0 = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \cdot \frac{1}{1-R^2 + p_{дифр}}. \quad (8.28)$$

где $p_{дифр} = P_{дифр} / P_{бег}$ – относительные дифракционные потери мощности на краях зеркал за один проход вдоль резонатора (см. рис.8.7). Можно получить выражение добротности с учетом потерь на зеркалах в открытом резонаторе, с учетом затухания волны в заполняющей его среде α , и прочие отмеченные ранее потери. Для этого обозначим относительные потери мощности при отражении от двух зеркал, имеющих разные коэффициенты отражения

$$p_k = P_k / P_{бег} = p_{дифр} + \left(1 - |R_1|^2\right) + \left(1 - |R_2|^2\right), \quad (8.29)$$

скорость волны в среде v_0 и, принимая во внимание, что $2p \gg n + m$, получаем

добротность из (8.27) с учётом (8.29) в виде:

$$Q_0 = \frac{2l \cdot \omega_0 / v_{\partial}}{4l\alpha + p_k} = \frac{2\pi p}{4l\alpha + p_{\text{дифф}} + \left(1 - |R_1|^2\right) + \left(1 - |R_2|^2\right)}. \quad (8.30)$$

Дифракционные потери характеризуются волновым параметром $N = a^2 / (l\lambda)$, называемым также числом Френеля. На рис. 8.7 сплошными кривыми показана зависимость дифракционных потерь мощности от числа N за один цикл движения волны (отражение от двух зеркал) для разных типов колебаний в резонаторе. При больших N для расчета дифракционных потерь могут быть использованы приближенные выражения: $p_{\text{диф}} \approx 0,30N^{-3}$ - для резонатора с плоскими зеркалами, и $p_{\text{диф}} \approx 10,9N^{-4,94N}$ - для резонатора с конфокальными зеркалами. Так как численные значения индекса p весьма велики, то (например, при $l = 10$ см, $\lambda_0 = 10$ мкм = 10^{-3} см, $R^2 = 0,98$, $\alpha = 0$, $p_{\text{дифф}} = 0$) собственные добротности открытых резонаторов оптического диапазона порядка $10^6 \div 10^7$.

Следует отметить, что резонатор с плоскими зеркалами весьма чувствителен к перекосам отражающих поверхностей. Даже небольшое нарушение параллельности отражающих поверхностей приводит к появлению излучения энергии во внешнее пространство и уменьшает добротность резонатора.

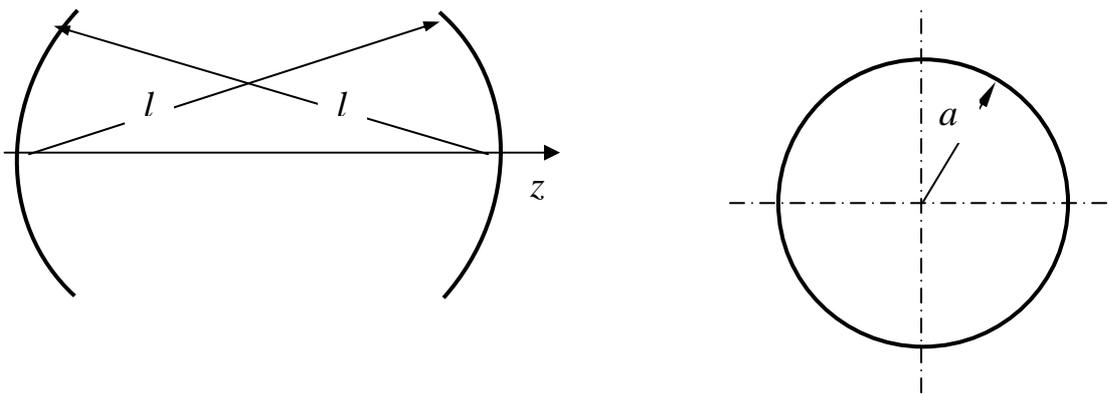


Рис. 8.8. Конфокальный открытый резонатор

Резонатор, образованный двумя одинаковыми отражающими поверхностями сферической формы (рис. 8.8), называемый конфокальным сферическим резонатором, у которого фокусы обоих отражающих зеркал лежат в одной точке, характеризуется меньшим уровнем потерь на излучение. Резонансные частоты

ты и добротности можно определять по выше приведенным формулам.

8.4.3. Электромагнитные поля колебаний в открытом резонаторе

Поперечные размеры зеркал много больше длины волны.

Поле в резонаторе на основном типе колебаний TEM_{00p} представляется в плоскости поперечного сечения составляющими \dot{E}_x, \dot{E}_y или \dot{H}_x, \dot{H}_y ($\dot{E}_r, \dot{E}_\varphi$ или $\dot{H}_r, \dot{H}_\varphi$) векторов поля. Но каждая из этих проекций при удалении от оси z имеет вид спадающей функции, т.е. отличается от той, которая наблюдается в металлических волноводах и резонаторах. В случае простейшего колебания TEM_{00p} в открытом резонаторе при изменении координаты x или y (r или φ), наблюдается (рис.8.5) спад амплитуды поля от максимальной величины до нуля, в то время как в металлических волноводах и резонаторах при индексах m или n равных нулю, поля не изменяются вдоль соответствующей координаты x или y (r или φ). Конкретный вид компонент \dot{E}_x, \dot{E}_y или \dot{H}_x, \dot{H}_y ($\dot{E}_r, \dot{E}_\varphi$ или $\dot{H}_r, \dot{H}_\varphi$) векторов электромагнитного поля находят решением (решается численным методом) интегрального уравнения вида

$$\int_S \phi(x', y') K(x, y, x', y') dx' dy' = q \phi(x, y), \quad (8.33)$$

где $\phi(x, y) = \phi(x, y, 0) \rightarrow$ любая проекция \dot{H}_x или \dot{H}_y ; S – поперечное сечение; $K(x, y, x', y') = \frac{e^{-i(k \cdot l - \pi/2)}}{\lambda} e^{-ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]/(2l)}$ – ядро функции, учитывающее дифракцию на краю зеркала; $x', y', z' = 0$ – координаты точки интегрирования; x, y, z – координаты точки наблюдения; q – называется собственным значением этого уравнения, при котором уравнение имеет нетривиальные решения. Таких значений уравнения (8.33) множество и обозначают их q_{mn} ; функции $\phi(x, y)$ при этих q_{mn} называются собственными функциями и обозначаются $\phi_{mn}(x, y)$.

Литература

1. Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. Томск ОС ТУСУР 01-2013, 2013г., 57 с.
2. Боков, Л.А. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Л.А. Боков, А.Е. Мандель, В.А. Замотринский. — Томск: ТУСУР, 2013. - 410 с. – Режим доступа: <http://edu.tusur.ru/publications/3289>
3. Б.М. Петров Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2007.-558 с. **(100)**

Учебное издание

Ж.М.Соколова, А.Е. Мандель

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное-методическое пособие
по выполнению курсовой работы для студентов специальности
«Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и
специальности «Радиотехника»

Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л..

Тираж 30 экз. Заказ

Отпечатано в томском университете
систем управления и радиоэлектроники.

634050, Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.