Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Д.Н. Черепанов
Н.А. Ярушкина

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Томск
2023

УДК 517.3
ББК 22.143
Ч-46

Рецензент:
Иванова О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТГАСУ

Черепанов, Дмитрий Николаевич
Ч-46 Неопределенный интеграл: методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» / Д.Н. Черепанов, Н.А. Ярушкина – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023. – 28 с.

Настоящие методические указания по дисциплине «Математика», раздел «Интегральное исчисление», составлены с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки бакалавриата 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника».

Методические указания содержат описание основных теоретических положений по разделу, примеры решения задач и их выполнения в Mathcad, задачи для самостоятельного решения обучающимися.

Одобрено на заседании кафедры промышленной электроники, протокол № 20 от 31.01.2023.

УДК 517.3
ББК 22.143

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Знак интеграла $\int y\ dx$, где $\int$ есть удлиненное S (первая буква слова Summa), был опубликован впервые в статье Г. Лейбница (1686 г.).

Термин «интеграл», предложенный Я. Бернулли (1690 г.), происходит от латинского слова: integero, означающего приводить в прежнее состояние или, иначе, восстанавливать. Действительно, операция интегрирования восстанавливает функцию, дифференцированием (термин differentiation – разделение, дифференцирование по смыслу противоположен возврату в исходное «целое» состояние, integer – целое), которой получена подынтегральная функция, с точностью до произвольной постоянной величины. С этим предложением в ходе переписки согласились Г. Лейбниц и И. Бернулли, который вскоре (1696 г.) назвал новый раздел математики интегральным исчислением (calculus integralis).

Неопределённый интеграл – одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью отыскивать функции по их производным (например, отыскивать функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки).

Алгоритмы интегрального исчисления и их основные понятия были созданы независимо друг от друга И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Среди употреблявшихся Г. Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной, интегрирование по частям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла (1697 г.). Г. Лейбницу же принадлежит идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения на простейшие дроби (1702 – 1703 гг.).

Основные работы по дальнейшему развитию интегрального исчисления в 18 веке принадлежат И. Бернулли и особенно Л. Эйлеру. Почти все приемы интегрирования, излагаемые в современных учебниках, можно найти в трактате Л. Эйлера.

Крупнейшие исследования принадлежат П. Л. Чебышеву, который доказал, в частности, что только в трёх случаях при интегрировании дифференциального бинома получаются элементарные функции, тогда как в остальных случаях, так называемых «не берущихся» интегралов, функции оказываются неэлементарными.

Интеграл у И. Ньютона (флюента) выступал прежде всего как неопределенный, т. е. как первообразная. Понятие интеграла у Г. Лейбница выступило, наоборот, прежде всего в форме определенного интеграла.

Несмотря на то, что сама идея определённого интеграла, вызванная потребностью измерять площади, объемы, длины дуг и т.п., появилась задолго до Лейбница, который по началу говорил о «суммирующем исчислении» и рассматривал суммы бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов, на которые разбивается искомая величина, в настоящее время, принято начинать раздел «Интегральное исчисление» с рассмотрения неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница служит, в определённом смысле, переходом от неопределенного интеграла к определённому.

Цель «интегрального исчисления» – вычисление неопределенных и определенных интегралов, а также таких дальнейших их обобщений как, с одной стороны, кратные, криволинейные, поверхностные, а с другой стороны несобственные интегралы.

Целью более узкой части интегрального исчисления, называемой «Неопределённый интеграл» является получение аналитических выражений первообразных либо через элементарные функции, когда это возможно, либо через, так называемые, «специальные функции», или получение алгоритмов, позволяющих вычислять значения первообразных.

Предлагаемые методические указания содержат лишь основные приёмы получения аналитических выражений первообразных в некоторых хорошо изученных случаях и не претендуют на полное изложение всех приёмов получения первообразных даже для элементарных функций. Однако изложенное в достаточной мере соответствует цели изучения дисциплины «Математика» и позволяет освоить не только следующие части интегрального исчисления, но и последующие разделы курса математики.

Целью изучения дисциплины «Математика» является формирование научной картины мира на основе знания основных положений и методов математики; формирование способности привлекать для решения профессиональных задач соответствующий физико-математический аппарат; изучение основных математических понятий, их взаимосвязи; изучение методов расчета, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных инженерных задач, а также формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1: способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности.

Как весь раздел математики «Интегральное исчисление», так и рассматриваемый раздел курса математики – «Неопределённый интеграл» относятся к фундаментальным, поскольку знания, умения и навыки, получаемые при их изучении, необходимы для освоения других разделов математики. Кроме того, успешное освоение приёмов интегрирования необходимо для изучения других общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом.

Неопределённый интеграл широко используется во всех разделах математики и ее приложениях. Логическая структура изложения приёмов интегрирования проста и может быть сведена к следующим общим методикам: интегрирование преобразованием подынтегрального выражения, интегрирование методом по частям, интегрирование методом замены переменной и интегрирование дробно-рациональных функций, однако необходимость в очень хорошо развитых навыках преобразования алгебраических и трансцендентных выражений затрудняет первоначальный опыт использования этих методик.

Интегрирование преобразованием подынтегрального выражения включает в себя как непосредственное интегрирование с использованием таблицы интегралов и свойств неопределённого интеграла для представления подынтегральной функции в виде линейной комбинации «табличных» функций, так и интегрирование подведением функции под знак дифференциала, также рассматриваемое как преобразование подынтегрального выражения.

Интегрирование по частям применяется здесь лишь в трёх случаях, два из которых связаны с интегрированием произведения многочленов либо на показательную или тригонометрическую, либо на логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, а третий случай относится к, так называемым, «кольцевым» интегралам.

Метод замены переменной, в основном, применяется для рационализации подынтегральных выражений, но, помимо этого, рассматриваются и некоторые другие замены, позволяющие изучить метод в достаточной мере.

По окончанию освоения раздела «Неопределённый интеграл» обучающиеся должны демонстрировать следующие результаты обучения:

1) знать основные понятия и утверждения, а также команды из пакетов прикладных программ, относящиеся к неопределённому интегралу;

2) уметь интегрировать дробно-рациональные функции методом разложения на простейшие дроби, использовать как основную таблицу интегралов, так и расширенные таблицы интегралов из справочников, использовать пакеты прикладных программ;

3) владеть основными методами интегрирования (по частям и замена переменной).

Материал раздела разбит на темы, каждая из которых содержит: теоретический материал; методические рекомендации по решению задач; типовые упражнения для решения на практических занятиях и указания для выполнения лабораторных работ в пакете прикладных программ «Mathcad», содержащем модули символьных вычислений.

Освоение раздела «Неопределённый интеграл» сопровождается выполнением индивидуального задания и его защитой, в качестве метода тестирования, определяющего уровень усвоения материала раздела.

Предусмотрено также проведение контрольных работ и тестирования в электронном курсе.

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Основные теоретические положения

Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $dF(x) = f(x)dx$ либо по известной ее производной $F'(x) = f(x)$, т.е. действие, обратное дифференцированию, называется *интегрированием*, а искомая функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{ если } F'(x) = f(x),$$

где $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, а функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*.

Геометрический смысл неопределенного интеграла

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, полученных путем параллельного переноса графика функции $F(x)$ вдоль оси ординат (рис. 1).

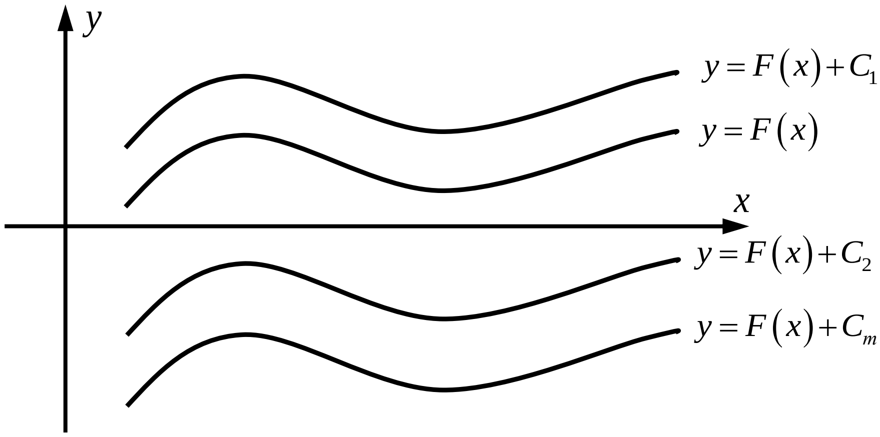

Рисунок 1 – Геометрический смысл неопределенного интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

4. Линейность интеграла:

$$\int\left(\alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x)\right)dx = \alpha\int f_1(x)dx \pm \beta\int f_2(x)dx.$$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов (приложение А). Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

– деление числителя на знаменатель почленно;
– применение формул сокращенного умножения;
– применение тригонометрических тождеств.

1.2 Примеры решения задач

Пример 1.1. Найти интеграл методом непосредственного интегрирования $\int 2x\sqrt{x}dx$.

Решение:

Используя свойство 4 неопределенного интеграла, вынесем за знак интеграла постоянный множитель. Затем, выполняя элементарные преобразования, приводим подынтегральную функцию к степенному виду:

$$\int x\sqrt{x}dx = 2\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx = 2\int x^{\frac{3}{2}}dx = 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{(3/2)+1} = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Пример 1.2. Найти интеграл методом непосредственного интегрирования $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$.

Решение:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx = \int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx =$$

$$= \int x^5dx + 4\int x^{-3}dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx - 7\int dx =$$

$$= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{2/3+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4\cdot\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C.$$

Пример 1.3. Найти интеграл методом непосредственного интегрирования $\int\frac{dx}{4x^2+9}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+(3/2)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.$$

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы и выполнить проверку дифференцированием:

a) $\int\frac{dx}{x^2+9}$; b) $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$; c) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$;

d) $\int\frac{(2x+3)dx}{x^2-5}$; e) $\int(\sin x-\cos x)^2dx$; f) $\int\left(e^x-e^{-x}\right)^3dx$.

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Основные теоретические положения

Замена переменной (*метод подстановки*) – это метод, заключающийся во введении новой переменной с целью преобразования данного интеграла в табличный. Чаще всего этот метод используется, если в подынтегральном выражении содержится сложная функция, тогда ее промежуточный аргумент и надо обозначить как новую переменную, например $t = t(x)$. Далее необходимо выполнить следующие действия:

– найти дифференциал новой переменной $dt = t'(x)dx$;

– записать прежний интеграл, используя только переменную t, если подстановка сделана правильно, то полученный интеграл $\int \varphi(t)\,dt$ должен быть табличным;

– используя таблицу интегралов, записать решение для подынтегральной функции $\varphi(t)$;

– осуществить обратную подстановку, заменив переменную t.

При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменной не в виде $t = t(x)$, а $x = x(t)$.

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1. Найти интеграл методом замены переменной $\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx$.

Решение:

Сделаем замену переменной $t = \sin x$, тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x\,dx$. Исходный интеграл примет вид:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \int t^2 dt .$$

Таким образом, мы получили неопределенный интеграл табличного вида: степенная функция. Используя правило нахождения неопределенного интеграла от степенной функции, найдем:

$$\int t^2 dt = \frac{1}{2+1} t^{2+1} + C = \frac{1}{3} t^3 + C .$$

Выполнив обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C .$$

Пример 2.2. Найти интеграл методом замены переменной $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$.

Решение:

Сделаем замену переменной $t = 1 + 2x$, тогда $dt = 2dx$, откуда $dx = \frac{dt}{2}$. Исходный интеграл примет вид:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} = \int \frac{dt}{2\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4} + C .$$

Выполнив обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} = 2\sqrt[4]{1+2x} + C.$$

Пример 2.3. Найти интеграл методом замены переменной $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx$.

Решение:

Сделаем замену переменной $t = x^5$, тогда $dt = 5x^4 dx$, откуда $x^4 dx = \frac{dt}{5}$. Исходный интеграл примет вид:

$$\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C.$$

Выполнив обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C.$$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы методом замены переменной:

a) $\int \frac{2x}{x^4+3} dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; e) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; f) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin^2 x}} dx$.

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ВНЕСЕНИЯ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

3.1 Основные теоретические положения

Для широкого круга неопределенных интегралов оказывается удобным для приведения к табличному виду преобразовать дифференциал (*Метод внесения под знак дифференциала*). Дифференциал не изменяется, если к переменной интегрирования прибавить или отнять постоянную величину; если умножить переменную интегрирования, то на эту же величину необходимо разделить дифференциал

$$dx = d(x+c), \quad dx = \frac{1}{a} d(ax+c).$$

Такая процедура после переобозначения переменной интегрирования $ax + c = t$ приводит к табличным интегралам.

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.1. Найти интеграл методом внесения под знак дифференциала $\int \cos(2x+5) dx$.

Решение:

$$\int \cos(2x+5) dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x+5) d(2x+5) = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(2x+5) + C.$$

Пример 3.2. Найти интеграл методом внесения под знак дифференциала $\int \frac{3}{4x-9}dx$.

Решение:

$$\int \frac{3}{4x-9}dx = \frac{3}{4}\int \frac{d(4x-9)}{4x-9} = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{4}\ln|4x+9| + C.$$

Пример 3.3. Найти интеграл методом внесения под знак дифференциала $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

.

Решение:

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin^3 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \arcsin^3 x\, d(\arcsin x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\arcsin^4 x + C.$$

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы методом внесения под знак дифференциала:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; b) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx$; c) $\int \cos 3x\, dx$;

d) $\int \frac{x^2\, dx}{5-x^6}$; e) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$.

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

4.1 Основные теоретические положения

Из формулы дифференциала произведения $d(uv) = u\,dv + v\,du$ интегрированием обеих частей равенства получается формула *интегрирования по частям*:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Этот метод применяется в том случае, если интеграл $\int v\,du$ является более простым для решения чем $\int u\,dv$. Как правило, этим методом решаются интегралы вида $\int P(x)f(x)dx$, где $P(x)$ – многочлен, а $f(x)$ – одна из следующих функций: $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, a^x, e^x, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Если в результате применения формулы интегрирования по частям получается новый интеграл, отличающийся от исходного интеграла на константу, то речь идет о циклическом интеграле. В таком случае формулу интегрирования по частям следует рассматривать как уравнение относительно $\int u\,dv$.

4.2 Примеры решения задач

Пример 4.1. Найти по частям интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение:

Полагаем в интеграле $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 4.2. Найти по частям интеграл $\int \arcsin x\,dx$.

Решение:

Полагаем в интеграле $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x - \int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 4.3. Найти по частям интеграл $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение:

Полагаем в интеграле $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Тогда $du = dx$, $v = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x\operatorname{tg} x + \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Пример 4.4. Найти интеграл $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решение:

Полагаем в интеграле $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$. Тогда $du = ae^{ax}dx$, $v = -\dfrac{1}{b}\cos bx$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Повторно интегрируем по частям интеграл $I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$. Полагаем $u_1 = e^{ax}$, $dv_1 = \cos bx\,dx$, тогда $du_1 = ae^{ax}dx$, $v_1 = \dfrac{1}{b}\sin bx$. Откуда $I_1 = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Подставляя интеграл I_1 в исходный интеграл, получаем уравнение относительно I

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\cdot I\right).$$

Решая это уравнение относительно I, получаем

$$I = \frac{\left(-b\cos bx + a\sin bx\right)e^{ax}}{a^2+b^2}.$$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы методом интегрирования по частям:

a) $\int \frac{\ln x\, dx}{x^3}$; b) $\int x^2 e^{3x}\, dx$; c) $\int x\cos x\, dx$;

d) $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}\, dx$; e) $\int \frac{\arcsin x\, dx}{x^2}$; f) $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

5.1 Основные теоретические положения

Интегрирование рациональных дробей, т.е. отношений двух многочленов $Q_m\left(x\right)$ и $P_n\left(x\right)$ (соответственно m-й и n-й степени):

$$R\left(x\right)=\frac{Q_m\left(x\right)}{P_n\left(x\right)},$$

сводится к интегрированию правильных дробей. Если $m<n$, то $R\left(x\right)$ называется *правильной дробью*, если $m\geq n$ – *неправильной*.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби

$$\frac{Q_m\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}=S_{n-m}\left(x\right)+\frac{Q_k\left(x\right)}{P_n\left(x\right)},$$

где $S_{n-m}\left(x\right),\ Q_k\left(x\right)$ – многочлены; $\frac{Q_k\left(x\right)}{P_n\left(x\right)}$ – правильная дробь $\left(k<n\right)$.

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ – неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов «уголком»), получим:

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Интегрирование правильных дробей сводится к разложению подынтегральной функции $R\left(x\right)$ на *простейшие* (*элементарные*), всегда интегрируемые дроби, вида

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{\left(x-a\right)^k}$;

3. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; 4. $\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$,

где *A*, *M*, *N*, *a*, *b*, *c* – постоянные числа; *k* – целое положительное число, а трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, т.е. $b^2-4ac<0$.

Представление правильной дроби в виде суммы простейших дробей осуществляется по следующему алгоритму:

1. Знаменатель $P_n\left(x\right)$ следует разложить на множители вида $\left(x-a\right)^k$ и $\left(x^2+px+q\right)^r$, где $k,\ r\geq 1$, а $p^2-4q<0$ (при условии $p^2-4q<0$ многочлен x^2+px+q на множители не разлагается).

2. Построить схему разложения дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами. При этом каждому множителю $(x-a)^k$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^r$ должна соответствовать сумма дробей

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_rx+D_r}{\left(x^2+px+q\right)^r},$$

где коэффициенты A_i $(i=1,\ldots,k)$, B_j, D_j $(j=1,\ldots,r)$ не определены на данном этапе.

3. Определить коэффициенты разложения, полученного на этапе 2, исходя из тождественного равенства правильной дроби и суммы простейших дробей.

5.2 Примеры решения задач

Пример 5.1. Найти интеграл $\int\frac{(3x+7)}{x^2+4x+8}dx$.

Решение:

Найдем производную знаменателя для выполнения замены $\left(x^2+4x+8\right)'=2x+4$. Выделим эту производную в числителе $3x+7=\frac{3}{2}(2x+4)+1$. Получаем

$$\int\frac{(3x+7)}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)}{x^2+4x+8}dx+\int\frac{1}{x^2+4x+8}dx.$$

Выполняем в первом интеграле замену $x^2+4x+8=t_1$, $(2x+4)dx=dt_1$, в знаменателе второго интеграла выделяем полный квадрат $x^2+4x+8=(x+2)^2+4$, с последующей заменой $x+2=t_2$, $dx=dt_2$, сводя его к табличному. Получаем в итоге

$$\int\frac{(3x+7)}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)}{x^2+4x+8}dx+\int\frac{1}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dt_1}{t_1}+\int\frac{dt_2}{t_2^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln|t_1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t_2}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+8\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C.$$

Пример 5.2. Найти интеграл $\int\frac{3x^2-7x+10}{\left(x^2+4\right)(x-2)}dx$.

Решение:

Рациональная подынтегральная дробь является правильной и разлагается на простейшие дроби вида:

$$\frac{3x^2-7x+10}{\left(x^2+4\right)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции. Числители в левой и правой частях последнего равенства будут тождественно равными, т.е.

$$3x^2-7x+10=A\left(x^2+4\right)+\left(Mx+N\right)\left(x-2\right).$$

Для нахождения неизвестного коэффициента A используем *метод частных значений,* т.е. подставим вместо переменной x ее частное значение, совпадающее с вещественным корнем знаменателя, $x=2$. Получим равенство $8=8A$, откуда следует, что $A=1$.

Для вычисления значений M, N используем *метод неопределенных коэффициентов.* Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 3=A+M, \\ x & -7=N-2M. \end{array}$$

Решение этой системы: $M=2,\ N=-3$. Таким образом,

$$\int\frac{3x^2-7x+10}{\left(x^2+4\right)\left(x-2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+4}\right)dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2xdx}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\int\frac{d\left(x-2\right)}{x-2}+\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}=\ln|x-2|+\ln(x^2+4)-1{,}5\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Пример 5.3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Решение:

Под знаком интеграла – правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}=\frac{x^2+3x+6}{x\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A\left(x-2\right)\left(x-3\right)+Bx\left(x-3\right)+Cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(x-3\right)}=$$

$$=\frac{Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx}{x\left(x-2\right)\left(x-3\right)}.$$

Перейдем к равенству числителей:

$$x^2+3x+6=Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B+C \\ x^1 & 3=-5A-3B-2C \\ x^0 & 6=6A \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1+B+C\\ 8=-3B-2C\\ A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-8,\\ C=8.\end{cases}$$

Тогда $\displaystyle\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределенного интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-8\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{x-3}=\ln|x|-8\ln|x-2|+8\ln|x-3|+C.$$

Пример 5.4. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Решение:

Под знаком интеграла – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int dx+\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

a) $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$; b) $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$; c) $\int\frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$;

d) $\int\frac{(7-5x)\,dx}{x^2+6x+25}$; e) $\int\frac{\left(2x^5+6x^3+1\right)dx}{x^4+3x^2}$; f) $\int\frac{x^2dx}{x^4+5x^2+4}$.

6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

6.1 Основные теоретические положения

Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где R – некоторая рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, находятся с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Такая подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную, где:

$$x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

При нахождении интегралов от тригонометрических функций видов:

$$\int\sin^{2n+1}xdx \text{ или } \int\cos^{2n+1}xdx,$$

где n – целое положительное число, для первого интеграла за вспомогательную функцию (кофункцию, отделенную в качестве множителя от подынтегральной функции) рекомендуется принять $\cos x=t$, для второго $\sin x=t$.

При нахождении интегралов видов:

$$\int\sin^{2n}xdx \text{ или } \int\cos^{2n}xdx$$

от четной степени синуса или косинуса (n – целое положительное число) используются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

В данном случае может быть также использована подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

При нахождении интегралов видов:

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx$$

применяются формулы

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\left(a-b\right)x + \sin\left(a+b\right)x\right)dx,$$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right)dx,$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos\left(a-b\right)x + \cos\left(a+b\right)x\right)dx.$$

6.2 Примеры решения задач

Пример 6.1. Найти интеграл $\int \sin^2 x\, dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 6.2. Найти интеграл $\int \cos^4 x\, dx$.

Решение:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx.$$

В последнем интеграле заменим $\cos^2 2x$ на $\dfrac{1+\cos 4x}{2}$, тогда получим:

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 6.3. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Решение:

Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, получим:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Пример 6.4. Найти интеграл $\int \sin^5 x\,dx$.

Решение:

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx =$$
$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx = \int \left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)\sin x dx.$$

Положим $\cos x = u$, откуда $-\sin x\,dx = du$, тогда

$$\int \sin^5 x dx = -\int \left(1-2u^2+u^4\right)du = -u+\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C = -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

Пример 6.5. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Решение:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\left|\cos x\right| + C.$$

Пример 6.6. Найти интеграл $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$.

Решение:

Так как $\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 8x\right)$, то

$$\int \sin 5x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x - \cos 8x\right)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Пример 6.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x}$.

Решение:

Для нахождения интеграла применим подстановку $\operatorname{tg} x = t$, $\frac{dx}{\cos^2 x}$, предварительно разделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16} = \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{\left(t+3\right)^2 - 25} =$$
$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t+3-5}{t+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C.$$

Пример 6.8. Найти интеграл $\int \frac{5-\sin x+3\cos x}{3+\sin x-3\cos x}dx$.

Решение:

Для нахождения интеграла преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int \frac{5-\sin x+3\cos x}{3+\sin x-3\cos x}dx = \int \frac{8-\left(3+\sin x-3\cos x\right)}{3+\sin x-3\cos x}dx = 8\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x} - \int dx.$$

К первому интегралу применим универсальную тригонометрическую подстановку

$x = 2\operatorname{arctg} t$, $\quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, получим:

$$\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\dfrac{2t}{1+t^2}-3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{3t^2+t} = \int \frac{dt}{t\left(3t+1\right)}.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{t\left(3t+1\right)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{3t+1}.$$

Приводя к общему знаменателю дроби в правой части равенства и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях числителей, получим $A=1$, $B=-3$. Соответствующих интеграл принимает вид:

$$\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x} = \int \frac{dt}{t\left(3t+1\right)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{3dt}{3t+1} = \ln\left|t\right| - \ln\left|3t+1\right| + C = \ln\left|\frac{t}{3t+1}\right| + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу и выполняя обратную замену, получаем:

$$\int \frac{5-\sin x+3\cos x}{3+\sin x-3\cos x}dx = 8\int \frac{dx}{3+\sin x-3\cos x} - \int dx = 8\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}\right| - x + C.$$

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

a) $\int \cos^2 5x\,dx$; b) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; c) $\int \sin 5x\sin 6x\,dx$;

d) $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$; e) $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$; f) $\int \dfrac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

7 ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1 Основные теоретические положения

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в определенных случаях. Наиболее употребительны следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные функции:

1. Интеграл $\int R\left(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots\right)dx$, где R – рациональная функция, $\alpha = \dfrac{m_1}{n_1}$, $\beta = \dfrac{m_2}{n_2}$, … – рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции и выражается в элементарных функциях с помощью подстановки $x = t^k$, где k – общий знаменатель всех дробных показателей у x.

Интегралы более общего вида

$$\int R\left(x, \left(ax+b\right)^{\alpha}, \left(ax+b\right)^{\beta}, \ldots\right)dx \text{ или } \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right)dx$$

приводятся к рациональному виду с помощью подстановок: $ax+b=t^k$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

2. К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \text{ подстановкой } x=a\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \text{ подстановкой } x=a\,\mathrm{tg}\,t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \text{ подстановкой } x=\frac{a}{\cos t};.$$

3. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ сводится, согласно теореме П.Л. Чебышева, к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

a) разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона, когда p – целое число;

b) подстановкой $a+bx^n=z^r$, где r – знаменатель дроби p, когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число;

c) подстановкой $a+bx^n=x^n z^r$, где r – знаменатель дроби p, когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число;

4. Интеграл $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{v}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени, $v=ax^2+bx+c$, можно найти по формуле

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{v}}dx=\left(A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n\right)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}},$$

где $A_1,A_2,\ldots,A_n,B$ – постоянные, определяемые путем дифференцирования этого равенства, умножая его на $\sqrt{v}$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x.

Подобным путем может быть найден интеграл

$$\int P_n(x)\sqrt{v}dx=\int\frac{vP_n(x)}{\sqrt{v}}dx=\left(A_1x^{n+1}+A_2x^{n}+\ldots+A_{n+2}\right)\sqrt{v}+B\int\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

5. Интеграл $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно найти подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

7.2 Примеры решения задач

Пример 7.1. Найти интеграл $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Решение:

Согласно правилу 1, полагая $x=t^4$, $dx=4t^3dt$, получаем

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=4\left(\int dt+\int\frac{tdt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=4t+2\ln\left(t^2+1\right)-4\mathrm{arctg}\,t+C=4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-4\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}+C.$$

Пример 7.2. Найти интеграл $\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

Решение:

Согласно правилу 1, выбираем подстановку $\frac{1+x}{x}=t^2$, откуда находим $x=\frac{1}{t^2-1}$ $dx=-\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}$. Получаем

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int\left(t^2-1\right)^2 t\frac{-2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int t^2dt=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C.$$

Пример 7.3. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$.

Решение:

Согласно правилу 2, выбираем подстановку $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$, получаем

$$\int\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx=\int\frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{ctg}^4 t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{4}\int\mathrm{ctg}^4 t\,d\left(\mathrm{ctg}\,t\right)=$$

$$=-\frac{1}{20}\mathrm{ctg}^5 t+C=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C$$

Пример 7.4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

Решение:

Представим интеграл в виде $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx$, где $p=-1$ (целое число; правило 3а). Полагая $x=z^{\frac{3}{2}}$, $dx=\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$ добиваемся того, чтобы скобка стала линейной относительно z:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx=\int z^{-1}\left(1+z\right)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\left(1+z\right)^{-1}dz.$$

Делаем замену $z^{\frac{1}{2}}=t$, $z=t^2$, $dz=2t\,dt$, получаем

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\left(1+z\right)^{-1}dz=\frac{3}{2}\int t^{-1}\left(1+t^2\right)^{-1}2t\,dt=3\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=3\,\mathrm{arctg}\,t+C=3\,\mathrm{arctg}\sqrt{z}+C=3\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x}+C.$$

Пример 7.5. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение:

Способ 1. Применим подстановку $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (правило 2). Тогда $dx=\cos t\,dt$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int \sin^3 t\,dt=\int\left(1-\cos^2 t\right)\sin t\,dt=\int\left(\cos^2 t-1\right)d\left(\cos t\right)=$$

$$=\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t+C=\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

При обратной замене учтено, что т.к. $x=\sin t$, то $\cos t=\sqrt{1-x^2}$.

Способ 2. Представим интеграл в виде $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, где $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=2$ (целое число; правило 3b).

Делаем замену $1-x^2=z^2$, $x^2=1-z^2$, $x\,dx=-z\,dz$, получаем:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}x\,dx=-\int\left(1-z^2\right)z^{-1}z\,dz=\int\left(z^2-1\right)dz=$$

$$=\frac{z^3}{3}-z+C=\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 7.6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение:

Способ 1. Применим подстановку $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (правило 2). Тогда $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int \frac{dt}{\operatorname{tg}^2 t\sqrt{\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^3}\cos^2 t}=\int \frac{\cos^3 t\,dt}{\sin^2 t}=\int \frac{\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{\sin t}-\sin t+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C=\frac{-1-2x^2}{x\sqrt{x^2+1}}+C.$$

При обратной замене учтено, что т.к. $x=\operatorname{tg} t$, то $\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Способ 2. Представим интеграл в виде $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$, где $m=-2$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$, $\frac{m+1}{n}+p=-2$ (целое число; правило 3c). Делаем замену $1+x^2=x^2z^2$,

$x^2=\left(z^2-1\right)^{-1}$, $x\,dx=\dfrac{-z\,dz}{\left(z^2-1\right)^2}$, получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int x^{-2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx=-\int\frac{\left(z^2-1\right)}{z^2}dz=$$

$$=-z-\frac{1}{z}+C=-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C=\frac{-1-2x^2}{x\sqrt{x^2+1}}+C.$$

Пример 7.7. Найти интеграл $\int\dfrac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx$.

Решение:

Согласно правилу 4, применяем следующую схему интегрирования:

$$\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx=\left(Ax+B\right)\sqrt{x^2-2x}+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Для определения постоянных A, B, D дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на $\sqrt{x^2-2x}$:

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+\left(Ax+B\right)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2-x-5=A\left(x^2-2x\right)+\left(Ax+B\right)\left(x-1\right)+D=2Ax^2+\left(B-3A\right)x+\left(D-B\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получаем систему уравнений: $\begin{cases}2A=2,\\ B-3A=-1,\\ D-B=-5,\end{cases}$ решение которой $A=1$, $B=2$, $D=-3$.

Подставляем найденные значения постоянных в схему интегрирования:

$$\int\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}dx=\left(Ax+B\right)\sqrt{x^2-2x}+D\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{d\left(x-1\right)}{\sqrt{\left(x-1\right)^2-1}}=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.$$

Пример 7.8. Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{\left(x-1\right)\sqrt{1-x^2}}$.

Решение:

Согласно правилу 5, применяем подстановку $x-1=\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$, получаем

$$\int\frac{dx}{\left(x-1\right)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-dt}{t^2}\left(\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}\right)^{-1}=-\int\frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}.$$

Здесь учтено, что $\sqrt{t^2}=|t|$, т.к. подынтегральная функция определена в интервале $-1<x<1$, вследствие чего $x-1<0$ и $t<0$, поэтому $|t|=-t$. Преобразуем интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}}\,d(-1-2t) =$$

$$= -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} + C = -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + C.$$

7.3 Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$; b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$; c) $\int \frac{\left(x^2+4x\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

d) $\int x\sqrt{3-x}\,dx$; e) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$.

8 ИНТЕГРИРОВАНИЕ В MATHCAD

Для вычисления неопределенных интегралов в среде MathCad используется оператор, расположенный на панели Calculus (Исчисление) и позволяющий вставить шаблон с двумя полями ввода. Под знаком интеграла следует ввести функцию, для которой требуется найти первообразную, а после знака дифференциала – переменную, по которой будет производиться интегрирование. Для неопределенных интегралов необходимо применять символьное вычисление выражений (рис. 2).

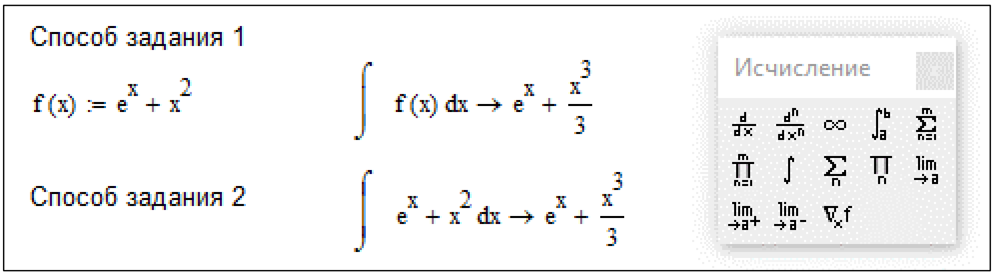

Рисунок 2 – Символьное нахождение неопределенного интеграла

Следует отметить, что многие интегралы не выражаются в элементарных функциях. В подобных случаях MathCad либо интегрирует выражение и выдает результат с использованием каких-либо специальных функций, либо справа от стрелки еще раз переписывается тот же интеграл (рис. 3).

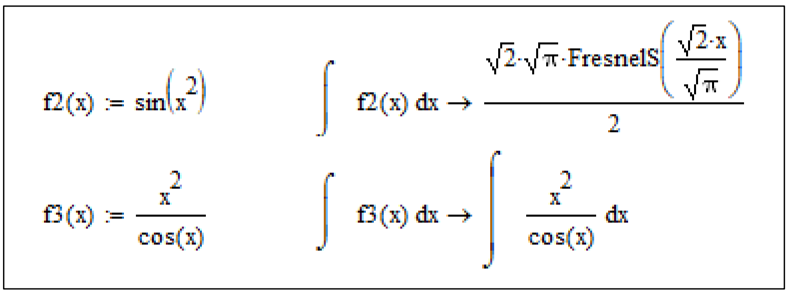

Рисунок 3 – Способы представления результатов интегрирования

При символьном интегрировании допускается использовать в подынтегральных выражениях различные параметры либо задавать функции нескольких переменных. Если перед выражением нигде не определены значения параметров, то (в случае успешных вычислений) Mathcad выдает аналитическую зависимость результата интегрирования от этих параметров (рис. 4).

$$\int a^x\,dx \rightarrow \frac{a^x}{\ln(a)} \qquad \int x^n\,dx \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \int \cos(a\cdot x)\,dx \rightarrow \frac{\sin(a\cdot x)}{a}$$

$$g(x,y) := \sin(x) + \ln(y) \qquad \int g(x,y)\,dx \rightarrow x\cdot\ln(y) - \cos(x)$$

Рисунок 4 – Интегрирование при наличии параметра

В ряде случаев, для нахождения неопределенного интеграла в MathCad необходимо провести ряд преобразований (рис. 5-8).

Найти интеграл

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx \rightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)$$

Пошаговое нахождение интеграла:

Вводим универсальную тригонометрическую подстановку, выражаем переменную x

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \text{ solve}, x \rightarrow 2\cdot\text{atan}(t) \qquad dx = \frac{d}{dt}(2\cdot\text{atan}(t)\cdot dt) \rightarrow dx = \frac{2\cdot dt}{t^2+1}$$

Выражаем знаменатель подынтегральной функции через новую переменную t

$$\sin(x) \text{ substitute}, x = 2\cdot\text{atan}(t) \rightarrow \sin(2\cdot\text{atan}(t)) \text{ simplify} \rightarrow \frac{2\cdot t}{t^2+1}$$

$$\cos(x) \text{ substitute}, x = 2\cdot\text{atan}(t) \rightarrow \cos(2\cdot\text{atan}(t)) \text{ simplify} \rightarrow \frac{2}{t^2+1} - 1 \text{ collect} \rightarrow -\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$1+\sin(x)+\cos(x) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = 2\cdot\text{atan}(t) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2\cdot(t+1)}{t^2+1}$$

Подынтегральное выражение принимает вид $\left[\frac{2\cdot(t+1)}{t^2+1}\right]^{-1}\cdot\frac{2\cdot dt}{t^2+1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{dt}{t+1}$

Интегрируя и выполняя обратную замену переменной, получаем

$$\int \frac{1}{t+1}\,dt \rightarrow \ln(t+1) \text{ substitute}, t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)$$

Рисунок 5 – Интегрирование посредством универсальной тригонометрической подстановки

Найти интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}\,dx \to \int \frac{1}{\left(x^2+4\cdot x+4\right)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{x+2}}\,dx$$

Так как решение не найдено, выполняем подстановку

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}} \qquad x(t) := t^6-2 \qquad fd(t) := \frac{d}{dt}x(t) \to 6\cdot t^5$$

$$f1(t) := f(x)\ \text{substitute}, x = x(t) \to\ \text{simplify} \to -\frac{1}{\sqrt{t^6}-\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Выражение не упрощено, упрощаем самостоятельно $\quad f11(t) := \frac{1}{t^4-t^3}$

$$f22(t) := \int f11(t)\cdot fd(t)\,dt \to 6\cdot t+6\cdot\ln(t-1)+3\cdot t^2$$

Выполняем обратную замену

$$F(x) := f22(t)\ \text{substitute}, t = \sqrt[6]{x+2} \to 6\cdot\ln\left[(x+2)^{\frac{1}{6}}-1\right]+3\cdot(x+2)^{\frac{1}{3}}+6\cdot(x+2)^{\frac{1}{6}}$$

Рисунок 6 – Интегрирование методом замены переменной

Найти интеграл

$$\int x^2\cdot\ln(x+2)\,dx \to \frac{x^3\cdot\ln(x+2)}{3}-\frac{x^4\cdot\text{hypergeom}\left(1,4,5,-\frac{x}{2}\right)}{24}$$

Для нахождения интеграла в элементарных функциях, интегрируем по частям

$$u = \ln(x+2) \qquad du = \frac{d}{dx}(\ln(x+2)\cdot dx) \to du = \frac{dx}{x+2}$$

$$dv = x^2 dx \qquad v = \int x^2\,dx \to v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\cdot\ln(x+2)\,dx = \ln(x+2)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\int\frac{x^3}{x+2}\,dx$$

Выделяем в неправильной рациональной дроби целую часть $\quad \frac{x^3}{x+2}\ \text{parfrac} \to x^2-2\cdot x-\frac{8}{x+2}+4$

Интегрируя каждое слагаемое, получаем:

$$\int x^2\cdot\ln(x+2)\,dx = \ln(x+2)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\int\frac{x^3}{x+2}\,dx = \ln(x+2)\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}+\frac{8}{3}\cdot\ln(x+2)-\frac{4}{3}\cdot x+C$$

Рисунок 7 – Интегрирование по частям

Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{asin}(x)}{\left(\operatorname{asin}(x)^2 + 4\cdot\operatorname{asin}(x) - 5\right)\cdot\sqrt{1 - x^2}}\,dx \rightarrow \int \frac{\operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1 - x^2}\cdot\left(\operatorname{asin}(x)^2 + 4\cdot\operatorname{asin}(x) - 5\right)}\,dx$$

Так как интеграл не найден, делаем замену

$$t = \operatorname{asin}(x) \qquad dt = \frac{d}{dx}(\operatorname{asin}(x)\cdot dx) \rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{\operatorname{asin}(x)}{\left(\operatorname{asin}(x)^2 + 4\cdot\operatorname{asin}(x) - 5\right)} \text{ substitute}, \operatorname{asin}(x) = t \rightarrow \frac{t}{t^2 + 4\cdot t - 5}$$

Получаем интеграл $\displaystyle\int \frac{t}{t^2 + 4\cdot t - 5}\,dt \rightarrow \frac{\ln(t - 1)}{6} + \frac{5\cdot\ln(t + 5)}{6}$

Пошаговое нахождение полученного интеграла:

Выполняем разложение на простейшие дроби $\displaystyle\frac{t}{t^2 + 4\cdot t - 5} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{1}{6\cdot(t - 1)} + \frac{5}{6\cdot(t + 5)}$

Для каждой дроби находим:

$$\int \frac{1}{t - 1}\,dt \rightarrow \ln(t - 1) \qquad \int \frac{1}{t + 5}\,dt \rightarrow \ln(t + 5)$$

Выполняя обратную замену, получаем:

$$\frac{\ln(t - 1)}{6} + \frac{5\cdot\ln(t + 5)}{6} \text{ substitute}, t = \operatorname{asin}(x) \rightarrow \frac{\ln(\operatorname{asin}(x) - 1)}{6} + \frac{5\cdot\ln(\operatorname{asin}(x) + 5)}{6}$$

$$\int \frac{\operatorname{asin}(x)}{\left(\operatorname{asin}(x)^2 + 4\cdot\operatorname{asin}(x) - 5\right)\cdot\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{\ln(\operatorname{asin}(x) - 1)}{6} + \frac{5\cdot\ln(\operatorname{asin}(x) + 5)}{6} + C$$

Рисунок 8 – Интегрирование методом замены переменной

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ельцов, А.А. Интегральное исчисление: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: ТУСУР, 2013. – 138 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6063 (дата обращения: 10.05.2023).
2. Ельцов, А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: ТУСУР, 2005. – 204 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/39 (дата обращения: 06.05.2023).
3. Потапов, А.П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Часть 2. Учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 268 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04679-3. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/515214 (дата обращения: 16.05.2023).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 0$	12. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$, $x \neq 0$	14. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$	17. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\|\sin x\| + C$	18. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	19. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	20. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$