Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Н. Э. Лугина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям и организации самостоятельной работы для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения

Томск
2024

УДК 51–74
ББК 22.1
Л83

Рецензент:
Буримов Н. И., заведующий кафедрой
электронных приборов ТУСУР, доктор физ.-мат. наук

Лугина, Наталья Эдуардовна

Математические основы технического образования: методические указания к практическим занятиям и организации самостоятельной работы / Лугина Н. Э. — Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. — 62 с.

Курс «Математические основы технического образования» формирует у студентов понятия, знания и компетенции, позволяющие строить математические модели реально протекающих процессов. Навыки применения основ и приложения математики к решению задач, возникающих в профессиональной деятельности, приобретаются на практических занятиях, во время самостоятельной работы и при подготовке к промежуточной аттестации.

Для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения.

Одобрено на заседании каф. математики, протокол № 7 от 07.03.2024 г.

Оглавление

1. Введение **4**

2. Методические указания к практическим занятиям **6**

2.1. Практическое занятие «Функциональная зависимость" 6

2.2. Практическое занятие «Элементарное исследование функций» . 11

2.3. Практическое занятие «Линии и области на плоскости. Полярная система координат» 18

2.4. Практическое занятие «Линейная функция» 25

2.5. Практическое занятие «Физические приложения векторной алгебры» 29

2.6. Практические занятия «Комплексные числа» 32

2.7. Практические занятия «Физические и геометрические приложения производной» 38

3. Методические указания к самостоятельной работе **42**

3.1. Теоретическая подготовка 42

3.2. Самостоятельное решение задач 42

3.3. Подготовка к промежуточной аттестации 42

4. Список рекомендуемой литературы **44**

Приложение А **45**

Приложение Б **51**

Приложение В **55**

Приложение Г **58**

1. Введение

Курс «Математические основы технического образования» создан для формирования у студентов представлений об основах, методах и моделях математики, которые в большинстве своем являются формализацией понятий, взятых из реальных процессов. Для практического использования полученных знаний, способности к поиску, анализу и системному подходу при решении поставленных задач, курс содержит практические занятия, систематическую работу по изучению теоретического материала, самостоятельную подготовку к промежуточной аттестации.

Практические занятия содержат четыре раздела:

1) Функции и графики.
3) Приложения векторной алгебры.
3) Приложения комплексных чисел.
4) Приложения производной.

Целью практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Математические основы технического образования» является формирование следующих навыков:

– развитие аналитического, алгоритмического и логического мышления студентов;
– выработка у студентов умения работать с математической литературой;
– овладение методами математики, применяемыми для решения профессиональных задач;
– выработка у студентов навыков осуществлять поиск, анализ и синтез информации, необходимой для решения поставленных задач.

На практическом занятии задача формулируется в терминах той или иной предметной области. Начальный этап работы состоит в формализации задачи, выборе метода решения, установлении последовательности шагов решения. Расчеты при решении задачи могут быть выполнены с помощью калькулятора. Важным этапом решения является анализ полученного результата, его правдоподобие и обоснование.

Самостоятельная работа включает следующие виды деятельности:

– теоретическая подготовка;
– самостоятельное решение задач;
– подготовка к промежуточной аттестации.

Математика позволяет формально-логически изучить закономерности и построить их математические модели на основании результатов наблюдений и проведения компьютерного эксперимента. Курс «Математические основы технического образования» предлагает студентам — будущим исследователям — используя математические методы дать ответ на вопрос, какую из моделей следует построить и принять. Таким образом, изучение дисциплины дает знание основных понятий, объектов и методов математики, позволяет анализировать информацию и предлагать решения поставленной задачи.

2. Методические указания к практическим занятиям

2.1. Практическое занятие «Функциональная зависимость»

Цель занятия

Изучить понятия постоянных и переменных величин в физике и технике. Усвоить необходимость изучения функциональных зависимостей между переменными. Изучить понятия функции, аргумента и значения функции, области определения и области значений функции.

Рекомендации по подготовке к занятию

Перед занятием необходимо прочитать теоретический материал о понятии функциональной зависимости и математическом определение функции [1]. Знать понятия области определения и области значения [1]. Повторить справочный материал по элементарным функциям [2].

Содержание занятия

1) Обсуждение темы занятия — краткий обзор темы занятия.
2) Выборочный опрос студентов.
3) Решение задач у доски.
4) Примеры задач для самостоятельного решения.

Изучая тот или иной физический процесс, мы сталкиваемся с различными величинами, которые можно разбить на два типа. Одни величины в данном процессе остаются неизменными. Их называют *постоянными величинами.* Другие же величины в данном процессе изменяются и называются *переменными.* Каждая из них принимает в течение данного процесса различные числовые значения.

Если каждому значению переменной величины x из множества X ее значений по некоторому правилу сопоставлено определенное значение другой переменной y, то y называется *зависимой переменной или функцией* x; x называется *независимой переменной или аргументом.* Множество X называется *областью определения* данной функции. Множество Y называется *множеством значений* данной функции.

Задать функцию — это значит задать и область определения, и закон соответствия между x и y.

Примеры задач

1.1. Пусть материальная точка падает в пустоте под действием силы тяжести с высоты h_0. Высота h зависит от величины времени t, протекшего от начала падения до данного момента $h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}$. Найдите область определения функции.

Решение. Обозначим через T момент касания точки поверхности земли, высота при этом $h(T) = 0$. Подставляя вместо t в формулу T и $h = 0$, получим

$$0 = h_0 - \frac{gT^2}{2} \Rightarrow \frac{gT^2}{2} = h_0 \Rightarrow T^2 = \frac{2h_0}{g} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Таким образом, падение точки будет происходить в течение промежутка времени $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ — это есть область определения функции.

Функция, описывающая данный процесс, определена

$$h(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}, \qquad 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Сначала записывают закон соответствия между переменными t и h, затем записывают область определения функции.

1.2. Дана половина круга радиуса R и множество прямоугольных треугольников с общей гипотенузой, вписанных в эту половину круга. Определите функциональную зависимость между их площадью и высотой.

Решение. Обозначим высоту через h. Очевидно, что h — величина переменная: $0 \leq h \leq R$. Тогда

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\,a \cdot h \Rightarrow S_\triangle = \frac{1}{2}\,2R \cdot h \quad \Rightarrow \quad S(h) = R \cdot h, \quad 0 \leq h \leq R.$$

Изменению высоты от 0 до R соответствует изменение площади S от 0 до R^2. Поэтому множество значений этой функции составляет промежуток от 0 до R^2.

1.3. Объем прямого кругового конуса равен 1. Определите высоту h конуса как функцию радиуса R основания.

Решение. Объем прямого кругового конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Так как по условию объем прямого кругового конуса равен 1, то $h(R) = \frac{3}{\pi R^2}$ при условии $0 < R < +\infty$.

Аналитический способ задания функции

Аналитический способ задания функции является одним из самых распространенных и наилучшим образом приспособлен к операциям математического анализа. Функциональная зависимость задается с помощью некоторого аналитического выражения — формулы. Формула определяет все операции, которые нужно произвести над x, чтобы получить соответствующее значение y. Например, $y=\sqrt{R^2-x^2}, \quad 0 \le x \le R$. Для нахождения значения y, соответствующего данному значению x, нужно x возвести в квадрат, результат возведения вычесть из R^2 и после этого извлечь квадратный корень. Так, $y(\frac{R}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

Под операциями, записываемыми формулами, понимаются известные операции из школьного курса алгебры, тригонометрии (сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, нахождение значений тригонометрических функций и другие).

Определяя функцию, мы должны знать как правило, с помощью которого каждому значению независимой переменной x сопоставляется значение зависимой переменной y, так и множество X значений x (область определения функции), для которых задано данное соответствие. Множество всех тех значений переменной x, для которых определено данное аналитическое выражение $f(x)$, называется *областью определения* (существования) функции $y=f(x)$.

Примеры задач

1.4. Найдите области определения функций:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$;

2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$;

3) $y=\sqrt[4]{1-2x}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x^2}$;

4) $y=\log_x(x^2-5x+6)$;

5) $y=\lg \operatorname{tg} x$

Ответ:

1) $D(y): 4-x^2 \ge 0, \quad x \in [-2;2]$.

2) $D(y): x^2-3>0, \quad x \in (-\infty;-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};+\infty)$.

3)

$$D(y): \left\{ \begin{array}{l} 1-2x \ge 0, \\ 1-x^2 \ge 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \le \frac{1}{2}, \\ -1 \le x \le 1. \end{array} \right. \Rightarrow x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right].$$

4) $D(y): x \in (0;1) \cup (1;2) \cup (3;+\infty)$.

5)

$$D(y): \left\{ \begin{array}{l} x \ne \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \operatorname{tg} x > 0. \end{array} \right. \Rightarrow x \in (\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

1.5. Найдите множество значений функций:

1) $y=e^{x^2-2}$;

2) $y=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$.

Ответ: 1) $D(y): x \in \mathbf{R}, \quad E(y)=[e^{-2};+\infty)$.

2) Преобразуем исходную функцию с помощью введения дополнительного угла:

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 2\left(\sin 2x \cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Отсюда, с учетом, что $E(\sin) = [-1; 1]$, следует, что

$|y| = 2|\sin(2x + \frac{\pi}{6})| \leq 2$, т. е. $-2 \leq y \leq 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1.6. Ракета движется равноускоренно с ускорением a. Найти функциональную зависимость времени t полета от расстояния S полета.

Ответ: $t = \sqrt{\frac{2S}{a}}, \quad 0 \leq S < +\infty$.

1.7. Запишите функциональную зависимость силы F взаимодействия двух электрических зарядов e_1 и e_2 от величины r расстояния между ними.

Ответ: $F = G\frac{e_1 e_2}{r^2}$.

1.8. Напишите выражение для площади S равнобочной трапеции с основаниями $a = 2$ и $b = 1$ как функции угла α при основании a.

Ответ: $S(\alpha) = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\alpha$.

1.9. В шар радиуса R вписан цилиндр. Запишите функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты H. Найдите область определения этой функции.

Ответ: $V = \frac{1}{4}\pi H(4R^2 - H^2), \quad D(H) : [0; 2R]$.

1.10. Найдите функциональную зависимость радиуса R цилиндра от его высоты H при данном объеме $V = 1$.

Ответ: $R(H) = \frac{1}{\sqrt{\pi H}}, \quad D(H) : (0; +\infty)$.

1.11. Напишите выражение для объема V конуса как функции его боковой поверхности S при данной образующей $l = 2$.

Ответ: $V(S) = \frac{S^2}{24\pi^2}\sqrt{16\pi^2 - S^2}$.

1.12. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{если} \quad 1 \leq x \leq 2; \\ 4 + x^2, & \text{если} \quad 2 < x < 3; \\ \frac{1}{2}x^3 - 3, & \text{если} \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Найти $f(1), \quad f(2), \quad f(3), \quad f(4)$.

Ответ: $f(1)=4,\quad f(2)=7,\quad f(3)=\frac{21}{2},\quad f(4)=29.$

1.13. Найдите области определения функций:

1) $y=\sqrt{1-|x|}$; 2) $y=\frac{\sqrt[4]{x-2}}{2-\log_2(x-1)}$;

3) $y=\sqrt{2\cdot 5^{2x}-5^x-1}$; 4) $y=\log_2\log_3\log_4 x$;

5)$y=\sqrt{\lg \mathrm{tg} x}$; 6) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

Ответ: 1) $x\in[-1;1]$; 2) $x\in[2;5)\cup(5;+\infty)$; 3) $x\in[0;+\infty)$; 4) $x\in(4;+\infty)$; 5) $x\in[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$, $n\in$ **Z**; 6) $x\in(-\infty;0)$.

1.14. Найдите область значений функции $y=5\sin 3x+12\cos 3x$, $x\in\mathbf{R}$.
Ответ: $E(y)=[-13;13]$.

1.15. Найдите область значений функции $y=9\sin^2 x+6\cos x$, $x\in\mathbf{R}$.
Ответ: $E(y)=[6;10]$.

Контрольные вопросы

1. Какие величины называются постоянными и какие переменными величинами? Приведите примеры переменных и постоянных величин.
2. Назовите известные в математике числовые множества.
3. Дайте определение функции, области её определения, множества значений функции.
4. Какой способ задания функции называется аналитическим? Какими преимуществами и недостатками обладает аналитическое задание функции?
5. Дайте определение табличного способа задания функции, назовите его преимущества и недостатки
6. Что называется графиком функции и чему он служит?
7. Приведите примеры функциональных зависимостей в прикладных задачах.
8. Поясните, что такое «математический аппарат исследователя».

2.2. Практическое занятие «Элементарное исследование функций»

Цель занятия

Рассмотреть понятия, которые позволяют раскрыть свойства и поведение той или иной функции. Повторить свойства элементарных функций.

Рекомендации по подготовке к занятию

Чтобы составить представление о поведении функции, полезно ответить на следующие вопросы:

1. Какова область определения функции?
2. Является ли функция четной, нечетной, периодической?
3. В каких точках функция принимает значение, равное нулю? (Найти нули функции).
4. Каков знак функции на промежутках между нулями?
5. Является ли функция ограниченной и каковы ее наименьшее и наибольшее значения?

Конечно, указанный перечень вопросов не исчерпывает задачи полного исследования функции. В дальнейшем этот круг вопросов будет расширяться. Перед занятием необходимо прочитать теоретический материал [2] и выписать понятия области определения функции, периода, четности и нечетности, монотонности, ограниченности функции. Повторить справочный материал по элементарным функциям [2].

Содержание занятия

1) Обсуждение этапов исследования функции.
2) Выборочный опрос студентов на знание определений.
3) Решение задач у доски.
4) Примеры задач для самостоятельного решения (варианты тестового задания приведены в приложении А).

Примеры задач

2.16. Найдите значения x, для которых $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$.

а) $f(x)=x-x^3$;

Ответ: $f(x)=0$ при $x=-1$, $x=0$, $x=1$;
$f(x)<0$ при $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$; $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

б) $f(x)=(x+|x|)\cdot(1-x)$;

Ответ: $f(x)=0$ при $x\in(-\infty;0]$, $x=1$; $f(x)>0$ при $x\in(0;1)$;
$f(x)<0$ при $x\in(1;+\infty)$.

в) $f(x)=1-e^{\frac{1}{x}-1}$.

Ответ: $f(x) = 0$ при $x = 1$; $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$.

Функция $f(x)$ называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно точки $x = 0$ и $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = f(x).$$

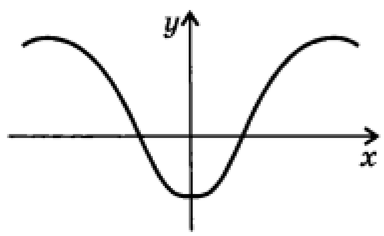


График четной функции симметричен относительно оси y.

Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = -f(x).$$

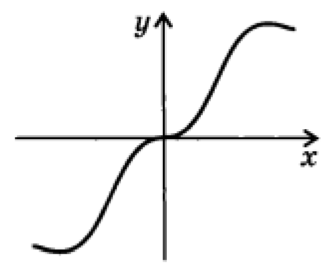
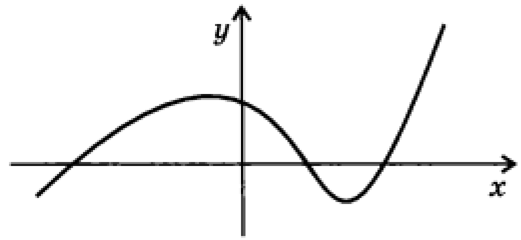


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:



Примеры четных функций: $y = x^{2n}$, $n \in Z$; $y = \cos x$

Примеры нечетных функций: $y = x^{2n+1}$, $n \in Z$; $y = \sin x$

Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными:

$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x - 2$, $y = (x+1)^2$

2.17. Какие из указанных функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными?

а) $f(x) = x^4 + 5x^2$; б) $f(x) = x^2 + x$; в) $f(x) = \frac{x}{2^x - 1}$;
г) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$; д) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$; е) $f(x) = \sin x - \cos x$.

Ответ: а) четная; б) ни четная, ни нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) нечетная; д) нечетная; е) ни четная, ни нечетная.

2.18. Нечетная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2{,}3 + f(x-9)$ вычислите сумму $g(6) + g(8) + g(10) + g(12)$.
Ответ: 9,2.

2.19. Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-7) \cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5) + g(7) + g(9)$.
Ответ: 42.

2.20. Известно, что некоторая нечётная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.
Ответ: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{x}{3}\right)$; $-\frac{1}{9}$, 81.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число $T > 0$ (период функции) такое, что для любого значения x из ее области определения выполняются равенства

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T)$$

.

Свойства периодической функции:

– если $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то $y = f(k \cdot x)$ есть периодическая функция с периодом $T_1 = \frac{T}{k}$;
– функция, являющаяся суммой или произведением двух периодических функций с периодом T будет периодической с периодом T, однако T может не быть ее наименьшим периодом.

2.21. Определите наименьший период следующих периодических функций:

а) $f(x) = 5\cos 7x$; б) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{2} - 2\mathrm{tg}\frac{x}{3}$; в) $f(x) = \cos\frac{\pi x}{3} + \mathrm{ctg}\frac{\pi x}{4}$;
г) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4} + \mathrm{tg}\frac{\pi x}{6}$; д) $f(x) = \cos^2 2x$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{7}$; б) 6π; в) 12; г) 24; д) $\frac{\pi}{2}$.

2.22. Функция $f(x)$ периодическая, и её наименьший положительный период равен 5. Определите, чему равен наименьший положительный период функции $f(x) + \sin \pi x$.

Ответ: 10.

2.23. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 10. Известно, что $f(1) = 1, \quad f(5) = 3$ и на отрезке $[1;5]$ функция является линейной. Найдите значение функции $f(24)$.
Ответ: 2,5.

2.24. Периодическая нечётная функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 5 и $f(1) = 3$, $f(2) = -4$. Найдите значение выражения $f(10) + f(-8) + f(4)$.
Ответ: -7.

2.25. Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом, равным 4, определена на всей числовой прямой. На отрезке $[-2;2]$ она совпадает с функцией $y = x^2 - 4$. Найдите значение $3f(13) - 2f(11)$.
Ответ: -3.

Периодическая функция

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\omega x + \varphi\right),$$

где A, ω, φ — постоянные, называется *гармоникой* с амплитудой $|A|$, частотой ω и начальной фазой φ. Так как функция $\sin x$ имеет период 2π, то функция $A \cdot \sin\left(\omega x + \varphi\right)$ имеет период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2.26. Укажите амплитуду $|A|$, частоту ω, начальную фазу φ и период T следующих гармоник:

а) $f(x) = 5\sin 4x$;
Ответ: $|A| = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 4$, $T = \frac{\pi}{2}$.

б) $f(x) = 4\sin(3x + \frac{\pi}{4})$;
Ответ: $|A| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\omega = 3$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

в) $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Решение. Функцию $f(x) = a\sin x + b\cos x$ можно представить в виде

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi), \quad \text{где} \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

Угол φ определим равенствами

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Вычислим

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

Тогда получим

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right), \quad f(x) = 5\sin(x+\varphi).$$

Отсюда, $|A| = 5, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right), \quad \omega = \frac{1}{2}, \quad T = 4\pi.$

Ответ: $|A| = 5, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right), \quad \omega = \frac{1}{2}, \quad T = 4\pi.$

2.27. Найдите наибольшее значение функции (без использования производной)

$y = \sqrt[7]{\sin x + \cos x - \sqrt{2} + 1}$

Ответ: $y_{max} = 1$.

2.28. Найдите наибольшее значение функции (без использования производной) $y = -\log_{0,5}(\cos x)$.

Ответ: $y_{max} = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

2.29. Найдите значения параметра a, при которых наименьший положительный период функции $y = \cos((2a-11)x)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = \frac{19}{2}$.

2.30. Найдите значения параметра a, при которых наименьший положительный период функции $y = \sin\big((a^2+6a-17)x\big)$ равен $\frac{\pi}{4}$. В ответе запишите произведение таких значений.

Ответ: 261.

2.31. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 3 и $f(-1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(2) + 2f(5)$.

Ответ: 25.

2.32. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $f(x)$ на отрезке $[-1;5]$.

Ответ: 2.

2.33. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-7)\cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5) + g(7) + g(9)$.

Ответ: 42.

2.34. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 2 и $f(-1) = -2$. Найдите значение выражения $3f(5) - 2f(-3)$.

Ответ: -2.

2.35. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $h(x)$ на отрезке $[-3;5]$.

Ответ: 2.

2.36. Найдите наименьшее значение функции (без использования производной)

$$y = \sqrt[5]{9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cdot\cos x + 9\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cdot\sin x + 252}$$

Ответ: $y_{min} = 3$.

2.37. Найдите наибольшее значение функции (без использования производной)

$$y = \left(\sqrt{11}\right)^{\frac{4}{x^2+1}}$$

Ответ: $y_{max} = 121$.

2.38. Найдите наименьшее значение функции (без использования производной)

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + 2}$$

Ответ: $y_{min} = 1$.

2.39. Найдите наименьшее значение функции (без использования производной)

$$y = 3^{2x^2 - 4x + 5}$$

Ответ: $y_{min} = 27$.

2.40. Найдите наименьшее значение функции (без использования производной) $y = \log_{0,2}\left(4x - x^2 + 21\right)$.

Ответ: $y_{min} = -2$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение модуля вещественного числа. Может ли модуль вещественного числа принимать отрицательные значения?
2. Сформулируйте свойства модуля суммы, модуля разности и произведения двух чисел.
3. Какая функция называется периодической и что называется её периодом?

4. Какая функция называется возрастающей на промежутке и как ведет себя график функции при изменении x от меньших значений к большим?
5. Какая функция называется убывающей на промежутке и как ведут себя значения функции при изменении x от меньших значений к большим?
6. Дайте определение ограниченной функции.
7. Что называется наибольшим и наименьшим значением функции? Всегда ли они имеются?
8. Что называется нулём функции?
9. Какая функция называется чётной и какая нечётной? Какие имеются особенности у графиков чётных и нечётных функций?

2.3. Практическое занятие «Линии и области на плоскости. Полярная система координат»

Цель занятия

Построение графиков элементарных функций; знакомство с понятием плоской области. Знакомство с полярной системой координат; овладение навыком замены переменных на примере перехода к полярным координатам; методом выделения полного квадрата для получения канонического уравнения окружности.

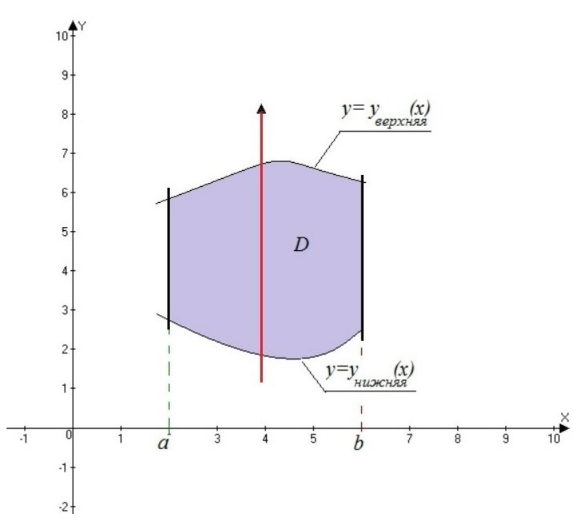
Рекомендации по подготовке к занятию

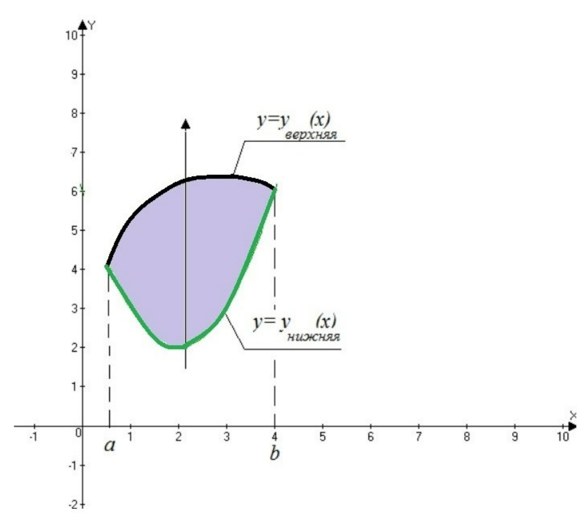
Перед занятием необходимо повторить справочный материал по графикам и свойствам элементарных функций [2]; повторить теоретический материал о системах координат [1]; записать формулы перехода от декартовых координат к полярным координатам, и обратно [1].

Содержание занятия

1) Тестовый опрос по теме предыдущего занятия.
2) Устный опрос студентов о существующих системах координат и необходимости их введения; обсуждение замены переменных и алгоритма решения задачи при переходе к полярной системе координат.
3) Решение задач у доски.
4) Самостоятельное решение задач.

Сначала необходимо построить область D. Для описания плоской области D в декартовых координатах следует воспользоваться схемой 1 или схемой 2:





Границами области D являются координаты концов отрезка — проекции области D на ось Ox и функции $y = y_{нижняя}(x)$ и $y = y_{верхняя}(x)$.

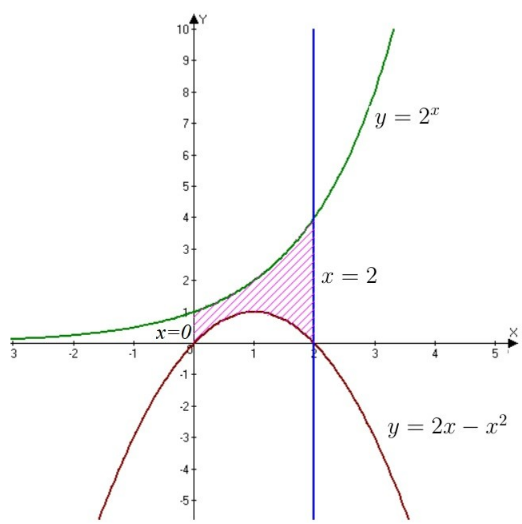
Лишь в том случае, когда область D представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, границы области определяются постоянными числами. Для определения границ области удобно использовать «стрелку», пересекающую область снизу вверх параллельно оси Oy. Те кривые, на которых «стрелка» входит в область, называют *линиями входа*, а те кривые, на которых «стрелки» выходят из области, называют *линиями выхода*. Таким образом, плоская область может быть описана при помощи двойных неравенств D: $a \le x \le b, \quad y_{нижняя}(x) \le y \le y_{верхняя}(x)$.

Примеры задач

3.41. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

$$D : \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ y = 2^x, \\ y = 2x - x^2. \end{cases}$$

Решение. Построим графики указанных функций, заштрихуем область D.

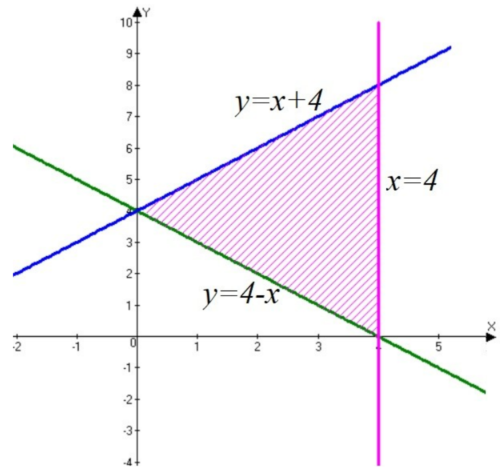


Спроектируем область D на ось Ox. Пределы изменения переменной x найдены: $0 \le x \le 2$. Тогда определяя направление входа в область и выхода из нее параллельно оси Oy, находим пределы изменения переменной y: $2x - x^2 \le y \le 2^x$.

Ответ: $0 \le x \le 2; \quad 2x - x^2 \le y \le 2^x$.

3.42. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

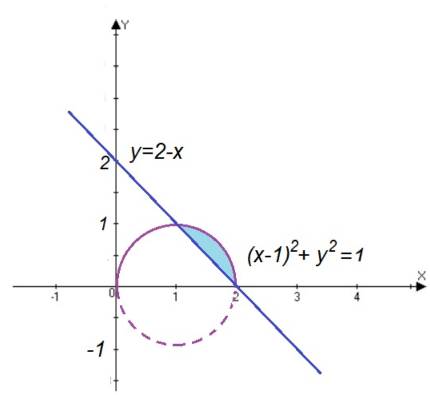
$$D:\begin{cases} x+y=4,\\ y-x=4,\\ x=4. \end{cases}$$



Ответ: $0 \le x \le 4; \quad 4-x \le y \le x+4.$

3.43. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

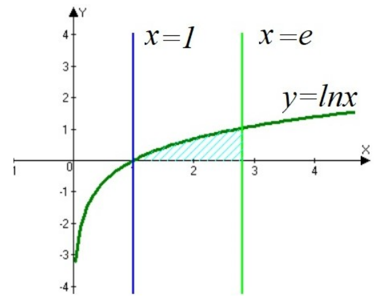
$$D:\begin{cases} y=2-x,\\ y=\sqrt{2x-x^2}. \end{cases}$$



Ответ: $1 \le x \le 2; \quad 2-x \le y \le \sqrt{2x-x^2}.$

3.44. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

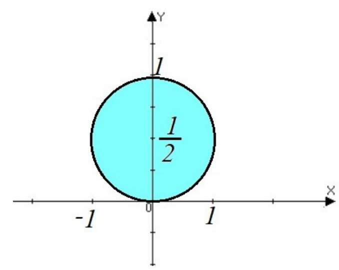
$$D:\begin{cases} y=0,\\ y=\ln x,\\ x=e. \end{cases}$$



Ответ: $1 \le x \le e; \quad 0 \le y \le \ln x.$

3.45. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

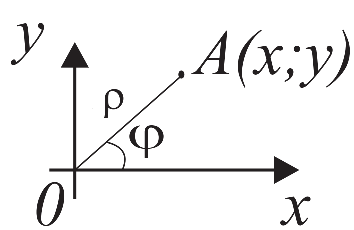
$$D : x^2 + y^2 \le y$$



Ответ: $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \le y \le \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}.$

Полярная система координат

Положение точки A на плоскости можно фиксировать, указав два числа x и y, а можно вместо этого задать расстояние ρ и угол φ.



Числа ρ и φ называют *полярными координатами точки* A; при этом точку O называют *полюсом* полярной системы координат, а луч Ox — *полярной осью.* (Заметим, что ось Oy в определении полярной системы координат не участвует). Таким образом, формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, & 0 \le \rho < +\infty, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & -\pi < \varphi \le \pi. \end{cases}$$

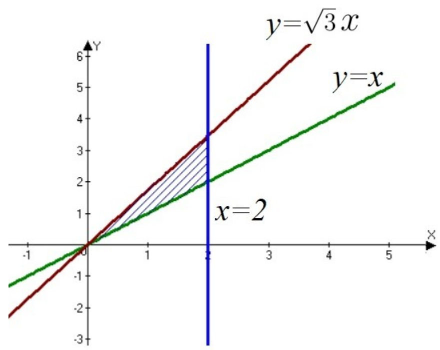
указывают правила перехода от декартовых прямоугольных координат к соответствующим полярным и наоборот.

Примеры задач

3.46. Запишите уравнения заданных кривых в полярных координатах
а) $y = x$; б) $y = 1$; в) $x + y - 1 = 0$; г) $x^2 + y^2 = a^2$;
д) $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$; е) $x^2 + y^2 = ax$.
Ответ: а) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $\rho(\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi}$; в) $\rho(\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$;
г) $\rho = a$; д) $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; е) $\rho = a\cos\varphi$.

3.47. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

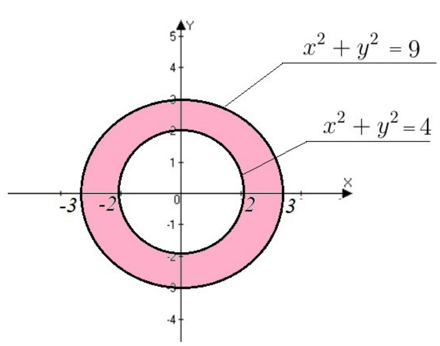
$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ x \leq y \leq x\sqrt{3}. \end{cases}$$



Ответ: $0 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\varphi}$; $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

3.48. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

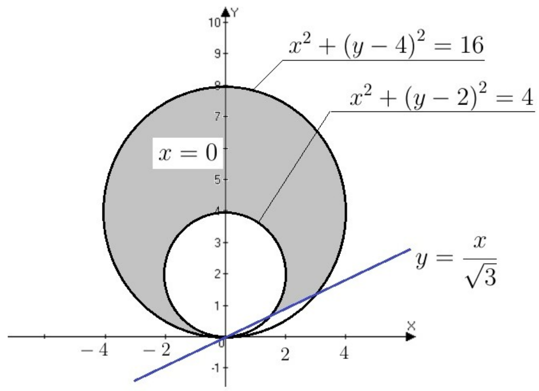
$$D : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$



Ответ: $2 \leq \rho \leq 3$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3.49. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4y, \\ x^2 + y^2 = 8y, \\ x = 0, \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



Ответ: $4\sin\varphi \le \rho \le 8\sin\varphi$; $\quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.50. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

$$D : \begin{cases} y = x^3, \\ y + x + 2 = 0, \\ x = 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-1 \le x \le 0$; $\quad -x - 2 \le y \le x^3$.

3.51. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

$$D : \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Ответ: $-1 \le x \le 1$; $\quad x^2 \le y \le 2 - x^2$.

3.52. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в декартовых координатах

$$D : \begin{cases} y = x^2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $-2 \le x \le 2; \quad x^2 \le y \le 4.$

3.53. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $0 \le \rho \le 2; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

3.54. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ x^2 + y^2 = 8x. \end{cases}$$

Ответ: $4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi; \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

3.55. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \ge y, \\ x^2 + y^2 \le 2y, \\ y \ge -\frac{x}{\sqrt{3}}, \\ y \ge x. \end{cases}$$

Ответ: $\sin\varphi \le \rho \le \sin 2\varphi; \quad \frac{5\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$

3.56. Изобразите область D на плоскости xOy и опишите ее в полярных координатах

$$D: \begin{cases} y \le \sqrt{3}x, \\ y \le \sqrt{2x - x^2}. \end{cases}$$

Ответ: $0 \le \rho \le 2\cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение декартовой системой координат.
2. Какая кривая является графиком квадратного трёхчлена?
3. Запишите уравнение окружности, поясните, как по нему определить центр окружности и её радиус.
4. Дайте определение полярной системы координат.
5. Какими формулами определяется переход от декартовой системы к координат к полярной системе координат, и наоборот?
6. Приведите примеры применения полярной системы координат.

2.4. Практическое занятие «Линейная функция»

Цель занятия

Построение графиков линейной функции и прямой пропорциональности; знакомство с применением линейной функциональной зависимости в физических задачах. Знакомство с параметрическим способом задания кривых.

Рекомендации по подготовке к занятию

Перед занятием необходимо повторить теоретический материал по теме занятия [1]. Прочитать по конспекту или в [1] о параметрическом способе задания кривой на плоскости.

Содержание занятия

1) Обсуждение темы занятия.
2) Выборочный опрос студентов по теоретическому материалу.
3) Решение задач у доски.
4) Примеры задач для самостоятельного решения (варианты тестового задания приведены в приложении Б).

Примеры задач

4.57. Дано, что при напряжении $U = 2{,}4$ В сила тока $I = 0{,}8$ А. Выразите аналитически, используя закон Ома, зависимость между силой тока и напряжением; постройте график найденной функции.

Ответ: $I(U) = \frac{1}{3}U$.

4.58. В сосуд произвольной формы налита жидкость. На глубине $h = 25{,}3$ см давление этой жидкости $P = 1{,}84 \cdot 10^3$ Па.

а) Составьте функцию, выражающую зависимость давления от глубины.
б) Определите давление на глубине $h = 14{,}5$ см.
в) На какой глубине давление станет равным $2{,}65 \cdot 10^3$ Па?

Ответ: а) $P(h) = 7{,}3 \cdot 10^3 \cdot h$; б) $P = 1{,}06 \cdot 10^3$ Па; в) $h = 0{,}364$ м.

4.59. Тело движется прямолинейно под действием силы F. Исходя из закона Ньютона, написать функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением a, если известно, что если тело движется с ускорением 12 м/с^2, то на пути $S = 15$ м производится работа $A = 32$ Дж.

Ответ: $F = 0{,}18\,a$.

4.60. Определите линейную функцию по следующим данным:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
−1,6	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

Ответ: а) $y = \frac{2}{3}x + 4$; б) $y = 1{,}194x + 1{,}910$; в) $y = -0{,}57x + 8{,}63$.

4.61. Некоторое количество газа занимало при 20° C объем 107 см^3, а при 40° C объем стал равным 114 см^3.

а) Составьте, исходя из закона Гей-Люссака, функцию, выражающую зависимость объема V газа от температуры T.
б) Каков будет объем газа при 0° C?

На примере этой задачи показать различие в физическом и математическом подходе к решению.

Ответ: а) $V = 0{,}35 \cdot T + 100$; б) 100 см^3.

4.62. Найдите приращение линейной функции $y = 2x - 7$ при переходе независимой переменной x от значения $x_1 = 3$ к значению $x_2 = 6$.

На примере этой задачи пояснить понятия приращения аргумента и приращения функции, которые впоследствии используются для определения производной функции.

Ответ: $\triangle\ y = 6$.

4.63. Найдите приращение линейной функции $y = -3x + 1$, соответствующее приращению независимой переменной $\triangle\ x = 2$.

Ответ: $\triangle\ y = -6$.

4.64. Даны функция $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ и начальное значение независимой переменной $x_1 = a - b$. При каком конечном значении x_2 независимой переменной x приращение $\triangle\ y = \frac{1}{a-b}$?

Ответ: $x_2 = 2a$.

Задачи для самостоятельного решения

4.65. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно (по линейному закону). В начале опыта напряжение было равно 12 В, а по окончании опыта, длившегося 8 с, напряжение упало до 6,4 В. Выразите напряжение U как функцию времени t и постройте график этой функции.

Ответ: $U = 12 - 0{,}7 \cdot t$.

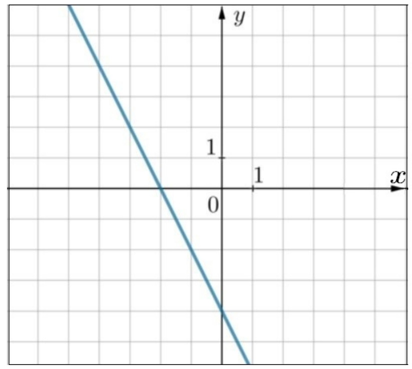
4.66. Равномерно движущаяся по прямой точка через 12 с после начала движения находилась на расстоянии 32,7 см от некоторой точки этой прямой; через 20 с после начала движения расстояние стало равным 43,4 см. Выразите расстояние S как функцию времени t.

Ответ: $S(t) = 16{,}6 + 1{,}34 \cdot t$.

4.67. Функция $y = 2{,}5x + 4$ получила приращение $\triangle\ y = 10$. Найдите приращение аргумента.

Ответ: $\triangle\ x = 4$.

4.68. График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = 2x - 4$; 2) $y = -2x + 4$; 3) $y = 2x + 4$; 4) $y = -2x - 4$.

Ответ: 4)

4.69. При увеличении аргумента функции $y = kx + b$ на 2, функция увеличилась на 4. Найдите коэффициент k.

Ответ: 2.

4.70. При увеличении аргумента функции $y = kx + b$ на 1, функция уменьшилась на 3. Найдите коэффициент k.

Ответ: -3.

4.71. Дана функция $y = kx + b$. При $x = 3$ $y = 1$, а при $x = 5$ $y = -1$. Определите коэффициенты k и b функции.

Ответ: $k = -1$, $b = 4$.

Примеры задач на тему «Параметрическое задание линий» [1]

4.72. Линия задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - 1, \qquad t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

Найти декартовы координаты точек, если соответствующие значения параметра t равны 1; -2; 2; $\frac{1}{3}$; 0.

Ответ: $M_1\,(1;0)$; $M_2(4;-3)$; $M_3\,(4;1)$; $M_4\left(\frac{1}{9};-\frac{2}{3}\right)$; $M_5\,(0;-1)$.

4.73. На линии

$$\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = t^2 - 4t + 3, \qquad t \in (-\infty; +\infty), \end{cases}$$

дана точка $A\,(3;0)$. Найдите значение параметра t, соответствующего этой точке.

Ответ: $t = 1$.

4.74. Исключите параметр t и найдите уравнения заданных кривых в виде $F(x, y) = 0$. Постройте эти кривые.

а) $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - t, \qquad t \in (-\infty; +\infty)\,; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1, \\ y = t - 1, \qquad t \in (-\infty; +\infty)\,; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = -1 + 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t, \qquad t \in (0; 2\pi]\,; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \qquad t \in (0; 2\pi]\,; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \\ y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \qquad t \in (0; +\infty)\,; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = 2R\cos^2 t, \\ y = R\sin 2t, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\,; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x = R\sin 2t, \\ y = 2R\sin^2 t, \qquad t \in [0; \pi)\,. \end{cases}$

Ответ: а) $x + 2y - 3 = 0$; б) $x = y^2$; в) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$;
г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; д) правая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
е) $(x-R)^2 + y^2 = R^2$; ж) $x^2 + (y-R)^2 = R^2$.

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется линейной? Каковы область ее определения и множество значений?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Каковы частные случаи линейной функции и как расположены на координатной плоскости графики в этих случаях?
4. Каков геометрический смысл коэффициентов k и b линейной функции $y = kx + b$?
5. Сколько значений линейной функции нужно знать, чтобы задать эту функцию? Будет ли линейная функция монотонной?
6. В каком виде записывается приращение линейной функции, имеющей в точке x_0 производную?
7. Приведите примеры физических закономерностей, которые могут быть описаны при помощи линейной функциональной зависимости.
8. Какие существуют способы задания кривых на плоскости? При помощи каких уравнений они описываются?

2.5. Практическое занятие «Физические приложения векторной алгебры»

Цель занятия

Знакомство с применением векторной алгебры для решения физических задач.

Рекомендации по подготовке к занятию

Векторы встречаются во всех разделах физики, причем в механике и электродинамике почти все физические величины являются векторными. Поэтому успешное решение задач из этих разделов требует обязательного привлечения векторного анализа. Кроме того, решение целого ряда задач принципиально невозможно без использования векторов.

Перед занятием необходимо повторить теоретический материал по изученной теме [1], уяснить понятие скаляра и вектора, определить линейные операции над векторами, а также скалярное и векторное произведение векторов.

Содержание занятия

1) Тестовый опрос по теме предыдущего занятия.
2) Устный опрос студентов по теме занятия: обсуждение понятий векторной алгебры, операций над векторами; применяемых к решению задач формул, физического смысла понятий.
3) Решение задач у доски.
4) Самостоятельное решение задач.

Прочитав условие задачи, при необходимости сделать рисунок, указать и обозначить на нем все векторные величины. От векторных уравнений перейти к скалярным уравнениям. По возможности оценить правдоподобность численного ответа.

Примеры задач

5.75. Найдите координаты центра тяжести $M(x; y)$ системы двух материальных точек $A(3; -5)$, $B(-1; 1)$, в которых сконцентрированы массы $q = 3$ и $p = 5$ соответственно.

Ответ: $M(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$.

5.76. Найдите работу силы $\bar{F}$ по перемещению $\bar{S}$, если $|\bar{F}| = 3$, $|\bar{S}| = 5$, а угол между векторами силы и перемещения равен $45°$.

Ответ: $A = 7{,}5 \cdot \sqrt{2}$.

5.77. Найдите работу равнодействующих двух сил $\overline{F_1} = (1, 9, -3)$ и $\overline{F_2} = (-5, -6, 1)$ по перемещению из положения $M_1(-4; 3; -2)$ в положение $M_2(2; 5; -8)$.

Ответ: $A = -6$.

5.78. Найдите величину равнодействующих двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, если $|\overline{F_1}| = 2$, $|\overline{F_2}| = 3$, а угол между векторами сил равен 60°.

Ответ: $|\overline{F}| = |\overline{F_1} + \overline{F_2}| = \sqrt{19}$.

5.79. Сила $\overline{F} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k}$ приложена к точке $A(4; -2; 3)$. Определите момент этой силы относительно точки $O(3; 2; -1)$.

Ответ: $\overline{M} = [\overline{OA}, \overline{F}] = -4\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$.

5.80. Сила $\overline{Q} = (3, 4, -2)$ приложена к точке $C(2; -1; -2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

Ответ: 15; $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{15}$, $\cos\gamma = \frac{11}{15}$.

5.81. Даны три силы $\overline{M} = (2, -1, -3)$, $\overline{N} = (3, 2, -1)$ и $\overline{P} = (-4, 1, 3)$, приложенные к точке $C(-1; 4; -2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2; 3; -1)$.

Ответ: $\sqrt{66}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}$.

5.82. Найдите вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2, 1, -1)$ и удовлетворяющий условию $(\bar{b}, \bar{a}) = 3$.

Ответ: $\bar{b} = (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

5.83. Найдите проекцию вектора $\bar{S} = (4, -3, 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Ответ: $\sqrt{3}$.

5.84. Даны две точки $A(3; -4; -2)$, $B(2; 5; -2)$. Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, а с осью Oz — тупой угол γ.

Ответ: -5.

Задачи для самостоятельного решения

5.85. Найдите работу силы $\overline{F} = (3, -5, 2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\overline{S} = (2; -5; -7)$.

Ответ: $A = 17$.

5.86. Найдите работу силы $\overline{F} = (3, -2, -5)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2; -3; 5)$ в положение $B(3; -2; -1)$.

Ответ: $A = 31$.

5.87. Даны три силы $\overline{M} = (3, -4, 2)$, $\overline{N} = (2, 3, -5)$ и $\overline{P} = (-3, -2, 4)$, приложенные к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;3;-7)$ в положение $M_2(4;-1;-4)$.

Ответ: $A = 13$.

5.88. Сила $\overline{F} = (3,2,-4)$ приложена к точке $A(2;-1;1)$. Определите момент этой силы относительно начала координат.

Ответ: $\overline{M} = (2,11,7)$.

5.89. Сила $\overline{F} = (2,2,9)$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Определите величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C(2;4;0)$.

Ответ: 28; $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

5.90. Найдите проекцию вектора $\bar{S} = (\sqrt{2},-3,-5)$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oz углы $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а с осью Oy — острый угол β.

Ответ: -3.

Контрольные вопросы

1. Дайте понятие вектора и назовите линейные операции над векторами.
2. Дайте определение базиса на плоскости и в пространстве.
3. Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов.
4. Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.
5. Как вычислить скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
6. Как вычислить векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами?
7. Для чего служат направляющие косинусы вектора?
8. Дайте определение орта вектора.
9. Какое приложение находит скалярное произведение векторов в физике?
10. Какое приложение находит векторное произведение векторов в физике?

2.6. Практические занятия «Комплексные числа»

Цель занятий

Знакомство с комплексными числами. Выработка навыков:

- представления комплексного числа в виде вектора на комплексной плоскости;
- выполнение действий с комплексными числами;
- выработка умения находить модуль и аргумент комплексного числа;
- выработка навыка записи комплексного числа в любой из трех форм;
- умение переходить от алгебраической формы записи к тригонометрической и показательной, и обратно; знакомство с формулой Эйлера;
- умение представлять геометрические образы на комплексной плоскости;
- решать алгебраические уравнения с комплексными корнями;
- возводить комплексное число в целую степень; знакомство с формулой Муавра;
- извлекать корень из комплексного числа.
- умение выделять действительную и мнимую части комплексного переменного и его функции.

Рекомендации по подготовке к занятиям

Комплексные числа оказываются полезными при математическом моделировании задач физики и техники (в электротехнике, атомной физике, теории колебаний, в оптике). Комплексные числа необходимы при рассмотрении периодически меняющихся процессов, например таких, как гармонические колебания или переменный ток. Это объясняется тем, что данные величины удобно представлять в виде комплексных чисел, и следовательно, векторных диаграмм. Комплексные амплитуды напряжения и тока характеризуются двумя параметрами: амплитудой и начальной фазой, а метод расчета с их использованием — методом комплексных амплитуд.

Перед занятием необходимо повторить теоретический материал по конспекту или по [1].

Содержание занятий

1) Обсуждение темы занятий.
2) Выборочный опрос студентов по теоретическому материалу.
3) Решение задач у доски.
4) Примеры задач для самостоятельного решения; варианты заданий приведены в приложении В.
5) Тестовый опрос по теме занятий.

Примеры задач

6.91. Построить векторы, изображающие следующие комплексные числа: 1) $2+2i$; 2) $1-i$; 3) $-1+2i$; 4) $-1-i$; 5) $3i$; 6) -5; 7) $-\sqrt{3}i$; 8) 3.

6.92. Для заданных комплексных чисел написать им сопряженные: 1) $-3+5i$; 2) $4-i$; 3) $-6-6i$; 4) $8+3i$; 5) $-7i$; 6) $5i$.

6.93. Выполните действия:
1) $(2+2i)+(4+2i)$; 2) $(-7+6i)+(-3-8i)$; 3) $(4-7i)+(4+7i)$;
4) $(5-i)-(-1-i)$; 5) $(-2-6i)-(2+9i)$; 6) $(-3+5i)-(-3+5i)$;
7) $(-3-5i)\cdot 2i$; 8) $(-7-9i)\cdot(-3i)$; 9) $(2-3i)(-4+7i)$;
10) $(5-6i)(-10+8i)$; 11) $(4+i\sqrt{5})(4-i\sqrt{5})$; 12) $\frac{2}{5i}$; 13) $\frac{6}{1+i}$; 14) $\frac{5+3i}{2+i}$;
15) $\frac{4-5i}{-2+7i}$.

Ответ: 7) $10-6i$; 8) $-27+21i$; 9) $13+26i$; 10) $-2+100i$; 11) 21; 12) $-\frac{2}{5}i$; 13) $3-3i$; 14) $\frac{13}{5}+\frac{1}{5}i$; 15) $-\frac{43}{53}-\frac{18}{53}i$.

6.94. Разложите на комплексные множители следующие выражения: 1) a^2+b^2; 2) m^2+16n^2; 3) $9p^2+25q^2$; 4) $m+n$.

6.95. Найдите i^{12}; i^{18}; i^{37}; i^{55}; i^{93}; i^{104}; $(-i)^{10}$; $(-i)^{49}$.

Ответ: 1; -1; i; $-i$; i; 1; -1; $-i$.

6.96. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел, запишите комплексные числа в тригонометрической и показательной формах: 1) $1-i$; 2) $-2+2i$; 3) $4+4\sqrt{3}i$; 4) $-\sqrt{3}-i$; 5) $-i$; 6) i; 7) $\sqrt{2}$; 8) -1.

6.97. Определите геометрическое место точек, для которых:
1) $Rez<5$; 2) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{3}$; 3) $Rez=2$; 4) $Imz=-2$; 5) $Imz<0$; 6) $Rez+Imz=0$; 7) $|z|\le 3$; 8) $|z|>5$; 9) $|z-4|\le 2$; 10) $|z+2i|\ge 4$; 11) $|z-3i|=3$; 12) $|z+1-i|<2$; 13) $1<|z|<3$.

6.98. Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа: 1) $3+\sqrt{3}i$; 2) $5i$; 3) $1-i$; 4) $-1+i$; 5) $\sqrt{3}+i$; 6) $-2-2i$; 7) $-5i$; 8)1; 9) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

6.99. Представить в показательной и алгебраической формах следующие комплексные числа:

1) $2\,(\cos\pi+i\sin\pi)$; 2) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; 3) $4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;
4) $8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; 5) $\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$; 6) $7\,(\cos 0+i\sin 0)$.

6.100. Запишите в алгебраической и тригонометрической формах числа

1) $\frac{1}{2}\cdot e^{i\pi}$; 2) $e^{4+\frac{i\pi}{2}}$; 3) $6\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$; 4) $3\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$; 5) $e^{1+i\frac{2\pi}{3}}$.

6.101. Выполните умножение

1) $3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\frac{1}{2} \cdot (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) \cdot (\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$;

3) $6 \cdot (\cos(-135^\circ) + i\sin(-135^\circ)) \cdot \sqrt{3}\,(\cos(-15^\circ) + i\sin(-15^\circ))$.

Ответ: 1) $12i$; 2) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; 3) $-9 - 3\sqrt{3}i$.

6.102. Используя формулу Муавра, вычислите

1) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^8$;

2) $\left(\sqrt{2}\,(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)\right)^6$;

3) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{15}$.

Ответ: 1) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $4 + 4\sqrt{3}i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

6.103. Вычислите все значения корня данной степени из комплексного числа и постройте их геометрическое изображение:

1) $\sqrt[3]{6 - 6\sqrt{3}i}$; 2) $\sqrt[3]{125}$; 3) $\sqrt[6]{-64}$; 4) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$; 5) $\sqrt[5]{-4 + 4i}$;

6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}i}$.

Ответ: 1) $\sqrt[3]{12}\, e^{\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$; 2) $5\, e^{\frac{2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$;

3) $2\, e^{\frac{\pi + 2\pi k}{6}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; 4) $e^{\frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$;

5) $\sqrt{2}\, e^{\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$; 6) $\frac{1}{6}\, e^{\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

6.104. Используя показательную форму комплексного числа, выполните действия:

1) $\left(-\sqrt{5} + i\sqrt{5}\right)^3 \cdot (1 + i)^2$; 2) $\frac{-4 + 4i}{\left(\sqrt{3} - i\right) \cdot (1 - i)^2}$; 3) $(1 - i)^3 \cdot \left(-2\sqrt{3} + 2i\right)$;

4) $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3}{\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

Ответ: 1) $-20\sqrt{5} + 20\sqrt{5}i$; 2) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;

3) $8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}i$.

6.105. Решите уравнения:

1) $z^2 + 16 = 0$; 2) $z^3 - 27 = 0$; 3) $z^2 + 4z + 20 = 0$;

4) $z^2 + 2z + 2 = 0$; 5) $z^2 + 1 = 0$; 6) $z^2 + 6z + 10 = 0$;

7) $z^2 + 4z + 5 = 0$; 8) $z^2 + z + 1 = 0$; 9) $z^2 + 25 = 0$.

6.106. Найдите действительную и мнимую части следующих функций:

1) $\omega = z^2$; 2) $\omega = \frac{1}{z}$; 3) $\omega = z^3 - z$; 4) $\omega = (z - i)^2$; 5) $\omega = \frac{1}{z-1}$;

6) $\omega = \cos z$; 7) $\omega = \mathrm{ch} z$, где $z = x + iy$.

Ответ: 1) $\mathrm{Re}\,\omega = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}\,\omega = 2xy$; 2) $\mathrm{Re}\,\omega = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\,\omega = \frac{-4}{x^2+y^2}$;

3) $\mathrm{Re}\,\omega = x^3 - 3xy^2 - x$, $\mathrm{Im}\,\omega = 3x^2y - y^3 - y$;

4) $\mathrm{Re}\,\omega = x^2 - (y - 1)^2$, $\mathrm{Im}\,\omega = 2x\,(y - 1)$;

5) $\operatorname{Re}\omega = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$, $\operatorname{Im}\omega = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$;
6) $\operatorname{Re}\omega = \cos x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\omega = -\sin x \operatorname{sh} y$;
7) $\operatorname{Re}\omega = \operatorname{ch} x \cos y$, $\operatorname{Im}\omega = \operatorname{sh} x \sin y$.

6.107. Вектор $\overline{OA}$, составляющий с положительным направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$ и имеющий длину, равную 2, подвергнут следующим операциям: 1) растяжению в 3 раза; 2) повороту на угол $\frac{\pi}{3}$ в положительном направлении и растяжению в $\frac{1}{4}$ раза; 3) повороту на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении и растяжению в 5 раз; 4) повороту на угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении. Определите произведение комплексного числа, изображаемого вектором $\overline{OA}$, на комплексные числа, соответствующие указанным операциям; найти эти комплексные сомножители.

6.108. Над вектором, изображающим данное число, выполните указанные в таблице операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение сомножителей и произведения или делимого, делителя и частного.

	число	растяж.	сжатие	пов. в +	пов. в −	результат
1.	3	$\frac{1}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		
2.	$2i$		4		π	
3.	$-i$	5		$\frac{3\pi}{4}$		
4.	-4		$\frac{1}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	
5.	$1+i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		
6.	$6-6i$		3		$\frac{3\pi}{4}$	
7.	$-1+i\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		
8.	$-6\sqrt{3}-6i$		6		$\frac{\pi}{6}$	

Задачи для самостоятельного решения

6.109. Найдите $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 1-7i$.

Ответ: $3-2i$; $1+12i$; $37-9i$; $-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$.

6.110. Запишите z в алгебраической форме:
1) $z = \frac{-41+63i}{50} - \frac{6i+1}{1-7i}$;
2) $z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$;
3) $z = \frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(2i+1)^2}{i+2}$.

Ответ: 1) i; 2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$.

6.111. Найдите модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел: 1) $3+\sqrt{3}i$; 2) $5i$; 3) $1-i$; 4) $-1+i$; 5) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; 6) $-2-2i$.

Ответ: 1) $|z|=2\sqrt{3}$, $\arg z=\frac{\pi}{6}$; 2) $|z|=5$, $\arg z=\frac{\pi}{2}$; 3) $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{\pi}{4}$; 4) $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=\frac{3\pi}{4}$; 5) $|z|=2\sqrt{2}$, $\arg z=\frac{2\pi}{3}$;
6) $|z|=2\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{3\pi}{4}$.

6.112. Используя показательную форму комплексного числа, выполните действия:

1) $(2-2i)^2\cdot\left(-1+i\sqrt{3}\right)$;

2) $\frac{-5+5i}{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}$; 3) $\left(-\frac{1}{4}+i\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(2\sqrt{3}-2i\right)^2$;

4) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$; 5) $\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)^8$; 6) $\sqrt[3]{-8i}$; 7) $\sqrt[4]{-81}$;

8) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$; 9)$\sqrt[3]{-27+27i}$.

Ответ: 1) $16\,e^{i\frac{\pi}{6}}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{4}\,e^{-i\frac{11\pi}{12}}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$; 4) $32\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$; 5) 1296;
6) $2\,e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}}$, $k=0,1,2$; 7) $3\,e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}$, $k=0,1,2,3$; 8) $2\,e^{i\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}}$, $k=0,1,2,3$;
9) $3\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}}$, $k=0,1,2$.

6.113. Используя формулу Муавра, вычислите

1) $(3\cdot(\cos 36^\circ+i\sin 36^\circ))^5$;

2)$\left(\sqrt{2}\cdot(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ))\right)^{12}$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos 57^\circ+i\sin 57^\circ)\right)^{10}$.

Ответ: 1) -243; 2) $-32+32\sqrt{3}i$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{64}-i\frac{1}{64}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексного числа. Какая форма записи комплексного числа называется алгебраической?
2. Дайте определение действительной и мнимой части комплексного числа.
3. Как геометрически изобразить комплексное число?
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Какие операции определены над комплексными числами?
6. Определите операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
7. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа. Какие значения принимает модуль и аргумент комплексного числа?
8. Какая форма записи комплексного числа называется тригонометрической?

9. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме и наоборот?
10. Как возвести комплексное число в целую положительную степень? Запишите формулу Муавра.
11. Какая форма записи комплексного числа называется показательной?
12. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной форме и наоборот?
13. Запишите формулу Эйлера.
14. Запишите формулу корня n-ой степени из комплексного числа в показательной форме. Сколько различных значений имеет $\sqrt[n]{z}$?
15. Какие корни имеет квадратное уравнение с действительными коэффициентами и дискриминантом $D < 0$?
16. Дайте определение гиперболических функций, запишите основные соотношения для них и формулы для производных.
17. Приведите примеры применения комплексных чисел.

2.7. Практические занятия «Физические и геометрические приложения производной»

Цель занятий

Применение производной к решению физических и геометрических задач, задач на отыскание наилучших конфигураций и оптимальных решений.

Рекомендации по подготовке к занятиям

Перед занятиями необходимо знать понятие производной, таблицу производных элементарных функций, правила вычисления производных от суммы, произведения и частного двух функций, правило нахождения производной сложной функции [3]. А так же ознакомиться с необходимым и достаточным условием экстремума функции [1].

Содержание занятий

1) Обсуждение теоретических понятий, используемых правил и формул для вычисления производных; геометрического и физического смысла производной функции.
2) Решение задач у доски.
3) Самостоятельное решение задач.
4) Тестовый опрос по теме занятий.

Примеры задач

7.114. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого расположена на перпендикуляре к плоскости круга, проходящего через его центр, выражается формулой

$$F = \frac{Cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где a — радиус круга, x — расстояние от центра круга до магнита ($0 < x < \infty$), $C = const$. При каком значении x сила F будет наибольшей?

Ответ: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

7.115. Если источником тока служит электрический элемент, то эффект P (Вт), получающийся при включении в цепь сопротивления W (Ом), выражается формулой

$$P = \frac{E^2 W}{(W + W_i)^2},$$

где E (В)— электродвижущая сила, W_i (Ом)— внутреннее сопротивление. Найти наибольший эффект, который можно получить при данных E и W_i.

Ответ: $P_{max}(W = W_i) = E^2/4W_i$.

7.116. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точек задана уравнениями $S_1(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 24$ и $S_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + 6t - 17$. В какой момент времени скорости их движения будут равны?

Ответ: 1.

7.117. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точек задана уравнением $S(t) = -t^3 + 3t^2 + 12t - 3$. Найдите максимальную скорость движения этой точки.

Ответ: 15 м/с.

7.118. Зависимость температуры T тела от времени задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 5$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 5$ с?

Ответ: 3 м/с.

7.119. На параболе $y = x^2$ найти точку N, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

Ответ: $N(1;1)$

7.120. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стенок и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: 4 м, 2 м.

7.121. В прямоугольной системе координат дана точка $(1;2)$. Провести через эту точку прямую линию так, чтобы она образовала вместе с положительными полуосями координат треугольник наименьшей площади.

Ответ: $y = -2x + 4$.

7.122. Три пластины одинаковой ширины соединяют в виде желоба для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

Ответ: 60°.

Задачи для самостоятельного решения

7.123. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$. Определите угловую скорость в момент остановки.

Ответ: $\omega(t) = b - 2ct, \quad t = \frac{b}{2c}$.

7.124. Рычаг AB имеет точку опоры в A и уравновешивается силой F на другом конце. На расстоянии a от точки опоры подвешен груз p, а вес единицы длины рычага равен m. Определите длину x рычага так, чтобы сила F была наименьшей. Предполагается, что момент стержня относительно конца известен:

$$M = \frac{ml^2}{2},$$

где l — длина стержня.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{2ap}{m}}$.

7.125. Определить силу тока в момент $t_0 = \frac{\pi}{9}$, если $Q\,(t) = 1 - \cos 3t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7.126. Две точки движутся по оси Ox. Координата x первой точки определяется формулой $x_1 = 3t^2 - 5$, координата x второй точки определяется формулой $x_2 = 3t^2 - t + 1$ (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Найдите скорости движения точек в тот момент, когда их координаты равны.

Ответ: 36 м/с; 35 м/с.

7.127. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точек задана уравнением $S(t) = -\frac{1}{3}\,t^3 + 10t^2 - 4t + 7$. Найдите максимальную скорость движения этой точки.

Ответ: 96 м/с.

7.128. При движении тела по прямой расстояние $S(t)$ в метрах от начальной точки M изменяется по закону $S(t) = 3t^3 + 2t^2 + 4t + 5$. Через сколько секунд после начала движения мгновенное ускорение тела будет равно 58 м/с^2?

Ответ: 3 с.

7.129. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведённая к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M_0(2; -4)$? (Ответ запишите в градусах.)

Ответ: $45°$.

7.130. Отрезок длины a разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих частях, была наименьшей.

Ответ: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$.

7.131. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

Ответ: $V_{min}(h_{min} = 4R) = \frac{8}{3}\pi R^3$.

7.132. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом даст наименьшую сумму.

Ответ: $-\frac{1}{2}$

7.133. Найдите число, которое будучи сложенным с обратным числом, даёт наименьшую сумму.

Ответ: 1.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулы для производных элементарных функций.
2. Запишите правила нахождения производных (производная суммы, произведения, частного, вынесение постоянного множителя за знак производной; производная сложной функции, обратной функции).
3. Дайте определение скорости прямолинейного движения, силы электрического тока, скорости течения химической реакции.
4. Каковы необходимые и достаточные условия постоянства функции на промежутке?
5. Каковы необходимые и достаточные условия возрастания (убывания) функции на промежутке?
6. Дайте определение максимума, минимума функции. Может ли функция иметь экстремум на конце промежутка ее задания?
7. Каковы необходимые условия экстремума для дифференцируемой функции? Может ли функция иметь экстремум кроме точек, где первая производная обращается в нуль?
8. Каковы достаточные условия экстремума (на основании первой и второй производной)?
9. В каких точках промежутка непрерывная функция может принимать наибольшее (наименьшее) значение?

3. Методические указания к самостоятельной работе

3.1. Теоретическая подготовка

Самостоятельная работа над теоретическим материалом направлена на освоение математического аппарата исследователя. Студенту предстоит освоить взаимосвязь языка, моделей и методов математики, ориентированную на решение прикладных задач. Теоретическая подготовка включает в себя не только проработку лекционного материала, но и самостоятельное изучение тем или отдельных вопросов теоретической части дисциплины.

Необходимость проработки конспекта лекций дает возможность выстроить структуру дисциплины и выделить основные идеи и методы, поскольку этот навык может пригодиться при чтении специальной литературы и справочных пособий. В конспекте лекций должны быть выделены основные положения, определения и формулы. На практическом занятии студент должен пользоваться конспектом. Контроль изучения теоретического материала проводится на каждой практике в виде опроса.

Темы, вынесенные для самостоятельного изучения, необходимо проработать письменно: составить план прочитанного материала или интеллект-карту, выписать формулы и решить задачи и упражнения, предложенные в методическом пособии. При работе с разными учебниками обозначения и термины могут отличаться. Важно привести их в систему. Контроль самостоятельного изучения материала осуществляется в форме проверки конспекта, собеседования с преподавателем.

3.2. Самостоятельное решение задач

Самостоятельное решение задач является важным элементом изучения математических методов. В конце каждого раздела приведены задачи, решение которых позволит закрепить и расширить изложенный материал. Первоначальный разбор задач проводится на практическом занятии, затем студент закрепляет полученные навыки, выполняя домашнее задание. Решение каждой задачи должно быть полностью обоснованным, содержать необходимые пояснения и формулы. Студент должен знать используемые термины, уметь формулировать определения и свойства, давать пояснения к решению при работе у доски.

3.3. Подготовка к промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в виде собеседования с преподавателем по результатам письменного опроса по теории и контрольного решения задач. Билет для промежуточной аттестации содержит один теоретический вопрос и три задачи. Теоретические вопросы выбираются из лекционного материала в соответствии с рабочей программой дисциплины. Задачи выбираются из вышеперечисленных четырёх основных разделов практических занятий, задач для самостоятельного решения и вариантов тестовых заданий. Это типовые задачи, выполненные студентом в течение семестра.

Пример задания промежуточной аттестации
Билет № 1.

1. Понятие функциональной зависимости в математике и в физике. Примеры функциональных зависимостей.
2. Изобразите область D на плоскости xOy, опишите область в декартовых координатах
$$D : \begin{cases} y = -x + 1, \\ y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$
3. Найдите $Im\left(i^{23} - i^{17} + i^{28} + i^{42}\right)$
4. Количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время t от начала, изменяется по закону $Q(t) = 2t^3 + 3t^2 + 1$ Кл. Найти силу тока в момент времени t_0 и в момент $t = 3$ сек.

4. Список рекомендуемой литературы

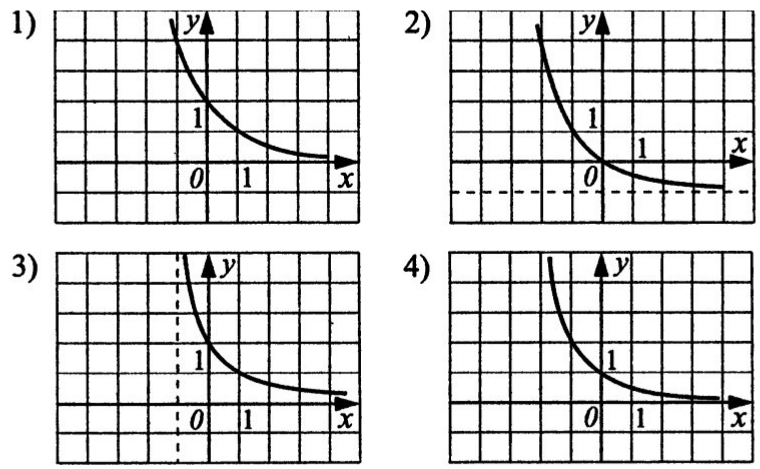
1. Лугина, Н. Э. Математические основы технического образования: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Н. Э. Лугина. — Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. — 77 с. — URL: https://edu.tusur.ru/publications/10733 (дата обращения: 21.03.2024)
2. Гриншпон, И. Э. Элементарные функции и их графики: Учебное пособие / И. Э. Гриншпон — 2017. — 91 с. — URL: https://edu.tusur.ru/publications/7037 (дата обращения: 01.03.2024)
3. Магазинников, Л. И. Высшая математика. Дифференциальное исчисление: Учебное пособие / Л. И. Магазинников, А. Л. Магазинников. — Томск: ТУСУР, 2019. — 92 с. — URL: https://edu.tusur.ru/publications/9028 (дата обращения: 01.03.2024)
4. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2023. — 492 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/295943 (дата обращения: 01.03.2024)

Приложение А

Варианты тестового задания «Элементарное исследование функции»

Вариант 1.

1. На рисунке ниже укажите график функции $y = 0{,}5^{x-1}$.



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

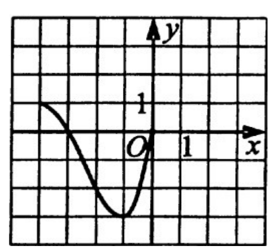
2. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,2}\left(7x - x^2\right)$.

1) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(0; 7)$
4) $(-\infty; -7) \cup (0; +\infty)$

3. Найдите множество значений функции $y = 4{,}5 - 2\sin 2x$.

1) $[0,5; 8,5]$ 2) $[2,5; 6,5]$ 3) $[2,5; 4,5]$ 4) $[-2; 2]$

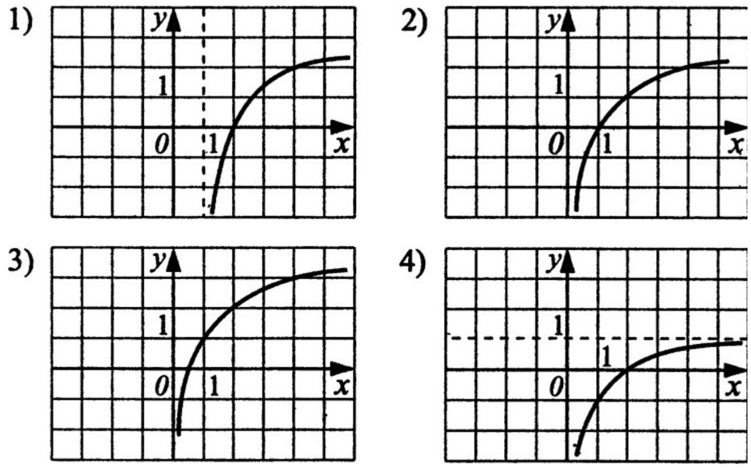
4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечётной. На рисунке изображён её график на отрезке $[-4; 0]$. Найдите $f(-4) + f(1)$.



5. Чётная периодическая функция с периодом 8 определена на всей числовой прямой. Найдите значение выражения $f(-43) \cdot f(-21)$, если $f(3) = -3$.

Вариант 2.

1. На рисунке ниже укажите график функции $y = \log_2 x + 1$.



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{2^x}{2-\log_3 x}$.

1) $(-\infty; 9) \cup (9; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(0; 9) \cup (9; +\infty)$

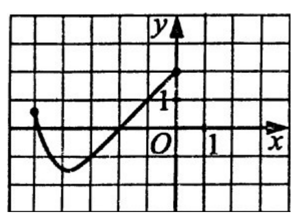
4) $(0; 8) \cup (8; +\infty)$

3. Найдите множество значений функции $y = 3{,}5 - \mathrm{tg} x$.

1) $[3,5; +\infty)$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $(-\infty; 3,5)$ 4) $(-\infty; 3{,}5]$

4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной. На рисунке изображён её график на отрезке $[-5; 0]$.

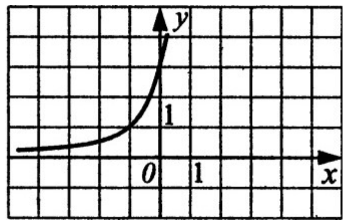
Найдите $f(-3) + f(2) + f(3)$.



5. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет период 6. Найдите значение выражения $f(-15) + f(0) + f(9)$, если $f(-3) = 2$.

Вариант 3.

1. Укажите функцию, график которой изображён на рисунке



1) $y = 3^x$ 2) $y = 2^x + 2$ 3) $y = 3^{x+1}$ 4) $y = 2^{x+2}$

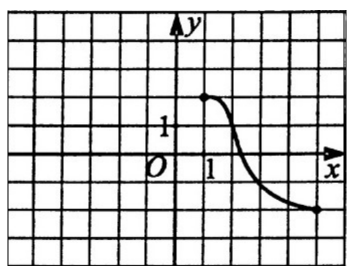
2. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{0,11}\left(x^2 - 121\right)$.

1) $(0; 11)$ 2) $(11; +\infty)$ 3) $(-11; 11)$ 4) $(-\infty; -11) \cup (11; +\infty)$

3. Найдите множество значений функции $y = -10 - \cos x$.

1) $[-11; -9]$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $[-11; -10]$ 4) $[-10; -9]$

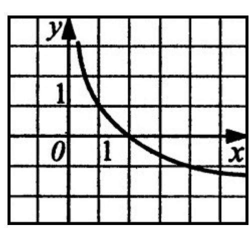
4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечётной. На рисунке изображён её график на отрезке $[1; 5]$. Найдите $f(-2) \cdot f(-3)$.



5. Чётная периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет период 7. Найдите значение выражения $f(-3) + f(4) - f(18)$, если $f(3) = 6$.

Вариант 4.

1. Укажите функцию, график которой изображён на рисунке



1) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 3) $y = \log_{\frac{1}{4}} x + 1$ 4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$

2. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{3-x}}{x+5}$.

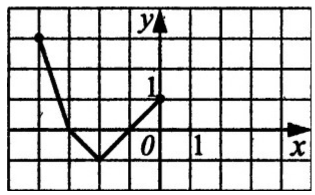
1) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ 2) $(-\infty; 3]$ 3) $[3; 5) \cup (5; +\infty)$

4) $(-\infty; -5) \cup (-5; 3]$

3. Найдите множество значений функции $y = 3 - 5^x$.

1) $(3; +\infty)$ 2) $(-\infty; 3)$ 3) $[3; +\infty)$ 4) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

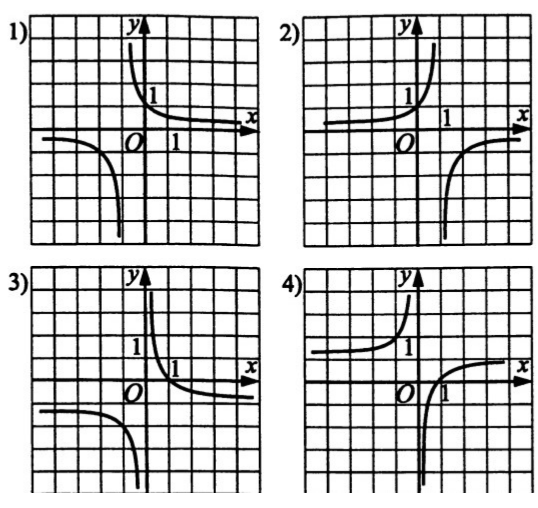
4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой, является чётной и периодической, с периодом, равным 8. На рисунке изображён её график на отрезке $[-4; 0]$. Найдите значение выражения $f(8) - 2f(10) + f(12)$.



5. Периодическая функция $y = f(x)$ с периодом 8 определена для всех действительных чисел. Найдите значение выражения $f(18) \cdot f(12) - 3f(-36)$, если $f(2) = 7$, $f(4) = 1$.

Вариант 5.

1. Укажите график функции, заданной формулой $y = \frac{x-1}{x}$



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

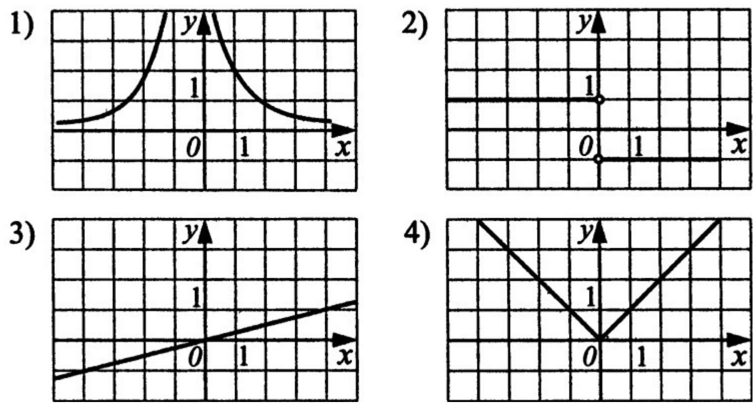
1) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ 2) $(-\infty; -4) \cup [2; +\infty)$

3) $(-4; 1) \cup (1; 2]$ 4) $(-4; 2) \cup (2; +\infty)$

3. Найдите множество значений функции $y = 5\sin^2 x - 4$.

1) $[-4; 0]$ 2) $[-4; 1]$ 3) $[-4; 9]$ 4) $[1; 5]$

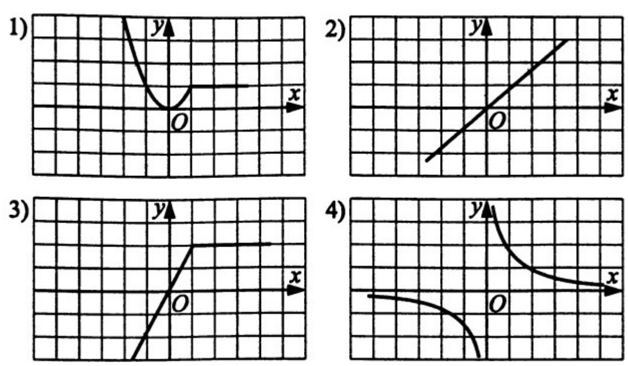
4. Среди графиков, приведённых на рисунке, укажите тот, который не является графиком чётной или графиком нечётной функции.



5. Нечётная периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет период 8. Найдите значение выражения $f(22) - 11f(2)$, если $f(6) = 3$.

Вариант 6.

1. На каком из рисунков изображён график функции, ограниченной сверху?



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\sqrt[6]{x-1}}{x-5}$.

1) $(1; 5) \cup (5; +\infty)$ 2) $[1; +\infty)$

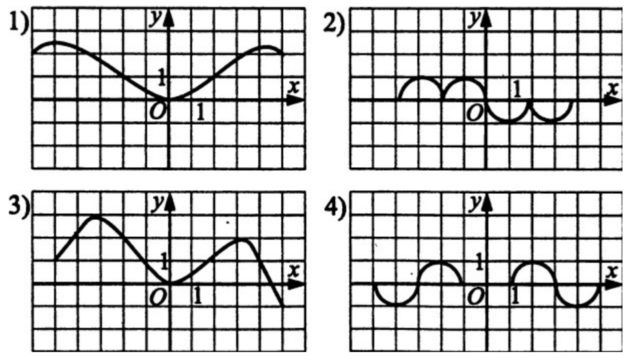
3) $[1; 5) \cup (5; +\infty)$ 4) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$

3. Найдите множество значений функции $y = \frac{4}{x+1}$.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

3) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

4. Укажите график нечётной функции.



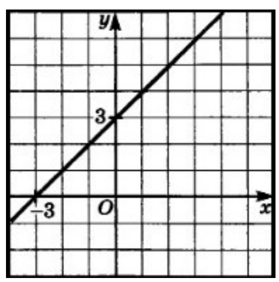
5. Нечётная периодическая функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет период 5. Найдите значение выражения $\frac{f(-81) \cdot f(100)}{f(16)}$, если $f(-6) = 13$.

Приложение Б

Варианты тестового задания «Линейная функция»

Вариант 1.

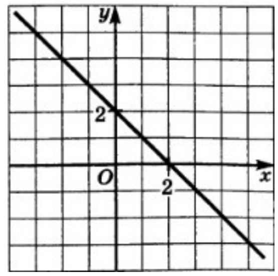
1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $3x + 4y = 12$.
2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $a = -t + 1$
3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx+b$ проходит: через 1-ый, 2-ой и 3-ий координатные углы плоскости xOy.
4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



5. Найдите точку пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 3x + 2$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

Вариант 2.

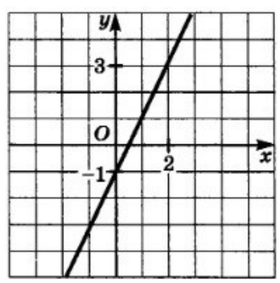
1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $8x + 3y = 24$.
2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $s = \frac{2}{3}t - 1$
3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx+b$ проходит: через 1-ый, 2-ой и 4-ый координатные углы плоскости xOy.
4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



5. Найдите точку пересечения прямых $y = -15x - 14$ и $y = -15x + 8$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

Вариант 3.

1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $5x - 2y = 10$
2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $s = -\frac{1}{2}t + 1$
3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx + b$ проходит: через 1-ый, 3-ий и 4-ый координатные углы плоскости xOy.
4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



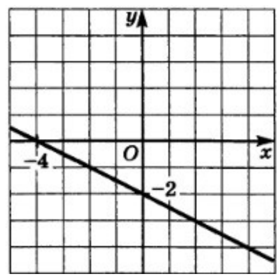
5. Найдите точку пересечения прямых $y = 7x + 4$ и $y = -x + 4$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

Вариант 4.

1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $7x - 5y = 35$
2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $u = \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}$

3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx + b$ проходит: через 2-ой, 3-ий и 4-ый координатные углы плоскости xOy.

4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



5. Найдите точку пересечения прямых $y = 7x + 6$ и $y = 7x + 9$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

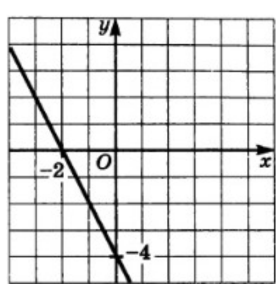
Вариант 5.

1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $2x - 3y = 9$

2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $b = \frac{5}{3}a + \frac{1}{3}$

3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx + b$ проходит: через 1-ый, 3-ий и 4-ый координатные углы плоскости xOy.

4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



5. Найдите точку пересечения прямых $y = -3x + 4$ и $y = 2x - 1$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

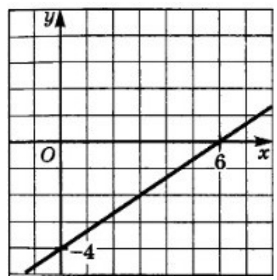
Вариант 6.

1. Преобразуйте линейное уравнение с двумя переменными x и y к виду линейной функции $y = kx + b$ и запишите, чему равны коэффициенты k и b: $7x - 9y = 11$

2. Постройте график линейной функции в соответствующей системе координат: $s = -\frac{2}{3}t + 1$

3. Определите знаки коэффициентов k и b если известно, что график линейной функции $y = kx + b$ проходит: через 2-ой, 3-ий и 4-ый координатные углы плоскости xOy.

4. Запишите уравнение функции, график которой изображён на рисунке:



5. Найдите точку пересечения прямых $y = -2x + 8$ и $y = -2x + 10$ в случае, если это задание корректно. Если нет, укажите взаимное расположение прямых.

Приложение В

Варианты задания «Комплексные числа»

Вариант 1.

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-1}$

2. Решите уравнение: $z^2 + 4z + 5 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z - 1| < 1$, $|z + 1| > 2$.

4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = 3$. Растяжение $\frac{1}{3}$. Поворот в положительном направлении $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 2.

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$

2.Решите уравнение: $z^4 + \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z + i| > 1$, $|z| < 2$.

4.Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = 2i$. Сжатие 4. Поворот в положительном направлении π.

Вариант 3.

1. Найти все значения корня $\sqrt[3]{1}$

2. Решите уравнение: $z^4 + z^2 + 1 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z - i| < 2$, $Rez > 1$.

4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = -i$. Растяжение 5. Поворот в положительном направлении $\frac{3\pi}{4}$.

Вариант 4.

1. Найти все значения корня $\sqrt[3]{i}$

2.Решите уравнение: $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z+1| > 1$, $|z+i| < 1$.

4.Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = -4$. Сжатие $\frac{1}{2}$. Поворот в отрицательном направлении $\frac{\pi}{2}$.

Вариант 5.

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{1}$

2. Решите уравнение: $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z-i| < 1$, $|z+1| < 1$.

4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = 1 + i$. Растяжение $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поворот в положительном направлении $\frac{\pi}{4}$.

Вариант 6.

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}$

2. Решите уравнение: $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$|z+i| < 2$, $|z-i| > 2$.

4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = 6 - 6i$. Сжатие 3. Поворот в отрицательном направлении $\frac{3\pi}{4}$.

Вариант 7.

1. Найти все значения корня $\sqrt[3]{27}$

2. Решите уравнение: $(1-i)\overline{z} = 3iz + 4 - 9i$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$z\bar{z} < 2$, $Rez < 1$, $Imz < -1$.

4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат.

Дано: $z = -1 + i\sqrt{3}$. Растяжение $\frac{1}{2}$. Поворот в положительном направлении $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 8.

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

2. Решите уравнение: $z^3 - 125i = 0$

3. Начертить область, заданную системой неравенств:

$1 < z\bar{z} < 2$, $Rez > 0$, $0 < Imz < 1$.

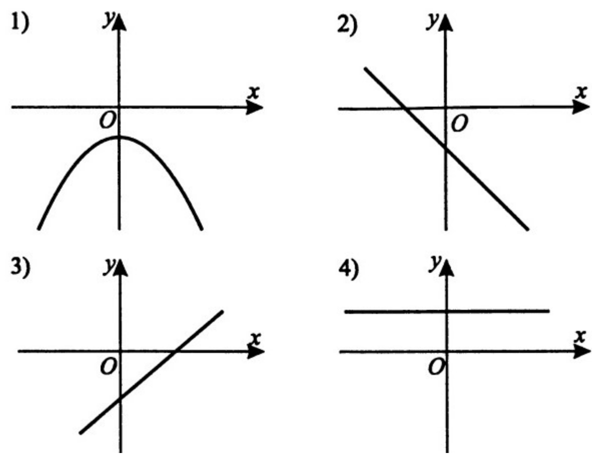
4. Над вектором, изображающим заданное число, выполните указанные операции и запишите число, полученное в результате этих операций. Постройте геометрическое изображение каждой операции и конечный результат. Дано: $z = -6\sqrt{3} - 6i$. Сжатие 6. Поворот в отрицательном направлении $\frac{\pi}{6}$.

Приложение Г

Варианты тестового задания «Физические и геометрические приложения производной»

Вариант 1.

1. Найдите эскиз графика производной $y = g'(x)$, если известно, что функция $y = g(x)$ убывает на всей числовой прямой.



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Дана функция $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Найдите координаты точки, в которой угловой коэффициент касательной к графику функции равен 2.

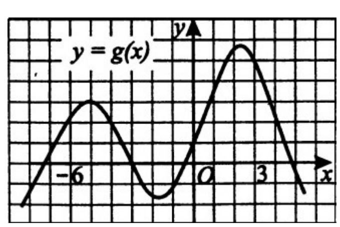
1) $(4; 3)$ 2) $(-3; 3)$ 3) $(3; -2)$ 4) $(2; -3)$

3. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до данной точки M этой прямой изменяется по закону $S(t) = 2t^2 - 3t + 4$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость и ускорение в момент $t = 2$ с.

1) 14 м/с; 21 м/с^2 2) 24 м/с; 21 м/с^2

3) 21 м/с; 14 м/с^2 4) 21 м/с; 24 м/с^2

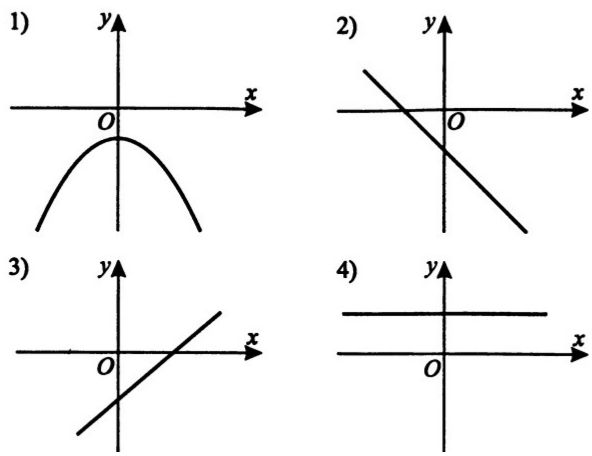
4. Функция $y = g(x)$ задана своим графиком. Сравните $g'(-6)$ и $g'(3)$.



1) $g'(-6) = g'(3)$ 2) $g'(-6) > g'(3)$
3) $g'(-6) < g'(3)$ 4) нельзя сравнить

Вариант 2.

1. Найдите эскиз графика производной $y = g'(x)$, если известно, что функция $y = g(x)$ имеет единственный максимум.



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Известно, что $f'(x_0) = \sqrt{3}$. Тогда касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 образует с положительным направлением оси Ox угол

1) $120°$ 2) $30°$ 3) $150°$ 4) $60°$

3. Какая из предложенных прямых параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 - 6x + 1$ в точке $x_0 = 2$?

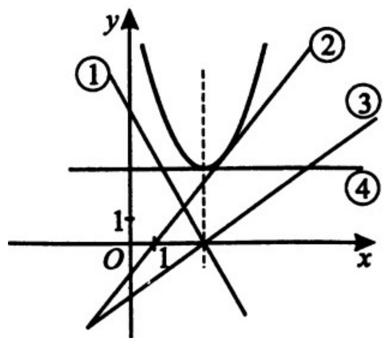
1) $y = -3x + 2$ 2) $y = 6x + 11$ 3) $y = 9x - 4$ 4) $y = -x + 3$

4. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 - 2t^2$. Выберите, какой из формул задаётся скорость движения этой точки в момент времени t.

1) $3t^2 - 2$ 2) $t^2 - 4t$ 3) $\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3}$ 4) $3t^2 - 4t$

Вариант 3.

1. На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и четыре прямые. Одна из этих прямых — график производной данной функции. Укажите номер этой прямой.

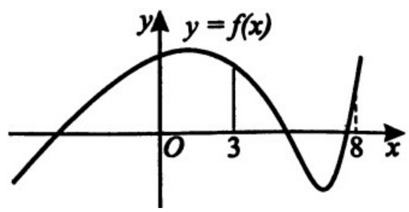


1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. В какой точке графика функции $f(x) = x^2 + 4x + 3$ касательная наклонена к оси Ox под углом $\frac{\pi}{4}$?

1) $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ 2) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ 3) $(-3; 0)$ 4) $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$

3. График функции изображён на рисунке. Сравните скорости v_1 и v_2 изменения функции в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.



1) $v_1 > v_2$ 2) $v_1 < v_2$ 3) $v_1 = v_2$ 4) невозможно сравнить

4. Прямолинейное движение двух материальных точек задано уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S_1, S_2 — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент времени, когда их скорости равны.

1) 14 м/с^2; 18 м/с^2 2) 1 м/с^2; 1 м/с^2

3) 2 м/с^2; 6 м/с^2 4) 14 м/с^2; 16 м/с^2

Вариант 4.

1. Путь S, пройденный падающим телом при начальной скорости $v_0 = 5$ м/с, определяется формулой $S = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ ($g \approx 10$ м/с^2). Вычислите скорость тела в момент $t = 5$ с.

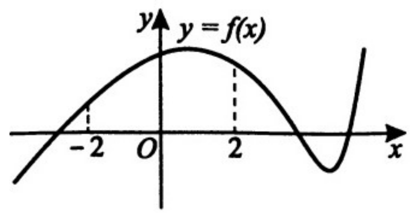
1) 60 м/с 2) 65 м/с 3) 55 м/с 4) 75 м/с

2. Определите характер монотонности функции $y = f(x)$, если $f'(x) = 5x^4 + x^2 + 2$.

1) убывает 2) возрастает 3) возрастает и убывает

4) не возрастает и не убывает (параллельна оси абсцисс)

3. График функции изображён на рисунке. Сравните скорости v_1 и v_2 изменения функции в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.



1) $v_1 > v_2$ 2) $v_1 < v_2$ 3) $v_1 = v_2$ 4) невозможно сравнить

4. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции наклонена к оси Ox под углом α, если $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2$, $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

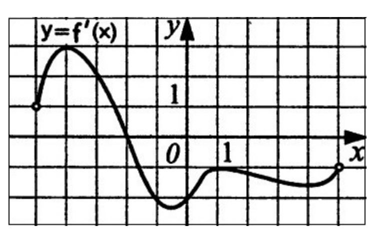
1) 1 2) 2 3) −1 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 5.

1. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в километрах) от него до неподвижной точки P этой прямой изменяется по закону $S(t) = \sqrt[3]{t}$ (t измеряется в часах). Через сколько часов после начала движения скорость тела будет равна 9 км/ч?

1) $\sqrt[3]{9}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{81\sqrt{3}}$ 4) 9

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.

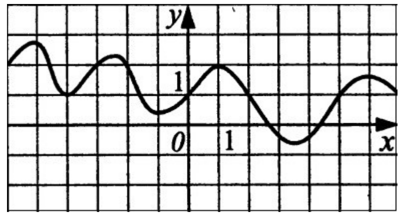


1) −4 2) 0 3) −3 4) −2

3. Зависимость пути S от времени движения t выражается формулой $S(t) = \frac{gt^2}{2}$. Найдите формулу ускорения.

1) $\frac{gt}{2}$ 2) gt 3) $2gt$ 4) g

4. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек из промежутка $[-4; 5]$, в которых производная данной функции равна нулю.



1) 7 2) 2 3) 10 4) 5