Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)

ФАКУЛЬТЕТ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ (ФДО)

Ф. А. Красина

АНАЛИЗ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

Учебное пособие

Томск
2023

УДК 336.74(075.8)
ББК 65.262.63я73
К 780

Красина Ф. А.

К 780 Анализ денежных потоков : учебное пособие / Ф. А. Красина. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2023. – 93 с.

В пособии представлен обзор основных алгоритмов, используемых при количественном анализе финансовых операций. Дается определение денежного потока. Рассмотрена логика операций дисконтирования и наращения денежного потока, подробно изложены схемы и алгоритмы оценки денежных потоков различных видов. Во всех разделах пособия приводятся примеры решения задач.

Для студентов экономических и управленческих направлений, обучающихся с применением дистанционных образовательных технологий.

Одобрено на заседании кафедры экономики,
протокол № 2 от 16.02.2023.

Оглавление

Введение

Необходимость правильно проводить различные финансовые расчеты не вызывает сомнений, поэтому изучению финансовых вычислений в высших учебных заведениях уделяется большое внимание, особенно в рамках подготовки будущих экономистов.

Основной целью предлагаемого пособия является изложение методов анализа денежных потоков. Денежные потоки возникают как в деятельности предприятий различных форм собственности, так и в повседневной жизни физических лиц.

Пособие состоит из шести глав. В первой главе пособия рассматриваются понятия денежного потока и аннуитета, дается понятие приведенной и наращенной суммы совокупности платежей и объясняется сущность задач, связанных с оценкой будущей и приведенной стоимости денежных потоков.

Вторая, самая объемная глава посвящена особенностям оценки постоянных аннуитетов: именно в ней приводятся основные алгоритмы расчетов, связанных с оценкой аннуитета и вычислением его параметров, выводятся формулы коэффициентов приведения и наращения аннуитетов постнумерандо и пренумерандо. В этой же главе рассматриваются отсроченные аннуитеты, а также приводятся обоснованный метод сравнения аннуитетов, понятие эквивалентности финансовых операций, принципы и методы конверсии и замены рент.

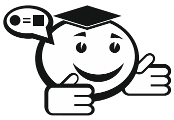
Главы 3–6 посвящены методам оценки различных видов финансовых рент: переменных, бессрочных и непрерывных, а также аннуитетов с периодом, большим, чем базовый.

В пособии рассматриваются как теория, так и практика расчетов. Каждая глава содержит большое количество решенных типовых задач и вопросов для самоконтроля, призванных помочь студентам, обучающимся с применением дистанционных технологий, освоить содержание курса.

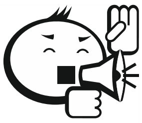
Учебное пособие предназначено для бакалавров всех финансовых, экономических и управленческих направлений.

Соглашения, принятые в учебном пособии

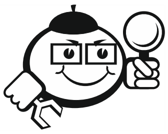
Для улучшения восприятия материала в данном учебном пособии используются пиктограммы и специальное выделение важной информации.



Эта пиктограмма означает определение или новое понятие.

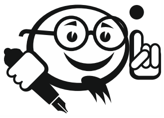


Эта пиктограмма означает «Внимание!». Здесь выделена важная информация, требующая акцента на ней. Автор может поделиться с читателем опытом, чтобы помочь избежать некоторых ошибок.



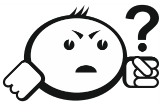
Пример

Эта пиктограмма означает пример. В данном блоке автор может привести практический пример для пояснения и разбора основных моментов, отраженных в теоретическом материале.



Выводы

Эта пиктограмма означает выводы. Здесь автор подводит итоги, обобщает изложенный материал или проводит анализ.



Контрольные вопросы по главе

1 Методы оценки денежных потоков

1.1 Понятие и виды денежных потоков

В результате своей деятельности любое предприятие формирует денежные потоки: регулярные или периодические платежи предприятия (исходящие потоки, потоки расходов, потоки расчетов) и в пользу предприятия (входящие потоки, потоки доходов). Управление денежными потоками компании является важной составной частью общей системы управления ее финансовой деятельностью и важной задачей финансового менеджмента.

В соответствии с этим главная *цель финансового менеджмента в области управления денежными потоками* может быть сформулирована как достижение сбалансированности входящих и исходящих потоков финансовых ресурсов.

Входящие и исходящие денежные потоки появляются вследствие того, что предприятие вступает в денежные отношения с физическими и (или) юридическими лицами.

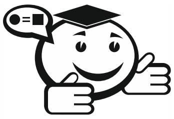
В состав денежных отношений предприятия входят:

1. *Отношения с партнерами* по производственно-хозяйственной деятельности, среди которых выделяются производственные поставщики, покупатели, посредники) и финансовые партнеры (кредитные, страховые и иные организации финансового рынка). В результате взаимодействия предприятия с партнерами возникают входящие и исходящие потоки платежей в виде оплаты материально-технических ресурсов, различных услуг, оказываемых предприятию, продукции и услуг, производимых предприятием, получения и погашения кредитов и др.
2. *Отношения с государством*, которые в большинстве случаев выражены исходящими потоками платежей предприятия государству в виде налогов, отчислений во внебюджетные фонды, таможенных пошлин и сборов и др. В отдельных случаях возникают и входящие потоки, например при выполнении предприятием государственного заказа. Однако с позиции финансового менеджмента в этом случае соответствующий орган государственного управления (заказчик) может рассматриваться как один из партнеров (покупатель).
3. *Отношения предприятия как юридического лица с его работниками*, в результате которых возникает исходящий поток платежей в виде оплаты труда персонала.

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных *финансовых операций*:

- с ценными бумагами;
- в управлении финансами предприятий;
- при осуществлении инвестиционных проектов;
- в кредитных операциях;
- при оценке бизнеса;
- при оценке недвижимости;
- при выборе альтернативных вариантов финансовых операций и т. п.

Элементы денежного потока могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплатами), а временные интервалы между элементами потока могут быть равными и неравными.



Финансовая рента *– это поток последовательных платежей с постоянными интервалами, все члены которого являются положительными величинами* [1].

Рентный период *– промежуток времени между двумя последовательными платежами.*

Срок ренты *– время от начала первого рентного периода до конца последнего.*

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами:

- величина отдельного платежа C_k (C_k – платеж за год k);
- период ренты (интервал времени между последовательными платежами);
- срок ренты n (интервал времени от начала до конца последнего периода);
- процентная ставка r;
- число платежей в год – p;
- момент платежей (начало или конец периода).

На практике используются различные виды финансовых рент.

Ренты, по которым платежи производятся раз в год, называются *годовыми*. При производстве платежей несколько раз в году (p раз) ренты называются p*-срочными*. Эти ренты называются дискретными, т. к. платежи поступают (выплачиваются) через дискретные промежутки времени.

Ренты, у которых платежи производятся так часто, что их можно рассматривать как непрерывные, соответственно называются *непрерывными*.

В зависимости от *частоты начисления процентов* различают ренты:

- с начислением процентов один раз в году;
- с начислением несколько раз в году (m раз);
- с непрерывным начислением.

С точки зрения *стабильности размера платежей* ренты подразделяются на *постоянные* (платежи – члены ренты равны между собой) и *переменные* (разные по величине платежи).

Рента, выплата которой не ограничена какими-либо условиями, называется *верной*. Рента, выплата которой обусловлена наступлением какого-либо события, называется *условной*, и число ее членов предусмотреть невозможно (например, страховые взносы, вносимые до наступления страхового случая).

Ренты могут иметь конечное число членов (*ограниченные*) или бесконечное число членов (*вечные*).

По моменту выплат платежей ренты подразделяются на ренты *постнумерандо*, в которых платежи производятся в конце соответствующих периодов (года, полугодия и т. д.), и *пренумерандо*, в которых платежи осуществляются в начале периодов.

На рисунке 1.1 приведены примеры графического представления потоков пренумерандо и постнумерандо для периода в четыре года. Обозначения под линией означают начало и конец соответствующего года, 0 означает начало первого года, 1 – конец первого года, 2 – конец второго года и т. д. При этом конец года 1 и начало года 2 совпадают и на рисунке обозначаются символом 1, символ 2 – это конец года 2 и одновременно начало года 3.

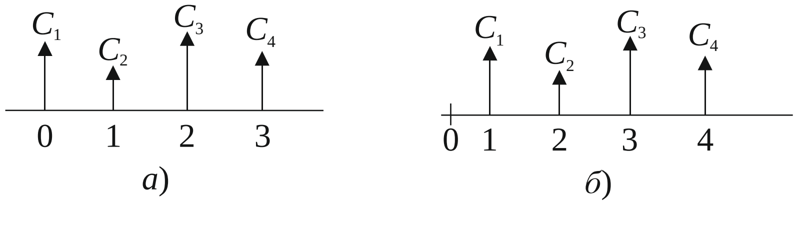
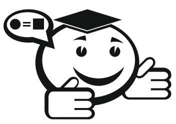


Рис. 1.1 – Денежные потоки:
пренумерандо (*а*), постнумерандо (*б*)

Различают также ренты *немедленные*, действие которых начинается сразу после заключенного договора, и *отложенные*, платежи по которым производятся по истечении некоторого оговоренного периода.

Частным случаем ренты является *аннуитет*.



***Аннуитет** – это серия платежей, которые вносятся (снимаются) через равные промежутки времени.*

***Постоянный аннуитет** – это серия платежей, которые вносятся (снимаются) через равные промежутки времени, при этом все платежи равны между собой.*

Термин «аннуитет» представляет собой буквальный перевод английского *annuity*, что означает *fixed sum paid every year* – фиксированные суммы, выплачиваемые каждый год, т. е. в самом значении слова подразумевается периодичность платежей.

Буквально аннуитет означает, что платежи происходят с интервалом в один год, однако встречаются потоки с иной периодичностью выплат.

Очевидно, что рента – это более широкое понятие, чем аннуитет, т. к. существует множество денежных потоков, члены которых не равны друг другу или распределены неравномерно.

1.2 Задачи оценки денежного потока

Необходимо отметить, что ключевым моментом в задачах оценки денежного потока является предпосылка, что анализ ведется с позиции «разумного инвестора», т. е. инвестора, не накапливающего полученные денежные средства, а немедленно инвестирующего их с целью получения дополнительного дохода. Именно этим объясняется тот факт, что во время оценки и при наращении, и при дисконтировании предполагается капитализация по схеме сложных процентов. Таким образом, оценка денежного потока выполняется с учетом фактора времени в рамках решения двух задач: прямой и обратной. Далее подробно рассмотрим каждую из них.

Прямая задача

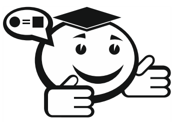
Прямая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока. Для понимания экономической сущности этой задачи рассмотрим ее частный случай: процесс накопления денег в банке и оценку величины наращенной суммы. Расчет наращения платежей проводится с помощью сложной процентной ставки r.

Если денежный поток представляет собой регулярные начисления процентов на вложенный капитал P по схеме сложных процентов, то в основе оценки наращенного денежного потока лежит формула нахождения будущей стоимости:

$$F = P \cdot (1 + r)^n, \qquad (1.1)$$

где P – сумма, внесенная на депозит или полученная в кредит; F – сумма, которая накопится на депозите, или сумма кредита к возврату; n – продолжительность финансовой операции; r – сложная процентная ставка в финансовой операции.

Величину $(1+r)^n$ называют *множителем наращения* и обозначают как $FM1(r,n)$.



Наращенная (будущая) сумма ренты FV *– это все платежи вместе с процентами на дату последней выплаты.*

Наращение денежных потоков имеет место при периодическом внесении на банковский депозит фиксированных сумм с целью накопления финансового фонда к определенному моменту времени.

Например, разместив долгосрочный облигационный заем, предприятие готовится к погашению суммы основного долга в конце срока займа путем периодического внесения на банковский счет фиксированных платежей под установленный процент. Таким образом, к моменту погашения облигационного займа у предприятия накопятся достаточные средства в этом фонде.

Аналогичные задачи решаются в ходе формирования пенсионного фонда или при накоплении суммы для оплаты обучения детей. Например, заботясь о своей старости, человек может наряду с обязательными отчислениями в государственный Пенсионный фонд вносить часть своего ежемесячного заработка на банковский депозит под проценты. Наращение суммы такого вклада будет происходить по описанному выше алгоритму. Таким же путем предприятия могут формировать амортизационный фонд для плановой замены оборудования.

Обратная задача

Обратная задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока. Наиболее наглядная ситуация в этом случае – оценка текущей стоимости ценной бумаги, владение которой дает возможность в будущем получать некоторые платежи.

Обратная задача предполагает суммарную оценку дисконтированного денежного потока. Так как отдельные элементы денежного потока генерируются в различные временные интервалы, а деньги имеют временную стоимость, непосредственное их суммирование невозможно.

Приведение денежного потока к одному моменту времени осуществляется по формуле нахождения приведенной стоимости:

$$P = \frac{F}{(1+r)^n}, \qquad (1.2)$$

где P – сумма, внесенная на депозит или полученная в кредит; F – сумма, которая накопится на депозите, или сумма кредита к возврату; n – продолжительность финансовой операции; r – сложная процентная ставка в финансовой операции.

Величину $\frac{1}{(1+r)^n}$ называют *множителем дисконтирования* и обозначают как $FM2(r,n)$.

Современная (приведенная) стоимость ренты PV *– это все платежи вместе с процентами, пересчитанные на начальный момент времени.*

В обеих задачах оценки денежного потока предполагается капитализация процентов, поэтому при вычислениях используется схема сложных процентов.

1.3 Оценка денежного потока постнумерандо

Оценка денежного потока постнумерандо предполагает решение прямой (определение стоимости данного потока с позиций будущего) и обратной задач (оценка с позиции начального момента).

Прямая задача оценки потока постнумерандо *представляет собой оценку денежного потока C_1, C_2, ..., C_n, период которого совпадает с базовым периодом начисления процентов по ставке r на конец периода n, когда реализуется схема наращения (рис. 1.2).*

На рисунке 1.2 представлен денежный поток постнумерандо. Предположим, что в течение n лет на депозит в конце каждого года вносятся денежные суммы C_k. На каждое из денежных поступлений через год после внесения начисляются сложные ссудные проценты по ставке r. Необходимо вычислить сумму, которая накопится на депозите к окончанию года n: рассчитать, чему будет равно каждое из денежных поступлений к концу n-го периода (привести все денежные поступления к одному моменту времени) и сложить все наращенные денежные поступления. В соответствии с принципом временной стоимости денег (см. учебное пособие [2]) мы можем производить расчеты только с денежными суммами, приведенными к одному моменту времени.

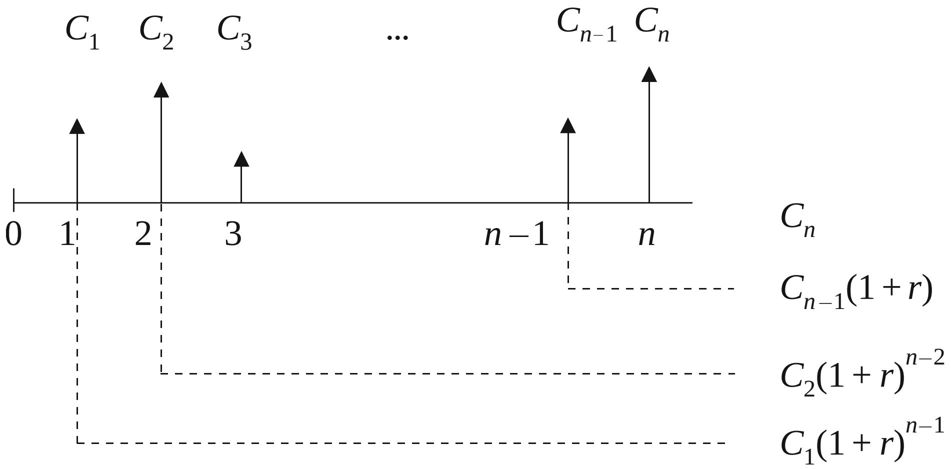


Рис. 1.2 – Схема наращения для решения прямой задачи
для потока постнумерандо

На первое денежное поступление C_1 начисляются сложные проценты за $n-1$ период, и оно в конце n-го периода станет равным $C_1 \cdot (1+r)^{n-1}$.

На второе денежное поступление C_2 начисляются сложные проценты за $n-2$ периода, и оно в конце n-го периода станет равным $C_2 \cdot (1+r)^{n-2}$.

Аналогично рассчитываются все последующие значения приращения вплоть до C_{n-1}.

На предпоследнее денежное поступление C_{n-1} проценты начисляются за один период, и оно будет в конце n-го периода равно $C_{n-1} \cdot (1+r)$.

На денежный поток C_n проценты не начисляются, т. к. это поступление происходит в конце года n.

Следовательно, *наращенный денежный поток* для исходного потока постнумерандо имеет вид:

$$C_1 \cdot (1+r)^{n-1}, C_2 \cdot (1+r)^{n-2}, \dots, C_{n-1} \cdot (1+r), C_n.$$

Будущая стоимость FV_{pst} исходного денежного потока постнумерандо может быть оценена как сумма наращенных поступлений, т. е. с помощью следующей формулы:

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (1+r)^{n-k}, \qquad (1.3)$$

где k – индекс суммирования, который также означает номер года, в который денежная сумма C_k поступила на депозит; C_k – денежное поступление в год с номером k.

Используя обозначение множителя наращения, получаем формулу:

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k FM1(r, n-k), \tag{1.4}$$

где FV_{pst} – будущая стоимость денежного потока постнумерандо; C_k – величина денежного поступления в год с номером k; n – продолжительность денежного потока (количество взносов на депозит); k – номер года; $FM1\ (r, n-k)$ – множитель наращения.

Пример

Задача

Семья копит деньги на квартиру, делая следующие взносы в банк: 100, 120, 130, 150, 160 тыс. у. е. в конце каждого года.

Какая сумма накопится на депозите через 5 лет, если на вклад начисляются сложные проценты по ставке 6% годовых?

Решение

Результаты расчетов оформим в виде таблицы.

Год	**Денежный поток C_k, у. е.**	**Множитель наращения $FM1\ (r, n–k)$**	**Наращенный поток, у. е.**
1-й	100 000	1,26 = $(1 + 0{,}06)^4$	126 248
2-й	120 000	1,19 = $(1 + 0{,}06)^3$	142 922
3-й	130 000	1,12 = $(1 + 0{,}06)^2$	146 068
4-й	150 000	1,06 = $(1 + 0{,}06)^1$	159 000
5-й	160 000	1,00 = $(1 + 0{,}06)^0$	160 000
Итого	660 000		734 238

Таким образом, на депозите через 5 лет накопится 734 238 у. е. Это на 74 238 у. е. больше, чем простая сумма взносов без учета процентной ставки.

Обратная задача *– это оценка денежного потока $C_1, C_2, \ldots, C_n$ с позиции текущего момента, т. е. на момент начала первого периода.*

В этом случае реализуется *схема дисконтирования*, и расчеты необходимо вести по приведенному потоку, все элементы которого с помощью дисконтных множителей приведены к настоящему моменту времени. Элементы приведенного денежного потока можно суммировать; их сумма характеризует приведенную, или текущую, стоимость потока, которую при необходимости можно сравнивать с величиной первоначальной инвестиции. Схема дисконтирования для исходного потока постнумерандо представлена на рисунке 1.3.

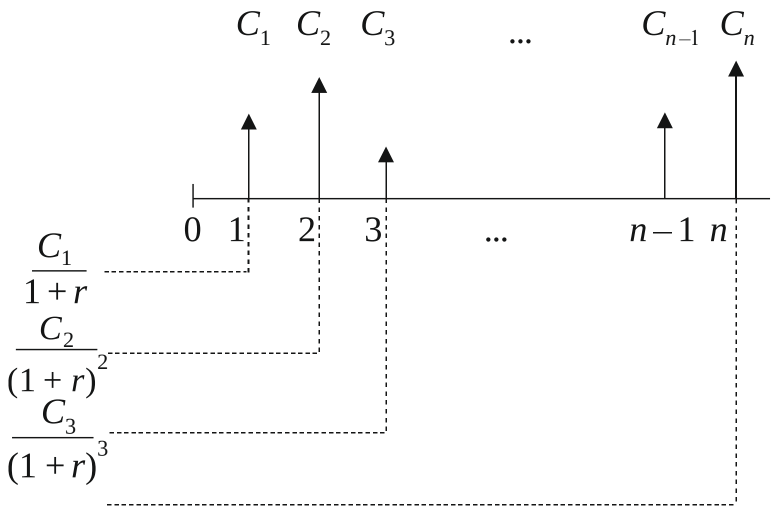


Рис. 1.3 – Схема дисконтирования для решения обратной задачи для потока постнумерандо

На рисунке 1.3 представлен денежный поток постнумерандо. Предположим, что ежегодно в течение *n* лет планируется поступление доходов в сумме C_k (величина планируемого дохода в год с номером *k*). Необходимо вычислить стоимость будущих доходов на начальный момент времени (начало года 1). Такая задача возникает при оценке эффективности инвестиционных проектов, если надо сравнить начальные вложения в проект и будущие доходы, поступающие во время реализации проекта. Для этого необходимо рассчитать стоимость каждого будущего денежного поступления на начало первого периода (привести все денежные поступления к одному моменту времени) и далее сложить все приведенные денежные поступления. В соответствии с принципом временной стоимости денег (см. учебное пособие [2]) мы можем производить расчеты только с денежными суммами, приведенными к одному моменту времени.

Приведенная стоимость каждого будущего денежного поступления рассчитывается по формуле 1.2, при этом $F = C_k$.

Первое денежное поступление C_1, приведенное к начальному моменту времени, равно $\frac{C_1}{1+r}$.

Второе денежное поступление C_2, приведенное к начальному моменту времени, равно $\frac{C_2}{(1+r)^2}$.

Аналогично рассчитываются последующие денежные поступления, приведенные к начальному моменту времени: знаменатель возводится в степень, соответствующую порядковому номеру поступления.

Последнее денежное поступление C_n, приведенное к начальному моменту времени, равно $\frac{C_n}{(1+r)^n}$.

Таким образом, *приведенный денежный поток* для исходного потока постнумерандо имеет вид:

$$\frac{C_1}{1+r}, \frac{C_2}{(1+r)^2}, \dots, \frac{C_n}{(1+r)^n}.$$

Приведенная стоимость денежного потока (аннуитета) постнумерандо PV_{pst} в общем случае может быть рассчитана по формуле:

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}, \tag{1.5}$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость денежного потока постнумерандо; C_k – величина денежного поступления в год с номером k; n – продолжительность денежного потока (количество взносов на депозит); k – номер года; $FM1(r, n-k)$ – множитель наращения.

Если использовать дисконтный множитель, то формула примет следующий вид:

$$PV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k FM2(r,k), \tag{1.6}$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость денежного потока постнумерандо; C_k – величина денежного поступления в год с номером k; n – продолжительность денежного потока (количество взносов на депозит); k – номер года; $FM2(r, n-k)$ – множитель дисконтирования.

Пример

Задача

В течение 5 лет предприниматель планирует получать доходы в сумме в 500, 550, 580, 600, 620 тыс. руб. соответственно. Оцените приведенную стоимость будущих доходов, если процентная ставка r за период, равный одному году, составляет 10%.

Решение

Результаты расчетов оформим в таблице.

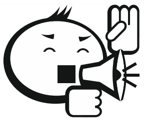
Год	**Денежный поток, тыс. руб.**	**Дисконтный множитель *FM*2(*r*, *n*) при *r* = 10%**	**Приведенный поток, тыс. руб.**
1	500	$0,91=\frac{1}{(1+0,1)^1}$	455
2	550	$0,83=\frac{1}{(1+0,1)^2}$	455
3	580	$0,75=\frac{1}{(1+0,1)^3}$	436
4	600	$0,68=\frac{1}{(1+0,1)^4}$	410
5	620	$0,62=\frac{1}{(1+0,1)^5}$	385
Итого	2 850		2 140

Дисконтированное значение денежного потока существенно меньше арифметической суммы элементов денежного потока. Чем больше процентная ставка, тем меньше приведенная стоимость денежного потока.

Оценку приведенной стоимости аннуитета можно рассматривать с точки зрения ситуации, когда платежи $C_1, C_2, ..., C_n$, выплачиваемые соответственно в конце первого, второго, …, n-го периодов, заменяются одним платежом PV_{pst} с выплатой в начальный момент времени.

Тогда формулу (1.5) можно получить, не указывая явным образом приведенный денежный поток, а осуществляя приведение величины FV_{pst} к настоящему моменту времени:

$$PV_{pst} = \frac{FV_{pst}}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_k (1+r)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}.$$



Обратный по отношению к наращению процесс *дисконтирования денежного потока* имеет еще большую важность для анализа денежных потоков, т. к. в результате определяются показатели, являющиеся в настоящее время основными критериями принятия финансовых решений.

Предположим, что рассмотренный в предыдущем примере денежный поток характеризует планируемые поступления от реализации инвестиционного проекта. Доходы должны поступать в конце периода. Так как эти поступления планируется получить в будущем, а инвестиции, необходимые для выполнения проекта, должны быть произведены уже сегодня, предприятию необходимо сопоставить величину будущих доходов с современной величиной затрат. Для обеспечения сопоставимости данных величина будущих поступлений должна быть приведена к настоящему моменту, иными словами, данный денежный поток должен быть дисконтирован по ставке 10%. Так предприятие сможет определить сегодняшнюю стоимость будущих доходов и принять инвестиционное решение.

1.4 Оценка денежного потока пренумерандо

Логика оценки потока пренумерандо аналогична вышеописанной логике оценки потока постнумерандо. Некоторое расхождение в вычислительных формулах объясняется сдвигом элементов потока к началу соответствующих периодов.

Схема наращения для прямой задачи показана на рисунке 1.4.

Наращенный денежный поток имеет вид:

$$C_1(1+r),\ C_2(1+r)^{n-1},\ C_3(1+r)^{n-2}, \ldots, C_n(1+r).$$

Будущая стоимость исходного денежного потока пренумерандо FV_{pre} может быть рассчитана по формуле:

$$FV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (1+r)^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot FM1(r, n-k+1), \qquad (1.7)$$

где C_k – величина денежного поступления в год с номером k; n – продолжительность денежного потока (количество взносов на депозит); k – номер года.

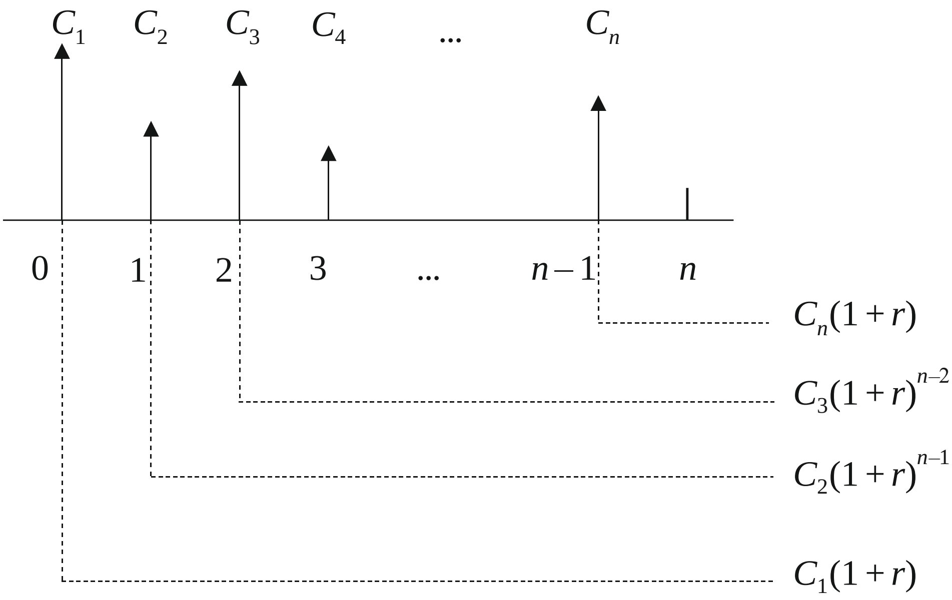


Рис. 1.4 – Схема наращения для решения прямой задачи
для потока пренумерандо

Формулу (1.7) можно записать в виде:

$$FV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (1+r) \cdot (1+r)^{n-k} = (1+r) \sum_{k=1}^{n} C_k (1+r)^{n-k}.$$

Будущая стоимость потока постнумерандо в $(1+r)$ раз больше будущей стоимости потока пренумерандо:

$$FV_{pre} = FV_{pst} \cdot (1+r). \qquad (1.8)$$

Формулу (1.8) можно объяснить с финансовой точки зрения: в потоке пренумерандо все платежи поступают на один период раньше, чем в потоке постнумерандо, поэтому для каждого из поступлений есть один дополнительный период начисления процентов.

Пример

Задача

Семья копит деньги на квартиру, делая в начале каждого года следующие взносы в банк: 100, 120, 130, 150, 160 тыс. у. е.

Какая сумма накопится на депозите через 5 лет, если на вклад начисляются сложные проценты по ставке 6% годовых.

Решение

Результаты расчетов оформим в таблице.

Год (k)	**Денежный поток, у. е.**	**Множитель наращения $FM1(r, n - k)$ при $r = 6\%, n = 5$**	**Наращенный поток, у. е.**
1	100 000	1,34	133 823
2	120 000	1,26	151 497
3	130 000	1,19	154 832
4	150 000	1,12	168 540
5	160 000	1,06	169 600
Итого	660 000		778 292

Таким образом, на депозите через 5 лет накопится 778 292 у. е. Это на 118 292 у. е. больше, чем простая сумма взносов без учета процентной ставки. Этот же результат можно было бы получить по формуле (1.8):

$$FV_{pre} = FV_{pst}(1 + 0,06) = 778\,292\ (\text{у. е.}).$$

. . . .

Схема дисконтирования для обратной задачи представлена на рисунке 1.5.

Приведенный денежный поток для исходного потока пренумерандо имеет вид:

$$C_1,\ \frac{C_2}{1+r}, \frac{C_3}{(1+r)^2}, \ldots, \frac{C_n}{(1+r)^{n-1}}.$$

Следовательно, приведенная стоимость потока пренумерандо PV_{pre} может быть рассчитана по формуле:

$$PV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot FM2(r, k-1). \tag{1.9}$$

Формулу (1.9) можно записать в виде:

$$PV_{pre} = (1+r)\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} = (1+r)\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot FM2(r, k).$$

Таким образом, приведенная стоимость определяется по формуле:

$$PV_{pre} = PV_{pst}(1+r). \tag{1.10}$$

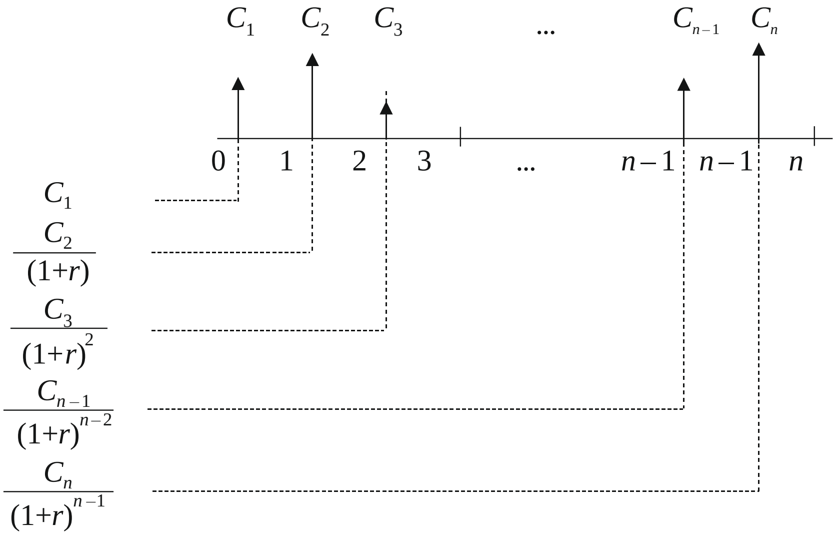


Рис. 1.5 – Схема дисконтирования для обратной задачи
для потока пренумерандо

Пример

Задача

В течение 5 лет предприниматель планирует получать в начале каждого года доходы в сумме 500, 550, 580, 600, 620 тыс. руб. соответственно. Оцените приведенную стоимость будущих доходов, если процентная ставка r за период, равный одному году, составляет 10%.

Решение

Расчеты приведем в таблице.

Год (*k*)	**Денежный поток, тыс. руб.**	**Дисконтный множитель *FM*2(*r*, *k*–1) при *r* = 10%**	**Приведенный поток, тыс. руб.**
1	500 000	1,00	500 000
2	550 000	0,91	500 000
3	580 000	0,83	479 339
4	600 000	0,75	450 789
5	620 000	0,68	423 468
Итого	2 850 000		2 353 596

Дисконтированное значение денежного потока существенно меньше арифметической суммы элементов денежного потока. Чем больше процентная ставка, тем меньше приведенная стоимость денежного потока.

Такой же результат можно получить с помощью формулы (1.10):

$$PV_{pre} = PV_{pst}(1+1{,}1) = 2\,353\,596\ (\text{у. е.}).$$

Выводы

Одним из ключевых понятий в финансовом менеджменте является понятие денежного потока как совокупности притоков и/или оттоков денежных средств, имеющих место через некоторые временные интервалы.

Денежный поток, срок действия которого ограничен, называется срочным. Если притоки (оттоки) осуществляются неопределенно долго, денежный поток называется бессрочным. Если притоки (оттоки) осуществляются в начале периодов, денежный поток носит название пренумерандо, если в конце периодов – постнумерандо. Денежный поток с равными по величине временными интервалами называется финансовой рентой или аннуитетом.

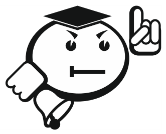
Известны две задачи оценки денежного потока с учетом фактора времени: прямая и обратная. Первая задача позволяет оценить будущую стоимость денежного потока; для понимания экономической сущности этой задачи ее легче всего связывать с процессом накопления денег в банке и оценкой величины наращенной суммы. Вторая задача позволяет оценить приведенную стоимость денежного потока; наиболее наглядная ситуация в этом случае – сравнение текущих вложений в некоторый инвестиционный проект и будущих доходов, получаемых во время реализации проекта.

Контрольные вопросы по главе 1

1. Что такое финансовая рента?
2. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
3. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.
4. Перечислите виды денежных потоков по критерию стабильности платежей.
5. Перечислите виды денежных потоков по критерию количества начислений процентов внутри базового периода.
6. Предположим, вы решили накопить денег на отпуск. Какую схему накопления вы выберете – с внесением денежных средств на депозит в конце или в начале года? Аргументируйте свой выбор.

2 Особенности постоянных аннуитетов

2.1 Решение прямой задачи оценки постоянного аннуитета



Аннуитет называется **постоянным**, если все денежные поступления равны друг другу по величине.

Для постоянного аннуитета:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1} = C_n.$$

Платеж постоянного аннуитета принято обозначать символом A.

Прямая задача оценки постоянного аннуитета при заданных величинах регулярного поступления и процентной ставке r предполагает оценку будущей стоимости аннуитета.

Прямая задача решается с помощью формулы (2.1), в которой все поступления $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_n$ равны друг другу по величине. Обозначим величину денежного поступления через A.

Тогда формула (1.3) для определения будущей стоимости постоянного аннуитета примет вид:

$$FV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A \cdot FM3(r,n), \qquad (2.1)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость постоянного аннуитета постнумерандо; A – величина денежного поступления в год с номером k; n – продолжительность денежного потока (количество взносов на депозит); k – номер года.

Входящий в формулу множитель $FM3(r,n)$ называется *множителем наращения ренты* (*аннуитета*) и представляет собой сумму n первых членов геометрической прогрессии, начинающейся с $a=1$ и имеющей знаменатель $q=1+r$ [3].

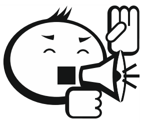
Таким образом, коэффициент наращения ренты имеет вид:

$$FM3(r,n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что

$$FM3(r,n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r} = \frac{FM1(r,n) - 1}{FM3(r,n) - 1}.$$

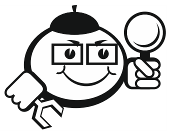
Экономический смысл множителя $FM3(r,n)$ заключается в следующем: он показывает, чему будет равна суммарная величина срочного аннуитета в одну денежную единицу (например, в один рубль) к концу срока его действия. Предполагается, что производится лишь начисление денежных сумм, а их изъятие может быть сделано по окончании срока действия аннуитета. Множитель часто используется в финансовых вычислениях. Его значения зависят лишь от процентной ставки r и срока n действия аннуитета, причем с увеличением каждого из этих параметров величина множителя $FM3(r,n)$ возрастает [3].



Множитель $FM3(r,n)$ показывает, во сколько раз наращенная сумма аннуитета больше величины денежного поступления A. Множитель также равен будущей стоимости аннуитета с платежом в одну денежную единицу.

Например, значение множителя $FM3(10\%,5) = 6{,}105$. Это означает, что если в течение 5 лет вносить на депозит по 1 тыс. руб., а на поступающие взносы будут начисляться сложные ссудные проценты по ставке 10% годовых, то к окончанию пятилетнего срока на депозите накопится 6 105 руб. Это на 1 105 руб. больше суммы, которую мы получим, если будем просто 5 лет откладывать по 1 тыс. руб.

Значение множителя *FM*3 возрастает при увеличении процентной ставки.



Пример

Значение множителя $FM3(12\%,5) = 6{,}352$. Это означает, что если в течение 5 лет вносить на депозит по 1 тыс. руб., а на поступающие взносы будут начисляться сложные ссудные проценты по ставке 12% годовых, то к окончанию пятилетнего срока на депозите накопится 6 352 руб. Это на 1 352 руб. больше суммы, которую мы получим, если будем 5 лет откладывать по 1 тыс. руб.

Формула (2.2) охватывает и пограничные случаи:

- при одном денежном поступлении $(n = 1)$ коэффициент наращивания примет значение $FM3(r,n) = 1$, а будущая стоимость аннуитета $FV_{pst} = A$;

- при $r = 0$ (не происходит никаких начислений) из формулы (2.2) получаем $FV_{pst} = nA$, т. е. денежные поступления просто суммируются.

Эти результаты очевидны. Иногда рассматривают и случай $n = 0$ (денежные поступления отсутствуют) и полагают, что $FM3(r,0) = 0$.

Пример

Задача

Вам предлагают сдать в аренду участок земли на 20 лет, выбрав один из вариантов оплаты:

1) 200 тыс. руб. в конце каждого года;
2) 12 млн руб. в конце двадцатилетнего периода.

Какой вариант предпочтительней, если банк предлагает по вкладам 10% годовых? Как изменится ответ при увеличении ставки до 11% годовых?

Решение

Получение арендной платы частями – это аннуитет, платеж аннуитета 200 тыс. руб., срок аннуитета 20 лет, ставка 10% годовых. Для решения задачи нужно найти будущую стоимость аннуитета и сравнить ее с величиной 12 млн руб.

Используем формулу (2.1) для нахождения будущей стоимости аннуитета при A = 200 000 руб., r = 10%, n = 20 лет:

$$FV_{pst} = 200\,000 \cdot FM3\left(10\%, 20\right) = 11\,455\,000\,(\text{руб.}).$$

Получение арендной платы частями позволит накопить за 20 лет 11 455 000 руб., поэтому второй вариант арендной платы предпочтительней.

При увеличении ставки до 11% годовых будущая стоимость аннуитета при A = 200 000 руб., r = 11%, n = 20 лет:

$$FV_{pst} = 200\,000 \cdot FM3\left(11\%, 20\right) = 12\,840\,566\,(\text{руб.}).$$

Получение арендной платы частями позволит накопить за 20 лет 12 840 566 руб., поэтому первый вариант арендной платы предпочтительней.

Задача

Фирме предложено инвестировать 100 млн руб. на срок 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 30 млн руб.); по истечении четырех лет будет выплачено дополнительное вознаграждение в размере 10 млн руб.

Примет ли фирма это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 10% годовых?

Решение

Для ответа на вопрос необходимо сравнить суммы, которые фирма может получить через 4 года по каждому из вариантов инвестирования, и выбрать максимальную величину.

Вычислим сумму, которую фирма получит через 4 года при условии инвестирования, возврата от инвестиций и дополнительного вознаграждения в конце 4-го года. Возврат от инвестиций – это аннуитет.

Вычислим будущую стоимость аннуитета постнумерандо при $A = 30$ млн, $n = 4$, $r = 10\%$ по формуле (2.1):

$$FV_{pst} = 30 \cdot FM3(10\%, 4) = 30 \cdot 4{,}64 = 139{,}23 \text{ (млн руб.)}.$$

С учетом дополнительного вознаграждения в 10 млн руб. общая сумма, обозначим ее $F1$, будет равна:

$$F1 = 139{,}23 + 10 = 149{,}23 \text{ (млн руб.)}.$$

Вычислим сумму, которая накопится за 4 года при условии депонирования денег на счет по формуле (1.1):

$$F2 = 100 \cdot (1 + 0{,}1)^4 = 146{,}41 \text{ (млн руб.)}.$$

$F1 > F2$, поэтому фирме выгодно принимать данное предложение, инвестировать средства при условии возврата частями и получения дополнительного вознаграждения в конце 4-го года.

. . . .

Выведем формулы для определения будущей стоимости аннуитета с начислением процентов m раз в течение базового периода [3].

Если r является процентной ставкой (в десятичных дробях) за базовый период, а начисление сложных процентов происходит m раз в течение этого периода, то наращенный денежный поток внутри каждого базового периода, начиная с последнего денежного поступления, имеет вид:

$$A,\ A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m},\ A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m},\ \dots,\ A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(n-1)m}.$$

Получили геометрическую прогрессию, первый член которой равен A, а знаменатель $q = \left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m}$.

Следовательно, сумма n первых членов этой прогрессии равна:

$$FV_{pst} = A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1} = A\frac{\dfrac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\frac{r}{m}}}{\dfrac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}{\frac{r}{m}}} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m},mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},m\right)}. \qquad (2.3)$$

Таким образом, если в течение базового периода на денежные поступления m раз начисляются сложные проценты по ставке r, то будущую стоимость такого аннуитета можно найти по формуле (2.3).

Пример

Задача

Владелец малого предприятия создает страховой фонд. С этой целью в течение 5 лет в конце каждого года в банк вносится 100 000 руб. под 8% годовых с последующей капитализацией. Определите наращенную сумму, если капитализация процентов будет:

1) ежегодная;
2) ежемесячная;
3) еженедельная.

Решение

1. Используем формулу (2.1) для нахождения наращенной суммы:
   Тогда при $A = 100\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет:
   $$FV_{pst} = 100\,000 \cdot FM3(8\%, 5) = 586\,660 \text{ (руб.)}.$$
2. Используем формулу (2.3) для нахождения наращенной суммы:
   Тогда при $A = 100\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет, $m = 12$:
   $$FV_{pst} = 100\,000 \cdot \frac{FM3\left(\frac{8\%}{12}, 5\cdot 12\right)}{FM3\left(\frac{8\%}{12}, 12\right)} = 590\,179 \text{ (руб.)}.$$
3. Используем формулу (2.3) для нахождения наращенной суммы:
   Тогда при $A = 100\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет, $m = 12$:

$$FV_{pst} = 100000 \cdot \frac{FM3\left(\frac{8\%}{52}, 5 \cdot 52\right)}{FM3\left(\frac{8\%}{52}, 52\right)} = 590\ 439 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, чем чаще происходит капитализация процентов, тем больше наращенная сумма.

. . . .

Пусть в течение базового периода денежные поступления происходят p раз за период и один раз в конце периода начисляются сложные проценты по сложной ставке r. Определим сумму, которая накопится к концу любого периода [3].

На последнее поступление денежных средств, которое происходит в момент p, проценты не начисляются, и оно остается равным A. На предпоследнее поступление, которое происходит в момент $(p-1)$, начисляются сложные проценты за $\frac{1}{p}$-ю часть периода, и оно будет равно $A(1+r)^{1/p}$.

На поступление денежных средств, которое происходит в момент времени $(p-2)$, начисляются сложные проценты за $\frac{2}{p}$-ю часть периода, и оно будет равно $A(1+r)^{2/p}$. Подобным образом рассчитываются суммы, накапливающиеся к концу любого периода (показатель степени соответствует рассматриваемой части периода).

Поступление денежных средств, которое происходит в конце периода, равного p, внутри каждого года, в конце каждого года будет равно $A(1+r)^{(p-1)/p}$.

Полученная последовательность величин представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом A, знаменателем $\left(1+r\right)^{1/p}$ и числом членов, равным p, поэтому сумма всех денежных поступлений к концу года с учетом начисляемых процентов равна:

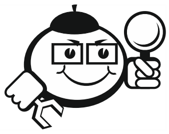
$$A\frac{(1+r)^{p \cdot 1/p} - 1}{(1+r)^{1/p} - 1} = A\frac{r}{(1+r)^{1/p} - 1}.$$

Таким образом, можно считать, что мы рассматриваем аннуитет, в котором денежные поступления равны величине $A\dfrac{r}{(1+r)^{1/p}-1}$ и происходят в конце каждого базового периода начисления процентов. Поэтому будущая стоимость такого аннуитета равна:

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{r}{(1+r)^{1/p}-1}FM3(r,n).$$

Учитывая явный вид $FM3(r,n)$, можно записать формулу для будущей стоимости аннуитета следующим образом:

$$FV_{pst} = A\frac{FM3(r,n)}{FM3\left(r,\dfrac{1}{p}\right)}. \qquad (2.4)$$



Пример

Задача

Владелец малого предприятия создает страховой фонд. С этой целью в течение 5 лет в банк вносятся денежные суммы под 8% годовых с ежегодной капитализацией процентов. Определите наращенную сумму, если взносы будут:

1) ежегодно по 120 тыс. руб.;
2) ежеквартально по 30 тыс. руб.;
3) ежемесячно по 10 тыс. руб.

Решение

1. Используем формулу (2.1) для определения будущей стоимости фонда. Тогда при $A = 120\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет:

$$FV_{pst} = 120\,000 \cdot FM3(8\%,5) = 703\,992 \text{ (руб.)}.$$

2. Используем формулу (2.4) для определения будущей стоимости фонда. Тогда при $A = 30\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет, $p = 4$:

$$FV_{pst} = 30\,000 \cdot \frac{FM3(8\%,5)}{FM3\left(8\%,\dfrac{1}{4}\right)} = 724\,773 \text{ (руб.)}.$$

3. Используем формулу (2.4) для определения будущей стоимости фонда. Тогда при $A = 10\,000$ руб., $r = 8\%$, $n = 5$ лет, $p = 12$:

$$FV_{pst} = 10\,000 \cdot \frac{FM3(8\%, 5)}{FM3\left(8\%, \frac{1}{12}\right)} = 729\,447 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, чем чаще происходят взносы, тем больше наращенная сумма. При этом общая сумма годового взноса равна 120 тыс. руб. в каждом из рассматриваемых случаев.

. . . .

Рассмотрим самую общую ситуацию, когда в течение базового периода денежные поступления происходят p раз и проценты начисляются m раз за период [3].

Определим в первую очередь сумму, образующуюся в конце любого периода. Последнее поступление, которое поступает в момент времени p, т. е. в конце периода, остается равным A. Предпоследнее поступление, которое поступает в момент времени $(p - 1)$, после начисления сложных процентов составит $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p}$, поступление $(p - 2)$ будет равно $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m/p}$ и т. д. до первого, которое станет равным $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{(p-1)m/p}$.

Находим сумму полученных величин:

$$A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\,p/p}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p}-1} = A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p}-1} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, m\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)}.$$

Считая, что есть аннуитет с денежными поступлениями, равными полученной сумме, воспользуемся формулой (2.3) для определения будущей стоимости аннуитета, с начислением процентов m раз внутри базового периода:

$$FV_{pst} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, m\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)}\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, m\right)} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)}. \qquad (2.5)$$

Непрерывное начисление процентов

Рассмотрим ренты с непрерывным начислением процентов с ежегодными платежами постнумерандо, равными величине A. Ряд платежей с начисленными непрерывными процентами, записанный в обратном порядке (начиная с последнего платежа), имеет вид:

$$A,\ A\cdot e^{\delta},\ A\cdot e^{2^{\delta}},\ ...,\ A\cdot e^{(n-1)^{\delta}},$$

где A – платеж аннуитета; δ – ставка непрерывных процентов.

Сумма членов прогрессии равна:

$$FV_{pst} = A\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}, \tag{2.6}$$

где e – основание натуральных логарифмов; A – платеж аннуитета; δ – ставка непрерывных процентов; FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета.

Аналогично для p-срочной ренты находим:

$$FV_{pst} = A\cdot\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta/p}-1}, \tag{2.7}$$

где A – платеж аннуитета; δ – ставка непрерывных процентов; p – количество поступлений денежных средств внутри базового периода; FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета.

Пример

Задача

Вы планируете сдать квартиру в аренду на три года. Арендная плата будет поступать в конце каждого полугодия в сумме 100 тыс. руб. Поступающие суммы вы будете вносить в банк на депозит под 8% годовых, при этом возможно:

1) ежегодное;
2) полугодовое;
3) ежеквартальное;
4) непрерывное начисление процентов.

Оцените, какой из вариантов депозита выгоднее.

Решение

1. Используем формулу (2.5) для определения будущей стоимости арендной платы.

   Тогда при n = 3, r = 8%, p = 2 получим:

$$FV_1 = 100\,000\cdot\frac{FM3(8\%,3)}{FM3\left(8\%,\frac{1}{2}\right)} = 662\,016\ (\text{руб.}).$$

   Через три года на депозите накопится 662 016 руб.

2. Используем формулу (2.1), считая периодом полугодие, для определения будущей стоимости арендной платы.

Тогда при $n = 3 \cdot 2 = 6, r = 8\% : 2 = 4\%$ получим:

$$FV_2 = 100\,000 \cdot FM3(4\%, 6) = 663\,298 \text{ (руб.)}.$$

Через три года на депозите накопится 663 298 руб.

3. Используем формулу (2.5) для определения будущей стоимости арендной платы.

   Тогда при $n = 3, r = 8\%, m = 4, p = 2$:

$$FV_3 = 100\,000 \cdot \frac{FM3(2\%, 12)}{FM3(2\%, 2)} = 663\,965 \text{ (руб.)}.$$

   Через три года на депозите накопится 663 965 руб.

4. Воспользуемся формулой (2.7) для определения будущей стоимости арендной платы.

   Тогда при $n = 3, \delta = 8\%, p = 2$:

$$FV_4 = 100\,000 \cdot \frac{e^{8\% \cdot 3} - 1}{e^{8\%/2} - 1} = 664\,651 \text{ (руб.)}.$$

   Через три года на депозите накопится 664 651 руб.

Сравним полученные результаты:

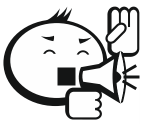
$$FV_1 < FV_2 < FV_3 < FV_4,$$

т. е. будущие стоимости увеличиваются с ростом количества начисления процентов на депозите. Самым выгодным вариантом депозита будет депозит с непрерывным начислением процентов.

Сравнение результатов наращения годовых и *p*-срочных рент постнумерандо с разными условиями выплат и наращения процентов

Как видно из приведенного выше примера, частота платежей и наращения процентов заметно влияет на размер наращенной суммы.

Обозначим сравниваемые суммы в общем виде как $FV(p;m)$.



Наращенная сумма годовой ренты будет обозначаться:

- $FV(1;1)$, если проценты начисляются ежегодно;
- $FV(1;m)$, если проценты начисляются m раз в году;
- $FV(p;1)$, если денежные средства поступают p раз, а проценты начисляются ежегодно;

- $FV(p;m)$, если денежные средства поступают p раз и проценты начисляются m раз в году.

. . . .

Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности рент и размеров процентных ставок получим следующие соотношения:

$$FV(1;1) < FV(1;m) < FV(1;\infty),$$

$$FV(p;1) < FV(p;m) < FV(p;\infty).$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при выборе условий контрактов, т. к. позволяют заранее (до расчета) получить представление о результатах, связанных с конкретными условиями. Например, можно заранее сказать, что рента с условиями: $p = 1$ и $m = 4$ дает меньшую наращенную сумму, чем с $p = 1$ и $m = 21$ при равенстве всех прочих условий.

. . . . **Пример** . . . .

В качестве иллюстрации приведем значения $FV(p;m)$ для ренты с параметрами $n = 20$, $A = 100$ денежных единиц (за год), $r = \delta = 10\%$ в таблице.

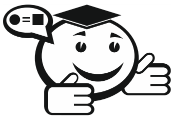
p	***A***	***m* = 1**	***m* = 2**	***m* = 4**	***m* = 12**	***m* = ∞**
1	100	5 727	5 893	5 981	6 043	6 075
2	50	5 867	6 040	6 133	6 198	6 231
4	25	5 938	6 115	6 210	6 276	6 310

Таким образом, при одном и том же значении параметра p самая большая будущая стоимость аннуитета будет при непрерывном начислении процентов. Чем чаще начисляются проценты внутри базового периода, тем больше будущая стоимость аннуитета.

При одном и том же параметре m самая большая будущая стоимость аннуитета будет при поступлении денежных средств ежеквартально. Чем чаще поступают денежные средства внутри базового периода, тем больше будущая стоимость аннуитета.

. . . .

2.2 Решение обратной задачи оценки аннуитета



Современная стоимость потока платежей *– это сумма дисконтированных членов этого потока, приведенного к начальному моменту времени* [1].

Данный показатель находит широкое применение в финансовых расчетах, таких как планирование погашения и реструктуризации долгосрочной задолженности, оценка эффективности инвестиционных проектов, покупка ценной бумаги, которая будет приносить дивиденды и т. д.

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо, платежи которого равны A, продолжительность аннуитета составляет n периодов и на каждый платеж один раз в конце каждого базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, проводится по формуле:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r,n), \tag{2.8}$$

где A – это платеж аннуитета; n – продолжительность аннуитета; k – номер года поступления платежа; r – сложная процентная ставка.

Множитель $FM4(r,n)$ *– коэффициент дисконтирования ренты* (*аннуитета*) – сумма конечной геометрической прогрессии с первым членом $b = \frac{1}{(1+r)}$ и знаменателем $q = \frac{1}{(1+r)} = (1+r)^{-1}$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $b\frac{q^n - 1}{q-1}$.

Поэтому $FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$.

Раскроем *экономический смысл* множителя $FM4(r,n)$. Множитель $FM4(r,n)$ – это приведенная стоимость аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере одной денежной единицы, продолжающегося n равных периодов, с заданной процентной ставкой r [1].

При $n=1$ значение множителя $FM4$ рассчитывается следующим образом:

$$FM4(r,1) = \frac{1-(1+r)^{-1}}{r} = \frac{1}{1+r}.$$

Поэтому при $n = 1$ приведенная стоимость аннуитета определяется по формуле:

$$PV_{pst} = \frac{A}{1+r}.$$

То есть при одном денежном поступлении приведенная стоимость аннуитета совпадает с приведенной стоимостью одного денежного поступления.

При $r = 0$ (нет начисления процентов) значение множителя $FM4(0, n)$ рассчитывается следующим образом:

$$FM4(0, n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^k} = n,$$

поэтому приведенная стоимость аннуитета $PV_{pst} = nA$.

Таким образом, при $r = 0$ (нет начисления процентов) будущая и приведенная стоимость аннуитета совпадают.

У множителя $FM4(r, n)$ есть еще одна экономическая интерпретация, которая и используется при решении задач.

Множитель $FM4(r, n)$ – это величина капитала, который надо внести в банк под сложную процентную ставку r, чтобы обеспечить регулярные выплаты в размере одной денежной единицы в течение n периодов (выплаты производятся в конце каждого периода).

Пример

Например, $FM4(15\%, 7) = 4{,}16$. Это означает, что если внести на депозит 4,16 руб. под сложную процентную ставку 15%, то можно снимать с депозита выплаты по 1 руб. в конце каждого года в течение 7 лет. За 7 лет с депозита будет снято 7 руб., и на депозите останется 0 руб.

При возрастании процентной ставки r уменьшаются величина дисконтного множителя $FM4(r, n)$ и величина приведенной стоимости. Так, значение множителя $FM4(20\%, 7) = 3{,}6$. Поэтому для того чтобы за 7 лет снять с депозита 7 руб., в банке достаточно оставить 3,6 руб. при ставке на депозите 20% годовых. За 7 лет с депозита будет снято 7 руб.

Выводы формул для нахождения приведенных стоимостей аннуитетов при начислении процентов и поступлении денежных средств несколько раз внутри базового периода аналогичны выводам формул для нахождения наращенных сумм. Следовательно, денежные потоки будут представлять собой геометрические прогрессии, знаменателями которых являются соответствующие дисконтные множители [3].

Так, для постоянного аннуитета постнумерандо с начислением сложных процентов m раз за базовый период приведенный денежный поток имеет вид:

$$\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}},\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m}},\ldots,\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}}.$$

Следовательно, приведенная стоимость аннуитета, определяющаяся как сумма приведенных стоимостей элементов денежного потока, равна:

$$PV_{pst}=\frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}}\frac{\frac{1}{\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right)^{n}}-1}{\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}}-1}=A\frac{FM4\left(\frac{r}{m},mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},m\right)}. \tag{2.9}$$

Для p-срочных аннуитетов с начислением сложных процентов соответственно один раз за базовый период и m раз за базовый период получим:

$$PV_{pst}=A\frac{FM4(r,n)}{FM3\left(r,\frac{1}{p}\right)}. \tag{2.10}$$

$$PV_{pst}=A\frac{FM4\left(\frac{r}{m},mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right)}. \tag{2.11}$$

Ренты с непрерывным начислением процентов

Рассмотрим ренты с непрерывным начислением процентов с ежегодными платежами постнумерандо, равными величине A. Ряд платежей, дисконтированных к начальному моменту времени при условии начисления непрерывных процентов, имеет вид [3]:

$$A\cdot e^{-\delta};A\cdot e^{-2^{\delta}};\ldots\cdot A\cdot e^{-n^{\delta}}.$$

Получим геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем $e^{-\delta}$. Сумма членов прогрессии находится следующим образом:

$$PV = A\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta n}-1}. \qquad (2.12)$$

Если имеет место p-срочная рента с непрерывным начислением процентов, то формула примет вид:

$$PV = A\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta/p}-1}. \qquad (2.13)$$

Пример

Задача

После выхода на пенсию предприниматель планирует получать ежегодный доход в течение 10 лет. Определите, какую сумму он должен внести на счет в банк, чтобы в течение 10 лет иметь возможность в конце каждого полугодия снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты:

1) ежегодно;
2) ежеквартально;
3) ежемесячно;
4) непрерывно.

В расчетах использовать ставку 8% годовых.

Решение

Для решения задачи необходимо использовать формулу (2.11) для расчета суммы, которую надо поместить в банк в пунктах 1–3, и формулу (2.13) для расчета суммы, которую надо поместить в банк в пункте 4.

Введем обозначения:

- A – сумма, которую планируем снимать со счета;
- n – продолжительность финансовой операции;
- r – процентная ставка;
- m – количество начислений процентов в году;
- p – количество снятий денежных средств в году.

1. Если $A = 100\,000$ руб., $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 1$, $p = 2$, то в банк необходимо поместить:

$$PV1 = 100\,000 \cdot \frac{FM4(8\%, 10)}{FM3\left(8\%, \frac{1}{2}\right)} = 814\,206 \text{ (руб.)}.$$

2. Если $A = 100\,000$ руб., $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 4$, $p = 2$, то в банк необходимо поместить:

$$PV2 = 100\,000 \cdot \frac{FM4(2\%, 40)}{FM3(2\%, 2)} = 809\,477 \text{ (руб.)}.$$

3. Если $A = 100\,000$ руб., $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 12$, $p = 2$, то в банк необходимо поместить:

$$PV3 = 100\,000 \cdot \frac{FM4\left(\frac{2}{3}\%, 120\right)}{FM3\left(\frac{2}{3}\%, 6\right)} = 808\,381 \text{ (руб.)}.$$

4. Если $A = 100\,000$ руб., $n = 10$ лет, $\delta = 8\%$, $p = 2$, то в банк необходимо поместить:

$$PV4 = 100\,000 \frac{1 - e^{-8\% \cdot 10}}{e^{4} - 1} = 807\,826 \text{ (руб.)}.$$

5. Сравним полученные результаты:

$$PV4 < PV3 < PV2 < PV1,$$

т. е. приведенные стоимости уменьшаются с ростом количества начисления процентов на депозите. Чем чаще начисляются проценты, тем меньшую сумму достаточно внести на депозит для того, чтобы иметь возможность в течение 10 лет в конце каждого полугодия снимать со счета по 100 тыс. руб. За 10 лет со счета будет снято 2 млн руб. при любом количестве начислений процентов в году.

Задача

После выхода на пенсию предприниматель планирует получать ежегодный доход в течение 10 лет. Определите, какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 8% годовых, чтобы в течение 10 лет иметь возможность:

1) в конце каждого года снимать со счета 200 тыс. руб.;
2) в конце каждого полугодия снимать 100 тыс. руб.;
3) в конце каждого квартала снимать 50 тыс. руб.

В итоге счет должен быть исчерпан полностью.

Проценты начисляются банком ежемесячно. В расчетах использовать ставку 8% годовых.

Решение

Для решения задачи необходимо использовать формулу (2.11), с помощью которой можно определить сумму, которую необходимо поместить в банк, чтобы иметь возможность снимать со счета денежные суммы в соответствии с условиями задачи.

Введем обозначения:

- A – сумма, которую планируем снимать со счета в качестве ежегодного дохода;
- n – продолжительность финансовой операции;
- r – процентная ставка;
- m – количество начислений процентов в году;
- p – количество снятий денежных средств в году.

1. Если $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 12$, $p = 1$, $A = 200\,000$ руб., то в банк необходимо поместить:

$$PV1 = 200\,000 \frac{FM4\left(\frac{2}{3}\%, 120\right)}{FM3\left(\frac{2}{3}\%, 12\right)} = 970\,277 \text{ (руб.)}.$$

2. Если $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 12$, $p = 2$, $A = 100\,000$ руб., то в банк необходимо поместить:

$$PV2 = 100\,000 \frac{FM4\left(\frac{2}{3}\%, 120\right)}{FM3\left(\frac{2}{3}\%, 6\right)} = 1\,000\,123 \text{ (руб.)}.$$

3. Если $n = 10$ лет, $r = 8\%$, $m = 12$, $p = 4$, $A = 50\,000$ руб., то в банк необходимо поместить:

$$PV3 = 50\,000 \frac{FM4\left(\frac{2}{3}\%, 120\right)}{FM3\left(\frac{2}{3}\%, 3\right)} = 1\,015\,275 \text{ (руб.)}.$$

4. Сравним полученные результаты:

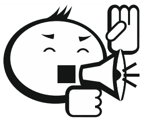
$$PV1 < PV2 < PV3,$$

т. е. приведенные стоимости увеличиваются с ростом количества снятий денежных средств в течение года.

Чем чаще планируется снимать денежные средства со счета, тем большую сумму для этого необходимо внести на счет. За 10 лет предприниматель сможет снять со счета в качестве дополнительного дохода 2 млн руб. в любом варианте снятия денежных средств (ежегодно по 200 тыс. руб.; по полугодиям по 100 тыс. руб.; ежеквартально по 50 тыс. руб.).

Сравнение современных стоимостей рент постнумерандо с разными условиями

Как видно из приведенного примера, величина современной стоимости заметно зависит от условий начисления процентов и частоты выплат в пределах года.



Обозначим сравниваемые суммы в общем виде как $PV(p;m)$.

Приведенная стоимость годовой ренты будет обозначаться:

- $PV(1;1)$, если проценты начисляются ежегодно;
- $PV(1;m)$, если проценты начисляются m раз в году;
- $PV(p;1)$, если денежные средства поступают p раз, а проценты начисляются ежегодно;
- $PV(p;m)$, если денежные средства поступают p раз и проценты начисляются m раз в году.

Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительностей рент и размеров процентных ставок получим следующее соотношение:

$$PV(1;1) > PV(1;m) > PV(1;\infty).$$

Если мы планируем снимать с депозита периодически некоторую сумму денежных средств в течение n периодов m и рассчитываем сумму, которую необходимо внести для этого на депозит, то сделанные выше расчеты означают следующее: чем чаще происходит начисление процентов на депозите, тем меньшую сумму надо внести на депозит для обеспечения необходимых снятий денежных средств.

Вычисление будущей и приведенной стоимости постоянного аннуитета пренумерандо осуществляется по формулам:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = FV_{pst}\cdot FM1\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right); \qquad (2.14)$$

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} = PV_{pst}\cdot FM1\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right). \quad (2.15)$$

2.3 Определение параметров аннуитета

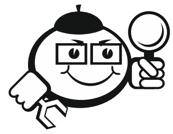
Для нахождения будущей стоимости FV_{pst} аннуитета самого общего вида необходимо знать значения пяти параметров: A, r, n, m, p.

На практике часто при заключении некоторого контракта его конечная стоимость может быть уже задана, но требуется определить, например, величину A разовых денежных поступлений. В этом случае при заданных значениях остальных параметров получаем:

$$A = FV_{pst}\frac{FM3\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},mn\right)}. \quad (2.16)$$

Если же известна приведенная стоимость контракта, тогда формула для вычисления величины платежа примет вид:

$$A = PV_{pst}\frac{FM3\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right)}{FM4\left(\frac{r}{m},mn\right)}. \quad (2.17)$$



Пример

Задача

Необходимо найти размер равных годовых взносов в конце года для следующих двух ситуаций, каждая из которых предусматривает ежегодное начисление сложных процентов по ставке 12% годовых, если планируется:

1) создать за 10 лет резервный фонд в сумме 2 млн руб.;
2) погасить за 10 лет текущую задолженность в сумме 2 млн руб.

Решение

1. Если планируется создать резервный фонд, то 2 млн руб. – это будущая стоимость аннуитета, поэтому размер взноса находим из формулы (2.16) при $FV_{pst} = 2\,000\,000$ руб., $m=1$, $p=1$, $r=12\%$, $n=10$ лет:

$$A = 2\,000\,000\cdot\frac{FM3(12\%,1)}{FM3(12\%,10)} = 113\,968 \text{ (руб.)}.$$

Для создания фонда необходим ежегодный взнос на депозит 113 968 руб.

2. Если планируется погашение задолженности, то 2 млн руб. – это приведенная стоимость аннуитета, поэтому размер взноса находим из формулы (2.17) при $PV_{pst} = 2\,000\,000$ руб., $m = 1$, $p = 1$, $r = 12\%$, $n = 10$ лет:

$$A = 2\,000\,000 \cdot \frac{FM3(12\%,1)}{FM4(12\%,10)} = 353\,968 \text{ (руб.)}.$$

Для погашения задолженности необходимо ежегодно вносить 353 968 руб.

. . . .

Если известны будущая стоимость аннуитета PV_{pst}, величина A разового годового платежа и процентная ставка r, то формула для расчета срока аннуитета будет следующая:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{FV_{pst}}{A} r + 1\right)}{\ln(1+r)}. \tag{2.18}$$

Если известны приведенная стоимость аннуитета PV_{pst}, величина A разового годового платежа и процентная ставка r, то формула для расчета срока аннуитета будет иметь вид:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{PV_{pst}}{A} r\right)}{\ln(1+r)}. \tag{2.19}$$

Аналогичным образом можно получить формулы для определения сроков постоянных аннуитетов других видов. Расчет процентной ставки при известных остальных параметрах аннуитета требует применения *интерполяционных формул*.

. . . . Пример . . . .

Задача

Некоторое предприятие хочет создать фонд в размере 800 млн руб. С этой целью в конце каждого года предприятие предполагает вносить по 200 млн руб. в банк под 18% годовых. Определите срок, необходимый для создания фонда.

Решение

Если предприятие планирует создание фонда, то 800 млн руб. – это будущая стоимость аннуитета, поэтому используем формулу (2.18) для нахождения срока создания фонда.

Тогда при $FV = 800$ млн руб., $r = 18\%$, $A = 200$ млн руб.:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{800}{200}0{,}18 + 1\right)}{\ln\left(1 + 0{,}18\right)} = 3{,}2766.$$

Таким образом, для создания фонда потребуется 4 года (ответ округляем в сторону большего целого числа).

Задача

Некоторая фирма создала фонд в размере 50 млн руб. для премирования своих работников. Фирма предполагает ежегодно в конце года выплачивать работникам 6 млн руб. Нужно найти срок использования фонда, если банк начисляет ежегодно сложные проценты по ставке 9% годовых.

Решение

Если фонд уже создан, то 50 млн руб. – это приведенная стоимость аннуитета, поэтому используем формулу (2.19) для нахождения срока использования фонда.

Тогда при $PV = 50$ млн руб., $r = 9\%$, $A = 6$ млн руб.:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{50 \cdot 0{,}09}{6}\right)}{\ln(1 + 0{,}09)} = 16{,}09 \text{ (лет)}.$$

Таким образом, срок использования фонда – 16 лет (ответ округляем до ближайшего целого числа).

Рассмотрим пример, в котором необходимо рассчитать платеж ренты, но будущая и приведенная стоимость явно не заданы.

Задача

Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы в фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы. Данные суммы обеспечат ему дополнительные выплаты в размере 300 тыс. руб. в конце каждого года в течение 10 лет после выхода на пенсию. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку размером в 10%?

Решение

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.

1. По формуле (2.6) при $A = 300\,000$ млн руб., $r = 10\%$, $n = 10$ лет найдем приведенную стоимость этого аннуитета:

$$PV_{pst} = 300\,000 \cdot FM4(10\%,10) = 300\,000 \cdot 6{,}145 = 1843\,500\ (\text{руб.}).$$

   Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 1 843 500 руб., то можно ежегодно снимать с него 300 тыс. руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.

2. Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет $(60 - 40 = 20)$ накопить 1 843 500 руб.

   При $FV_{pre} = 1843\,500$ руб., $n = 20$ лет, $r = 10\%$, $m = 1$, $p = 1$ с помощью формул (2.1) и (2.10) определим размер вклада:

$$A = \frac{1843\,500}{FM3(10\%,\,20) \cdot (1 + 0{,}1)} = 29\,261\,(\text{руб.}).$$

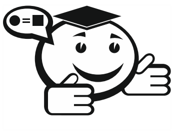
   Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 29 161 руб. ежегодно.

. . . .

2.4 Отсроченный аннуитет

Рассмотрим обобщение аннуитета, когда первый из потока платежей начинает поступать через h периодов. Такой аннуитет называется *отсроченным*.

. . . .



Отсроченный аннуитет *– серия периодических платежей или поступлений, которая начинается с некоторого момента в будущем* [3].

. . . .

Рассмотрим особенности решения обратной задачи для отсроченного аннуитета [3].

Пусть, например, платежи аннуитета поступают в течение n периодов, и сложные проценты по ставке r начисляются один раз в конце базового периода, совпадающего с периодом аннуитета (рис. 2.1). Первый из платежей поступает через h периодов от начала действия аннуитета.

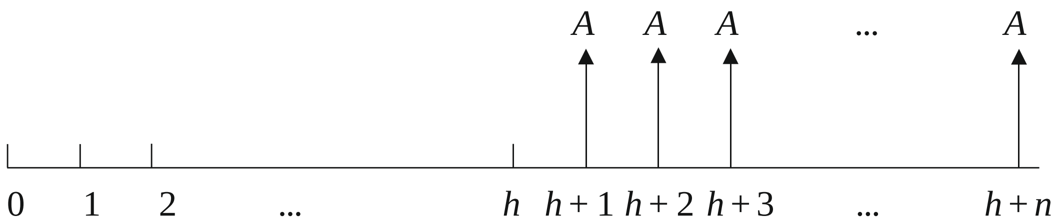


Рис 2.1 – Схема отсроченного аннуитета постнумерандо

Стоимость аннуитета на начало периода, когда поступает первый платеж, найдем по формуле (2.8):

$$PV1_{pst} = A \cdot FM4(r, n).$$

Чтобы найти стоимость аннуитета на момент его начала, необходимо осуществить учет полученной величины за h периодов, т. е. приведенная стоимость отсроченного аннуитета вычисляется следующим образом:

$$PV_{pst} = FM2(r, h) \cdot PV1_{pst}.$$

Поэтому можем записать, что

$$PV_{pst} = A \cdot FM2(r, h) \cdot FM4(r, n). \tag{2.20}$$

В этой формуле h не обязательно должно быть целым числом.

Если h – целое число, то формула примет вид:

$$PV_{pst} = A \cdot FM4(r, n+h) - A \cdot FM4(r, h), \tag{2.21}$$

т. е. приведенная стоимость отсроченного аннуитета представляет собой разность приведенных стоимостей аннуитетов.

Пример

Задача

Банк предлагает ренту постнумерандо на 10 лет с ежегодной выплатой 10 тыс. долл. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной. По какой цене имеет смысл приобрести такую ренту, если выплаты начнут осуществляться: а) немедленно; б) через 2 года, а ставки равны соответственно 2%, 4%, 8% годовых?

Решение

Определим приведенную стоимость ренты во всех случаях.

Используем формулу (2.20), расчеты приведенной стоимости ренты (в долл.) представим в виде таблицы.

h	***r* – процентная ставка**		
	2%	**4%**	**8%**
0	89 826	81 109	67 101
2	86 338	74 990	57 528

Результаты расчетов показывают, что с ростом процентной ставки и срока, после которого начнутся выплаты, приведенная стоимость уменьшается и уменьшается стоимость ренты. В частности, если выплаты начнутся через 2 года и процентная ставка составит 8% годовых, то ренту имеет смысл приобрести за 57 528 долл. (или, конечно, дешевле).

. . . .

2.5 Конверсия и замена рент

Бывают ситуации, когда возникает необходимость изменить условия выплаты ренты, например, заменить:

1) одну ренту другой;
2) ренту разовым платежом;
3) разовый платеж рентой;
4) несколько рент с разными параметрами одной.

Во всех перечисленных выше случаях производится конверсия рент, подчиняющаяся простому правилу: современные величины старой (старых) и новой (новых) рент должны быть равны. Это следует из предположения, что конверсия рент не должна менять финансового положения сторон, т. е. должен соблюдаться принцип финансовой эквивалентности.

Алгоритм расчета параметров новой ренты таков:

1. Определяется современная величина старой ренты (старых рент).
2. В случае объединения рент эти величины складываются и дают современную величину новой ренты.
3. Зная современную величину новой ренты, по методам, описанным выше (п. 2.3), рассчитываются параметры новой ренты, такие как размер отдельного платежа A, срок ренты n и процентная ставка.

Под ***конверсией ренты*** *обычно понимают изменение условий финансового соглашения, т. е. изменение одного связанного с рентой договора другим при сохранении интересов участников сделки.*

Рассмотрим более подробно различные случаи конверсии рент.

1. Выкуп ренты. Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа используется формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r,n); \qquad (2.22)$$

$$PV_{pre} = (1+r)PV_{pst} = A \cdot FM4(r,n). \qquad (2.23)$$

Пример

Задача

Фирма изучает предложение арендодателя о замене ежегодной арендной платы в течение пяти лет в размере 480 тыс. руб. на оплату аренды единовременным платежом в размере 1 500 тыс. руб. При этом минимально необходимая норма прибыли составляет 20% годовых. Установите, приемлемо ли для фирмы предложение арендодателя.

Решение

Сумма разового платежа, который эквивалентен арендной плате в течение 5 лет, находится по формуле (2.22) при $A = 480$ тыс. руб., $r = 20\%$, $n = 5$ лет:

$$PV = 480\,000 \cdot FM4(20\%, 5) = 1\,435\,494 \text{ (руб.)}.$$

Приведенная стоимость арендных платежей при норме прибыли 20% годовых равна 1 435 494 руб. Арендодатель предлагает фирме единовременную выплату в 1 500 000 руб., т. е. больше, чем приведенная стоимость арендных платежей.

Предложение арендодателя выгодно для фирмы, т. к. величина единовременного платежа больше приведенной стоимости арендных платежей.

2. Рассрочка платежей. Это обратная к выкупу ренты задача. Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку.

Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты – члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы.

Пример

Задача

Определите размер равных годовых взносов в конце года, если контракт на погашение задолженности в сумме 2 млн руб. в течение 10 лет предусматривает ежегодное начисление сложных процентов по ставке 20% годовых.

Решение

Величина задолженности – это приведенная стоимость ренты с параметрами $r = 20\%, n = 10$ лет, $PV = 2$ млн руб. Необходимо найти платеж ренты.

Платеж ренты выразим из формулы (2.22):

$$A = \frac{PV}{FV4(r,n)},$$

$$A = \frac{2\,000\,000}{FM4(20\%, 10)} = 477\,046 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, величина годового взноса составит 477 046 руб.

3. Объединение (консолидация) рент. Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из *принципа финансовой эквивалентности* следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} PV_i \;, \qquad (2.24)$$

где PV – современная стоимость заменяющей ренты; PV_i – современная стоимость i-й заменяемой ренты.

Пример

Задача

Пусть объединяются три ренты с параметрами:

- $A_1 = 1\,000$ руб., $r_1 = 6\%, n_1 = 10$ лет;

- $A_2 = 500$ руб., $r_2 = 5\%$, $n_2 = 8$ лет;
- $A_3 = 2\,000$ руб., $r_3 = 5\%$, $n_3 = 12$ лет.

Определите платеж объединенной ренты, если ее срок составляет 10 лет, а процентная ставка равна 6% годовых.

Решение

В соответствии с формулой (2.24) необходимо найти приведенную стоимость заменяющей ренты как сумму приведенных стоимостей исходных рент.

Данные для определения приведенных стоимостей исходных рент занесем в таблицу. Приведенная стоимость каждой ренты рассчитывается по формуле (2.8).

№ ренты	**Платеж ренты, руб.**	**Срок ренты, лет**	***FM*4(*r*, *n*)**	***PV*, руб.**
1	1 000	10	7,36	7 360
2	500	8	6,46	3 232
3	2 000	12	8,86	17 726
Итого				28 318

Приведенная стоимость заменяющей ренты равна 28 318 руб.

Размер платежа ренты выражаем из формулы (2.22):

$$A = \frac{28\,318}{FM\,4(6\%, 10)} = 3\,848 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, платеж объединенной ренты равен 3 848 руб.

. . . .

4. Изменение продолжительности ренты при сохранении процентной ставки. Этот вид конверсии возникает, когда необходимо изменить срок погашения задолженности. Очевидно, что если срок погашения задолженности увеличивается, то платеж ренты уменьшается, и наоборот.

Пусть имеется рента с параметрами A_1, n_1, r. Необходимо заменить эту ренту на ренту с параметрами A_2, n_2, r. В соответствии с принципом финансовой эквивалентности необходимо приравнять современные стоимости старой и новой рент и из полученного уравнения найти платеж новой ренты A_2:

$$PV_1 = PV_2,$$

$$A_1 \cdot FM\,4(r, n_1) = A_2 \cdot FM\,4(r, n_2),$$

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM\,4(r, n_1)}{FM\,4(r, n_2)}. \qquad (2.25)$$

Пример

Задача

Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями A = 4 млн руб. и сроком выплат 6 лет заменяется новой рентой со сроком выплат 10 лет. Сложная процентная ставка составляет 25% годовых. Необходимо найти платеж новой ренты.

Решение

Платеж новой ренты найдем из формулы (2.25) при A_1 = 4 млн руб., n_1 = 6 лет, n_2 = 10 лет, r = 25%:

$$A_2 = 4 \cdot \frac{FM\,4\left(6, 25\%\right)}{FM\,4\left(10, 25\%\right)} = 3\,306\,452 \text{ (руб.)}.$$

Увеличение срока ренты приводит к уменьшению платежей до 3 330 452 руб.

5. Замена немедленной ренты на отсроченную.

Пусть имеется немедленная рента с параметрами A, n, r. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. В этом случае, следуя принципу финансовой эквивалентности, запишем равенство приведенных стоимостей следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM\,2(r,n) \cdot PV_2, \tag{2.25}$$

где PV_1 – современная стоимость немедленной ренты; PV_2 – современная стоимость отложенной ренты.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1+r)^t, \tag{2.26}$$

где A_1 – платеж исходной ренты; A_2 – неизвестный платеж отложенной ренты; t – время отложения ренты.

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = -\frac{\ln\{1-[1-(1+r)^{-n_1}](1+r)^t\}}{\ln(1+r)}, \tag{2.27}$$

где n_2 – неизвестный срок отложенной ренты; n_1 – срок исходной ренты; t – время отложения ренты.

В общем случае, когда $n_1 \neq n_2$, из равенства $PV_1 = PV_2$ следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM4(n_1, r)}{FM4(n_2, r)}(1+r)^t. \qquad (2.28)$$

Пример

Задача

Пусть немедленная рента постнумерандо с платежом исходной ренты A = 2 млн руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Определите платеж отложенной ренты.

Решение

По формуле (2.26) определим платеж новой ренты при A_1 = 2 млн руб., t = 2 года, r = 0,2:

$$A_2 = 2 \cdot (1 + 0,2)^2,$$
$$A_2 = 2,88 \text{ (млн руб.)}.$$

Таким образом, отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до 2,88 млн руб.

Задача

Рента с ежегодными платежами в 2 млн руб. и сроком 5 лет откладывается на 3 года без изменения сумм выплат. Определите новый срок ренты при условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

Решение

1. По формуле (2.27) определим срок новой ренты:
   при $n_1 = 5$ лет, $t = 3$, $r = 0,08$ $A = 2$ млн руб.:

   $$n_2 = -\frac{\ln\{1-(1-1,08^{-5})1,08^3\}}{\ln 1,08} = 6,689 \text{ (лет)}.$$

   Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до 6,689 лет, т. е. на 1,689 года. Очевидно, срок ренты должен измеряться в целых годах, т. к. физически невозможно выплачивать платежи в течение 1,689 года. Проведем расчеты, позволяющие установить срок ренты в целых годах, не нарушая при этом принципа финансовой эквивалентности.

2. Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6.

   Тогда современная стоимость новой ренты в соответствии с формулой (2.25) составит:

   $$PV_2 = 2 \cdot FM4(8\%,6) \cdot FM2(8\%,3) = 2 \cdot 4,6288 \cdot 0,7938 = 7,3396 \text{ (млн руб.)}.$$

   Современная стоимость исходной ренты соответствии с формулой (2.6) составит:

   $$PV_1 = 2 \cdot FM4(8\%,5) = 2 \cdot 3,9927 = 7,9854 \text{ (млн руб.)}.$$

   Таким образом, приведенные стоимости рент по старому и новому контракту при условии округления срока нового контракта до 6 лет не совпадают.

   В соответствии с принципом финансовой эквивалентности при изменении условий контракта ни одна из сторон сделки не должна получить финансового преимущества.

   Следовательно, в начале действия контракта необходимо уплатить разность в сумме 0,6458 млн руб. Эту сумму владелец нового контракта должен выплатить владельцу нового контракта.

Выводы

Аннуитет (финансовая рента) представляет собой частный случай денежного потока. Для аннуитета все временные интервалы между поступлениями/изъятиями денежных средств равны между собой. Любой элемент такого денежного потока называется членом аннуитета, а величина постоянного временного интервала между двумя его последовательными элементами называется базовым периодом аннуитета.

Аннуитет называется постоянным, если все поступления или изъятия денежных средств также равны между собой. В этом случае формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета существенно упрощаются.

Прямая задача оценки постоянного аннуитета при заданных величинах регулярного поступления и процентной ставке r предполагает оценку будущей (наращенной) стоимости аннуитета. Вычисление будущей (наращенной) стоимости постоянного аннуитета проводится с помощью множителя наращения, который обозначается как $FM3(r,n)$. Экономический смысл множителя заключается в следующем: он показывает, чему будет равна суммарная величина срочного аннуитета в одну денежную единицу (например, в один рубль) к концу срока его действия. Предполагается, что производится лишь начисление денежных сумм, а их изъятие может быть сделано по окончании срока действия аннуитета. Множитель наращения аннуитета также показывает, во сколько раз наращенная сумма ренты больше периодического платежа ренты, этот множитель связан прямой пропорциональной зависимостью с процентной ставкой r.

Под современной стоимостью потока платежей понимают сумму дисконтированных членов этого потока, приведенных к начальному моменту времени. Вычисление приведенной (современной) стоимости постоянного аннуитета проводится с помощью множителя дисконтирования, который обозначается как $FM4(r,n)$ – приведенная стоимость аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере одной денежной единицы, продолжающегося n равных периодов, с заданной процентной ставкой r. Также множитель $FM4(r,n)$ – это величина капитала, который надо внести в банк под сложную процентную ставку r, чтобы обеспечить регулярные выплаты в размере одной денежной единицы в течение n периодов (выплаты производятся в конце каждого периода). Этот множитель связан обратной пропорциональной зависимостью с процентной ставкой r.

При оценке постоянных аннуитетов при наращении и дисконтировании предполагается капитализация по схеме сложных процентов. Сложные проценты могут начисляться либо один раз внутри базового периода, либо m раз внутри базового периода. Будущие стоимости аннуитетов увеличиваются с ростом количества начисления процентов на депозите. Самым выгодным вариантом депозита будет депозит с непрерывным начислением процентов. Приведенные стоимости аннуитета уменьшаются с ростом количества начисления процентов на депозите. Чем чаще начисляются проценты, тем меньшую сумму достаточно внести на депозит, для того чтобы иметь возможность в течение n лет снимать с депозита денежные средства до полного его обнуления.

Денежные средства могут поступать или сниматься со счета либо один раз в течение базового периода аннуитета, либо несколько раз в течение базового периода. В этом случае аннуитет называют p-срочным. Чем чаще поступают денежные средства внутри базового периода, тем больше будущая стоимость аннуитета. Приведенные стоимости аннуитета увеличиваются с ростом количества снятий денежных средств в течение года. Чем чаще планируется снимать денежные средства со счета, тем большую сумму для этого необходимо внести на счет.

Аннуитет называется отсроченным, если первый из потока платежей начинает поступать через h периодов. С ростом процентной ставки и срока, после которого начнутся выплаты, приведенная стоимость аннуитета уменьшается.

Под конверсией ренты обычно понимают изменение условий финансового соглашения, т. е. изменение одного связанного с рентой договора другим при сохранении интересов участников сделки. Вычисление параметров ренты при конверсии рент проводится на основе принципа финансовой эквивалентности.

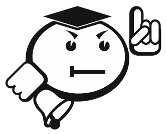
Контрольные вопросы по главе 2

1. Что такое постоянный аннуитет?
2. Объясните экономический смысл множителя наращения аннуитета. Как изменяется этот множитель при изменении процентной ставки?
3. Объясните экономический смысл множителя дисконтирования аннуитета. Как изменяется этот множитель при изменении процентной ставки?
4. Как изменяется будущая стоимость аннуитета при переходе от дискретной процентной ставки к непрерывной?
5. Как изменяется приведенная стоимость аннуитета при переходе от дискретной процентной ставки к непрерывной?
6. Сформулируйте принцип финансовой эквивалентности.
7. Что такое конверсия рент?
8. Какой аннуитет называют отстроченным?
9. Объясните логику решения задачи «выкуп ренты».
10. Объясните логику решения задачи «рассрочка платежей».

3 Переменные ренты

В финансовой деятельности встречаются случаи, когда члены потоков платежей изменяются во времени. Такие изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка (например, условиями производства и сбыта продукции), а иногда и со случайными факторами. Частным случаем такого потока является *переменная рента*.

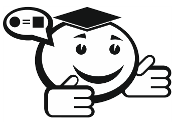
У *переменной ренты* члены потока изменяются по каким-то установленным (принятым, оговоренным и т. д.) законам или условиям развития. Если таких законов нет, то соответствующий поток можно назвать *нерегулярным*. Методы оценки нерегулярных денежных потоков рассмотрены в гл. 1.



Аннуитет называется переменным, если его члены различны по величине и изменяются в соответствии с установленным законом [3].

Для оценки переменного аннуитета используют общие формулы оценки денежного потока. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с некоторыми законами (в частности, образуют арифметическую или геометрическую прогрессию), то общие формулы для определения будущей или приведенной стоимости аннуитета можно упростить.

Рента с постоянным абсолютным изменением членов во времени предполагает, что изменения происходят согласно арифметической прогрессии.



Арифметическая прогрессия *– это ряд величин, где каждая последующая величина равна предыдущей величине плюс некоторое постоянное число, которое называется «разность арифметической прогрессии». Это постоянное число может быть или положительным, или отрицательным. Если постоянное изменение положительно, то арифметическая прогрессия называется возрастающей, если постоянное изменение отрицательно – убывающей.*

Пусть платежи аннуитета образуют арифметическую прогрессию, т. е. изменяются на постоянную абсолютную величину z и представляют собой следующую последовательность [3]:

$$A,\ A+z,\ A+2z,\ A+3z\ldots A+(n-3)z,\ A+(n-2)z,\ A+(n-1)z.$$

Если z является положительной величиной, то платежи аннуитета возрастают. Если z является отрицательной величиной, то величины z и n (количество периодов аннуитета) связаны между собой соотношением:

$$A-z(n-1)>0,\quad \frac{A}{z}+1>n\,.$$

Это соотношение получено из условия, что каждый из членов прогрессии должен быть неотрицательной величиной, поэтому уменьшение членов арифметической прогрессии может происходить до тех пор, пока член прогрессии остается неотрицательной величиной.

Выведем формулу для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию с первым членом A и разностью z.

Если число периодов аннуитета равно n и на каждый платеж один раз в конце базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, то наращенный поток, записанный в порядке поступления платежей, имеет вид:

$$A(1+r)^{n-1},\ (A+z)(1+r)^{n-2},\ (A+2z)(1+r)^{n-3},\ (A+3z)(1+r)^{n-4},\ldots,$$

$$[A+(n-3)z](1+r)^2,\ [A+(n-2)z](1+r), A+(n-1)z.$$

Сгруппировав отдельно слагаемые, содержащие z, получим два ряда, один из которых содержит только слагаемые с A:

$$A(1+r)^{n-1},\ A(1+r)^{n-2},\ A(1+r)^{n-3},\ \ldots,\ A(1+r)^2,\ A(1+r),\ A.$$

Другой ряд содержит только слагаемые с z:

$$z(1+r)^{n-2},\ 2z(1+r)^{n-3},\ 3z(1+r)^{n-4},\ \ldots,\ (n-3)z(1+r)^2,\ (n-2)z(1+r),\ (n-1)z.$$

Таким образом, для расчета будущей стоимости аннуитета необходимо найти сумму членов первого ряда, сумму членов второго ряда и затем сложить найденные суммы.

Сумма членов первого ряда – это сумма членов постоянного аннуитета, поэтому она определяется по формуле (2.1).

Поэтому общая сумма наращенного денежного потока, которая определяется как сумма членов первого и второго ряда, равна:

$$FV = A\cdot FM3(r,n)+z(1+r)^{n-2}+2z(1+r)^{n-3}+3z(1+r)^{n-4}+\ldots$$
$$\ldots+(n-3)z(1+r)^2+(n-2)z(1+r)+(n-1)z. \qquad (3.1)$$

После умножения обеих частей этого равенства на величину $(1+r)$ получим:

$$FV_{pst}t(1+r) = A\cdot FM3(r,n)(1+r) +$$

$$+z(1+r)^{n-1} + 2z(1+r)^{n-2} + 3z(1+r)^{n-3} + \ldots \qquad (3.2)$$

$$\ldots + (n-3)z(1+r)^3 + (n-2)z(1+r)^2 + (n-1)z(1+r).$$

Вычитая равенство (3.1) из равенства (3.2), получим:

$$FV_{pst} + FV_{pst}\cdot r - FV_{pst} = A\cdot FM3(r,n) + A\cdot FM3(r,n)\cdot r - A\cdot FM3(r,n) +$$

$$+z(1+r)^{n-1} + 2z(1+r)^{n-2} + 3z(1+r)^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + (n-3)z(1+r)^3 + (n-2)z(1+r)^2 + (n-1)z(1+r) -$$

$$-z(1+r)^{n-2} - 2z(1+r)^{n-3} - 3z(1+r)^{n-4} - \ldots$$

$$\ldots - (n-3)z(1+r)^2 - (n-2)z(1+r) - (n-1)z.$$

$$FV_{pst}\cdot r = A\cdot FM3(r,n)\cdot r + z(1+r)^{n-1} + z(1+r)^{n-2} + z(1+r)^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + z(1+r)^2 + z(1+r) + z - nz.$$

$$FV_{pst}\cdot r = A\cdot FM3(r,n)\cdot r + z\cdot FM3(r,n) - nz.$$

Таким образом, будущая стоимость аннуитета, платежи которого изменяются по закону арифметической прогрессии, равна:

$$FV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right)FM3(r,n) - \frac{zn}{r}, \qquad (3.3)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; z – знаменатель прогрессии (величина изменения платежа аннуитета); r – процентная ставка; n – срок аннуитета.

Формулу для вычисления приведенной стоимости аннуитета постнумерандо получим из соотношений:

$$PV_{pst} = \frac{FV_{pst}}{(1+r)^n} \quad \text{и} \quad FM4(r,n) = \frac{FM3(r,n)}{(1+r)^n}.$$

Так, приведенная стоимость аннуитета постнумерандо определяется следующим образом:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right)FM4(r,n) - \frac{zn}{r(1+r)^n}, \qquad (3.4)$$

где PV_{pst} – будущая стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; z – знаменатель прогрессии (величина изменения платежа аннуитета); r – процентная ставка; n – срок аннуитета.

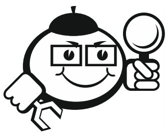
Формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета пренумерандо получаются из соотношений:

$$FV_{pre} = (1+r)FV_{pst} \quad \text{и} \quad PV_{pre} = (1+r)PV_{pst}.$$

Запишем формулы для будущей и приведенной стоимости аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию с первым членом A и разностью z:

$$FV_{pre} = (1+r)\cdot\left(A+\frac{z}{r}\right)FM3(r,n)-(1+r)\frac{zn}{r}; \tag{3.5}$$

$$PV_{pre} = (1+r)\cdot\left(A+\frac{z}{r}\right)FM4(r,n)-\frac{zn}{r(1+r)^{n-1}}. \tag{3.6}$$



Пример

Задача

Согласно условиям финансового соглашения, на счет в банке в течение 6 лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 5 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,4 тыс. руб.

Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 10% годовых, а сложные проценты начисляются один раз в конце года.

Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,4 тыс. руб.?

Решение

По формулам (3.3) и (3.4) определим будущую и приведенную стоимости аннуитета при $A = 5$ тыс. руб., $n = 6$ лет, $r = 0{,}1$ и $z = 0{,}4$ тыс. руб. (т. к. суммы возрастают, величина z положительна):

$$FV_{pst} = \left(5+\frac{0{,}4}{0{,}1}\right)\cdot FM3(10\%,6)-\frac{0{,}4\cdot 6}{0{,}1} = 45{,}441 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$PV_{pst} = \left(5+\frac{0{,}4}{0{,}1}\right)\cdot FM3(10\%,6)-\frac{0{,}4\cdot 6}{0{,}1\cdot(1+0{,}1)^6} = 25{,}650 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Если суммы будут уменьшаться, то $z = -0{,}4$, и тогда расчеты изменятся следующим образом:

$$FV_{pst}=\left(5-\frac{0,4}{0,1}\right)\cdot FM3(10\%,6)+\frac{0,4\cdot 6}{0,1}=31,716 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$PV_{pst}=\left(5-\frac{0,4}{0,1}\right)\cdot FM4(10\%,6)+\frac{0,4\cdot 6}{0,1\cdot(1+0,1)^6}=17,903 \text{ (тыс. руб)}.$$

Таким образом, если платежи аннуитета возрастают, то будущая и приведенная стоимость аннуитета больше, чем будущая и приведенная стоимость аннуитета при условии, что платежи аннуитета убывают.

Задача

Пусть клиенту банка за 6 лет необходимо накопить 30 тыс. долл.

Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 800 долл., а процентная ставка равна 8% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года.

Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 2 тыс. долл.

Решение

Величину первого вклада найдем с помощью формулы (3.3) при $FV_{pst}=$ $=30$ тыс. долл., $z=800$ долл., $n=6$ лет, $r=0,08$:

$$30\,000=\left(A+\frac{800}{0,08}\right)\cdot FM3(8\%,6)-\frac{(800\cdot 6)}{0,08}.$$

Из полученного уравнения находим размер первого вклада:

$$A=\frac{30\,000+\dfrac{800\cdot 6}{0,08}}{FM3(8\%,6)}-\frac{800}{0,08},$$

$$A=2\,268 \text{ (долл.)}.$$

Размер первого вклада равен 2 268 долл.

Выразим величину z из формулы (3.3):

$$\left(FV_{pst}-A\cdot FM3(r,n)\right)\cdot r=z\cdot\left(FM3(r,n)-n\right).$$

Из полученного уравнения находим z:

$$z=918 \text{ долл.}$$

Таким образом, каждый год денежные поступления необходимо увеличивать на 918 долл.

. . . .

Рента с постоянным относительным изменением членов во времени предполагает, что эти изменения происходят согласно геометрической прогрессии. Последовательность, в которой каждый последующий член можно найти, если предыдущий член умножить на одно и то же число (знаменатель прогрессии), называется геометрической прогрессией [3].

Выведем формулу для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x.

Если число периодов аннуитета равно n и на каждый платеж один раз в конце базового периода начисляются сложные проценты по ставке r, то наращенный поток, записанный в порядке поступления платежей, имеет вид [3]:

$$A(1+r)^{n-1},\ A\cdot x(1+r)^{n-2},\ A\cdot x^2(1+r)^{n-3},\ A\cdot x^3(1+r)^{n-4},\ \ldots,$$

$$A\cdot x^{n-2}(1+r),\ A\cdot x^{n-1},$$

т. е. наращенный денежный поток представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b = A(1+r)^{n-1}$ и знаменателем $q = \dfrac{x}{(1+r)}$.

Сумма n первых членов этой прогрессии равна величине $b\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, поэтому будущая стоимость аннуитета, которая определяется как сумма элементов наращенного денежного потока, будет равна:

$$FV_{pst} = A(1+r)^{n-1}\frac{\dfrac{x^n}{(1+r)^n}-1}{\dfrac{x}{(1+r)}-1}.$$

После преобразований данного выражения получаем оценку переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x:

$$FV_{pst} = A\frac{x^n-(1+r)^n}{x-(1+r)}; \tag{3.7}$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r)^n}\frac{x^n-(1+r)^n}{x-(1+r)}. \tag{3.8}$$

Оценка переменного аннуитета пренумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x, осуществляется по формулам:

$$FV_{pre} = A \cdot (1+r) \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}; \tag{3.9}$$

$$PV_{pre} = \frac{A}{(1+r)^{n-1}} \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \tag{3.10}$$

Пример

Задача

По условиям контракта в течение 7 лет в конце года на счет в банке поступают платежи. Первый платеж равен 4 тыс. долл., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 10%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 28% годовых.

Решение

Оценка аннуитета предполагает нахождение его будущей и приведенной стоимости. Для решения задачи необходимо найти будущую и приведенную стоимость аннуитета, платежи которого образуют геометрическую прогрессию.

Поскольку ежегодно платежи увеличиваются в 1,1 раза (на 10%), то денежный поток представляет собой переменный аннуитет постнумерандо с постоянным относительным изменением его членов. Поэтому для оценки аннуитета воспользуемся формулами (3.7) и (3.8).

Полагая, что $A = 4$ тыс. долл., $n = 7$ лет, $r = 0,28$ и $x = 1,1$, получим:

$$FV_{pst} = 4\frac{1,1^7 - (1+0,28)^7}{1,1 - (1+0,28)} = 81,795 \text{ (тыс. долл.)};$$

$$PV_{pst} = \frac{4}{(1+0,28)^7} \frac{1,1^7 - (1+0,28)^7}{1,1 - (1+0,28)} = 14,530 \text{ (тыс. долл.)}.$$

Будущая стоимость аннуитета равна 81 795 долл., приведенная стоимость аннуитета равна 14 530 долл.

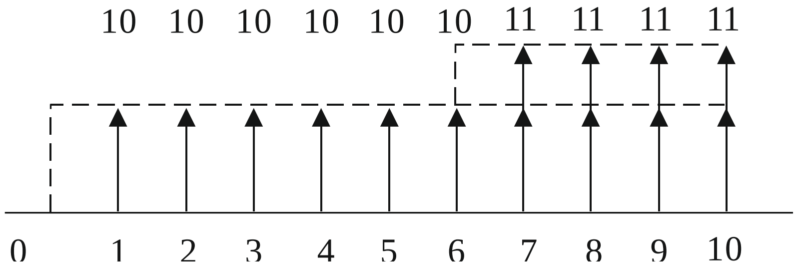
Рассмотрим пример переменного аннуитета, в котором платежи не образуют прогрессию, при решении задач также можно использовать множители наращения и дисконтирования аннуитета. Для этого денежный поток необходимо представлять в виде суммы или разности стандартных аннуитетов.

Задача

Участок сдан в аренду на десять лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые шесть лет – по 10 тыс. долл., в оставшиеся четыре года – по 11 тыс. долл. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 15%.

Решение

Решать данную задачу можно различными способами в зависимости от того, какие аннуитеты будут выделены аналитиком. Общая схема денежного потока представлена на рисунке.



Приведенная стоимость денежного потока должна оцениваться с позиции начала первого временного интервала. Рассмотрим лишь два варианта решения из нескольких возможных. Все эти варианты основываются на положении о том, что для выполнения каких-либо действий с денежными величинами они должны быть приведены к одному и тому же моменту времени.

1. Исходный поток можно представить себе как сумму двух аннуитетов: первый аннуитет с платежом 10 тыс. долл. продолжается десять лет; второй аннуитет с платежом 1 тыс. долл. продолжается четыре года. По формуле (2.8) можно оценить приведенную стоимость каждого аннуитета. Обозначим приведенные стоимости аннуитетов через PV_1 и PV_2, тогда по формуле (2.8) получаем, что

$$PV_1 = 10 \cdot FM4(15\%, 10),$$
$$PV_1 = 1 \cdot FM4(15\%, 4).$$

Первый аннуитет оценен с позиции начала первого года. Второй аннуитет оценен с позиции начала седьмого года. В задаче требуется найти приведенную стоимость аннуитета на начало первого года. Поэтому величину PV_2 необходимо привести к началу первого года и затем сложить с величиной PV_1.

Приведение величины PV_2 к началу первого году проводится с помощью формулы дисконтирования (1.2) при $F = PV_2$, $r = 15\%$, $n = 4$.

В этом случае оценки двух аннуитетов будут приведены к одному моменту времени, а их сумма даст оценку приведенной стоимости исходного денежного потока.

Обозначим приведенную стоимость аннуитета через PV, тогда

$$PV = PV_1 + \frac{PV_2}{(1+0,15)^4} = 10 \cdot 5,019 + 1 \cdot \frac{2,855}{1,749} = 51,42 \text{ (тыс. долл.).}$$

Приведенная стоимость договора равна 51,42 тыс. долл.

2. Исходный поток можно представить себе как разность двух аннуитетов: первый аннуитет с платежом в 11 тыс. долл. продолжается десять лет; второй аннуитет с платежом в 1 тыс. долл. продолжается 6 лет. Оба аннуитета начинаются в первом году, поэтому расчет выглядит так:

$$PV = 11 \cdot FM4(15\,\%,10) - 1 \cdot FM4(15\,\%,6) =$$

$$= 11 \cdot 5,019 - 1 \cdot 3,784 = 51,42 \text{ (тыс. долл.).}$$

Приведенная стоимость договора равна 51,42 тыс. долл.

Очевидно, что оба способа решения приводят к одному и тому же ответу.

Выводы

Аннуитет называется переменным, если его члены различны по величине и изменяются в соответствии с установленным законом. Платежи аннуитета могут образовывать арифметическую прогрессию, т. е. члены аннуитета изменяются на постоянную абсолютную величину z. Платежи аннуитета могут образовывать геометрическую прогрессию, т. е. каждый последующий член аннуитета можно найти, если предыдущий член умножить на одно и то же число (знаменатель прогрессии).

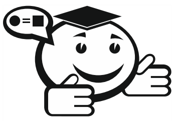
Формулы для оценки переменного аннуитета выводятся из общих формул оценки денежного потока. Чтобы при оценке переменного аннуитета без явной зависимости между его членами пользоваться стандартными формулами, необходимо представить этот аннуитет в виде суммы или разности постоянных аннуитетов.

Контрольные вопросы по главе 3

1. Какой аннуитет называется переменным?
2. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую зависимость образуют члены такого аннуитета?
3. Объясните, какая связь существует между параметрами аннуитета, платежи которого составляют арифметическую прогрессию, если знаменатель прогрессии – отрицательная величина.
4. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую зависимость образуют члены такого аннуитета?
5. Приведите пример переменного аннуитета, при оценке которого можно воспользоваться формулами оценки постоянного аннуитета.

4 Бессрочные ренты

В предыдущих разделах пособия рассматривались ренты, имеющие конечный срок (срочные ренты). В реальной финансовой практике существуют ренты, срок которых неограничен.

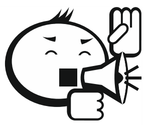


Вечная рента *– это последовательность платежей, число членов которой не ограничено, т. е. она выплачивается бесконечное число лет* (*например, выплаты по бессрочным облигационным займам*) [1].

В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно, поэтому прямая задача оценки вечной ренты не имеет решения. А вот обратная задача оценки вечной ренты может быть решена, т. к. современная величина вечной ренты имеет вполне определенное конечное значение.

В финансовой практике достаточно часто используются финансовые инструменты, имеющие форму бессрочного аннуитета. Самый распространенный случай подобного рода – *привилегированная акция*, которая выпускается с неограниченным сроком действия. Другим примером могут служить выплаты по договору страхования ренты (пенсии), когда момент окончания выплат в пользу застрахованного лица заранее неизвестен.

Примером *бессрочного аннуитета* являются консоли (консолидированная рента) – долгосрочные государственные облигации со сроком обращения, превышающим 50 лет.



В случае бессрочного аннуитета поток равных платежей через равные интервалы в течение длительного периода времени рассматривается как бесконечный.

Рассмотрим вечный аннуитет постнумерандо с одним денежным поступлением A за период и начислением процентов по ставке r один раз в конце периода. Поток платежей такого аннуитета, приведенных к нулевому моменту времени, представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b = \frac{A}{1+r}$ и знаменателем $q = \frac{1}{1+r}$ [3].

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна величине $\frac{b}{1-q}$, поэтому для бессрочного аннуитета постнумерандо при $n \to \infty$ получим:

$$PV_{pst} = \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A}{r} = A \cdot FM(r,\infty), \tag{4.1}$$

где $FM4(r,\infty) = \frac{1}{r}$.

Формула (4.1) показывает, что поток даже с неограниченным числом платежей имеет конечную приведенную стоимость. Приведенная стоимость вечной ренты уменьшается с ростом процентной ставки. С финансовой точки зрения это понятно, поскольку деньги, которые поступят через много лет, сейчас стоят мало (а при высокой инфляции практически ничего не стоят).

Эта же ситуация проявляется и при сравнении коэффициентов дисконтирования бессрочного аннуитета и аннуитетов с большим сроком. Для примера рассмотрим значения $FM4(r,n)$ при $r = 10\%$ (табл. 4.1).

Таблица 4.1 – Коэффициенты дисконтирования аннуитета

Срок (n) аннуитета, лет	40	50	60	70	90	∞
$FM4(10\%,n)$	9,7791	9,9148	9,9672	9,9873	9,9981	10

Из данных таблицы 4.1 видно, что при сроке аннуитета, превышающем 50 лет, коэффициенты дисконтирования аннуитета незначительно отличаются друг от друга.

С ростом процентной ставки r величина срока, начиная с которого коэффициенты $FM4(r,n)$ перестают значительно отличаться друг от друга, уменьшается (например, при $r = 15\%$ такой срок равен 40 годам).

Таким образом, при больших сроках аннуитета и большом уровне процентной ставки для определения приведенной стоимости *срочного аннуитета* можно воспользоваться формулой приведенной стоимости для бессрочного аннуитета, при этом полученный приблизительный результат будет незначительно отличаться от точного значения.

Так, формула (4.1) используется для оценки целесообразности приобретения бессрочного аннуитета, если известен размер денежного поступления за период. В качестве r обычно принимается гарантированная процентная ставка (например, процент, предлагаемый государственным банком).

Пример

Задача

Определите текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежегодным поступлением 420 тыс. руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 6% годовых.

Решение

По формуле (4.1) найдем приведенную стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst} = \frac{420}{0{,}06} = 7\ 000 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Следовательно, если аннуитет предлагается по цене, не превышающей 7 млн руб., он представляет собой выгодную инвестицию.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, для бессрочного аннуитета постнумерандо с денежными поступлениями p раз за базовый период и начислением сложных процентов m раз за базовый период получим следующее выражение для определения бессрочной ренты:

$$PV_{pst} = A\frac{FM4\left(\frac{r}{m},\infty\right)}{FM3\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right)} = \frac{A}{\frac{r}{m}FM3\left(\frac{r}{m},\frac{m}{p}\right)} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p}-1}, \qquad (4.2)$$

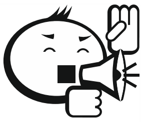
где A – платеж вечной ренты; p – количество поступлений платежей внутри базового периода; m – количество начислений сложных процентов внутри базового периода.

При $p = m = 1$ формула (4.2) совпадает с формулой (4.1).

Для определения приведенной стоимости бессрочного аннуитета с денежными поступлениями p раз за период и непрерывным начислением процентов по ставке δ перейдем к пределу при $n \to \infty$ в формуле (4.2). В результате получим формулу для вычисления приведенной стоимости бессрочной ренты, платежи по которой поступают p раз за базовый период и сложные ссудные проценты начисляются непрерывно внутри базового периода:

$$PV_{pst} = \frac{A}{e^{\delta/p}-1}, \qquad (4.3)$$

где A – платеж вечной ренты; p – количество поступлений платежей внутри базового периода; δ – сила роста (ставка непрерывных процентов).



Приведенная стоимость бессрочного аннуитета пренумерандо в общем виде определяется с помощью приведенной стоимости бессрочного аннуитета постнумерандо.

В частности, при $p = 1$, $m = 1$ из формулы (3.3) следует:

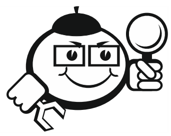
$$\begin{aligned} PV_{pst} &= PV_{pst}\cdot(1+r) = A\cdot FM4(r,\infty)\cdot(1+r) = \\ &= PV_{pst} + PV_{pst}\cdot r = PV_{pst} + A. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Выражение (4.4) отражает очевидное финансовое утверждение: приведенная стоимость бессрочного аннуитета пренумерандо отличается от приведенной стоимости аннуитета постнумерандо на величину первого платежа.

Запишем формулы нахождения приведенной стоимости для бессрочного переменного аннуитета:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right)\cdot\frac{1}{r}, \qquad (z >= 0); \qquad (4.5)$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r-q)}, \qquad (1+r>q). \qquad (4.6)$$



Пример

Задача

Фирма собирается учредить бессрочный фонд для ежегодной выплаты пособий своим работникам. Выплаты будут производиться в конце года. Определите сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы неограниченно долго в конце каждого года выплачивать работникам 80 тыс. долл., если банк начисляет:

1) ежегодно сложные проценты по ставке 16%;
2) ежеквартально сложные проценты по ставке 16%;
3) непрерывные проценты с силой роста 16%.

Решение

Денежный поток во всех случаях является бессрочным аннуитетом постнумерандо, причем $A = 80$ тыс. долл. Необходимо найти приведенную стоимость этого аннуитета.

1. По формуле (4.1) при $r = 0{,}16$ получим:

$$PV_{pst} = \frac{80}{0{,}16} = 500 \text{ (тыс. долл.).}$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит 500 тыс. долл.

2. По формуле (4.2) при $r = 0{,}16$, $m = 4$, $p = 1$ получим:

$$PV_{pst} = \frac{80}{\left(1 + \frac{0{,}16}{4}\right)^4 - 1} = 470{,}98 \text{ (тыс. долл.).}$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит 470,98 тыс. долл.

3. По формуле (4.3) при $p = 1$, $\delta = 0{,}16$ получим:

$$PV_{pst} = \frac{80}{e^{0{,}16} - 1} = 461{,}07 \text{ (тыс. долл.).}$$

Фирме необходимо поместить в банк на депозит 461,07 тыс. долл.

Таким образом, чем чаще начисляются проценты по депозиту, тем меньшую сумму фирма может внести на депозит для достижения поставленной цели.

Задача

Компания за предыдущий год выплатила 2 тыс. руб. за акцию. Согласно прогнозам, дивиденды по акциям компании будут расти на 200 руб. ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 33 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 12% годовых. Изменится ли ситуация, если дивиденды по акциям будут расти на 6% ежегодно в течение неопределенно долгого времени?

Решение

1. Для ответа на вопрос о целесообразности покупки акций компании по цене 33 тыс. руб. необходимо найти приведенную стоимость бессрочного переменного аннуитета.

   По формуле (4.5) при $A = 2$ тыс. руб., $z = 200$ руб., $r = 12\%$ получаем:

$$PV_{pst} = \left(2\ 000 + \frac{200}{0{,}12}\right) \cdot \frac{1}{0{,}12},$$

$$PV = 320\,556 \text{ (руб.).}$$

   Так как истинная стоимость акции меньше 33 тыс. руб., то приобретать ее за такую стоимость не имеет смысла.

2. Чтобы узнать, изменится ли ситуация при росте дивидендов, необходимо найти приведенную стоимость бессрочного переменного аннуитета.

По формуле (4.6) при $A = 2$ тыс. руб., $q = 1{,}06$, $r = 12\%$ получаем:

$$PV_{pst} = \frac{2\ 000}{(1 + 0{,}12 - 1{,}06)},$$

$$PV = 33\,333\,(\text{руб.}).$$

Приобретение акции за 33 тыс. руб. целесообразно, т. к. ее истинная стоимость больше, чем 33 тыс. руб.

Выводы

Аннуитет называется бессрочным (вечной рентой), если число его элементов неограниченно велико. В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно, поэтому прямая задача оценки вечной ренты не имеет решения. Обратная задача оценки вечной ренты может быть решена, т. к. современная величина вечной ренты имеет вполне определенное конечное значение.

В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, которые продолжаются 50 и более периодов. Расчеты показывают, что при сроке аннуитета, превышающем 50 лет, коэффициенты дисконтирования аннуитета незначительно отличаются друг от друга.

Самый распространенный случай бессрочного аннуитета – привилегированная акция, которая выпускается на неограниченный срок действия. Другим примером могут служить выплаты по договору страхования ренты (пенсии), когда момент окончания выплат в пользу застрахованного лица заранее неизвестен.

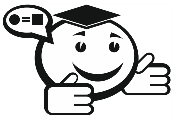
Контрольные вопросы по главе 4

1. Какой аннуитет называется бессрочным? Приведите пример вечной ренты.
2. Почему определение будущей стоимости бессрочного аннуитета не имеет смысла?
3. Как с финансовой точки зрения объяснить, что поток с неограниченным числом платежей имеет конечную приведенную стоимость?
4. Какая связь существует между приведенными стоимостями срочного и бессрочного аннуитетов?

5. В каких случаях для определения приведенной стоимости срочного аннуитета можно использовать формулы для определения приведенной стоимости бессрочного аннуитета?

5 Непрерывный аннуитет

В предыдущих главах пособия рассматривались аннуитеты, в которых платежи поступали конечное число раз за базовый период. Предположим, что в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины. Примером могут служить страховые выплаты, выручка от продаж на крупном торговом предприятии и т. п. В этом случае можно говорить о непрерывном поступлении доходов и о непрерывном аннуитете. Ясно, что непрерывно не может поступать величина A, т. к. через любой малый промежуток времени накопится бесконечно большая сумма денег и будущая стоимость аннуитета бесконечно возрастет. Поэтому для непрерывного аннуитета под платежом аннуитета A понимают общую сумму средств, которая поступает непрерывным образом за базовый период.



Если в течение каждого базового периода денежные поступления происходят так часто, что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины, то аннуитет считают ***непрерывным*** [3].

Оценки будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета можно вывести из формул для p-срочного аннуитета, переходя в них к пределу при $p \to \infty$ [3].

Общая постановка задачи: в течение каждого базового периода непрерывно поступают денежные средства, составляя в общем итоге за период величину A. Например, выручка в магазин поступает непрерывным образом и составляет величину A за квартал.

Пусть в конце каждого периода p-срочного аннуитета суммарная величина денежных поступлений равна A, тогда каждое поступление будет равно $\frac{A}{p}$, и формула нахождения будущей стоимости аннуитета с поступлениями p раз за базовый период и начислением сложных процентов m раз внутри базового периода запишется в виде:

$$FV_{pst} = \frac{A}{p} \cdot \frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, \frac{m}{p}\right)},$$

$$FV_{pst} = A \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right) \cdot \lim \frac{\frac{r}{m}}{p \cdot [\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1]},$$

$$FV_{pst} = A \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right) \cdot \frac{r}{m} \cdot \lim \frac{1}{p \cdot [\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1]}.$$

Рассмотрим величину $p \cdot [\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1]$, предел которой необходимо подсчитать.

Запишем ее в виде:

$$\frac{m[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1]}{\frac{m}{p}}.$$

Необходимо найти предел этой величины при $p \to \infty$.

Получаем предел вида «0 разделить на 0». Данную неопределенность необходимо раскрыть с помощью правила Лопиталя: взять производную от числителя и знаменателя и затем снова посчитать предел:

$$\lim \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1}{\frac{m}{p}} = \lim \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{-m}{p^2}\right)}{\frac{-m}{p^2}} =$$

$$= \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/p} = \ln\left(1+\frac{r}{m}\right).$$

Тогда будущая стоимость аннуитета составит:

$$FV = \frac{A \cdot r}{m^2 \cdot \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)} \cdot FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right), \qquad (5.1)$$

где FV – будущая стоимость аннуитета; A – величина платежа за базовый период при условии непрерывного поступления денежных средств; m – количество начислений сложных процентов внутри базового периода; r – сложная процентная ставка.

Приведенная стоимость данного непрерывного аннуитета составит:

$$PV_{pst} = \frac{A \cdot r}{m^2 \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)} FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right), \tag{5.2}$$

где PV – будущая стоимость аннуитета; A – величина платежа за базовый период при условии непрерывного поступления денежных средств; m – количество начислений сложных процентов внутри базового периода; r – сложная процентная ставка.

Таким образом, переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным, приводит к увеличению приведенной и будущей стоимости аннуитета в $\dfrac{r}{m^2 \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}$ раз.

Обратим внимание, что для непрерывного аннуитета не существует различий между аннуитетом постнумерандо и пренумерандо, т. к. при условии непрерывного поступления платежей невозможно сказать, что платежи поступают в конце или начале базового периода.

Пример

Задача

В течение 4 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 10 млн руб. Определите сумму, накопленную к концу четвертого года при использовании процентной ставки 15% годовых, если начисление сложных процентов осуществляется ежегодно.

Решение

Полагаем $n = 4$ года, $m = 1$, $r = 15\%$. Поскольку платежи поступают достаточно часто, будем считать, что они поступают непрерывным образом. Тогда можно воспользоваться формулой (5.1) для определения наращенной суммы непрерывного аннуитета при $A = 10$ млн руб.:

$$FV = \left[\frac{10 \cdot 0{,}15}{\ln(1+0{,}15)}\right] \cdot 4{,}9934 = 53{,}592 \text{ (млн руб.)}.$$

Таким образом, сумма, накопленная к концу четвертого года, равна 53,592 млн руб.

Сравним этот результат со значением, полученным по формуле p-срочного аннуитета, полагая, что в году 360 дней и дан аннуитет постнумерандо.

Так как $p = 360$ дней, $A = \dfrac{10 \text{ млн руб.}}{360 \text{ дней}}$, получим:

$$FV_{pst} = \frac{10}{360} \frac{4,9934}{\dfrac{(1+0,15)^{\frac{1}{360}} - 1}{0,15}} = 53,581 \text{ (млн руб.)}.$$

Можем заметить, что полученные величины отличаются незначительно.

Задача

Финансовая компания в течение пяти лет в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 20 млн руб. ежегодно. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 30% за год и выплаты происходят постоянно и равномерно?

Решение

Используем формулу (5.2) для определения приведенной стоимости непрерывного аннуитета при $A = 20$ млн руб., $n = 5$ лет, $m = 1$, $r = 30\%$:

$$PV = \frac{20 \cdot 0,3}{\ln(1+0,3)} FM4(30\%, 5) = 55,7 \text{ (млн руб.)}.$$

Таким образом, имея 55,7 млн руб., компания способна выполнить свои обязательства перед вкладчиками.

. . . .

Формулы 5.1 и 5.2 получены в условиях непрерывного поступления платежей и дискретного начисления процентов. Теперь рассмотрим случай непрерывных платежей в условиях непрерывного начисления процентов.

Оценки непрерывного аннуитета в случае начисления непрерывных процентов получаем из формул 5.1 и 5.2, используя формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок:

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = e^{\delta n},$$

$$mn\ln\left(1 + \frac{r}{m}\right) = \delta n \ln e,$$

$$m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)=\delta.$$

Преобразуем формулу (5.1) с учетом представленных выше выражений:

$$FV_{pst}=\frac{A\cdot r}{m^2\cdot\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}\cdot FM3\left(\frac{r}{m},mn\right)=\frac{A\cdot[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1]}{m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}.$$

Используя выражения для эквивалентности ставок, полученные выше, запишем формулу для оценки будущей стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов:

$$FV=A\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \qquad (5.3)$$

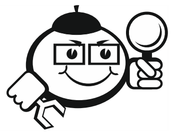
Для оценки приведенной стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов преобразуем формулу (5.2):

$$PV=\frac{A\cdot r}{m^2\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}FM4\left(\frac{r}{m},mn\right)=\frac{A\cdot r}{m^2\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}\cdot\frac{[1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}]\cdot m}{r}=$$

$$=\frac{A[1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}]}{m\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}.$$

Используя выражения для эквивалентности ставок, полученные выше, запишем формулу для оценки приведенной стоимости аннуитета при непрерывном поступлении платежей и непрерывном начислении процентов:

$$PV=A\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \qquad (5.4)$$



Пример

Задача

Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение трех лет, получая ежегодно выручку в размере 500 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться равномерно. Оцените ожидаемые денежные поступления, если применяется непрерывная ставка в 20% за год.

Решение

Поскольку в условии говорится о равномерном распределении продаж в течение года, то логично предполагать, что интенсивность потока выручки будет в какой-то мере постоянной величиной, равной 300 млн руб. в год. Считая, что денежные поступления происходят непрерывно, воспользуемся формулами для определения соответственно будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета (5.3) и (5.4).

Полагая, что $A = 500$ млн руб., $n = 3$, $\sigma = 20\%$, получим:

$$FV = 500\frac{e^{0,2 \cdot 3} - 1}{0,2} = 2\ 055 \text{ (млн руб.);}$$

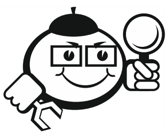
$$PV = 300\frac{1 - e^{-0,2 \cdot 3}}{0,2} = 1\,126 \text{ (млн руб.).}$$

Таким образом, будущая стоимость денежных поступлений равна 2 055 млн руб., а приведенная стоимость денежных поступлений составляет 1 126 млн руб.

Для определения *срока аннуитета при прочих известных параметрах* используют формулы:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV}{A} \cdot \delta + 1\right)}{\delta}; \tag{5.5}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{PV}{A} \cdot \delta\right)}{\delta}. \tag{5.6}$$



Пример

Задача

За какой срок наращенная сумма ренты возрастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов, если взносы поступают непрерывно и равномерно в течение года и на них начисляются проценты с силой роста 8%?

Решение

По формуле (5.5) при $\frac{FV}{A} = 5$, $\delta = 8\%$ определим срок, за который наращенная сумма ренты возрастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов:

$$n = \frac{\ln(5 \cdot 0,08 + 1)}{0,08} = 4,21 \text{ (года).}$$

Наращенная сумма ренты возрастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов через 5 лет (ответ необходимо округлить в сторону большего целого числа).

Выводы

Если в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины, то аннуитет считают непрерывным. Денежные поступления происходят постоянно, одно и то же количество денежных единиц в единицу времени. Примером непрерывного аннуитета могут служить страховые выплаты, выручка от продаж на крупном торговом предприятии и т. п. Для непрерывного аннуитета под платежом аннуитета A понимают общую сумму средств, которая поступает непрерывным образом за базовый период.

Оценки будущей и приведенной стоимости непрерывного аннуитета можно вывести из формул для p-срочного аннуитета, переходя в них к пределу при $p \to \infty$. Переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным приводит к увеличению приведенной и будущей стоимости аннуитета в $\dfrac{r}{m^2 \ln\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)}$ раз.

Для непрерывного аннуитета не существует различий между аннуитетом постнумерандо и пренумерандо, т. к. при условии непрерывного поступления платежей невозможно сказать, что платежи поступают в конце или начале базового периода.

Контрольные вопросы по главе 5

1. Какой аннуитет называется непрерывным?
2. В каких случаях p-срочный аннуитет можно практически считать непрерывным?

3. Имеет ли смысл говорить о непрерывном аннуитете как об аннуитете пренумерандо или постнумерандо?
4. Как изменяется будущая стоимость аннуитета при переходе от дискретных платежей к непрерывным?
5. Как изменяется приведенная стоимость аннуитета при переходе от дискретных платежей к непрерывным?

6 Оценка аннуитета с периодом больше года

В предыдущих разделах были рассмотрены аннуитеты, периоды которых не превосходили базовые периоды начисления процентов. В частности, если базовый период был равен году, то период аннуитета не превышал одного года.

С целью представления различных случаев рассмотрим ситуацию, связанную со срочным аннуитетом, период которого составляет больше года.

Например, постоянный десятилетний аннуитет постнумерандо с денежными поступлениями один раз в каждые два года имеет вид, представленный на рисунке 6.1 [3].

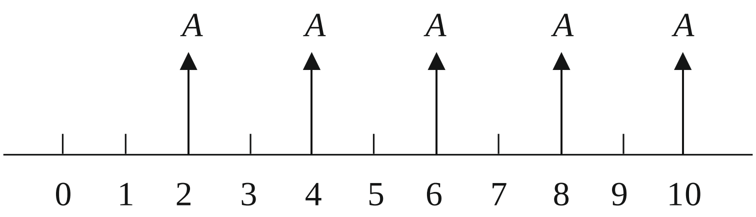


Рис. 6.1 – Аннуитет постнумерандо

Рассмотрим несколько более общий случай, когда базовый период начисления процентов не обязательно равен году и меньше периода аннуитета.

Пусть есть постоянный аннуитет постнумерандо, денежные поступления которого (каждое в размере A) происходят в течение n периодов, являющихся базовыми для начисления процентов по ставке r. Причем денежные поступления осуществляются каждые u ($u > 1$) периодов, а начисление сложных процентов происходит в конце каждого периода [3].

Предположим для простоты, что n делится нацело на u, тогда число поступлений денежных сумм равно $\frac{n}{u}$. Оценим будущую стоимость аннуитета.

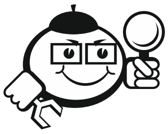
Последнее $\frac{n}{u}$-е поступление остается равным A. На предпоследнее $\left(\frac{n}{u}-1\right)$-е поступление начисляются сложные проценты за u периодов, и оно будет равно $A \cdot (1+r)^u$. На $\left(\frac{n}{u}-2\right)$-е поступление начисляются сложные проценты за $2u$ периодов, и оно будет равно $A\cdot(1+r)^{2u}$, и так далее до первого включительно, которое станет равным $A(1+r)^{\left(\frac{n}{u}-1\right)u}=A(1+r)^{n-u}$.

Полученные величины образуют геометрическую прогрессию с первым членом A, знаменателем $(1+r)^u$ и числом членов, равным $\frac{n}{u}$.

Поэтому сумма этих величин равна:

$$FV_{pst}=A\frac{(1+r)^{u\frac{n}{u}}-1}{(1+r)^u-1}=A\frac{(1+r)^u-1}{(1+r)^u-1}=A\frac{FM3(r,n)}{FM3(r,u)},\qquad(6.1)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; r – процентная ставка; n – срок действия аннуитета.



Пример

Задача

Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 10 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будет поступать 500 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие суммы ежегодно будут начисляться сложные проценты по ставке 12% годовых. Как изменится ответ, если по контракту будет ежегодно поступать по 250 тыс. руб.?

Решение

В соответствии с контрактом денежные суммы образуют аннуитет длительностью 10 лет с периодом 2 года. Таким образом, период аннуитета больше базового периода начисления процентов, равного году.

Полагая, что $A=500$ тыс. руб., $n=10$ лет, $u=2$, $r=12\%$, по формуле (6.1) получим:

$$FV_{pst}=500\cdot\frac{FM3(12\%,10)}{FM3(12\%,2)}=500\cdot\frac{17,548}{2,12}=4\ 138 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Если по контракту ежегодно будет поступать по 250 тыс. руб., то сумму, которая накопится к концу 10-го года, можно определить либо по формуле (6.1) при $A=250$ тыс. руб., $n=10$ лет, $u=1$, $r=12\%$, либо по формуле (2.1) при $A=250$ тыс. руб., $n=10$ лет, $r=12\%$:

$$FV_{pst}=250\cdot FM3(12\%,10)=250\cdot 17,548=4\ 387 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Таким образом, если взносы по контракту будут поступать чаще, то к концу 10-го года по контракту накопится большая сумма.

Пусть теперь r также является процентной ставкой за базовый период, но начисление сложных процентов происходит m раз в течение этого периода.

Рассмотрим, как непосредственно воспользоваться формулой (6.1), считая, что есть новый базовый период, равный m-й части исходного базового периода, и есть новая процентная ставка $\frac{r}{m}$. Тогда всего новых периодов будет уже mn, а денежные поступления осуществляются каждые mn этих периодов.

Таким образом, заменяя в формуле (6.1) r на $\frac{r}{m}$, n на mn и u на mu, получим формулу для вычисления будущей стоимости аннуитета:

$$FV_{pst} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}, \qquad (6.2)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; r – процентная ставка; m – частота начислений процентов в году; n – срок действия аннуитета.

При начислении непрерывных процентов с силой роста δ будущая стоимость аннуитета составит:

$$FV_{pst} = A\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta u} - 1}, \qquad (6.3)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; δ – процентная ставка; n – срок действия аннуитета.

Пример

Задача

Фирма решила образовать фонд для обеспечения будущих расходов, и с этой целью в конце каждых трех лет перечисляет в банк 1 млн руб.

Какая сумма будет на счете фирмы через 15 лет, если на поступающие суммы будут начисляться:

1) ежегодно сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 16%;

2) ежеквартально сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 16%;
3) непрерывные проценты с силой роста 16%?

Решение

Денежные поступления образуют постоянный аннуитет с $A = 1$ млн руб., сроком $n = 15$ лет и периодом $u = 3$ года.

1. В случае, если сложные проценты начисляются ежегодно, $r = 16\%$, $m = 1$. По формуле (6.2) определим сумму, накопленную в фонде:

$$FV_{pst} = 1 \cdot \frac{FM3(16\%,15)}{FM3(16\%,3)} = 1 \cdot \frac{51,659505}{3,5056} = 14,74 \text{ (млн руб.)}.$$

2. В случае, если сложные проценты начисляются ежеквартально, $r = 16\%$, $m = 4$.

   По формуле (6.2) определим сумму, накопленную в фонде:

$$FV_{pst} = 1 \cdot \frac{FM3(4\%,60)}{FM3(4\%,12)} = 1 \cdot \frac{237,99069}{15,025805} = 15,84 \text{ (млн руб.)}.$$

3. Для случая, когда начисляются непрерывные проценты, полагаем, что $\delta = 0,16$. По формуле (6.3) найдем сумму, накопленную в фонде:

$$FV_{pst} = 1 \cdot \frac{e^{0,16 \cdot 15} - 1}{e^{0,16 \cdot 3} - 1} = 16,29 \text{ (млн руб.)}.$$

Таким образом, чем чаще будут начисляться проценты на сумму, которая вносится в фонд, тем большая сумма накопится в фонде к окончанию 15-го года.

. . . .

Для определения приведенной стоимости аннуитета с можно использовать формулу:

$$PV_{pst} = FV_{pst}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}.$$

Поэтому

$$PV_{pst} = A\frac{FM3\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn} = A\frac{FM4\left(\frac{r}{m}, mn\right)}{FM3\left(\frac{r}{m}, mu\right)}, \qquad (6.4)$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; r – процентная ставка; n – срок действия аннуитета.

Из формулы (6.4) при $m = 1$ (однократном начислении процентов) следует, что

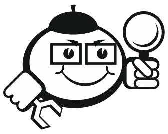
$$PV_{pst} = A\frac{FM4(r,n)}{FM3(r,u)}, \tag{6.5}$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; r – процентная ставка; n – срок действия аннуитета.

В случае начисления непрерывных процентов формула для определения приведенной стоимости аннуитета имеет вид:

$$PV_{pst} = A\frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{e^{\delta \cdot u} - 1}e^{-\delta \cdot n} = A\frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{e^{\delta \cdot u} - 1}, \tag{6.6}$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; δ – процентная ставка; n – срок действия аннуитета.



Пример

Задача

Определите сумму, которую необходимо поместить на счет в банке, чтобы в течение 8 лет в конце каждого двухлетнего периода иметь возможность снимать со счета 300 тыс. руб., причем к концу срока полностью исчерпать все деньги со счета, если на находящиеся на счете денежные суммы будут начисляться:

1) ежегодно сложные проценты по ставке 12%;
2) каждые полгода сложные проценты по ставке 12%;
3) непрерывные проценты с силой роста 12%.

Решение

Во всех случаях необходимо определить приведенную стоимость постоянного аннуитета с $A = 300$ тыс. руб., периодом $u = 2$ года и сроком $n = 8$ лет:

1. Подставим в формулу (6.5) необходимые значения, приняв $r = 12\%$ $(m = 1)$:

$$PV_{pst} = 300 \cdot \frac{FM4(12\%,8)}{FM3(12\%,2)} = 300 \cdot \frac{4,9676398}{2,12} = 7\ 030 \text{ (тыс. руб.)}.$$

2. Если сложные проценты начисляются каждые полгода, то $m = 2$, $r = 12\%$. Поэтому из формулы (6.5) следует, что

$$PV_{pst} = 300 \cdot \frac{FM4(6\%,16)}{FM3(6\%,4)} = 300 \cdot \frac{10,105895}{4,37616} = 6\ 930 \text{ (тыс. руб.)}.$$

3. В случае, когда начисляются непрерывные проценты с силой роста $\delta = 0{,}12$, воспользуемся формулой (6.6):

$$PV_{pst} = 300\frac{1-e^{-0{,}12 \cdot 8}}{e^{0{,}12 \cdot 2} - 1} = 6\ 825 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Таким образом, чем чаще начинаются проценты по депозиту, тем меньшую сумму необходимо внести на депозит для того, чтобы в течение 8 лет в конце каждого двухлетнего периода иметь возможность снимать со счета 300 тыс. руб. и к концу срока полностью исчерпать все деньги со счета.

Формулы для оценки аннуитета пренумерандо получаются из соответствующих формул для оценки аннуитета постнумерандо с использованием того факта, что денежные поступления пренумерандо начинаются на период (аннуитета) раньше, чем постнумерандо:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu}; \tag{6.7}$$

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu}, \tag{6.8}$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета постнумерандо; FV_{pre} – будущая стоимость аннуитета пренумерандо; PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета постнумерандо; PV_{pre} – приведенная стоимость аннуитета пренумерандо; u – частота взносов; m – частота начислений процентов в году.

Пример

Задача

Оценить аннуитет пренумерандо с поступлениями денежных средств каждые 3 года в сумме 1 млн руб., срок аннуитета – 15 лет; начисление процентов по ставке 12% годовых:

1) ежеквартальное;
2) ежемесячное.

Решение

Для оценки аннуитета используем формулы (6.2), (6.4), (6.7) и (6.8).

1. При $A = 1$, $r = 12\%$, $u = 3$, $m = 4$, $n = 15$ по формуле (6.2) находим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst} = 1\ 000\ 000 \frac{FM3\left(\frac{12\%}{4}, 15 \cdot 4\right)}{FM3\left(\frac{12\%}{4}, 3 \cdot 4\right)} =$$

$$= 1\ 000\ 000 \frac{163,0534}{14,19202} = 11\ 489\ 085 \text{ (руб.)}.$$

По формуле (6.7) находим будущую стоимость аннуитета пренумерандо:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 11\ 489\ 085 \cdot 1,4257 = 16\ 438\ 224 \text{ (руб.)}.$$

Будущая стоимость аннуитета пренумерандо больше, чем будущая стоимость аннуитета постнумерандо.

При $A = 1$, $r = 12\%$, $u = 3$, $m = 4$, $n = 15$ по формуле (6.4) находим приведенную стоимость аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst} = 1\ 000\ 000 \frac{FM4\left(\frac{12\%}{4}, 15 \cdot 4\right)}{FM3\left(\frac{12\%}{4}, 3 \cdot 4\right)} =$$

$$= 1\ 000\ 000 \frac{27,6755}{14,192} = 1\,950\,078 \text{ (руб.)}.$$

По формуле (6.8) находим приведенную стоимость аннуитета пренумерандо:

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 1\,950\,078 \cdot 1,4257 = 2\ 708\ 354 \text{ (руб.)}.$$

Приведенная стоимость аннуитета пренумерандо больше, чем приведенная стоимость аннуитета постнумерандо.

2. При $A = 1$, $r = 12\%$, $u = 3$, $m = 12$, $n = 15$ по формуле (6.2) находим будущую стоимость аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst} = 1\ 000\ 000 \frac{FM3\left(\frac{12\%}{12}, 15 \cdot 12\right)}{FM3\left(\frac{12\%}{12}, 3 \cdot 12\right)} =$$

$$= 1\ 000\ 000 \frac{499,58}{43,0768} = 11\ 597\ 409 \text{ (руб.)}.$$

По формуле (6.7) находим будущую стоимость аннуитета пренумерандо:

$$FV_{pre} = FV_{pst}\left(1+\frac{12\%}{12}\right)^{12\cdot 3} = 11\ 597\ 409\cdot 1{,}43076 = 16\ 593\ 211\ (\text{руб.}).$$

Будущая стоимость аннуитета пренумерандо больше, чем будущая стоимость аннуитета постнумерандо.

При $A=1$, $r=12\%$, $u=3$, $m=12$, $n=15$ по формуле (6.4) находим приведенную стоимость аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst} = 1\ 000\ 000\frac{FM4\left(\frac{12\%}{12}, 15\cdot 12\right)}{FM3\left(\frac{12\%}{12}, 3\cdot 12\right)} =$$

$$= 1\ 000\ 000\frac{83{,}3216}{43{,}0768} = 1\ 934\ 255\ (\text{руб.}).$$

По формуле (6.8) находим приведенную стоимость аннуитета пренумерандо:

$$PV_{pre} = PV_{pst}\left(1+\frac{12\%}{12}\right)^{12\cdot 3} = 1\ 934\ 255\cdot 1{,}43076 = 2\ 767\ 472\ (\text{руб.}).$$

Приведенная стоимость аннуитета пренумерандо больше, чем приведенная стоимость аннуитета постнумерандо.

Сравнивая оценки аннуитета при увеличении количества начислений процентов, можно сделать вывод: чем чаще начисляются проценты, тем больше и приведенная, и будущая стоимости аннуитета.

. . . .

Формулы для вычисления будущей и приведенной стоимости аннуитета пренумерандо при непрерывном начислении процентов имеют вид:

$$FV_{pre} = FV_{pst}e^{\delta u}; \qquad (6.9)$$

$$PV_{pre} = FV_{pst}e^{\delta u}, \qquad (6.10)$$

где FV_{pst} – будущая стоимость аннуитета постнумерандо; FV_{pre} – будущая стоимость аннуитета пренумерандо; PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета постнумерандо; PV_{pre} – приведенная стоимость аннуитета пренумерандо; u – частота взносов; δ – процентная ставка.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в формуле (6.4), получим приведенную стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с начислением сложных процентов m раз за базовый период:

$$PV_{pst} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mu} - 1}, \qquad (6.11)$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета постнумерандо; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; m – частота начислений процентов в году; r – процентная ставка.

Если проценты начисляются непрерывно, то приведенная стоимость бессрочного аннуитета равна:

$$PV_{pst} = \frac{A}{e^{\delta \cdot u} - 1}, \qquad (6.12)$$

где PV_{pst} – приведенная стоимость аннуитета постнумерандо; A – платеж аннуитета; u – частота взносов; δ – процентная ставка.

Пример

Задача

Стоит ли покупать за 460 000 руб. ценную бумагу, генерирующую доход в сумме 100 000 руб. в течение 50 лет? При расчетах использовать сложную ставку 10% годовых, начисляемую

1) ежегодно;
2) ежеквартально;
3) непрерывно.

Доход по ценной бумаге поступает каждые 2 года.

Решение

Для того чтобы принять решение о приобретении ценной бумаги, которая будет приносить доход в будущем, необходимо найти приведенную стоимость планируемого дохода и сравнить ее со стоимостью приобретения ценной бумаги.

1. Приведенную стоимость ценной бумаги определяем по формуле (6.11) при $A = 100\ 000$ руб., $r = 10\%$, $u = 2$ года, $m = 1$:

$$PV_{pst} = \frac{100\ 000}{\left(1+\frac{0{,}1}{1}\right)^{1 \cdot 2} - 1} = 476\ 190 \text{ (руб.)}.$$

Приведенная стоимость будущего дохода больше цены, за которую ценную бумагу предлагают приобрести (460 000 руб.), поэтому сделка выгодна.

2. Приведенную стоимость ценной бумаги определяем по формуле (6.11) при $A = 100\ 000$ руб., $r = 10\%$, $u = 2$ года; $m = 4$:

$$PV_{pst} = \frac{100\ 000}{\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{4 \cdot 2} - 1} = 457\ 869\ (\text{руб.}).$$

Приведенная стоимость будущего дохода меньше цены, за которую ценную бумагу предлагают приобрести (460 000 руб.), поэтому сделка не выгодна.

3. Приведенную стоимость ценной бумаги определяем по формуле (6.12) при $A = 100\ 000$ руб., $\delta = 10\%$, $u = 2$ года:

$$PV_{pst} = \frac{100\ 000}{e^{0{,}1 \cdot 2} - 1} = 451\ 666\ (\text{руб.}).$$

Приведенная стоимость будущего дохода меньше цены, за которую ценную бумагу предлагают приобрести (460 000 руб.), поэтому сделка невыгодна.

Выводы

На практике чаще всего распространены аннуитеты, периоды которых не превосходят базовые периоды начисления процентов. В частности, если базовый период равен году, то период аннуитета также равен году. Но встречаются ситуации, когда период аннуитета больше, чем год.

Формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета, период которого больше базового периода начисления процентов, аналогичны формулам для оценки будущей и приведенной стоимости обычного аннуитета. Параметр u, входящий в формулы, показывает, с какой частотой происходят внесения/снятия денежных средств. При $u = 1$ формулы гл. 6 совпадают с аналогичными формулами гл. 2.

Формулы для оценки аннуитета пренумерандо получаются из соответствующих формул для оценки аннуитета постнумерандо с использованием того факта, что денежные поступления пренумерандо начинаются на период (аннуитета) раньше, чем постнумерандо.

Контрольные вопросы по главе 6

1. Приведите пример срочного аннуитета, период которого больше года, а начисление процентов происходит один раз в год.
2. Какая схема более выгодна для накопления денежных средств – вносить на депозит ежегодно по 500 тыс. руб. или вносить каждые 2 года по 1 млн руб. в течение 10 лет?
3. Запишите формулу для оценки приведенной стоимости бессрочного аннуитета с поступлениями денежных средств каждые 3 года и ежегодным начислением сложных ссудных процентов по ставке 10% годовых.
4. Запишите формулу оценки будущей стоимости аннуитета с поступлениями денежных средств каждые 3 года и ежегодным начислением сложных ссудных процентов с силой роста 10% годовых.

Заключение

В учебном пособии рассмотрены понятие и классификация денежных потоков; особенности оценки постоянных аннуитетов; денежные потоки, платежи которых изменяются по законам арифметической и геометрической прогрессии; бессрочные и непрерывные ренты; методы оценки аннуитетов с периодом больше года.

В каждой главе пособия приведены выводы основных формул и примеры решения типовых задач. Рассмотренные методы могут быть использованы также при оценке эффективности инвестиционных проектов, расчетах платежей при погашении ипотечных и других видов кредитов, анализе возможности накопления доходов для дальнейшего их использования при получении пенсионных накоплений.

Литература

Использованная литература

1. Четыркин, Е. М. Финансовая математика / Е. М. Четыркин. – М. : Дело, 2000.
2. Красина, Ф. А. Финансовые вычисления : учеб. пособие / Ф. А. Красина. – Томск : Эль Контент, 2015. – 190 с.
3. Ковалев, В. В. Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – М. : Финансы и статистика, 1999.

Рекомендованная литература

4. Шиловская, Н. А. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебник и практикум для вузов / Н. А. Шиловская. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2023. – 176 с. // Образовательная платформа «Юрайт» : сайт. – URL: https://urait.ru/bcode/512354 (дата обращения: 09.02.2023).
5. Мардас, А. Н. Основы финансовых вычислений [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Мардас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2023. – 129 с. // Образовательная платформа «Юрайт» : сайт. – URL: https://urait.ru/bcode/514570 (дата обращения: 09.02.2023).
6. Копнова, Е. Д. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебник и практикум для вузов / Е. Д. Копнова. – М. : Юрайт, 2023. – 413 с. // Образовательная платформа «Юрайт» : сайт. – URL: https://urait.ru/bcode/511234 (дата обращения: 09.02.2023).

Глоссарий

Аннуитет – серия платежей, которые вносятся (снимаются) через равные промежутки времени.

Аннуитет пренумерандо – серия платежей, которые поступают в начале базового периода.

Аннуитет постнумерандо – серия платежей, которые поступают в конце базового периода.

Вечная рента – последовательность платежей, число членов которой не ограничено, т. е. она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам).

Конверсия ренты – изменение условий финансового соглашения, т. е. изменение одного связанного с рентой договора другим при сохранении интересов участников сделки.

Наращенная (*будущая*) *сумма ренты* FV – все платежи вместе с процентами на дату последней выплаты.

Непрерывный аннуитет – аннуитет, у которого в течение каждого базового периода денежные поступления происходят так часто, что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины.

Обратная задача – оценка денежного потока $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$ с позиции текущего момента, т. е. на момент начала первого периода.

Отсроченный аннуитет – серия периодических платежей или поступлений, которая начинается с некоторого момента в будущем.

Переменный аннуитет – аннуитет, члены которого различны по величине и изменяются в соответствии с установленным законом.

Постоянный аннуитет – серия платежей, которые вносятся (снимаются) через равные промежутки времени, при этом все платежи равны между собой.

Прямая задача – это оценка денежного потока $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n$ с позиции будущего момента, т. е. на момент окончания последнего периода.

Рентный период – промежуток времени между двумя последовательными платежами.

Современная (*приведенная*) *стоимость ренты* PV – все платежи вместе с процентами, пересчитанные на начальный момент времени.

Срок ренты – время от начала первого рентного периода до конца последнего.

Финансовая рента – поток последовательных платежей с постоянными интервалами, все члены которого являются положительными величинами.