Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Е.Б. Грибанова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и других технических направлений

2023

УДК 519.6
ББК 22.19
М54

Рецензент:
Шелестов А.А., доцент кафедры Автоматизированных систем управления ТУСУР, к.т.н.

Автор:
Е.Б. Грибанова

Грибанова, Екатерина Борисовна
М54 Методы оптимизации: Методические указания по выполнению лабораторных работ / Е.Б. Грибанова. – Томск: Томск. гос.ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2023. – 66 с.

Приводится описание лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации» и представлены примеры выполнения заданий. Пособие подготовлено для студентов, обучающихся по направлению Информатика и вычислительная техника (профиль «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем») и других технических направлений.

Одобрено на заседании каф. Автоматизированных систем управления, протокол №11 от 23.11.2023.

УДК 519.6
ББК 22.19

Оглавление

Введение

Данные методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации» и разработаны с учетом требований ФГОС ВО для направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и других технических направлений.

Цель лабораторных работ: приобретение практических навыков для решения задач оптимизации путем реализации алгоритмов на различных языках программирования, а также использования стандартных функций математических пакетов.

Лабораторные работы выполняются в соответствии с порядком, описанном в методических указаниях.

1 Минимизация функции одной переменной

1.1 Методы прямого поиска

1.1.1. Основные понятия

В данной лабораторной работе рассматриваются задачи, в которой целевая функция (ЦФ) является функцией одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси

$$f(x) \to \min;$$
$$x \in [a;b].$$

Число $x^* \in [a;b]$ называется точкой глобального (абсолютного) минимума, или просто точкой минимума, ЦФ $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in [a;b]$.

Число $x^* \in [a;b]$ называется точкой локального минимума ЦФ $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in [a;b]$, таких, что $x \in [x^* + \varepsilon;\ x^* + \varepsilon]$, где $\varepsilon \to 0$, (рисунок 1.1).

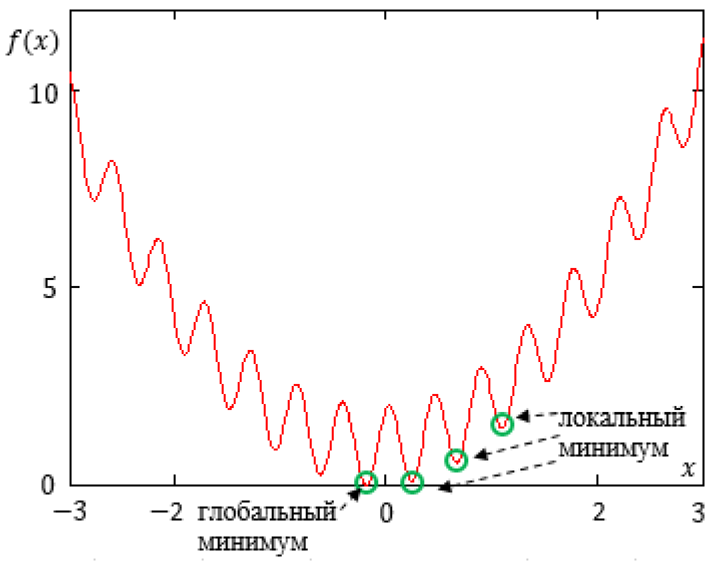


Рисунок 1.1– График функции $f(x) = \cos(14,5x - 0,3) + x(x + 0,2) + 0,01$

Функция $f(x)$ является унимодальной на отрезке [*a; b*], если существует такая точка x^* ∈ [*a; b*], что слева от x^* ЦФ монотонно убывает, а справа - монотонно возрастает.

Если функция $f(x)$ – выпукла на [*a*; *b*], то на любом отрезке $[x';x''] \subset [a;b]$ ее график расположен не выше хорды, проведенной через точки графика с абсциссами x' и x''.

Всякая выпуклая непрерывная на отрезке [*a*; *b*] функция является унимодальной (обратное неверно).

В данной работе рассматриваются методы поиска минимума только выпуклых ЦФ.

Все численные методы поиска минимума функции одной переменной можно разделить на прямые методы и методы, использующие производные первого и более высоких порядков.

Прямые методы используют значения функции в вычисленных точках:

1) метод равномерного поиска;
2) метод дихотомии;
3) метод золотого сечения;
4) Пауэлла;
5) метод Монте-Карло.

Методы первого порядка используют значение или знак производной функции в вычисленных точках:

1) метод Ньютона;
2) метод средней точки.

1.1.2. Метод равномерного поиска

Суть метода: интервал $[a_0, b_0]$ делится на N + 1 равных подынтервалов, в каждой точке (границах подинтервалов) вычисляется значение функции. Выбирается точка, в которой значение функции минимально.

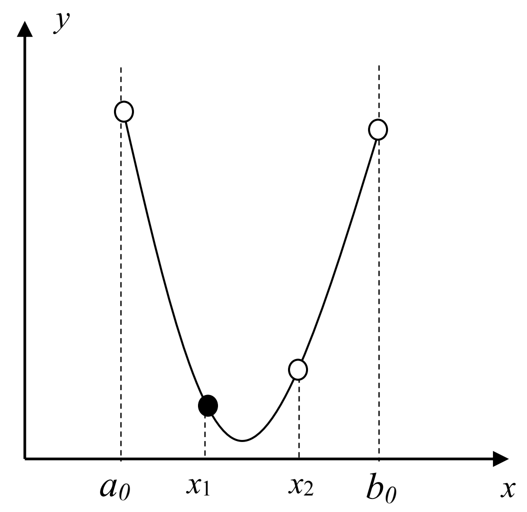


Рисунок 1.2 – Метод равномерного поиска: разбиение интервала на три подинтервала

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходные данные: начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, N - количество вычислений функции.

Шаг 2. Вычислить точки $x_i = a_0 + i\dfrac{(b_0 - a_0)}{N+1}, i = 1..N$, равноотстоящие друг от друга.

Шаг 3. Вычислить значения функции в N найденных точках: $f(x_i)$, $i = 1..N$.

Шаг 4. Среди точек $x_i, i = 1..N$, найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_k) = \min f(x_i)$.

1.1.3. Метод дихотомии

Суть метода: вычисляется середина интервала $[a_0, b_0]$ и две точки по обе стороны от этой середины, и рассчитывается значение функции в этих точках. Если значение функции в левой точке меньше, чем значение функции в правой точке, значит, функция возрастает на этом промежутке (рисунок 1.3), и происходит изменение правой границы. Иначе – функция убывает и происходит изменение левой границы.

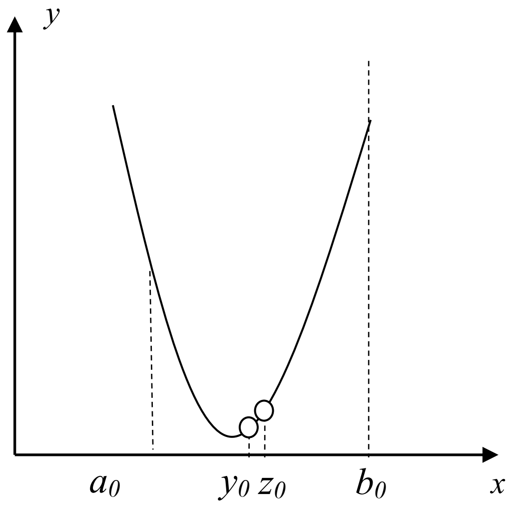


Рисунок 1.3 – Метод дихотомии. Возрастание функции на интервале [y_0;z_0], поэтому правая граница b_0 будет перемещена в точку z_0

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходные данные: начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, ε >0 -малое число, $l > 0$ – точность ($\varepsilon \in (0, 2l)$).

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $y_k = \dfrac{a_k + b_k - \varepsilon}{2}, f(y_k), z_k = \dfrac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}, f(z_k)$.

Шаг 4. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ и перейти к шагу 5;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k$.

Шаг 5. Вычислить $L_k = | b_{k+1} - a_{k+1} |$ и проверить условие окончания:

а) если $L_k \le l$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

б) если $L_k > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

1.1.4. Метод золотого сечения

Суть метода: аналогична методу дихотомии, однако две точки определяются в пропорции золотого сечения (рисунок 1.4).

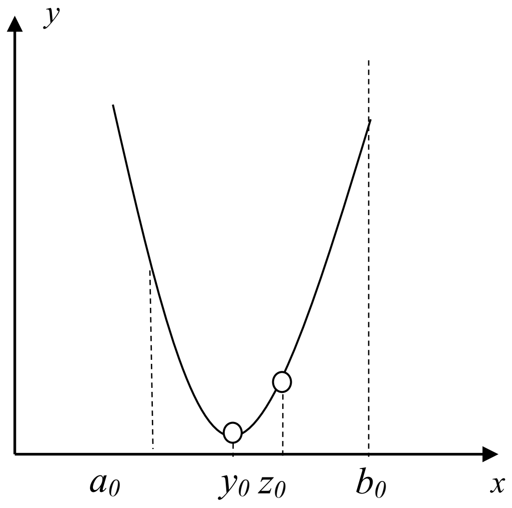


Рисунок 1.4 – Метод золотого сечения. Возрастание функции на интервале [$y_0;z_0$], поэтому правая граница b_0 будет перемещена в точку z_0

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходные данные: начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, точность l >0.

Шаг 2. Положить k =0.

Шаг 3. Вычислить

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0); z_0 = a_0 + b_0 - y_0 .$$

Шаг 4. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 5. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, то положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ и $y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k, z_{k+1} = y_k$. Перейти к шагу 6;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k$ и $y_{k+1} = z_k, z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

Шаг 6. Вычислить $L_k = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $L_k \le l$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

б) если $L_k > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 4.

1.1.5. Метод Пауэлла

Суть метода: определить три точки в направлении уменьшения функции и рассчитать квадратичную аппроксимацию. Сравнить значение функции в наилучшей из трех точек и в точке квадратичной аппроксимации и если условие останова не выполняется, то выбирается наилучшая точка и две точки по обе стороны от неё. Так на рисунке 1.5 будет выбрана точка $\overline{x}$ и две точки по обе стороны (x_1, x_2).

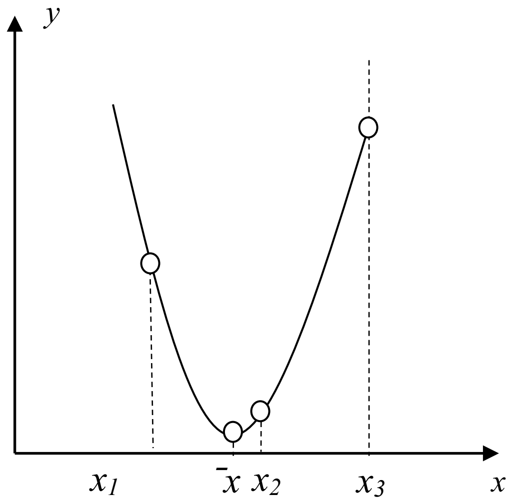


Рисунок 1.5 – Определение точек методом Пауэлла

Алгоритм

Исходные данные: x_1 – начальная точка; Δx – выбранная величина шага по оси x.

Шаг 1: Вычислить $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 2: Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 3: Если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$, если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$. Если $x_3 < x_1$, то перенумеровать точки в естественном порядке: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$.

Шаг 4: Вычислить $f(x_3)$ и найти

$$F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}.$$

$X_{\min}$ равно точке x_i, которая соответствует $F_{\min}$.

Шаг 5: По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислить $\bar{x}$, используя квадратичную аппроксимацию

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right],$$

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2}.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) является ли разность $\left|F_{\min} - f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$;

б) является ли разность $\left|X_{\min} - \bar{x}\right| \le \delta$,

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ - заданные точности.

Если условия а) и б) выполняются одновременно, то закончить поиск (в качестве результата взять точку $\bar{x}$). Иначе переход на Шаг 7.

Шаг 7: Выбрать "наилучшую" точку ($X_{\min}$ или $\bar{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти на Шаг 4.

Замечание: после пятого шага необходимо провести дополнительную проверку, т.к. точка $\bar{x}$ может находиться за интервалом (x_1, x_3). В этом случае точка x_1 заменяется $\bar{x}$ и осуществляется переход к шагу 1.

1.2 Методы, основанные на использовании производных

1.2.1. Метод Ньютона

Суть метода: для производной ЦФ определяется корень с помощью касательных.

Алгоритм

Шаг 1. Определение начальной точки x_0, точности ε.

Шаг 2. Вычислить новую точку

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Шаг 3. Если $|f'(x_{n+1})| \le \varepsilon$, то в качестве решения задачи принимается число $x^* \approx x_{n+1}$, иначе – переход на шаг 2.

1.2.2. Метод средней точки (поиск Больцано)

Суть метода: вычисляется середина z_0 интервала $[a_0, b_0]$ и определяется знака производной в данной точке: если производная отрицательна, то функция убывает на интервале $[a_0, z_0]$ и левая граница перемещается в среднюю точку, иначе – функция возрастает $[z_0, b_0]$ и правая граница переходит в среднюю точку (рис.1.6).

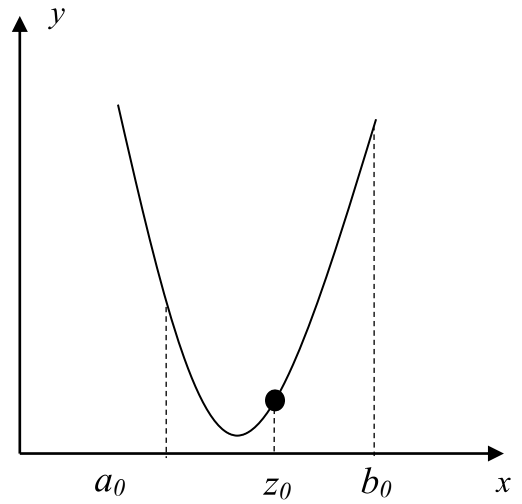


Рисунок 1.6 – Производная в средней точке положительна, следовательно, правая граница будет смещена

Алгоритм

Шаг 1. Задать исходные данные: интервал $L_0 = [a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ - точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $z_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, $f'(z_k)$.

Шаг 4. Сравнить $f'(z_k)$ с нулем:

а) если $f'(z_k) < 0$, положить $a_{k+1} = z_k, b_{k+1} = b_k$ и перейти к шагу 5;

б) если $f'(z_k) > 0$, положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$.

Шаг 5. Проверить условие окончания:

а) если $|f'(z_k)| \le \varepsilon$, процесс поиска завершается и в качестве приближенного решения можно взять точку $x^* = z_k$;

б) если $|f'(z_k)| > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

1.3. Простейшие формулы численного дифференцирования

В качестве приближенных формул первой производной можно воспользоваться следующими выражениями:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Здесь $h > 0$ – шаг.

Формула, гарантирующая более высокую точность:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

В качестве приближенных формул второй производной можно воспользоваться соотношением:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}.$$

1.4. Задание на лабораторную работу №1

1. В соответствии с заданным вариантом необходимо построить график ЦФ. Варианты заданий приведены в Приложении А.
2. Написать программу определения минимума ЦФ с использованием методов прямого поиска (см. вариант).
3. Написать программу определения минимума ЦФ с использованием методов с применением производных.
4. Для каждого метода выполнить три итерации вручную.

Для выполнения задания могут быть использованы пакеты (Excel, MathCad), языки программирования (С++, Pascal и др.). Недостающие данные необходимо выбрать самим. Пример выполнения задачи приведен в Приложении Г.

5. Сравнить методы:

- по числу итераций, при заданной точности ε;
- по достигнутой точности при заданном числе итераций *N*.

2. Минимизация функции нескольких переменных

2.1. Основные понятия

В общем виде задача поиска минимума ЦФ многих переменных может быть записана следующим образом:

$$f(x) \to \min,$$

где $f(x)$ – целевая функция многих переменных;
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n -мерный вектор оптимизируемых параметров;
n – размерность задачи.

Методы многомерной оптимизации можно разделить на следующие группы:

1. Прямые методы, использующие значения функции в вычисленных точках.
2. Градиентные методы, использующие значения градиента.

2.2. Прямые методы

2.2.1. Метод Гаусса

Суть метода: последовательно осуществляется одномерная оптимизация по каждой переменной.

Алгоритм:

Шаг 1. Задается начальная точка x_0, точность $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Шаг 2. Выполняется одномерная оптимизация по каждой переменной.

Шаг 3. Проверка условия $\left\| x^j - x^{j-1} \right\| \le \varepsilon_1$, $\left| f(x^j) - f(x^{j+1}) \right| \le \varepsilon_2$. Если условия выполняются, то осуществляется завершение работы алгоритма, иначе – переход на шаг 2.

2.2.2. Метод Хука-Дживса

Суть метода: нахождение в окрестности текущей точки наилучшей и движение в этом направлении. Если значение в окрестных точках больше, чем в текущей, то происходит уменьшение шага.

Процедура Хука–Дживса представляет собой комбинацию двух поисков:

а) **"Исследующий" поиск**: с заданным шагом Δ_i происходит расчет функции в пробных точках вокруг некоторой исходной точки x^0 ($f(x_0 \pm \Delta_j)$) (рисунок 2.1). Если значение ЦФ в пробной точке меньше значения ЦФ в исходной точке, то шаг поиска успешный. В противном случае из исходной точки делается шаг в противоположном направлении. После перебора всех n координат исследующий поиск завершается. Полученная точка называется базовой.

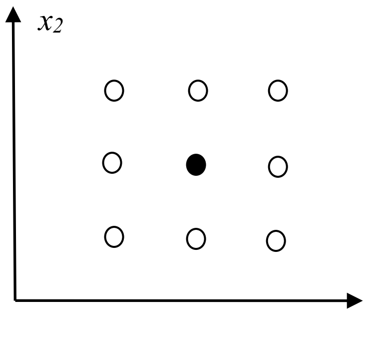


Рисунок 2.1 – Исследующий поиск

б) **Ускоряющий поиск по образцу**: осуществляется шаг из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей эту точку с предыдущей базовой (рисунок 2.2). Новая точка образца определяется по формуле:

$$x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1}).$$

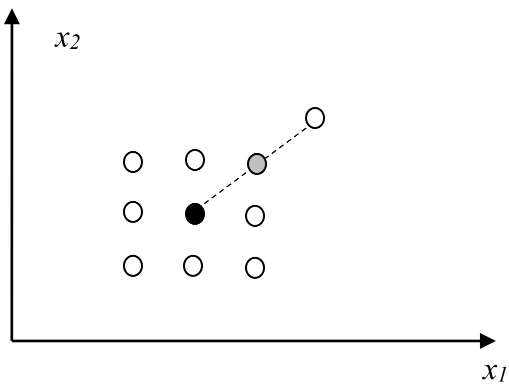


Рисунок 2.2 – Поиск по образцу

Алгоритм:

Введем следующие обозначения: x^k – текущая базовая точка; x^{k-1} – предыдущая базовая точка; x_p^{k+1} – точка, построенная при движении по образцу; x^{k+1} – следующая (новая) базовая точка.

Критерий останова: $\|\Delta x\| \le \varepsilon$.

Шаг 1. Определить начальную точку x^0; приращения (шаги) Δ_i, $i = \overline{1, n}$; коэффициент уменьшения шага $\alpha > 1$; параметр окончания поиска ε.

Шаг 2. Провести исследующий поиск.

Шаг 3. Был ли исследующий поиск удачным (найдена ли точка с меньшим значением ЦФ)?

Да: переход на Шаг 5. Нет: продолжить, т.е. переход на Шаг 4.

Шаг 4. Проверка на окончание поиска. Выполняется ли неравенство $\|\Delta x\| \le \varepsilon$? Да: окончание поиска, т.е. текущая точка аппроксимирует точку экстремума x^*.

Нет: уменьшить приращение Δ_i / α; $i = 1, 2, \ldots, n$. Переход на Шаг 2.

Шаг 5. Провести поиск по образцу: $x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1})$.

Шаг 6. Провести исследующий поиск, используя точку x_p^{k+1} в качестве временной базовой точки. Пусть в результате получена точка x^{k+1}.

Шаг 7. Выполняется ли неравенство: $f(x^{k+1}) < f(x^k)$?

Да: положить $x^{k-1} = x^k$; $x^k = x^{k+1}$. Переход на Шаг 5.

Нет: переход на Шаг 4.

2.2.3. Симплексный метод

Суть метода: приближение к минимальной точке с помощью изменения координат вершин симплекса (рисунок 2.3).

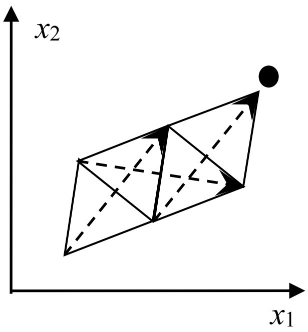


Рисунок 2.3 – Движение симплекса

Шаг 1. Задается исходная вершина симплекса.

$x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$

Задается коэффициент сжатия $\gamma \in [0,1]$ и размер симплекса L. Строится симплекс

$$(x_i^j) = \begin{pmatrix} x_1^0 & ... & x_n^0 \\ x_1^1 & ... & x_n^1 \\ ... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \\ x_1^n & ... & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Здесь j-я строка – это координаты j-ой вершины V_j. ($j = 1, ..., n+1$), где n - размерность пространства (размерность вектора x), i – номер координаты $i = 1, ..., n$.

Определение координат x_i^j, начиная со второй, производится по формуле

$$x_i^j = x_i^0 + \tilde{\ } , \ (j = 1, ..., n; \ \ i = 1, ..., n), \qquad (2.1)$$

где $\tilde{\ }$ - матрица размерности $(n+1) \times n$

$$(\tilde{\ } \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ p_n & q_n & q_n & ... & q_n \\ & p_n & q_n & ... & q_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ q_n & q_n & q_n & ... & p_n \end{pmatrix},$$

где

$$p_n = \frac{L}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}+n-1), \qquad q_n = \frac{L}{n\sqrt{2}}(\sqrt{n+1}-1).$$

Векторы соответствующие вершинам $V_1,...,V_n$, определяемые формулой (2 .1), составят одинаковые углы с координатными осями $x_1,...,x_n$.

Шаг 2. В вершинах симплекса вычисляется ЦФ $f(x^j)$, $j = 0,...,n$

Шаг 3. Проверяем условия: $\left\| x^j - x^{j-1} \right\| \le \varepsilon_1$, $\left| f(x^j) - f(x^{j+1}) \right| \le \varepsilon_2$

Если «да», то конец; если «нет», то переходим на Шаг 4.

Шаг 4. Находится «наихудшая» вершина симплекса (при поиске минимума «наихудшая» вершина – та, в которой значение функции максимально).

$$f(x^p) = \max_j \left\{ f(x^j), j = \overline{1, n+1} \right\}$$

Шаг 5. Осуществляется расчет координат новой вершины (вершина отражения x^p):

$$\ldots \left(\sum_{j=0} x^j - x^p \right) - x^p.$$

Шаг 6. Если точка … оказывается «хуже» всех остальных точек симплекса, то осуществляется возврат к исходному симплексу с последующим его сжатием относительно «лучшей» из вершин x^k

$$f(x^k) = \min_j \left\{ f(x^j), j = \overline{1, n+1} \right\}$$

$$\ldots (1-\gamma)x^s, \; s = 0,1,...,n; \; s \ne k,$$

Переход на Шаг 2.

Если … не является «худшей» в новом симплексе, то перейти на шаг 3.

2.3. Градиентные методы

Градиент функции $f(x)$ многих переменных в некоторой точке x - это вектор, координатами которого являются первые частные производные функции в этой точке:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right].$$

В малой окрестности точки x градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции, а его норма характеризует скорость этого возрастания. Вектор-антиградиент указывает направление наискорейшего убывания функции.

В любой точке поверхности ЦФ $f(x)$ вектор-антиградиент перпендикулярен касательной к линии уровня $f(x) = const$ в этой точке.

Норма вектора-градиента определяется выражением:

$$\left\| \nabla f(x) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^2}.$$

В точке, где имеет место экстремум функции, вектор-градиент и все его компоненты обращаются в ноль $f'(x^*) = (0;0;...;0)$.

Матрица Гессе функции $f(x)$ многих переменных — это матрица вторых производных:

$$H(x)=\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Критерии останова алгоритмов, использующих градиенты, (наиболее употребительные).

Пусть $\varepsilon > 0$ - заданная точность:

1) $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \le \varepsilon$;

2) $\|\nabla f\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \le \varepsilon$;

3) $\left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| \le \varepsilon$;

4) $\|\nabla f\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} \le \varepsilon$;

5) $\|\Delta x\| = \left\| x^{k+1} - x^k \right\| \le \varepsilon$.

2.3.1 Метод градиентного спуска

Суть метода: происходит движение в направлении антиградиента с заданным параметром спуска.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать исходные данные: параметр спуска β, начальная точка x^0, точность ε.

Шаг 2. Вычислить новую точку по формуле:

$$x^{k+1} = x^k - \beta \nabla f\left(x^k\right).$$

Шаг 3. Выполнить проверку завершения алгоритма с использованием одного из критериев. Если условие выполняется, то работа алгоритма завершается, иначе – происходит переход на шаг 2.

2.3.2. Метод Коши

Суть метода: движение в направлении антиградиента путем осуществления одномерной минимизации.

Алгоритм:

Шаг 1. Выбрать начальную точку x^0.

Шаг 2. На k -ой итерации, где $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$, найти такое λ_k, что

$$f\left(x^k + \lambda_k d_k\right) = \min_{\lambda \ge 0} f\left(x^k + \lambda d_k\right).$$

Положить $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$.

Шаг 3. Проверка критерия останова.

Да: окончание поиска $\rightarrow$ конец. Нет: $k = k + 1$, $\rightarrow$ Ш. 2.

2.3.3. Метод Ньютона

Суть метода: решение системы уравнений (приравненные к нулю частные производные) методом Ньютона.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать исходные данные: начальная точка x^0, точность ε.

Шаг 2. Выполнить расчет новой точки по итерационной формуле:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f\left(x^k\right)\right]^{-1} \nabla f\left(x^k\right).$$

Шаг 3. Проверить условие останова. При выполнении условия работа алгоритма завершается, иначе – переход на шаг 2.

2.4. Задание

1. В соответствии с вариантом построить график ЦФ. Варианты заданий приведены в приложении Б.
2. Написать программу определения минимума ЦФ с использованием метода прямого поиска (см. вариант).
3. Написать программу определения минимума ЦФ с использованием градиентного метода.
4. Для каждого метода выполнить три итерации вручную.

Для выполнения задания могут быть использованы пакеты (Excel, MathCad), языки программирования (C++, Pascal и др.). Пример выполнения лабораторной работы приведен в Приложении Г.

3. Условная оптимизация

3.1. Задача линейного программирования

3.1.1. Постановка задачи о диете

Задача о диете заключается в определении такого набора продуктов (количества продуктов каждого вида), чтобы его стоимость была минимальной и при этом удовлетворялась потребность человека в питательных веществах. Примем следующие обозначения: x_j $(j=1,...,n)$ – число единиц товара j - го вида; $b_i\,(i=1,...,m)$ – необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i; a_{ij} – число единиц питательного вещества S_i в единице продукта j-го вида; c_j – стоимость единицы продукта j-го вида.

Тогда экономико-математическая модель задачи примет вид:

найти такой рацион $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1+a_{12}x_2+...+a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

и условию

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,...,x_n \ge 0$,

при котором функция

$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$

принимает **минимальное** значение.

3.1.2 Постановка транспортной задачи

Транспортная задача заключается в определении такого плана перевозок (количества товара, доставляемого из пунктов производства в пункты потребления), чтобы стоимость доставки была минимальной. В m пунктах отправления A1, A2, …, Am, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i $(i=1,...,m)$. Данный продукт потребляется в n пунктах B1, B2, … , Bn, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим b_j $(j=1,...,n)$. Если объем производства равен объему потребления, то такая модель называется сбалансированной. Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим x, тогда целевая функция задачи будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \to \min$$

а ограничения выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i;\ i=1,...,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j;\ j=1,...,n$$

$$x_{ij}>0.$$

3.2. Задание

3.2.1. Задача о диете

1. В таблице 3.1 представлена информация о некоторых продуктах: количестве белка, жиров и углеводов, содержащихся в них, а также калорийность и цена (за 100 г.). Необходимо сформировать дневной рацион из 10-15 продуктов (выбрать на свое усмотрение), считая, что суточная потребность человека в белке, жирах, углеводах и энергии составляет соответственно 60 г., 70 г., 280 г. и 1826 килокалорий.

2. Добавить условие разнообразия рациона, согласно которому человек не может в день употреблять более 400 г. продукта одно вида.

3. Рассчитать стоимость полученного набора продуктов в первом и во втором случае.

Для решения этих задач необходимо построить математическую модель и реализовать ее в пакете MathCad, Excel или с помощью математических библиотек.

Пример выполнения лабораторной работы представлен в приложении Г. В приложениях Д, Ж приводится описание решения оптимизационных задач в Excel и MathCad.

Таблиц 3.1 – Состав продуктов

	Название продукта	**Белки**	**Жиры**	**Углеводы**	**Ккал**	**Цена**
1	Яйцо куриное	12.7	11.5	0.7	157	15
2	Арахис	26.3	45.2	9.7	550	21
3	Горох цельный	23.0	1.2	53.3	316	30
4	Грецкий орех	13.8	61.3	10.2	647	44
5	Крупа гречневая	12.6	2.6	68.0	345	6
6	Пшено	12.0	2.9	69.3	351	3,2
7	Рис	8.0	1.0	76.0	345	6
8	Творог	7.1	23.0	27.5	345	13
9	Сыр	27.0	40.0	0.0	468	18
10	Колбаса вареная Любительская	12.2	28.0	0.0	300	17
11	Колбаса варено-копченая Сервелат	28.2	27.5	0.0	360	18
12	Сосиски Молочные	12.3	25.3	0.0	276	18
13	Говядина	18.9	12.4	0.0	187	21
14	Свинина	16.4	27.8	0.0	315	23
15	Кабачки	0.6	0.3	5.7	27	2
16	Капуста белокочанная	1.8	0.0	5.4	28	1,8
17	Картофель	2.0	0.1	19.7	87	2,5
18	Морковь	1.3	0.1	7.0	34	2
19	Огурцы	0.8	0.0	3.0	15	3
20	Перец красный сладкий	1.3	0.0	5.7	28	6,5
21	Свекла	1.7	0.0	10.8	50	2
22	Горбуша	21.0	7.0	0.0	147	12
23	Икра осетровая зернистая	28.9	9.7	0.0	202	164
24	Скумбрия	18.0	9.0	0.0	153	15
25	Шоколад темный	5.4	35.3	52.6	549	30
26	Груша	2.3	0.0	62.1	257	9
27	Персики	3.0	0.0	68.5	286	10

28	Яблоки	3.2	0.0	68.0	284	7
29	Апельсин	0.9	0.0	8.4	37	7,5
30	Бананы	1.5	0.0	22.0	94	4
31	Черешня	1.1	0.0	12.3	53	18
32	Макаронные изделия	11.0	0.9	74.2	348	3
33	Хлеб пшеничный из муки 1 сорта	7.7	2.4	53.4	266	3

3.2.2. Транспортная задача

Заводы производственной фирмы (производство офисных кресел) расположены в городах Омск, Новосибирск, Томск. Центры распределения расположены в городах Нижний Новгород, Пермь, Краснодар. Объемы производства и величина спроса в пунктах представлены в приложении В. Одно изделие имеет вес 3 кг. и объем 0,8 м3. Стоимость перевозки рассчитайте с помощью онлайн-калькулятора http://www.jde.ru/calc.

Составьте экономико-математическую модель задачи. С помощью пакета *MathCAD, Excel* или с помощью математических библиотек найдите оптимальное распределение поставок и минимальные затраты на перевозку.

Пример выполнения лабораторной работы представлен в приложении Г. В приложениях Д, Ж приводится описание решения оптимизационных задач в Excel и MathCad.

Список литературы

1. Мицель, А.А. Исследование операций и методы оптимизации в экономике. Часть 1. Лекционный курс / А.А. Мицель. – Томск: ТУСУР, 2016. – 146 с.
2. Мицель, А.А. Исследование операций и методы оптимизации в экономике. Лабораторный практикум: Методические указания по выполнению лабораторных работ / А.А. Мицель – Томск: ТУСУР, 2016. – 62 с.
3. Мицель, А.А. Методы оптимизации: Учебное пособие / А.А. Мицель, А.А. Шелестов. – Томск: Изд-во Томск. гос.ун-та систем управления и радиоэлектроники, 2004. – 256 с.
4. Исследование операций в экономике: Учеб.пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Москва: Юрайт, 2011. – 430 с.

Приложение А. Варианты заданий к лабораторной работе №1 «Минимизация функции одной переменной»

Варианты	Задача	Методы прямого поиска	Методы с использованием производным
1	$f(x)=\left(x-4\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
2	$f(x)=\left(x-4\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
3	$f(x)=\left(x-5\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
4	$f(x)=\left(x-5\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
5	$f(x)=\left(x-3\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
6	$f(x)=\left(x-3\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
7	$f(x)=\left(x-9\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
8	$f(x)=\left(x-9\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
9	$f(x)=\left(x-7\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
10	$f(x)=\left(x-7\right)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
11	$f(x)=\left(x-10\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
12	$f(x)=\left(x-10\right)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
13	$f(x)=\left(x-2\right)^2,\ x\in[0;7],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
14	$f(x)=\left(x-2\right)^2,\ x\in[0;8],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона

15	$f(x)=(x-1)^2,\ x\in[0;6],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
16	$f(x)=(x-1)^2,\ x\in[0;6],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
17	$f(x)=(x-11)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
18	$f(x)=(x-11)^2,\ x\in[0;15],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
19	$f(x)=(x-8)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
20	$f(x)=(x-8)^2,\ x\in[0;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
21	$f(x)=(x-14)^2,\ x\in[0;20],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
22	$f(x)=(x-14)^2,\ x\in[0;20],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
23	$f(x)=(x-8)^2,\ x\in[3;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
24	$f(x)=(x-8)^2,\ x\in[3;10],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
25	$f(x)=(x-2)^2,\ x\in[0;5],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
26	$f(x)=(x-2)^2,\ x\in[0;7],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона
27	$f(x)=(x-3)^2,\ x\in[0;8],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Золотого сечения, Пауэлла	Средней точки
28	$f(x)=(x-3)^2,\ x\in[0;8],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Монте-карло, Пауэлла	Ньютона
29	$f(x)=(x-4)^2,\ x\in[0;9],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Равномерный поиск, Пауэлла	Средней точки
30	$f(x)=(x-4)^2,\ x\in[0;9],\ \varepsilon=0{,}1,\ \ x_0=0$	Дихотомии, Пауэлла	Ньютона

Приложение Б Варианты заданий к лабораторной работе №2 «Минимизация функции нескольких переменных»

Вариант	Задача	Метод прямого поиска	Градиентный метод
1	$f(x_1,x_2)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Коши
2	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\Delta x=[2{,}2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Коши
3	$f(x_1,x_2)=2(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Градиентный спуск
4	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\Delta x=[2{,}2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Ньютона
5	$f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[0,0]$; $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}5$ $\varepsilon=0{,}1$, $L=1$	Симплексный	Градиентный спуск
6	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[1,2]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексный	Коши
7	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2; x^0=[7,7]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Ньютона
8	$f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[1{,}1]$; $\Delta x=[2{,}2]$; $\alpha=2$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Градиентный спуск
9	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0{,}1]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексный	Ньютона
10	$f(x_1,x_2)=4(x_1-3)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Коши
11	$f(x_1,x_2)=2(x_1-2)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\Delta x=[2{,}2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Коши
12	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[0,0]$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Градиентный спуск
13	$f(x_1,x_2)=2(x_1-1)^2+(x_2-6)^2$; $x^0=[0,0]$; $\Delta x=[2{,}2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Ньютона
14	$f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-9)^2$;	Симплексный	Градиентный спуск

	$x^0=[0,4]$; $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}5$ $\varepsilon=0{,}1$, $L=1$		
15	$f(x_1,x_2)=2(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[1,2]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексны й	Коши
16	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-1)^2$; $x^0=[0,-7]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Ньютона
17	$f(x_1,x_2)=3(x_1-3)^2+(x_2-5)^2$; $x^0=[1,1]$; $\Delta x=[2,2]$; $\alpha=2$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Градиентны й спуск
18	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-7)^2$; $x^0=[0,1]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексны й	Ньютона
19	$f(x_1,x_2)=4(x_1-4)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[1,2]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Коши
20	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$; $x^0=[1,0]$; $\Delta x=[2,2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Коши
21	$f(x_1,x_2)=2(x_1-9)^2+(x_2-8)^2$; $x^0=[3,3]$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Градиентны й спуск
22	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-7)^2$; $x^0=[2,3]$; $\Delta x=[2,2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Ньютона
23	$f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-5)^2$; $x^0=[1,2]$; $\beta=0{,}1$; $\gamma=0{,}5$ $\varepsilon=0{,}1$, $L=1$	Симплексны й	Градиентны й спуск
24	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-5)^2$; $x^0=[0,1]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексны й	Коши
25	$f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-4)^2$;$x^0=[0,0]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Ньютона
26	$f(x_1,x_2)=3(x_1-2)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[0,1]$; $\Delta x=[2,2]$; $\alpha=2$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Градиентны й спуск
27	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-7)^2$; $x^0=[2,1]$; $\gamma=0{,}5$; $L=1$; $\varepsilon=0{,}1$	Симплексны й	Ньютона
28	$f(x_1,x_2)=4(x_1-4)^2+(x_2-7)^2$; $x^0=[0,4]$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Коши
29	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-4)^2$; $x^0=[1,1]$; $\Delta x=[2,2]$; $\alpha=2$; $\varepsilon=0{,}1$	Хука-Дживса	Коши
30	$f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-5)^2$; $x^0=[0,2]$; $\beta=0{,}1$; $\varepsilon=0{,}1$	Гаусса	Градиентны й спуск

Приложение В. Варианты заданий к лабораторной работа №3 «Условная оптимизация». Транспортная задача

Вариант	Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
	Омск	Новосибирск	Томск	Нижний Новгород	Пермь	Краснодар
1	1000	2000	1200	2000	1100	1100
2	1500	1000	800	2000	900	400
3	1400	700	1000	900	800	1400
4	1300	1200	1100	1000	1500	1100
5	700	600	500	1000	200	60
6	1400	1700	1600	2000	1000	1700
7	1300	1700	1600	1900	1000	1700
8	1400	1800	1600	2000	1800	1700
9	2000	1700	1600	2000	1000	2300
10	1000	1700	1600	1600	1000	1700
11	1000	1200	1600	1600	1000	1200
12	1500	1700	1600	2100	1000	1700
13	1000	1700	1600	1600	1000	1700
14	700	1700	1600	1600	1000	1400
15	1000	2000	1600	1600	1300	1700
16	2000	1100	1100	1000	2000	1200
17	2000	900	400	1500	1000	800
18	900	800	1400	1400	700	1000
19	1000	1500	1100	1300	1200	1100
20	1000	200	60	700	600	500
21	2000	1000	1700	1400	1700	1600
22	1900	1000	1700	1300	1700	1600
23	2000	1800	1700	1400	1800	1600
24	2000	1000	2300	2000	1700	1600
25	1600	1000	1700	1000	1700	1600
26	1600	1000	1200	1000	1200	1600
27	2100	1000	1700	1500	1700	1600
28	1600	1000	1700	1000	1700	1600
29	1600	1000	1400	700	1700	1600
30	1600	1300	1700	1000	2000	1600

Приложение Г. Примеры отчетов по лабораторным работам по дисциплине «Исследование операций и методы оптимизации»

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет систем управления (ФСУ)

Кафедра автоматизированных систем (АСУ)

Минимизация функции одной переменной

Отчет по лабораторной работе № 1 по дисциплине
«Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент гр.____
И.О. Фамилия
« »__________20_ г.

Руководитель:
И.О. Фамилия руководителя
« »__________20__ г.

20__

Задание

1. В соответствии с вашим вариантом постройте график функции.
2. Напишите программу определения минимума функции с использованием методов прямого поиска (см. вариант).
3. Напишите программу определения минимума функции с использованием методов с применением производных.
4. Для каждого метода выполните две итерации вручную.
5. Сравните методы по числу итераций.

Для выполнения задания могут быть использованы пакеты (Excel, MathCad), языки программирования (C++, Pascal и др.).

Функция: $f(x)=(x-2)^2$, интервал [0;10], точность ε =0,1.

Методы: равномерный поиск, Пауэлла, средней точки.

Построим график функции с помощью Excel (рис.1.1).

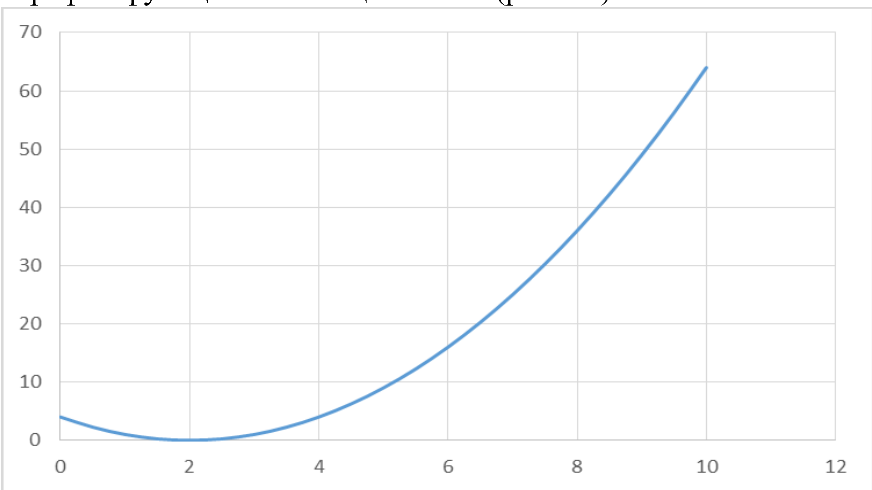


Рисунок 1.1 - График функции $f(x)=(x-2)^2$ на интервале [0;10]

Для построения графика один столбец заполним значениями аргументов (от 0 до 10 с шагом 0,5):

[H1]=0

[H2]=H1+0,5

…

[H21]=H20+0,5

В следующий столбец запишем значения функции в данных точках:

[I1]=(H1-2)^2

…

[I21] =(H21-2)^2

Далее выделяем значения в двух столбцах и выбираем в главном меню «Вставка»-«Диаграммы»-«Точечная с прямыми отрезками».

Из рисунка 1.1 видно, что минимум функции находится в точке x=2.

Решим данную задачу с помощью макроса Excel.

Код метода *равномерного поиска* (для 20 точек) представлен на рис.1.2.

```
Function f(x) As Double
    f = (x - 2) ^ 2 'Определение заданной функции
End Function
Sub Кнопка1_Щелчок()
    'определим границы интервала
    a = 0
    b = 10
    N = 20 'число точек
    i = 0 'переменная для перебора точек
    'начальные значения точки минимума
    xmin = a
    fmin = f(xmin)
    'цикл перебора точек
    Do While (i <= N)
        x = a + i * (b - a) / (N + 1) 'расчет значения новой точки
        'если значение функции в новой точке меньше минимального,
        'то запомнить его в качестве минимального
        If f(x) < fmin Then
            xmin = x
            fmin = f(x)
        End If
        i = i + 1
    Loop
    'Вывод минимального значения функции и найденного арумента
    Cells(2, 1) = xmin
    Cells(2, 2) = fmin
End Sub
```

Рисунок 1.2 - Код метода равномерного поиска

Результат работы макроса представлен на рис.1.3.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)			
2	1,904762	0,00907		Расчет	
3					
4					

Рисунок 1.3 - Результат программы

Выполним две итерации вручную.

1 итерация. i=0. Значение аргумента равно:

$$x = a + i \cdot \frac{b-a}{N+1} = 0 + 0 \cdot \frac{10-0}{21} = 0.$$

Значение функции в этой точке: $f(0) = (0-2)^2 = 4$.

2 итерация. i=i+1=1. Значение аргумента равно:

$$x = a + i \cdot \frac{b-a}{N+1} = 0 + 1 \cdot \frac{10-0}{21} = 0,48.$$

Значение функции в этой точке: $f(0,48) = (0,48-2)^2 = 2,32$.

Полученное значение функции меньше, чем значение на предыдущей итерации, поэтому $x_{\min} = 0,48$.

Код метода *Пауэлла* (для $\Delta x = 1,5$) представлен на рис. 1.4.

Результат работы макроса представлен на рис.1.5.

```
Sub Кнопка2_Щелчок()
    'определим расположение точек x1,x2,x3
    x1 = 0
    dx = 1.5
    x2 = x1 + dx
    If f(x2) < f(x1) Then
        x3 = x1 + 2 * dx
    Else: x3 = x1 - dx
    End If
    'если был выполнен шаг влево, то осуществляется нумерация в
    'естественном порядке
    If x3 < x1 Then
        xp = x3
        x3 = x2
        x2 = x1
        x1 = xp
    End If
    'цикл по итерациям
    Do
        'расчет значений функции в найденных точках
        f1 = f(x1)
        f2 = f(x2)
        f3 = f(x3)
        'нахождение минимального значения функции
        fmin = f1
        xmin = x1
        If f2 < fmin Then
            xmin = x2
            fmin = f2
        End If
        If f3 < fmin Then
            fmin = f3
            xmin = x3
        End If
```

```
    'вычисление квадратичной аппроксимации
    a1 = (f2 - f1) / (x2 - x1)
    a2 = 1 / (x3 - x2) * ((f3 - f1) / (x3 - x1) - (f2 - f1) / (x2 - x1))
    xs = (x2 + x1) / 2 - a1 / (2 * a2)
    'проверка условия завершения работы алгоритма
    If (Abs(fmin - f(xs)) < 0.1) And (Abs(xmin - xs) < 0.1) Then Exit Do
    'при заданной величине шага минимальное значение будет в точке x2 либо xs.
    'В зависимости от из расположения возьмем эти две точки и одну из границ
    If x2 < xs Then
        x1 = x2
        x2 = xs
    ElseIf x2 > xs Then
        x1 = xs
    End If
Loop
'выберем из xmin и xs точку, в которой функция минимальна и отобразим полученн
'решение
If fmin < f(xs) Then
    Cells(2, 1) = xmin
    Cells(2, 2) = fmin
Else
    Cells(2, 1) = xs
    Cells(2, 2) = f(xs)
End If
End Sub
```

Рисунок 1.4 - Код метода Пауэлла

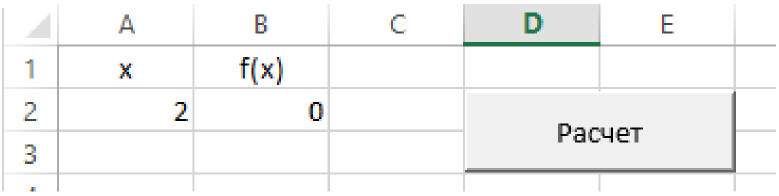


Рисунок 1.5 - Результат метода Пауэлла

Выполним две итерации вручную.

1 итерация. Выполним расчет следующей точки:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0 + 1,5 = 1,5$.

Значение функции:

$f(x_1) = (x_1 - 2)^2 = 4$,

$f(x_2) = (x_2 - 2)^2 = (1,5 - 2)^2 = 0,25$.

Так как $f(x_2) < f(x_1)$, то: $x_3 = 0 + 2 \cdot 1,5 = 3$.

Значение функции $f(x_3) = (x_3 - 2)^2 = (3 - 2)^2 = 1$.

Минимальное значение функции: $f_{\min} = 0,25$, $x_{\min} = 1,5$.

Вычислим квадратичную аппроксимацию:

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0,25 - 4}{1,5 - 0} = -2,5.$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right] = \frac{1}{3 - 1,5}\left[\left(\frac{1 - 4}{3 - 0}\right) - \left(\frac{0,25 - 4}{1,5 - 0}\right)\right] = 1$$

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2} = \frac{1,5 + 0}{2} - \frac{-2,5}{2 \cdot 1} = 2.$$

Значение функции: $f(\bar{x}) = (2 - 2)^2 = 0$.

Выбираем точку $\bar{x}$, в которой функция минимальна и две точки по обе стороны: $x_1 = 1,5$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Переходим к следующей итерации.

2 итерация

Минимальное значение функции: $f_{\min} = 0,\ \ x_{\min} = 2$.

Вычислим квадратичную аппроксимацию:

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1,5}{2 - 1,5} = -0,5.$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right] = \frac{1}{3-2}\left[\left(\frac{1 - 0,25}{3 - 1,5}\right) - \left(\frac{0 - 0,25}{2 - 1,5}\right)\right] = 1$$

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2} = \frac{2 + 1,5}{2} - \frac{-0,5}{2 \cdot 1} = 2.$$

Значение функции: $f(\bar{x}) = (2-2)^2 = 0$

$f_{\min} - f(\bar{x}) = 0$

$x_{\min} - \bar{x} = 2 - 2 = 0$

Условие $\left|f_{\min} - f(\bar{x})\right| \le 0,1$ и $\left|x_{\min} - \bar{x}\right| \le 0,1$ выполняется, следовательно, работа алгоритма завершается.

Выполним теперь решение задачи методом *средней точки*.

Код метода средней точки представлен на рис.1.6.

Результат работы программы представлен на рис. 1.7.

Выполним вручную две итерации.

1 итерация. Вычислим среднюю точку ($a = 0, b = 10$):

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+10}{2} = 5.$$

Значение производной $f'(x) = 2(x-2)$ в этой точке:

$f'(3) = 2(3-2) = 2$.

Значение положительно, поэтому смещаем правую границу: $b = c = 5$.

```
Function f(x) As Double
    f = (x - 2) ^ 2 'исходная функция
End Function
Function fp(x) As Double
    fp = 2 * (x - 2) 'производная функции
End Function
Sub Кнопка3_Щелчок()
    'определяем начальные границы
    a = 0
    b = 10
    'определяем точность
    e = 0.1
    'цикл по итерациям
    Do
        c = (a + b) / 2 'рассчитываем среднюю точку
        'если производная отрицательна, то смещаем левую границу
        If fp(c) < 0 Then
            a = c
        'если производная положительна, то смещаем правую границу
        Else
            b = c
        End If
        'если модуль производной в точке меньше заданной точности,
        'то завершаем вычисления
        If Abs(fp(c)) < e Then Exit Do
    Loop
    'рассчитываем среднюю точку и значение функции в ней
    xmin = (a + b) / 2
    fmin = f(xmin)
    'выводим полученные значения в ячейки
    Cells(2, 1) = xmin
    Cells(2, 2) = fmin
End Sub
```

Рисунок 1.6 – Код метода средней точки

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)			
2	2,1875	0,035156		Расчет	
3					
4					

Рисунок 1.7 – Результат оптимизации методом средней точки

2 итерация. Вычислим среднюю точку:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+5}{2} = 2,5.$$

Значение производной в этой точке:

$$f'(2,5) = 2(2,5-2) = 1.$$

Значение положительно, поэтому смещаем правую границу: $b = c = 2,5$.

Условие останова ($|f'(2,5)| < 0,1$) не выполняется, поэтому будут выполнены ещё итерации.

5) Выполним сравнение алгоритмов по числу реализаций. Для этого добавим в код переменную (*k*), значение которой увеличивается на единицу в каждой итерации цикла (рис.1.8).

```
Function f(x) As Double
    f = (x - 2) ^ 2 'исходная функция
End Function
Function fp(x) As Double
    fp = 2 * (x - 2) 'производная функции
End Function
Sub Кнопка3_Щелчок()
    'определяем начальные границы
    a = 0
    b = 10
    'определяем точность
    e = 0.1
    'цикл по итерациям
    k = 0 'число итераций
    Do
        c = (a + b) / 2 'рассчитываем среднюю точку
        'если производная отрицательна, то смещаем левую границу
        If fp(c) < 0 Then
            a = c
        'если производная положительна, то смещаем правую границу
        Else
            b = c
        End If
        'если модуль производной в точке меньше заданной точности,
        'то завершаем вычисления
        k = k + 1
        If Abs(fp(c)) < e Then Exit Do
    Loop
    'рассчитываем среднюю точку и значение функции в ней
    xmin = (a + b) / 2
    fmin = f(xmin)
    'выводим полученные значения в ячейки
    Cells(2, 1) = xmin
    Cells(2, 2) = fmin
    Cells(2, 3) = k
End Sub
```

Рисунок 1.8 – Код программы с подсчетом числа итераций

В таблице 1.1 предствлено определенное число итераций для метода Пауэлла и метода средней точки. Метод Пауэлла позволил найти решение за меньшее число итераций, однако реализация этого метода более сложная.

Таблица 1.1 – Сравнение методов по числу итераций

	Метод Пауэлла	Метод средней точки
Число итераций	2	5

Заключение

Выполнена оптимизация функции с помощью трех методов. Наиболее точное решение было получено с помощью метода Пауэлла, наиболее простым методом является метод равномерного поиска.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет систем управления (ФСУ)

Кафедра автоматизированных систем (АСУ)

Минимизация функции нескольких переменных

Отчет по лабораторной работе № 2 по дисциплине
«Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент гр.____
И.О. Фамилия
«   »__________20__ г.

Руководитель:
И.О. Фамилия руководителя
«   »__________20__ г.

20__

Задание

1. В соответствии с вашим вариантом постройте график функции.
2. Напишите программу определения минимума функции с использованием метода прямого поиска (см. вариант).
3. Напишите программу определения минимума функции с использованием градиентного метода.
4. Для каждого метода выполните две итерации вручную.

Для выполнения задания могут быть использованы пакеты (Excel, MathCad), языки программирования (C++, Pascal и др.). Пример выполнения задания приведен в Приложении.

Функция: $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\alpha = 2$.

Методы: Хука-Дживса, градиентный спуск.

График функции представлен на рис.1.9.

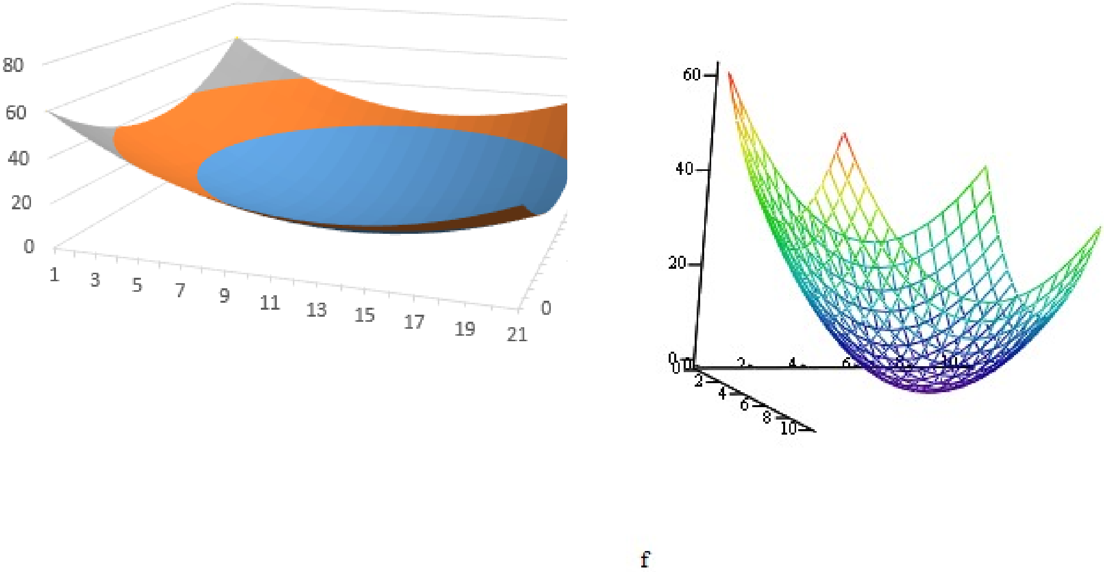
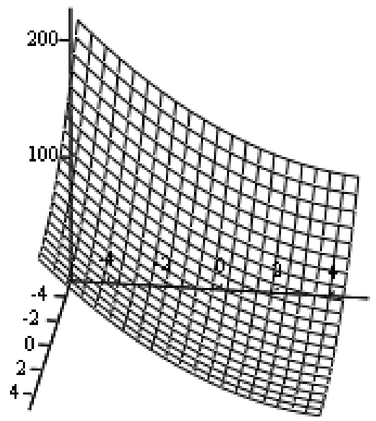


Рисунок 1.9 – График функции $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$:
а)построенный в Excel; b) построенный в MathCad

Для построения графика в Mathcad нужно задать функцию, а затем выбрать в главном меню «Insert»-«Graph»-«Surface Plot» и в левом нижнем маркере написать название функции (рис.1.10).

$$f(x1,x2) := (x1-5)^2 + (x2-6)^2$$



f

Рисунок 1.10 – Построение графика

Чтобы закрасить график нужно нажать на нем правой кнопкой и выбрать «Properties». Далее нужно перейти на вкладку «Appearance» и поставить переключаель ColorOptions на «Colormap» (рис.1.11). Если нужно, чтобы график был закрашен, то переключатель Fill Options переводится в положение Fill Surface.

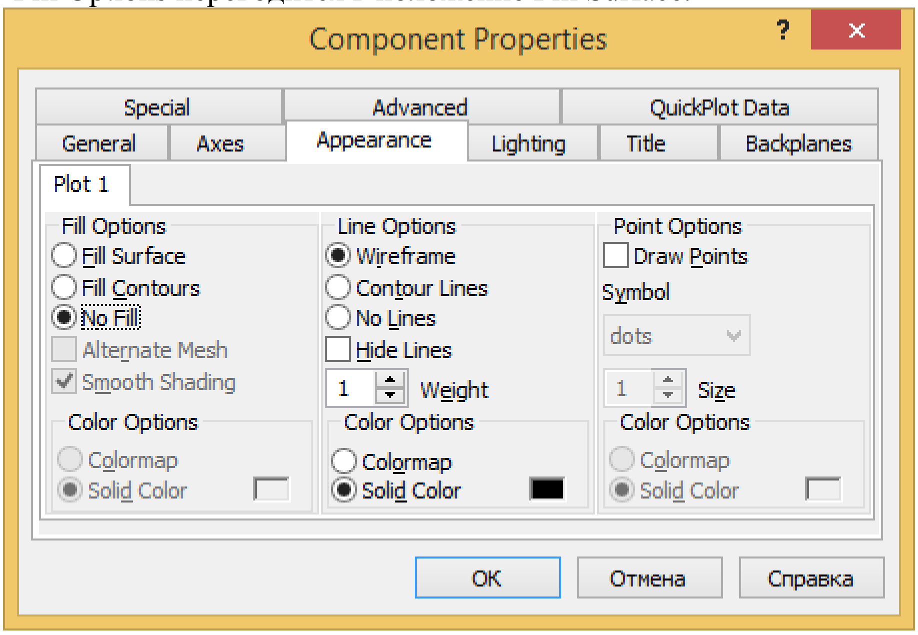


Рисунок 1.11 – Параметры для закрашивания графика

Для того, чтобы увеличить диапазон аргументов, нужно перейти на вкладку QuickPlot Data и установить начальные и конечные значения для двух аргументов (рис.1.12).

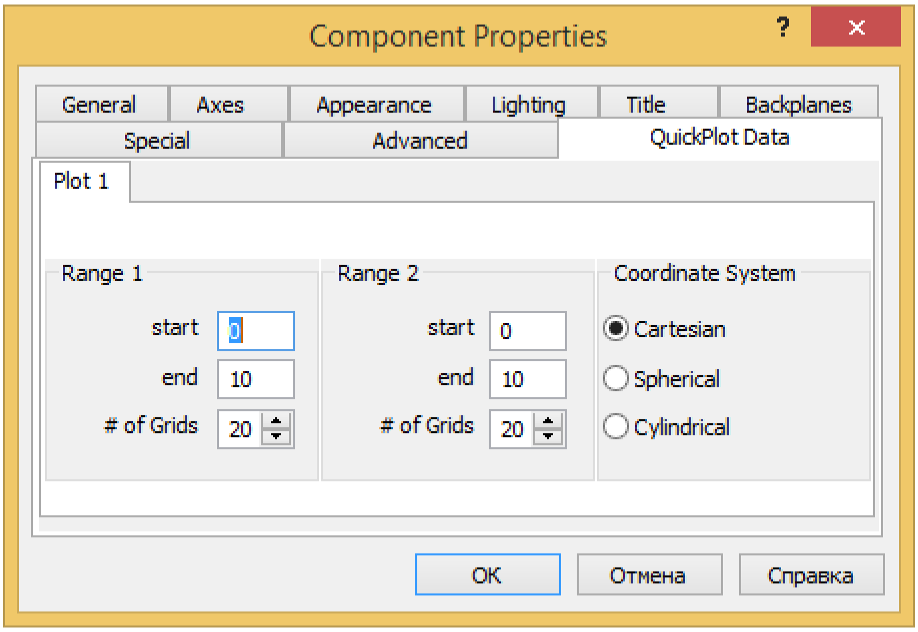


Рисунок 1.12 – Определений значений аргументов

Для того, чтобы построить контурный график, нужно на вкладке General переключатель Plot1 поставить в позицию Contour Plot (рис.1.13). Полученный график представлен на рис.1.14. Он представляет собой вид графика сверху, значения целевой функции представлены разными цветами, значения, расположенные на одном срезе, равны. Можно сделать вывод, что минимум функции расположен в области, где аргументы принимают значения из интервалов [2;8] и [3;9].

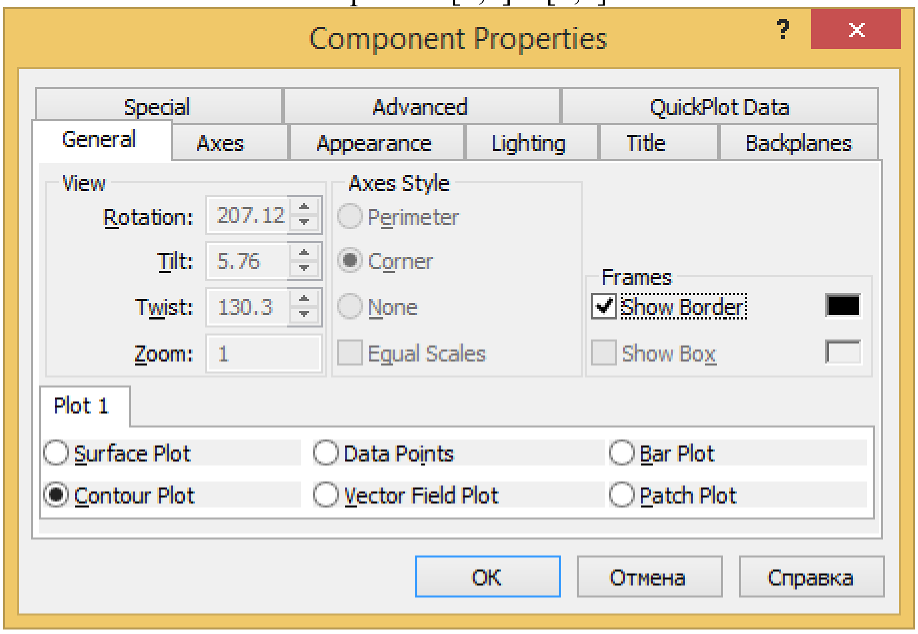


Рисунок 1.13 – Построение контурного графика

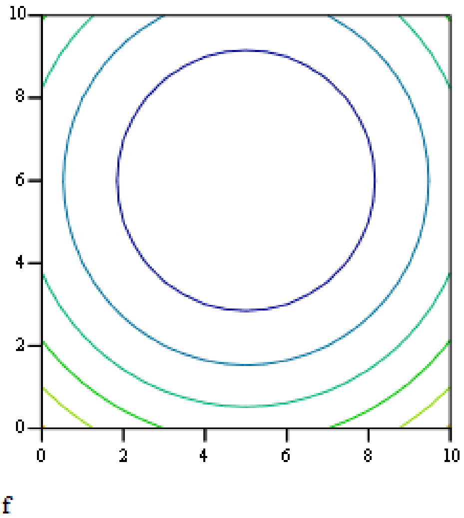


Рисунок 1.14 – Линии уровня – линии равных значений

Для построения поверхности в Excel нужно в ячейках A1:A11 привести значения первого аргумента, в ячейках B12:L12 – второго аргумента. Затем выделить область внутри и записать формулу расчета функции для ячейки B1 (расположенной в верхнем левом углу) (рис.1.15):

[B1]=($A1-5)^2+(B$12-6)^2

Далее нажимаем Ctrl+Enter. Полученные значения приведены на рис.1.16.

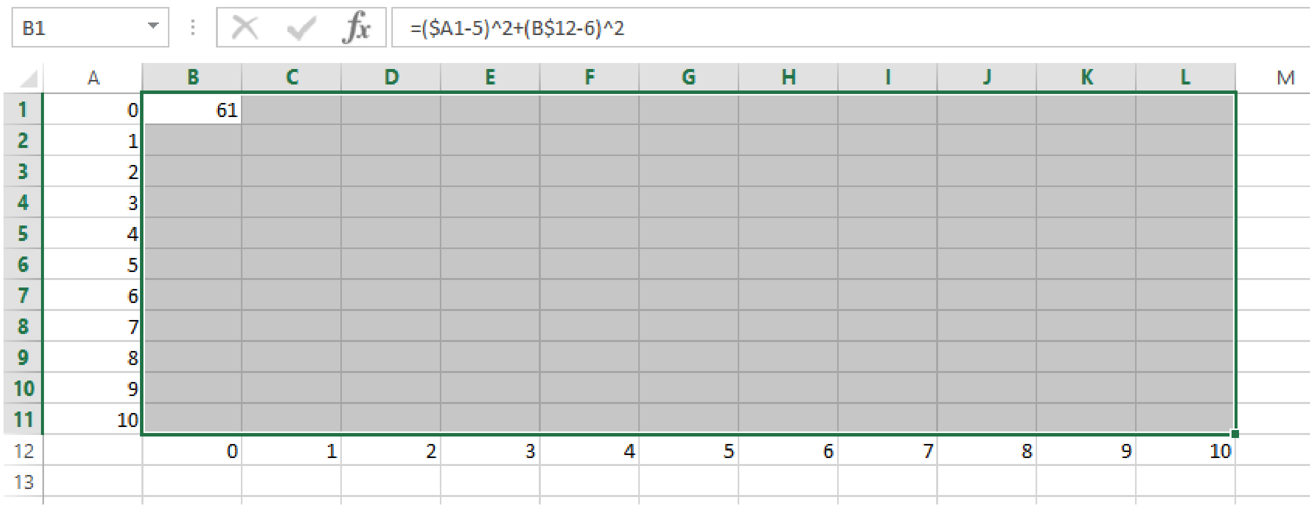


Рисунок 1.15 – Заполнение таблицы

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	61	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	
2	1	52	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	
3	2	45	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	
4	3	40	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	
5	4	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	
6	5	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
7	6	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	
8	7	40	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	
9	8	45	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	
10	9	52	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	
11	10	61	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	
12		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
13													

Рисунок 1.16 – Рассчитанные значения функции

Далее вставим после столбца A новый столбец и заполним его значениями подписей (рис.1.17):

[B1]=""&A1

…

[B11]=""&A11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	0	0	61	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	
2	1	1	52	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	
3	2	2	45	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	
4	3	3	40	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	
5	4	4	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	
6	5	5	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
7	6	6	37	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	
8	7	7	40	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	
9	8	8	45	34	25	18	13	10	9	10	13	18	25	
10	9	9	52	41	32	25	20	17	16	17	20	25	32	
11	10	10	61	50	41	34	29	26	25	26	29	34	41	
12			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
13														

Рисунок 1.17 – Добавление столбца

Наконец, выделяем ячейки B1:M11 и выбираем в главном меню «Вставка»–«Диаграммы»–«Поверхность».

Если вместо поверхности выбрать «Контурная», то получим диаграмму, которая показывает вид графика сверху (рис.1.18) и позволяет также сделать вывод о расположении точки минимума. Значения целевой функции здесь представлены соответствующими цветами.

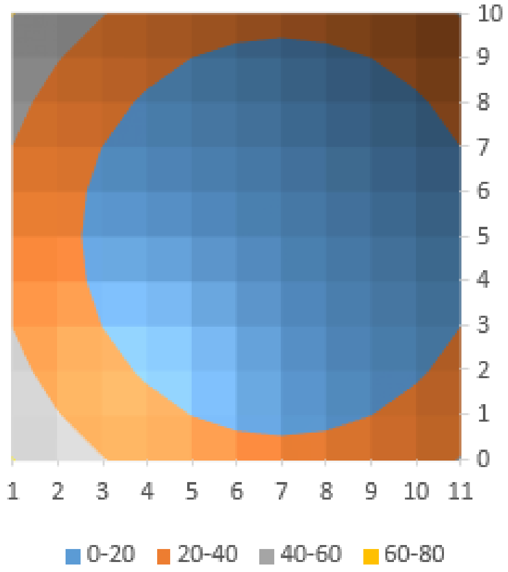


Рисунок 1.18 – Контурный график

Решим задачу нахождения минимума функции методом Хука-Дживса. Код метода Хука-Дживса представлен на рис.1.19.

```
Function f(x, y)
    f = (x - 5) ^ 2 + (y - 6) ^ 2 'заданная функция
End Function
Sub ХукаДживс_Кнопка1_Щелчок()
    h = 2 'величина шага
    a = 2 'коэффициент уменьшения шага
    'начальная точка
    x0 = 0
    y0 = 0
    'счетчик итераций
    iter = 0
    'цикл выполняется, пока величина шага не станет меньше заданной точности
    Do While (h > 0.1)
        ud = 0
        'вычисляется значение функции в соседних точках
        f1 = f(x0, y0)
        f2 = f(x0 + h, y0)
        f3 = f(x0 - h, y0)
        f4 = f(x0, y0 + h)
        f5 = f(x0, y0 - h)
        x0p = x0
        f6 = f1
        If (f2 < f1) Then 'исследующий поиск: если увеличение одного аргумента
            'приводит к уменьшению функции
            x0p = x0 + h + (x0 + h - x0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
            ud = 1 'поиск удачный
            f6 = f(x0 + h, y0 + h)
            f7 = f(x0 + h, y0 - h)
            If f6 < f2 Then 'исследующий поиск: если увеличение второго аргумента
                'приводит к уменьшению функции
                y0p = y0 + h + (y0 + h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую то
            ElseIf f7 < f2 Then 'исследующий поиск: если уменьшение второго аргуме
                'приводит к уменьшению функции
                y0p = y0 - h + (y0 - h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую то
            End If
        ElseIf (f3 < f1) Then 'исследующий поиск: если уменьшение одного аргумента
            'приводит к уменьшению функции
```

```
        x0p = x0 - h + (x0 - h - x0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
        ud = 1 'поиск удачный
        f6 = f(x0 - h, y0 + h)
        f7 = f(x0 - h, y0 - h)
        If f6 < f2 Then 'исследующий поиск: если увеличение второго аргумента
            'приводит к уменьшению функции
            y0p = y0 + h + (y0 + h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
        ElseIf f7 < f2 Then 'исследующий поиск: если уменьшение второго аргумента
            'приводит к уменьшению функции
            y0p = y0 - h + (y0 - h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
        End If
    End If
    y0p = y0
    If (ud = 0) And (f4 < f1) Then 'исследующий поиск: если увеличение второго
        'аргумента приводит к уменьшению функции
        y0p = y0 + h + (y0 + h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
        ud = 1 'поиск удачный
    ElseIf (ud = 0) And (f5 < f1) Then 'исследующий поиск: если уменьшение второго
        'аргумента приводит к уменьшению функции
        y0p = y0 - h + (y0 - h - y0) 'поиск по образцу: переход в новую точку
        ud = 1 'поиск удачный
    End If
    f1 = f(x0p, y0p)
    f2 = f(x0p + h, y0p)
    f3 = f(x0p - h, y0p)
    f4 = f(x0p, y0p + h)
    f5 = f(x0p, y0p - h)
    If ud = 1 Then 'если поиск удачный, то выполняется новый исследующий поиск
        If (f2 < f1) And (f2 <= f3) And (f2 <= f4) And (f2 <= f5) Then
            x0 = x0p + h 'переход в новую точку
            y0 = y0p
        ElseIf (f3 < f1) And (f3 <= f2) And (f3 <= f4) And (f3 <= f5) Then
            x0 = x0p - h 'переход в новую точку
                y0 = y0p
            ElseIf (f4 < f1) And (f4 <= f2) And (f4 <= f3) And (f4 <= f5) Th
                x0 = x0p 'переход в новую точку
                y0 = y0p + h
            ElseIf (f5 < f1) And (f5 <= f2) And (f5 <= f3) And (f5 <= f4) Th
                x0 = x0p 'переход в новую точку
                y0 = y0p - h
            Else
                x0 = x0p
                y0 = y0p
            End If
        Else
            h = h / 2 'если наилучшая точка не найдена, то шаг уменьшая в 2 
        End If
    Loop
    'вывод результата в ячейки
    Range("J1").Value = x0
    Range("K1").Value = y0
End Sub
```

Рисунок 1.19 – Код метода Хука-Дживса

Результат работы программы представлен на рис.1.20.

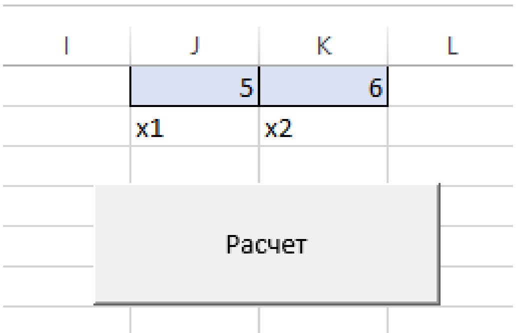


Рисунок 1.20 – Результат работы алгоритма Хука-Дживса

Выполним вручную две итерации.
1 итерация.
Значение функции в начальной точке (0;0):
$f(0,0) = (0-5)^2 + (0-6)^2 = 61$
Уменьшим значение первого аргумента:
x_1=x_1-2=0-2=-2.
Вычислим значение функции в новой точке:
$f(x_1, x_2) = (-2-5)^2 + (0-6)^2 = 85$ (не успех).
Увеличим значение первого аргумента:
x_1=x_1+2=0+2=2.
Вычислим значение функции в новой точке:
$f(x_1, x_2) = (2-5)^2 + (0-6)^2 = 45$ (успех).
Увеличим значение второго аргумента:
x_2=x_2+2=0+2=2.
Вычислим значение функции в новой точке:
$f(x_1, x_2) = (2-5)^2 + (2-6)^2 = 25$ (успех).
Выполним поиск по образцу:
$x_1^p = x_1 + h + (x_1 + h - x_1) = 2 + 2 = 4$
$x_2^p = x_2 + h + (x_2 + h - x_2) = 2 + 2 = 4$
Значение функции в этой точке:
$f(x_1, x_2) = (4-5)^2 + (4-6)^2 = 5$.
Проводим поиск по образцу вокруг полученной точки.
Увеличим значение первого аргумента:
$x_1^p = x_1^p + h = 4 + 2 = 6$.
Вычислим значение функции:
$f(x_1, x_2) = (6-5)^2 + (4-6)^2 = 5$ (не успех).
Увеличим значение второго аргумента:
$x_1^p = x_2^p + h = 4 + 2 = 6$.
Вычислим значение функции:
$f(x_1, x_2) = (4-5)^2 + (6-6)^2 = 1$ (успех).
Полученная точка первой итерации – (4;6).
2 итерация.
Уменьшим значение первого аргумента:
x_1=x_1-2=4-2=2.
Вычислим значение функции:
$f(x_1, x_2) = (2-5)^2 + (6-6)^2 = 9$ (не успех)

Увеличим значение первого аргумента:
$x_1=x_1+2=4+2=6$.
Вычислим значение функции:
$f(x_1,x_2)=(6-5)^2+(6-6)^2=1$ (не успех).
Увеличим значение второго аргумента:
$x_2=x_2+2=6+2=8$.
Вычислим значение функции:
$f(x_1,x_2)=(4-5)^2+(8-6)^2=5$ (не успех).
Уменьшим значение второго аргумента:
$x_2=x_2-2=6-2=4$.
Вычислим значение функции:
$f(x_1,x_2)=(4-5)^2+(4-6)^2=5$ (не успех).

Поскольку исследующий оказался неудачным, то происходит уменьшение величины шага: $h=\frac{h}{2}=\frac{2}{2}=1$ и выполняется переход к следующей итерации.

Рассмотрим теперь решение задачи методом градиентного спуска. Код программы представлен на рис.1.21.

```
Sub Кнопка1_Щелчок()
    'начальная точка
    x1 = 0
    x2 = 0
    'параметр спуска
    a = 0.1
     'зададим 1000 итераций
    For i = 1 To 1000
        dx1 = 2 * (x1 - 5) 'значение первой частной производной в точке
        dx2 = 2 * (x2 - 6) 'значение второй частной производной в точке
        'переход в новую точку
        x1 = x1 - a * dx1
        x2 = x2 - a * dx2
    Next
    'вывод полученного результата в ячейки
    Range("J1").Value = x1
    Range("K1").Value = x2
End Sub
```

Рисунок 1.21 – Код метода градиентного спуска

Результат программы представлен на рис.1.22.

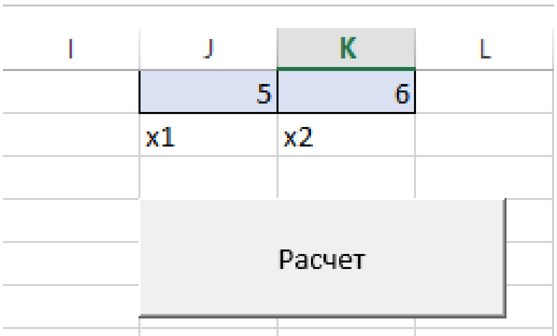


Рисунок 1.22 – Результат работы програмы

Выполним вручную две итерации.

1 итерация.

Вычислим частные производные функции:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 5)\ .$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 2(x_2 - 6)\ .$$

Значения частные производных в начальной точке (0;0): $2(0-5) = -10$; $2(0-6) = -12$.

Новые координаты точки:

$$x_1 = x_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$$

$$x_2 = x_2 - \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$$

$$x_1 = 0 - 0{,}1 \cdot 2(0-5) = -1$$

$$x_2 = 0 - 0{,}1 \cdot 2(0-6) = -1{,}2$$

2 итерация.

Новые координаты точки:

$$x_1 = -1 - 0{,}1 \cdot 2(-1-5) = -2{,}2$$

$$x_2 = -1{,}2 - 0{,}1 \cdot 2(-1{,}2-6) = -2{,}64\ .$$

Заключение

В работе выполнено построение графика функции, найдена точка минимума методом Хука-Дживса и методом градиентного спуска. Преимуществом метода градиентного спуска является простота реализации, однако необходимо вычислять значение производной и определять значение параметра α .

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет дистанционного образования (ФСУ)

Кафедра автоматизированных систем (АСУ)

Условная оптимизация

Отчет по лабораторной работе № 3 по дисциплине
«Методы оптимизации»

Выполнил:
Студент гр.____
И.О. Фамилия
«   »__________20__ г.

Руководитель:
И.О. Фамилия руководителя
«   »__________20__ г.

20__

Задание 1

1) В таблице 1.4 представлена информация о некоторых продуктах: количестве белка, жиров и углеводов, содержащихся в них, а также калорийность и цена (за 100 г.). Необходимо сформировать дневной рацион из 10-15 продуктов, считая, что суточная потребность человека в белке, жирах, углеводах и энергии составляет соответственно 60 г., 70 г., 280 г. и 1826 килокалорий.

2) Добавьте условие разнообразия рациона, согласно которому человек не может в день употреблять более 300 г. продукта одно вида.

3) Рассчитайте стоимость полученного набора продуктов в первом и во втором случае.

Для решения этих задач необходимо построить математическую модель и реализовать ее в пакете MathCad, Excel или с помощью математических библиотек.

Таблица 1.4 – Характеристики продуктов

	Название продукта	**Белки**	**Жиры**	**Углеводы**	**Ккал**	**Цена**
1	Яйцо куриное	12.7	11.5	0.7	157	15
2	Арахис	26.3	45.2	9.7	550	21
3	Горох цельный	23.0	1.2	53.3	316	30
4	Грецкий орех	13.8	61.3	10.2	647	44
5	Крупа гречневая	12.6	2.6	68.0	345	6
6	Пшено	12.0	2.9	69.3	351	3,2
7	Рис	8.0	1.0	76.0	345	6
8	Творог	7.1	23.0	27.5	345	13
9	Сыр	27.0	40.0	0.0	468	18
10	Колбаса вареная Любительская	12.2	28.0	0.0	300	17
11	Колбаса варено-копченая Сервелат	28.2	27.5	0.0	360	18
12	Сосиски Молочные	12.3	25.3	0.0	276	18
13	Говядина	18.9	12.4	0.0	187	21
14	Свинина	16.4	27.8	0.0	315	23
15	Кабачки	0.6	0.3	5.7	27	2
16	Капуста белокочанная	1.8	0.0	5.4	28	1,8
17	Картофель	2.0	0.1	19.7	87	2,5
18	Морковь	1.3	0.1	7.0	34	2
19	Огурцы	0.8	0.0	3.0	15	3
20	Перец красный сладкий	1.3	0.0	5.7	28	6,5
21	Свекла	1.7	0.0	10.8	50	2
22	Горбуша	21.0	7.0	0.0	147	12
23	Икра осетровая зернистая	28.9	9.7	0.0	202	164
24	Скумбрия	18.0	9.0	0.0	153	15
25	Шоколад темный	5.4	35.3	52.6	549	30
26	Груша	2.3	0.0	62.1	257	9
27	Персики	3.0	0.0	68.5	286	10
28	Яблоки	3.2	0.0	68.0	284	7
29	Апельсин	0.9	0.0	8.4	37	7,5
30	Бананы	1.5	0.0	22.0	94	4

31	Черешня	1.1	0.0	12.3	53	18
32	Макаронные изделия	11.0	0.9	74.2	348	3
33	Хлеб пшеничный из муки 1 сорта	7.7	2.4	53.4	266	3

Задание 2

Заводы производственной фирмы расположены в городах Омск, Новосибирск, Томск. Центры распределения расположены в городах Нижний Новгород, Пермь, Краснодар. Объемы производства и величина спроса в пунктах представлены в таблице 1.5. Одно изделие имеет вес 3 кг. и объем 0,8 м3. Стоимость перевозки рассчитайте с помощью онлайн-калькулятора http://www.jde.ru/calc.

Составьте экономико-математическую модель задачи. С помощью пакета *MathCAD, Excel* или с помощью математических библиотек найдите оптимальное распределение поставок и минимальные затраты на перевозку.

Таблица 1.5 – Варианты заданий

Вариант	Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
	Омск	Новосибирск	Томск	Нижний Новгород	Пермь	Краснодар
1	1000	2000	1200	2000	1100	1100

Решение

Задание 1.

1. Выберем следующие 5 продуктов, представленные в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Выбранные продукты

№ п/п	Наименование продукта	Белки	Жиры	Углеводы	Ккал	Стоимость, 100 гр продукта руб
1	Яйцо куриное	12,07	11,50	0,70	157,00	15,00
2	Арахис	26,30	45,20	9,70	550,00	21,00
3	Горох цельный	23,00	1,20	53,30	316,00	30,00
4	Грецкий орех	13,80	61,30	10,20	647,00	44,00
5	Крупа гречневая	12,60	2,60	68,00	345,00	6,00
	Необх. минимум	60	70	280	1826	

Обозначим через $x_1,...,x_5$ - количество продуктов, входящих в дневной рацион. Из условия задачи получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} 12,07x_1 + 26,30x_2 + 23,00x_3 + 13,80x_4 + 12,60x_5 \ge 60; \\ 11,5x_1 + 45,20x_2 + 1,2x_3 + 61,3x_4 + 2,60x_5 \ge 70; \\ 0,7x_1 + 9,7x_2 + 53,3x_3 + 10,2x_4 + 68x_5 \ge 280; \\ 157x_1 + 550x_2 + 316x_3 + 647x_4 + 345x_5 \ge 1826. \end{cases}$$

Кроме того, значения переменных должны удовлетворять следующему условию

$$x_1, x_2, ..., x_{15} \ge 0$$

Целевая функция, характеризующая общую стоимость, будет иметь следующий вид

$$f = 15x_1 + 21x_2 + 30x_3 + 44x_4 + 6x_5 \to \min.$$

Реализуем данную модель в пакете Excel (рис.1.23). Для этого в ячейках D9:D12 запишем формулы для расчета содержания веществ в выбранных продуктах:

[D9]= B2*B17+B3*B18+B4*B19+B5*B20+B6*B21 (белки)

[D10]= C2*B17+C3*B18+C4*B19+C5*B20+C6*B21 (жиры)

[D11]= D2*B17+D3*B18+D4*B19+D5*B20+D6*B21 (углеводы)

[D12]= E2*B17+E3*B18+E4*B19+E5*B20+E6*B21 (калории)

В ячейке B15 запишем расчет целевой функции:

[B15] =B17*F2+B18*F3+B19*F4+B20*F5+B21*F6

Далее нужно вызвать надстройку «Поиск решения» и заполнить значение целевой функции и ограничений (рис.1.24).

	A	B	C	D	E	F
1	**Название продукта**	**Белки**	**Жиры**	**Углеводы**	**Ккал**	**Цена**
2	Яйцо куриное	12,07	11,50	0,70	157,00	15,00
3	Арахис	26,30	45,20	9,70	550,00	21,00
4	Горох цельный	23,00	1,20	53,30	316,00	30,00
5	Грецкий орех	13,80	61,30	10,20	647,00	44,00
6	Крупа гречневая	12,60	2,60	68,00	345,00	6,00
7						
8	Ограничения			Формулы ограничения		
9	Белки	60,00		84,29126281		
10	Жиры	70,00		69,99999983		
11	Углеводы	280,00		280		
12	Энергия	1826,00		2082,963736		
13						
14						
15	Целевая функция	51,3498972				
16		Найденное решение				
17	X1	0				
18	X2	1,32266974				
19	X3	0				
20	X4	0				
21	X5	3,92897211				
22						

Рисунок 1.23 – Реализация модели

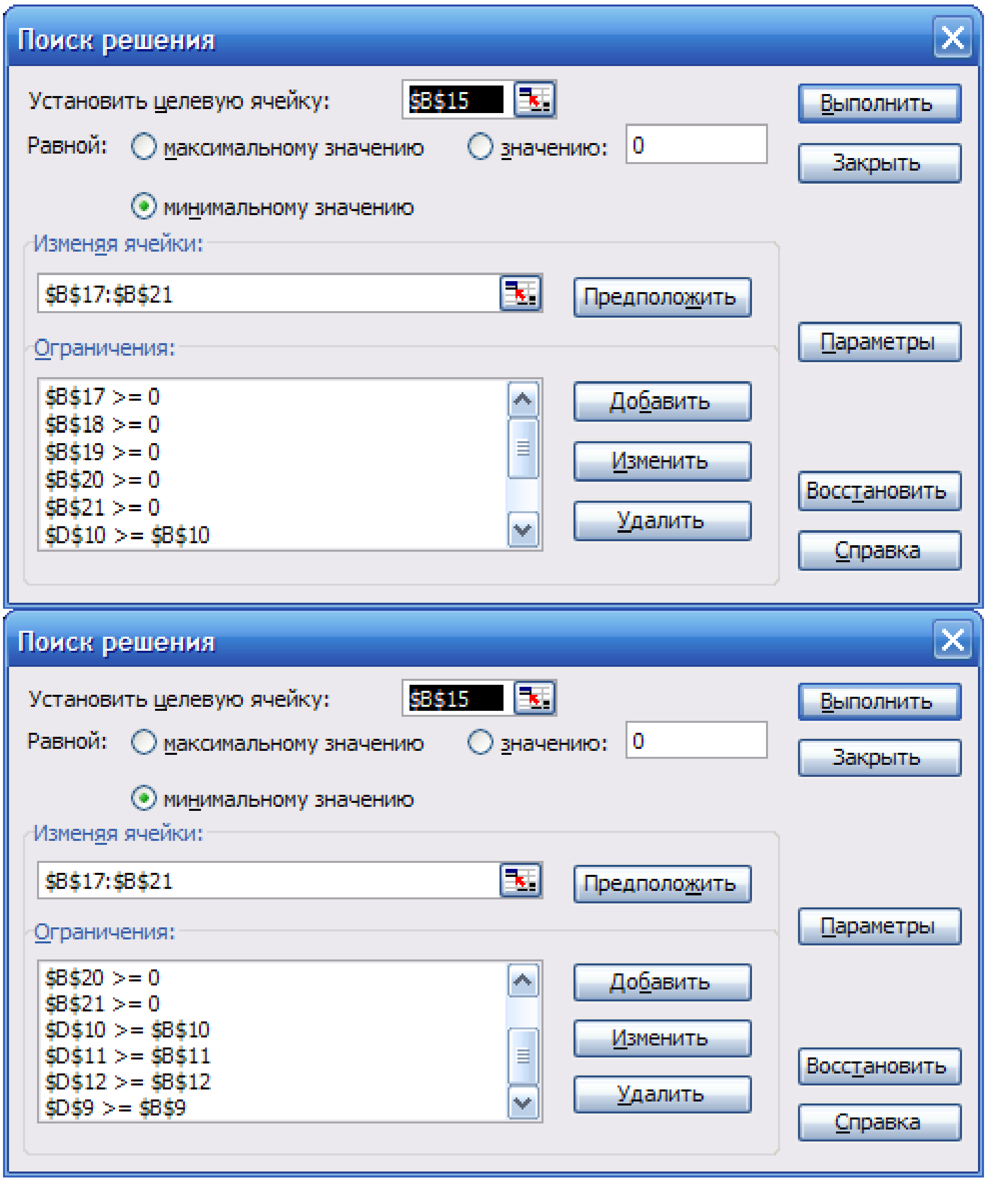


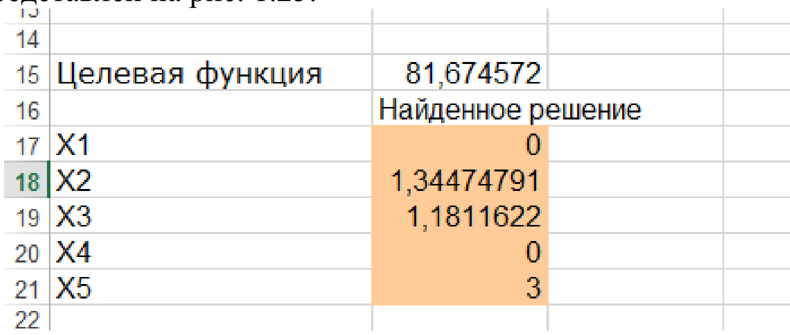
Рисунок 1.24 – Надстройка «Поиск решения»

Результатом решения задачи будут следующий набор продуктов: 132 г. арахиса и 393 г. гречневой крупы.

2. Добавим условие разнообразия рациона, согласно которому человек не может в день употреблять более 300 г. продукта одно вида. Для этого в ограничениях запишем следующие формулы:

B17<=3; B18<=3; B19<=3; B20<=3; B21<=3; B22<=3.

Результат представлен на рис. 1.25.



14			
15	Целевая функция	81,674572	
16		Найденное решение	
17	X1	0	
18	X2	1,34474791	
19	X3	1,1811622	
20	X4	0	
21	X5	3	
22			

Рисунок 1.25 – Результат расчета

Результатом решения задачи будут следующий набор продуктов: 134 г. арахиса, 118 г. гороха и 300 г. гречневой крупы.

3. Стоимость полученного набора продуктов в первом и во втором случае рассчитана в ячейке B15 на рис.1.37,1.39:

Стоимость набора 1 = 51,35 руб.

Стоимость набора 2= 81,67 руб.

Задание 2.

Рассчитаем с помощью сайта http://www.jde.ru/calc стоимость доставки единицы товара (рис.1.26).

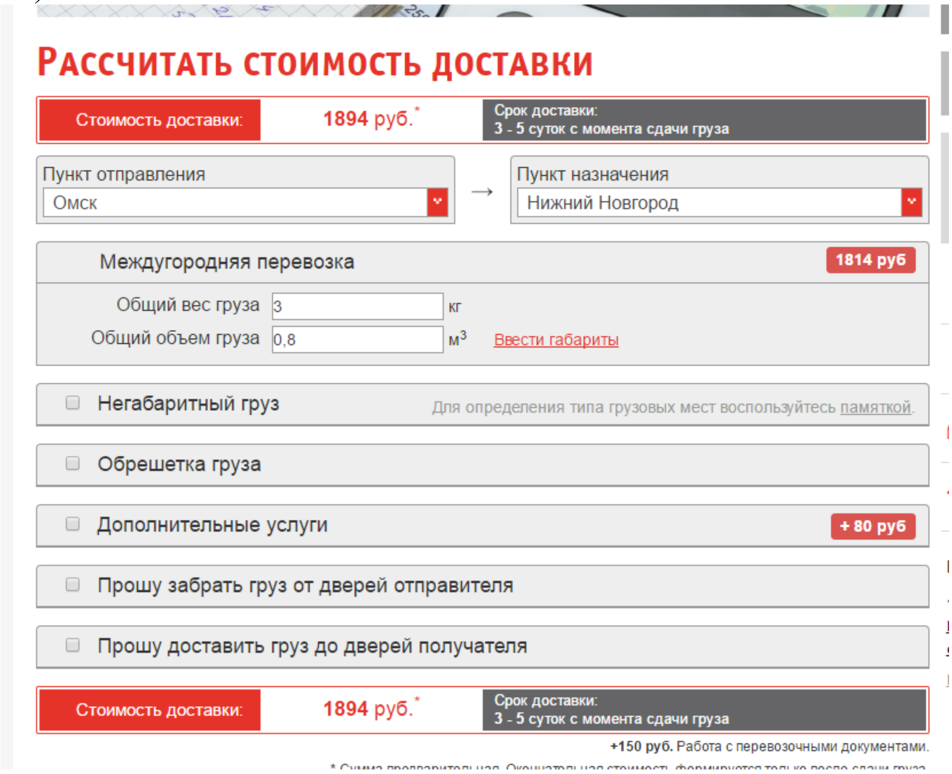


Рисунок 1.26 – Расчет стоимости доставки

Рассчитанные значения представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Стоимость доставки

	Нижний Новгород	Пермь	Краснодар
Омск	1894	1552	3026
Новосибирск	2352	1748	3358
Томск	2630	2262	3358

Обозначим через x_{ij} - количество товара, перевозимого из пункта i в пункт j. Из условия задачи получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=1000; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=2000; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=1200; \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=2000; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=1100; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=1100. \end{cases}$$

Кроме того, значения переменных должны удовлетворять следующему условию

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{33} \geq 0$$

Целевая функция, характеризующая общую стоимость, будет иметь следующий вид

$$f = 1894x_{11} + 1552x_{12} + 3026x_{13} + 2352x_{21} + 1748x_{22} +$$
$$+3358x_{23} + 2630x_{31} + 2262x_{32} + 3358x_{33} \to \min .$$

Реализуем данную модель в Excel (рис.1.27).

	A	B	C	D	E	F
1	Объем производства в пункте			Величина спроса в пункте		
2						
3	Омск	Новосибирск	Томск	Нижний Новгород	Пермь	Краснодар
4	1000	2000	1200	2000	1100	1100

	A	B	C	D
8		Нижний Новгород	Пермь	Краснодар
9	Омск	1894	1552	3026
10	Новосибирск	2352	1748	3358
11	Томск	2630	2262	3358
14	Функция			
15	9890400			
17	*Ограничения*			
18	Омск	1000		
19	Новосибирск	2000		
20	Томск	1200		
21	Нижний Новгород	2000		
22	Пермь	1100		
23	Краснодар	1100		

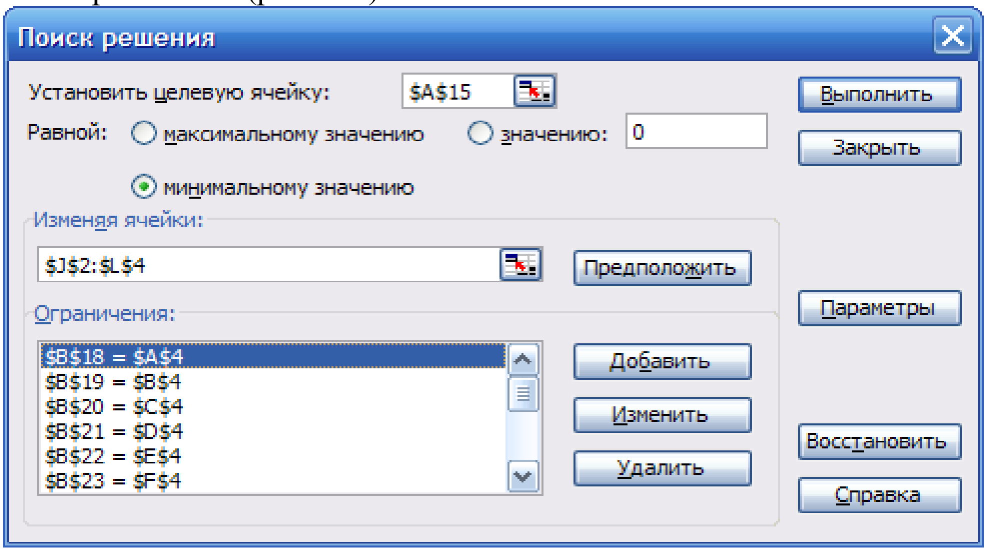
I	J	K	L	M	N
Решение	Нижний Новгород	Пермь	Краснодар		
Омск	1000	0	0		1000
Новосибирск	900	1100	0		2000
Томск	100	0	1100		1200
	2000	1100	1100		

Рисунок 1.27 – Результат вычислений

Для этого в ячейках B18:B23 запишем формулы для расчета объема перевозимого товара для каждого пункта:

[B18]= J2+K2+L2
[B19]= J3+K3+L3
[B20] =J4+K4+L4
[B21] =J2+J3+J4
[B22] =K2+K3+K4
[B23] =L2+L3+L4
В ячейке A15 запишем расчет целевой функции:
[A15]
=J2*B9+K2*C9+L2*D9+J3*B10+K3*C10+L3*D10+J4*B11+K4*C11+L4*D11

Далее вызываем надстройку «Поиск решения» и заполняем значение целевой функции и ограничений (рис.1.28).



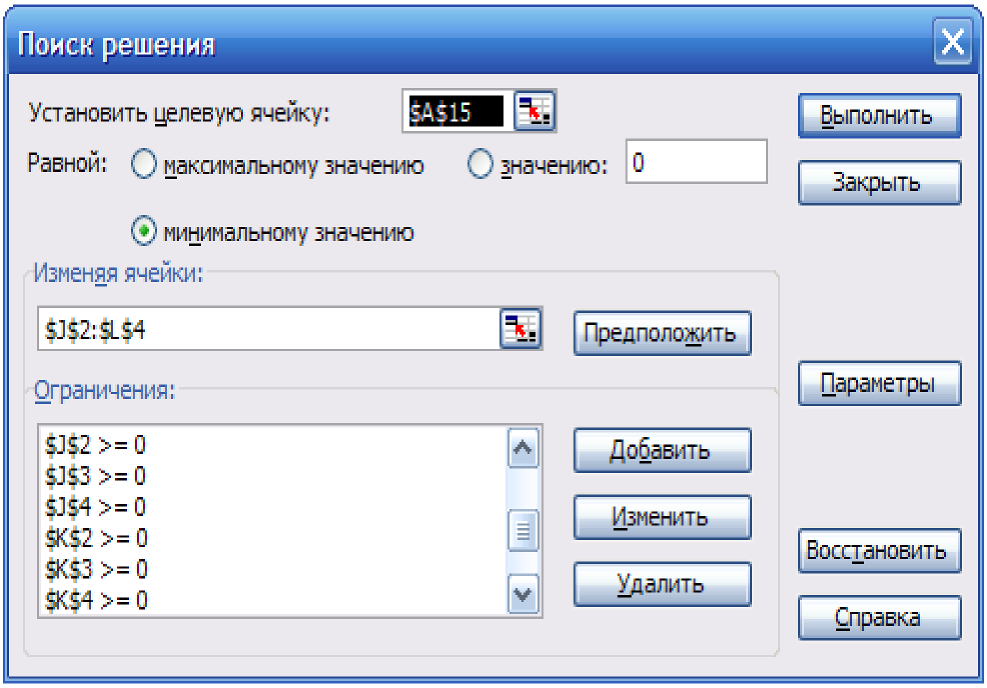


Рисунок 1.28 – Надстройка «Поиск решения»

Таким образом, полученное решение:

- из Омска в Нижний Новгород нужно поставить 1000 изделий;
- из Новосибирска в Нижний Новгород нужно поставить 900 изделий;
- из Новосибирска в Пермь нужно поставить 1100 изделий;
- из Томска в Краснодар нужно поставить 1100 изделий;
- из Томска в Нижний Новгород нужно поставить 100 изделий.

Полученные значения удовлетворяют ограничениям.
Затраты на перевозку составляют 9890400 руб.

Заключение

Выполнено решение задач линейного программирования: задачи о диете и транспортной задачи. Реализация моделей выполнена в Excel. Для решения была использована надстройка Excel “Поиск решения”.

Приложение Д. Надстройка Excel «Поиск решения»

Надстройка «Поиск решения» Excel позволяет решать различные оптимизационные задачи. Для её подключения необходимо выбрать «Файл»-«Параметры» (рис.Д.1).

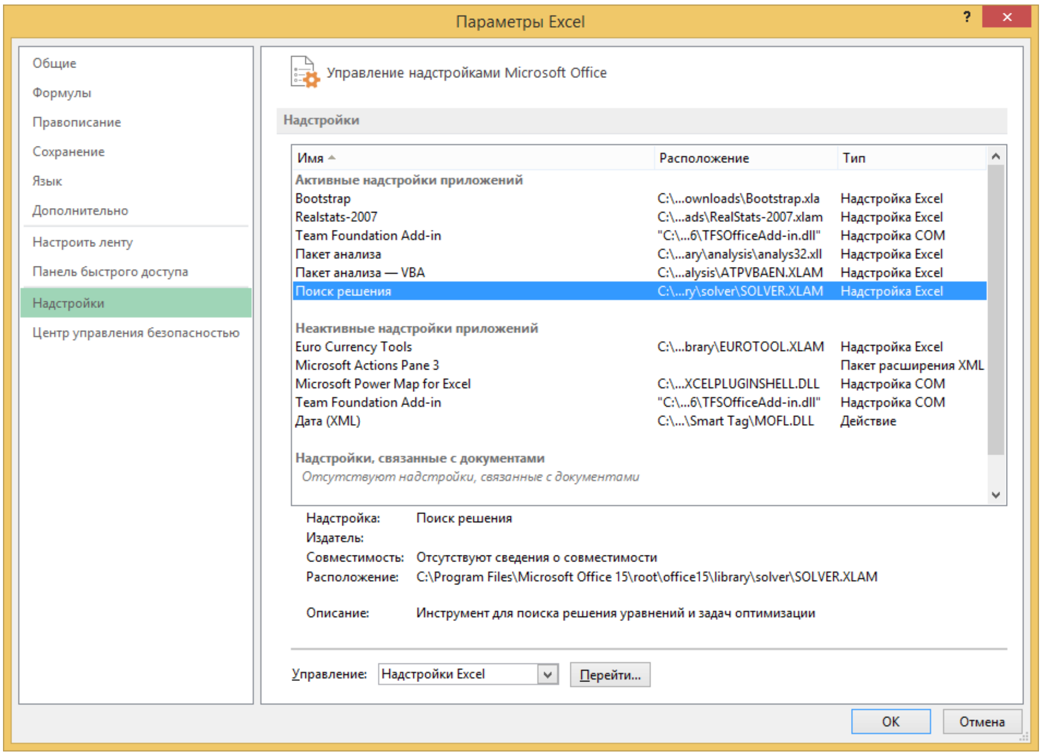


Рисунок Д.1 – Параметры Excel

Затем нужно нажать кнопку «Перейти» и в открывшемся окне (рис.Д.2) поставить галочку напротив надстройки «Поиск решения».

После этого надстройка появится в меню (рис.Д.3).

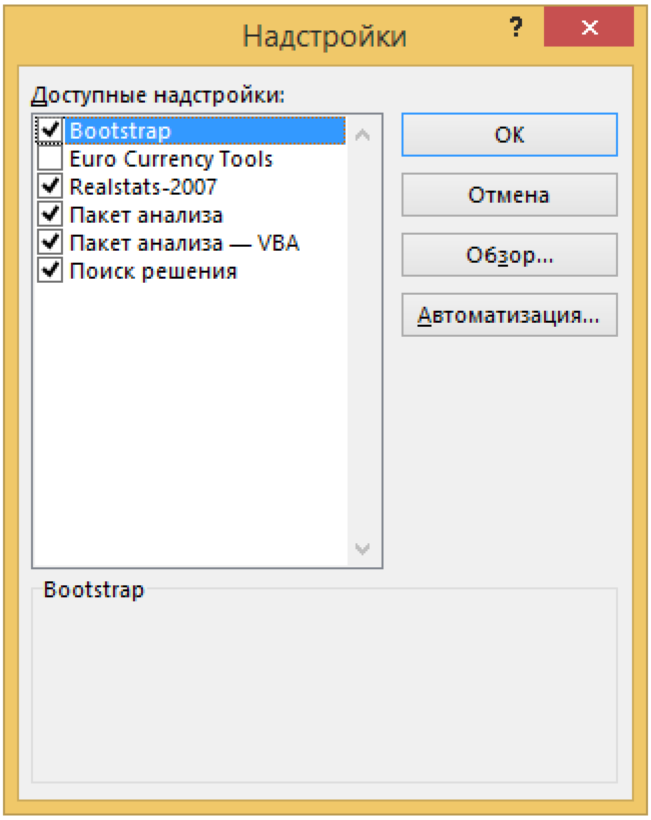


Рисунок Д.2 – Выбор надстройки «Поиск решения»

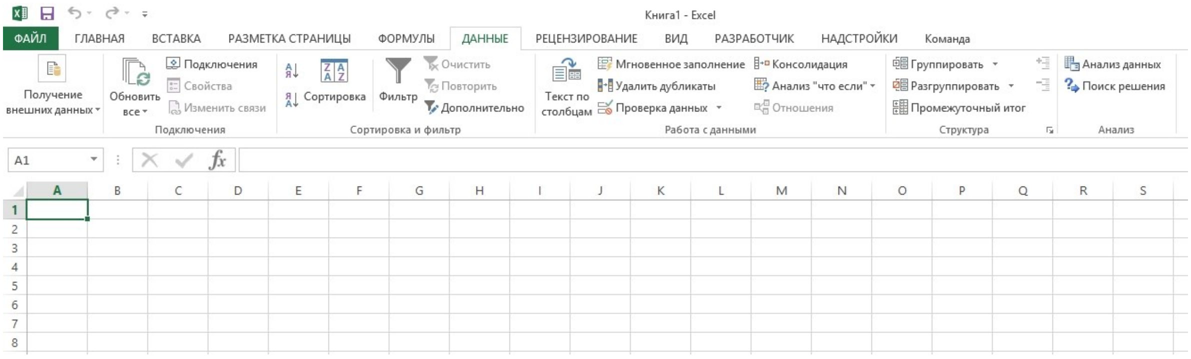


Рисунок Д.3 – Поиск решения в группе «Анализ»

Для решения задач необходимо указать следующие данные (рис.Д.4):

1. Целевую функцию: указывается ссылка на ячейку с формулой;
2. Направление оптимизации: максимум, минимум или целевая функция должна принимать заданное значение;
3. Ячейки, в которых должны быть определены значения аргументов (изменяя ячейки переменных);
4. Ограничения;
5. Метод решения.

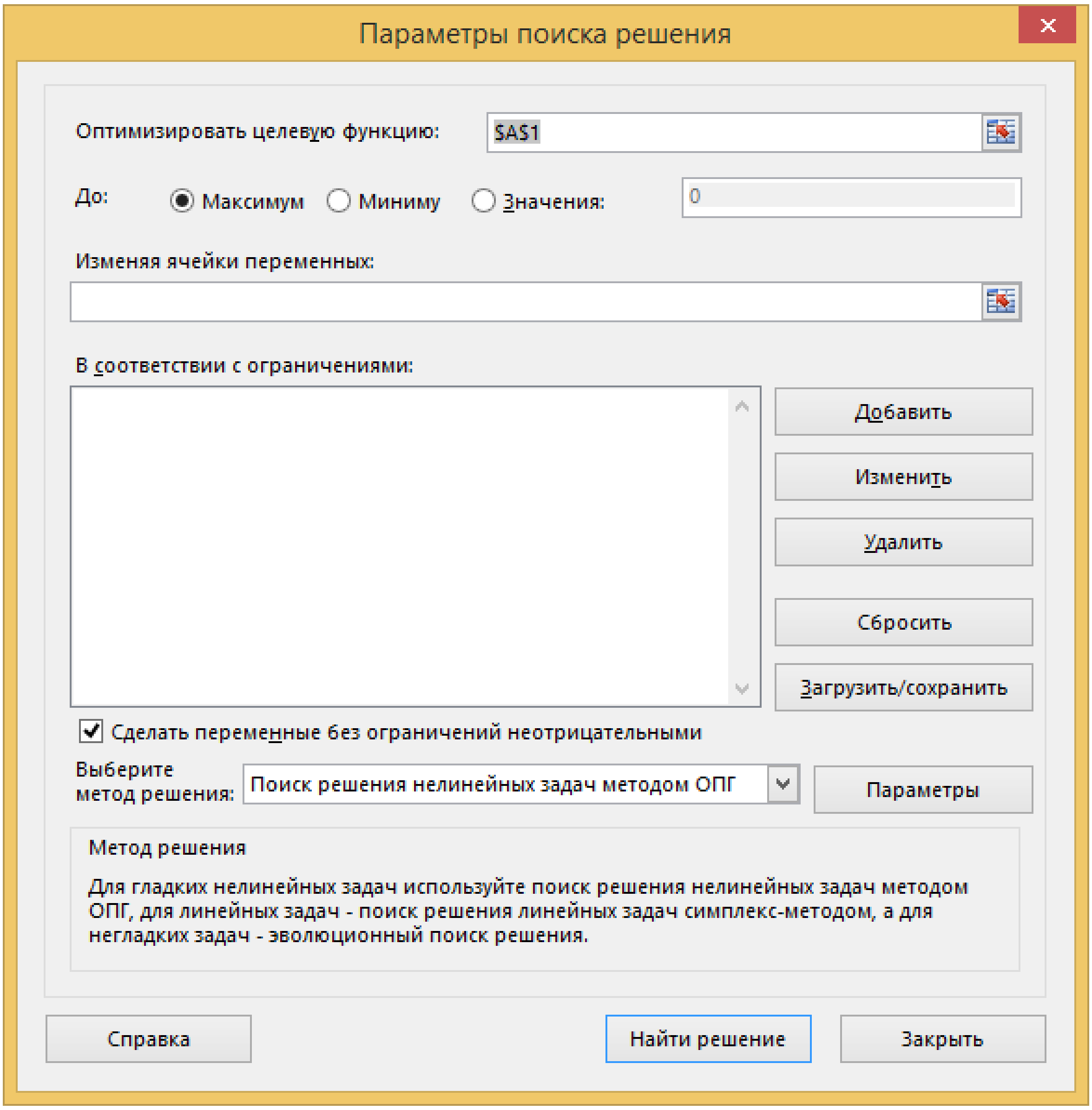


Рисунок Д.4 – Окно параметров

Рассмотрим несколько примеров решения оптимизационных задач с помощью данной надстройки.

Пример 1. Найти минимум ЦФ $f(x) = (x-1)^2$.

Для решения этой задачи понадобится две ячейки. В одной из них (А2) будет рассчитано значение x, в другой (В2) содержится формула расчета целевой функции: =(A2-1)^2 (рис.2.5).

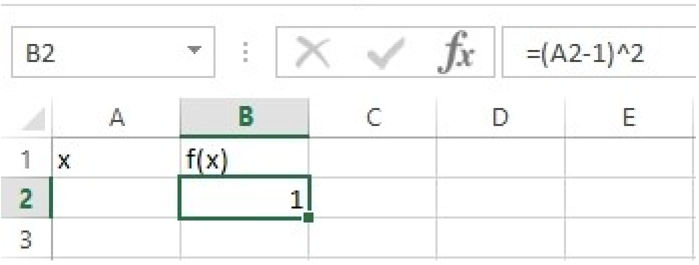


Рисунок Д.5 – Заполнение ячейки

Далее вызываем «Поиск решения», в качестве целевой функции указываем ячейку B2, в качестве изменяемой ячейки – A2, и выбираем пункт «Минимуму» (рис.Д.6).

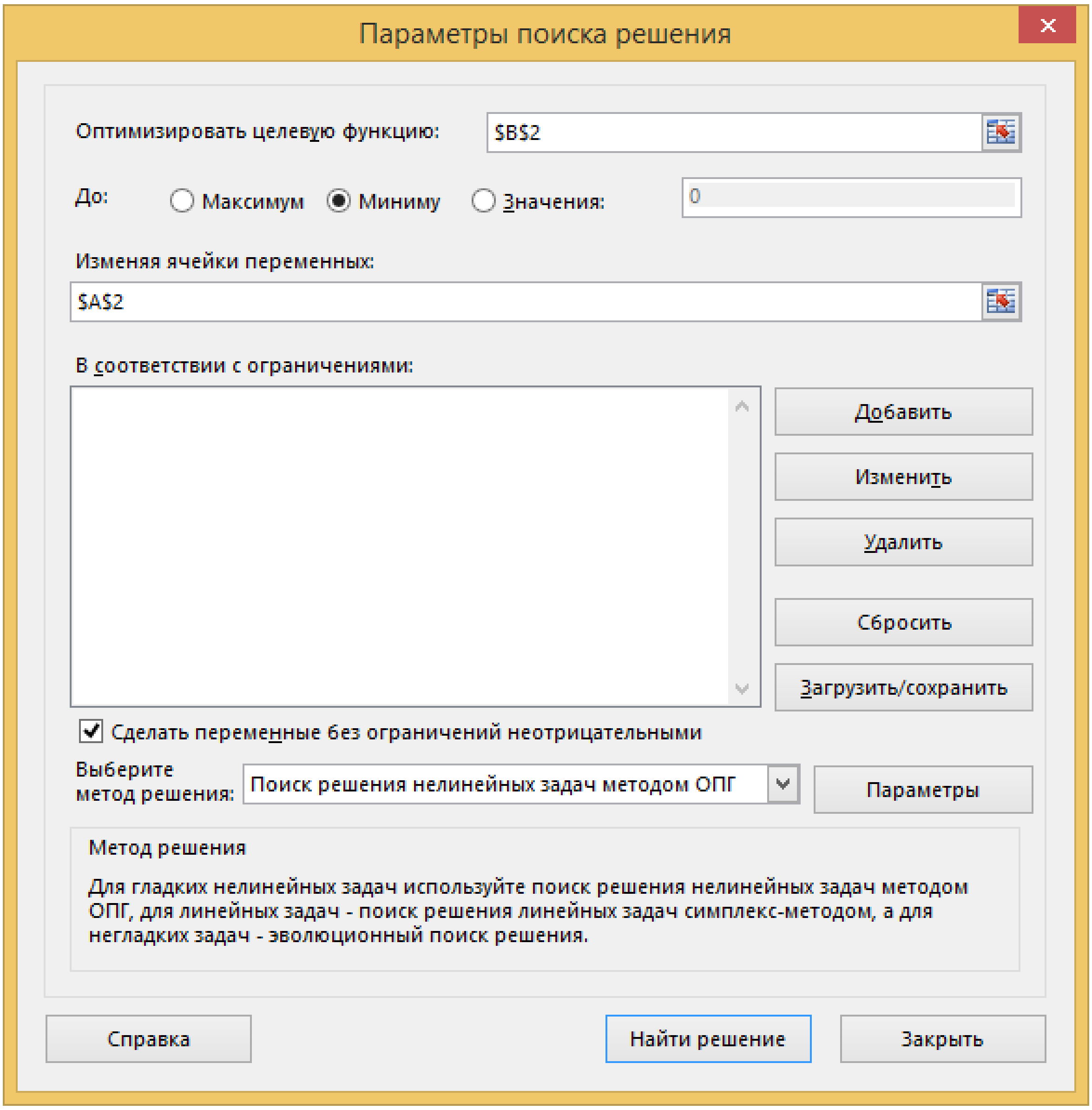


Рисунок Д.6 – Окно «Поиск решения»

Далее нажимаем кнопку «Найти решение». В ячейке появится найденное значение аргумента (рис.Д.7).

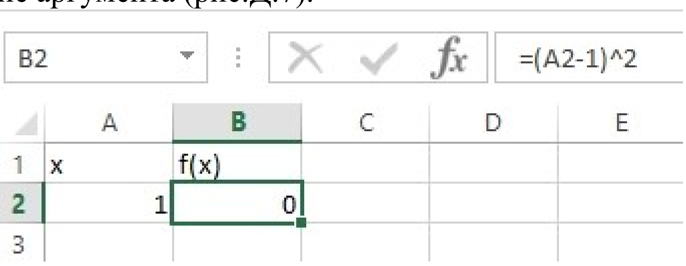


Рисунок Д.7 – Найденное решение

Пример 2. Найти минимум функции $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2$.

Для решения этой задачи понадобится три ячейки. В одной из них (A2) будет рассчитано значение x1, в другой (B2) – x2, а в третьей содержится формула расчета целевой функции: =(A2-1)^2+5*(B2-4)^2 (рис.Д.8).

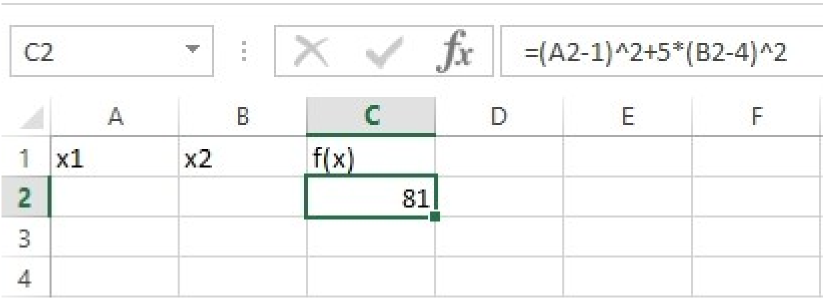


Рисунок Д.8 – Определение формулы расчета

Вызываем «Поиск решения», в качестве целевой функции указываем ячейку С2, в качестве изменяемых ячеек – А2:В2, и выбираем пункт «Минимуму» (рис.Д.9).

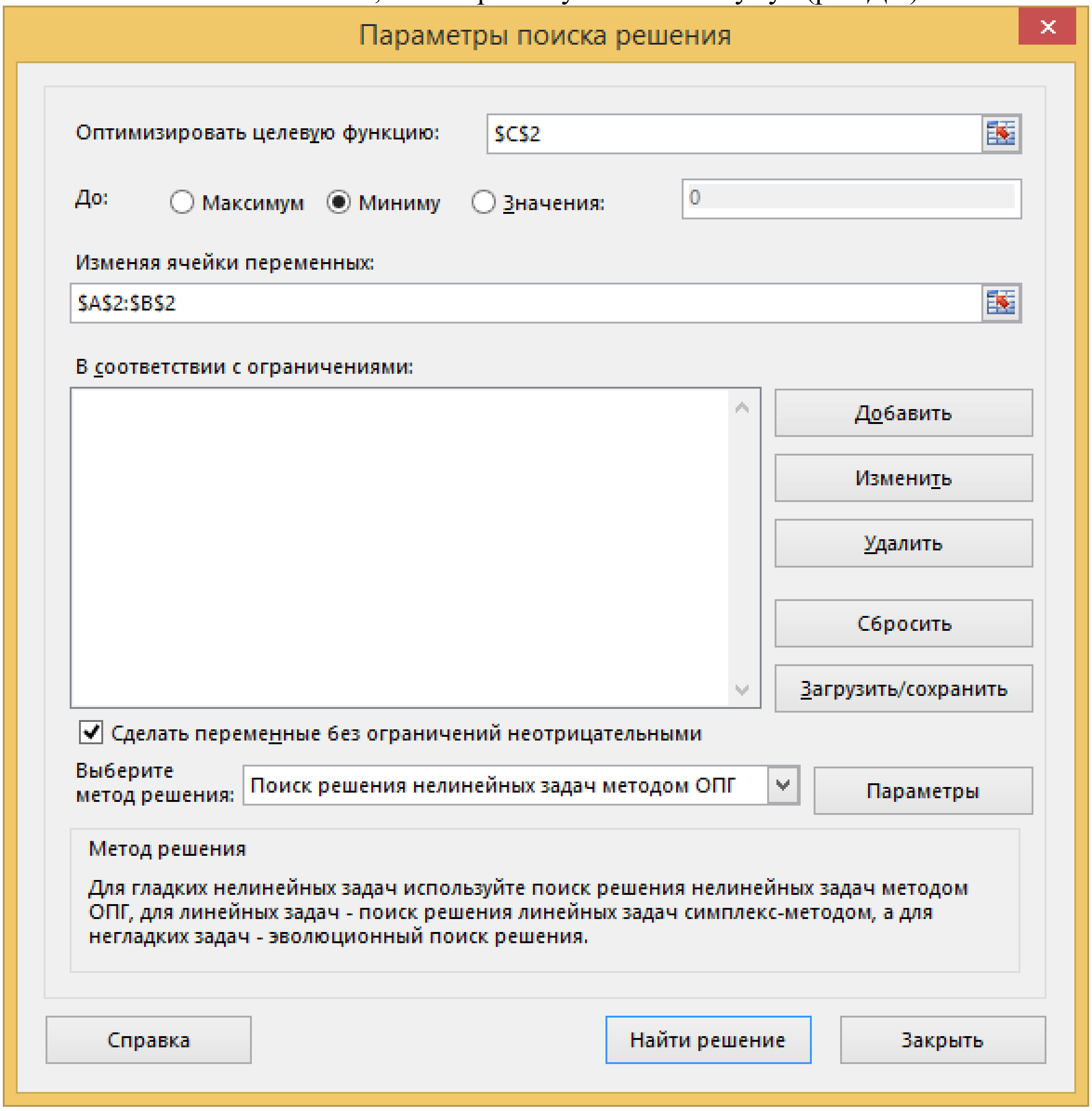


Рисунок Д.9 – Окно «Поиск решения»

Далее нажимаем кнопку «Найти решение». В ячейке появятся найденные значения аргументов (рис.Д.10).

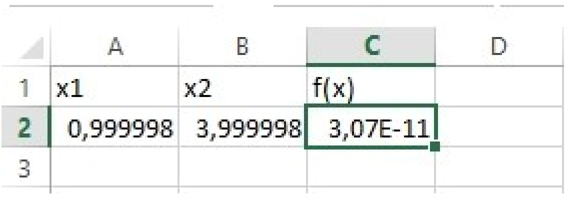


Рисунок Д.10 – Решение задачи

Пример 3. Решить задачу линейного программирования:

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x \geq 0$$

Для решения этой задачи понадобится четыре ячейки. В одной из них (А2) будет рассчитано значение x1, в другой (В2) – x2, в третьей содержится формула расчета целевой функции: =3*А2+5*В2, а четвертой – формула ограничения: =А2+В2 (рис.Д.11).

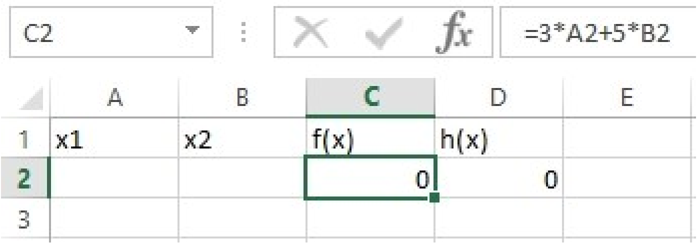


Рисунок Д.11 – Формула целевой функции

Вызываем «Поиск решения», в качестве целевой функции указываем ячейку С2, в качестве изменяемых ячеек – А2:В2, и выбираем пункт «Минимуму». Далее нажимаем кнопку «Добавить» для определения ограничения. В появившемся окне (рис.Д.12) указываем ссылку на ячейку с ограничением и устанавливаем значение ограничения, равное 5 (рис.Д.12).

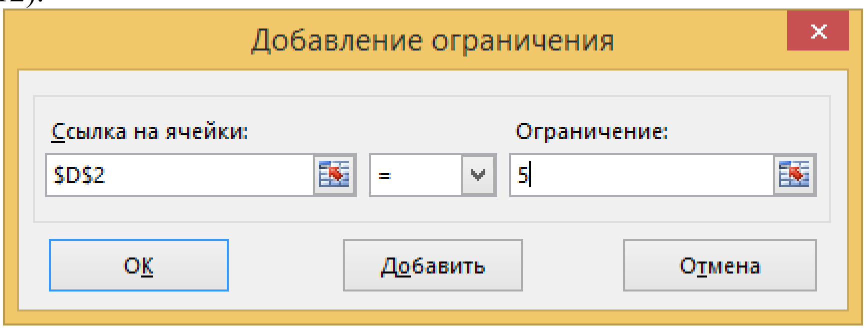


Рисунок Д.12 – Добавление ограничения

Созданное ограничение отобразится в окне «Параметры поиска решения» (рис.Д.13). Далее нажимаем кнопку «Найти решение». В ячейке появятся найденные значения аргументов (рис.Д.14).

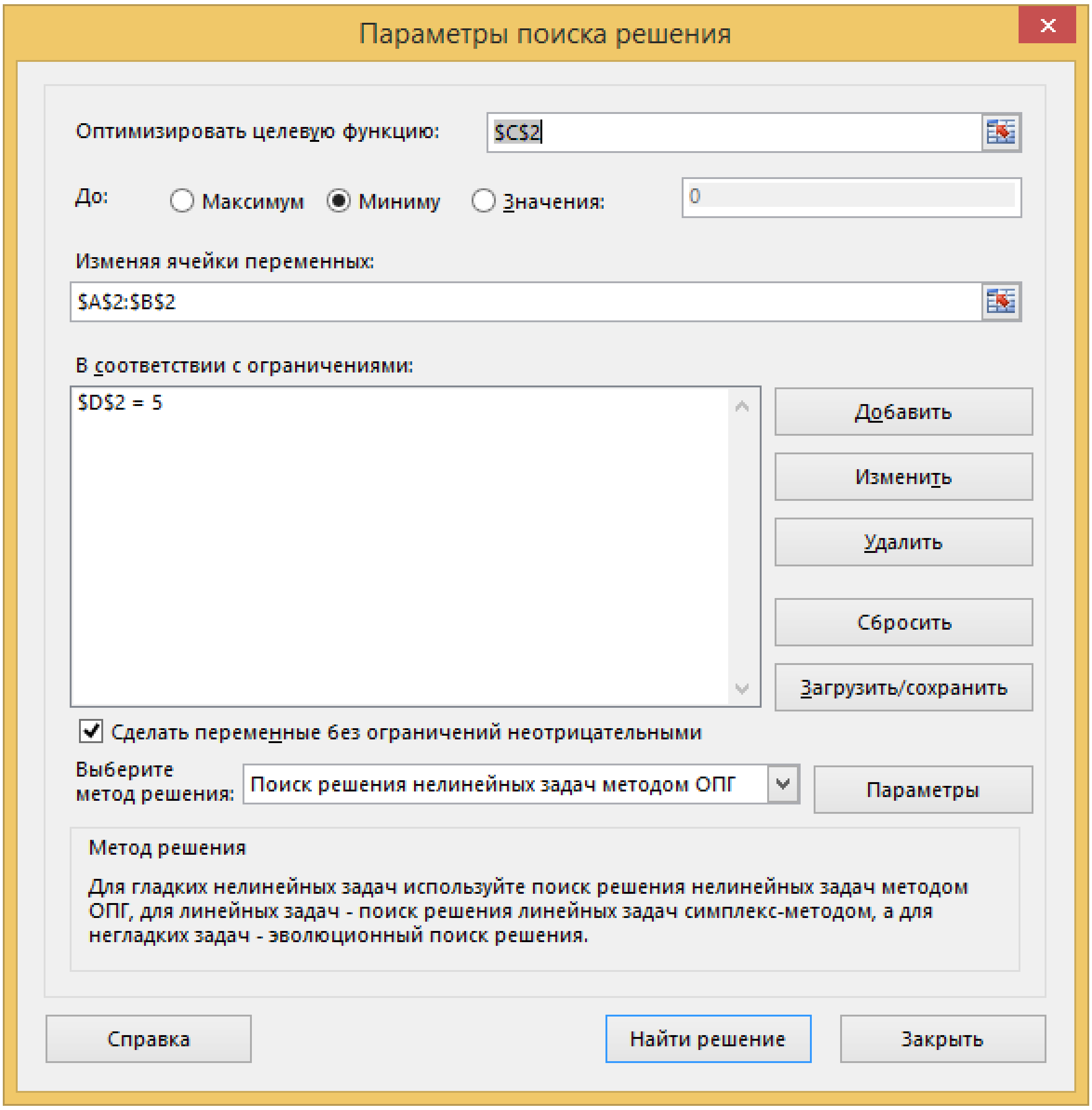


Рисунок Д.13 – Окно «Поиск решения»

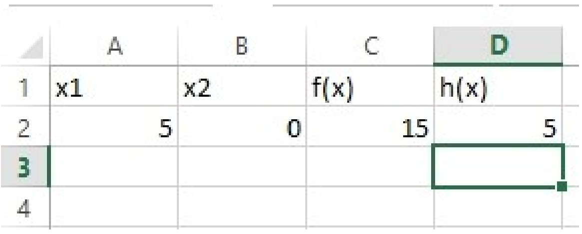


Рисунок Д.14 – Решение задачи

Пример 4. Решить задачу нелинейного программирования:

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

Для решения этой задачи понадобится четыре ячейки. В одной из них (А2) будет рассчитано значение x1, в другой (В2) – x2, в третьей содержится формула расчета целевой функции: =3*A2^2+5*B2^2, а четвертой – формула ограничения: =A2+B2 (рис.Д.15).

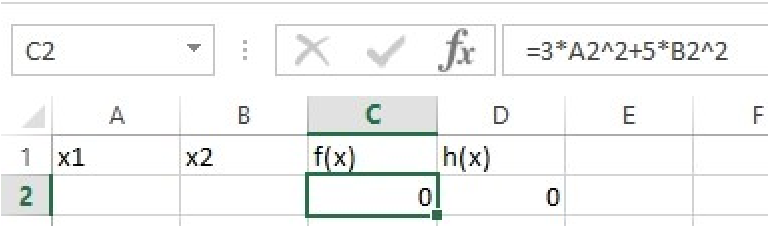


Рисунок Д.15 – Формула целевой функции

Вызываем «Поиск решения», в качестве целевой функции указываем ячейку С2, в качестве изменяемых ячеек – А2:В2, и выбираем пункт «Минимуму». Также добавляем ограничение способом, описанным в предыдущем примере. Созданное ограничение отобразится в окне «Параметры поиска решения» (рис.Д.16). Далее нажимаем кнопку «Найти решение». В ячейке появятся найденные значения аргументов (рис.Д.17).

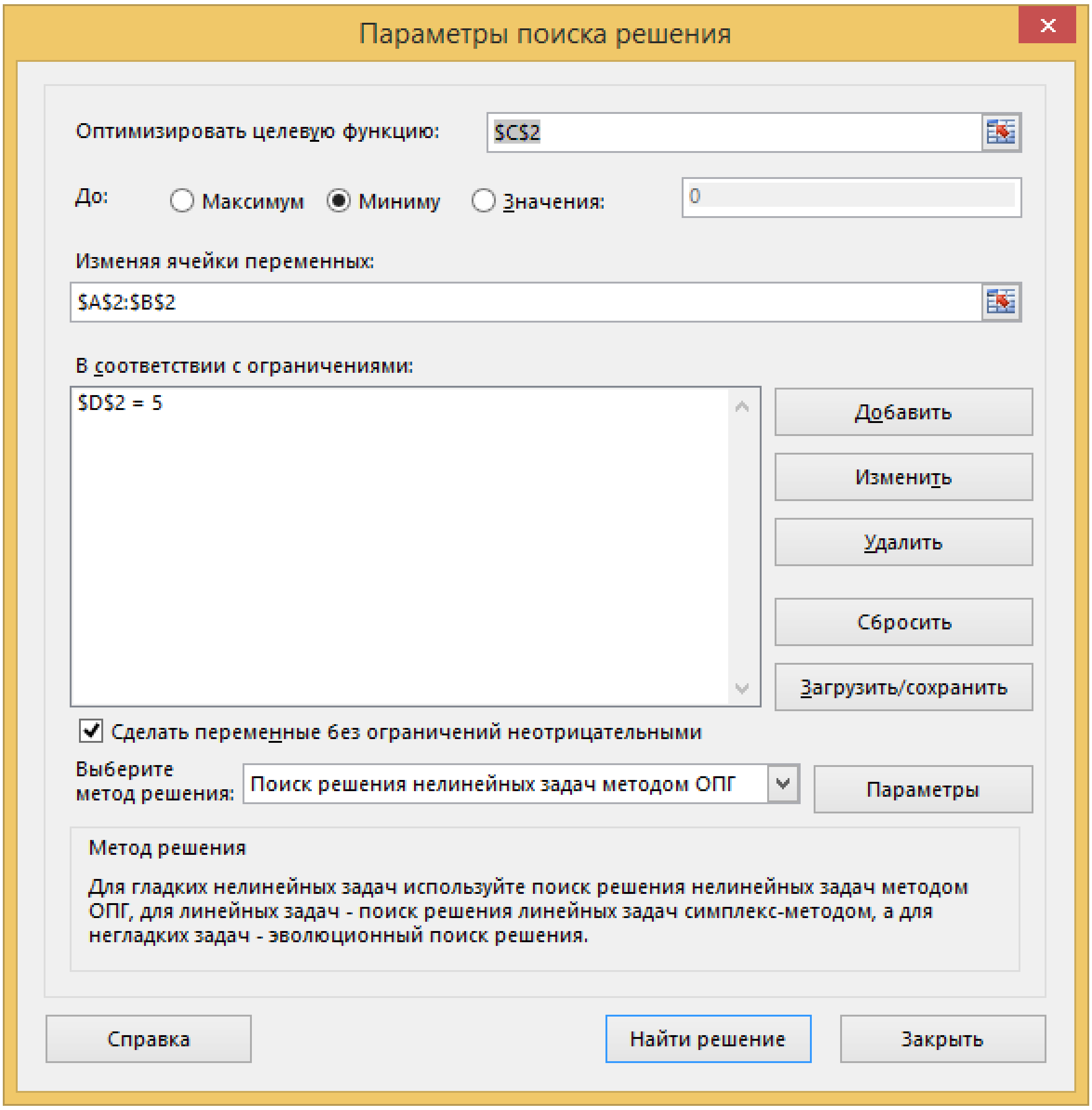


Рисунок Д.16 – Окно «Поиск решения»

	A	B	C	D
1	x1	x2	f(x)	h(x)
2	3,125	1,875	46,875	5
3				

Рисунок Д.17 – Решение задачи

Пример 5. Решить обратную задачу:

$c = a \cdot b$

$a_0 = 5,\ \ b_0 = 4,\ \ c_0 = 20,\ \ c_1 = 30,\ \ \alpha = 0{,}3,\ \ \beta = 0{,}7$

Для решения этой задачи понадобится восемь ячеек. В ячейки B2:D2 записываем начальные значения аргументов и функции. В ячейках B3:D3 будут определены новые значения (рис.Д.18). В ячейке E2 запишем формулу отношения приростов: $\Delta a / \Delta b$, которое равно отношению коэффициентов относительной важности α / β: =(B3-B2)/(C3-C2). В ячейку E3 запишем отношение коэффициентов относительной важности: =0,3/0,7.

D3 =B3*C3

	A	B	C	D	E
1		a	b	c	α/β
2	t0	5	4	20	1,25
3	t1			0	0,428571

Рисунок Д.18 – Заполнение ячеек

Вызываем «Поиск решения», в качестве целевой функции указываем ячейку D3, в качестве изменяемых ячеек – B3:C3, и выбираем пункт «Минимуму». Также добавляем ограничение способом, описанным в предыдущем примере. Созданное ограничение отобразится в окне «Параметры поиска решения» (рис.Д.19). Далее нажимаем кнопку «Найти решение». В ячейке появятся найденные значения аргументов (рис.Д.20).

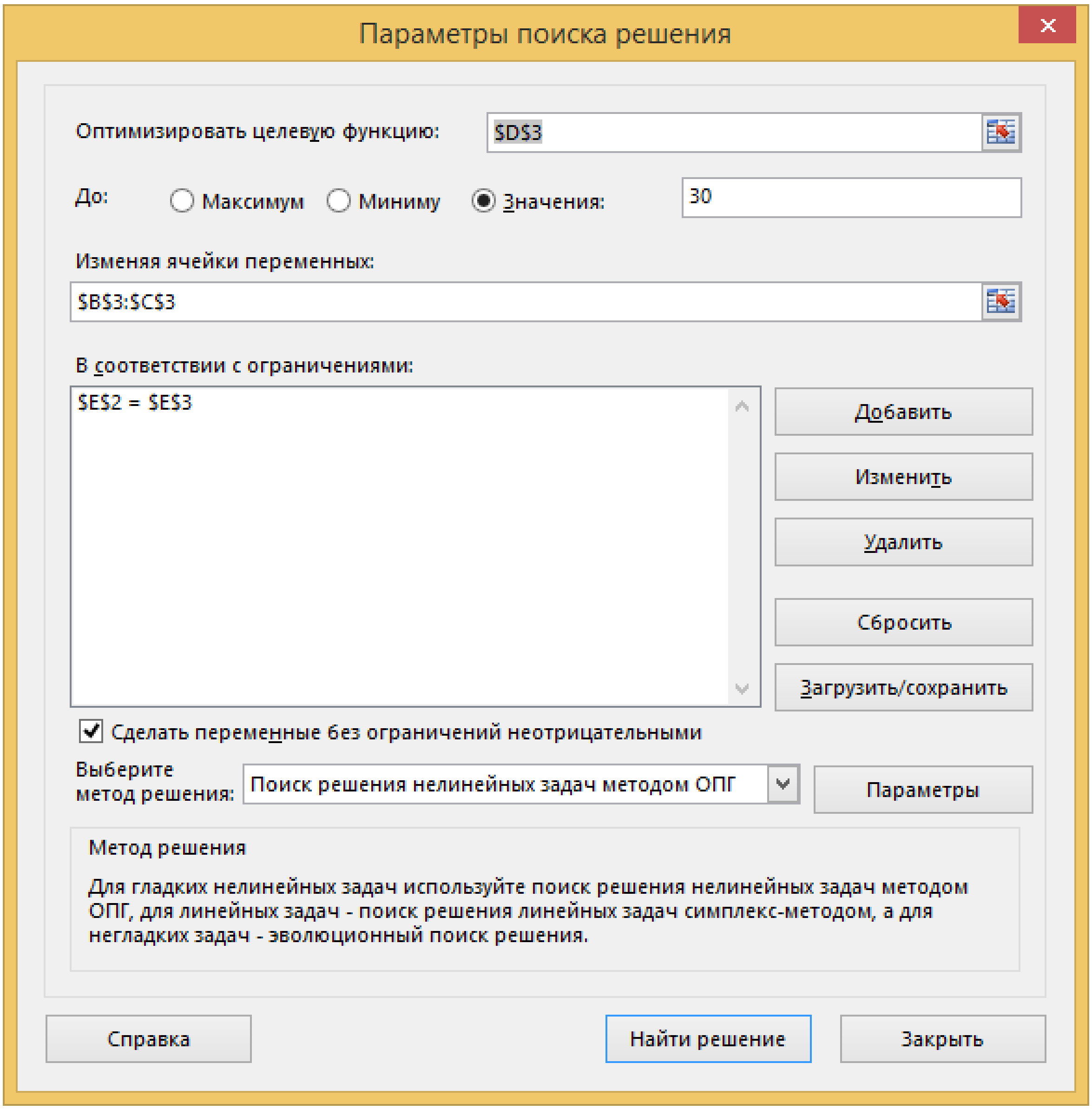


Рисунок Д.19 – Окно «Поиск решения»

	A	B	C	D	E
1		a	b	c	α/β
2	t0	5	4	20	0,428571
3	t1	5,586982	5,369624	29,99999	0,428571
4					

Рисунок Д.20 – Решение задачи

Приложение Ж. Решение оптимизационных задач в MathCAD.

Для решения оптимизационных задач в MathCad есть функция Minimize(*y,x*), которая осуществляет поиск значения x, соответствующего локальному минимуму функции *y(x)*.

Рассмотрим применение данной функции на примерах.

Пример 1. Найти минимум функции $f(x) = (x-1)^2$.

Решение задачи представлено на рис.Ж.1. Сначала определяем функцию, для которой нужно найти точку минимума. Далее задаем начальное значение аргумента (для того, чтобы присвоить значение нажимаем shift и знак «=», появится «:=»). После этого используем функцию Minimize, указав в качестве параметров обозначение функции и аргумента. Чтобы получить решение нажимаем знак «=» после функции. Решением задачи является точка $x = 1$.

$$f(x) := (x-1)^2$$

$$x := 0$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = 1$$

Рисунок Ж.1 – Решение задачи одномерной оптимизации

Пример 2. Найти минимум функции $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 5(x_2 - 4)^2$.

Решение задачи представлено на рис.3.2. Сначала укажем, что индексы будут начинается с 1, а не с 0 (по умолчанию). Для этого нужно написать ORIGIN:=1. Далее записываем функцию и начальное значение аргумента для решения задачи. После этого применяем функцию Minimize. Полученное решение: $x_1 = 1,\quad x \ = 4$.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$f(x) := \left(x_1 - 1\right)^2 + 5\cdot\left(x_2 - 4\right)^2$$

$$x_2 := 0$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Рисунок Д.2 – Решение задачи многомерной оптимизации

Пример 3. Решить задачу линейного программирования:

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \min$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x \geq 0$$

Решение задачи представлено на рис.Д.3: $x_1 = 5,\ \ x_2 = 0$. Для того, чтобы указать ограничения нужно использовать блок «Given». После суммы аргументов нажимается Ctrl и знак “=” (появляется знак равенства жирным шрифтом).

$$f(x) := 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + x_2 \boldsymbol{=} 5$$

$$x \ge 0$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок Д.3 – Решение задачи линейного программирования

Пример 4. Решить задачу нелинейного программирования:

$f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 \to \min$

$x_1 + x_2 = 5$

$x \ge 0$

Решение задачи представлено на рис.Д.4: $x_1 = 3{,}125,\ \ x_2 = 1{,}875$. Отличие от предыдущей задачи заключается только в формуле целевой функции.

$$f(x) := 3 \cdot (x_1)^2 + 5 \cdot (x_2)^2$$

$$x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + x_2 \boldsymbol{=} 5$$

$$x \ge 0$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = \begin{pmatrix} 3.125 \\ 1.875 \end{pmatrix}$$

Рисунок Д.4 Решение задачи нелинейного программирования