

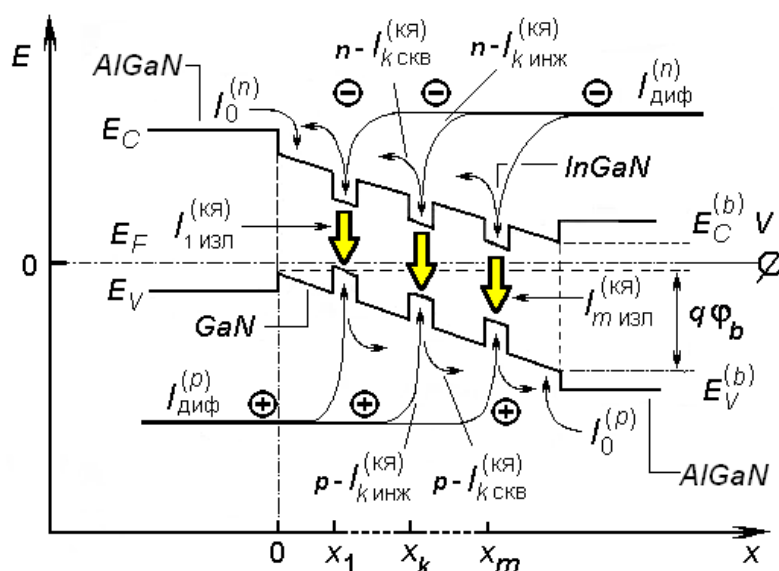
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Давыдов В.Н.

## ПРИБОРЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И ФОТОНИКИ

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы  
и решению задач студентов, обучающихся по техническим  
направлениям



Томск,  
2023

УДК 621.315+621.38  
ББК 32.852  
Д13

**Рецензент:**

Смирнов С.В. – доктор технических наук, профессор  
кафедры физической электроники ТУСУР

Давыдов В.Н. ПРИБОРЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И ФОТОНИКИ: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов и решения задач / В.Н. Давыдов. – Томск: ТУСУР, 2023. - 83 с.

Данное учебно-методическое пособие является неотъемлемой частью комплекта учебно-методического материала, необходимого для изучения курса «Приборы квантовой электроники и фотоники» по очной форме обучения.

В пособии приведены примеры решения задач по всем разделам данного курса, изложенным в учебном пособии, а также даны варианты заданий для контрольных работ. В конце пособия приведены справочные материалы по параметрам полупроводниковых материалов, необходимые для решения задач. Перед началом каждого раздела дано краткое изложение теории по тем вопросам и в том объеме, которые необходимы для дальнейшего решения задач. В этом теоретическом материале приведены дополнительные математические выражения, которые в дальнейшем потребуются для вычисления параметров физических процессов и явлений, используемых для создания приборов и устройств оптоэлектроники.

Пособие будет полезно студентам, испытывающим трудности в освоении курса, а также студентам, изучающим близкие по направлению дисциплины технического профиля.

Одобрено на заседании кафедры электронных приборов, протокол № 15 от 01.09.2023.

© Давыдов В.Н., 2023  
© Томск. гос. ун-т систем упр.  
и радиоэлектроники 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ .....	7
2 ЭЛЕМЕНТЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ	
2.1 Краткое изложение теории.....	8
2.2 Примеры решения задач по вычислению зонного спектра полупроводника.....	12
2.3 Варианты заданий по вычислению зонного спектра полупроводника .....	15
3 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ	
3.1 Краткое изложение теории .....	18
3.2 Примеры решения задач по определению параметров взаимодействия излучения с полупроводниками .....	19
3.3 Варианты заданий по определению параметров взаимодействия излучения с полупроводниками.....	22
4 ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ	
4.1 Краткое изложение теории .....	26
4.2 Примеры решения задач по определению параметров фотоэлектрических эффектов в полупроводниках.....	32
4.3 Варианты заданий по определению параметров фотоэлектрических эффектов в полупроводниках.....	39
5 ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ	
5.1 Краткое изложение теории.....	44
5.2 Примеры решения задач по определению параметров флуктуационных процессов в полупроводниках.....	48
5.3 Варианты заданий по определению параметров флуктуационных процессов в полупроводниках.....	52
6 ЭМИССИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ПОЛУПРОВОДНИКОВ	
6.1 Краткое изложение теории.....	56
6.2 Примеры решения задач по определению параметров эмиссионных процессов в полупроводниках.....	57
6.3 Варианты заданий по определению параметров эмиссионных процессов в полупроводниках.....	60

7 ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ. ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ	
7.1 Краткое изложение теории по электрооптическим эффектам в кристаллах.....	63
7.2 Краткое изложение теории по жидким кристаллам и электрооптическим эффектам в них.....	67
7.3 Примеры решения задач по определению параметров электрооптических эффектов, том числе в жидких кристаллах .....	74
7.4 Варианты заданий по определению параметров жидкокристаллических приборов .....	78
8 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	82
9 ПРИЛОЖЕНИЕ. СПАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ ПО ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ МАТЕРИАЛАМ.....	83

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

1.  $E$  - энергия электрона в твердом теле;
2.  $E_c$  - энергия электрона на дне зоны проводимости;
3.  $E_v$  - энергия электрона у потолка валентной зоны;
4.  $\Delta E_g$  - ширина запрещенной зоны;
5.  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновой вектор;
6.  $p = m\nu$  - импульс классической частицы;
7.  $m_0$  - масса покоя электрона;
8.  $m^*$  - эффективная масса электрона;
9.  $L$  - длина кристалла;
10.  $\lambda$  - длина волны;
11.  $N$  - количество атомов в кристалле (в единичном объеме);
12.  $F$  - энергия уровня Ферми;
13.  $k, \kappa$  - постоянная Больцмана;
14.  $T$  - абсолютная температура;
15.  $f(E)$  - функция распределения частиц по энергии;
16.  $j$  - плотность электрического тока;
17.  $e, q$  - заряд электрона;
18.  $v$  - скорость движения электрона (дырки);
19.  $m_n^*$  - эффективная масса электрона в зоне проводимости;
20.  $m_p^*$  - эффективная масса дырки в валентной зоне;
21.  $x$  - координата в твердом теле;
22.  $\varepsilon, E$  - электрическое поле;
23.  $t$  - текущее время;
24.  $R$  - коэффициент отражения излучения;
25.  $I$  - интенсивность оптического излучения;
26.  $I_{об}$  - обратный ток  $p$ - $n$  перехода;
27.  $\alpha$  - коэффициент поглощения оптического излучения;
28.  $\ell_{\phi}$  - длина свободного пробега фотона;
29.  $\omega$  - круговая частота;
30.  $c$  - скорость света в вакууме;
31.  $\sigma$  - сечение захвата фотона, заряда центром поглощения;
32.  $m_{\text{фот}}$  - масса фотона;
33.  $g_n$  - скорость генерации электронов;
34.  $g_p$  - скорость генерации дырок;
35.  $R_n$  - скорость рекомбинации электронов;
36.  $R_p$  - скорость рекомбинации дырок;

37.  $\tau_n$  - время жизни электронов;
38.  $\tau_p$  - время жизни дырок;
39.  $\eta$  - квантовая эффективность полупроводника;
40.  $\sigma_n$  - электронная проводимость полупроводника;
41.  $\sigma_p$  - дырочная проводимость полупроводника;
42.  $n$  - концентрация электронов в полупроводнике;
43.  $p$  - концентрация дырок в полупроводнике;
44.  $\mu_n$  - подвижность электронов;
45.  $\mu_p$  - подвижность дырок;
46.  $\tau_{фп}$  - время релаксации фотопроводимости;
47.  $D_n$  - коэффициент диффузии электронов;
48.  $D_p$  - коэффициент диффузии дырок;
49.  $L_n$  - диффузионная длина электронов;
50.  $L_p$  - диффузионная длина дырок;
51.  $d$  - толщина полупроводникового образца;
52.  $\rho$  - удельное сопротивление образца;
53.  $S$  - площадь образца;
54.  $\varphi$  - разность электростатических потенциалов;
55.  $i$  - величина электрического тока;
56.  $f$  - линейная частота;
57.  $K$  - константа упругости жидкого кристалла;
58.  $p$  - шаг холестерической спирали;
59.  $z$  - пространственная координата;
60.  $Q$  - параметр порядка в жидких кристаллах;
61.  $\Delta\varepsilon$  - оптическая анизотропия кристалла (твердого или жидкого);
62.  $\varepsilon_{\perp}$  - диэлектрическая проницаемость, измеренная перпендикулярно оси симметрии кристалла (или длинной оси молекулы жидкого кристалла);
63.  $\varepsilon_{\parallel}$  - диэлектрическая проницаемость, измеренная параллельно оси симметрии кристалла (или длинной оси молекулы жидкого кристалла).

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие охватывает широкий круг явлений и вопросов, касающихся основных аспектов оптоэлектроники. Оно предназначено для обеспечения материалами, обеспечивающими самостоятельной работы студентов по изучению дисциплины «Приборы квантовой электроники и фотоники», и имеет своей целью как приобретение знаний по физическим процессам, протекающим в элементах и приборах квантовой электроники и оптоэлектроники, приобретение навыков по решению задач практической направленности, а также навыков в проведении экспериментальном измерении параметров и характеристик указанных приборов.

Структурно данное пособие аналогично учебному пособию по указанной дисциплине, что означает, когда каждой главе лекционного материала в учебно-методическом пособии имеется глава, в которой приведены необходимые формулы, а также детали физической реализации и разбор методик решения задач по той же теме. В конце каждой главы в пособии приведены задачи по рассмотренной теме, предназначенные для самостоятельного решения.

При написании как учебного пособия к курсу, так и данного учебно-методического пособия автор стремился к подробному изложению физической стороны обсуждаемого явления или процесса, что в ряде случаев сделано в ущерб математическому описанию. Последнее может быть восполнено изучением доступных монографий по физике твердого тела, теории полупроводников и т.п. В начале каждого раздела приводится описание общей картины явления с указанием характеристических его параметров и зависимостей. Затем дается детальное описание физики явления и его реализация в виде твердотельного прибора. Особое внимание автор также уделял простоте и полноте изложения физических сторон обсуждаемого явления, которые по ряду причин в имеющихся вузовских учебниках либо изложены недостаточно ясно, либо отсутствуют совсем. Это касается описания взаимодействия кванта излучения с атомом в кристалле, возникновения теплового шума в проводящих системах, описания последовательно возникающих ориентационных эффектов в жидких кристаллах в широком диапазоне напряжений и т.д.

Пособие будет полезно при освоении дисциплины «Приборы квантовой электроники и фотоники» по очной технологии и при обучении по дистанционной технологии с использованием информационных и программных средств.

## 2 ЭЛЕМЕНТЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### 2.1 Краткое изложение теории

**Общие вопросы.** Для объяснения электрических свойств кристаллических твердых тел используют зонную диаграмму. Она представляет собой зависимость энергии электрона в кристалле от координаты, отсчитываемой от одной из поверхностей тела. Зонный спектр полупроводников и диэлектриков состоит из полос разрешенных и запрещенных значений энергии, которые может принимать валентный электрон в кристалле при внешних воздействиях. Однако для большинства практических задач, характеризующихся относительно слабыми внешними воздействиями (освещение, приложение электрического поля), достаточно ограничить свое рассмотрение изучением только поведения электрона только в двух близлежащих зонах: последней зоне невозбужденных состояний валентных электронов и первой зоне возбужденных, называемых валентной зоной и зоной проводимости, соответственно. В валентной зоне могут перемещаться дырки, создавая дырочную проводимость полупроводника, а в валентной зоне – электроны, которые создают электронную проводимость. Верхний уровень валентной зоны и нижний уровень зоны

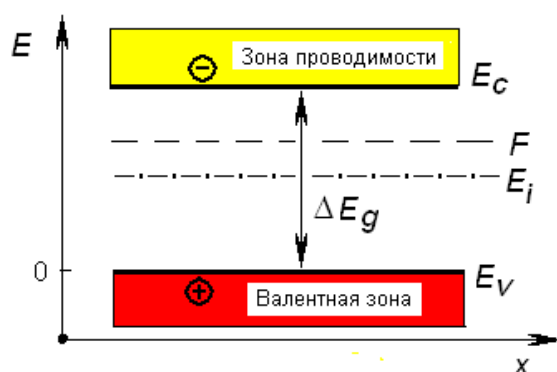


Рисунок 1 - Энергетическая диаграмма полупроводника; зоны разрешенных и запрещенных энергий

проводимости обозначают как  $E_V$  и  $E_C$ , соответственно. Энергетический зазор между этими уровнями  $\Delta E_g$ , называемый запрещенной зоной, включает в себя энергетические состояния с энергиями  $E$  из диапазона  $E_C > E > E_V$ , в которых электрон находиться не может. Середину запрещенной зоны обозначают как  $E_i$ . Рисунок 1 поясняет сказанное.

Начало отсчета энергии электрона и дырки обычно совмещают с потолком валентной зоны:  $E_V = 0$ . При этом энергия электрона отсчитывается вверх, а энергия дырки – вниз. Значит, энергетически выгодные состояния для электронов и дырок находятся вблизи  $E_V$  и  $E_C$ .

**Уровень Ферми.** Однако в реальных кристаллах в запрещенной зоне могут находиться уровни разрешенных энергий. Их появление связано с наличием в



полупроводнике различных примесей и (или) структурных дефектов. При значительной концентрации примесей или дефектов они задают концентрацию свободных носителей заряда в зонах разрешенных энергий. Для оценки заполнения электронами состояния с энергией  $E$ , а, следовательно, и степени его влияния на электрические свойства полупроводника, в условиях термодинамического равновесия необходимо пользоваться выражением для функции заполнения электронами Ферми-Дирака. Данное выражение показывает вероятность  $f(E)$  нахождения электрона на уровне с энергией  $E$ , если известно энергетическое положение уровня Ферми  $F$ :

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - F}{kT}\right)}. \quad (2.1)$$

Здесь  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура кристалла в кельвинах. Величина  $f(E)$  может принимать значения, лежащие в диапазоне от 0 до 1. Значение  $f(E) = 0$  соответствует случаю полной ионизации состояния с энергией  $E$ : данное энергетическое состояние, существование которого обусловлено, например, наличием в полупроводнике примесных атомов (медь, железо, фосфор, бор и т.д. в кремнии), соответствует такому состоянию атомов примеси, при котором на его валентных оболочках отсутствует один или несколько валентных электронов. Случай же  $f(E) = 1$  на физическом уровне означает присутствие на валентных оболочках атомов всех валентных электронов. Уровень Ферми – гипотетический уровень в зонной диаграмме кристалла, реально его нельзя обнаружить прямыми методами. Он определяется как некое энергетическое состояние в полупроводнике, вероятность заполнения которого электронами и дырками равны 0.5. Следует отметить, что функция вида (5.1) очень быстро изменяется вблизи точки  $E = F$ : отступив по энергии от этого равенства на  $(2 \div 3)kT$  вверх или вниз, функция заполнения примет значения равные к нулю или единице с точностью до 5%. Физически это означает, что при  $f(E) = 1$  все состояния, лежащие ниже уровня Ферми на  $(2 \div 3)kT$ , полностью заполнены электронами; в случае  $f(E) = 0$  все состояния, находящиеся выше уровня Ферми на  $(2 \div 3)kT$ , полностью лишены электронов за счет их возбуждения тепловыми колебаниями решетки.

Вероятность заполнения уровня с энергией  $E$  дырками определяется следующим образом:

$$1 - f(E) = \frac{\exp\left(\frac{E - F}{kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{E - F}{kT}\right)}. \quad (2.2)$$

Как же на практике пользоваться выражением (2.1)? Продемонстрируем это на простейшем примере: если известно, что в полупроводнике имеется примесь донорного типа с концентрацией  $N_d$ , то, зная положение уровня Ферми, мож-

но рассчитать сколько осталось атомов примеси (сколько электронов находится на примесном уровне):

$$\Delta n_t = N_d \cdot f(E).$$

Значит, в зоне проводимости появится дополнительно электронов. Уйдя с примесного уровня, они перешли в межатомное пространство:

$$\Delta n = N_d - \Delta n_t = N_d(1 - f(E)).$$

В свою очередь положение уровня Ферми в полупроводнике определяется концентрацией свободных носителей заряда. Если имеется полупроводник  $n$ -типа проводимости с концентрацией электронов в зоне проводимости  $n_0$ , то уровень Ферми расположен от  $E_V$  на расстоянии, определяемом выражением:

$$F = E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \cdot \ln \left( \frac{n_i}{n_0} \right). \quad (2.3)$$

Здесь первое слагаемое равно середине запрещенной зоны, второе слагаемое учитывает различие в эффективных массах дырок  $m_p^*$  и электронов  $m_n^*$ , и только третье слагаемое (2.3) ответственно за влияние на положение уровня Ферми концентрации свободных электронов. Как следует из выражения (2.3), в собственном полупроводнике  $n_0 = p_0 = n_i$  (концентрация носителей заряда в собственном полупроводнике) положение уровня Ферми  $F_i$  можно вычислить с помощью выражения

$$F_i = E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right). \quad (2.4)$$

Обычно эффективная масса дырок превышает эффективную массу электронов и потому, согласно (5.4), уровень Ферми в собственном полупроводнике лежит выше середины запрещенной зоны. Превышение  $F_i$  над  $E_i$  обычно невелико.

Как следует из выражения (5.3), в электронном полупроводнике уровень Ферми лежит в верхней половине запрещенной зоны, причем он тем ближе к дну зоны проводимости  $E_C$ , чем выше концентрация электронов.

В полупроводниках  $p$ -типа проводимости положение уровня Ферми определяется следующим образом:

$$F = E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) + kT \cdot \ln \left( \frac{n_i}{p_0} \right), \quad (2.5)$$

где  $p_0$  - концентрация дырок в валентной зоне. В приведенные выше выражения дают положение уровня Ферми в джоулях.

**Электропроводность.** При помещении полупроводника  $p$ - или  $n$ -типа в электрическое поле величиною  $E_0$  в зонах разрешенных значений энергии возникает направленное движение электронов и дырок: электроны, находясь в

зоне проводимости, перемещаются навстречу полю, а дырки в валентной зоне движутся по полю. Поэтому полный ток равен сумме этих токов:

$$j = j_n + j_p.$$

Каждый из этих токов можно рассчитать из следующих соображений. Если концентрация электронов равна  $n_0$  и они перемещаются навстречу полю со средней скоростью  $v_n$ , то переносимый ими заряд за время  $t$  через единичную площадку, перпендикулярную направлению их скорости, будет равен:

$$Q_n = qn_0v_n \cdot t,$$

где  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл- заряд электрона. Следовательно, протекающий электронный ток будет иметь плотность

$$j_n = \frac{dQ_n}{dt} = qn_0v_n.$$

Этот ток должен подчиняться закону Ома

$$j_n = \sigma \cdot E_0 = qn_0 \frac{v_n}{E_0} E_0 = q\mu_n n_0 E_0, \quad (2.6)$$

где обозначено:  $\mu_n = \frac{v_n}{E_0}$  - подвижность электронов в полупроводнике. По-

скольку скорость движения свободных частиц в кристалле с ростом приложенного электрического поля быстро насыщается, то этот параметр оказывается практически постоянной величиной для данного полупроводникового материала в заданных условиях измерения. Подвижность свободных носителей заряда связана с коэффициентами их диффузии  $D_n$ ,  $D_p$  соотношением Эйнштейна:

$$D_n = \frac{kT}{q} \mu_n, \quad D_p = \frac{kT}{q} \mu_p.$$

Из выражения (6) можно найти электропроводность полупроводника, созданную свободными электронами:

$$\sigma_n = q\mu_n n_0.$$

Аналогично находится дырочная составляющая электропроводности кристалла, в которой фигурируют подвижность дырок  $\mu_p$  и их концентрация в валентной зоне  $p_0$ . Поэтому полная электропроводность полупроводника равна:

$$\sigma = q\mu_n n_0 + q\mu_p p_0. \quad (2.7)$$

В условиях термодинамического равновесия между равновесными концентрациями электронов  $n_0$  и дырок  $p_0$  в зонах существует связь, определяемая следующим соотношением:

$$n_0 \cdot p_0 = n_i^2. \quad (2.8)$$

Здесь  $n_i$  - концентрация носителей заряда в собственном полупроводнике.

## 2.2 Примеры решения задач по вычислению зонного спектра полупроводника

При решении задач раздела необходимо пользоваться справочными данными по численным значениям параметров полупроводников различного физико-химического состава. Эти данные собраны в конце пособия.

**Задача 1.** Вычислить положение уровня Ферми в кремнии относительно потолка валентной зоны, если известно, что данный кристалл находится при температуре  $T = 300 \text{ K}$  и содержит  $1.4 \cdot 10^{13}$  атомов фосфора в  $1 \text{ см}^3$ . При решении учесть, что атомы фосфора дают энергетический уровень донорного типа, который лежит в запрещенной зоне точно по дну зоны проводимости.

**Решение.** Для определения энергетического положения уровня Ферми в заданных условиях необходимо воспользоваться выражением (2.3):

$$F = E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \cdot \ln \left( \frac{n_i}{n_0} \right).$$

Здесь равновесная концентрация  $n_0$  задается донорной примесью:

$$n_0 = N_d (1 - f(E_C)) = \frac{N_d \cdot \exp \left( \frac{E_C - F}{kT} \right)}{1 + \exp \left( \frac{E_C - F}{kT} \right)}.$$

Строго говоря, имеем трансцендентное уравнение относительно  $F$

$$F = E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \cdot \ln \left( \frac{n_i}{N_d} \right) - kT \cdot \ln \left( 1 + \exp \left( \frac{F - E_C}{kT} \right) \right), \quad (2.9)$$

которое можно решить приближенным методом, если  $F - E_C < 3kT$ . Это означает, что если донорный уровень находится выше уровня Ферми на единицы  $kT$ , то он полностью ионизован. Тогда последнее слагаемое в выражении (2.9) можно разложить в ряд по малому параметру

$$\ln \left( 1 + \exp \left( \frac{F - E_C}{kT} \right) \right) \approx \exp \left( \frac{F - E_C}{kT} \right) < \exp(-3) \approx \frac{1}{20} = 0.05$$

и увидеть, что в (2.9) слагаемое в (2.9) с  $\ln(1 + \delta)$  можно с высокой точностью считать равным  $\ln(1)$ , что дает нуль. В результате приходим к выражению для положения уровня Ферми в легированном полупроводнике:

$$F \approx E_i + \frac{3}{4} kT \cdot \ln \left( \frac{m_p^*}{m_n^*} \right) - kT \cdot \ln \left( \frac{n_i}{N_d} \right).$$

Если считать положение уровня Ферми в электронвольтах (эВ), то это выражение следует разделить на заряд электрона:

$$F \approx E_i + \frac{3}{4} \cdot \frac{kT}{q} \cdot \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right) - \frac{kT}{q} \cdot \ln\left(\frac{n_i}{N_d}\right), \quad (2.10)$$

$E_i$  - задано в электронвольтах. Подстановка численных значений в (2.10) дает

$$\begin{aligned} F &\approx 0.56 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln\left(\frac{0.16}{0.19}\right) - \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln\left(\frac{1.4 \cdot 10^{10}}{1.4 \cdot 10^{13}}\right) \approx \\ &\approx 0.56 + 1.9 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{16}{19}\right) - 2.6 \cdot 10^{-2} \cdot \ln(10^{-3}) = \\ &= 0.56 + 1.9 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{16}{19}\right) + 2.6 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot \ln(10) = \\ &= 0.56 + 1.9 \cdot 10^{-2} \cdot \ln\left(\frac{16}{19}\right) + 0.078 \cdot \ln(10) \approx 0.56 - 0.019 \cdot 0.15 + 0.078 \cdot 2.3 \approx \\ &\approx 0.56 - 0.003 + 0.18 = 0.74 . \end{aligned}$$

Из проведенного расчета следует важный вывод: изменение положение уровня Ферми за счет различия эффективных масс носителей заряда оказывается пренебрежимо малым по сравнению с другими слагаемыми в (2.10) и поэтому неважно: какие рассматривать электроны и дырки (легкие или тяжелые) – результат будет практически один и тот же. Такая ситуация характерна для подавляющего большинства практически важных случаев.

Далее, полученный результат подтверждает сделанное предположение: уровень Ферми находится ниже уровня донорной примеси на расстоянии в  $E_C - E_V - F = E_C - F = 1.12 - 0.74 = 0.38$  эВ, что значительно больше нескольких единиц  $kT$ .

Таким образом, уровень Ферми в кремнии при наличии донорной примеси с концентрацией  $1.4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$  расположен в верхней половине запрещенной зоны на расстоянии  $F \approx 0.74$  эВ, отсчитанном от потолка валентной зоны.

**Задача 2.** Рассчитать удельную электропроводность кристалла германия при комнатной температуре, если известно, что уровень его легирования донорной примесью составляет  $N_d = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

**Решение.** В общем случае электропроводность кристалла полупроводника обеспечивается движением электронов и дырок. Поэтому она состоит из двух слагаемых: электронной компоненты электропроводности и дырочной, что с использованием выражения (8) можно записать в виде

$$\sigma = q\mu_n n + q\mu_p p = q\mu_n n + q\mu_p \left(\frac{n_i^2}{n}\right). \quad (2.11)$$

Полная концентрация электронов в зоне проводимости складывается из собственной концентрации  $n_i$  и концентрации электронов от донорной примеси. Поэтому, предполагая полную ионизацию донорной примеси, можно записать:

$$n = n_i + N_d.$$

Воспользовавшись Приложением к данному учебно-методическому пособию, найдем, что при комнатной температуре собственная концентрация носителей заряда составляет  $n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , что на три порядка меньше концентрации донорной примеси. Поэтому с высокой степенью точности можно считать, что концентрация электронов в зоне проводимости равна

$$n \approx N_d.$$

Тогда электропроводность кристалла германия (5.11) будет равна:

$$\sigma = q\mu_n N_d + q\mu_p \left( \frac{n_i^2}{N_d} \right). \quad (2.12)$$

Подставив из Приложения в выражение (2.12) численные значения подвижностей электронов и дырок в германии, получим:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1,6 \cdot 10^{-19} \left( 3,9 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 10^{15} + 1,9 \cdot 10^3 \frac{2,4 \cdot 2,4 \cdot 10^{26}}{2,0 \cdot 10^{15}} \right) = \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \left( 7,8 \cdot 10^{18} + 1,9 \cdot 2,4 \cdot 1,2 \cdot 10^{14} \right) \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \left( 7,8 \cdot 10^{18} \right) = \\ &= 12,5 \cdot 10^{-1} = 1,2. \end{aligned}$$

Итак, электропроводность исследуемого кристалла германия равна  $1,2 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ .

**Задача 3.** В образце арсенида галлия, легированного донорной примесью концентрацией  $1,4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , протекает ток величиной  $10^{-3} \text{ А}$ . Размеры образца  $(0,31 \times 0,31 \times 1,0) \text{ см}^3$ . За какое время электроны пролетают этот образец? Считать, что ток течет вдоль длинной стороны кристалла.

**Решение.** Чтобы найти время пролета электронами образца, необходимо знать скорость дрейфа электронов -  $v_n$ , т.к. длина образца известна:

$$t = \frac{L}{v_n}. \quad (2.13)$$

Скорость электронов может быть найдена через их подвижность:

$$\mu_n = \frac{v_n}{E}, \quad (2.14)$$

где  $E$  - величина электрического поля, приложенного к кристаллу. Ее можно определить из закона Ома:

$$j = \sigma \cdot E. \quad (2.15)$$

Следовательно, искомая неизвестная будет вычисляться по выражению:

$$t = \frac{L}{v_n} = \frac{L}{\mu_n \cdot E} = \frac{L \cdot \sigma}{\mu_n \cdot j}.$$

Плотность тока можно найти по известному значению тока через образец  $I$  и площади образца  $S = (0,31 \times 0,31) = 10^{-1} \text{ см}^2$ :

$$j = \frac{I}{S}.$$

Окончательное выражение для времени пролета электронами образца будет

$$t = \frac{L \cdot \sigma \cdot S}{\mu_n \cdot I} = \frac{L \cdot S}{\mu_n \cdot I} q \left( \mu_n N_d + \mu_p \frac{n_i^2}{N_d} \right).$$

Подставив из Приложения численные значения параметров арсенида галлия, получим:

$$\begin{aligned} t(c) &= \frac{1,0 \cdot 10^{-1}}{8,0 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} 1,6 \cdot 10^{-19} \left( 8,0 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{15} + 5,0 \cdot 10^2 \frac{1,4 \cdot 1,4 \cdot 10^{16}}{1,4 \cdot 10^{15}} \right) = \\ &= 2,0 \cdot 10^{-21} (11,2 \cdot 10^{18} + 7,0 \cdot 10^3) \approx 22,4 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Ответ на поставленный вопрос таков: электрон пролетит образец за 22 миллисекунды.

### 2.3 Варианты решения задач по вычислению зонного спектра полупроводника

1. Определите положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны в кремниевом полупроводнике  $p$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация акцепторной примеси в нем равна  $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .
2. Определите положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны в кремниевом полупроводнике  $n$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация донорной примеси в нем равна  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .
3. Определите положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны в германиевом полупроводнике  $p$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация акцепторной примеси в нем равна  $N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .
4. Определите положение уровня Ферми относительно потолка середины запрещенной зоны в германиевом полупроводнике  $n$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация донорной примеси в нем равна  $N_d = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

5. Определите положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны в в полупроводниковом образце  $GaAs$   $n$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация донорной примеси в нем равна  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
6. Определите положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны в полупроводниковом образце  $GaAs$   $p$  - типа и концентрацию неосновных носителей, если известно, что концентрация акцепторной примеси в нем равна  $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
7. Даны два германиевых образца полупроводника  $p$ -типа. Концентрация неосновных носителей в первом образце равна  $p_n = 6,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ , а концентрация неосновных носителей во втором образце на два порядка выше. Определить удельную электропроводность и концентрацию основных носителей в каждом образце.
8. Даны два германиевых образца полупроводника  $p$ -типа. Концентрация неосновных носителей в первом образце равна  $p_n = 6,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ , а концентрация неосновных носителей во втором образце на два порядка ниже. Определить удельную электропроводность и концентрацию основных носителей в каждом образце.
9. Даны два кремниевых образца полупроводника  $p$ -типа. Концентрация неосновных носителей в первом образце равна  $p_n = 6,25 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ , а концентрация неосновных носителей во втором образце на два порядка выше. Определить удельную электропроводность и концентрацию основных носителей в каждом образце.
10. Даны два кремниевых образца полупроводника  $p$ -типа. Концентрация неосновных носителей в первом образце равна  $p_n = 6,25 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , а концентрация неосновных носителей во втором образце на два порядка ниже. Определить удельную электропроводность и концентрацию основных носителей в каждом образце.
11. Образец германия содержит донорную примесь с концентрацией  $N_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Определить удельную электропроводность и тип проводимости полупроводника. Какой должна быть концентрация доноров, чтобы удельная электропроводности равнялась  $6,2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ?
12. Образец кремния содержит донорную примесь с концентрацией  $N_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Определить удельную электропроводность и тип проводимости полупроводника. Какой должна быть концентрация доноров, чтобы удельная электропроводности равнялась  $6,2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ?



13. Образец арсенида галлия содержит донорную примесь с концентрацией  $N_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Определить удельную электропроводность и тип проводимости полупроводника. Какой должна быть концентрация доноров, чтобы удельная электропроводности равнялась  $6,2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ?
14. Образец германия содержит акцепторную примесь с концентрацией  $N_a = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Определить удельную электропроводность и тип проводимости полупроводника. Какой должна быть концентрация доноров, чтобы удельная электропроводности равнялась собственному значению?
15. Дрейфовый ток плотностью  $10^{-4} \text{ А/см}^2$  течет через образец германия  $n$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ ?
16. Дрейфовый ток плотностью  $10^{-3} \text{ А/см}^2$  течет через образец германия  $p$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ ?
17. Дрейфовый ток плотностью  $0,1 \text{ А/см}^2$  течет через образец кремния  $n$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $0,66 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ?
18. Дрейфовый ток плотностью  $0,1 \text{ А/см}^2$  течет через образец кремния  $p$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $0,55 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ?
19. Дрейфовый ток плотностью  $10^{-2} \text{ А/см}^2$  течет через образец арсенида галлия  $p$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $7,0 \cdot 10^2 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ ?
20. Дрейфовый ток плотностью  $10^{-3} \text{ А/см}^2$  течет через образец арсенида галлия  $n$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $5,0 \cdot 10^2 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ . За какое время электроны и дырки пройдут расстояние  $3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ ?

## 3 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

### 3.1 Краткое изложение теории

При распространении электромагнитного излучения в твердом теле интенсивность излучения монотонно уменьшается. Если параметры твердого тела постоянны по координате  $x$ , вдоль которой распространяется излучения, то уменьшение интенсивности по мере удаления от освещаемой поверхности подчиняется закону Бугера-Ламберта:

$$I(x) = I_0(1 - R) \cdot \exp(-\alpha \cdot x). \quad (3.1)$$

Здесь  $R$  - безразмерная величина, именуемая коэффициентом отражения излучения от поверхности твердого тела,  $\alpha$  - коэффициент поглощения излучения. Он имеет размерность обратной длины, и потому вводят еще один параметр, характеризующий взаимодействие излучения с твердым телом – длину свободного пробега фотона:

$$\ell_{\phi} = 1/\alpha. \quad (3.2)$$

Она равна среднему расстоянию, которое проходит фотон в твердом теле до момента своего поглощения. Численные значения длины свободного пробега фотона составляют единицы и доли микрона, что указывает на доминирующую роль приповерхностного слоя в процессе поглощения излучения.

Рассмотрение поглощения на основе квантовой теории света приводит к следующему выражению для коэффициента поглощения:

$$\alpha = \sigma \cdot N, \quad (3.3)$$

где  $\sigma$  - вероятность поглощения фотона одиночным центром, имеющая размерность площади;  $N$  - концентрация центров поглощения.

Из всех возможных механизмов поглощения излучения твердым телом наиболее важные для практического применения следующие: собственное поглощение, примесное поглощение, поглощение на свободных носителях заряда и решёточное поглощение.

1. Собственное поглощение наблюдается при падении на полупроводник излучения с энергией кванта больше ширины запрещенной зоны:

$$\hbar\omega \geq \Delta E_g. \quad (3.4)$$

Этот тип поглощения доминирует в области коротких длин волн, меньших  $\lambda_{кр}$ :

$$\lambda_{кр} = \frac{hc}{\Delta E_g}. \quad (3.5)$$

2. Примесное поглощение возникает, когда энергия падающего на полупроводник фотона достаточна для перевода электрона из валентной зоны на уровень примеси – случай акцепторной примеси ( $\Delta E_a$ ) или наоборот: с примеси в зону проводимости – случай донорной примеси ( $\Delta E_d$ ). Эти условия можно записать так:

$$\lambda_{\text{пр}} = \frac{hc}{\Delta E_{d,a}}. \quad (3.6)$$

Необходимым условием наблюдения примесного поглощения является частичная ионизация примесного уровня, что достигается при пониженных температурах полупроводника. Поскольку примесное поглощение также возможно в области коротких длин волн, где доминирует собственное поглощение, то вторым условием наблюдения примесного поглощения является отсутствие собственного поглощения. Наиболее просто это можно достичь, если использовать излучение с длиной волны  $\lambda$  из диапазона  $\lambda_{\text{пр}} > \lambda > \lambda_{\text{кр}}$ . Учитывая то обстоятельство, что концентрация примесей в полупроводнике на порядки ниже концентрации собственных атомов, согласно выражению (3.3) коэффициент примесного поглощения  $\alpha$  в реальных полупроводниках оказывается на несколько порядков ниже коэффициента собственного поглощения. Следовательно, поглощение излучения примесными атомами и ионами происходит в слое полупроводника толщиной до сотен микрон.

### 3.2 Примеры решения задач по определению параметров взаимодействия излучения с полупроводниками

При решении задач раздела необходимо пользоваться справочными данными по численным значениям параметров полупроводников различного физико-химического состава. Эти данные собраны в Приложении, находящемся в конце данного учебно-методического пособия.

**Задача 1.** Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 10^{-6}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-8}$  м?

**Решение.** За основу решения задачи возьмем закон Бугера – Ламберта, согласно которому интенсивность оптического излучения на расстоянии  $x$  от освещаемой поверхности  $I(x)$  уменьшается с ростом глубины по экспоненциальному закону:

$$I(x) = (1 - R) \cdot I_0 \exp(-\alpha x), \quad (3.7)$$

где  $R$  - коэффициент отражения излучения от поверхности, а  $\alpha$  - коэффициент поглощения, который по величине обратно пропорционален длине свободного пробега фотона  $\ell_{\text{ф}}$ :

$$\alpha = \frac{1}{\ell_{\text{ф}}}.$$

Значит, в точке  $x_1 = 10^{-6}$  см интенсивность света будет равна

$$I(x_1) = I_0 \exp(-\alpha x_1).$$

Эта доля интенсивности от падающего на полупроводник излучения, пройдя слой вещества до точки  $x_2 = 2 \cdot 10^{-6}$  см, уменьшится до

$$I(x_2) = I_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot \exp(-\alpha x_2) = I_0 \exp(-\alpha(x_1 + x_2)).$$

Следовательно, в слое толщиной  $(x_2 - x_1)$  поглотится интенсивность

$$\begin{aligned} \Delta I(x_2 - x_1) &= I(x_1) - I(x_2) = I_0 \exp(-\alpha x_1) - I_0 \exp(-\alpha(x_1 + x_2)) = \\ &= I_0 \exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - \exp(-\alpha x_2)] \end{aligned}$$

или в относительных единицах

$$\frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} = \exp(-\alpha x_1) \cdot [1 - \exp(-\alpha x_2)].$$

Подставляя численные значения в сантиметрах, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I(x_2 - x_1)}{I_0} &= \exp(-10^6 \cdot 10^6) \left[ 1 - \exp(-10^6 \cdot (2 \cdot 10^{-6} - 10^6)) \right] = \\ &= \exp(-1) [1 - \exp(-1)] = \frac{1}{\exp(1)} \left[ \frac{\exp(1) - 1}{\exp(1)} \right] = \frac{\exp(1) - 1}{(\exp(1))^2} \approx \frac{2,7 - 1}{2,7 \cdot 2,7} = \frac{1,7}{7,3} \approx 0,23. \end{aligned}$$

Ответ на поставленный в задаче вопрос таков: в указанном слое поглотится примерно 23% от падающей интенсивности.

**Задача 2.** Определить вероятность поглощения фотонов видимого оптического излучения в полупроводниковом кремнии, если известно, что 99% падающей световой мощности поглощается в слое толщиной  $10^{-5}$  см.

**Решение.** За основу решения задачи возьмем закон Бугера – Ламберта, согласно которому интенсивность оптического излучения на расстоянии  $x$  от освещаемой поверхности  $I(x)$  уменьшается с ростом глубины по экспоненциальному закону:

$$I(x) = (1 - R) \cdot I_0 \exp(-\alpha x).$$

Здесь по условию задачи коэффициент отражения  $R = 0$ . Известно, что коэффициент поглощения  $\alpha$  определяется вероятностью поглощения фотона  $\sigma$  отдельным центром и концентрацией поглощающих центров  $N$ :

$$\alpha = \sigma \cdot N. \quad (3.8)$$

Следовательно, по условию задачи процент остаточной интенсивности на глубине  $x_0 = 10^{-5}$  см равен 0.01%. Поэтому по выражению (20) имеем

$$\frac{I(x_0)}{I_0} = \exp(-\sigma N \cdot x_0) = 0.01.$$

Отсюда находим неизвестную величину:

$$\sigma = -\frac{1}{N \cdot x_0} \ln(0.01) = -\frac{1}{N \cdot x_0} \ln(10^{-2}) = \frac{2}{N \cdot x_0} \ln(10). \quad (3.9)$$

Так как поглощение излучения осуществляется в собственной полосе длин волн (случай собственного поглощения), то концентрация поглощающих центров равна концентрации атомов кремния. Согласно табличным данным  $N = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , поэтому из выражения (6.9) находим:

$$\sigma = \frac{2}{5 \cdot 10^{22} \cdot 10^{-5}} \ln(10) = \frac{2}{5} 10^{-17} \cdot 2.3 = 9.2 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2.$$

Итак, ответ на поставленную задачу таков: вероятность поглощения фотона атомами кремния равна  $9.2 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$ .

**Задача 3.** Определить мощность оптического излучения на глубине  $x_0 = 10^{-4} \text{ см}$  от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что при падении на поверхность 1 Вт света на расстоянии  $x_1 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ см}$  поглотилось 85% от прошедшей в полупроводник мощности.

**Решение.** Как и в предыдущей задаче воспользуемся законом Бугера – Ламберта для мощности для двух глубин поглощения. Требуемая мощность может быть найдена по формуле:

$$P(x_0) = (1 - R) \cdot P_0 \exp(-\alpha x_0),$$

где  $R = 0$ ,  $P_0 = 1 \text{ Вт}$ . Для определения мощности на глубине  $x_0 = 10^{-4} \text{ см}$  необходимо вычислить коэффициент поглощения, что также можно сделать, используя закон Бугера – Ламберта:

$$P(x_1) = P_0 \exp(-\alpha x_1)$$

Отсюда получим:

$$\alpha = -\frac{1}{x_1} \ln\left(\frac{P(x_1)}{P_0}\right).$$

Тогда искомая величина будет равна

$$P(x_0) = P_0 \exp\left(\frac{x_0}{x_1} \left(\ln\left(\frac{P(x_1)}{P_0}\right)\right)\right). \quad (3.10)$$

Подстановка численных значений в выражение (6.10) дает

$$P(x_0) = 1 \cdot \exp(2,1 \cdot \ln(0.15)) = \exp(2,1 \cdot (-1.9)) = \frac{1}{\exp(4)} \approx \frac{1}{54} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}.$$

Ответ на поставленный вопрос таков: на глубине  $10^{-4} \text{ см}$  мощность оптического излучения равна  $1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$ .

**Задача 4.** Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения с длиной волны  $10.6 \text{ мкм}$  в кристалле  $GaAs$  длиной  $10^{-4} \text{ см}$ , если известно, что на его длине поглотилось 50% падающей мощности, а при концентрации в полупроводнике поглощаю-

щих центров той же природы  $1,8 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона указанной длины волны составляет 100 см.

**Решение.** Неизвестную концентрацию центров поглощения фотонов найдем из закона Бугера – Ламберта:

$$I(L) = I_0 \exp(-\alpha x) = I_0 \exp(-\sigma N \cdot L).$$

Отсюда находим:

$$N = \frac{-1}{\sigma \cdot L} \ln\left(\frac{I(L)}{I_0}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot L} \ln\left(\frac{I_0}{I(L)}\right).$$

В данном выражении для отыскания концентрации примесей неизвестной величиной является сечение захвата ими фотонов. Займемся теперь его определением. Из условия задачи известно, что при  $N = N_0 = 10^{12} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона равна  $\ell_\phi = 100 \text{ см}$ . По определению она равна обратному значению коэффициента поглощения:

$$\ell_\phi = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sigma \cdot N_0}.$$

Следовательно, сечение захвата отсюда будет равно

$$\sigma = \frac{1}{\ell_\phi \cdot N_0}.$$

Окончательно выражение для отыскания концентрации примесных центров примет вид:

$$N = N_0 \frac{\ell_\phi}{L} \ln\left(\frac{I_0}{I(L)}\right). \quad (3.11)$$

Подстановка численных значений в выражение (6.11) дает следующее значение отыскиваемой величины:

$$N \approx 10^{12} \cdot 10^2 \cdot 0.7 = 7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, окончательный ответ на поставленный в задаче вопрос таков: концентрация примесных центров в полупроводнике, поглощающих излучение с длиной волны 10.6 мкм, составляет  $7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

### 3.3 Варианты заданий определению параметров взаимодействия излучения с полупроводниками

1. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника от освещаемой поверхности ( $x = 0$ ) до точки  $x_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ , если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-6} \text{ см}$ , а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.2?

2. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника от освещаемой поверхности ( $x = 0$ ) до точки  $x_1 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-6}$  см, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.3?
3. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника от освещаемой поверхности ( $x = 0$ ) до точки  $x_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  см, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-6}$  см, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.4?
4. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника от освещаемой поверхности ( $x = 0$ ) до точки  $x_1 = 3 \cdot 10^{-6}$  см, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $2 \cdot 10^{-6}$  см, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.5?
5. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника от освещаемой поверхности ( $x = 0$ ) до точки  $x_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  см, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $2 \cdot 10^{-6}$  см, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.6?
6. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 10^{-5}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-6}$  см?
7. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 10^{-6}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что длина свободного пробега фотона составляет  $10^{-6}$  см?
8. Какая доля от падающей световой интенсивности поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 2 \cdot 10^{-6}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что коэффициент поглощения излучения составляет  $10^6$  см<sup>-1</sup>, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности полупроводника равен 0.2?
9. Какая мощность света поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что падающая на полупроводник мощность света равна  $2 \cdot 10^{-3}$  Вт, коэффициент поглощения излучения составляет  $3 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>, а коэффициент отражения света от освещаемой поверхности полупроводника равен 0.1?

10. Какая мощность света поглощается в слое полупроводника между координатами  $x_1 = 10^{-5}$  см до  $x_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  см, отсчитанными от освещаемой поверхности, если известно, что падающая на полупроводник мощность света равна  $8 \cdot 10^{-2}$  Вт, коэффициент поглощения излучения составляет  $2 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>, а коэффициент отражения света от освещаемой поверхности полупроводника равен 0.5?
11. Определить абсолютное значение мощности оптического излучения на глубине  $x_0 = 10^{-6}$  см от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что при падении на поверхность  $10^{-3}$  Вт света на расстоянии  $x_1 = 2,1 \cdot 10^{-5}$  см поглотилось 95% от прошедшей в полупроводник световой мощности, а коэффициент отражения света от освещаемой поверхности полупроводника равен 0.15.
12. Определить абсолютное значение мощности оптического излучения на глубине  $x_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  см от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что при падении на поверхность  $10^{-3}$  Вт света на расстоянии  $x_1 = 4,2 \cdot 10^{-5}$  см поглотилось 90% от прошедшей в полупроводник световой мощности, а коэффициент отражения света от освещаемой поверхности полупроводника равен 0.35.
13. Определить абсолютное значение мощности оптического излучения на глубине  $x_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  см от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что при падении на поверхность  $10^{-3}$  Вт света на расстоянии  $x_1 = 4,2 \cdot 10^{-5}$  см поглотилось 70% от прошедшей в полупроводник световой мощности, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.1.
14. Определить долю падающей мощности оптического излучения на глубине  $x_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  см от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что на расстоянии  $x_1 = 8 \cdot 10^{-5}$  см поглотилось 60% от прошедшей в полупроводник световой мощности, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.25.
15. Определить долю падающей мощности оптического излучения на глубине  $x_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  см от освещаемой поверхности полупроводника, если известно, что на расстоянии  $x_1 = 6 \cdot 10^{-5}$  см поглотилось 50% от прошедшей в полупроводник световой мощности, а коэффициент отражения от освещаемой поверхности равен 0.5.
16. Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения в кристалле *GaAs* длиной  $L = 0.5$  см, если известно, что на его длине поглотилось 50% падающей мощности, а при



концентрации в полупроводнике поглощающих центров той же природы  $10^{13} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона составляет 10 см.

17. Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения в кристалле полупроводника *GaAs* длиной  $L = 1$  см, если известно, что на его длине поглотилось 90% прошедшей в полупроводник мощности, а при концентрации в полупроводнике поглощающих центров той же природы  $1,8 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона указанной длины волны составляет 80 см. Коэффициент отражения излучения от поверхности полупроводника принять равным 0.1.
18. Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения в кристалле *GaAs* длиной  $L = 0.35$  см, если известно, что на его длине поглотилось 99% прошедшей в полупроводник мощности, а при концентрации в полупроводнике поглощающих центров той же природы  $10^{11} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона указанной длины волны составляет 100 см. Коэффициент отражения излучения от поверхности полупроводника принять равным 0.5.
19. Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения в кристалле *Si* длиной  $L = 0.25$  см, если известно, что на его длине поглотилось 80% прошедшей в полупроводник мощности, а при концентрации в полупроводнике поглощающих центров той же природы  $10^{10} \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона указанной длины волны составляет 10 см. Коэффициент отражения излучения от поверхности полупроводника принять равным 0.1.
20. Найти концентрацию примесных центров, на которых происходит поглощение инфракрасного излучения с длиной волны 10.6 мкм в кристалле *GaAs* длиной  $10^{-4}$  см, если известно, что на его длине поглотилось 10% падающей мощности, а при концентрации в полупроводнике поглощающих центров той же природы  $10^9 \text{ см}^{-3}$  длина свободного пробега фотона указанной длины волны составляет 200 см. Коэффициент отражения излучения от поверхности полупроводника принять равным 0.33.

## 4 ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

### 4.1 Краткое изложение теории

**Фотопроводимость.** Одно из основных фотоэлектрических явлений в полупроводниках, которое физически очень прозрачно и которое широко используют в научных исследованиях и технических приложениях – это фотопроводимость. Под фотопроводимостью понимается изменение проводимости полупроводника, вызванное действием падающего оптического излучения. Полупроводник, используемый для регистрации оптического излучения за счет возникновения в нем фотопроводимости, называют фоторезистором. Изменение проводимости может регистрироваться при приложении к фоторезистору как постоянного напряжения, так и переменного. В соответствии с этим различают фотопроводимость на постоянном токе и на переменном.

Физическая причина возникновения фотопроводимости полупроводника  $\Delta\sigma$  одна: изменение (возрастание) концентрации свободных носителей заряда  $\Delta n$ ,  $\Delta p$  в разрешенных зонах энергии за счет поглощения падающего излучения. Фотопроводимость единичного объема полупроводника описывается следующим выражением:

$$\Delta\sigma = q\mu_n \cdot \Delta n + q\mu_p \cdot \Delta p, \quad (4.1)$$

где  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  - подвижности электронов и дырок соответственно;  $\Delta n$ ,  $\Delta p$  - изменения концентраций свободных носителей заряда в зонах. Их можно найти, решив кинетические уравнения, описывающие изменения концентраций носителей заряда в зонах за счет их генерации и рекомбинации:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = g_n - \frac{\Delta n}{\tau_n}; \quad \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = g_p - \frac{\Delta p}{\tau_p}, \quad (4.2)$$

где  $g_n = \eta \cdot \alpha \cdot I(x)$ ,  $g_p = \eta \cdot \alpha \cdot I(x)$  - скорости генерации неравновесных электронов и дырок за счет поглощения излучения интенсивностью  $I(x)$ . Если считать, что интенсивность падающего оптического излучения модулирована по гармоническому закону (так, излучение ламп накаливания модулировано по амплитуде частотой  $2 \times 50 = 100$  Гц), то можно записать:

$$g_n = g_0 \exp(i\omega t), \quad g_p = g_0 \exp(i\omega t). \quad (4.3)$$

Разумно считать, что изменения концентраций носителей заряда также подчиняются гармоническому закону изменения во времени на той же частоте, и поэтому будем отыскивать решения уравнений (4.2) в виде

$$\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp(i\omega t), \quad \Delta p = \Delta p_0 \cdot \exp(i\omega t). \quad (4.4)$$

Подставив выражения (4.3) и (4.4) в уравнения (4.2), можно найти, что максимальные изменения концентраций носителей заряда зависят от частоты модуляции светового потока:

$$\Delta n_0 = \frac{g_0 \cdot \tau_n}{1 + i\omega \cdot \tau_n}, \Delta p_0 = \frac{g_0 \cdot \tau_p}{1 + i\omega \cdot \tau_p}. \quad (4.5)$$

Однако физический смысл изменения концентраций имеют только реальные части выражений (4.5). Отыскивая их, получим:

$$\Delta n_0 = \frac{g_0 \cdot \tau_n}{1 + \omega^2 \cdot \tau_n^2}, \Delta p_0 = \frac{g_0 \cdot \tau_p}{1 + \omega^2 \cdot \tau_p^2}. \quad (4.6)$$

Выражения (4.6) показывают, что амплитуды изменений концентраций носителей в зонах зависят от соотношения частоты модуляции светового потока и времени жизни носителей. Если частота модуляции низкая ( $\omega \cdot \tau_n \ll 1$ ,  $\omega \cdot \tau_p \ll 1$ ), то изменения концентраций максимальны и равны

$$\Delta n_0^{\text{НЧ}} = g_0 \cdot \tau_n, \Delta p_0^{\text{НЧ}} = g_0 \cdot \tau_p. \quad (4.7)$$

На высокой частоте ( $\omega \cdot \tau_n \gg 1$ ,  $\omega \cdot \tau_p \gg 1$ ) изменения концентраций уменьшаются с ростом частоты:

$$\Delta n_0^{\text{ВЧ}} = \frac{g_0 \cdot \tau_n}{\omega^2 \cdot \tau_n^2}, \Delta p_0^{\text{ВЧ}} = \frac{g_0 \cdot \tau_p}{\omega^2 \cdot \tau_p^2}. \quad (4.8)$$

Частота, на которой начинается спад амплитуды избыточных концентраций носителей заряда, определяется из условия (в большинстве практически важных случаев  $\tau_n = \tau_p$ , обозначим  $\tau_{n,p} = \tau_n = \tau_p$ )

$$\omega_0 \cdot \tau_{n,p} = 1 \quad (4.9)$$

и называется частотой среза:

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau_{n,p}}. \quad (4.10)$$

На этой частоте амплитуда неравновесной концентрации уменьшается по сравнению с максимальным значением в два раза.

Из выражения (4.10) следует важный вывод: измеряя экспериментально зависимость амплитуд концентраций неравновесных носителей заряда от частоты модуляции светового потока, можно по частоте среза определить время жизни неравновесных носителей заряда. Тогда на низкой частоте модуляции, зная значения времен жизни неравновесных электронов и дырок  $\tau_{n,p}$ , по выражениям (4.7) можно найти скорость их генерации, а из неё вычислить квантовую эффективность полупроводника, если известно значение интенсивности падающего излучения.

Способом, аналогичным рассмотренному выше, можно найти закон изменения величины фотопроводимости  $\Delta\sigma$  от частоты модуляции светового потока и получить следующее выражение:

$$\Delta\sigma = \frac{q(\mu_n + \mu_p) \cdot g \cdot \tau_{\text{фп}}}{1 + \omega^2 \cdot \tau_{\text{фп}}^2}, \quad (4.11)$$

где  $g = \eta \cdot \alpha \cdot (1 - R) \cdot I_0$  - скорость генерации электронно-дырочных пар в полупроводнике за счет поглощения падающего излучения, а  $\tau_{\text{фп}}$  - время релаксации фотопроводимости ( $\delta n \approx \delta p$ )

$$\tau_{\text{фп}} = \frac{\mu_n \cdot \delta n + \mu_p \cdot \delta p}{\frac{\mu_n \cdot \delta n}{\tau_n} + \frac{\mu_p \cdot \delta p}{\tau_p}} \approx \frac{\mu_n + \mu_p}{\frac{\mu_n}{\tau_n} + \frac{\mu_p}{\tau_p}} = \frac{(\mu_n + \mu_p) \cdot \tau_n \tau_p}{\mu_n \tau_p + \mu_p \tau_n}. \quad (4.12)$$

Из выражения (4.11) следует, что фотопроводимость полупроводника на низких частотах модуляции остается постоянной величиной, а на высоких уменьшается пропорционально квадрату частоты модуляции падающего оптического излучения. При этом существует частота среза фотопроводимости, определяемая как величина, обратная времени релаксации фотопроводимости

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau_{\text{фп}}}.$$

Таким образом, исследуя свойства фотопроводимости, можно по приведенным выше выражениям вычислить фундаментальные параметры полупроводникового материала.

**Фотовольтаические эффекты.** В ряде практических приложений фотоэффектов в полупроводниках серьезным недостатком на пути использования фотопроводимости является необходимость подключения к фоторезистору постоянно действующего источника постоянного напряжения. Более того, протекание постоянного тока через полупроводник ухудшает его шумовые свойства – шум фоторезистора при протекании по нему тока увеличивается. По этим причинам представляют интерес фотоэффекты в полупроводнике, когда в отсутствие источника постоянного напряжения в измерительной цепи освещение приводит к появлению на его торцах фотонапряжения – напряжения, вызванного освещением.

Наиболее широко используемый и значимый по величине фотовольтаический эффект наблюдается при освещении  $p$ - $n$  перехода. Возникающая при этом фотоэлектродвижущая сила называется барьерной фотоэдс.

Основной характеристикой  $p$ - $n$  перехода, определяющей качество его изготовления и возможность использования в электронных приборах, является вольт-амперная характеристика (ВАХ). Она представляет собой зависимость омического тока  $j$ , протекающего через  $p$ - $n$  переход, от величины постоянного напряжения  $V$  на нем. Из-за наличия потенциального барьера на границе раздела  $p$ - и  $n$ -областей перехода, данная характеристика оказывается несимметричной относительно знака прикладываемого напряжения. Так, если к  $n$ -области приложить положительный потенциал относительно потенциала  $p$ -области (случай обратных или запиорных напряжений), то высота барьера, разделяющего эти области, увеличится и, следовательно, протекание тока основных носителей через переход будет исключено. В этом случае через  $p$ - $n$  переход протекает ток  $I_0$ , образованный неосновными носителями заряда  $n$ - и  $p$ -

областей, для которых контактное электрическое поле способствует переносу: электронов из  $p$ -области в  $n$ -область и дырок из  $n$ -области в  $p$ -область.

Если же к  $n$ -области приложить отрицательный потенциал относительно потенциала  $p$ -области (случай прямых или отпирающих напряжений), то высота барьера, разделяющего эти области, уменьшится и, следовательно, через переход будет течь ток основных носителей. Учитывая больцмановский закон распределения частиц по энергиям: количество частиц, имеющих энергию выше высоты потенциального барьера, экспоненциально увеличивается с уменьшением высоты этого барьера, можно получить выражение для ВАХ  $p$ - $n$  перехода в следующем виде:

$$I(V) = I_{об} \left( \exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1 \right), \quad (4.13)$$

где  $I_{об}$  - величина обратного тока  $p$ - $n$  перехода. Как указывалось выше физической причиной его появления является ток неосновных носителей, которые либо генерируются в пределах  $p$ - $n$  перехода примесными атомами и ионами (по этой причине его называют генерационно-рекомбинационным током), либо за счет диффузии неосновные носители заряда из  $n$ - и  $p$ -областей поставляются к переходу, где подхватываются и разделяются электрическим полем  $p$ - $n$  перехода (его называют диффузионным током). Величина обратного тока – важный параметр, определяющий многие электрические свойства перехода. Математическое выражение для определения обратного тока перехода в случае доминирования диффузионного механизма поставки неосновных носителей заряда таково:

$$I_0 = \frac{kT}{q} S \frac{b\sigma_i^2}{(1+b)^2} \left( \frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n} \right). \quad (4.14)$$

Здесь  $S$  - площадь перехода;  $b = \mu_n/\mu_p$  - отношение подвижностей электронов и дырок;  $\sigma_i$  – собственная электропроводность материала перехода;  $\sigma_n$ ,  $\sigma_p$  - удельная электропроводность  $n$ - и  $p$  – областей  $p$ - $n$  перехода;  $L_n$ ,  $L_p$  – диффузионная длина электронов и дырок соответственно.

Другим важным параметром, характеризующим качество перехода, является его дифференциальное сопротивление, обозначаемое как  $R_d$ . Физически оно представляет собой сопротивление элемента, оказываемое им протеканию слабого переменного тока. Учитывая то, что слабое переменное напряжение часто используется в радиоэлектронных цепях в качестве сигнального, введение дифференциального сопротивления оказывается во многих случаях доминирующим для оценки возможностей использования данного элемента в той или иной электрической цепи. Математическое определение дифференциального сопротивления элемента, находящегося при постоянном напряжении  $V = V_0$ , таково

$$R_d = \left( \frac{\partial U}{\partial I} \right)_{V=V_0} . \quad (4.15)$$

Физически его можно измерить, если наряду с постоянным напряжением  $V_0$  к исследуемому элементу приложить малое переменное напряжение амплитудой  $\Delta U$ , частотой  $f$  и зарегистрировать величину протекающего через элемент тока  $\Delta I$  на этой же частоте. Тогда согласно определению сопротивления по закону Ома найдем:

$$R_d(f, V_0) = \frac{\Delta U}{\Delta I} . \quad (4.16)$$

Ясно, что величина дифференциального сопротивления зависит как от частоты, на которой оно измеряется, так и от величины постоянного напряжения, приложенного к элементу. Из выражения (4.16) также следует различие между дифференциальным сопротивлением  $p$ - $n$  перехода и сопротивлением, измеряемым на постоянном токе: они разнятся так же, как отличается производная функции, вычисленная в заданной точке, от среднего значения тангенса угла наклона этой функции в той же точке - в нашем случае: при заданном постоянном напряжении на переходе.

Пользуясь выражением для ВАХ перехода (4.13), подвергнутого одновременному действию произвольного постоянного и малого переменного напряжения, нетрудно определить его дифференциальное сопротивление:

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{1}{\left( \frac{\partial I}{\partial U} \right)_{V=V_0}} = \left( \frac{\partial}{\partial U} \left( I_{\text{об}} \left( \exp \left( \frac{q(V_0 + U)}{kT} \right) - 1 \right) \right) \right)^{-1} = \\ &= \left( I_{\text{об}} \left( \exp \left( \frac{qV_0}{kT} \right) \frac{\partial}{\partial U} \left( \exp \left( \frac{qU}{kT} \right) \right) \right) \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{q}{kT} I_{\text{об}} \left( \exp \left( \frac{q(V_0 + U)}{kT} \right) \right) \right)^{-1} \approx \frac{kT}{qI_{\text{об}}} \cdot \exp \left( - \frac{qV_0}{kT} \right) \end{aligned}$$

поскольку обычно  $|V_0| \gg U$ , т.е. прикладываемое постоянное напряжение по своей величине обычно во много раз больше амплитуды переменного тестового сигнала. Окончательно имеем:

$$R_d(V_0) \approx \frac{kT}{qI_{\text{об}}} \cdot \exp \left( - \frac{qV_0}{kT} \right) . \quad (4.17)$$

Из данного выражения следует, что величина дифференциального сопротивления резко уменьшается в области прямых смещений (положительных напряжений, открывающих переход). Оно максимально в точке  $V = 0$  В. В области же обратных смещений данное выражение недействительно ввиду того, что исходное выражение для ВАХ  $p$ - $n$  перехода не дает экспоненциальной зависимости тока в этой области напряжений. Поэтому для запира-

ющих напряжений дифференциальное сопротивление обычно вычисляется по (7.17), когда  $V_0 = 0$ :

$$R_d = \frac{kT}{qI_{об}} . \quad (4.18)$$

Таким образом, величина дифференциального сопротивления  $p$ - $n$  перехода при выбранном значении постоянного напряжения на нем  $V_0$  определяется в первую очередь значением обратного тока, а также величиной приложенного к переходу постоянного напряжения.

Следующим важным параметром, характеризующим электрические свойства  $p$ - $n$  перехода, является его дифференциальная емкость  $C$ . Физически эта емкость образована  $n$ - и  $p$ - областями (их можно рассматривать как обкладки плоского конденсатора), разделенными  $i$ -слоем толщиной  $W$ , в котором проводимость равна собственной (его можно рассматривать как слой диэлектрика между обкладками конденсатора). Эта емкость называется **барьерной**. Величина барьерной емкости единичной площади определяется концентрациями донорной  $N_d$  и акцепторной  $N_a$  примесями в  $n$ - и  $p$ - областях соответственно, высотой потенциального барьера на границе раздела областей разного типа проводимости  $\varphi_б$ , а также величиной напряжения на переходе  $V$ , смещающего его в прямом (проводящем) направлении:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{W} = \sqrt{\frac{q\varepsilon\varepsilon_0}{2(\varphi_б - V)} \cdot \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}} . \quad (4.19)$$

Здесь разность потенциалов между  $n$ - и  $p$ -областями перехода определяет высоту потенциального барьера между областями перехода и определяется следующим образом:

$$\varphi_б = \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_d N_a}{n_i^2} \right) .$$

Как и всякий электронный прибор, в котором имеется перенос носителей заряда через область их регистрации,  $p$ - $n$  переход должен обладать некоторой инерционностью по отношению к внешнему воздействию. Это означает, что при подаче на него переменного напряжения различной частоты  $p$ - $n$  переход может не успеть отреагировать на него, если частота напряжения высока и превышает некоторый характеристический параметр, определяемый параметрами  $p$ - $n$  перехода, или успевать, если частота внешнего воздействия мала. Этим характеристическим параметром является время перезарядки его емкости  $C$ . Для исследования частотных свойств  $p$ - $n$  перехода его необходимо включить в прямом или запиорном направлении и приложить синусоидальный сигнал с малой амплитудой, обычно не превышающей напряжение постоянного смещения на переходе. Изменяя частоту синусоидального сигнала от меньшего значения к большему, с помощью квадратичного детектора определяется амплитуда переменного напряжения  $U_n$ , снимаемого с сопротивления нагрузки  $R_n$ . Из полученной ча-

стотной зависимости  $U_n(f)$  определяется частота, на которой падение переменного напряжения на сопротивлении нагрузки уменьшится в  $\sqrt{2}=1.41$ - раза по сравнению с его значением на низких частотах, например, на частоте 10 Гц. Частота, на которой амплитуда синусоидального напряжения уменьшается в указанное число раз, называется частотой среза -  $f_{cp}$ . Из найденного таким образом значения частоты среза определяют время релаксации заряда в переходе:

$$\tau_{p-n} = \frac{1}{f_{cp}}. \quad (4.20)$$

С другой стороны, поскольку перезарядка емкости  $C$   $p-n$  перехода физически осуществляется через его дифференциальное сопротивление  $R_d$ , то время перезарядки может быть найдено из выражения:

$$\tau_{p-n} = C \times R_d. \quad (4.21)$$

Следовательно, если известны значения емкости и дифференциального сопротивления перехода, то имеется возможность вычислить время перезарядки и сравнить его с экспериментально найденным значением времени релаксации  $p-n$  перехода.

С физической точки зрения время релаксации перехода равно времени жизни неравновесных носителей заряда в  $p-n$  переходе. По его величине можно определить, например, инерционность фотоприемного устройства на основе барьерной фотоэдс  $p-n$  перехода.

Величина барьерной фотоэдс  $p-n$  перехода на низкой частоте при напряжении на переходе  $V_0 \leq 0$  определяется следующим выражением:

$$U_{p-n} = \frac{kT}{q} \ln \left( 1 + \frac{i_{фг}}{I_{об}} \right) \approx \frac{kT}{q \cdot I_{об}} \cdot i_{фг}, \quad (4.22)$$

где предполагается, что  $I_{об} \gg i_{фг}$ ;  $i_{фг} = q\eta \cdot \beta(1-R) \frac{P_{пад}}{\hbar\omega}$  - фототок, т.е. ток, образованный неравновесными носителями заряда при 100%-ном поглощении в полупроводнике оптической мощности  $(1-R) \cdot P_{пад}$ . Здесь  $P_{пад}$  - мощность оптического излучения, падающая на полупроводник,  $R$  - коэффициент отражения света от поверхности полупроводника,  $\beta = \beta_0 \sqrt{(\varphi_0 - V)/\varphi_0}$  и  $\beta_0 = 0.05$ .

## 4.2 Примеры решения задач по определению параметров фотоэлектрических эффектов в полупроводниках

**Задача 1.** Определить величину фотопроводимости кремниевого образца размерами  $(1 \times 1 \times 5) \text{ см}^3$  при его освещении оптическим излучением интенсивностью  $I_0 = 10^{12}$  квант/ $(\text{см}^2 \cdot \text{с})$  из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность излучения составляет  $\alpha = 10^6 \text{ см}^{-1}$ , а частота модуляции гармоническим сигналом составляет  $f = 10^5$  Гц.



Считать, что освещение проводится с широкой стороны образца, а регистрирующие контакты припаяны к узким торцам.

**Решение.** В данной задаче необходимо определить изменение проводимости всего образца под действием оптического излучения, а не единичного объема, как это рассмотрено в курсе лекций. Поэтому выразим изменение проводимости всего образца, если известно изменение удельной проводимости. Пусть рассматриваемый образец имеет длину  $L$  в направлении протекания тока и площадь омических контактов к образцу  $S$  и удельную проводимость  $\sigma$ . Если при освещении удельная проводимость изменяется на величину  $\Delta\sigma$ , то изменение проводимости всего образца будет равно

$$\Delta G = \Delta\sigma \cdot \frac{S}{L}. \quad (4.23)$$

Именно это выражение определяет искомую неизвестную величину, в котором изменение удельной проводимости есть удельная фотопроводимость. Последняя величина определяется выражением (4.11), в котором неизвестными величинами являются скорость генерации неравновесных электронов и дырок, а также время релаксации фотопроводимости. Используем выражение для вычисления времени релаксации фотопроводимости:

$$\tau_{\text{фп}} = \frac{(\mu_n + \mu_p) \cdot \tau_n \cdot \tau_p}{\mu_n \tau_p + \mu_p \tau_n},$$

в котором все величины являются справочными (см. Приложение к данному учебно-методическому пособию). Подставив справочные значения подвижностей электронов и дырок, а также времен их жизни ( $\tau_n = \tau_p = 10^{-3} \text{ с}$ ), получим:

$$\tau_{\text{фп}} = \frac{(\mu_n + \mu_p) \cdot \tau_n \cdot \tau_p}{\mu_n \tau_p + \mu_p \tau_n} = \frac{(\mu_n + \mu_p) \cdot 10^{-3}}{\mu_n + \mu_p} = 10^{-3} \text{ с}.$$

Следующим шагом определим скорость генерации неравновесных носителей заряда с учетом коэффициента отражения излучения от поверхности кремния

$$R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_{Si}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{Si}} + 1} \right)^2.$$

Подстановка в данное выражение значения относительной диэлектрической проницаемости кремния дает следующее значение коэффициента отражения

$$R = \left( \frac{\sqrt{11.7} - 1}{\sqrt{11.7} + 1} \right)^2 \approx \left( \frac{3.4 - 1}{3.4 + 1} \right)^2 = \left( \frac{2.4}{4.4} \right)^2 \approx 0.25.$$

Скорость генерации неравновесных носителей заряда - число электронно-дырочных пар, генерируемых в единицу времени в единичном объеме, равна

$$g = \eta \cdot \alpha \cdot (1 - R) \cdot I_0 = 0.5 \cdot 10^6 \cdot 0.75 \cdot 10^{12} \approx 3.75 \cdot 10^{17} \text{ пар/с}.$$

Теперь найдем фотопроводимость единичного объема

$$\Delta\sigma = \frac{q(\mu_n + \mu_p) \cdot g \cdot \tau_{\text{фп}}}{1 + \omega^2 \cdot \tau_{\text{фп}}^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} (1450 + 480) \cdot 3.75 \cdot 10^{17} \cdot 10^{-3}}{1 + 4\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{1.6 \cdot 1.2 \cdot 0.6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}}{1 + 4 \cdot 10 \cdot 10^4} \approx \frac{1.05 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 10^5} = 2.7 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Здесь максимальное значение фотопроводимости, достигаемое на низкой частоте модуляции, равно  $1.05 \cdot 10^{-1} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ , что видно по значению числителя выражения. Отличный от единицы знаменатель указывает на проявление инерционности полупроводника. Резкое снижение значения фотопроводимости на заданной частоте связано с высокой частотой модуляции излучения (см. знаменатель выражения) по сравнению с частотой среза.

Фотопроводимость образца будет определяться удельной фотопроводимостью и размерами образца согласно выражению (4.23)

$$\Delta G = \Delta\sigma \cdot \frac{S}{L} = 3 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1 \times 1}{5} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}^{-1}.$$

Таким образом, ответ на поставленный вопрос таков: фотопроводимость кремниевого образца размерами  $(1 \times 1 \times 5) \text{ см}^3$  при освещении высокочастотным модулированным излучением с широкой стороны образца равна  $6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}^{-1}$ .

### Влияние толщины фоторезистора

Реальные фоторезисторы могут иметь толщину в направлении падающего излучения до сотен микрон. Поскольку слой поглощения излучения имеет толщину не более долей микрона (его сопротивление  $R_l$ ), то необходимо установить роль оставшегося без неравновесных носителей слоя полупроводника на формирование фотопроводимости (его сопротивление  $R_T$ ). Описывающие эти слои сопротивления  $R_T$  и  $R_l$  включены параллельно. Пусть освещение полупроводникового фоторезистора изменяет сопротивление освещенного слоя на величину  $\delta R_l$ . Найдем полное сопротивление фоторезистора с учетом обеих областей:

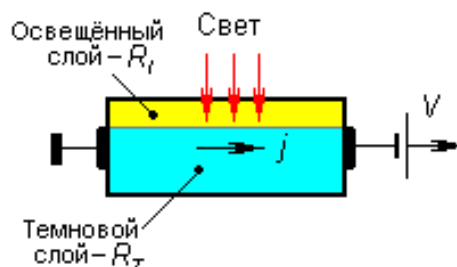


Рисунок 2 - Освещенная и темновая области фоторезистора

$$R = \frac{R_T R_l}{R_T + R_l} = \frac{R_T \cdot (R_l^0 + \delta R_l)}{R_T + R_l^0 + \delta R_l} = \frac{R_T \cdot R_l^0 (1 + \delta R_l / R_l^0)}{(R_T + R_l^0) \cdot \left[ 1 + \delta R_l / (R_T + R_l^0) \right]} =$$

$$= \frac{R_T \cdot R_l^0}{(R_T + R_l^0)} \cdot \left( 1 + \frac{\delta R_l}{R_l^0} \right) \cdot \frac{R_T \cdot R_l^0}{1 + \delta R_l / (R_T + R_l^0)} \cong \frac{R_T \cdot R_l^0}{(R_T + R_l^0)} \cdot \left[ 1 - \frac{\delta R_l}{R_T + R_l^0} + \frac{\delta R_l}{R_l^0} \right].$$

Обозначим:  $R_{\text{фр}} = \frac{R_T \cdot R_l^0}{(R_T + R_l^0)}$ . Тогда

$$R = R^0 + \delta R \cong \frac{R_T \cdot R_l^0}{(R_T + R_l^0)} \cdot \left[ 1 - \frac{\delta R_l}{(R_T + R_l^0)} + \delta R_l / R_l^0 \right] = R_{\text{фр}} \cdot \left[ 1 - \frac{R_l^0 - R_T - R_l^0}{R_l^0 \cdot (R_T + R_l^0)} \cdot \delta R_l \right].$$

Отсюда найдем переменную составляющую сопротивления фоторезистора:

$$\delta R \cong R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_T}{R_l^0 \cdot (R_T + R_l^0)} \right) \cdot \delta R_l = R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_T}{R_l^0 \cdot (R_T + R_l^0)} \cdot \frac{R_l^0}{R_l^0} \right) \cdot \delta R_l =$$

$$= R_{\text{фр}}^2 \cdot \left( \frac{1}{R_l^{02}} \right) \cdot \delta R_l = R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_{\text{фр}}}{R_l^{02}} \right) = R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_{\text{фр}}}{R_l^0} \right) \cdot \left( \frac{\delta R_l}{R_l^0} \right)$$

Окончательно имеем:

$$\delta R \cong R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_{\text{фр}}}{R_l^0} \right) \cdot \left( \frac{\delta R_l}{R_l^0} \right).$$

Исследуем эту зависимость на экстремум по отношению  $R_{\text{фр}} / R_l^0$ . Перепишем его в виде

$$\delta R \cong R_{\text{фр}} \cdot \left( \frac{R_{\text{фр}}}{R_l^0} \right) \cdot \left( \frac{\delta R_l}{R_l^0} \right) = \left( \frac{R_T R_l^0}{R_l^0 + R_T} \right)^2 \cdot \frac{\delta R_l}{R_l^{02}} = \left( \frac{1}{1 + R_l^0 / R_T} \right)^2 \delta R_l.$$

$$\delta R \cong \left( \frac{1}{1 + R_l^0 / R_T} \right)^2 \delta R_l = \left( \frac{1}{1 + x} \right)^2 \cdot \delta R_l = F(x) \cdot \delta R_l.$$

Исследование функции  $F(x)$  на экстремум приравниванием её производной к нулю показало, что она не имеет экстремума. Её наибольшее значение, равное единице, достигается при  $x = R_l^0 / R_T = 0$ . Это означает, что  $R_T \gg R_l^0$ .

Из приведенного рассмотрения следует вывод: для изготовления высокочувствительных фоторезисторов необходимы образцы толщиной, равной диффузионной длине неравновесных носителей заряда.

**Задача 2.** Определить полосу пропускания частот германиевого  $p-n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.1$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2}$  см<sup>2</sup> и плотность обратного тока  $j_0 = 10^{-6}$  А/см<sup>2</sup>. Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>.

**Решение.** Полоса пропускания – это диапазон частот, в пределах которого коэффициент передачи диода остается постоянным. Нижняя частота диапазона может быть принята равной нулю, а верхняя - частоте среза  $f_{\text{ср}} = \frac{1}{\tau_{p-n}}$ , где  $\tau_{p-n} = C \times R_d$  - время перезарядки перехода, определяемое емкостью  $C$  и дифференциальным сопротивлением  $R_d$ . Значит, задача по определению полосы пропускания сводится к задаче нахождения емкости и дифференциального сопротивления перехода диода.

Емкость перехода  $C$  определяется его площадью  $S$  и толщиной слоя собственной проводимости  $W$  и может быть найдена по выражению по выражению (7.19)

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{W} S = S \sqrt{\frac{q \varepsilon_{Ge} \varepsilon_0}{2(\varphi_0 - V)} \cdot \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}}, \quad (4.24)$$

$$\varphi_0 = \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_d N_a}{n_i^2} \right),$$

где  $\varepsilon_{Ge}$  - относительная диэлектрическая проницаемость германия. Подстановка численных значений в выражения (4.24) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} \ln \left( \frac{2.4 \cdot 10^{15} \cdot 2.4 \cdot 10^{15}}{2.4 \cdot 10^{13} \cdot 2.4 \cdot 10^{13}} \right) = \\ &= \frac{1.38 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \ln(10) = 10^{-1} \cdot 2.3 \approx 0.2 \text{ В} \\ C &= S \sqrt{\frac{q \varepsilon_{Ge} \varepsilon_0}{2(\varphi_0 - V)} \cdot \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}} = \\ &= 10^{-2} \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 16 \cdot 8.85 \cdot 10^{-14} \cdot 2.4 \cdot 10^{15}}{2 \cdot (0.2 - 0.1)} \cdot \frac{2.4 \cdot 10^{15}}{2}} = \\ &= 10^{-2} \sqrt{\frac{1.6 \cdot 1.6 \cdot 8.85 \cdot 1.2}{2} \cdot 10^{-17}} = \\ &= 10^{-2} \sqrt{1.4 \cdot 10^{-16}} \approx 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ Ф.} \end{aligned}$$

Дифференциальное сопротивление перехода в области положительных смещений определяется выражением

$$R_d(V_0) \approx \frac{kT}{qI_{об}} \cdot \exp\left(-\frac{qV_0}{kT}\right),$$

где все величины табличные или легко вычисляются. Поэтому можно найти величину  $R_d(V_0)$ :

$$\begin{aligned} R_d(V_0) &\approx \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}} \cdot \exp\left(-\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right) = \\ &= \frac{4.2 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-27}} \cdot \exp\left(-\frac{1.6 \cdot 10^{-20}}{4.2 \cdot 10^{-21}}\right) = 2.6 \cdot 10^6 \cdot \exp(-3.8) = 1.7 \cdot 10^5 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Теперь можно найти время перезарядки перехода, а из него определим его верхнюю (граничную) частоту:

$$\begin{aligned} f_{ср} &= \frac{1}{\tau_{p-n}} = \frac{1}{R_d C} = \frac{1}{1.7 \cdot 10^5 \cdot 1.2 \cdot 10^{-10}} = \\ &= \frac{10^5}{1.7 \cdot 1.2} = \frac{10^5}{2.0} \approx 5000 \text{ Гц.} \end{aligned}$$

Таким образом, ответ на поставленный в задаче вопрос таков: полоса пропускания  $p$ - $n$  перехода, имеющего указанные параметры, равна 5000 Гц.

**Задача 3.** Определить величину барьерной фотоэдс кремниевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны  $\lambda = 0.64 \text{ мкм}$  и мощностью  $P_{пад} = 10^{-10} \text{ Вт}$ , если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 0.5$ , а значения концентраций акцепторной  $N_a$  и донорной  $N_d$  примеси в областях одинаковы и равны  $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.

**Решение.** Исходным выражением для определения барьерной фотоэдс служит выражение (4.22)

$$U_{p-n} = \frac{kT}{q} \ln\left(1 + \frac{i_{фг}}{I_{об}}\right) \approx \frac{kT}{q \cdot I_{об}} \cdot i_{фг},$$

в котором неизвестными величинами являются обратный ток  $I_{об}$  и фототок  $i_{фг}$ . Найдем их. Величина фототока может быть найдена из выражения

$$i_{фг} = q\eta \cdot (1 - R) \frac{P_{пад}}{\hbar\omega},$$

а обратный ток  $I_0$  может быть вычислен по выражению

$$I_{об} = \frac{kT}{q} S \frac{b\sigma_i^2}{(1+b)^2} \left( \frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n} \right),$$

в котором все величины могут быть определены, исходя из табличных данных. Сначала определим электронную и дырочную проводимости полупроводникового образца:

$$\sigma_n = q\mu_n n_n = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1450 \cdot 2 \cdot 10^{15} \approx 3.2 \cdot 1.4 \cdot 10^{-1} = 0.45 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

$$\sigma_p = q\mu_p p_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 480 \cdot 2 \cdot 10^{15} \approx 3.2 \cdot 4.8 \cdot 10^{-2} = 0.15 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

Далее вычислим длины диффузии носителей заряда:

$$L_n = \sqrt{\frac{kT}{q} \mu_n \cdot \tau_n} = \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} 1450 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \sqrt{2.6 \cdot 10^{-2} \cdot 1.45} \approx 1.9 \cdot 10^{-1} \text{ см.}$$

$$L_p = \sqrt{\frac{kT}{q} \mu_p \cdot \tau_p} = \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} 480 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \sqrt{2.6 \cdot 10^{-2} \cdot 0.48} \approx 1.2 \cdot 10^{-1} \text{ см.}$$

Столь высокие значения длин диффузии носителей заряда в кремнии являются следствием высоких значений времен жизни неравновесных носителей заряда. Используя данные, приведенные в Приложении к данному пособию, найдем:

$$\begin{aligned} I_{\text{об}} &= \frac{kT}{q} S \frac{b\sigma_i^2}{(1+b)^2} \left( \frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n} \right) = \\ &= \frac{kT}{q} S \frac{(\mu_n / \mu_p)}{(1 + \mu_n / \mu_p)^2} [q(\mu_n + \mu_p)n_i]^2 \left( \frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n} \right) = \\ &= \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} 4 \cdot 10^{-2} \frac{3}{(1+3)^2} \left( 1.6 \cdot 10^{-19} (1450 + 480) \cdot 1.4 \cdot 10^{10} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \left( \frac{10}{0.45 \cdot 1.9} + \frac{10}{0.15 \cdot 1.2} \right) = \\ &= 2.6 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \frac{3}{16} \left( 1.6 \cdot 1.93 \cdot 1.4 \cdot 10^{-6} \right)^2 \cdot (11.7 + 55.6) = \\ &= 1.95 \cdot 10^{-2} \cdot \left( 4.3 \cdot 10^{-6} \right)^2 \cdot 67.3 = 2.4 \cdot 10^{-11} \text{ А.} \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить барьерную фотоэдс:

$$U_{p-n} \approx \frac{kT}{q} \cdot \frac{q\eta(1-R) \cdot P_{\text{пад}}}{h \frac{c}{\lambda} \cdot I_{\text{об}}} = \frac{kT}{hc} \cdot \frac{\eta\lambda(1-R) \cdot P_{\text{пад}}}{I_{\text{об}}}.$$

Фигурирующий здесь коэффициент отражения света от поверхности полупроводника равен:

$$R = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_{Si}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{Si}} + 1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{11.7} - 1}{\sqrt{11.7} + 1} \right)^2 = \left( \frac{2.4}{4.4} \right)^2 \approx 0.25.$$

Тогда подставляя численные значения в системе СИ, найдем:

$$U_{p-n} \approx \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \frac{0.25 \cdot 0.64 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 \cdot 10^{-10}}{2.4 \cdot 10^{-11}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-21}}{19.9 \cdot 10^{-26}} \cdot \frac{0.18 \cdot 10^{-16}}{2.4 \cdot 10^{-11}} = 0.1 \cdot 10^5 \cdot 3.6 \cdot 10^{-7} \approx 0.7 \cdot 10^{-2} = 7 \text{ мВ}.$$

Таким образом, ответ на поставленный вопрос будет таким: при указанных условиях освещения кремниевого  $p-n$  перехода на нем появится фотоэдс величиной около 7 мВ.

### 4.3 Варианты заданий по определению параметров фотоэлектрических эффектов в полупроводниках

1. Определить величину удельной фотопроводимости кремниевого образца при его освещении оптическим излучением мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-8}$  Вт из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 0.9$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 10^6 \text{ см}^{-1}$ , а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^2$  Гц.
2. Определить величину удельной фотопроводимости германиевого образца при его освещении оптическим излучением мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-10}$  Вт из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 0.9$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 10^6 \text{ см}^{-1}$ , а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^2$  Гц.
3. Определить величину удельной фотопроводимости арсенид-галлиевого образца при его освещении оптическим излучением мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-10}$  Вт из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 0.9$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 10^6 \text{ см}^{-1}$ , а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^6$  Гц.
4. Определить величину фотопроводимости кремниевого образца размерами  $(1 \times 1 \times 10) \text{ см}^3$  при его освещении оптическим излучением интенсивно-

стью  $I_0 = 10^{12}$  квант/(см<sup>2</sup> · с) из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 1.0$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 4 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>, а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^3$  Гц.

Считать, что освещение проводится с узкой стороны образца, а регистрирующие контакты припаяны к широким торцам.

5. Определить величину фотопроводимости германиевого образца размерами  $(1 \times 1 \times 5)$  см<sup>3</sup> при его освещении оптическим излучением интенсивностью  $I_0 = 10^{12}$  квант/(см<sup>2</sup> · с) из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 1.0$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 2 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>, а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^6$  Гц.

Считать, что освещение проводится с узкой стороны образца, а регистрирующие контакты припаяны к широким торцам.

6. Определить величину фотопроводимости арсенид-галлиевого образца размерами  $(0.5 \times 1 \times 10)$  см<sup>3</sup> при его освещении оптическим излучением интенсивностью  $I_0 = 10^{15}$  квант/(см<sup>2</sup> · с) из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 0.9$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 5 \cdot 10^5$  см<sup>-1</sup>, а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^6$  Гц.

Считать, что освещение проводится с широкой стороны образца, а регистрирующие контакты припаяны к узким торцам.

7. Определить величину фотопроводимости кремниевого образца размерами  $(1 \times 1 \times 5)$  см<sup>3</sup> при его освещении оптическим излучением интенсивностью  $I_0 = 10^{12}$  квант/(см<sup>2</sup> · с) из собственной полосы поглощения в предположении, что квантовая эффективность поглощения излучения полупроводника равна  $\eta = 0.5$ , коэффициент поглощения излучения составляет  $\alpha = 10^6$  см<sup>-1</sup>, а частота модуляции светового потока гармоническим сигналом составляет  $f = 10^5$  Гц.

Считать, что освещение проводится с широкой стороны образца, а регистрирующие контакты припаяны к узким торцам.

8. Определить величину дифференциального сопротивления германиевого *p-n* перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.1$  В, имеющего площадь



- $S = 10^{-2} \text{ см}^2$ , если обратный ток обусловлен диффузионным механизмом поставки неосновных носителей заряда. Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .
9. Определить величину дифференциального сопротивления кремниевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.1 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-3} \text{ см}^2$ , если обратный ток обусловлен диффузионным механизмом поставки неосновных носителей заряда. Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
  10. Определить величину дифференциального сопротивления арсенид-галлиевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.2 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-1} \text{ см}^2$ , если обратный ток обусловлен диффузионным механизмом поставки неосновных носителей заряда. Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $4.4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .
  11. Определить величину емкости арсенид-галлиевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.2 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-1} \text{ см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей равными  $2.4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .
  12. Определить величину емкости германиевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.2 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-1} \text{ см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
  13. Определить величину емкости кремниевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.2 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-1} \text{ см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
  14. Определить время перезарядки кремниевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.1 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-7} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .
  15. Определить время перезарядки арсенид-галлиевого  $p$ - $n$  перехода при напряжении на нем  $V_0 = 0.1 \text{ В}$ , имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-8} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .
  16. Определить величину барьерной фотоэдс кремниевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны

- $\lambda = 0.55$  мкм и мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-9}$  Вт, если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 1.0$ , а значения концентраций акцепторной  $N_a$  и донорной  $N_d$  примеси в областях одинаковы и равны  $2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.
17. Определить величину барьерной фотоэдс германиевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны  $\lambda = 0.64$  мкм и мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-10}$  Вт, если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 0.9$ , а значения концентраций акцепторной  $N_a$  и донорной  $N_d$  примеси в областях одинаковы и равны  $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.
18. Определить величину барьерной фотоэдс арсенид-галлиевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны  $\lambda = 0.64$  мкм и мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-8}$  Вт, если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 1.0$ , а значения концентраций акцепторной  $N_a$  и донорной  $N_d$  примеси в областях одинаковы и равны  $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.
19. Определить величину барьерной фотоэдс кремниевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны  $\lambda = 0.45$  мкм и мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-10}$  Вт, если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 0.9$ , а значения концентраций акцепторной примеси в областях равна  $N_a = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , а донорной примеси  $N_d = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.
20. Определить величину барьерной фотоэдс германиевого  $p$ - $n$  перехода площадью  $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2$  при его освещении излучением с длиной волны  $\lambda = 0.55$  мкм и мощностью  $P_{\text{пад}} = 10^{-10}$  Вт, если квантовая эффективность поглощения равна  $\eta = 1.0$ , а значения концентраций акцепторной примеси в областях равна  $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , а донорной примеси  $N_d = 1 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Считать, что обратный ток перехода создается диффузионным механизмом поставки неравновесных носителей заряда.

## 5 ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

### 5.1 КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ

Шумы оптоэлектронных приборов по своей природе можно разделить на две большие группы:

- шумы, связанные с флуктуацией параметров светового потока (мощности, поляризации, частоты), вызванной корпускулярной природой света и особенностями его распространения по оптическому тракту оптоэлектронного прибора;

- шумы, связанные с преобразованием сигнала в твердотельной части прибора (в полупроводнике или диэлектрике).

Первый тип шумов определяется квантовой природой света, а также технологией изготовления оптического тракта и потому он обычно пренебрежимо мал по сравнению с шумами, вызванными твердотельным преобразованием оптического сигнала. Поэтому в своем дальнейшем рассмотрении ограничимся шумами, возникающими в полупроводниках на стадии преобразования оптического сигнала в электрический или электрического сигнала одной формы в электрический другой формы.

**Природа шумов.** Все шумы по своей физической природе имеют причинной случайный характер движения заряженных частиц в твердом теле, их случайное рождение или уничтожение, а также случайные моменты вхождения-выхода электронов и дырок. Наиболее важные для практических применений шумы в твердых телах таковы:

- тепловой шум;
- дробовой шум;
- генерационно-рекомбинационный шум;
- избыточный шум.

**Тепловой шум.** Тепловой шум создается в результате броуновского движения заряженных частиц и столкновения их с неподвижными ионами решетки твердого тела. В результате этого энергия теплового колебания решетки и энергия теплового движения электронов выравниваются. Поэтому выделяемое электронами при столкновениях джоулево тепло поддерживает температуру решетки постоянной. Однако тепловое движение заряженных частиц может рассматриваться как результат действия на длине их свободного пробега микроисточника напряжения: от одного столкновения до следующего действует один микроисточник со своими параметрами напряжения. Сколько столкновений совершает электрон на своем движении – столько микроисточников напряжения вводится в рассмотрение. Ясно, что число вводимых микроисточников огромно и потому анализировать параметры отдельного микроисточника невозможно. Значит, нужно рассматривать один источник: это некий суммарный источник, действующий на весь образец. Поэтому если на концах полупроводникового образца регистрировать переменное напряжение, которое бу-

дет представлять собой мгновенную сумму напряжений от всех микроисточников на длине кристалла, то окажется, что это суммарное напряжение изменяет случайным образом во времени свою величину, знак, фазу и частоту. Изменения параметров суммарного напряжения будут однозначно характеризовать тепловое движение электронов в решетке, а значит, температуру полупроводника. Согласно теореме Найквиста, впервые описавшего этот тип шума, средняя амплитуда теплового шума резистора величиною  $R$ , измеренная с помощью прибора, имеющего полосу пропускания  $\Delta f$ , равна:

$$\sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} = \sqrt{4kTR \cdot \Delta f} . \quad (5.1)$$

В выражении (8.1) на первый взгляд кажется удивительным, что измеряемый уровень шума определяется параметрами измерительного прибора: полосой его пропускания. На самом деле ничего удивительного здесь нет. Дело в том, что на практике шумы измеряют с помощью так называемых селективных нановольтметров. Они представляют собой вольтметры, способные регистрировать очень малые напряжения (до единиц нановольт -  $10^{-9}$  В) и имеющие очень узкую, но перестраиваемую оператором, полосу пропускания. Последнее достигается установкой на входе нановольтметра перестраиваемого полосового фильтра. С помощью такого прибора удастся проанализировать зависимость амплитуды шума, измеренной в полосе измерительного прибора равной 1 Гц, от частоты его измерения. Такая зависимость называется спектральной плотностью шума. С точки зрения физической интерпретации спектральной плотности шума (и не только шума, но и детерминированного сигнала) поведение шума во всей полосе исследованных частот можно объяснить, предположив, что он создается множеством источников синусоидального переменного напряжения. Амплитуда каждого источника, действующего на строго заданной частоте, равна спектральной плотности шума. Так вот, тепловой шум описывается бесконечно большим числом синусоидальных источников переменного напряжения, амплитуда которого не зависит от частоты и равна

$$\sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} (f) = \sqrt{4kTR} , \quad (5.2)$$

т.е. тепловой шум имеет равномерную спектральную плотность: на какой бы частоте не проводилось измерение шума его величина будет постоянна. Значит, если увеличивать число включаемых в измерение синусоидальных источников шума за счет расширения полосы пропускания прибора, то амплитуда шума, естественно, также должна расти. Именно это обстоятельство отражено тем, что в выражении (5.1) фигурирует полоса пропускания измерительного прибора  $\Delta f$ : чем она больше, тем больше амплитуда измеряемого теплового шума. Частотная зависимость дисперсии теплового шума от частоты измерения представляет собой прямую линию, параллельную оси частот (оси абсцисс). Такой шум, по аналогии со светом, называют «белым»

При рассмотрении теплового шума двухполюсника, имеющего активное и реактивное компоненты сопротивления, его тепловой шум создается только активной частью сопротивления  $\text{Re}(Z)$ . Тогда амплитуда теплового шума будет

$$\sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} = \sqrt{4kT \text{Re}(Z)}. \quad (5.3)$$

Если рассматриваемая цепь представляет собой последовательно соединенные активные сопротивления  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , то полный шум такой цепи в единичной полосе частот будет иметь среднюю амплитуду, представляющую собой результат сложения квадратов дисперсий тепловых шумов от каждого сопротивления:

$$\begin{aligned} \sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} &= \sqrt{U_{\text{ш } 1}^2 + U_{\text{ш } 2}^2 + \dots + U_{\text{ш } n}^2} = \\ &= \sqrt{4kTR_1 + 4kTR_2 + \dots + 4kTR_n} = \\ &= \sqrt{4kT(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Этот же результат можно было бы получить, если сложить все последовательно соединенные шумящие сопротивления, а только потом посчитать тепловой шум полного сопротивления.

**Дробовой шум.** Дробовой шум возникает в результате случайного характера изменения числа частиц, пролетающих область их регистрации. Типичный пример появления этого вида шума: вакуумный диод, с катода которого в каждый момент времени вылетают электроны. Вследствие разброса тепловой энергии электронов в катоде, приобретаемой в результате их столкновения с решеткой материала катода, в каждый момент времени вылетает разное число электронов. В среднем же за достаточно большой промежуток времени их число постоянно и определяется температурой катода, величиной работы выхода и его материала. Другой пример источник дробового шума: протекание постоянного тока через сопротивление. Ясно, что для описания дробового шума лучше вводить случайный источник тока, а не источник напряжения, как это было сделано для теплового шума. Средняя амплитуда дробового шума, создаваемого током величиной  $I_0$  и измеренная в полосе частот измерительного прибора  $\Delta f$  определяется следующим образом:

$$\sqrt{I_{\text{ш др}}^2} = \sqrt{2q \cdot I_0 \cdot \Delta f}, \quad (5.5)$$

где  $q$  - заряд электрона. Частотная зависимость дисперсии дробового шума представляет собой прямую линию, параллельную оси частот (оси абсцисс). Амплитуда напряжения полного шума в единичной полосе частот, снимаемого с активного сопротивления, по которому течет постоянный ток, определяется тепловым шумом и шумом, вызванным падением напряжения на сопротивлении при протекании по нему дробового шума:

$$\sqrt{U_{\text{ш}}^2} = \sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2 + R^2 \cdot I_{\text{ш др}}^2} = \sqrt{4kTR + 2q \cdot I_0 R^2}. \quad (5.6)$$

**Генерационно-рекомбинационный шум.** Этот вид шума характерен только для полупроводников, где зачастую является доминирующим. Природа его проста: за счет тепловой генерации и случайной рекомбинации в каждый момент времени в зоне проводимости и (или) валентной зоне появляются неравновесные носители заряда, число которых изменяется во времени случайным образом. Так, например, в первую секунду образовалось 100 электронов и дырок; во вторую секунду установилось 120 пар, в следующую – 80 и т.д. Таким образом, в среднем в полупроводнике в каждую секунду появляется 100 электронов и дырок. Однако около этого среднего значения возможны флуктуации числа частиц – в нашем случае около 20 пар. Именно это число неравновесных носителей заряда приводит к случайному изменению проводимости полупроводника. При пропускании через него постоянного тока величиной  $I_0$  на концах полупроводника создаётся шумовое напряжение

$$\delta U_{\text{ш гр}}(t) = I_0 \cdot \delta R(t). \quad (5.7)$$

Спектральная зависимость ГР шума имеет вид «полочки» на низких частотах и спад на частотах, выше частоты среза, равной  $1/\tau_{n,p}$  высоких по закону  $1/\omega^2$ :

$$U_{\text{ш гр}}(\omega) = \overline{\Delta N^2} \tau_{n,p} / (1 + \omega^2 \tau_{n,p}^2).$$

$\overline{\Delta N^2}$  - дисперсия флуктуации числа носителей заряда в полупроводнике.

**Избыточный шум.** Под этим термином понимается шум радиоэлектронного устройства превышающий по величине все другие шумы в области низких частот. Он возникает в результате флуктуации числа носителей заряда за счет:

- их захвата структурными дефектами в области контактов к полупроводниковому прибору («контактный шум»),
- температурных флуктуации числа носителей заряда в местах микропробоев (особенно в p-n переходах),
- захвата носителей заряда поверхностными состояниями при протекании тока вдоль поверхности полупроводника и т.д.

Среди перечисленных механизмов образования избыточного в большинстве полупроводниковых приборов шума доминирующим является захват

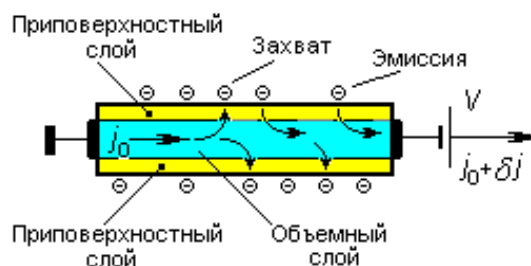


Рисунок 3 – Механизм возникновения избыточного шума

движущихся вдоль поверхности электронов поверхностными состояниями.

Спектральная плотность этого типа шума описывается выражением

$$\overline{i_{\text{ш изб}}^2}(f) = A \frac{I_0^2}{f^n},$$

где показатель степени  $n$  может принимать значения в диапазоне (1.0 ÷ 3.0). Обычно данный тип шума доминирует над другими шумами на сверхнизких частотах: от сотых долей герца и до сотен герц.

## 5.2 Примеры решения задач по определению параметров флуктуационных процессов в полупроводниках

**Задача 1.** Рассчитать амплитуду теплового шума, возникающего на постоянном сопротивлении  $R = 2 \cdot 10^8$  Ом, находящемся при температуре  $T = 300$  К, если полоса пропускания вольтметра, с помощью которого производится измерение, составляет  $\Delta f = 10^8$  Гц.

**Решение.** Это типичная задача на использование теоремы Найквиста: уровень шумового напряжения, образующего на активном сопротивлении в заданной полосе частот, равен

$$\sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} = \sqrt{4kTR \cdot \Delta f}.$$

Подставив в данное выражение численные значения параметров, получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2} &= \sqrt{4kTR \cdot \Delta f} = \sqrt{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = \\ &= \sqrt{24 \cdot 1.38 \cdot 10^{-5}} \approx \sqrt{3.4 \cdot 10^{-2}} \approx 1.8 \cdot 10^{-2} = 18 \text{ мВ}. \end{aligned}$$

Таким образом, ответ на поставленный вопрос таков: амплитуда теплового шума на резисторе равна 18 милливольт.

**Задача 2.** Рассчитать напряжение суммарного шума на частоте  $f = 1$  кГц RC-цепи, составленной из резистора величиной  $R = 2 \cdot 10^5$  Ом и параллельной ему емкости  $C = 5 \cdot 10^6$  пФ, если к цепи приложено постоянное напряжение величиной  $V = 2$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 300$  К.

**Решение.** В данной задаче полный шум цепи складывается из теплового и дробового шума. Другая особенность задачи: наличие емкости, которая делает шум частотно-зависимым. Поэтому за основу расчета следует взять выражение (8.6), в котором вместо сопротивления  $R$  следует взять реальную часть импеданса цепи:

$$\sqrt{U_{\text{ш}}^2} = \sqrt{U_{\text{ш тепл}}^2 + \text{Re}(Z)^2 \cdot I_{\text{ш др}}^2} = \sqrt{4kT \text{Re}(Z) + \text{Re}(Z)^2 \cdot 2q \cdot I}.$$

Реальную часть импеданса цепи можно найти, используя выражение для параллельно соединенных постоянного сопротивления и емкости

$$Z = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R \cdot (1 - j\omega CR)}{(1 + j\omega CR)(1 - j\omega CR)} = \frac{R \cdot (1 - j\omega CR)}{1 + \omega^2 (CR)^2} = \quad (5.7)$$

$$= \frac{R}{1 + \omega^2 (CR)^2} - j \frac{\omega CR \cdot R}{1 + \omega^2 (CR)^2} = \frac{R}{1 + \omega^2 \tau^2} - j \frac{\omega \tau \cdot R}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Здесь обозначено:  $\tau = CR$  - время перезарядки цепи. Следовательно, реальная часть импеданса цепи равна:

$$\text{Re}(Z) = R / (1 + \omega^2 \tau^2). \quad (5.8)$$

Подставим в (5.6) реальную часть импеданса и найдем уровень шума

$$\sqrt{U_{\text{ш}}^2} = \sqrt{\frac{4kTR}{1 + \omega^2 \tau^2} + 2q \cdot I_0 \frac{R^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{R}{1 + \omega^2 \tau^2}\right) \cdot \left(4kT + \frac{2qI \cdot R}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)} = \quad (5.9)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R}{1 + \omega^2 \tau^2}\right) \cdot \left(4kT + 2q \frac{V}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)}.$$

Подставляя численные значения констант и параметров, получим

$$\sqrt{U_{\text{ш}}^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{1 + 4\pi^2 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 25 \cdot 10^{-18}} \cdot \left(4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 + 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{2}{1 + 4\pi^2}\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{1 + 40} \left(1.7 \cdot 10^{-19} + 3.2 \cdot 10^{-19} \frac{2}{1 + 40}\right)} = \sqrt{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-19} \left(1.7 + \frac{6.4}{41}\right)} \approx$$

$$\approx 2.9 \cdot 10^{-8} \sqrt{1 + \frac{3.76}{41}} \approx 30 \cdot 10^{-9} \text{ В/Гц}^{1/2}.$$

Таким образом, амплитуда шума  $RC$  – цепи на частоте 1 кГц при действии постоянного напряжения равна около  $30 \text{ нВ/Гц}^{1/2}$ .

**Задача 3.** Рассчитать спектральную плотность суммарного шума германиевого фотодиода на частоте  $10^4$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0.1$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $I_{\text{об}} = 10^{-6} \text{ А/см}^2$ . Считать уровень легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковым и равным  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

**Решение.** Полный шум фотодиода  $U_{\text{ш} f}$  на заданной частоте – это спектральная плотность шума. В рассматриваемом случае она складывается из спектральных плотностей теплового шума его активной составляющей импе-



данса и дробового шума тока, протекающего через переход  $I(V)$ . Возможное влияние генерационно-рекомбинационного шума на полный шум фотодиода в этой задаче не рассматривается. Таким образом, исходное выражение для отыскания спектральной плотности полного шума будет

$$U_{\text{ш } f} = \sqrt{U_{\text{ш } \text{тепл}}^2 + U_{\text{ш } \text{дроб}}^2} \quad (5.10)$$

Поскольку заданная частота измерений шума может оказаться выше частоты среза  $p$ - $n$  перехода, в вычислениях реальной части импеданса фотодиода необходимо учесть шунтирующее действие емкости перехода  $C$ , которая включена параллельно дифференциальному сопротивлению перехода  $R_d$ . Пользуясь теоремой Найквиста и выражением для спектральной плотности дробового шума тока  $I(V)$ , протекающего по активной части импеданса, найдем:

$$\begin{aligned} U_{\text{ш } f} &= \sqrt{4kT \cdot \text{Re}(Z) + I_{\text{ш } \text{дроб}}^2 \cdot [\text{Re}(Z)]^2} = \\ &= \sqrt{4kT \cdot \text{Re}(Z) + 2q \cdot I(V) \cdot [\text{Re}(Z)]^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Пересчет параллельной  $RC$  – цепи в последовательную цепь дает импеданс

$$\begin{aligned} Z &= \frac{R_d \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_d + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_d}{1 + j\omega R_d C} = \frac{R_d(1 - j\omega R_d C)}{(1 + j\omega R_d C) \cdot (1 - j\omega R_d C)} = \\ &= \frac{R_d}{(1 + \omega^2 R_d^2 C^2)} - j \frac{R_d \cdot \omega R_d C}{(1 + \omega^2 R_d^2 C^2)}. \end{aligned}$$

Поэтому реальная часть импеданса  $p$ - $n$  перехода будет равна

$$\text{Re}(Z) = \frac{R_d}{1 + \omega^2 R_d^2 C^2}. \quad (5.12)$$

Таким образом, определение уровня полного шума фотодиода сводится к определению по выражению (5.12) активной части импеданса перехода и подстановки его значения в выражение (5.11).

Прежде всего, необходимо найти дифференциальное сопротивление и емкость перехода. Емкость перехода  $C$  определяется его площадью  $S$  и толщиной слоя собственной проводимости  $W$  и может быть найдена по выражению по выражению (5.19)

$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{W} S = S \sqrt{\frac{q \varepsilon G_e \varepsilon_0}{2(\varphi_{\bar{0}} - V)} \cdot \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}}, \\ \varphi_{\bar{0}} &= \frac{kT}{q} \ln \left( \frac{N_d N_a}{n_i^2} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $\varepsilon_{Ge}$  - относительная диэлектрическая проницаемость германия. Подстановка численных значений в выражения (5.13) дает следующий результат:

$$\begin{aligned}\varphi_{\delta} &= \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19}} \ln \left( \frac{2.4 \cdot 10^{15} \cdot 2.4 \cdot 10^{15}}{2.4 \cdot 10^{13} \cdot 2.4 \cdot 10^{13}} \right) = \frac{1.38 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \ln(10) = \\ &= 10^{-1} \cdot 2.3 \approx 0.2 \text{ В} \\ C &= S \sqrt{\frac{q \varepsilon_{Ge} \varepsilon_0}{2(\varphi_{\delta} - V)} \cdot \frac{N_d N_a}{N_d + N_a}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 16 \cdot 8.85 \cdot 10^{-14}}{2 \cdot (0.2 - 0.1)} \cdot \frac{2.4 \cdot 10^{15}}{2}} = \\ &= 10^{-2} \sqrt{\frac{1.6 \cdot 1.6 \cdot 8.85 \cdot 1.2}{2} \cdot 10^{-17}} = 10^{-2} \sqrt{1.4 \cdot 10^{-16}} \approx 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ Ф.}\end{aligned}$$

Дифференциальное сопротивление перехода в области положительных смещений определяется выражением

$$R_d(V_0) \approx \frac{kT}{qI_{\text{об}}} \cdot \exp\left(-\frac{qV_0}{kT}\right), \quad (5.14)$$

где все величины табличные или легко вычисляются. Поэтому найдём величину  $R_d(V_0)$ :

$$\begin{aligned}R_d(V_0) &\approx \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}} \cdot \exp\left(-\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right) = \\ &= \frac{4.2 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-27}} \cdot \exp\left(-\frac{1.6 \cdot 10^{-20}}{4.2 \cdot 10^{-21}}\right) = 2.6 \cdot 10^6 \cdot \exp(-3.8) = 1.7 \cdot 10^5 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Теперь, используя выражение (5.12), найдем реальную часть импеданса фотодиода на частоте  $10^4$  Гц:

$$\begin{aligned}\text{Re}(Z) &= \frac{1.7 \cdot 10^5}{1 + 4\pi^2 \cdot 10^8 \left(1.7 \cdot 10^5\right)^2 \left(1.2 \cdot 10^{-10}\right)^2} \approx \\ &\approx \frac{1.7 \cdot 10^5}{1 + 40 \cdot 10^8 \cdot 2.9 \cdot 10^{10} \cdot 1.4 \cdot 10^{-20}} \approx \frac{1.7 \cdot 10^5}{1 + 4 \cdot 2.9 \cdot 1.4 \cdot 10^{-1}} = \\ &= \frac{1.7 \cdot 10^5}{2.6} = 6.5 \cdot 10^4 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Определим величину постоянного тока, текущего через  $p$ - $n$  переход:

$$\begin{aligned}I(V) &= I_{\text{об}} \cdot \left( \exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1 \right) = i_{\text{об}} S \cdot \left( \exp\left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.1}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right) - 1 \right) = \\ &= 10^{-6} \cdot 10^{-2} (\exp(1.3) - 1) = 10^{-8} (3.7 - 1) = 2.7 \cdot 10^{-8} \text{ А.}\end{aligned}$$

Теперь рассчитаем спектральную плотность суммарного шума фотодиода, подставив в выражение (5.11) найденное значение активной части импеданса:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ш } f} &= \sqrt{4kT \cdot \text{Re}(Z) + I_{\text{ш дроб}}^2 \cdot [\text{Re}(Z)]^2} = \sqrt{4kT \cdot \text{Re}(Z) + 2q \cdot I(V) \cdot [\text{Re}(Z)]^2} = \\
 &= \sqrt{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 6.5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.7 \cdot 10^{-8} \cdot (6.5 \cdot 10^4)^2} = \\
 &\approx \sqrt{4 \cdot 1.4 \cdot 3 \cdot 6.5 \cdot 10^{-17} + 2 \cdot 1.6 \cdot 2.7 \cdot 4.2 \cdot 10^{-18}} \approx \sqrt{10.1 \cdot 10^{-16} + 0.4 \cdot 10^{-16}} = \\
 &= 3.2 \cdot 10^{-8} \text{ В/Гц}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ответ на поставленный в этой задаче вопрос таков: спектральная плотность суммарного шума германиевого фотодиода на частоте  $10^4$  Гц при напряжении на нем  $V = 0.1$  В составляет  $3.2 \cdot 10^{-8}$  В/Гц<sup>1/2</sup>.

### 5.3 Варианты заданий по определению параметров флуктуационных процессов в полупроводниках

1. Рассчитать амплитуду теплового шума, возникающего на постоянном сопротивлении  $R = 2.6 \cdot 10^{10}$  Ом, находящемся при температуре  $T = 300$  К, если полоса пропускания вольтметра, с помощью которого производится измерение, составляет  $\Delta f = 10^6$  Гц.
2. Рассчитать спектральную плотность теплового шума, возникающего на постоянном сопротивлении  $R = 9 \cdot 10^8$  Ом, находящемся при температуре  $T = 400$  К, если вольтметр, с помощью которого производится измерение, настроен на регистрацию переменного напряжения частотой  $f = 10^8$  Гц.
3. Рассчитать амплитуду теплового шума, возникающего на постоянном сопротивлении  $R = 2 \cdot 10^9$  Ом, находящемся при температуре  $T = 500$  К, если полоса пропускания вольтметра, с помощью которого производится измерение, составляет  $\Delta f = 10^8$  Гц.
4. Рассчитать величину активного сопротивления, находящегося при температуре  $T = 300$  К, если амплитуда регистрируемого на нем вольтметром с полосой пропускания  $\Delta f = 10^8$  Гц, составляет  $1.7 \cdot 10^{-8}$  В.
5. Рассчитать величину активного сопротивления, находящегося при температуре  $T = 500$  К, если амплитуда регистрируемого на нем вольтметром с полосой пропускания  $\Delta f = 10^6$  Гц, составляет  $3.7 \cdot 10^{-9}$  В.

6. Рассчитать температуру, при которой находится проволочный резистор величиной  $10^9$  Ом, если амплитуда регистрируемого на нем вольтметром с полосой пропускания  $\Delta f = 10^8$  Гц, составляет  $8.7 \cdot 10^{-8}$  В.
7. Рассчитать величину активного сопротивления, находящегося при температуре  $T = 300$  К, если амплитуда регистрируемого на нем вольтметром с полосой пропускания  $\Delta f = 10^7$  Гц, составляет  $4.5 \cdot 10^{-9}$  В.
8. Рассчитать напряжение суммарного шума в полосе частот  $\Delta f = 10^7$  Гц, измеряемого на постоянном резисторе величиной  $R = 2 \cdot 10^5$  Ом, если к резистору приложено постоянное напряжение величиной  $V = 1.5$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 300$  К.
9. Рассчитать напряжение суммарного шума в полосе частот  $\Delta f = 10^6$  Гц, измеряемого на постоянном резисторе величиной  $R = 9.1 \cdot 10^5$  Ом, если к резистору приложено постоянное напряжение величиной  $V = 1.5$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 290$  К.
10. Рассчитать напряжение суммарного шума в полосе частот  $\Delta f = 10^5$  Гц, измеряемого на постоянном резисторе величиной  $R = 5.1 \cdot 10^6$  Ом, если к резистору приложено постоянное напряжение величиной  $V = 10$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 290$  К.
11. Рассчитать напряжение суммарного шума на частоте  $f = 10$  кГц RC-цепи, составленной из резистора величиной  $R = 5 \cdot 10^5$  Ом и параллельной ему емкости  $C = 2 \cdot 10^6$  пФ, если к цепи приложено постоянное напряжение величиной  $V = 2$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 290$  К.
12. Рассчитать напряжение суммарного шума на частоте  $f = 100$  кГц RC-цепи, составленной из резистора величиной  $R = 2 \cdot 10^4$  Ом и параллельной ему емкости  $C = 5 \cdot 10^3$  пФ, если к цепи приложено постоянное напряжение величиной  $V = 0.1$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 310$  К.
13. Рассчитать напряжение суммарного шума на частоте  $f = 3$  кГц RC-цепи, составленной из резистора величиной  $R = 5.1 \cdot 10^4$  Ом и параллельной ему емкости  $C = 2.2 \cdot 10^6$  пФ, если к цепи приложено постоянное

напряжение величиной  $V = 10$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 290$  К.

14. Рассчитать напряжение суммарного шума на частоте  $f = 20$  кГц  $RC$ -цепи, составленной из резистора величиной  $R = 5.1 \cdot 10^3$  Ом и параллельной ему емкости  $C = 2.2 \cdot 10^6$  пФ, если к цепи приложено постоянное напряжение величиной  $V = 20$  В, а температура окружающей среды равна  $T = 350$  К.
15. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума кремниевого фотодиода на частоте  $10^4$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0.1$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-6} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .
16. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума германиевого фотодиода на частоте  $10^3$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0.2$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-8} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .
17. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума арсенид-галлиевого фотодиода на частоте  $10^4$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0.3$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-10} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $1.4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .
18. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума кремниевого диода на частоте  $3 \cdot 10^3$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0.1$  В, имеющего площадь  $S = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 10^{-8} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $3.3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .
19. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума германиевого диода на частоте  $10^6$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0$  В, имеющего площадь  $S = 7.5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $2.4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

20. Рассчитать спектральную плотность суммарного шума арсенид-галлиевого диода на частоте  $10^4$  Гц при напряжении на нем  $V_0 = 0$  В, имеющего площадь  $S = 10^{-2} \text{ см}^2$  и плотность обратного тока  $j_{об} = 4.5 \cdot 10^{-8} \text{ А/см}^2$ . Считать уровни легирования  $p$ - и  $n$ -областей одинаковыми и равными  $8.5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

## 6 ЭМИССИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

### 6.1 Краткое изложение теории

Проблему изучения эмиссии излучения из твердых тел можно рассматривать с двух позиций: макроскопической и микроскопической, различающихся объектом рассмотрения излучающих свойств.

*С макроскопической позиции* излучательные свойства твердого тела анализируются как свойства однородного кристалла. Здесь для численной оценки эффективности излучательной способности вводят два параметра. Первый из них называется внутренней квантовой эффективностью  $\eta$ . Он характеризует способность атомов полупроводника излучать фотоны при рекомбинации электронно-дырочных пар и вычисляется следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_r}} = \frac{\tau_r}{\tau_r + \tau_l} \quad (6.1)$$

т.е. это параметр превышения способности генерировать фотоны над способностью того же вещества генерировать фононы. Численно он определяет: сколько генерируется фотонов в результате рекомбинации одной пары «электрон-дырка». Как показывает расчет, для повышения внутренней квантовой эффективности источника оптического излучения для его изготовления необходимо использовать полупроводники с высоким уровнем легирования.

Для того чтобы наблюдать эмиссию излучения, необходимо, чтобы сгенерированные фотоны вышли из полупроводника через одну из его граней в окружающее пространство. Однако, распространяясь в кристалле на пути от места генерации к излучающей поверхности, фотоны могут быть поглощены другими атомами, находящимися в основном энергетическом состоянии. Поэтому вводят еще один параметр, называемый внешней квантовой эффективностью и обозначаемый как  $\xi$ . Он показывает долю сгенерированных в объеме полупроводника фотонов, вышедших через его поверхность:

$$\xi = \frac{\ell_{\phi}}{\ell_{\phi} + L}, \quad (6.2)$$

где  $L$  – толщина полупроводника в направлении на излучающую поверхность;  $\ell_{\phi}$  – длина свободного пробега фотона в полупроводнике. Из этого определения видно, что условие достижения высокого выхода светового излучения заключается в том, чтобы сгенерированные фотоны могли выйти из полупроводника не будучи поглощенными другими атомами на пути от излучающего атома до поверхности. Для этого необходимо, чтобы длина свободного пробега фотона была больше толщины образца:  $\ell_{\phi} \gg L$ .

Конечно, эти два параметра не дают исчерпывающий ответ на вопрос об эффективности излучающей способности полупроводника. Кроме этих двух

параметров можно ввести еще несколько, с помощью которых отображалось бы выполнение еще ряда условий, которые необходимо соблюсти для повышения эффективности излучения (например, условия на коэффициент отражения света от внутренней поверхности полупроводника). Но эти два – основные.

*С микроскопической позиции* излучающие способности твердого тела рассматриваются как результат излучения отдельных атомов, т.е. анализируются механизмы генерации излучения отдельным атомом. Детальный анализ показывает, что при этом подходе двумя параметрами, определяющими эффективность излучения отдельного атома, являются вероятности спонтанного -  $A_{21}$  и индуцированного -  $B_{21}$  переходов. Эти параметры определяются природой атома, его структурного состояния в решетке и потому являются константой для данного вещества. Следовательно, численные значения этих параметров можно найти в справочных материалах.

Для характеристики излучательной способности оптического излучения твердотельного лазера необходимо проверять выполнение двух условий:

- условие резонанса оптической волны на длине резонатора  $L$ :

$$L = m \frac{\lambda}{2n}, \quad (6.3)$$

где  $n$  - показатель преломления вещества, являющегося активным в лазере,  $m$  - целое число, показывающее количество полуволен оптического излучения, укладывающихся на длине кристалла;

- условие значения коэффициента усиления активного вещества  $g$ , достаточного для возникновения генерации, если кристалл помещен в оптический резонатор с зеркалами, коэффициенты отражения от которых равны  $R_1, R_2$ , а коэффициент поглощения оптического излучения с генерируемой длиной волны в активном веществе лазера равен  $\alpha$ :

$$g > \alpha - \frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2). \quad (6.4)$$

Для получения генерации оптического излучения полупроводниковым лазером это условие сводится к необходимости задания протекающего тока через открытый  $p$ - $n$  переход величиной выше порогового тока.

## 6.2 Примеры решения задач по определению параметров эмиссионных эффектов в полупроводниках

**Задача 1.** Определить параметр внутренней квантовой эффективности генерации оптического излучения германиевого образца  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 2.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ K}$ .

**Решение.** Исходным выражением для определения параметра внутренней квантовой эффективности является выражение (6.1), в котором неизвестными



величинами являются время жизни излучательной рекомбинации  $\tau_l$  и время жизни безизлучательной рекомбинации  $\tau_r$ :

$$\eta = \frac{\tau_r}{\tau_r + \tau_l}. \quad (6.5)$$

Время жизни излучательной рекомбинации зависит от уровня легирования полупроводника по закону:

$$\tau_l = \tau_l^{(i)} \frac{2n_i}{n_0 + p_0}. \quad (6.6)$$

Из табличных данных известно, что время излучательной рекомбинации в собственном германии составляет  $\tau_l^{(i)} = 0.6$  с. Поэтому по выражению (6.6) будем иметь:

$$\tau_l \approx \tau_l^{(i)} \frac{2n_i}{N_d} = 0.6 \frac{2 \cdot 2.4 \cdot 10^{13}}{2.4 \cdot 10^{17}} = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Из справочных материалов находим, что время жизни неравновесных электронов и дырок германии составляет величину  $\tau = 10^{-5}$  с. Это время определено как время жизни неравновесных носителей заряда при одновременном действии излучательной и безизлучательной рекомбинации. При параллельном действии двух рекомбинационных процессов суммарное время жизни определяется как среднее геометрическое от времен жизни участвующих процессов. В нашем случае это означает, что

$$\tau = \frac{\tau_r \cdot \tau_l}{\tau_r + \tau_l}. \quad (6.7)$$

Значит, интересующий нас параметр внутренней квантовой эффективности процесса излучения может быть вычислен по формуле:

$$\eta = \frac{\tau}{\tau_l}. \quad (6.8)$$

Поэтому окончательно имеем:

$$\eta = \frac{\tau}{\tau_l} = \frac{10^{-5}}{1.2 \cdot 10^{-4}} = \frac{0.1}{1.2} \approx 8.3 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, ответ на поставленный в задаче вопрос будет таким: параметр внутренней квантовой эффективности германиевого образца составляет 0.083 или 8.3%.

**Задача 2.** Вычислить параметр внешней квантовой эффективности кремниевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{21}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне собственного поглощения.

**Решение.** Исходным выражением для определения параметра внешней квантовой эффективности служит выражение (6.2), в котором стоят неизвест-

ные величины длины свободного пробега фотонов и размера кристалла. Их можно определить следующим образом: по определению длина свободного пробега фотонов является величиной, обратной коэффициенту поглощения излучения:  $\ell_{\phi} = 1/\alpha$ . Линейные размеры кристалла можно определить из количества атомов в образце:  $L = 1/\sqrt[3]{N_{\text{ат}}}$ . Следовательно, получим:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\ell_{\phi}}{\ell_{\phi} + L} = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + 1/\sqrt[3]{N_{\text{ат}}}} = \frac{1}{1 + \alpha/\sqrt[3]{N_{\text{ат}}}} = \\ &= \frac{1}{1 + 10^6/10^7} = \frac{1}{1 + 0.1} = \frac{1}{1.1} \approx 0.9.\end{aligned}$$

Таким образом, ответ на вопрос о величине параметра внешней квантовой эффективности будет таков: внешняя квантовая эффективность образца кремния с заданным числом атомов в нем будет составлять около 90%.

**Задача 3.** Каким должен быть коэффициент усиления излучения из области примесного поглощения (коэффициент поглощения  $\alpha = 10^3 \text{ см}^{-1}$ ) в твердом теле длиной  $L = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  и торцами в виде отражающих зеркал, коэффициент отражения одного из них  $R_1 = 1$ , если через второе зеркало выводится 5% генерируемого излучения.

**Решение.** Эта задача может быть решена с использованием выражения (6.4) при известных значениях коэффициента поглощения излучения  $\alpha$ , обоих коэффициентов отражения зеркал  $R_1, R_2$  и длины кристалла в направлении усиления света  $L$ :

$$g > \alpha - \frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2).$$

Из условия задачи следует, что коэффициент отражения света вторым зеркалом  $R_2 = 0.95$ . Поэтому с использованием формул разложения логарифма вблизи единичного значения аргумента получим:

$$\begin{aligned}g &> 10^3 - \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \ln(1 \cdot 0.95) = 10^3 - \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \ln(1.0 - 0.05) \approx \\ &\approx 10^3 - \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} (-0.05) = 10^3 + \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} 0.05 = \\ &= 10^3 + \frac{5}{5} \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент усиления твердого тела должен быть больше  $2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

### 6.3 Варианты заданий по определению параметров эмиссионных эффектов в полупроводниках

1. Определить параметр внутренней квантовой эффективности генерации оптического излучения кремниевого образца  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 5.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ .

2. Определить параметр внутренней квантовой эффективности генерации оптического излучения арсенид-галлиевого образца  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 6.4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ .

3. Определить параметр внутренней квантовой эффективности генерации оптического излучения кремниевого образца  $p$ -типа проводимости с концентрацией акцепторной примеси  $N_a = 8.6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ .

4. Определить суммарное время жизни неравновесных носителей заряда (фотон + фонон) в германиевом образце  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 5.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ , если известно, что внутренняя квантовая эффективность генерации оптического излучения в этом образце составляет 0.68.

5. Определить суммарное время жизни неравновесных носителей заряда (фотон + фонон) в кремниевом образце  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 5.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ , если известно, что внутренняя квантовая эффективность генерации оптического излучения в этом образце составляет 0.88.

6. Определить время жизни неравновесных носителей заряда с излучением фонона в кремниевом образце  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 5.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ , если известно, что внутренняя квантовая эффективность генерации оптического излучения в этом образце составляет 0.88.

7. Определить время жизни неравновесных носителей заряда с излучением фонона в арсенид-галлиевообразце  $n$ -типа проводимости с концентрацией донорной примеси  $N_d = 5.4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , находящегося при температуре  $T = 300 \text{ К}$ , если известно, что внутренняя квантовая эффективность генерации оптического излучения в этом образце составляет 0.12.

8. Вычислить параметр внешней квантовой эффективности германиевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{20}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне собственного поглощения.

9. Вычислить параметр внешней квантовой эффективности арсенид-галлиевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{22}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне собственного поглощения.

10. Вычислить параметр внешней квантовой эффективности германиевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{24}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне примесного поглощения, характеризуемого коэффициентом поглощения  $\alpha = 1.0 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

11. Вычислить параметр внешней квантовой эффективности арсенид-галлиевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{23}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне примесного поглощения, характеризуемого коэффициентом поглощения  $\alpha = 2.3 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ .

12. Вычислить параметр внешней квантовой эффективности кремниевого образца, изготовленного в виде куба и содержащего  $N_{\text{ат}} = 10^{21}$  атомов, если излучение лежит в диапазоне примесного поглощения, характеризуемого коэффициентом поглощения  $\alpha = 1.7 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

13. Вычислить количество атомов в германиевом образце, изготовленном в виде куба, если излучение лежит в диапазоне примесного поглощения, характеризуемого коэффициентом поглощения  $\alpha = 10^3 \text{ см}^{-1}$ , а параметр внешней квантовой эффективности эмиссии этого излучения составляет величину  $\xi = 0.79$ .

14. Вычислить количество атомов в арсенид-галлиевом образце, изготовленном в виде куба, если излучение лежит в диапазоне примесного поглощения, характеризуемого коэффициентом поглощения  $\alpha = 2.4 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ , а параметр внешней квантовой эффективности эмиссии этого излучения составляет величину  $\xi = 0.86$ .

15. Каким должен быть коэффициент усиления излучения из области примесного поглощения (коэффициент поглощения  $\alpha = 1.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ ) в твердом теле длиной  $L = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  и торцами в виде отражающих зеркал, коэффициент отражения одного из них  $R_1 = 1$ , если через второе зеркало выводится 15% генерируемого излучения.

16. Определить долю выводимой из твердотельного лазера оптического излучения, если известно, что лазер генерирует свет из собственной полосы поглощения ( $\alpha = 7.5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ ), имеет длину  $L = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , а граничное значе-

ние коэффициента усиления, соответствующее началу генерации, равно  $g = 1.5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ .

17. Определить долю выводимой из твердотельного лазера оптического излучения, если известно, что лазер генерирует свет из примесной полосы поглощения ( $\alpha = 7.5 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ ), имеет длину  $L = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , а граничное значение коэффициента усиления, соответствующее началу генерации, равно  $g = 1.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

18. Определить коэффициент поглощения твердого тела, используемого в качестве активного элемента лазера, если известно, что он имеет длину  $L = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , граничное значение коэффициента усиления, соответствующее началу генерации, равно  $g = 1.5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ , а доля выводимой через зеркало энергии составляет 10% .

19. Определить коэффициент поглощения твердого тела, используемого в качестве активного элемента лазера, если известно, что он имеет длину  $L = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , граничное значение коэффициента усиления, соответствующее началу генерации, равно  $g = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ , а доля выводимой через зеркало энергии составляет 3.5% .

20. Определить коэффициент поглощения твердого тела, используемого в качестве активного элемента лазера, если известно, что он имеет длину  $L = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ , граничное значение коэффициента усиления, соответствующее началу генерации, равно  $g = 2.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ , а доля выводимой через зеркало энергии составляет 5% .

## 7 ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ. ЖИДКИЕ КРИСТАЛЛЫ.

### 7.1 Краткое изложение теории по электрооптическим эффектам в кристаллах

Оптоэлектроника имеет дело с двумя объектами, используемыми для передачи информации в том или ином виде, их взаимодействием и взаимным превращением: с электронами и фотонами. Однако управление движением этих частиц совершается совершенно разными способами. Чтобы изменить траекторию движения электронов, достаточно создать требуемую конфигурацию электрического и магнитного полей, в которых они движутся. Изменить траекторию движения фотонов можно только за счет отражения света от границы раздела двух сред с разными оптическими свойствами либо использовать дифракцию на специально создаваемых неоднородностях этих свойств. Ясно, что такое управление движением фотонов требует изучения.

Далее рассматриваются оптические свойства кристаллов в твёрдой и жидкой фазах, которые обладают анизотропией. Следствием этого такие вещества проявляют эффекты преобразования оптического излучения, которые могут быть использованы для управления оптическим излучением.

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны через оптически прозрачный кристалл, обладающий разным значением диэлектрической проницаемости по направлениям:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Пусть вдоль осей  $x$ ,  $y$  диэлектрическая проницаемость кристалла одинакова, а вдоль оси  $z$  она имеет другое значение:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ . Направим плоскую волну так, чтобы вектор поляризации был параллелен оси  $z = x_3$ , а единичный вектор нормали к волновому фронту направлен по оси  $y = x_2$ .

Рассматриваемая ситуация и результаты рассмотрения представлены на рис. 4. В анизотропных кристаллах в общем случае имеет место эффект двулучепреломления: плоская монохроматическая электромагнитная волна с определенной линейной поляризацией (направлением колебания вектора электрической индукции), вошедшая в анизотропный кристалл и прошедшая в нем некоторое расстояние не менее несколько длин волн, меняет своё положение так, что вектор электрической индукции поворачивается вокруг направления рас-

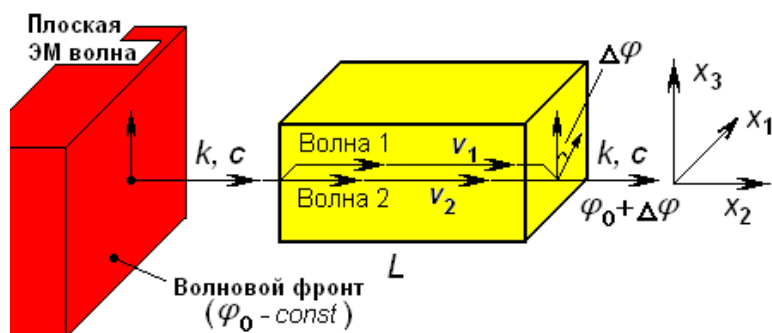


Рисунок 4 – Эффект поворота фазы плоской электромагнитной волны при её распространении в анизотропном кристалле

пространения на угол  $\delta\varphi$ , пропорциональный величине анизотропии диэлектрической поляризации и пройденному расстоянию. Важно, что обсуждаемый набег фазы на порядки превышает изменение фазы световой волны, получаемый только за счёт пройденного расстояния без учёта анизотропии.

Появление фазового набега можно объяснить следующим образом. Вошедшая в кристалл волна может быть представлена как сумма двух линейно поляризованных волн. При этом одна волна будет иметь вектор поляризации по оптической оси (ось  $z$ ), а другая по оси, например,  $y$ . Важно, что значения диэлектрической поляризации в этих направлениях разнятся на величину оптической анизотропии. Напомним, что фазовая скорость электромагнитной волны определяется значением диэлектрической поляризации в направлении вектора электрической индукции -  $\vec{D}$ . Значит, распространяющаяся в анизотропном кристалле электромагнитная волна может быть разложена (представлена в виде) двух волн с взаимно перпендикулярными поляризациями и разными скоростями распространения фазового фронта:  $v_1, v_2$ .

Как видим, никаких особенностей разложения волны на две в анизотропном кристалле по сравнению со случаем общего правила представления вектора на плоскости в виде двух взаимно перпендикулярных векторов по координатным осям в рассматриваемом случае пока нет: никаких особых «расщепляющих» механизмов в анизотропном кристалле нет и это логично. Вопросы возникают, когда начинается рассмотрение эффекта двулучепреломления при направлении в кристалл волны с поляризацией на входе строго по оптической оси. Как можно видеть в этом случае описанное выше разложение даст только одну компоненту, направленную по оси  $z$ , и эффекта расщепления, а значит, двулучепреломления не будет независимо от длины кристалла. Если же существует, пусть даже небольшое, отступление входной поляризации от направления оптической оси, то эффект двулучепреломления будет иметь место.

В этом случае, имея разные фазовые скорости, расщепленные волны распространяются через кристалл длиной  $L$ , и на выходе из него их вектора электрической индукции будут иметь разные фазы:  $\varphi_1 = \omega L n_1 / c + \omega t$  и  $\varphi_2 = \omega L n_2 / c + \omega t$ . Выходя из кристалла и попадая в изотропную среду - воздух, у волн различие в фазовых скоростях исчезнет. Будет одна волна с поляризацией, отличающейся от входной на угол равный разности фаз складываемых волн  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega L \cdot (n_1 - n_2) / c = 2\pi L (n_1 - n_2) / \lambda$ .

Поворот плоскости поляризации электромагнитной волны при прохождении через оптически активный кристалл можно обнаружить экспериментально, сравнивая с помощью поляризатора интенсивности электромагнитной волны на входе в кристалл и на выходе. При отсутствии набега фазы или набеге, кратном  $180^\circ$ , интенсивности будут равны, а при наличии двулучепреломления интенсивность на выходе будет меньше входной. По мере роста разности фаз, например, за счёт увеличения угла между вектором поляризации входной волны относительно оптической оси, стремясь к  $90^\circ$ , она будет уменьшаться аналогично тому, как меняется проекция вектора электрического поля про-

шедшей волны на направление анизотропии  $z = x_3$ . Если на выходе из кристалла поставить поляризатор, пропускающий поляризацию, что и у входной волны, то можно установить, что интенсивность выходного излучения окажется меньше входной на величину, определяемую набегом фазы. Рисунок 5 поясняет сказанное.

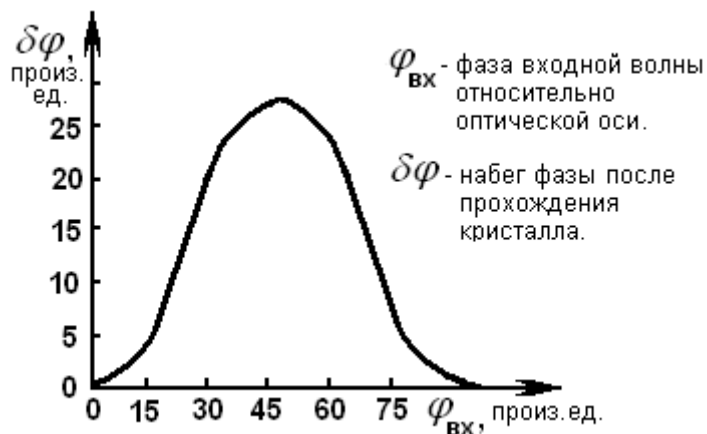


Рисунок 5 – Поведение эффективности вращения плоскости поляризации в анизотропном кристалле при изменении поляризации входной волны

Из приведенного выше рассмотрения эффекта двулучепреломления в анизотропном кристалле следует, что на практике эффект двулучепреломления - не обеспечивает 100% модуляцию излучения из-за его ослабления при больших и вблизи малых  $\varphi_{вх}$  ;

- должно существовать такое направление поляризации входной волны относительно оптической оси, при котором удельная вращательная способность кристалла, определяемая как  $\partial\delta\varphi/\partial\varphi$ , будет максимальной. Из общих соображений можно заключить, что это направление должно быть около  $45^0$ , а вид функции подобен зависимости  $\sin(2\varphi_{вх})$ .

### Расчет фазовых скоростей волн

Исходными данными для расчета эффекта двулучепреломления в оптически одноосном кристалле является значение компонент его тензора диэлектрической непроницаемости в стандартной установке кристаллофизической системы координат. Одноосные кристаллы относятся к кристаллам средней категории, в которой оптическая ось совпадает с главной осью симметрии.

Задача определения величины набега фазы световой волны после прохождения ею через оптически одноосного кристалла решается введением новой координатной системы, в которой направление распространения волны выбирается в качестве оси  $x'_3$  новой системы. На рис.6 показана исходная система координат  $x_1, x_2, x_3$  в стандартной установке кристаллофизической системы координат в кристаллах средней категории, а также новая система координат



$x'_1, x'_2, x'_3$ , полученная путём поворота вокруг оси  $x_1$  на угол  $\theta$ . Матрица преобразования системы координат строится путем проецирования новой системы координат на старую. В ее первой строке записываются косинусы углов

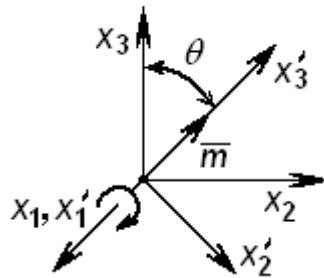


Рисунок 6 – Ориентация осей системы координат, связанной с направлением распространения излучения, относительно кристаллофизической системы в кристаллах средней категории

оси  $x'_1$  на оси  $x_1, x_2, x_3$ , во второй и третьей – для осей  $x'_2$  и  $x'_3$  соответственно. В этом случае матрица преобразования будет:

$$\|C_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Для оптически одноосного кристалла тензор диэлектрической непроницаемости в общем случае можно представить в виде

$$\|\eta_{jk}\| = \begin{vmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{vmatrix}.$$

Здесь ориентация входной поляризации падающей электромагнитной волны задается относительно оптической оси углом  $\theta$ .

В приведенных выражениях компоненты тензора диэлектрической непроницаемости берутся в системе координат, связанной с направлением распространения волны в кристалле, и вычисляются по формуле преобразования компонент тензора второго ранга через компоненты матрицы преобразования системы координат.

Используя матрицу преобразования кристаллофизических координат в систему, связанную с направлением распространения оптического излучения, записать тензор диэлектрической непроницаемости в новой системе координат

$$\eta'_{ij} = C_{ik} C_{jl} \cdot \eta_{kl}.$$

Тогда фазовые скорости двух компонент вектора электрической индукции можно найти по выражениям:

$$\left(\frac{v_{\phi 1}}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\eta'_{11} + \eta'_{22}) - \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2} \right]}$$

$$\left(\frac{v_{\phi 2}}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\eta'_{11} + \eta'_{22}) + \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2} \right]}.$$

Здесь  $c$  – скорость света в вакууме. При прохождении излучения кристалла длиной  $L$  возникающая разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами составит величину:

$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega L}{c} \cdot \left( \frac{c}{v_{\phi 1}} - \frac{c}{v_{\phi 2}} \right) = \frac{2\pi \cdot L}{\lambda} \cdot \left( \frac{c}{v_{\phi 1}} - \frac{c}{v_{\phi 2}} \right).$$

## 7.2 Краткое изложение теории по жидким кристаллам и электрооптическим эффектам в них

Жидкие кристаллы – это специфическое агрегатное состояние некоторых органических веществ, в котором они одновременно проявляют свойства жидкости и кристалла. При плавлении кристаллы этих веществ образуют жидкокристаллическую фазу, отличающуюся от обычных жидкостей: она существует в узком температурном диапазоне, вне которого имеем кристалл или изотропную жидкость. Обязательным свойством жидких кристаллов является наличие порядка в пространственной ориентации молекул.

Все известные в настоящее время жидкие кристаллы составлены из одного сорта молекул, которые имеют стержнеобразную форму либо вид вытянутой спирали. В зависимости от характера упорядочения длинных осей молекул в слое жидкие кристаллы разделяют на нематики, смектики и холестерики.

**Нематики.** Будем представлять себе молекулы нематического кристалла в виде стержней, т.к. они имеют длину во много раз больше толщины. Структура нематика представляет собой «жидкость одинаково ориентированных стержней». В твердом состоянии молекулы кристалла строго ориентированы в пространстве. В жидкокристаллическом состоянии молекулы разбросаны по жидкому кристаллу хаотически, они могут перемещаться под действием температуры в любую сторону. Относительный порядок существует только в ориентации длинных осей молекул. Стержни движутся хаотически в жидкости, но их преимущественная ориентация не изменяется. Под действием температуры они совершают угловые колебания относительно среднего своего положения, амплитуда которых возрастает при приближении к температуре фазового перехода. В отношении оптических свойств нематики ведут себя как оптически одноосные кристаллы.

Для характеристики ориентационного порядка молекул жидкого кристалла вводится вектор единичной длины  $\underline{n}$ , называемый директором, направление которого указывает направление преимущественной ориентации длинных осей молекул. Однако этой характеристики недостаточно для полного описания структурного состояния жидкого кристалла. Действительно, совер-

шая тепловые колебания относительно направления директора, молекулы могут отклоняться от него на больший или меньший угол в зависимости от температуры жидкого кристалла. Для характеристики среднего отклонения молекул от направления директора, вводится параметр порядка  $Q$ . Значение  $Q = 1$  соответствует полной ориентации всех молекул нематика в направлении директора, а  $Q = 0$  – полному беспорядку в ориентации молекул. Фактически параметр порядка есть дисперсия случайной переменной – угла отклонения осей молекул.

**Холестерики.** Они устроены более сложно, чем нематики и смектики. Локально холестерический кристалл устроен так же, как и нематик: в малом объеме упорядочение молекул холестерика, как и нематика, можно охарактеризовать директором и параметром порядка  $Q$ . Отличие холестерика от нематика проявляется в больших, по сравнению с молекулярными размерами, масштабах. Эти отличия связаны с тем, что в нем молекулы образуют так называемую холестерическую спираль: существует такое направление, называемое холестерической осью, вдоль которого регулярным образом изменяется ориентация директора. Директор перпендикулярен этой оси и вращается вокруг нее.

Угол поворота линейно связан с расстоянием  $z$  вдоль холестерической оси. Расстояние, на котором директор поворачивается на  $360^\circ$ , называется шагом холестерической спирали.

## Ориентационные эффекты в жидких кристаллах

**Нематики.** До сих пор речь шла об однодоменном образце нематика, в котором ориентация директора одинакова во всех его точках. В реальности молекулы жидкого кристалла могут изменять свою ориентацию по поверхности слоя жидкого кристалла, а также с его толщиной, образуя области одинаковой ориентации длинных осей молекул жидкого кристалла. Эти области называют доменами. Причины появления доменов заключаются в случайном характере внешних воздействий, способных задавать ориентацию молекул. Преимущественные ориентации длинных осей молекул в различных доменах обычно никак не связаны между собой, поэтому ориентация директоров в разных доменах хаотична. Чтобы сделать все молекулы жидкого кристалла ориентированными одинаково (специалисты называют такой кристалл «однодоменным»), необходимы специальные меры. К ним относятся любые способы, задающие ориента-

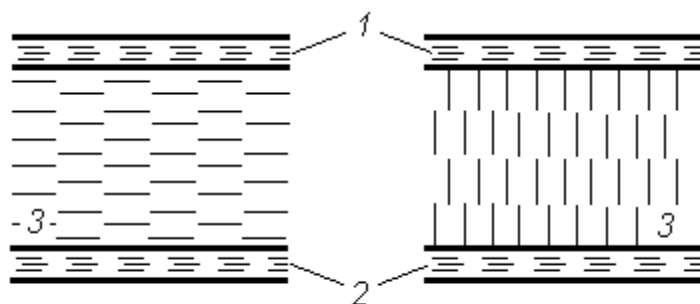


Рисунок 7–Планарная и гомеотропная оптические ячейки для жидких кристаллов

цию длинных осей молекул: механическая полировка внутренних поверхностей стекол, между которыми помещается жидкий кристалл; обработка опорных поверхностей оптических ячеек заданием ориентации с помощью внешних электрических или магнитных полей и т.д.

В практических и научных исследованиях используют две основных ориентации молекул нематика: вдоль поверхности и перпендикулярно ей. В соответствии с этим используют два типа жидкокристаллических ячеек, показанных на рис. 7. Здесь 1 – верхняя опорная поверхность ячейки, 2 – нижняя опорная поверхность, которые обычно изготавливают из прозрачного стекла. Пленка нематика–3 помещается между опорными поверхностями. Ячейку, показанную в левой части рис. 6, называют планарной, а показанную в правой части – гомеотропной. Для получения планарной ячейки внутренние поверхности стекол, контактирующие с жидким кристаллом, подвергают механической шлифовке в одном направлении, в результате которой на поверхности стекла остаются микроборозды. Молекулы нематика «ложатся» в эти борозды, образуя строго ориентированный поверхностный слой нематика планарной структуры. Ввиду действия сил связи молекулы соседних слоев перенимают ориентацию граничного слоя, передавая ее в объем жидкого кристалла. Тепловое движение молекул стремится разрушить этот порядок. Поэтому существует некоторое расстояние, при удалении на которое от поверхности ориентирующее действие опорной поверхности и разориентирующее влияние теплового движения уравновешивают друг друга. Это расстояние называется когерентной длиной и для типичных жидких кристаллов составляет величину несколько микрон. Поэтому, если толщина слоя нематика невелика – до десятка микрон, то разориентирующее действие упругих сил, теплового движения несущественно и во всем объеме жидкого кристалла его молекулы (на рисунке они показаны в виде коротких линий между стеклами) соразориентированы вдоль поверхности ячейки.

Для получения гомеотропной ячейки внутренние поверхности стекол обрабатывают в специальном химическом составе – поверхностно-активном веществе. Молекулы этого вещества также имеют вытянутую форму и при обработке одним концом «приклеиваются» к обрабатываемым поверхностям. Молекулы жидкого кристалла входят в пространство между молекулами поверхностно-активного вещества, ориентируясь перпендикулярно поверхности ячейки. Следующие слои молекул нематика, стремясь минимизировать свою потенциальную энергию по отношению к молекулам соседнего слоя жидкого кристалла, выстраиваются также перпендикулярно стеклам.

**Переход Фредерикса.** Для технических применений жидких кристаллов важной является возможность изменять ориентацию молекул путем приложения, например, электрического поля, которое обычно прикладывают перпендикулярно поверхностям ячеек. Важной особенностью нематиков является различное значение его диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , измеренной вдоль осей молекул и перпендикулярно им. Поэтому при помещении нематика в постоянное электрическое поле из-за анизотропии диэлектрической проницаемости его

молекулы стремятся ориентироваться так, чтобы направление большего значения  $\varepsilon$  совпадало с направлением приложенного поля. Значит, исходная планарная структура нематика в электрическом поле может перейти в гомеотропную или наоборот. Эффект изменения структуры нематика во внешнем электрическом поле называют переходом Фредерикса. Общим свойством переориентации нематика под действием внешнего поля является ее пороговый характер: как только величина электрического поля достигнет критического значения, все молекулы нематика меняют свою ориентацию. Критическое значение электрического поля, при котором совершается переход Фредерикса, вычисляется по следующей формуле:

$$E_c = \frac{\pi}{d} \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2},$$

где  $d$  – толщина слоя жидкого кристалла;  $K$  – его коэффициент упругости;  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  – анизотропия диэлектрической проницаемости жидкого кристалла. Здесь  $\varepsilon_{\parallel}$  – диэлектрическая проницаемость жидкого кристалла, когда поляризация света параллельна директору,  $\varepsilon_{\perp}$  – диэлектрическая проницаемость жидкого кристалла, когда поляризация света перпендикулярна директору. Из этого выражения следует, что критическое напряжение, прикладываемое к слою нематика для его переориентации, не зависит от толщины  $d$ :

$$V_c = \pi \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (7.1)$$

Выше этого значения напряжения на ячейке изменения структуры быстро достигают насыщения: если продолжать увеличивать напряжение выше критического, то это практически не изменит состояние нематика.

Ориентационное действие электрического поля величиной  $E$  проявляется на протяжении электрической когерентной длины, отсчитываемой от опорной поверхности,

$$\lambda_k = \frac{1}{E} \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (7.2)$$

Подставив в это выражение типичные значения:  $K = 10^{-6}$  дин,  $\Delta\varepsilon \approx 3$  и  $E = 10^3$  В/см, получим, что  $\lambda_k \approx 10$  мкм. Следовательно, используемые пленки нематика должны иметь толщину меньше двух значений электрической когерентной длины, что соответствует величине порядка десятка микрон.

Если увеличивать напряжение на ячейке выше порога Фредерикса, то вблизи десятка вольт структура нематика претерпевает следующее скачкообразное изменение: вдоль поверхности ячейки образуются круговые потоки молекул нематика, что формирует структуру типа упорядоченного слоя вращающихся цилиндров. Это так называемые домены Капустина-Вильямса. Их возникновение обусловлено проявлением ионной проводимости жидкого кристал-

ла в электрическом поле. Из-за изменения ориентации молекул в пределах домена он выступает как неоднородность  $\varepsilon$ .

Дальнейшее повышение напряжение на ячейке приводит к разрушению доменов, появлению хаотических турбулентных потоков в слое нематика. В результате такого состояния структуры жидкого кристалла он рассеивает падающий на него свет равномерно во все стороны. Поэтому данное состояние нематика называют динамическим рассеянием света, при котором рассеяние падающего света происходит во всех направлениях, что облегчает визуальное наблюдение измененного состояния жидкого кристалла.

Перечисленные структурные состояния нематика в электрическом поле могут быть использованы в оптоэлектронике: для отображения и хранения информации, преобразования световых потоков и т.д.

**Холестерики.** Следует заметить, что шаг холестерической спирали чувствителен к электрическому полю, магнитному полю, температуре, химическим примесям на поверхности холестерика, радиационному излучению и т.д.: при приложении, например, электрического поля шаг спирали увеличивается с ростом величины поля. При приближении к некоторому пороговому значению электрического поля (обычно это поле достигается при напряжении в несколько вольт) шаг холестерической спирали резко увеличивается, а при пороговом поле величиной

$$E_p = \left( \frac{\pi^2}{2\rho_0} \right) \cdot \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (7.3)$$

спираль вообще распрямляется. При этом холестерик переходит в нематик. Здесь  $\rho_0$  – шаг холестерической спирали в отсутствие воздействия. Его обычно выбирают в области длин волн видимого излучения и, следовательно, в десятки раз меньше толщины слоя жидкого кристалла. Поэтому значение  $E_p$  оказывается обычно больше, чем поле, необходимое для перехода Фредерикса. При приложении электрического поля, когда шаг спирали  $\rho$  не превышает  $\rho_0$  на несколько процентов:  $\rho < 1.05\rho_0$  величину шага можно оценить, воспользовавшись следующим аппроксимационным выражением:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \approx 1 + \frac{1}{32} \left( \frac{2 E_p}{\pi E} \right)^{-4} \quad (7.4)$$

В ряде практических задач необходимо рассчитать величину требуемого электрического поля, необходимого для получения требуемого значения шага спирали. Обращение выражения (8.4) относительно  $E$  дает зависимость:

$$\frac{E}{E_p} \approx \frac{2}{\pi} \cdot 4 \sqrt[4]{32 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)} \quad (7.5)$$

В случае, когда в результате действия электрического поля шаг холестерической спирали изменяется от десяти процентов и выше ( $\rho > 1.05 \cdot \rho_0$ ), т.е. вблизи

критического значения электрического поля  $E_p$ , зависимость шага спирали  $p$  от приложенного электрического поля  $E$  оказывается резкой и описывается с помощью выражения

$$\frac{p}{p_0} \approx \frac{4}{\pi^2} \ln \left( \frac{4E_p}{\sqrt{E_p^2 - E^2}} \right). \quad (7.6)$$

Для решения задач зачастую необходимо найти величину прикладываемого электрического поля по известному значению  $p$ , что можно сделать преобразованием выражения (10.6), выразив  $E$  как функцию от  $p$ :

$$\frac{E}{E_p} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \exp \left( \frac{4p_0}{\pi^2 p} \right)}. \quad (7.7)$$

Если продолжать увеличивать напряжение на пленке холестерика выше значения, задающего критическое поле  $E_p$ , то далее можно обнаружить те же структурные преобразования, о которых говорилось при обсуждении свойств нематика: домены Капустина-Вильямса, динамическое рассеяние света. Однако поведение холестерика в электрических полях значительно сложнее нематика. Так, динамическое рассеяние обладает эффектом памяти: рассеивающее состояние холестерика, возникшее в результате наложения поля, сохраняется в течение длительного времени после снятия поля. Время памяти, т.е. сохранения рассеивающего состояния, зависит от свойств конкретного холестерика и может колебаться от минут до нескольких лет. Наложение переменного электрического поля возвращает холестерик в исходное состояние.

### **Оптические свойства жидких кристаллов**

Для понимания принципов работы оптических жидкокристаллических ячеек необходимо вспомнить раздел оптики, в котором рассматриваются особенности прохождения через оптически активный кристалл линейно поляризованного излучения с заданной ориентацией поляризации и направлением распространения излучения относительно оптической оси кристалла.

**Нематики.** Нематик является оптически одноосным кристаллом, оптическая ось которого совпадает с направлением директора. Поэтому оптические свойства планарной и гомеотропной структур различные. В ячейке с гомеотропной структурой свет распространяется вдоль оптической оси (вдоль директора), поэтому, как во всяком одноосном кристалле, в этом случае оптические характеристики ячейки не зависят от поляризации света. При падении же света на ячейку с планарной структурой прохождение света сквозь нее зависит от поляризации падающего света: без изменения поляризации в ней распространяется только свет, вектор электрической индукции в котором перпендикулярен директору.

Используя поляроидные пленки, нанесенные на опорные поверхности, можно сделать гомеотропную структуру непрозрачной для света, скрестив верхний и нижний поляроиды в оптической ячейке (рис.4). Планарная структура при таком же положении поляроидов пропускает свет, если ориентация поляроида не совпадает с направлением директора. Отсюда следует принцип, на основе которого с помощью жидкокристаллической ячейки можно отображать информацию – путем прикладываемого напряжения переводить планарную текстуру в гомеотропную и обратно. В планарной текстуре направление распространения света перпендикулярно оптической оси. Поэтому показатель преломления света различен для света, плоскость поляризации которого перпендикулярна направлению директора в слое, и света, поляризация которого содержит это направление. Знак оптической анизотропии может быть как положительным, так и отрицательным. В нематике с  $\Delta\varepsilon < 0$  фазовая скорость света, поляризованного перпендикулярно направлению директора, оказывается меньше фазовой скорости света, поляризованного в направлении директора. Переход Фредерикса, в котором при отсутствии поля нематик с  $\Delta\varepsilon > 0$ , образует планарную текстуру, а при наложении поля переходит в гомеотропную, принято называть *S*-эффектом.

В *B*-эффекте в качестве исходной ориентации используется гомеотропная, а поле переводит ее в планарную. Для этого требуется нематик с отрицательной диэлектрической анизотропией  $\Delta\varepsilon < 0$ . Для *T*-эффекта исходная планарная структура берется закрученной (ориентация молекул на одной поверхности составляет угол  $90^\circ$  относительно ориентации на другой в плоскости опорной поверхности). Приложенное поле, как и в случае *S*-эффекта, переводит планарную структуру в гомеотропную. В этом случае используются нематики с положительной анизотропией  $\Delta\varepsilon > 0$ .

**Холестерики.** Этот тип жидких кристаллов характеризуется спиральным поведением директора вдоль толщины слоя холестерика. Но с изменением направления директора изменяется диэлектрическая проницаемость. Поэтому, по толщине кристалла значение диэлектрической проницаемости периодически изменяется от  $\varepsilon_{\parallel}$  – диэлектрическая проницаемость жидкого кристалла, когда поляризация света параллельна директору, до  $\varepsilon_{\perp}$  – диэлектрическая проницаемость жидкого кристалла, когда поляризация света перпендикулярна директору. В холестерике периодом служит не шаг спирали  $p_0$ , на котором директор совершает оборот на  $2\pi$ , а  $p_0/2$ , так как ориентации директора  $\vec{n}$  и  $-\vec{n}$  эквивалентны, и период диэлектрических свойств холестерика оказывается вдвое меньше, чем расстояние, на котором директор совершает полный оборот. Поэтому оказывается, что диэлектрические свойства холестерика периодичны вдоль холестерической спирали с периодом  $d = p_0/2$ . По этой причине оптические свойства холестерика в указанном направлении можно представить как результат действия чередующихся слоев двух типов с различными значениями диэлектрической проницаемости:  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$ .



Если на такую структуру под определенным углом падения падает белый свет (т.е. излучение с широким диапазоном значений длин волн), то в отраженном свете будет иметь дифракция, полученная от оптического излучения только одной длины волны  $\lambda$  из всех. Внешне это будет выглядеть как окрас слоя холестерика в цвет длиной  $\lambda$ . Условия дифракции белого света на холестерике аналогичны условиям наблюдения хорошо известной в классической оптике дифракции Вульфа-Брэгга:

$$2 \sin \theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad (7.8)$$

где  $\theta$  - угол падения белого света на поверхность пленки холестерика, отсчитываемый от поверхности;  $m$  - целое число, показывающее порядок дифракции;  $\lambda$  - длина волны дифрагированного света;  $d$  - толщина одного слоя пленки, составленной из многих слоев. Для холестериков  $d = p/2$ . В оптических ячейках обычно используется дифракционное отражение при  $\theta = \pi/2$ , что соответствует распространению отраженного света в направлении, перпендикулярном падающему.

Шаг спирали холестерика чувствителен к внешним воздействиям. Его легко изменить, нагревая холестерик, помещая в электрическое или магнитное поле и т.д. Отсюда следует один из принципов использования холестерических кристаллов в оптоэлектронике: плавное изменение в широких пределах цвета оптической ячейки при изменении величины внешнего воздействия.

### 7.3 Примеры решения задач по определению параметров электрооптических эффектов, в том числе в жидких кристаллах

При решении ниже изложенных задач предполагается, что читателю известно решение задачи о нахождении фазовых скоростей при двулучепреломлении в классической трактовке.

**Задача 1.** Определить величину набега фазы излучения гелий-неонового лазера, падающего перпендикулярно поверхности кристалла ниобата лития длиной 1 мм под углом  $10^\circ$  к его оптической оси ось  $x_3$ . Кристалл ориентирован в стандартной установке кристаллофизической системы координат. Тензор диэлектрической проницаемости кристалла ниобата лития имеет следующие отличные от нуля численные компоненты:  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 3.89 \cdot 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_{33} = 2.57 \cdot 10^{-10}$  Ф/м.

**Решение.** Набег фазы оптического излучения можно найти по формуле:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi \cdot L}{\lambda} \cdot \left( \frac{c}{v_{\phi 1}} - \frac{c}{v_{\phi 2}} \right).$$

В данной формуле фазовые скорости обыкновенной и необыкновенной волн находят из решения характеристического уравнения при  $\eta'_{12} = 0$  (см. описание лабораторной работы по исследованию двулучепреломления в кристаллах)

$$\left(\frac{v_{\phi 1}}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\eta'_{11} + \eta'_{22}) - (\eta'_{11} - \eta'_{22})]} = \sqrt{\eta'_{22}}$$

$$\left(\frac{v_{\phi 2}}{c}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\eta'_{11} + \eta'_{22}) + (\eta'_{11} - \eta'_{22})]} = \sqrt{\eta'_{11}}.$$

Здесь компоненты тензора диэлектрической непроницаемости  $\eta'_{11}$  и  $\eta'_{22}$  вычислены в системе координат  $x'_1 x'_2 x'_3$ , связанной с направлением распространения излучения. Компоненты тензора диэлектрической непроницаемости в новой системе координат связаны с компонентами в старой (кристаллофизической) системы координат следующим образом:

$$\eta'_{11} = \eta_{11}; \quad \eta'_{22} = \eta_{22} \cdot \cos^2 \varphi + \eta_{33} \cdot \sin^2 \varphi.$$

При угле падения  $\varphi = 10^\circ$  имеем:  $\eta'_{11} = 1/\varepsilon_{11}$ ;  $\eta'_{22} \cong 0.15 \cdot (1/\varepsilon_{22}) + 0.85 \cdot 1/(\varepsilon_{33})$ . Подставив численные значения диэлектрической проницаемости получим:

$$\left(\frac{v_{\phi 1}}{c}\right) = \sqrt{\frac{8.85 \cdot 10^{-12}}{3.89 \cdot 10^{-10}}} = 10^{-1} \cdot \sqrt{2.27} = 0.15.$$

$$\left(\frac{v_{\phi 2}}{c}\right) = \sqrt{\frac{0.25}{\varepsilon_{11}} + \frac{0.75}{\varepsilon_{33}}} = \sqrt{0.25 \cdot \frac{8.85 \cdot 10^{-12}}{3.89 \cdot 10^{-10}} + 0.75 \cdot \frac{8.85 \cdot 10^{-12}}{2.57 \cdot 10^{-10}}} =$$

$$= 10^{-1} \cdot \sqrt{0.25 \cdot 2.27 + 0.75 \cdot 3.44} = 10^{-1} \cdot \sqrt{0.57 + 2.58} = 10^{-1} \cdot \sqrt{3.15} = 0.18.$$

Тогда набег фазы в градусах на миллиметровой длине будет

$$\delta\varphi = \frac{L}{\lambda} \cdot \left( \frac{c}{v_{\phi 1}} - \frac{c}{v_{\phi 2}} \right) = \frac{1}{0.64 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.03 \cong 4.7 \cdot 10^2 \text{ градуса.}$$

**Задача 2.** Определить величину минимального напряжения, которое необходимо приложить к слою нематика для получения перехода Фредерикса в нем, если известно, что величина оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 4.2$ , а модуль упругости  $K = 1.7 \cdot 10^{-6}$  дин.

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся выражением (7.1)

$$V_c = \pi \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Будем решать задачу в системе СГСЕ, а полученный результат переведем в систему СИ. Подстановка в данное выражение численных значений параметров жидкого кристалла дает величину напряжения перехода Фредерикса:

$$V_c = 3.14 \sqrt{\frac{4 \cdot 3.14 \cdot 1.7 \cdot 10^{-6}}{4.2}} = 3.14 \sqrt{\frac{21.4}{4.2} \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 3.14 \sqrt{5.1} \cdot 10^{-3} \approx 7.1 \cdot 10^{-3} \text{ ед. СГСЕ.}$$

Для перевода единиц СГСЕ в систему СИ воспользуемся переводным коэффициентом:  $1 \text{ В} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ ед. СГСЕ}$ . Поэтому окончательное значение критического значения напряжения, начиная с которого совершается переход Фредерикса, равно около  $2.4 \text{ В}$ .

**Задача 3.** Определить величину электрической когерентной длины в нематическом жидком кристалле МББА, имеющего значения диэлектрической проницаемости перпендикулярно и параллельно длинной оси  $\varepsilon_{\perp} = 5.4$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = 4.7$  соответственно, коэффициент упругости  $K = 5 \cdot 10^{-6} \text{ дин}$ , если к нематику приложено электрическое поле величиной  $E = 3 \cdot 10^1 \text{ ед. СГСЕ}$ .

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся выражением (7.2)

$$\lambda_k = \frac{1}{E} \left( \frac{4\pi K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Подставим в это выражение численные значения параметров жидкого кристалла и величину приложенного электрического поля, тогда получим:

$$\lambda_k = \frac{1}{3 \cdot 10^1} \sqrt{\frac{4 \cdot 3.14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{0.7}} = \frac{9.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^1} \approx 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Таким образом, ответ на поставленный вопрос таков: при заданном электрическом поле в нематическом жидком кристалле МББА электрическая когерентная длина равна  $3.2 \text{ мкм}$ .

**Задача 4.** Определить величину электрического поля, при котором распрямляется холестерическая спираль жидкого кристалла, если известно, что величина оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 4.2$ , шаг холестерической спирали в отсутствие электрического поля составлял  $p_0 = 0.50 \text{ мкм}$ , а модуль упругости равен  $K = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ дин}$ .

**Решение.** Для решения этой задачи воспользуемся выражением (7.3)

$$E_p = \left( \frac{\pi^2}{2p_0} \right) \cdot \left( \frac{4\pi \cdot K}{\Delta\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Решая задачу в системе СГСЕ, выразим шаг холестерической спирали в сантиметрах:

$$p_0 = 0.50 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Подставим в исходное выражение параметры холестерика, тогда получим:

$$E_p \approx \frac{10}{2.5 \cdot 10^{-5}} \cdot \sqrt{5.1} \cdot 10^{-3} = 2.4 \cdot 10^2 \text{ ед. СГСЕ.}$$

Переведем полученный результат в систему СИ, разделив его на переводной коэффициент  $3 \cdot 10^{-3}$ . Ответ на поставленный вопрос: величина распрямляющего холестерическую спираль электрического поля равна  $8 \cdot 10^4$  В/см.

**Задача 5.** Определить величину электрического поля, которое необходимо приложить к холестерическому жидкому кристаллу для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка сменила свой цвет с желтого на красный. Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 4.2$ , а модуль упругости равен  $K = 1.7 \cdot 10^{-6}$  дин.

**Решение.** Как указано в теоретической части данного раздела белый свет дифрагирует на многих слоях, образованных параллельной и перпендикулярной ориентацией директора, и потому при перпендикулярном падении света пленка приобретает цвет, длина волны которого удовлетворяет условию (7.8) при  $\theta = \pi/2$ . Следовательно, данная задача направлена на определение шага холестерической спирали при действии внешнего электрического поля. По условию задачи изменение шага спирали соответствует условию  $p > 1.05 \cdot p_0$ . Поэтому для решения воспользуемся выражением (7.7):

$$\frac{E}{E_p} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{4p_0}{\pi^2 p}\right)},$$

где  $E_p$  - электрическое поле, полностью распрямляющее спираль холестерика. В данном выражении известны все параметры, входящие в его правую часть:  $p_0 = 0.55$  мкм, что соответствует желтому цвету, и  $p = 0.64$  мкм соответствует красному цвету. Подставляя значения шага спирали до действия поля и при его наличии, получим

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_p} &\approx \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{4 \cdot 0.55}{10 \cdot 0.64}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{2.2}{6.4}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(0.34)} \approx \\ &\approx \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot 1.4} = \sqrt{0.3} \approx 0.55. \end{aligned}$$

Взяв из предыдущей задачи значение критического электрического поля  $E_p \approx 8 \cdot 10^4$  В/см, найдем требуемое электрическое поле:

$$E \approx 0.55 \cdot E_p = 0.55 \cdot 8 \cdot 10^4 = 4.4 \cdot 10^4 \text{ В/см.}$$

Таким образом, ответ на поставленный в задаче вопрос таков: для изменения цвета пленки холестерика от желтого до красного необходимо перпен-

дикулярно её поверхности приложить электрическое поле величиной  $4.4 \cdot 10^4$  В/см.

### 7.3 Варианты заданий по определению параметров жидкокристаллических приборов

1. Определить величину минимального напряжения, которое необходимо приложить к слою нематика МББА для получения перехода Фредерикса в нем, если известно, что величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей при температуре  $22^0\text{C}$  равны  $\varepsilon_{\parallel} = 4.7$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 5.4$ , соответственно, а модуль упругости  $K = 5.0 \cdot 10^{-6}$  дин.
2. Определить величину минимального напряжения, которое необходимо приложить к слою нематика ПАА для получения перехода Фредерикса в нем, если известно, что величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей при температуре  $120^0\text{C}$  равны  $\varepsilon_{\parallel} = 4.5$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 4.8$ , соответственно, а модуль упругости  $K = 9.3 \cdot 10^{-7}$  дин.
3. Определить величину минимального напряжения, которое необходимо приложить к слою нематика для получения перехода Фредерикса в нем, если известно, что величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей при температуре  $27^0\text{C}$  равны  $\varepsilon_{\parallel} = 3.4$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 4.9$ , соответственно, а модуль упругости  $K = 7.8 \cdot 10^{-7}$  дин.
4. Определить величину модуля упругости нематика, если известно, что величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей при температуре  $143^0\text{C}$  равны  $\varepsilon_{\parallel} = 5.7$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 3.4$ , соответственно, а напряжение перехода Фредерикса в нем составляет  $1.4\text{ В}$ .
5. Какую оптическую ячейку на основе пленки нематика МББА необходимо использовать для создания затвора оптического излучения на эффекте Фредерикса, если известно, что параметры вещества таковы: величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей равны  $\varepsilon_{\parallel} = 4.7$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 5.4$ , соответственно, а модуль упругости  $K = 5.0 \cdot 10^{-6}$  дин. Опишите конструкцию (планарная или гомеотропная топология, есть ли поляризаторы и отражающие пленки, их расположение) и работу этой ячейки.

6. Какую оптическую ячейку на основе пленки нематика необходимо использовать для создания устройства отображения информации на эффекте Фредерикса, если известно, что параметры вещества таковы: величины диэлектрической проницаемости этого вещества вдоль оси молекулы и перпендикулярно ей равны  $\varepsilon_{\parallel} = 5.7$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 4.4$ , соответственно, а модуль упругости  $K = 7.3 \cdot 10^{-7}$  дин. Опишите конструкцию (планарная или гомеотропная топология, есть ли поляризаторы и отражающие пленки, их расположение) и работу этой ячейки.
7. Определить величину электрической когерентной длины в нематическом жидком кристалле, имеющем значения диэлектрической проницаемости перпендикулярно и параллельно длинной оси  $\varepsilon_{\perp} = 4.4$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = 4.7$ , коэффициент упругости  $K = 3.1 \cdot 10^{-6}$  дин, если к нематику приложено электрическое поле величиной  $E = 2.8 \cdot 10^1$  ед. СГСЕ.
8. Определить в СИ величину приложенного электрического поля к пленке нематического жидкого кристалла, имеющем значения диэлектрической проницаемости перпендикулярно и параллельно длинной оси  $\varepsilon_{\perp} = 4.4$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = 4.7$ , коэффициент упругости  $K = 3.1 \cdot 10^{-6}$  дин, если в этом случае электрическая когерентная составляет  $5.7$  мкм.
9. Определить величину анизотропии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла, имеющем коэффициент упругости  $K = 4.3 \cdot 10^{-7}$  дин, если при приложении электрического поля величиной  $E = 2.8 \cdot 10^1$  ед. СГСЕ электрическая когерентная длина в этом нематике составляет  $6.8$  мкм.
10. Определить величину анизотропии диэлектрической проницаемости нематического жидкого кристалла, имеющем коэффициент упругости  $K = 2.3 \cdot 10^{-6}$  дин, если при приложении электрического напряжения величиной  $V = 2.8$  В к пленке толщиной  $d = 10$  мкм электрическая когерентная длина в этом нематике составляет  $7.9$  мкм.
11. Определить величину электрического поля, при котором распрямляется холестерическая спираль жидкого кристалла, если известно, что величина его оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 3.6$ , шаг холестерической спирали в отсутствие электрического поля составляет  $p_0 = 0.45$  мкм, а модуль упругости равен  $K = 9.4 \cdot 10^{-7}$  дин.
12. Определить шаг холестерической спирали  $\rho$  при действии на пленку холестерика электрического поля  $E = 3 \cdot 10^3$  ед. СГСЕ, если известно, что величина его оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 3.1$ , шаг холестерической

спирали в отсутствие электрического поля составляет  $p_0 = 0.45$  мкм, модуль упругости равен  $K = 9.4 \cdot 10^{-7}$  дин. Рассматривать случай сильных полей.

13. Определить величину электрического поля, при котором распрямляется холестерическая спираль жидкого кристалла, если известно, что величина оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 1.9$ , шаг холестерической спирали в отсутствие электрического поля составлял  $p_0 = 0.42$  мкм, а модуль упругости равен  $K = 6.4 \cdot 10^{-6}$  дин.
14. Определить шаг холестерической спирали  $p$  при действии на пленку холестерика электрического поля  $E = 2.7 \cdot 10^3$  ед. СГСЕ, если величина оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 3.1$ , шаг холестерической спирали в отсутствие электрического поля составляет  $p_0 = 0.45$  мкм, модуль упругости равен  $K = 9.4 \cdot 10^{-7}$  дин. Рассматривать случай сильных полей.
15. Определить величину электрического поля, которое необходимо приложить к холестерическому жидкому кристаллу для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка сменила свой цвет с синего (длина волны  $0.40$  мкм) в отсутствие электрического поля на красный (длина волны  $0.64$  мкм). Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 3.1$ , а модуль упругости равен  $K = 6.4 \cdot 10^{-6}$  дин. Рассматривать случай сильных полей.
16. Определить на какую величину необходимо изменить приложенное к пленке холестерика постоянное электрическое поле для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка с  $p_0 = 0.34$  мкм сменила свой цвет с синего (длина волны  $0.40$  мкм) на красный (длина волны  $0.64$  мкм). Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 3.1$ , а модуль упругости равен  $K = 6.4 \cdot 10^{-6}$  дин. Рассматривать случай сильных полей.
17. Определить шаг холестерической спирали  $p$  при действии на пленку холестерика электрического поля  $E = 2.9 \cdot 10^3$  ед. СГСЕ, если величина оптической анизотропии  $\Delta\varepsilon = 2.7$ , шаг холестерической спирали в отсутствие электрического поля составляет  $p_0 = 0.52$  мкм, модуль упругости равен  $K = 8.3 \cdot 10^{-7}$  дин.
18. Определить величину электрического поля, которое необходимо приложить к холестерическому жидкому кристаллу для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка сменила свой цвет с голубого (длина волны  $0.45$  мкм) в

отсутствие электрического поля на зеленый (длина волны  $0.50 \text{ мкм}$ ). Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 2.8$ , а модуль упругости равен  $K = 5.7 \cdot 10^{-6}$  дин.

19. Определить на какую величину необходимо изменить приложенное к пленке холестерика постоянное электрическое поле для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка с  $p_0 = 0.25 \text{ мкм}$  сменила свой цвет с голубого (длина волны  $0.45 \text{ мкм}$ ) на желтый (длина волны  $0.55 \text{ мкм}$ ). Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 3.1$ , а модуль упругости равен  $K = 6.4 \cdot 10^{-6}$  дин.
20. Определить на какую величину необходимо изменить приложенное к пленке холестерика постоянное электрическое поле для того, чтобы при перпендикулярном падении белого света в отраженном свете изготовленная из него пленка с  $p_0 = 0.34 \text{ мкм}$  сменила свой цвет с фиолетового (длина волны  $0.35 \text{ мкм}$ ) на оранжевый (длина волны  $0.60 \text{ мкм}$ ). Считать, что величина оптической анизотропии кристалла  $\Delta\varepsilon = 1.8$ , а модуль упругости равен  $K = 8.4 \cdot 10^{-7}$  дин.



## 9 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Епифанов Ю.И. Физические основы микроэлектроники. – М.: Высшая школа, 1971. – 388 с.
2. Шалимова К.В. Физика полупроводников. – М.: Энергия. - 1991, - 416 с.
3. Жеребцов И.П. Основы электроники. – Л-д: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
4. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. Том 1,2. Пер. с англ. под ред. Р.А. Суриса. – М.: Мир – 1984. – 453 с.
5. Мосс Т., Баррел Г., Элис Б. Полупроводниковая оптоэлектроника. – М.: Мир, 1976. - 430 с.
6. Панков Ж. Оптические переходы в полупроводниках. – М.: Мир, 1973. - 393 с.
7. Берг А., Дин П. Светодиоды. Пер с англ. – М.: 1973, -88 с.
8. Шарма Б.Л., Пурохит Р.К. Полупроводниковые гетеропереходы. Пер. с англ. Под ред. Ю.В. Гуляева. – М.: Сов. Радио, 1979. – 227 с.
9. Шуберт Ф. Светодиоды. М.: Мир. – 2008. – 498 с.
10. Ван дер Зил. Шумы. Источники, описание, измерение. – Пер. с англ. под ред. Нарышкина А.К. - М.: Советское радио. - 1973. – 225с.
11. Дж.М. Мартинес-Дуард, Р.Дж.Мартин-Палма, Ф. Агулло-Руеда. Нанотехнологии для микро- и оптоэлектроники. Мир материалов и технологий. – Пер. с англ. под ред. Е.Б. Якимова. – М.: Техносфера. – 2007. – 367 с.
12. Пикин С.А., Блинов Л.М. Жидкие кристаллы.– М.: Наука, 1982.

**10 СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ  
ПО ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ МАТЕРИАЛАМ**

№	Параметры материала	Кремний	Германий	Арсенид галлия
1.	Ширина запрещенной зоны при T=300 К, эВ	1.12	0.66	1.4
2.	Число атомов в 1 см <sup>3</sup>	$5 \cdot 10^{22}$	$4.4 \cdot 10^{22}$	$2.2 \cdot 10^{22}$
3.	Относительная диэлектрическая проницаемость	11.7	16.0	12.5
4.	Собственная концентрация носителей при T=300 К, см <sup>-3</sup>	$1.4 \cdot 10^{10}$	$2.4 \cdot 10^{13}$	$1.4 \cdot 10^8$
5.	Подвижность электронов при T=300 К, см <sup>2</sup> /м · с	1450	3900	8000
6.	Подвижность дырок при T=300 К, см <sup>2</sup> /м · с	480	1900	500
7.	Время жизни электронов, с	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$
8.	Время жизни дырок, с	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$
9.	Эффективная масса электрона, $m_0$ - тяжелых электронов - легких электронов	0.97 0.19	1.58 0.082	0.068
10.	Эффективная масса дырок, $m_0$ - легких дырок - тяжелых дырок	0.16 0.5	0.04 0.3	0.12 0.5
11.	Время излучательной рекомбинации, с	$1.54 \cdot 10^4$	0.61	0.009
12.	Сродство к электрону, эВ	4.05	4.0	4.07
13.	Работа выхода, эВ	4.8	4.4	4.7