

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

«Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники» (ТУСУР)

Кафедра физики

А.В. Тюньков

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ**

Методические указания к лабораторной работе по физике для  
студентов всех специальностей

Томск  
2023

**УДК 531.1**  
**ББК 22.3**  
**Т 984**

**Рецензент:**

**Зенин А.А.**, доцент кафедры физики ТУСУР,  
канд. техн. наук

**Тюньков, Андрей Владимирович**

**Т 984** Определение момента инерции твердых тел:  
Методические указания к лабораторной работе по физике для  
студентов всех специальностей / А.В. Тюньков. – Томск: Томск. гос.  
ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023. – 13 с.

Представлена краткая теория вращательного движения. Введено понятие момента инерции твердого тела. На примере физического маятника осуществлена проверка теоремы Штейнера. Описана экспериментальная установка. Представлен порядок выполнения работы, обработки результатов, а также вопросы для самоподготовки и список литературы.

Методические указания предназначены для использования студентами всех специальностей при подготовке, выполнении и защите лабораторной работы по физике.

Одобрено на заседании каф. физики протокол №104 от 16.04.23

УДК 531.1  
ББК 22.3

© Тюньков А.В., 2023

© Томск. гос. ун-т систем упр. и  
радиоэлектроники, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ .....	4
2 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ.....	8
3 ЗАДАНИЕ .....	9
4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ .....	10
5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	12
6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	13

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что мерой инертности тела (способность тела оказывать сопротивление изменению его состояния движения) является масса, однако не всегда помним, что это определение справедливо лишь при поступательном движении тела. Если тело совершает вращательное движение, то его инертные свойства определяются не только массой, но и ее распределением относительно оси вращения. Для вращательного движения мерой инертности твердого тела при вращательном движении является момент инерции. Каждое тело независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси.

Целью настоящей работы является определение момента инерции твердых тел и экспериментальная проверка справедливости теоремы Штейнера на примере физического маятника.

## 1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Моментом инерции механической системы  $n$  материальных точек относительно неподвижной оси вращения называется физическая величина  $I$ , равная сумме произведений масс на квадраты их расстояний до оси.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (1.1)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -ой точки;

$r_i$  – расстояние от  $i$ -ой точки до оси.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу, где интегрирование производится по всему объему тела

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (1.2)$$

где  $dm$  – масса малого объема  $dV$ ;

$\rho$  – плотность;

$r$  – расстояние от элемента  $dV$  до оси вращения.

Если тело однородно (плотность всюду одинакова), то

$$I = \rho \int_V r^2 dV. \quad (1.3)$$

Найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра (рисунок 1.1) высотой  $h$  и радиусом  $R$  относительно оси  $OO$ , перпендикулярной боковой поверхности цилиндра (оси симметрии цилиндра  $O'O'$ ) и проходящей через центр масс (точка  $A$ ).

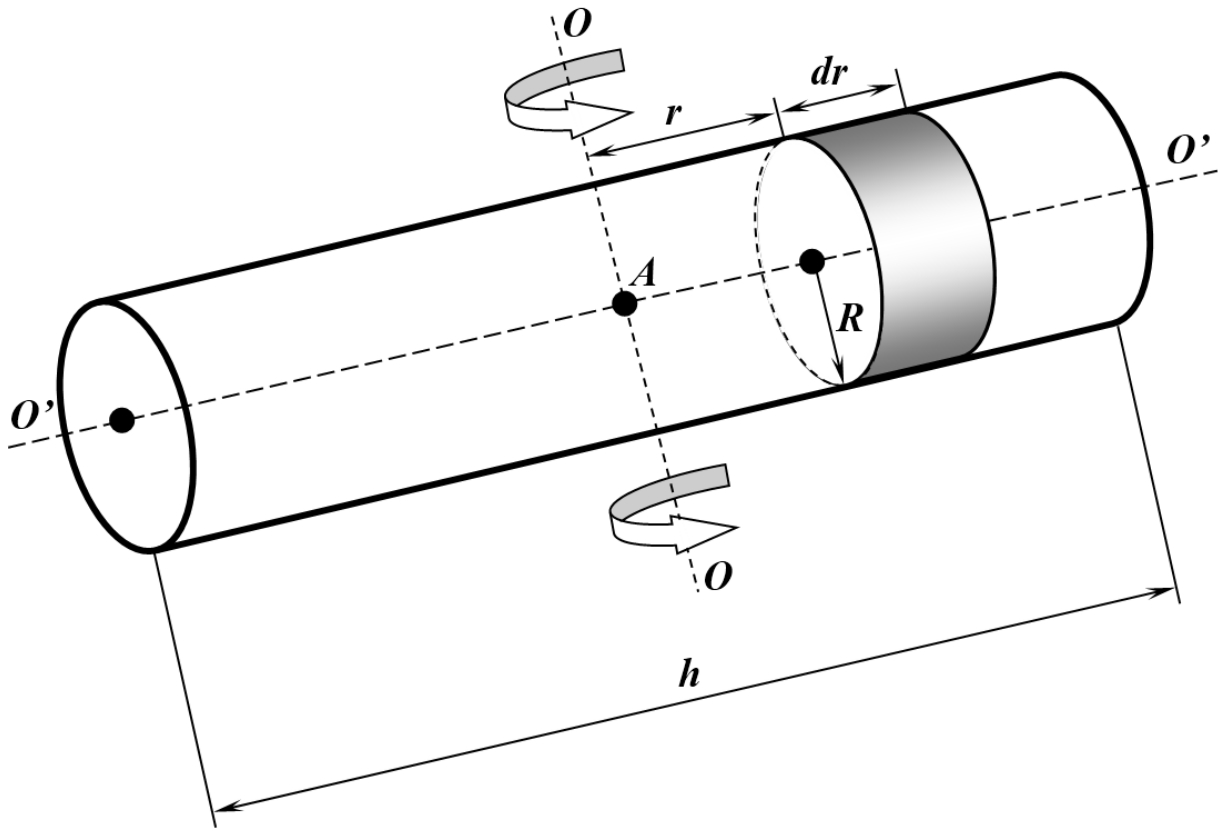


Рисунок 1.1 – Сплошной цилиндр

Разобьем цилиндр на отдельные цилиндры радиуса  $R$  и бесконечно малой высотой  $dr$ . Момент инерции каждого такого цилиндра  $dI=r^2dm$ . Выделим элементарный цилиндр высотой  $dr$ , отстоящий от оси вращения на расстоянии  $r$ . Так как  $dr \ll r$ , то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно  $r$ . Объем рассматриваемого элементарного цилиндра равен  $dV=\pi R^2 dr$ , а его масса

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dr, \quad (1.4)$$

и момент инерции

$$dI = \rho \pi R^2 r^2 dr. \quad (1.5)$$

Тогда момент инерции всего цилиндра

$$I = \int dI = \rho\pi R^2 \int_{-h/2}^{h/2} r^2 dr = 2\rho\pi R^2 \int_0^{h/2} r^2 dr = \frac{2}{3}\rho\pi R^2 \frac{h^3}{8} = \frac{1}{12}mh^2, \quad (1.6)$$

так как  $\pi R^2 h$  – объем цилиндра.

Момент инерции  $I$  данного тела относительно какой-либо оси зависит не только от массы, формы и размеров тела, но также от выбора оси вращения.

Если известен момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера.

**Теорема Штейнера:** момент инерции  $I$  относительно произвольной оси, равен сумме собственного момента инерции  $I_0$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния  $l$  между осями.

$$I = I_0 + ml^2. \quad (1.7)$$

Используя теорему Штейнера, можно определить момент инерции цилиндра, представленного на рисунке 1.1, относительно оси, проходящей через основание цилиндра, параллельной оси  $OO$ .

$$I = \frac{1}{12}mh^2 + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mh^2 + \frac{1}{4}mh^2 = \frac{1}{3}mh^2. \quad (1.8)$$

Проверить справедливость теоремы Штейнера в определении момента инерции можно с помощью физического маятника. Физическим маятником называется любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс.

В настоящей работе физический маятник – это стальной цилиндрический стержень, ось вращения которого проходит через точку  $B$  (рисунок 1.2). Расстояние между осью вращения и центром масс (точка  $A$ ) –  $l$ .

Силу тяжести  $\vec{P} = m\vec{g}$  можно разложить на две составляющие, одна из которых  $\vec{P}_2$  уравновешивается реакцией подвеса. Под действием составляющей  $\vec{P}_1$  маятник приходит в движение.

На основании второго закона Ньютона для динамики вращательного движения запишем

$$M = I\varepsilon = -Pl, \quad (1.9)$$

где  $M$  – момент возвращающей силы;  
 $\varepsilon$  – угловое ускорение.

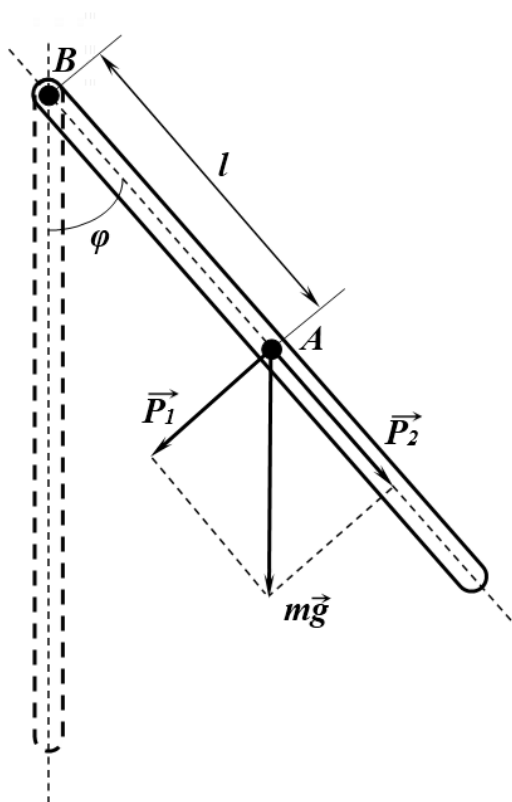


Рисунок 1.2 – Физический маятник

Знак “минус” выбран потому, что действующая сила направлена в сторону, противоположную направлению отклонения маятника.

Модуль  $|\vec{P}_1|$  из рисунка 1.2 равен  $P\sin\varphi$ . При малых углах  $\sin\varphi=\varphi$ .

Поэтому

$$P_1 \approx mg\varphi. \quad (1.10)$$

Следовательно, при малых углах можно записать

$$M \approx -mgl\varphi. \quad (1.11)$$

Моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь, так как маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания.

Подставляя выражения (1.10), (1.11) в (1.9), получим

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0. \quad (1.12)$$

Решением этого дифференциального уравнения (1.12) является

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (1.13)$$

где  $\varphi(t)$  – угол отклонения маятника в данный момент времени;  
 $\varphi_0$  – максимальное отклонение – амплитуда колебаний;  
 $\omega=2\pi/T$  – угловая частота ( $T$  – период колебаний);  
 $\alpha_0$  – начальная фаза в момент времени  $t=0$ .

Подставив решение (1.13) в уравнение (1.12), получим частоту колебаний для малых углов отклонения

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (1.14)$$

Следовательно, период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (1.15)$$

Из выражения (1.15) получим

$$I = \frac{T^2 mgl}{4\pi^2}. \quad (1.16)$$

Зная ускорение свободного падения  $g$ , массу  $m$ , экспериментально измерив  $l$  и определив  $T$ , можно вычислить момент инерции маятника. Сняв зависимость  $I$  от  $l$  и воспользовавшись методом линеаризации, построив зависимость  $I(l^2)$ , можно проверить справедливость теоремы Штейнера.

## 2 ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Для экспериментальной проверки теоремы Штейнера и определения момента инерции в данной работе используется стандартная установка универсального маятника ФПМО-4. Это настольный прибор (рисунок 2.1), на вертикальной стойке основания **1** которого крепится кронштейн **2**, который имеет возможность поворота вокруг стойки на  $360^\circ$  и фиксации в любом выбранном положении. С одной стороны кронштейна **2** подвешен математический маятник, а с другой – физический. Математический маятник представляет собой металлический шарик **3** на бифилярном подвесе **4**. Физический маятник – стальной стержень **5**, подвешенный на опорной призме **6**. Стержень **5** имеет кольцевые проточки, которые служат для надежной фиксации опорных призм. Установка снабжена фотоэлектрическим датчиком **7**, который закреплен на вертикальной



стойке с помощью кронштейна **8** и имеет возможность перемещаться как вдоль, так и вокруг стойки и фиксироваться в любом положении. Датчик предназначен для выдачи сигналов на миллисекундомер **9**. Миллисекундомер – самостоятельный прибор с цифровой индикацией времени и количества полных периодов колебаний маятника.

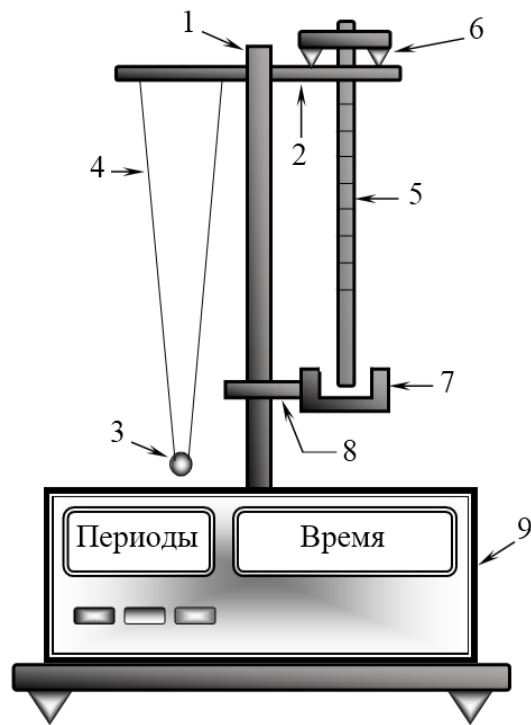


Рисунок 2.1 – Общий вид универсального маятника

### 3 ЗАДАНИЕ

3.1 Определить момент инерции физического маятника  $I_0$  относительно оси, проходящей через центр масс, и момент инерции  $I$  относительно оси, параллельной оси, проходящей через центр масс и находящейся на некотором удалении от нее.

3.2 Проверить справедливость теоремы Штейнера.

## 4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1 Убедиться, что прибор заземлен. Включить в сеть шнур питания миллисекундомера. Ознакомиться с работой таймера:

4.1.1 нажать кнопку «*сеть*» на лицевой панели, при этом должны загореться лампочки фотодатчика и цифровые индикаторы;

4.1.2 отклонить рукой стержень на угол 5-10° и отпустить его;

4.1.3 нажать кнопку «*сброс*» и убедиться, что он регистрирует число и время колебаний;

4.1.4 нажать кнопку «*стоп*» и убедиться, что счет времени и количества периодов колебаний прекращается в момент окончания очередного периода.

4.2 Определить центр тяжести физического маятника. Для однородного стержня центр тяжести находится на равных расстояниях от его концов.

4.3 Установить опорную призму на физический маятник (однородный стержень) в крайнее верхнее положение, закрепить ее с помощью винта. Острое ребро опорной призмы является осью качания.

4.4 Определить расстояние  $l$  между центром масс и осью качания. Данные занести в таблицу 4.1.

4.5 Привести маятник в колебательное движение, отклонив его на угол **5-10°**, после чего нажать кнопку «*сброс*» на миллисекундомере. Определить по показаниям миллисекундомера продолжительность **10-15** колебаний.

4.6 По формуле (4.1) рассчитать величину периода колебаний маятника. Данные занести в таблицу 4.1.

$$T = \frac{t}{n}, \quad (4.1)$$

где  $t$  – время  $n$  колебаний;

$n$  – число полных колебаний.

4.7 Изменить расстояние  $l$ , опустив опорную призму б (рисунок 2.1) вниз на четыре деления (цена одного деления – 10 мм) и снова проделать пункты 4.5. Изменяя расстояние  $l$  **семь** раз, повторить пункты 4.5, 4.6.

4.8 Рассчитать по формуле (1.16) значения момента инерции  $I$  и записать их в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Данные прямых и косвенных измерений

Номер опыта	$n$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$l, \text{м}$	$l^2, \text{м}^2$	$I, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	Примечание
1							$m = 358 \text{ г}$ $\sigma(t) = 2 \text{ мс}$ $\varepsilon(m) = 2 \%$
2							
3							
4							
5							
6							
7							

4.9 Рассчитать доверительные интервалы для  $I$  и  $l^2$ . Нанести в координатах  $I$  от  $l^2$  экспериментальные точки. Построить доверительные интервалы для каждого значения  $I$  и  $l^2$ , равные  $\pm\sigma(I)$  и  $\pm\sigma(l^2)$  соответственно. Провести прямую через все интервалы. Если прямую провести удастся, то полагают, **что эксперимент соответствует теории в пределах погрешности**. Если этого сделать не удастся, то необходимо выяснить причину и по указанию преподавателя, либо устранить ее и повторить измерения, либо ограничиться указанием причин неудачи в выводе по проделанной работе.

4.10 Используя график линеаризованной зависимости  $I = f(l^2)$  (пункт 4.9) определить собственный момент инерции  $I_0$  относительно оси, проходящей через его центр масс.

Для этого необходимо сравнить уравнение (1.7) с уравнения прямой

$$y = ax + b, \quad (4.2)$$

где  $a$  – угловой коэффициент прямой;

$b$  – свободный член (отрезок, отсекаемый прямой на оси  $y$ ).

В нашем случае  $b = I_0$ .

Пример построения зависимости  $I = f(l^2)$ , нанесения доверительных интервалов и графического определения  $I_0$  представлен на рисунке 4.1.

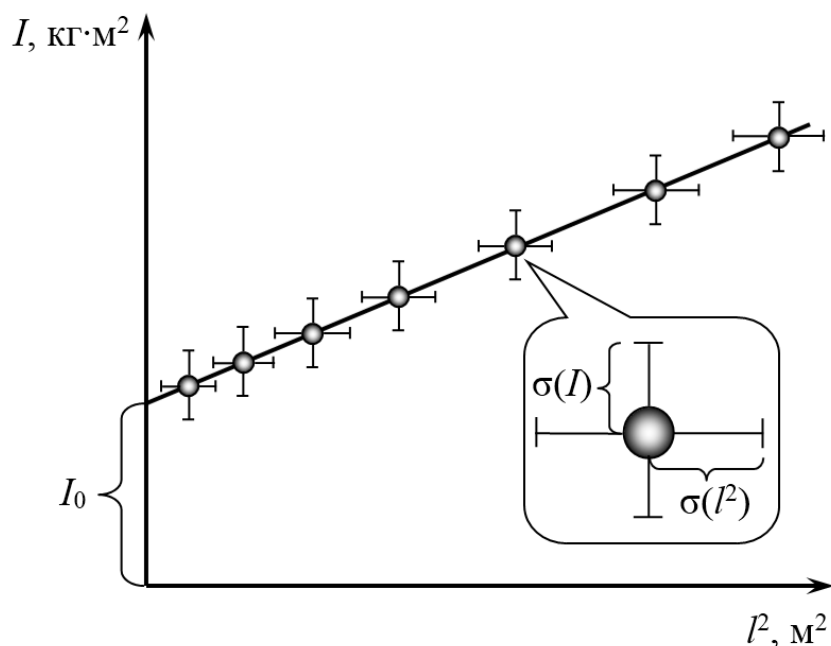


Рисунок 4.1 – Зависимость  $I = f(l^2)$

4.11 Произвести расчет момента инерции  $I_0$  по формуле (1.6). Сравнить результаты расчета и опыта.

4.12 Проанализировать полученные результаты, сделать выводы. Оформить отчет о проделанной работе. Правила оформления отчета по лабораторной работе подробно изложены в [6.3].

## 5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

5.1 Какое свойство тел характеризует момент инерции?

5.2 От чего зависит величина момента инерции?

5.3 Запишите выражение, позволяющее определить момент инерции тела любой формы.

5.4 Сформулируйте и запишите теорему Штейнера.

5.5 Как определить момент инерции катящегося шара массой  $m$  и радиуса  $R$ ?

5.6 Как находится момент инерции системы, состоящей из нескольких тел?

5.7 Под действием момента какой силы совершается колебательное движение физического маятника?

5.8 Запишите основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

5.9 Как определяется момент инерции физического маятника в данной работе?

5.10 В чем суть метода линеаризации экспериментальной кривой?

## 6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

6.1 Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие: в 3 томах / И. В. Савельев. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, [б. г.]. – Том 1: Механика. Молекулярная физика – 2018. – 436 с. [Электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/98245>. (дата обращения: 10.04.2023).

6.2 Мухачев В. А. Оценка погрешностей измерений [Электронный ресурс] / метод. указания к лабораторной работе / В. А. Мухачев, А. Л. Магазинников. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2012. – 24 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/1099>. (дата обращения: 10.04.2023).

6.3 Зенин, А. А. Общие требования и правила оформления отчета о лабораторной работе по физике: Методические указания [Электронный ресурс] / А. А. Зенин. – Томск: ТУСУР, 2019. – 20 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/8957>. (дата обращения: 10.04.2023).