Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Б.А. Люкшин
Н.Ю. Гришаева

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания для практических и самостоятельных работ
для студентов технических направлений подготовки и специальностей
всех форм обучения

Томск
2023

УДК 531/534
ББК 22.2
П759

Рецензент:
Уцын Г.Е., доцент кафедры механики и графики ТУСУР, канд. физ.-мат. наук

Люкшин, Борис Александрович
Прикладная механика: методические указания для практических и самостоятельных работ для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения / Б. А. Люкшин, Н. Ю. Гришаева., – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023. – 47 с.

Изложены сведения, необходимые для решения задач по основным разделам прикладной механики: задачи из раздела статика теоретической механики, задачи и курса сопротивления материалов на растяжение-сжатие, срез-смятие, температурные напряжения. Приведены основные способы решения задач по указанным разделам курса, а также примеры решения типовых задач, сопровождаемые методическим указаниями.
Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям всех форм обучения.

Одобрено на заседании кафедры механики и графики, протокол №161 от 17.10.2023

УДК 531/534
ББК 22.2

Содержание

Введение

Прикладная механика представляет собой в известном смысле синтез дисциплин, которые традиционно читаются как отдельные курсы для студентов механических и механико-математических специальностей. Это раздел статика из теоретической механики, вопросы из теории упругости и сопротивления материалов, разделы из материаловедения, теории машин и механизмов и т.д. Поэтому содержание курса прикладной механики, читаемого в вузах для будущих специалистов, может значительно варьироваться. Во многом оно определяется специальностями, по которым готовятся инженеры (бакалавры, магистры), объемом часов, их распределением в учебных планах и т.д.

Теоретическая часть курса воспринимается, как показывает опыт преподавания прикладной механики, достаточно успешно. Сведения, излагаемые на лекциях, базируются на привычных представлениях из школьного и вузовского курсов физики и сопровождаются несложными, как правило, доказательствами. Краткое изложение теоретических вопросов прикладной механики по разделу статика можно найти в учебном пособии [1], по другим разделам в [2]. Что касается решения задач, то здесь требуется известный опыт, приобретаемый либо в общении с преподавателем, либо с помощью подробных практических руководств, или учебно-методических пособий.

Такого рода пособия существуют, но они либо малодоступны, т.к. давно переиздавались, либо настолько объемны, что практически невозможно использовать их для самостоятельной работы, если учесть весьма ограниченное количество часов, отводимое для курса прикладной механики по направлениям подготовки специалистов в ТУСУРе. Например, решение задач по статике можно найти в учебных пособиях [3, 4], объем которых составляет 672 с. и 416 с. соответственно.

В этом отношении настоящее учебно-методическое пособие выгодно отличается в том отношении, что при относительно малом объеме в нем нашли отражение способы и методы решения типовых задач, решаемых на практических занятиях и в контрольных работах в курсе прикладная механика, читаемом в ТУСУРе.

Эти задачи по разделу статика взяты из классического задачника Мещерского И.В. [5] по теоретической механике, первое издание которого датируется 1914 годом, т.е. более 109 лет назад. Современные издания этого задачника отличаются лишь тем, что в них заменены экзотические на наш взгляд размерности, например, длины (*аршин, сажень, верста* и т.п.) и массы / веса (*пуды, фунты, золотники* и т.п.) на принятые в системе СИ *м* и *кг/Н*, но в основе своей содержание задачника осталось прежним. Представляется, что такое «долгожительство» задачника является уникальным.

Задачи из раздела по сопротивлению материалов в большинстве своем приведены из работы Беляева Н.М. [6].

Часть задач являются оригинальными. Далее при изложении материала ссылки на источники не приводятся.

Можно рекомендовать следующую последовательность решения задач. Так, для задач из раздела статика она выглядит следующим образом.

1. Изображается расчетная схема. Как правило, такая схема есть в условии задачи.
2. На схеме показывают все заданные (активные) силы, и искомые (например, реакции связей). Когда направления реакции неизвестны, рисуются составляющие реакций вдоль осей.
3. Рассматривается вся система сил, приложенных к телу, в том числе и реакции связей, и составляется для этой системы условия равновесия. Можно это делать в векторном виде, но, как правило, проще и удобнее для решения записать эти условия в аналитическом виде – через проекции всех сил на оси выбранной системы координат. Число уравнений

должно равняться числу неизвестных. В плоском случае в задачах статики твердого тела неизвестных может быть не более трех.

4. После определения всех неизвестных сил анализируется решение – при правильно выбранных направлениях неизвестных (до решения) реакций знаки полученных реакций положительны. В противном случае направления составляющих реакций противоположны направлениям, выбранным нами. Не нужно вносить изменения в чертеж или ответ: знаки в ответе получились в соответствии с выбранными и показанными на схеме направлениями, и при анализе полученных результатов это сразу понятно.

5. Когда в задачнике приведен ответ, достаточно сверить с ним полученный результат.

Можно рекомендовать приемы для проверки решения, когда ответ заранее неизвестен**.** **Во-первых**, следует проверить размерность полученной величины. Разумеется, совпадение с нужным значением является лишь необходимым, но недостаточным условием правильности решения. Но несовпадение однозначно говорит об ошибке. **Во-вторых**, во многих случаях есть возможность проверить асимптотические, или предельные, случаи. В таких случаях решение, как правило, является тривиальным (очевидным), и из более общего полученного решения предельное значение должно получаться. **Наконец**, результат решения должен быть физически оправдан, согласован со здравым смыслом, не быть абсурдным. Например, при решении задачи, где требуется найти размер образца для испытаний на растяжение-сжатие, не может быть результат в мкм или км; при нахождении центра тяжести тела координаты этого центра не должны выглядеть абсурдными, и т.д.

Ниже при решении конкретных задач все эти правила и рекомендации будут иллюстрироваться.

1 СТАТИКА

1.1 Законы и аксиомы статики. Определения

1. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу (АТТ), уравновешиваются в случае, когда они равны по величине и противоположно направлены вдоль одной линии. Такие силы называются **уравновешенными**.

Силы, с которыми **два разных тела** действуют друг на друга, тоже равны по величине и противоположны по направлению – это так называемый третий закон Ньютона, известный из школьного курса физики. **Но эти силы не уравновешивают друг друга, т.к. приложены к разным телам**.

2. Уравновешенные силы можно добавлять к АТТ или отбрасывать, не нарушая равновесие тела.

Два этих утверждения представляют собой аксиомы статики.

***Связью** называется то, что ограничивает движение тела в определенных направлениях.*

Обычно связи как таковые в задачах не рассматриваются. Их действие заменяется соответствующими силами и/или моментами – реакциями связей. В соответствии с этим все нагрузки делятся на две группы: активные (задаваемые условием задачи) и реакции связей.

Несвободное твердое тело (т.е. такое, на которое наложены связи) можно рассматривать как свободное, если ввести в рассмотрение вместо связей соответствующие силы – реакции связей.

1.2 Определение реакций связей

Как и любая сила, реакция связи характеризуется величиной, точкой приложения и направлением. Во многих случаях эти характеристики должны определяться в ходе решения задачи. Иногда направление можно определить заранее, а величину следует находить из решения.

Если связью служит гладкая поверхность (не обязательно плоская), то по определению гладкой поверхности (по которой скольжение происходит без трения), она может воздействовать на любое тело только **вдоль нормали к поверхности в точке касания.** Поэтому, если в условии задачи речь идет о **гладкой** поверхности, то направление реакции со стороны поверхности на любое тело, движущееся по этой поверхности или находящееся на ней в покое, определяется сразу – вдоль нормали к поверхности.

Реакция **цилиндрического шарнира** может быть направлена **в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, в любом направлении.**

Реакция **сферического** шарнира может быть направлена **в любом направлении в пространстве.**

Реакция **нити**, **каната, троса, цепи** и других связей, которые могут работать только на растяжение, всегда направлена **к точке подвеса**.

Реакция шарнирно опертого по концам **стержня** может быть направлена по определению только **вдоль стержня**, то есть стержень сопротивляется только растяжению или сжатию.

Когда направление реакции связи (силы) не определяется ее характером из физических (механических) представлений, обычно поступают следующим образом. Считают, что в месте ее приложения можно представить реакцию связи – как и любой другой вектор – в виде проекций на оси системы координат. Включая эти составляющие реакции в уравнения равновесия как неизвестные, определяем их, и после этого можно определить полную реакцию связи. При проецировании на оси системы координат нужно учитывать выбранные нами направления реакций связей на расчетной схеме. Если после расчетов получились отрицательные значения каких-либо составляющих, это просто означает, что для этих составляющих мы взяли неудачные направления на схеме, и на самом деле реакция действует противоположно выбранному нами направлению.

1.3 Плоская система сил

Система сил называется плоской, если линии их действия лежат в одной плоскости. В этом случае при составлении уравнений равновесия следует использовать плоскую систему координат. Эта система может быть произвольной, на практике чаще всего используются декартовы координаты.

Главный вектор плоской системы сил лежит в той же плоскости, и у него есть две проекции на оси системы координат.

Относительно любого центра момент каждой из сил может быть направлен либо против часовой стрелки (положительный), либо по часовой стрелке (отрицательный). Знаки момента являются данью традиции и «договоренности», когда все угловые величины считаются положительными при их направлении против часовой стрелки. Соответственно вектор момента направлен вдоль или против оси Z, дополняющей систему осей X, Y до пространственной. Проекция момента может быть положительной или отрицательной, поэтому в плоском случае используется понятие вектора-момента как алгебраической величины.

В общем (пространственном) случае равновесие тела требует выполнения шести уравнений в проекциях (три проекции главного вектора и три проекции главного момента на оси системы координат должны быть равны нулю).

В плоском случае остается два уравнения в проекциях главного вектора и одно уравнение для главного момента, т.е. **три уравнения** (так называемая основная форма условий равновесия).

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.1

На гладкой горизонтальной поверхности стоит цилиндр весом P, вертикально вниз на него действует сила Q, линия действия которой направлена по оси. Найти давление N цилиндра на плоскость.

Решение

В этой задача цилиндр находится в равновесии потому, что сила тяжести P и дополнительная сила Q уравновешиваются реакцией опоры N. Когда в условии говорится «гладкая» поверхность, это означает, что нет сил трения, а реакция опоры может быть направлена только по нормали к ней, в данном случае вверх. Выбирая для вертикальной оси направление вверх за положительное, получим

$$N - P - Q = 0, \text{ или } \quad N = P + Q. \qquad (1.1)$$

Пример 1.2.

На гладкой наклонной поверхности, образующей угол α с горизонтальной поверхностью, груз **P** удерживается нитью, параллельной наклонной поверхности. Найти давление груза на поверхность и натяжение нити.

Решение

В этом примере на груз действуют сила тяжести **P** и две реакции – нити **T** и реакция опоры **N**. Направления этих реакций определяются сразу: для гладкой поверхности, как и в предыдущем примере, реакция опоры направлена по нормали к ней, а реакция нити может быть направлена только вдоль нити в сторону ее закрепления.

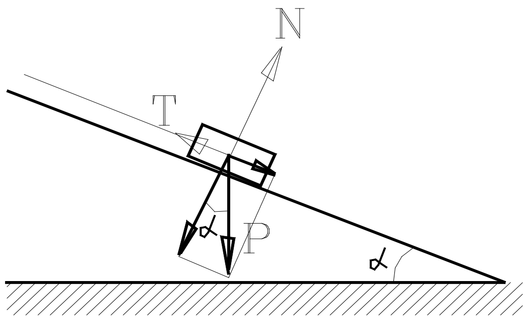

Рисунок 1.1

Сила тяжести может быть разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие, в данном случае по нормали к поверхности и вдоль нее. Тогда реакция плоскости равна нормальной составляющей, а натяжение нити – касательной, причем в силу ортогональности этих направлений проекции реакций не влияют друг на друга. И так:

$$T = P\cdot\sin\alpha, \quad N = P\cdot\cos\alpha. \qquad (1.2)$$

Проверка

Размерности найденных величин T и N совпадают с заданной размерностью P. Предельный случай при $\alpha = 0$ дает значения $T = 0$, $N = P$ – довольно очевидные величины, в этом случае реакция опоры уравновешивает давление груза, натяжения нити нет. Второй вариант $\alpha = \pi/2$ дает $T = P$, $N = 0$ – тоже ожидаемые значения. Груз висит и держится на нити, на плоскость давления нет.

1.4 Разложение сил по заданным направлениям

В рассмотренном примере 1.2 сила тяжести относительно просто представляется ее составляющими вдоль двух ортогональных направлений. Однако очень часто встречаются ситуации, когда разложение необходимо сделать вдоль двух произвольных направлений. По существу это означает, что по известной диагонали параллелограмма и заданным направлениям его сторон нужно построить сам параллелограмм. Такого рода разложения необходимо строить в задачах, когда, например, необходимо найти усилия в двух стержнях или нитях, на которых подвешен груз.

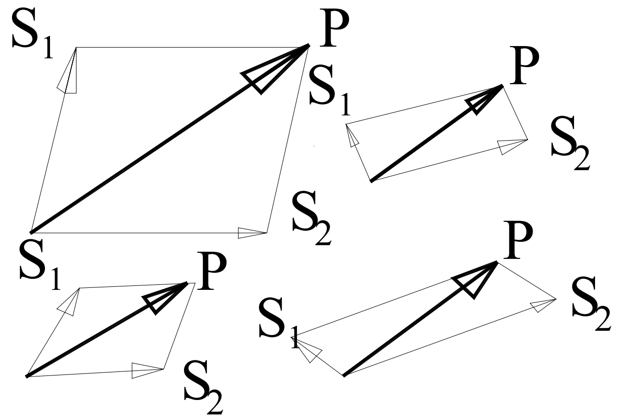

Рисунок 1.2

На рисунке 1.2 приведены примеры разложения вектора P вдоль двух произвольных (непараллельных) направлений на составляющие S_1 и S_2.

Пример 1.3.

Груз P висит на двух тросах, образующих с горизонталью углы α и β. Найти натяжения тросов.

Решение

Разложим вектор силы тяжести P на составляющие, направленные вдоль тросов – величины S_1 и S_2.

Рассмотрим два способа решения такого типа задач.

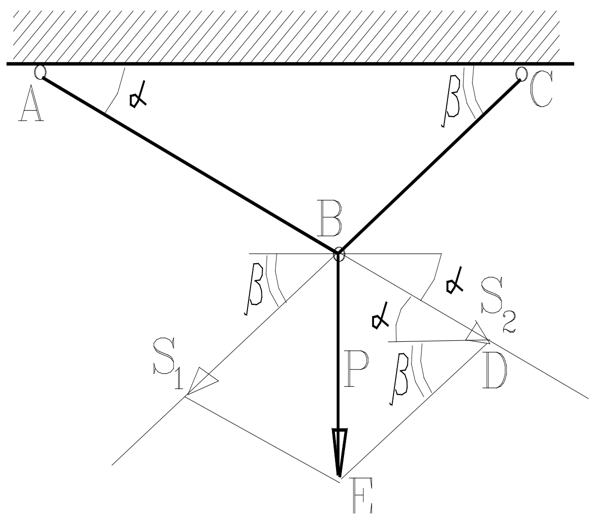

Рисунок 1.3

1 способ.

Величины P, S_1, S_2 образуют систему сходящихся сил – они все проходят через точку B. Для равновесия системы необходимо, чтобы силовой многоугольник был замкнут, т.е. из векторов P, S_1, S_2 можно построить треугольник BDE. Но из теоремы синусов для этого треугольника следует

$$\frac{BE=P}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{DE=S_1}{\cos\alpha}=\frac{BD=S_2}{\cos\beta} \qquad (1.3)$$

Отсюда

$$S_2=\frac{P\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad S_1=\frac{P\cdot\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (1.4)$$

2 способ.

Проецируем силы на горизонтальную и вертикальную оси, и суммируем соответствующие проекции, причем при равновесии эти суммы равны нулю. Получаем

$$\begin{aligned} &S_2\cdot\cos\alpha-S_1\cdot\cos\beta=0,\\ &S_2\cdot\sin\alpha+S_1\cdot\sin\beta=P. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Решение этой системы дает тот же результат, что и ранее.

Проверка

Размерности усилий совпадают с размерностью веса P.

Предельный случай, например, $\alpha = \pi/2$, дает $S_1 = 0$, $S_2 = -P$, что вполне очевидно – вся нагрузка приходится на левый трос. Если же $\beta = \pi/2$, то нагрузку несет полностью правый трос, $S_1 = -P$, второй не нагружен, $S_2 = 0$.

Пример 1.4.

В точке O твердого тела приложены четыре силы, направления которых указаны на рисунке, при этом величины сил: $F_1 = 2$ Н, $F_2 = F_3 = 4$ Н, $F_4 = 6$ Н. Найти величину и направление силы P, которую нужно приложить в точке O, чтобы тело было в равновесии.

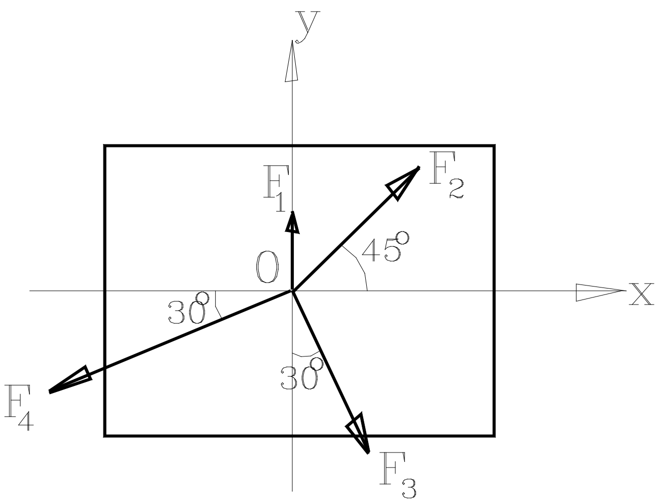

Рисунок 1.4

Решение

Найдем равнодействующую R этой системы сходящихся сил с помощью проецирования всех их на оси системы координат. Получим

$$\begin{aligned} &R_x=F_1\cos 90^\circ+F_2\cos 45^\circ+F_3\cos 60^\circ-F_4\cos 30^\circ=-0{,}37(H),\\ &R_y=F_1\sin 90^\circ+F_2\sin 45^\circ-F_3\sin 60^\circ-F_4\sin 30^\circ=-1{,}64(H). \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Модуль вектора R будет определен по теореме Пифагора R = 1,68 (Н). Направление вектора можно определить углами

$$\cos\alpha_x = R_x / R = -0,37/1,68 = -0,22,$$
$$\cos\alpha_y = R_y / R = -1,64/1,68 = -0,98. \qquad (1.7)$$

Уравновешивающая сила будет иметь такую же величину, но направлена в противоположном направлении P = -R.

Пример 1.5.

Найти усилия в стержнях при известных *P, Q* и углах *α, β, γ*.

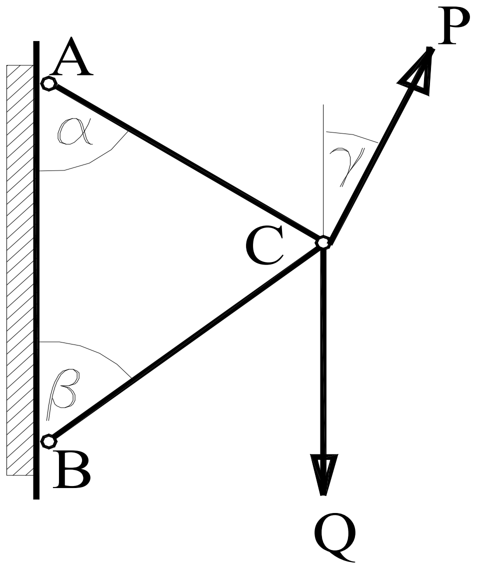

Рисунок 1.5

Решение

Рассмотрим вариант решения, когда сила P отсутствует.

На схеме кружочки на концах стержней в точках A, B, C означают шарнирные соединения, т.е. стержни AC и BC работают на растяжение или сжатие.

Дополним схему изображениями неизвестных усилий. Теоретически эти усилия направлены вдоль стержней в любую сторону. Когда стержневая система (ферма) является сложной, состоящей из большого числа стержней, принято правило: при рассмотрении равновесия любого узла усилия в стержнях направляются от узла. Тогда при расчете усилие со знаком плюс означает, что стержень растянут, со знаком минус – сжат. Здесь рассматривается равновесие узла C, и в верхнем стержне усилие направлено от точки C к точке A, в нижнем – от точки C к точке B.

В данном примере понятно, что стержень AC растянут. В самом деле, его можно заменить гибкой связью (цепь, ремень, канат и т.п.), и подвеска ABC будет работать. Если же заменить стержень BC гибкой связью, то под действием груза Q эта связь сложится, т.е. стержень BC работает на сжатие. После решения задачи нужно проверить знаки усилий – в стержне AC должны быть положительные (растягивающие) усилия, в стержне BC – отрицательные (сжимающие).

В проекции на ось *Ox*:

$$-S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\beta = 0, \qquad (1.8)$$

а на ось *Oy*:

$$S_1\cos\alpha - S_2\cos\beta - Q = 0 \qquad (1.9)$$

Решаем эту систему относительно неизвестных S_1 и S_2. Получим

$$S_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad S_2 = -\frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \qquad (1.10)$$

Проверка

С размерностью и знаками усилий все верно.

При α = 0, т.е. когда верхний стержень ориентирован вдоль стенки AB, из решения следует $S_1 = P$, $S_2 = 0$, т.е. вся растягивающая нагрузка приходится на верхний стержень AC. Если β = 0, т.е. нижний стержень ориентирован вдоль стенки, получим $S_1 = 0$, $S_2 = -P$, и нижний стержень держит вес P, будучи сжатым.

1.5 Произвольная плоская система сил. Случай параллельных сил

Если две силы параллельны и направлены в одну сторону, то их равнодействующая по величине равна сумме этих сил и направлена в ту же сторону. При этом линия действия равнодействующей делит расстояние между линиями действия исходных сил обратно пропорционально этим силам.

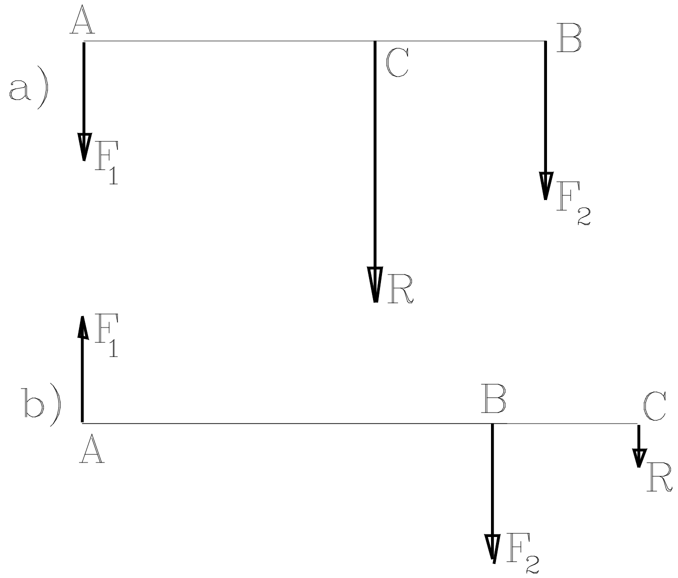

Рисунок 1.6

Если параллельные силы направлены в разные стороны, то равнодействующая направлена в сторону большей силы, а линия ее действия делит внешним образом расстояние между линиями действия исходных сил на части, обратно пропорциональные этим силам.

Таким образом, в первом случае (вариант, а на схеме выше)

$$R = F_1 + F_2, \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \qquad (1.11)$$

а во втором (вариант b):

$$R = F_2 - F_1, \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \qquad (1.12)$$

Известно, что любая система сил приводится к главному вектору и главному моменту. При этом главный вектор не зависит от точки приведения (от центра приведения), а главный момент зависит.

Система двух параллельных сил, равных по величине и направленных в разные стороны, называется парой сил. Пара оказывает на твердое тело **только вращающее действие**. Это действие не зависит от расположения пары – поэтому вектор момента пары называется свободным – его можно произвольно переносить и поворачивать в плоскости действия пары. Расстояние между силами пары называется плечом пары.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.6.

Горизонтальная однородная балка весом P = 2 кН нагружена двумя сосредоточенными вертикальными силами $F_1 = 4$ кН и $F_2 = 6$ кН и моментом $m = 4 \cdot a$ кН·м. Найти реакции опор A и B для случая расположения сил в соответствии со схемой.

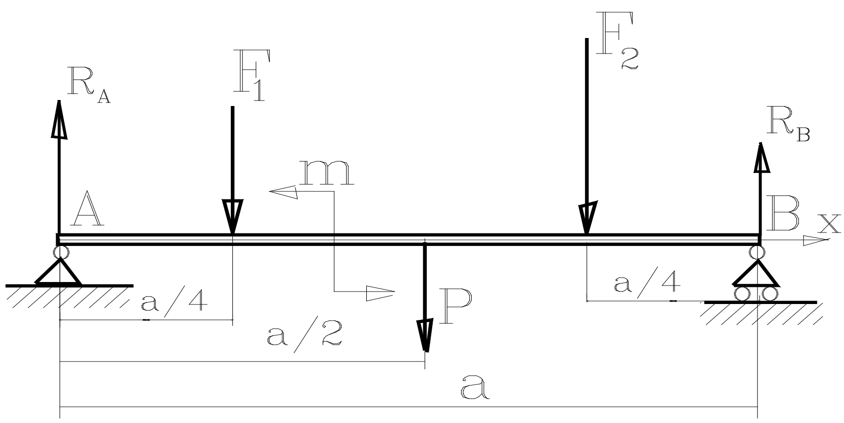

Рисунок 1.7

Решение

Термин «однородная» в данном случае означает, что вес балки равномерно распределен по ее длине, и его можно заменить силой P, равной весу и приложенной в середине балки, на расстоянии a/2 от левого (или правого) конца балки.

Обратить следует внимание на схемы опирания балки на левом и правом краях. Слева опора неподвижна. Справа балка лежит на катках, и это означает, что в горизонтальном направлении опора может двигаться свободно. Но тогда реакция такой опоры может быть направлена только вертикально – что и показано стрелкой R_B. Что касается реакции левой опоры, то в общем случае она может иметь любое направление в плоскости схемы. Но в рассматриваемом примере все силы – нагрузки и вес балки – действуют в вертикальном направлении, поэтому и реакция опоры A не может иметь горизонтальной составляющей. Формально можно эту составляющую нарисовать на схеме, но по условиям задачи ее сразу следует приравнять нулю.

Что касается пары, дающей момент m, она по определению при проецировании на любое направление даст нуль.

Для определения двух неизвестных – реакций опор – нужно составить два уравнения. Одно из них получается при проецировании всех сил – заданных и неизвестных – на вертикаль:

$$R_A + R_B - P - F_1 - F_2 = 0. \qquad (1.13)$$

Второе получится как уравнение моментов, например, относительно точки А. При составлении этого уравнения следует придерживаться следующего **правила знаков**: если в плоскости чертежа момент силы относительно центра (в данном случае это точка А) поворачивает тело (балку) против часовой стрелки, такой момент положителен, в противном случае – отрицателен.

$$M_A = - F_1 \cdot a/4 – P \cdot a/2 – F_2 \cdot 3a/4 + m + R_B \cdot a = 0. \quad (1.14)$$

Из последнего уравнения величина R_B определяется сразу, а после этого из (1.13) находится вторая неизвестная R_A. В итоге получим

$$R_B = 2{,}5 \text{ кН}, \quad R_A = 9{,}5 \text{ кН}. \quad (1.15)$$

В этом примере можно было вместо первого уравнения (1.13) рассмотреть уравнение моментов относительно точки В. Тогда в нем величина реакции R_A тоже определилась бы сразу. При решении это обстоятельство можно использовать для контроля результатов.

Пример 1.7.

Горизонтальная балка АВ заделана в стену. На конец балки А вертикально вниз действует сила F = 2 кН. АВ = 1,5 м.

Найти силу реакции и момент реакции (момент реактивной пары сил в защемленном сечении балки В).

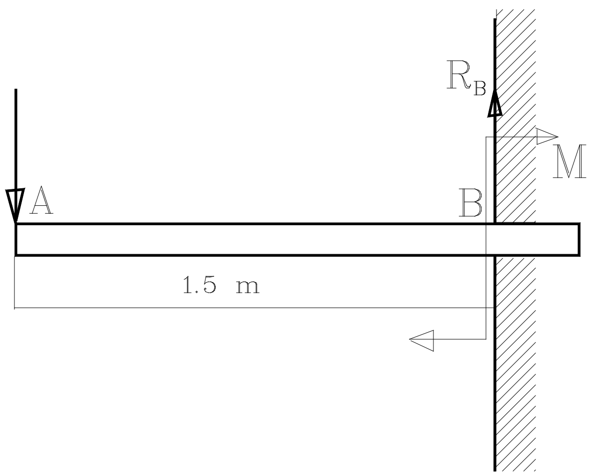

Рисунок 1.8

Решение

В этом случае заделка балки препятствует ее повороту вокруг точки В, поэтому реакция будет состоять не только из силы, изображенной на схеме в виде R_B, но и момента, показанного в виде пары с моментом М. В этом примере направление реактивного момента М по часовой стрелке очевидно. В тех случаях, когда это направление не определяется так просто, его можно изобразить произвольно – по часовой стрелке или против нее. В том случае, когда момент получится отрицательным, направление момента на чертеже выбрано неверно. Но исправлять ни схему, ни уравнения равновесия не следует – знак момента и его направление на схеме соответствуют друг другу.

Направление реакции в этом примере вертикально, поскольку здесь внешние силы (в данном примере одна сила) действуют тоже вертикально.

Главный вектор системы сил равен нулю (система находится в равновесии только в этом случае):

$$R_B - F = 0. \qquad (1.16)$$

Главный момент тоже должен быть равен нулю:

$$F \cdot AB - M = 0. \qquad (1.17)$$

Из этих двух уравнений определяются неизвестные. Если знаки у неизвестных получились, как в этом примере, положительными, это значит, что на схеме указаны их правильные направления.

1.6 Произвольная плоская система сил

Решение задач этого класса рекомендуется проводить в следующей последовательности.

1. Нарисовать схему системы, равновесие которой рассматривается, и изобразить на ней все заданные внешние силы.
2. Отбросить связи, заменив их действие на систему реакциями. В тех случаях, когда направления реакций сразу не определяются, лучше нарисовать реакции связей в виде комбинации сил вдоль осей координат.
3. Составить уравнения равновесия (в силах и моментах).
4. Решить полученную систему уравнений и определить все неизвестные величины. Когда какие-либо из определяемых величин получаются отрицательными, это означает, что нами выбраны неверные направления их на схеме.

Пример 1.8.

Горизонтальная однородная балка AB длиной 4 м и весом 1 кН прикреплена одним концом к шарниру, и удерживается в этом положении тросом ED, расположенным под углом 45° к горизонту, при этом DB = 1 м. Под углом 60° к горизонту к концу балки B приложена сила F = 2 кН. Найти натяжение троса и реакцию шарнира A.

Решение

В этом примере реакция троса (гибкой связи) может быть направлена только вдоль него, поэтому на схеме можно нарисовать ее в виде силы T. Что касается реакции шарнира A, ее направление неизвестно заранее, поэтому изображаем на схеме эту реакцию в виде двух составляющих R_{AX} и R_{AY}. Эти три величины – T, R_{AX} и R_{AY} – являются неизвестными. Для их определения необходимо иметь три уравнения, которые всегда можно записать в плоском случае. Уравнение моментов можно записать вообще относительно любой точки, но всего удобнее сделать это для точки A, так как в этом случае в него не войдут неизвестные реакции связи A, поскольку эти реакции проходят через точку A и не дают вклада в моменты.

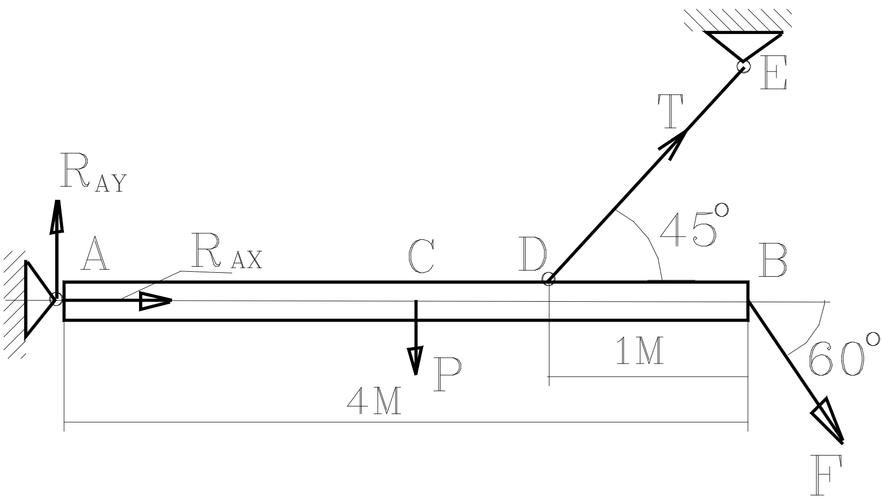

Рисунок 1.9

Итак, уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = R_{AX} + T\cdot\cos 45^\circ + F\cdot\cos 60^\circ = 0, \\ &\sum F_{ky} = R_{AY} - P + T\cdot\sin 45^\circ - F\sin 60^\circ = 0, \qquad (1.18) \\ &\sum m_A = T\cdot\sin 45^\circ\cdot AD - P\cdot AC - F\cdot\sin 60^\circ\cdot AB = 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание на последнее уравнение – уравнение моментов. Первое слагаемое в нем можно трактовать двояко.

В первом случае можно считать, что реакция *T* умножается на sin 45°, и тогда во внимание принимается вертикальная составляющая реакции *T* (эта составляющая и определяется с помощью умножения на sin 45°), а горизонтальной составляющей можно пренебречь, ибо линия действия этой составляющей проходит через центр А. Умножая вертикальную составляющую на плечо AD, получаем первое слагаемое.

Во втором случае можно считать, что во внимание принимается вся реакция *T*, но ее плечо в уравнении моментов должно определяться как расстояние от точки А до линии действия силы, а это равно произведению AD·sin 45°. В конечном счете, результат получается одинаковым.

Совершенно аналогичные рассуждения справедливы и для последнего слагаемого в уравнении моментов.

Из последнего уравнения (в нем все величины, кроме Т, определены условиями задачи) находим усилие Т = 4,2 кН. После этого в двух первых уравнениях остаются два неизвестных, определяемых достаточно просто:

$$R_{AX} = -3{,}96 \text{ кН},\ R_{AY} = -0{,}23 \text{ кН}. \qquad (1.19)$$

Знаки минус справа означают, что на схеме направления реакции указаны противоположно тому, что должно быть на самом деле.

Пример 1.9.

Однородная балка АВ длиной 4 м и весом Р = 40 кН упирается концом А в выступ пола, а точкой D опирается о ребро ступени. Угол балки с горизонтом 30°. АМ = 2 м. Найти опорные реакции в точках А и D.

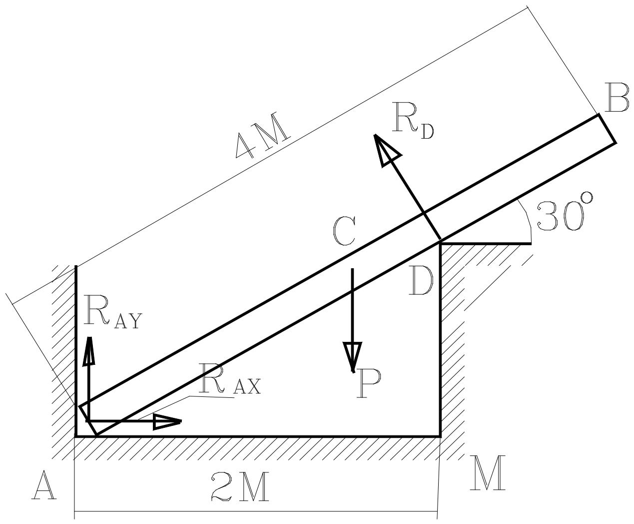

Рисунок 1.10

Решение

В этом примере заданной внешней силой является только вес балки P, приложенный в середине балки, в точке C. Реакция в точке D направлена по нормали к балке. Что касается реакции в точке A, ее направление заранее неизвестно, и поэтому на схеме рисуем составляющие R_{AX}, R_{AY}.

Число неизвестных рано трем, поэтому необходимо опять иметь три уравнения равновесия. Как и в предыдущем случае, это два уравнения равновесия сил и одно – равновесия моментов:

$$\begin{aligned} &R_{AX} - R_D \cdot \cos 60^\circ = 0, \\ &R_{AY} - P + R_D \cdot \sin 60^\circ = 0, \\ &R_D \cdot AD - P \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = 0. \end{aligned} \qquad (1.20)$$

В последнем уравнении, как и в предыдущем примере, появление второго слагаемого можно трактовать двояко: либо составляющая веса вдоль нормали к балке (а она определяется как произведение веса P на cos 30^0) умножается на плечо, равное в этом случае AC, либо весь вес P умножается на плечо, равное для этой силы произведению AC·cos 30°.

Из последнего уравнения величина реакции R_D определяется, а после этого решается система двух первых уравнений с двумя неизвестными. В итоге получаются следующие значения:

$$R_D = 30 \text{ кН}, \quad R_{AX} = 15 \text{ кН}, \quad R_{AY} = 14 \text{ кН}. \qquad (1.21)$$

Пример 1.10

Найти натяжение троса T на участке AB и вес груза P при заданных значениях углов α, β и величине Q, если трением в блоке C можно пренебречь.

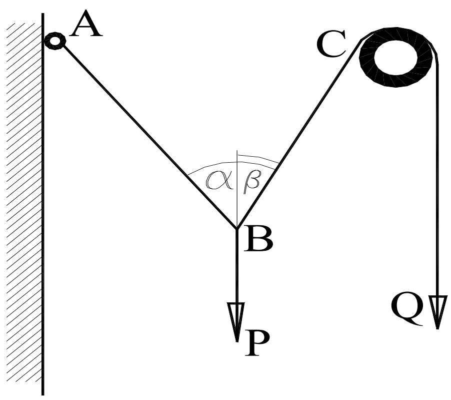

Рисунок 1.11

Решение

Натяжение троса на участке BC известно – при отсутствии трения в блоке оно равно весу Q. Тогда в точке B имеем систему трех сходящихся сил – известной силы вдоль BC, равной весу Q, неизвестной силы T, направленной от точки B к точке подвеса A, и неизвестного веса P. Для определения двух неизвестных необходимо составить два уравнения равновесия. Составим их в проекциях на горизонтальное (вдоль оси X вправо от точки B) и вертикальное (вдоль оси Y вверх от точки B) направления.

$$\begin{aligned} &Q\cdot\sin\beta - T\cdot\sin\alpha = 0,\\ &Q\cdot\cos\beta + T\cdot\cos\alpha - P = 0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Из этих уравнений определяются искомые величины T и P.

Пример 1.11

Водитель давит на педаль гидравлического тормоза с силой P перпендикулярно рычагу AC точке C, преодолевая действие вертикально ориентированной пружины с усилием натяжения F. С помощью горизонтального штока BD это давление передается через поршень в гидравлический цилиндр диаметра d. Найти давление p в цилиндре при заданных значениях F, P, AC, BC, d, α.

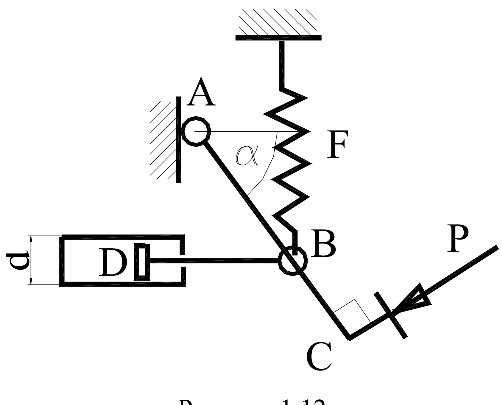

Рисунок 1.12

Решение

В этой задаче неизвестным является давление в гидравлическом цилиндре. Оно однозначно определится, если известна сила R, действующая на шток BD. Таким образом, в этой задаче есть всего лишь одна неизвестная величина R. Рассмотрим уравнение равновесия моментов всех сил, приложенных к рычагу AC, относительно точки A. В этом случае реакции в шарнире A не нужны, поскольку вклад их в уравнение равновесия моментов отсутствует.

Уравнение имеет вид

$$-P \cdot AC + R \cdot AB \cdot \sin\alpha + F \cdot AB \cdot \cos\alpha = 0. \quad (1.23)$$

Отсюда определяется R, и затем давление в гидроцилиндре

$$p = \frac{R}{\pi d^2 / 4} \quad (1.24)$$

В знаменателе этого выражения стоит площадь поршня.

Пример 1.12

Составная балка ACD (в точке C шарнирное соединение) покоится на трех опорах A, B, D, последние две подвижны. Схема приложения сосредоточенной силы F под углом α к горизонтали и вертикальной равномерно распределенной нагрузки p по части балки BD показана на рисунке. Кроме того, вес однородной балки AC равен P, вес части CD равен Q.

Найти реакции опор R_{AX}, R_{AY}, R_B, R_D.

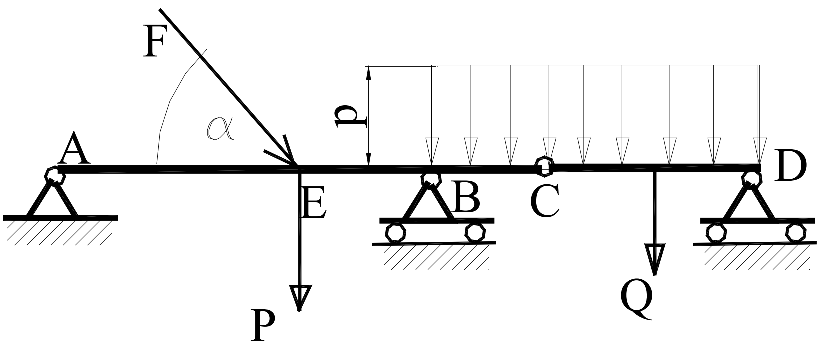

Рисунок 1.13

Решение

В точке A реакция имеет две составляющие – вдоль горизонтали X и вертикали Y, а в точках B и D только вертикальные. Итого в задаче 4 неизвестных величины, подлежащие определению. В плоском случае мы можем составить только 3 уравнения равновесия, и формально можно было бы систему считать статически неопределимой, а задачу – статически неопределенной. Но в данном случае рассматривается равновесие не одного твердого тела, а составной конструкции, балка состоит из участков AC и CD. Рассмотрим отдельно равновесие участка CD. Для этого в точке C, которую рассматриваем как опору для балки CD, введем реакцию R_C, направленную вертикально вверх. Формально можно ввести и горизонтальную составляющую в этой точке, но в системе нагрузок для балки CD есть только вертикальные силы, и горизонтальную составляющую реакции сразу нужно приравнять нулю.

В проекции на вертикаль уравнение равновесия балки CD имеет вид

$$R_C + R_D - p \cdot CD - Q = 0. \quad (1.25)$$

В силу симметрии балки и приложенной нагрузки реакции опор одинаковы, и второе уравнение (уравнение равновесия моментов относительно любой точки) можно не привлекать. Тогда

$$R_C = R_D = (p \cdot CD + Q) / 2. \quad (1.26)$$

Одна из искомых величин определена.

В точке С со стороны балки CD на балку АС действует сила R, равная по величине R_C, направленная по вертикали вниз. Можно теперь «отбросить» балку CD, а в системе нагрузок, действующих на оставшуюся балку АС, учесть силу R.

Составим три уравнения равновесия для балки АС – два в проекциях сил на оси X и Y, и одно уравнение равновесия моментов относительно центра А. Получим

$$\begin{aligned} &R_{AX} + F \cdot \cos\alpha = 0, \\ &R_{AY} + R_B - P - F \cdot \sin\alpha - p \cdot BC - R = 0, \\ &-P \cdot AC/2 - F \cdot \sin\alpha \cdot AE + R_B \cdot AB - p \cdot BC \cdot (AB + BC/2) - R \cdot AC = 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Три неизвестных величины из этой системы теперь определяются. При проведении выкладок или получении числовых значений R_{AX} определяется из первого уравнения, величина R_B – из последнего, после этого находится из второго уравнения величина R_{AY}.

1.7 Силы трения

В теоретической механике различают **трение скольжение** и **трение качения**. Известная и анализируемая в прикладной механике сила трения вращения не рассматривается.

Сила **трения скольжения** определяется так называемым **законом Кулона**: величина силы трения пропорциональна нормальному взаимодействию трущихся тел и направлена в сторону, обратную направлению относительного движения, т.е.

$$F_{\max} = f \cdot N, \tag{1.28}$$

где f – коэффициент трения скольжения, безразмерная величина.

Лишь для абсолютно гладких тел он равен нулю. В большинстве случаев принимается, что **коэффициент трения не зависит от нормального давления** (не сила трения, а ***коэффициент***), площади соприкасающихся тел и скорости их взаимного скольжения, хотя точными измерениями такие зависимости можно обнаружить.

При решении задач отыскивается, как правило, предельное значение силы трения и соответственно предельные значения всех внешних сил.

Реакция шероховатой (негладкой) поверхности в большинстве случаев направлена под некоторым углом к поверхности контакта (для гладкой строго по нормали), поэтому при решении задач обычно на схеме приводят нормальную и касательную составляющие этой реакции.

Сила трения качения определяется по формуле, внешне совпадающей с формулой (1.28):

$$F_{\max} = \frac{k}{R \cdot N}, \tag{1.29}$$

но в этом случае коэффициент трения качения k – величина размерная, измеряемая в единицах длины (м, см, …). Этот коэффициент можно трактовать как расстояние, на которое смещается реакция N от вертикали, проходящей через центр катка с радиусом R. Коэффициент трения качения задается как размерная величина, и при подстановке в формулы приводить все размерные величины в одни и те же единицы.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1.13

Крутящий момент M, действующий от привода на колесо, равен 120 Н·м. Тормозные колодки прижимаются с силой P к тормозному барабану радиуса r = 0,6 м. Если коэффициент трения между колодками и барабаном f = 0,5, то какое значение силы P должно быть для удержания колеса от вращения?

Решение

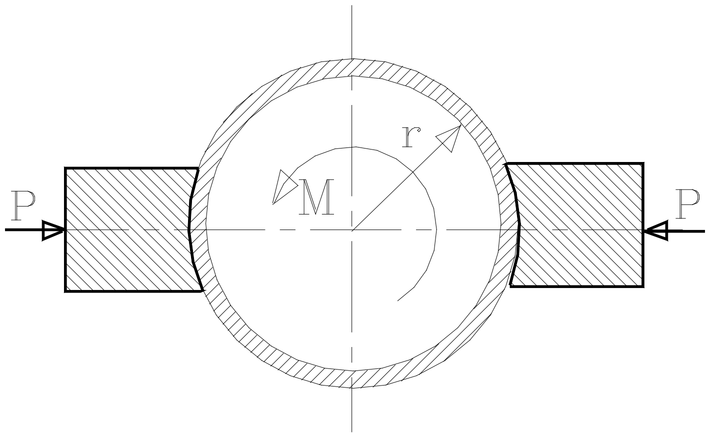

Рисунок 1.14

Для равновесия необходимо, чтобы сумма моментов, приложенных к барабану, равнялась нулю. Силы трения F – из-за симметрии – образуют пару, момент которой можно определить как 2 · F · r, причем сила трения определяется через прижимающую силе P по формуле для сил трения скольжения

$$F = f \cdot P. \quad (1.30)$$

В итоге получаем для определения P равенство f · P · r = M, откуда получим

$$P = 120/(2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5) = 200\ (Н). \quad (1.31)$$

Пример 1.14

Два стержня одинаковой длины и одного веса соединены в точке C шарниром, а в точках A и B опираются на шероховатый пол. Определить коэффициент трения между полом и стержнем, если в положении предельного равновесия треугольник ABC – равносторонний.

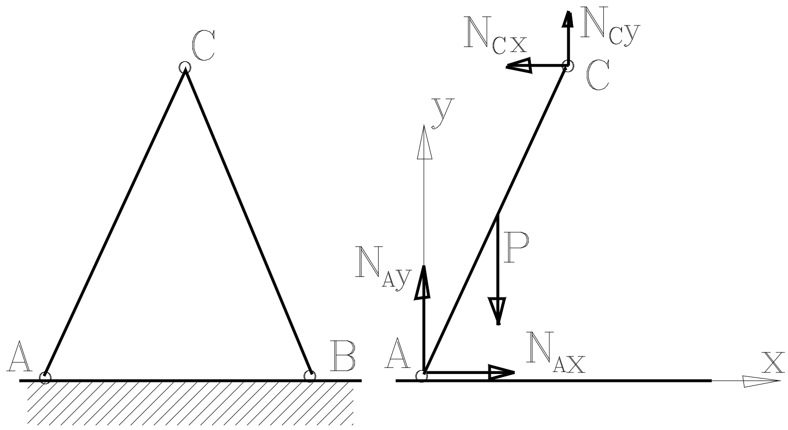

Рисунок 1.15

Найти реакцию в шарнире **C**.

Решение

На стержни действуют внешние силы – силы тяжести. Кроме этого, на каждый стержень действуют: сила реакции со стороны шарнира **C** и реакция опоры – нормальная и касательная составляющие, причем последняя ограничена по величине максимальной величиной силы трения, которая может возникать между стержнем и полом. Это максимальное значение и отвечает положению предельного равновесия.

В силу симметрии задачи вертикальная составляющая реакции пола уравновешивает вес стержня. По этой же причине можно сразу сделать вывод, что вертикальная составляющая реакции в шарнире **C** заведомо равна нулю, или

$$N_{AY} = P,\ N_{CY} = 0. \tag{1.32}$$

Для определения оставшихся неизвестных N_{AX}, N_{CX}, f необходимо составить три уравнения. Учтем, что в положении предельного равновесия необходимо

$$N_{AX} = f \cdot N_{AY} = f \cdot P. \tag{1.33}$$

Кроме того, проецируя все силы на ось Ax, получим второе равенство

$$N_{AX} = N_{CX}. \tag{1.34}$$

Наконец, третье равенство – это условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A:

$$P \cdot l / 2 \cdot \cos 60^\circ + N_{CX} \cdot l \cdot \sin 60^\circ = 0. \tag{1.35}$$

Здесь знаки у слагаемых выбраны в соответствии с правилом: **если момент направлен против часовой стрелки, он считается положительным, иначе отрицательным**. Решая систему уравнений (1.3-1.5), получим

$$f = ctg 60^\circ / 2, \tag{1.36}$$

после чего определяются и все силы реакций.

Пример 1.15

Цилиндрический каток диаметром 60 см и весом Q = 3920 Н приводится в движение человеком, причем он давит на ручку OA длиной 1,5 м с силой P, так что расстояние от точки A до пола равно 1,2 м. Коэффициент трения качения f = 0,5 см. Найти, при каком значении P движение катка будет равномерным.

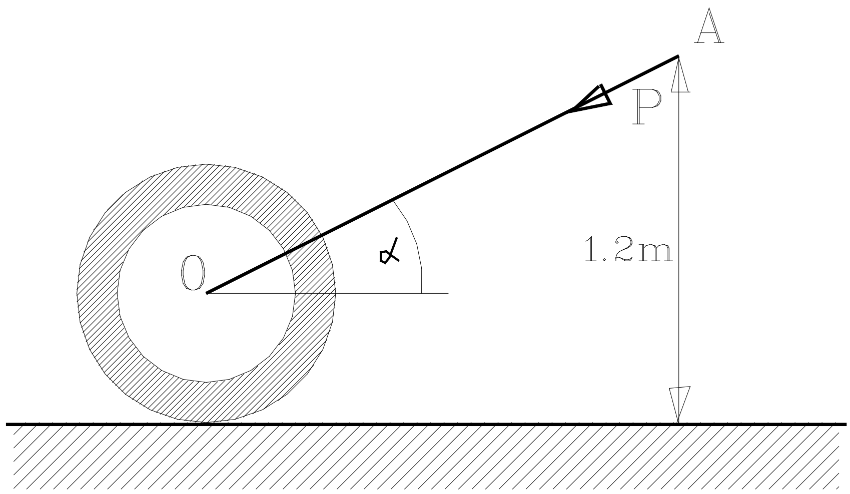

Рисунок 1.16

Решение

Сила трения качения F определяется, как было сформулировано ранее, по формуле

$$F = f / R \cdot N, \tag{1.37}$$

где N – сила нормального взаимодействия катка с опорой.

При таком приложении нагрузки, как показано на рисунке, эта сила равна весу катка плюс вертикальная составляющая от силы P, т.е.

$$N = Q + P \cdot \sin\alpha. \tag{1.38}$$

С другой стороны, для равномерного движения катка необходимо, чтобы горизонтальная составляющая от приложенной силы P уравновешивалась силой трения. Из этого утверждения следует

$$P \cdot \cos\alpha = \frac{f}{R}(Q + P \cdot \sin\alpha). \tag{1.39}$$

Тогда значение искомой силы будет

$$P = \frac{Qf}{R \cdot \cos\alpha - f \cdot \sin\alpha} = 82,7H. \tag{1.40}$$

Входящие в эти соотношения значения синуса и косинуса легко определяются по рисунку:

$$\sin\alpha = (1,2 - 0,3) / 1,5. \tag{1.41}$$

Справа в скобках стоит разность между высотой точки A и точки O (радиусом катка), в знаменателе дроби – длина ручки OA.

Пример 1.16

Найти силу P, с которой нужно толкать каток веса Q под углом α к горизонтали, если радиус катка R, коэффициент трения качения k. Определить значение α, при котором сила P минимальна.

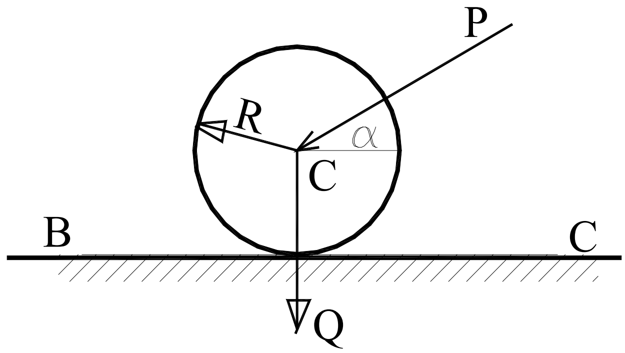

Рисунок 1.17

Решение

Горизонтальная составляющая приложенной силы равна P·cosα. Эта сила должна преодолеть силу трения качения, причем нормальное давление катка на дорогу равно Q + P·sinα. Уравнение, связывающее эти силы, следует из закона для трения качения:

$$P \cdot \cos\alpha = \frac{k}{R} \cdot (Q + P \cdot \sin\alpha). \tag{1.42}$$

Отсюда получим связь силы P с величиной угла α:

$$P = \frac{k \cdot Q}{R \cdot \cos\alpha - k \cdot \sin\alpha}. \tag{1.43}$$

Сила определена, а для нахождения ее минимального значения надо исследовать полученную зависимость на экстремум. Это приводит к соотношению для искомой величины угла α:

$$tg\alpha = -\frac{k}{R}. \tag{1.44}$$

Знак минус справа означает, что минимальное значение силы будет в случае, когда каток не толкают, а тянут под определяемым этим соотношением углом α к горизонту, в данном случае влево вверх.

1.8 Центр тяжести

Нахождение координат центра тяжести – частный случай решения задачи о равнодействующей системы параллельных сил.

Координаты **центра параллельных сил** (точки приложения равнодействующей) определяются формулами

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k)}, y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k y_k)}{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k)}, z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k z_k)}{\sum_{k=1}^{n}(\pm F_k)}. \quad (1.44)$$

Здесь x_k, y_k, z_k – координаты приложения сил $\mathbf{F_k}$, k = 1, 2,…, n, знаки плюс или минус выбираются в соответствии с тем, как проецируются силы на оси системы координат. Положение центра параллельных сил не меняется всей системы сил на один и тот же угол.

Силы тяжести можно с достаточной для практических целей точностью считать параллельными, хотя на самом деле они сходятся в центре Земли. Так, для двух точек на поверхности Земли, отстоящих друг от друга на 31 м, угол между силами тяжести составляет одну угловую секунду. Такой угол можно не принимать во внимание.

Формулы для координат центра тяжести системы материальных точек имеют точно такой же вид, что и (1.44), только можно считать знаки одинаковыми. Тогда для центра тяжести системы материальных точек

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P}, y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P}, z_C = \frac{\sum P_k z_k}{P}. \quad (1.45)$$

Здесь P_k – масса к-той точки, P – сумма масс всех точек.

В случае, когда рассматривается твердое тело, можно разделить его на достаточно малые части, центры тяжести которых можно считать совпадающими с их геометрическими центрами. Для однородного тела масса пропорциональна объему, и тогда

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V}, y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}, z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}. \quad (1.46)$$

Здесь v_k – объем к-той частицы, V – объем всего тела.

Аналогичные формулы можно записать для плоской фигуры и пространственной линии. В случае непрерывных распределений масс по объему, по поверхности или вдоль линии следует использовать формулы вида:

$$x_C = \frac{1}{V}\int_V x\,dv, y_C = \frac{1}{V}\int_V y\,dv, z_C = \frac{1}{V}\int_V z\,dv, \quad (1.47)$$

$$x_C = \frac{1}{S}\int_S x\,ds, y_C = \frac{1}{S}\int_S y\,ds, \quad (1.48)$$

$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x dl, y_C = \frac{1}{L}\int_L y dl, z_C = \frac{1}{L}\int_L z dl. \qquad (1.49)$$

В этих формулах dv – элемент объема тела, ds – элемент плоской поверхности, dl – элемент пространственной линии, интегрирование ведется соответственно в (1.47) по объему тела, в (1.48) – по поверхности, в (1.49) – вдоль линии.

При нахождении центра тяжести реального тела используется следующий прием. Тело разбивается на отдельные части, для каждой из которых легко определяется положение центра тяжести, а затем используются формулы типа (1.44). Для отдельных частей тела определение центра тяжести проводится либо из соображений симметрии, либо на основании известных зависимостей для положения центров тяжести линий, фигур или тел.

Для фигур простейшей формы положение центров тяжести определяется следующими правилами.

Центр тяжести прямоугольника располагается в точке пересечения его диагоналей.

Центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Центр тяжести однородной дуги окружности радиуса r и раствора 2α находится на оси симметрии, а его координаты

$$y_C = 0, x_C = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (1.50)$$

Центр тяжести площади однородного кругового сектора с такими же геометрическими характеристиками, что и для дуги, расположен на оси симметрии в точке с координатами

$$y_C = 0, x_C = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (1.51)$$

Центр тяжести однородной призмы находится в средине отрезка, соединяющего центры тяжести верхнего и нижнего оснований призмы.

Центр тяжести пирамиды находится на отрезке, соединяющем вершину пирамиды с центром тяжести основания, на расстоянии ¼ от основания.

Центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его оси на расстоянии 1/4 от основания конуса.

Центр тяжести полушара радиуса r располагается на оси симметрии на расстоянии 3/8r от основания полушара (поперечного сечения шара, проходящего через его центр).

Рассмотрим примеры решения некоторых характерных задач.

Пример 1.17

Определить положение центра тяжести однородной плоской фигуры, представляющей собой круглый диск с круглым отверстием. Размеры диска, отверстия и положения отверстия показаны на рисунке.

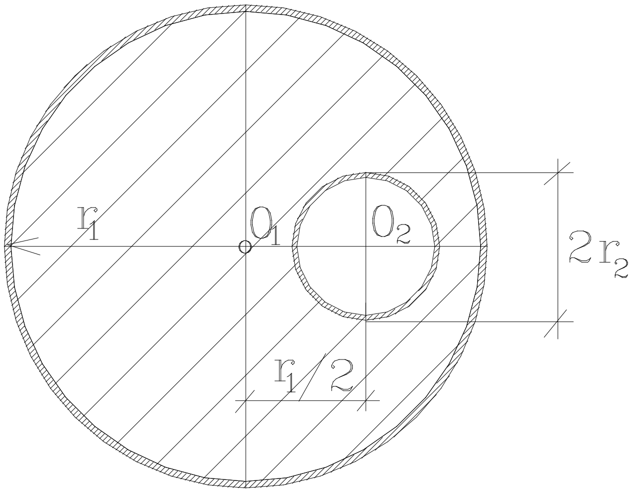

Рисунок 1.18

Решение

Воспользуемся тем, что положение центра тяжести диска без выреза известно – это его центр O_1. Соответственно центр тяжести выреза (плоской фигуры) – это точка O_2. Будем рассматривать диск с вырезом как наложение двух плоских фигур – обычного сплошного диска радиуса r_1 (без выреза) и диска радиуса r_2 с «отрицательной» массой. Массы обоих дисков пропорциональны их площадям и равны πr_1^2 и πr_2^2. Используем формулу (1.44), причем из соображений симметрии ясно, что искать нужно лишь координату x (на горизонтальной оси, проходящей от точки O_1 через O_2).

$$x_C = \frac{\pi r_1^2 \cdot 0 - \pi r_2^2 \cdot \dfrac{r_1}{2}}{\pi r_1^2 - \pi r_2^2} = -\frac{r_2^2 r_1}{2(r_1^2 - r_2^2)}. \qquad (1.52)$$

Для диска радиуса r_2 (выреза) его масса принимается отрицательной, поэтому и выбраны в формуле (1.44) соответствующие знаки.

Пример 1.18

Как нужно провести линию отреза DE в прямоугольнике ABCD, чтобы при подвешивании в точке E линия AD = a оставалась горизонтальной?

Решение

Линия AD останется горизонтальной в том случае, когда центр тяжести оставшейся после отрезания фигуры (трапеции ABED) будет находиться под точкой E. Обозначим расстояние BE = x и определим положение центра тяжести трапеции, потребовав затем, чтобы координата центра тяжести трапеции совпала с координатой точки E, равной x (будем направлять ось x влево – отсчет от линии AB).

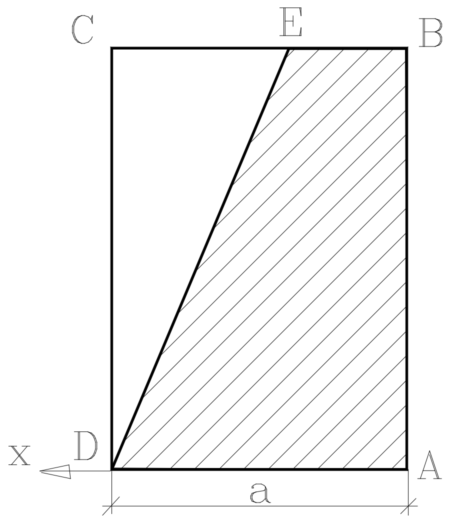

Рисунок 1.19

Обозначим высоту прямоугольника AB = b, тогда площадь всей трапеции будет

$$S = \frac{a+x}{2}b. \qquad (1.53)$$

Чтобы найти центр тяжести трапеции, разобьем его на прямоугольник и треугольник линией, параллельной AB, проходящей через точку E. Тогда для этих фигур площади и координаты центров тяжести (нас интересует лишь положение центров тяжести вдоль оси x) будут соответственно

$$S_1 = bx, S_2 = \frac{1}{2}(a-x)b, \quad x_1 = x/2, x_2 = x + (a-x)/3 = (2x+a)/3. \qquad (1.54)$$

Подставляем это в формулу (1.44) для определения положения x_C и приравняем x, так как по условию задачи центр тяжести должен быть под точкой E, т.е. иметь такую же координату, как и точка E. В результате получаем соотношение

$$x = \frac{bx \cdot \frac{x}{2} + \frac{b(a-x)}{2} \cdot \frac{2x+a}{3}}{b \cdot \frac{a+x}{2}}. \qquad (1.55)$$

Один из корней получающегося квадратного уравнения (положительный) дает результат x = 0,366 a. Как видим, при решении и в ответе несущественна высота прямоугольника b, которую мы вводили. Результат справедлив для прямоугольника любой высоты.

Пример 1.19

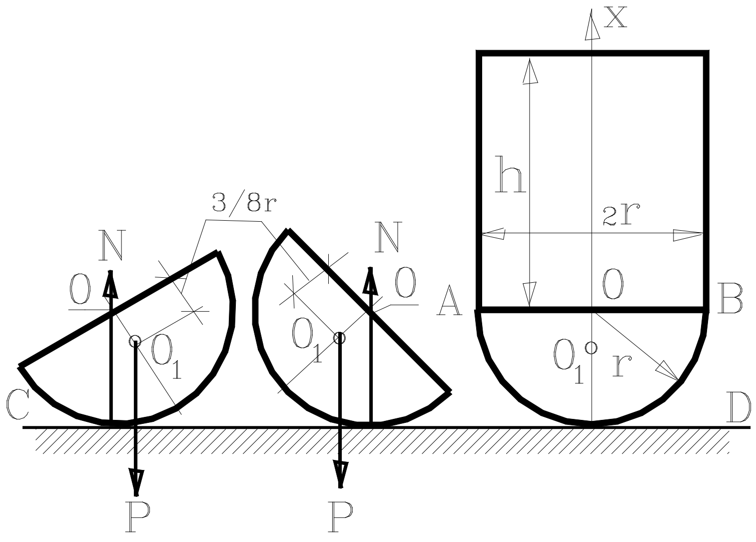

Рисунок 1.20

Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, составленное из полушара и цилиндра одинаковой плотности, будет терять равновесие на плоскости при малейшем наклоне.

Решение

Используем тот факт, что положение центра тяжести полушара O_1 относительно его основания (плоскости сечения) известно и равно 3/8×r. Если тело просто представляет собой полушар, то оно будет в равновесии только тогда, когда его плоское сечение параллельно плоскости, на которой находится полушар. Это видно из рисунка: точка опоры всегда находится под центром полушара O, а сила тяжести P, которую можно считать приложенной в центре тяжести O_1, при любом наклоне полушара будет создавать с реакцией N опоры пару, которая поворачивает полушар в исходное положение. Попробуйте сделать такой эксперимент с половинкой яблока, арбуза – и быстро убедитесь в справедливости этого утверждения.

Если теперь на плоскость среза поставить цилиндр, то общий центр тяжести полученного тела будет смещаться вверх, а точка опоры в исходном состоянии и при наклоне составного тела (полушар вместе с цилиндром) по-прежнему останется на месте. Видимо, предельное положение, когда тело будет устойчиво, будет при совпадении центра тяжести с точкой O, которая находится в центре среза. В этом случае момент пары сил, возвращающий полушар (и все тело) из наклонного положения в исходное, исчезает, так как плечо пары обращается в ноль.

Итак, найдем высоту цилиндра h из условия, что центр тяжести полученного тела будет находиться на высоте r от плоскости CD.

Поскольку плотность постоянная, вместо веса тела и его частей можно оперировать объемами. Направив ось x вверх от плоскости опирания, получим объем и положение центра тяжести (центра объема) полушара соответственно

$$v_1 = \frac{2}{3}\pi r^3, x_1 = \frac{5}{8}r. \qquad (1.56)$$

Для цилиндра высотой *h*, стоящего на полушаре, объем и положение центра объема определяются формулами

$$v_2 = \pi r^2 h, x_2 = r + h/2. \qquad (1.57)$$

Теперь используем формулу для определения положения центра тяжести (1.6) по оси x, и полученное выражение приравняем r:

$$x_C = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{5}{8} r + \pi r^2 h \cdot (r + \frac{h}{2})}{\frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h} = r. \qquad (1.58)$$

Отсюда получаем решение:

$$h = r / \sqrt{2}. \qquad (1.59)$$

Пример 1.20

Найти положение центра тяжести плоской фигуры, форма и размеры которой показаны на рисунке, если начало декартовой системы координат находится в левом нижнем углу прямоугольника, составной части фигуры.

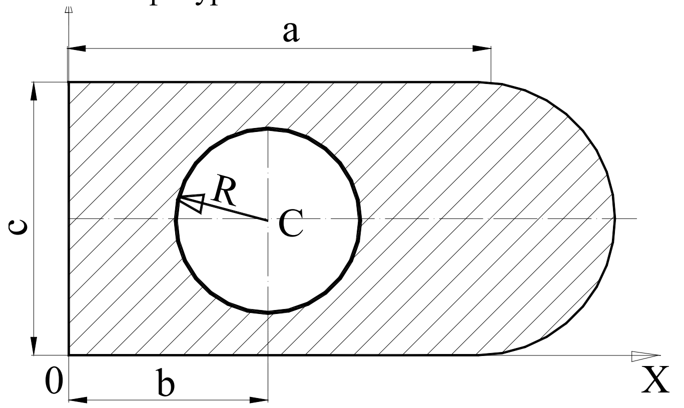

Рисунок 1.21

Решение

Рассматриваем фигуру как состоящую из трех частей: прямоугольника с размерами $a \times c$, полукруга радиуса c/2 и круга радиуса R с «отрицательной» массой. Тогда массы соответствующих частей будут

$$m_1 = ac, \quad m_2 = \pi c^2 / 8, m_3 = -\pi R^2, \qquad (1.60)$$

а координаты центров масс

$$\begin{aligned} &x_1 = a/2; y_1 = c/2; \\ &x_2 = a + \frac{2c}{3\pi}, y_2 = c/2; \\ &x_3 = b, y_3 = c/2. \end{aligned} \qquad (1.61)$$

Очевидно, что

$$Y_C = c/2, \qquad (1.62)$$

а для определения координаты $\boldsymbol{X_C}$ используем стандартную формулу. В итоге

$$X_C = \frac{a^2 c/2 + \pi c^2/8 \cdot (a + \frac{2c}{3\pi}) - \pi R^2 b}{ac + \pi c^2/8 - \pi R^2}. \qquad (1.63)$$

2 РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Решение практически всех задач по теме растяжение-сжатие основано на использовании трех формул:

1) определение относительной деформации ε

$$\varepsilon = \Delta l / l, \qquad (2.1)$$

где Δl – абсолютное удлинение (или укорочение) образца, стержня, проволоки, детали и т.п., l – начальная длина образца;

2) определение напряжения σ

$$\sigma = P / S \qquad (2.2)$$

где P – растягивающая (или сжимающая) нагрузка, S – площадь поперечного сечения образца;

3) закон Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \qquad (2.3)$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга, модуль упругости первого рода).

Относительная деформация является величиной безразмерной, а напряжения и модуль упругости измеряются в системе СИ в Па = Н/м^2. Однако такая единица для измерения напряжений, характерных для задач на растяжение-сжатие, является неудобной.

В самом деле, рассмотрим относительно небольшое атмосферное давление 1 атм = 1 кГ/см^2, где величина кГ с большой буквой Г означает силу, в отличие от обозначения массы кг. Если перейти к использованию основных единиц системы СИ, то 1 кГ $\approx$ 10 Н, 1 см^2 = 10^{-4} м^2, т.е. давление всего 1 кГ/см = 10^5 Па = 100 кПа. Тогда, например, модуль упругости стали $2 \cdot 10^6$ кГ/см^2 = $2 \cdot 10^{11}$ Па = 200 ГПа. Здесь первая буква Г означает приставку Гига = 10^9.

Работать с такими величинами не очень удобно. Вообще следует заметить, что наиболее распространенными ошибками при решении задач в сопротивления материалов (сопромате) являются ошибки, связанные с неверным использованием размерности. Зачастую верное аналитическое решение в виде формул после подстановки размерных величин приводит к физически абсурдным результатам, если размерности не согласованы между собой.

В большинстве справочников по свойствам материалов величины модулей первого рода E и второго рода G приводятся в кГ/см^2, как и в таблице ниже. В этой таблице еще приведены значения коэффициента Пуассона ν (величина безразмерная по определению), плотности ρ, г/см^3 и коэффициента линейного температурного расширения α, град$^{-1}$.

Таблица 1

Свойства / **Материалы**	E, кГ/см^2	ν	G, кГ/см^2	ρ, г/см^3	α, град$^{-1}$
Сталь	$2 \cdot 10^6$	0,30	$0,75 \cdot 10^6$	7,8	$12 \cdot 10^{-6}$
Алюминий	$0,75 \cdot 10^6$	0,40	$0,27 \cdot 10^6$	2,7	$15 \cdot 10^{-6}$
Чугун	$2 \cdot 10^6$	0,30	$0,75 \cdot 10^6$	8,0	$10 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1 \cdot 10^6$	0,35	$0,37 \cdot 10^6$	8,9	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Дерево (вдоль волокон)		0,40		0,9	

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 2.1.

Под весом груза P стальная проволока длиной l = 3 м и диаметром d = 1,6 мм растягивается на 1,5 мм. Модуль Юнга для стали равен $2 \cdot 10^6$ кГ/см^2. Под тяжестью того же груза проволока из меди длиной 1,8 м и диаметром 3,2 мм удлинилась на 0,39 мм. Определить модуль упругости медной проволоки.

Решение

Модуль упругости входит в формулу закона Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Поскольку длина медной проволоки и удлинение заданы, величина деформации ε считается по формуле (2.1). Для определения величины E нужно знать напряжение σ = P / S, где площадь поперечного сечения S определяется, поскольку диаметр медной проволоки задан. Нужно найти величину груза P.

Для этого рассмотрим стальную проволоку. Деформация ее считается по (2.1). Модуль упругости задан – можно по (2.3) найти напряжения. После этого, зная площадь сечения стальной проволоки, находим нагрузку P.

Итак, обозначая далее величины, относящиеся к стальной проволоке, индексом с, а к медной – м, получаем для стальной проволоки последовательность формул:

$$\varepsilon_c = \Delta l_c / l_c, \quad \sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c, \quad P = \sigma_c \cdot S_c, \quad \text{где } S_c = \pi d_c^2/4. \tag{2.3}$$

Для определения P получается выражение $P = E_c\ \Delta l_c / l_c \times \pi d_c^2/4$.

Модуль упругости медной проволоки из (2.3)

$$E_м = \sigma_м / \varepsilon_м = \sigma_м / (\Delta l_м / l_м) = P/S_м\ /\ (\Delta l_м / l_м), \text{ где } S_м = \pi d_м^2/4. \tag{2.4}$$

Окончательно

$$E_м = \frac{E_c \cdot \Delta l_c / l_c \cdot d_c^2}{\Delta l_м / l_м d_м^2}. \tag{2.5}$$

При подстановке известных из условия задач величин переводим удлинения и длины в мм, т.е. длина стальной проволоки 3000 мм, медной – 1800 мм. В данном конкретном примере это не играет роли – если в числителе и в знаменателе не переходить одновременно к мм, а оставить м, что неправильно по существу, но это будет случай, когда две ошибки компенсируют друг друга. Это же касается и квадратов диаметров – их можно считать в мм^2 или см^2, главное – одинаково в числителе и знаменателе. Но это не всегда так, потому следует придерживаться общего правила и использовать системные единицы измерения.

Ответ $E_м = 1{,}15 \cdot 10^6$ кГ/см^2.

Пример 2.2

Стальной стержень нагружен растягивающей силой F = 10000 Н. Часть стержня длиной l_1 = 40 см – сплошной цилиндр с наружным диаметром D = 4 см, а часть длиной l_2 = 20 см – трубка с внутренним диметром d = 2 см и наружным D = 4 см. Принимая модуль упругости стали равным $2 \cdot 10^6$ кГ/см^2, определить удлинение стержня.

Решение

Общее удлинение стержня складывается из удлинений двух участков. Растягивающая сила на обоих участках одинакова, материал тоже, разница будет возникать за счет разных площадей поперечных сечений и длин участков.

Площадь сечения сплошного цилиндра $S_1 = \pi D^2/4$, трубки $S_2 = \pi(D^2 - d^2)/4$. Напряжения в цилиндре будут F/S_1, в трубке F/S_2. Тогда относительная деформация в цилиндре $\varepsilon_1 = F/ES_1$, в трубке $\varepsilon_2 = F/ES_2$, а удлинения соответственно $\Delta l_1 = l_1F/ES_1$, $\Delta l_2 = l_2F/ES_2$. Суммарное удлинение стержня будет $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$.

При подстановке исходных данных учтем, что модуль упругости задан в кГ/см^2. Поэтому нагрузку переводим в кГ: 10 000 Н $\approx$ 1000 кГ, площади сечение считаем в см^2, и удлинения получим в тех же единицах, что и длины цилиндра и трубки.

Ответ: 0,0027 см

Пример 2.3

Трос, состоящий из проволок диаметром d = 2 мм, растягивается усилием F = 7,5 Т. Допускаемое напряжение в тросе (с учетом наклона проволок) [σ] = 3000 кГ/см^2. Определить число проволок в тросе N, если запас прочности задан равным s = 1,5.

Решение

Начать можно с определения предельной нагрузки для одной проволоки. Для этого нужно умножить допускаемое напряжение на площадь ее поперечного сечения $S = \pi d^2/4$. При этом площадь нужно найти в см^2, т.е. d = 0,2 см, тогда S = 0,0314 см^2. Умножая это на величину [σ] = 3000 кГ/см^2, получаем, что одна проволока выдержит нагрузку 94,2 кГ. Разделив общую нагрузку 7500 кГ на 94,2 кГ, получим N = 79,6 штук – это число проволок, величина безразмерная. Округляем в большую сторону, в запас прочности, получаем 80 штук.

Если учесть, что задан общий запас прочности s = 1,5, умножаем 80 на s, тогда в ответе будет N = 120.

Пример 2.4

Рабочее давление в цилиндрическом сосуде P = 8 ат, внутренний диаметр D = 35 см. Сколько болтов N диаметром d = 18 мм должно удерживать крышку цилиндра, если для материала болта напряжение не должно превышать [σ] = 400 кГ/см^2?

Решение

Заметим, что единица ат = 1 кГ/см^2. Тогда общая нагрузка F на крышку определится умножением давления P на площадь крышки $S = \pi D^2/4$:

$$F = P \cdot S = 8 \cdot 3{,}14 \cdot 35^2/4 = 7693 \text{ (кГ)}.$$

Учтем, что один болт с поперечным сечением площадью $s = \pi d^2/4$ может выдержать нагрузку p = [σ] · s = 1143 кГ. Тогда число болтов, необходимое для крепления крышки, будет 6,73. Округляя в большую сторону, получим ответ N = 7.

Пример 2.5

Полиэтиленовая трубка кольцевого поперечного сечения с наружным диаметром D = 5 см растянута силой P = 240 кГ. Если допускаемое напряжение [σ] = 34 кГ/см^2, какова должна быть толщина стенки h?

Решение

Из данных задачи следует, что площадь поперечного сечения трубки S должна определяться как $P/[\sigma] = 7{,}06$ см^2. Наружный диаметр D задан, а внутренний d нужно определить из условия $S = \pi(D^2 - d^2)/4$. После этого толщина стенки $h = (D - d)/2$.

Ответ: 0,5 см.

Пример 2.6

Медная проволока диаметром d = 1,2 мм под нагрузкой P = 9 кГ удлиняется на Δl = 0,25 мм, модуль упругости меди $E = 1\cdot10^6$ кГ/см^2. Определить длину проволоки *l.*

Решение

Относительная деформация определяется из двух равенств: по определению $\varepsilon = \Delta l/l$ и из закона Гука $\varepsilon = \sigma / E$, где $\sigma = 4P/\pi d^2$. Из равенства $\Delta l/l = 4P/\pi d^2/E$ получаем l = 31,4 см.

Пример 2.7

Под действием усилия P = 200 кГ стальная проволока (модуль упругости E = $2\cdot10^6$ кГ/см^2) длиной L = 600 м и диаметром d = 5 мм должна передать продольное перемещение величиной a = 17,5 см. Какое перемещение b нужно создать на другом конце проволоки?

Решение

Если считать проволоку абсолютно жесткой, то $b = a$. В данном случае следует учесть удлинение проволоки ΔL за счет упругой деформации под действием нагрузки P. Это удлинение определяется как $\Delta L = L \cdot \varepsilon$, где $\varepsilon = \sigma / E$, а $\sigma = 4P / \pi d^2$.

Пример 2.8

Жесткий брус AB длиной a = 2 м подвешен горизонтально в точке A на стальной тяге диаметром d_1 = 20 мм и длиной l_1 = 1,5 м, и в точке B на медной диаметром d_2 = 25 мм и длиной l_2 = 1 м. В какой точке AB нужно приложить вес P = 3 Т, чтобы брус остался горизонтальным? Каковы будут напряжения в тягах?

Решение

Если на стальную тягу приходится нагрузка P_1, то на медную $P_2 = (3000 - P_1)$ кГ. Под действием этих нагрузок тяги получают одинаковое абсолютное удлинение $\Delta l_1 = \Delta l_2$, поскольку по условию брус остается горизонтальным. Можно для определения этих удлинений использовать соотношения $\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1$, $\Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2$. Деформации находим из закона Гука, тогда

$$\Delta l_1 = \frac{4P_1 \cdot l_1}{\pi d_1^2 E_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{4(3000 - P_1)\cdot l_2}{\pi d_2^2 E_2}. \qquad (2.6)$$

Из равенства этих удлинений определяется усилия в тягах P_1 = 1381 кГ, P_2 = 1619 кГ.

Напряжения в тягах определяются делением усилий на площадь поперечного сечения соответствующей тяги (440 кГ/см^2 и 330 кГ/см^2).

Положение груза Р в точке x определяется из уравнения моментов, например, относительно этой точки 1619 x = 1381 (2 − x), в итоге x = 0,92 м, 2 – x =1,08 м.

Пример 2.9

Груз Р подвешен на двух стержнях. Углы $\alpha = 30^0$. Стержень АС стальной, диаметром d_1 = 30 мм, допускаемое напряжение $[\sigma_1]$ = 1600 = кГ/см^2, стержень ВС алюминиевый, диаметром d_2 = 40 мм, $[\sigma_2]$ = 600 = кГ/см^2. Найти максимальное значение груза Р, который выдержит эта подвеска.

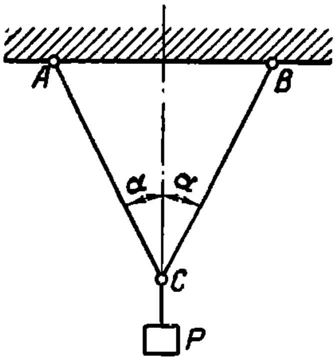

Рисунок 2.1

Решение

Подвеска симметрична относительно вертикальной оси, поэтому усилия в стержнях одинаковы, независимо от материала и поперечных размеров. Если это усилие Т, то в итоге

$$P = 2T\cos\alpha. \quad (2.7)$$

По существу, нужно найти минимальное усилие из двух значений, которые являются предельными для стержней, и использовать в (2.7). Для стального стержня получим 11304 кГ, для алюминиевого 7536 кГ. Последнее подставляем в (2.7), тогда Р ≈ 13 000 кГ.

3 СРЕЗ-СМЯТИЕ

Эти задачи решаются с использованием двух основных соотношений: срез возникает при выполнении условия

$$[\tau] \cdot S = P, \qquad (3.1)$$

смятие при выполнении условия

$$[\sigma_c] \cdot S = P, \qquad (3.2)$$

где S – площадь сечения, работающего соответственно на срез или смятие,
$[\tau]$ – допускаемое напряжение на срез,
$[\sigma_c]$ – допускаемое напряжение на смятие,
P – приложенная нагрузка.

Основное внимание нужно уделить двум факторам.

Во-первых, правильно определить величину S, которая работает на срез или смятие.

Во-вторых, верно подставить в эти простые соотношения величины в смысле размерности.

Поскольку величины $[\tau]$ и $[\sigma_c]$ обычно задаются в кГ/см^2, то нагрузка P должна задаваться в кГ, а площади S – в см^2. Если в условии задачи размеры заданы в мм или м, а P в Ньютонах или тоннах, вычисления нужно проводить с переходом к см и кГ соответственно.

Рассмотрим примеры.

Пример 3.1

Два листа, толщина верхнего h_1 = 8 мм, нижнего h_2 = 10 мм, соединены внахлест заклепками диаметром d = 20 мм. Величина P = 20 Т = 20 000 кГ, характеристики материала заклепок $[\tau]$ = 1400 кГ/см^2, $[\sigma_c]$ = 3200 кГ/см^2.

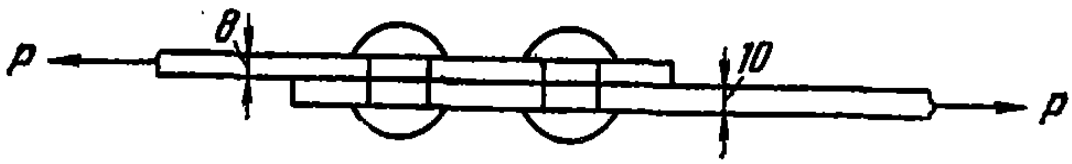

Рисунок 3.1

Решение

Каждая заклепка, как видно из схемы, на срез работает в единственном сечении, площадь которого определяется как $S_1 = \pi d^2/4$. Тогда она несет максимальную нагрузку величиной $[\tau] \cdot S_1 = P_1$. При решении задач о заклепочных соединениях принимается, что все заклепки работают одинаково, т.е. выдерживают нагрузку P_1. Из условия на срез следует, что число заклепок должно быть $n_1 = P/P_1 = 4{,}53 \approx 5$. Заметим, что округление в таких случаях всегда делается в большую сторону. Даже если бы получили $P/P_1 = 4{,}01$, все равно округление дало бы цифру 5.

На смятие каждая заклепка работает в двух сечениях – верхнем, где толщина 8 мм, и нижнем толщиной 10 мм. Нагрузка одна и та же в этих сечениях, поэтому оценку нужно вести для сечения меньшей площади – в нем напряжения будут больше. В расчетах на смятие детали цилиндрической формы принимается, что площадь S_2 – это площадь не боковой поверхности, а осевого сечения, т.е. в данном случае $S_2 = d \cdot h_1$. Тогда на смятие одна заклепка выдержит нагрузку $P_2 = S_2 \cdot [\sigma_c]$, а число заклепок определится как $n_2 = P/P_2$. В нашем случае получается $3{,}9 \approx 4$.

Из двух значений 5 и 4 выбираем большее.

Ответ: $n = 5$.

При подстановке величин в формулы для S_1 и S_2 размеры переводим в см, нагрузку в кГ.

Пример 3.2

Два листа толщиной $h_1 = 5$ мм с двух сторон прикреплены к листу толщиной $h_2 = 12$ мм. Сила $P = 18$ Т $= 18\,000$ кГ. Найти число заклепок диаметром $d = 20$ мм.

Решение

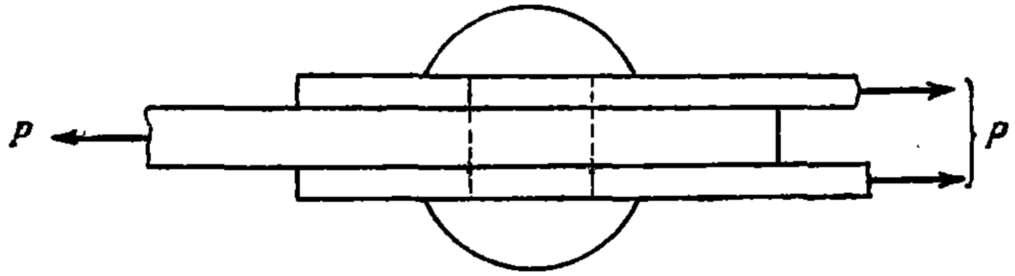

Рисунок 3.2

В этой задаче нужно учесть, что под действием нагрузки P заклепка будет срезаться в двух сечениях, т.е. площадь $S_1 = 2 \cdot \pi d^2/4$. Одна заклепка выдержит нагрузку $P_1 = [\tau] \cdot S_1 = 8792$ кГ, а число заклепок для нагрузки 18 000 кГ определится как $n_1 = P/P_1 = 2{,}04 \approx 3$.

На смятие заклепка работает в одну сторону по двум осевым сечениям заклепки на верхнем и нижнем листах, тогда суммарная площадь сечения $S_2 = 2dh_1$, в другую сторону по осевому сечению среднего листа $S_3 = dh_2$. Поскольку $2h_1 < h_2$, для расчета на смятие используем значение S_2. Тогда одна заклепка выдержит нагрузку $P_2 = S_2 \cdot [\sigma_c] = 6400$ кГ, а необходимое число заклепок $n_2 = 2{,}81 \approx 3$.

Ответ: 3

Пример 3.3

Шпилька диаметром $d = 22$ мм держит пластину толщиной $h = 8$ мм и шириной $a = 100$ мм, пластина нагружена силой $P = 4$ Т. Найти напряжения в листе, а также сминающие и касательные напряжения в шпильке.

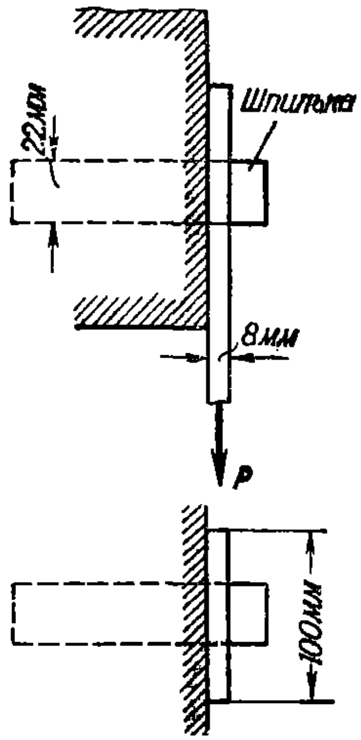

Рисунок 3.3

Решение

Касательные напряжения в шпильке определяются как $\tau = P/S$, где $S = \pi d^2/4$. В итоге $\tau = 1053$ кГ/см^2.

Сминающие напряжения $\sigma_c = P/(d \cdot h) = 2273$ кГ/см^2.

При определении напряжений в листе учтем наличие отверстия под шпильку, тогда площадь поперечного сечения $S_1 = (a - d) \cdot h = 7{,}8 \cdot 0{,}8 = 6{,}24$ см^2, а напряжение будет $P/S_1 = 641$ кГ/см^2.

Пример 3.4

Растягивающая сила P = 20 Т. Толщина среднего листа t = 2 см, верхнего и нижнего t/2. Для болта допускаемые напряжения на срез $[\tau] = 800$ кГ/см^2, на смятие $[\sigma_c] = 2000$ кГ/см^2. Определить диаметр болта d.

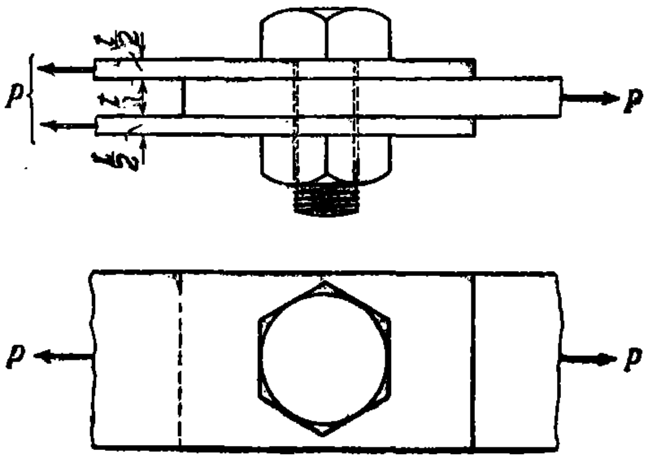

Рисунок 3.4

Решение

На смятие работает сечение $S_1 = d \cdot t = 2d$ см^2. Площадь этого сечения определится как $P/[\sigma_c] = 10$ см^2. Тогда $d = 5$ см.

На срез работает сечение $S_2 = 2 \cdot \pi d^2/4 = 1{,}57\ d^2$. С другой стороны, эта площадь определяется как $P/\ [\tau] = 25$ см^2. Тогда $d = 4$ см. из двух вариантов принимаем больший размер диаметра.

Ответ: 5 см.

Пример 3.5

Определить максимальную толщину h листа, в котором нужно продавить отверстие диметром $d = 22$ мм, если предельная нагрузка на срез равна $[\tau] = 35$ кГ/мм^2, а пробойник выдерживает сминающее напряжение $[\sigma] = 22\ 000$ кГ/см^2.

Решение

Суммарное давление P, которое может создать пробойник, определится как произведение площади сечения пробойника $S = \pi d^2/4$ на сминающее напряжение $P = S \cdot [\sigma] = 83587$ кГ.

При продавливании отверстия вырезается цилиндрическая «пробка», а на срез работает ее боковая поверхность $S_1 = \pi dh = 6{,}9\ h$ (см^2), где h нужно определить. Усилие для среза P_1 определится: $P_1 = [\tau] \cdot S_1 = 24150\ h$ (кГ). Из равенства $P = P_1$ следует, что $h = 3{,}46$ см.

Вычисления проводятся с учетом того, что $d = 2{,}2$ см, а $[\tau] = 3500$ кГ/см^2.

4 ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим примеры решения простейших задач об определении температурных напряжений.

Температурные напряжения возникают в следующих случаях. Во-первых, это может быть следствием неравномерного нагрева по объему детали – как, например, при наливании кипятка в стеклянный стакан он нагревается изнутри и остается относительно холодным снаружи. Возникающие напряжения могут привести к растрескиванию. Во-вторых, для детали или конструкции, состоящей из разных материалов, которые при нагревании меняют размеры неодинаково, в области контакта тоже возникают напряжения. Наконец, даже при равномерном нагреве или охлаждении однородной детали в ней возникают напряжения в случае, когда условия закрепления препятствуют изменению размеров этой детали.

В свободном состоянии и при равномерном нагреве стержень расширяется (удлиняется), и никаких напряжений в нем не возникает. При этом величина удлинения Δl стержня пропорциональна его начальной длине l, перепаду температуры $\Delta \mathrm{T}$ и коэффициенту линейного температурного напряжения α:

$$\Delta l = l \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot \alpha. \tag{4.1}$$

В частности, отсюда следует, что относительная деформация не зависит от длины стержня.

$$\varepsilon = \Delta l / l = \alpha \cdot \Delta T \tag{4.2}$$

Если представить, что концы стержня закреплены, то при нагреве он удлиняться не будет. Это можно трактовать таким образом, что удлинение за счет нагрева компенсируется сжимающими напряжениями, вызывающими деформации сжатия такие, что в итоге стержень размеры не меняет. Эти напряжения в пределах упругости определяются законом Гука:

$$\sigma = \mathrm{E} \cdot \varepsilon = \mathrm{E} \cdot \alpha \cdot \Delta T. \tag{4.3}$$

Заметим, что эти напряжения не зависят от формы и площади поперечного сечения стержня. Знак у сжимающих напряжений минус. В том случае, когда закрепленный по концам стержень охлаждается, в нем возникнут растягивающие напряжения со знаком плюс.

При решении задач используем значения характеристик материалов из таблицы.

Таблица 1

Свойства / Материалы	E, кГ/см^2	ν	G, кГ/см^2	α, град$^{-1}$
Сталь	$2 \cdot 10^6$	0,30	$0{,}75 \cdot 10^6$	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$
Алюминий	$0.75 \cdot 10^6$	0,40	$0{,}27 \cdot 10^6$	$15 \cdot 10^{-6}$
Чугун	$2 \cdot 10^6$	0,30	$0{,}75 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1 \cdot 10^6$	0,35	$0{,}37 \cdot 10^6$	$16{,}5 \cdot 10^{-6}$

Примеры решения задач.

Пример 4.1

Стержень постоянного сечения закреплен между неподвижными опорами. Часть длиной ***a*** (м) медная, часть длиной ***b*** (м) стальная. Определить напряжения в стержне при повышении температуры на величину **ΔT** градусов.

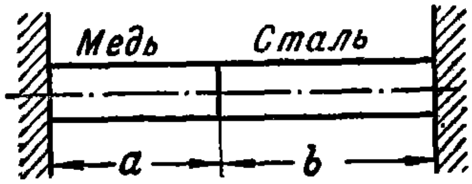

Рисунок 4.1

Решение

Поскольку стержень постоянного сечения, напряжения в любом его сечении будут одинаковыми и в данном случае сжимающими. Обозначим их абсолютное значение как σ. Далее индексом 1 обозначаем величины для медной части стержня, индексом 2 – для стальной.

Удлинения медной части за счет нагрева в свободном состоянии $a \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T$, стальной $b \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T$. Возникающие сжимающие напряжения будут вызывать укорочения на величину $\sigma/E_1 \cdot a$ в медной части, $\sigma/E_2 \cdot b$ – в стальной. В итоге изменение размера медного участка равно $a \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T$ - $\sigma/E_1 \cdot a$, а размера стального $b \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T$ - $\sigma/E_2 \cdot b$. Суммарное изменение размеров по условиям закрепления равно нулю:

$$a \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T - \sigma/E_1 \cdot a + b \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T - \sigma/E_2 \cdot b = 0. \tag{4.4}$$

Отсюда определяется единственная неизвестная величина σ. В данном случае это абсолютное значение, т.к. при подстановке в выражения выше мы уже учитывали, что напряжения сжимающие. В ответе пишем знак минус.

Пример 4.2

Стальной стержень переменного сечения зажат между неподвижными опорами при температуре $\mathbf{T_0}$. Площадь нижнего сечения $\mathbf{S_1}$, верхнего $\mathbf{S_2}$. Найти напряжения в каждой части стержня при повышении температуры до $\mathbf{T_1}$.

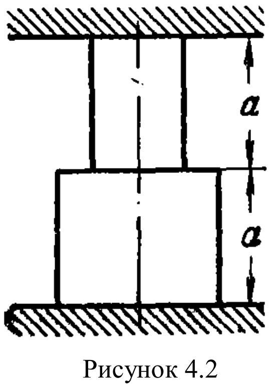

Рисунок 4.2

Решение

Обозначим величины для нижней части индексом 1, для верхней – 2. Возникающая сжимающая нагрузка P будет одинаковой, а напряжения в каждой части будут определяться как $\sigma_1 = P/S_1$ и $\sigma_2 = P/S_2$. В этом случае, в отличие от предыдущей задачи, напряжения различны, но между ними есть связь $\sigma_1 = \sigma_2 \cdot S_2 / S_1$.

Далее решение строится аналогично примеру 1. Так, изменение размеров участка 1 будет $a \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_1/E \cdot a = a \cdot \alpha \cdot T_1 - T_0) - \sigma_2 \cdot S_2/ S_1/E \cdot a$, для участка 2 изменение размера $a \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_2/E \cdot a$. По условиям закрепления суммарное изменение равно нулю:

$$a \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_2 \cdot S_2/ S_1/E \cdot a + a \cdot \alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_2/E \cdot a = 0. \quad (4.5)$$

Можно отметить, что в данном примере результат не зависит от конкретного значения ***a***, т.к. соотношение (4.5) после сокращения на величину ***a*** приводится к виду:

$$\alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_2 \cdot S_2/ S_1/E + \alpha \cdot (T_1 - T_0) - \sigma_2/E = 0. \quad (4.6)$$

Отсюда определяется σ_2 и далее $\sigma_1 = \sigma_2 \cdot S_2/ S_1$.

Пример 4.3

Стальной стержень длиной ***l*** м на одном конце защемлен, на другом есть зазор ***a*** мм. Найти напряжения ***σ*** в стержне при повышении температуры на **ΔT** ^{0}C.

Решение

Для начала находим удлинение стержня $\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$. Если это удлинение меньше зазора ***a***, то напряжений в стержне не возникает, т.е. $\sigma = 0$. В случае, когда $\Delta l > a$, величина $\Delta l - a$ представляет собой абсолютную деформацию сжатия, а относительная деформация составит $(\Delta l - a)/l = \varepsilon$. Эта деформация должна создаваться за счет возникающих сжимающих напряжений $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Пример 4.4

Стержень переменного сечения состоит из медного участка длиной ***a*** см и стального длиной ***b*** см, причем площадь сечения медной части $\mathbf{S_1}$ см^2, стальной S_2 см^2. Конец медного участка защемлен, на конце стального участка есть зазор ***d*** мм. Найти напряжения в частях стержня при повышении температуры на **ΔT** ^{0}C.

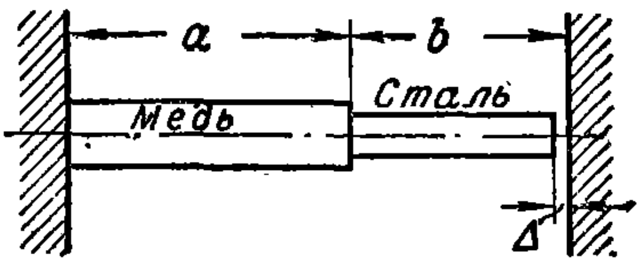

Рисунок 4.2

Решение

Обозначим величины для медной части индексом 1, для стальной – 2. Если в стержне возникает сжимающая нагрузка P, то она одинакова по всей длине.

Общее удлинение стержня при отсутствии ограничений составит величину $\Delta l = a \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T + b \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T$. Если $\Delta l<d$, то напряжений в стержне не будет. В противном случае нужно сжимающими напряжениями выбрать разницу $\Delta l\text{-}d$. В медной части изменение размера составит $P/(S_1 \cdot E_1) \cdot a$, в стальной $P/(S_2 \cdot E_2) \cdot b$. Сумма равна $\Delta l\text{-}d = P/(S_1 \cdot E_1) \cdot a + P/(S_2 \cdot E_2) \cdot b$. Отсюда определяется Р, и далее напряжения в каждой части стержня как P/S_1 и P/S_2.

Пример 4.5

Стержень круглого сечения состоит из трех участков. Концы закреплены, после чего температура стержня повышается на ΔТ. Определить напряжения в каждой части.

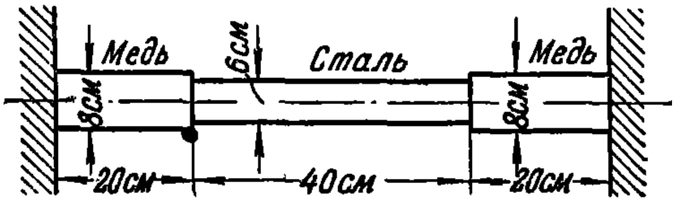

Рисунок 4.3

Решение

В этой задаче из схемы видно, что плоскость, перпендикулярная оси стержня в его середине, будет плоскостью симметрии. Тогда можно рассматривать половину стержня, считая, что в плоскости симметрии реализуется опирание на жесткую неподвижную стенку.

В отличие от рассмотренных ранее случаев стержней с переменными сечениями здесь указаны не площади сечений, а их диаметры 8 и 6 см. Поскольку площадь пропорциональна квадрату диаметра, то соотношение площадей будет $S_1/S_2 = 64/36 = 16/9$. Если для медного участка обозначим напряжение через σ, то для стального будет $16/9 \cdot \sigma$.

Пример 4.6

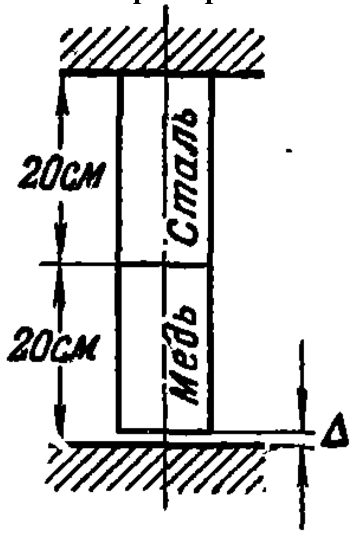

Рисунок 4.4

Стержень верхним концом закреплен неподвижно (см. рисунок), у нижнего конца есть зазор, величина которого при температуре $t_0 = -15\ ^0C$ равна $\Delta = 0{,}4$ мм. Найти напряжения в стержне, если он нагревается до $t_1 = 85\ ^0C$.

Решение

Если стержень может расширяться свободно, удлинение его составит

$$\Delta l = 20 \cdot \alpha_с \cdot (t_1 - t_0) + 20 \cdot \alpha_м \cdot (t_1 - t_0) = 0{,}58 \text{ мм},$$

где индексы «с» и «м» относятся к стали и меди, 20 (см) – длина каждого из участков стержня. Наличие зазора 0,4 мм означает, что за счет сжимающих напряжений σ, которые в данном случае одинаковы на обоих участках стержня, т.к. его сечение постоянно по всей длине, стержень должен стать короче на величину 0,58 – 0,4 = 0,18 (мм). Таким образом

$$\frac{\sigma}{E_м} \cdot 20 + \frac{\sigma}{E_с} \cdot 20 = 0{,}18 мм$$

Отсюда σ = 600 кГ/см^2. В ответе пишем σ = - 600 кГ/см^2, знак минус означает, что напряжения сжимающие.

Пример 4.7

Стержень состоит медного участка длиной *a* и стального длиной *b*. Площади поперечных сечений соответственно $S_м$ и $S_с$. Левый конец закреплен, у правого конца есть зазор Δ. Найти напряжения в стержне после повышения температуры на величину Т.

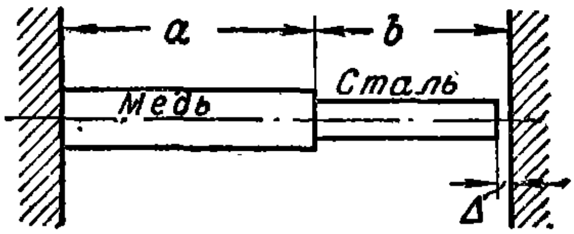

Рисунок 4.5

Решение

Удлинение стержня в свободном состоянии составило бы величину

$$\Delta l = a \cdot \alpha_м \cdot T + b \cdot \alpha_с \cdot T. \tag{4.7}$$

Если зазор Δ больше этой величины (или равен ей), то в стержне напряжений не возникает. Если меньше, то возникающие напряжения должны сжать стержень на величину Δ*l* – Δ. Сжимающая сила Р по всей длине стержня одна и та же, а для напряжений справедливо соотношение

$$\sigma_м \cdot S_м = \sigma_с \cdot S_с \ (= P). \tag{4.8}$$

Тогда

$$\sigma_м = \sigma_с \cdot S_с / S_м, \tag{4.9}$$

Величина сжатия будет

$$\Delta l - \Delta = \sigma_с \cdot S_с / S_м / E_м \cdot a + \sigma_с / E_с \cdot b. \tag{4.10}$$

Отсюда находится напряжение в стальном участке стержня, и далее – в медном.

Пример 4.8

Укладка стальных рельсов длиной l проводится при температуре T_0. Каков должен быть зазор в стыках, чтобы при повышении температуры до величины T_1 в них не возникало сжимающих напряжений? Какие напряжения возникнут, если температура вырастет до значения $T_2 > T_1$?

Решение

Величина зазора в стыках Δ должна компенсировать удлинение рельса, т.е.

$$\alpha_c \cdot l \cdot (T_1 - T_0) = \Delta. \qquad (4.11)$$

Если далее прогревать рельс до T_2, то дополнительное удлинение его в свободном состоянии было бы

$$\Delta l = \alpha_c \cdot l \cdot (T_2 - T_1), \qquad (4.12)$$

а относительная деформация

$$\varepsilon = \Delta l / l, \qquad (4.13)$$

тогда величина возникающих напряжений будет $\sigma = E_c \cdot \varepsilon$.

Пример 4.9

Длина стальной трубы радиуса R с толщиной стенок h при температуре T_0 равна L. Проходящий через трубу пар нагревает ее до T_1. Найти удлинение трубы в свободном состоянии и величину напряжений в ней, если оба торца закрепить. Какова будет общая сжимающая сила P в трубе в последнем случае?

Решение

Удлинение трубы составит величину $\Delta L = \alpha_c \cdot L \cdot (T_1 - T_0)$.

Если торцы трубы закрепить, в ней возникнут напряжения

$$\sigma = E_c \cdot \alpha_c \cdot (T_1 - T_0). \qquad (4.14)$$

Значение сжимающей силы P определится как произведение площади поперечного сечения трубы $S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ на величину σ.

Заключение

В пособии приведены рекомендации по решению и примеры для очень ограниченного круга задач.

Задачи по статике решаются в основном для определения реакций связей, без чего невозможно перейти к определению напряжений в любых реальных конструкциях и деталях. Это первый и необходимый этап прочностного анализа любых изделий.

Решения простейших задач на растяжение-сжатие и сдвиг-срез помогают понять связи возникающих в элементах конструкций напряжений с критериями разрушения и оценить работоспособность этих элементов, в том числе с учетом такого понятия, как запас прочности.

Обычно задачи на температурные напряжения рассматриваются и в теории, и в задачниках, если можно так выразиться, «между делом», а в настоящем пособии им отведен отдельный раздел. Авторы сознательно пошли на такое изложение при том понимании, что величины температурных напряжений никоим образом не связаны с габаритами изделий, в которых они возникают. В этом плане уровень напряжений в элементах микросхем и мостовых переходов могут быть сопоставимы между собой при соответствующих перепадах температуры.

Из основного набора задач сопромата в настоящем пособии не рассмотрены задачи на кручение валов и на изгиб балок. Логика такого изложения связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, как уже говорилось, это нехватка времени по учебному плану. Во-вторых, критерии работоспособности материала валов, так или иначе, связаны с работой в условиях сдвига, а изгиба балок – в условиях растяжения-сжатия.

Авторы надеются, что краткость пособия не пошла в ущерб ясности изложения материала применительно к указанным классам задач, а пособие будет полезным для студентов, слушающих краткий курс прикладной механики.

Список литературы

1. Люкшин, Б. А. Теоретическая механика: учеб. пособие / Б. А. Люкшин – Томск: Томский гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. – 170 с.
2. Прикладная механика: учеб. пособие / Б. А. Люкшин, А. И. Реутов, Ю. А. Реутов [и др.] – Томск: изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. –172 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань. — 2023. – 672 с.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С. М. Тарг – 20-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие. – 36-е изд., исправл. / И. В. Мещерский; под ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
6. Беляев, Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н.М. Беляев. – Москва: Наука, 1968. – 352 с.