Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Н. Э. Лугина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Учебное пособие

Томск
2024

УДК 51–74
ББК 22.1
Л83

Рецензент:
Буримов Н. И., заведующий кафедрой
электронных приборов ТУСУР, доктор физ.-мат. наук

Лугина, Наталья Эдуардовна
Математические основы технического образования: Учебное пособие / Лугина Н. Э. — Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. — 77 с.

Учебное пособие предназначено для студентов технических направлений. В нем отражены основы и приложения математики, без которых невозможно существование квантовой и оптической электроники, фотоники, конструирования приборов и устройств, невозможно существование современного мира, каким мы его знаем сегодня и хотим изменить в будущем.

Одобрено на заседании каф. математики, протокол № 7 от 07.03.2024 г.

Оглавление

Введение

Зададим себе вопрос: “Зачем мы изучаем математику?”

— Паа-а-а-п!

— Ну, допустим.

— Зачем мне вышку учить?

Ответ следует после некоторых раздумий.

— Чтобы властвовать над гуманитариями!

Есть, конечно, и другие варианты ответов. “Потому что математика необходима в жизни: расчеты на каждом шагу! Во сколько надо выходить из общежития, чтобы не опоздать на пары? Сколько рулонов обоев надо купить? Каково будет среднее время ожидания маршрутного автобуса? Смогу ли я выплатить ипотеку? А правильно ли мне дали сдачу?”. “ Математика — это способ описания мира, математические закономерности окружают нас в реальном мире и изучать их — это такой же творческий процесс, как художник рисует картины, а поэт пишет стихи ”. “Восхищаюсь математикой — точной и красивой, древней и всегда современной, и полезной”.

И всё же, почему математика такая важная часть образования, что её сделали обязательной для всех?

Математику нужно изучать для того, чтобы:

- развить способность к абстрактному мышлению и логические навыки. Человечество за годы эволюции приложило усилия, чтобы научиться мыслить логически, это часть человеческой культуры;
- овладеть современной вычислительной техникой: чтобы существовать в современном мире, надо уметь обращаться с количественными параметрами гораздо лучше, чем несколько лет назад. Например, работа с приложениями математики в системах массового обслуживания, задачи с большим количеством параметров;
- применять полученные знания к изучению реальных явлений в технике, физике, электронике;
- успешно сдать экзамен.

Этих целей может быть и больше. История науки показывает, что математика имеет пророческий дар: математический анализ известного открывает путь дальше, в новые неизвестные области, ведет к созданию новых физических понятий. Физики-теоретики в своей научной работе широко пользуются многими методами математики. Однако, конечный результат исследований физика опять замыкается на математику: он должен выражаться числом или формулой, относящимся к наблюдаемым величинам. Всякое явление природы бесконечно в своей сложности. Проиллюстрируем это с помощью примера [1].

"... Обыватель формулирует математику задачу следующим образом: "Сколько времени будет падать камень с высоты 200 метров?" Математик начнет создавать свой вариант задачи приблизительно так: "Будем считать, что камень падает в пустоте и что ускорение силы тяжести 9,8 метра в секунду за секунду. Тогда ..."

— Позвольте, — может сказать "заказчик", — меня не устраивает такое упрощение. Я хочу знать точно, сколько времени будет падать камень в реальных условиях, а не в несуществующей пустоте.

— Хорошо, — согласится математик. — Будем считать, что камень имеет сферическую форму и диаметр .... Какого примерно он диаметра?

— Около пяти сантиметров. Но он вовсе не сферический, а продолговатый.

— Тогда будем считать, что он имеет форму эллипсоида с полуосями четыре, три и три сантиметра и что он падает так, что большая полуось все время остается вертикальной. Давление воздуха примем равным 760 мм ртутного столба, отсюда найдем плотность воздуха .... Если тот, кто поставил задачу на "человеческом" языке не будет дальше вмешиваться в ход мысли математика, то последний через некоторое время даст численный ответ. Но "потребитель" может возражать по-прежнему: камень на самом деле вовсе не эллипсоидальный, давление воздуха в том месте и в тот момент не было равно 760 мм ртутного столба и т. д. Что же ответит ему математик?

Он ответит: "Точное решение реальной задачи вообще невозможно. Мало того, что форму камня, которая влияет на сопротивление воздуха, невозможно описать никаким математическим уравнением; его вращение в полете также неподвластно математике из-за своей сложности. Далее, воздух не является однородным, так как в результате действия случайных факторов в нем возникают флуктуации колебания плотности. Если пойти еще глубже, нужно учесть, что по закону всемирного тяготения каждое тело действует на каждое другое тело. Отсюда следует, что даже маятник настенных часов изменяет своим движением траекторию камня. Короче говоря, если мы всерьез захотим точно исследовать поведение какого-либо предмета, то нам предварительно придется узнать местонахождение и скорость всех остальных предметов Вселенной. А это, разумеется, невозможно .... Чтобы описать явление, необходимо выявить самые существенные его свойства, закономерности, внутренние связи, роль отдельных характеристик явления. Выделив наиболее важные факторы, можно пренебречь менее существенными".

Процесс, описанный в вышеприведенном примере, представляет собой математическое моделирование.

Основные этапы моделирования.

1. Постановка задачи: Дано. Найти. Что мы пытаемся узнать? Нужно правильно задать вопрос об исследуемой проблеме; определить цель и пути её достижения; выработать общий подход к исследуемой проблеме.

2. Изучение теоретических основ и сбор информации об исследуемом объекте. На этом этапе нужно выполнить обзор литературы за последние несколько лет, показать актуальность, новизну и практическую значимость поставленной задачи. Подбор теоретического материала позволит принять упрощающие предположения.

3. Формализация. Задачу нужно сделать математической — записать соотношения между составляющими объекта в виде математических выражений.

4. Выбор метода решения. Владение математическим аппаратом позволяет выбрать известные математические методы решения задачи или разработать специальный метод решения, что добавляет ценность проведенному исследованию.

5. Реализация модели. На этом этапе разрабатывается алгоритм, его программируют, получают численное решение задачи, проводят компьютерный эксперимент. Результат должен быть получен за допустимое время и с необходимой точностью.

6. Интерпретация результатов. Выводы моделирования, записанные на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области, так как терминология в каждой области исследования имеет свою специфику.

7. Проверка адекватности модели. Согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими выводами из модели в пределах заданной точности?

8. Модификация модели. На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была адекватна действительности, либо упрощение модели с целью получения практически приемлемого решения.

Процесс моделирования является итеративным (*итерация* — это организация обработки данных, при которых действия повторяются многократно). В случае неудовлетворительных результатов такого этапа, как проверка адекватности модели, возвращаемся к одному из ранних этапов, который мог привести к разработке неудачной модели. Этот этап и все последующие уточняются и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получен приемлемые результаты с заданной погрешностью вычислений и совпадениями в частных случаях. Далее модель используется для принятия решений и прогноза.

Наиболее эффективно математическую модель можно реализовать на компьютере в виде алгоритмической модели — так называемого “вычислительного эксперимента”. И здесь нам помогут современные вычислительные математические пакеты:

– Advanced Grapher

– MathCad

– Origin Graphing & Analysis

– MatLab

– Wolfram Mathematics

Advanced Grapher — мощный, но легко используемый графический пакет, позволяющий строить графики функции в декартовой, полярной системах координат, параметрически заданных функций; проводить численное интегрирование и дифференцирование. Этот пакет используется в некоммерческих целях бесплатно, если при инсталляции выбрать русский язык интерфейса.

Origin Graphing & Analysis — один из ведущих графических пакетов для анализа научных данных для ученых и инженеров. Позволяет решать задачи статистики, интерполяции; анализировать зависимости; оформлять графики для научных статей; рисовать 3D-графики.

Пакет MathCad предназначен для инженерных вычислений. Формулы вводятся в явном символьном виде. Пакет ориентирован на пользователей-исследователей и служит для обучения, вычислений и инженерных расчетов. Пакет позволяет выполнять вычисления в символьном режиме, выполнять операции с матрицами, находить корни уравнений, решать системы уравнений, дифференцировать и интегрировать, строить графики, словом, выполнять все вычисления, которые необходимы студенту, инженеру для решения учебных и исследовательских задач.

Wolfram Mathematics — самая мощная и универсальная вычислительная система мира. Это пакет символьной математики с огромным количеством заложенных разработчиками функций, а также открытая среда, позволяющая создавать свои дополнения.

MatLab (Matrix Laboratory) — на русском языке произносится как "Матлаб" — это пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименный язык программирования. Пакет работает на большинстве современных операционных систем (Linux, Microsoft Windows). Матлаб предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики. Например, матрицы и линейная алгебра; многочлены и интерполяция; математическая статистика, обработка и анализ данных; дифференциальные уравнения и т. д.

Таким образом, математика гораздо шире, чем просто вычисления. Вычисления — это внутренний механизм математики. Место математики в жизни и в науке определяется тем, что она позволяет перевести "общежитейские", интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на чисто качественных, а значит, приблизительных описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. И не случайно говорят, что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика. Громадную роль здесь играет именно высшая математика, изучающая *переменные величины* и *текущие процессы*, для анализа которых алгебры и геометрии недостаточно.

Итак, цели курса "Математические основы технического образования":

1) представлять себе стиль математического мышления естествоиспытателей и понимать стоящие перед ним задачи. Для этого будут изучены математические понятия, формулы и методы, с помощью которых можно проводить необходимые математические преобразования и вычисления;

2) дать доступное введение в высшую математику, не отягощенное ни громоздким математическим аппаратом, ни логическими тонкостями. Повторить некоторые понятия, теоремы, формулы из школьного курса математики;

3) рассмотреть множество примеров и задач, связанных с прикладными задачами. Это поможет усвоить лекционный материал по прикладным дисциплинам, преодолеть разницу в различии постановок физических и математических задач, в системе используемых обозначений, понятий и определений.

При решении прикладных задач часто нужны знания элементарной математики, аналитической геометрии, векторного анализа, теории комплексных чисел, теории функций, дифференциального и интегрального исчисления. С чего начать решение учебной задачи?

1) следует внимательно прочитать условие задачи;

2) выяснить, что “дано” и что необходимо “найти”;

3) если требуется, сделать рисунок, подписать оси координат, указать начало координат и масштаб; обозначить на рисунке векторные величины;

4) записать формулы, на которых основано решение. Пояснить буквенные обозначения формул;

5) в задачах векторной алгебры перейти к скалярным величинам. Для этого нужно выбрать систему координат и найти проекции векторов на оси координат;

6) в задачах с физическим содержанием необходимо провести анализ размерностей. Убедиться, что полученная при этом размерность результата соответствует искомой величине. Это часто служит подтверждением того, что получено правильное решение;

7) оценить числовой ответ как реально возможное значение искомой величины. Например, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме ($c = 2{,}99 \cdot 10^8$ м/с), электрический заряд не может быть меньше элементарного заряда ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл), вероятность события не может быть отрицательным числом и числом, превосходящим единицу и т. д.

1. Функциональная зависимость

В природе и технике мы очень часто встречаемся с зависимостью одних величин от других — с так называемыми *функциональными зависимостями.*

Функциональная зависимость одной величины (y) от другой величины (x) означает, что каждому значению x соответствует определенное значение y.

Величина x при этом называется независимой переменной, а y — функцией этой переменной. Иногда x называют аргументом функции y.

Приведем несколько примеров из геометрии и физики:

1. Площадь S квадрата является функцией длины a его стороны $S = a^2$; $S = S(a)$.

2. Объем V шара можно выразить через радиус R шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = V(R)$.

3. Путь S, пройденный свободно падающим телом с высоты h_0, зависит от времени t, протекшего с момента, когда началось падение. Эта зависимость выражается формулой $S(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}$, где $g = 9{,}8$ м/c^2 — ускорение свободного падения; $S = S(t)$.

4. Сила тока I зависит от сопротивления R проводника: при данной разности потенциалов U сила тока $I = \frac{U}{R}$; $\;I = I(R)$; вообще, $I = I(U, R)$.

Можно было бы привести еще множество примеров такого рода.

В математике функциональная зависимость чаще всего задается **формулами**. Например,

$$y = 2x + 3, \qquad y = x^2 + 5, \qquad y = \frac{x-1}{x+1}, \qquad y = \sqrt{3x+7}.$$

(здесь всюду y — функция аргумента x). Формула дает способ вычисления значения функции при каждом заданном значении независимой переменной. Иногда этот способ предполагает использование таблиц или вычислительных устройств.

В физике и технике функциональная зависимость чаще всего фиксируется **на шкалах измерительных приборов**. Например, движение стрелки спидометра автомобиля, наблюдаемое одновременно со стрелками ваших часов, фиксирует функциональную зависимость скорости автомобиля от времени. Но и здесь часто функцию можно с достаточной степенью точности записать простой формулой.

Наличие формулы, связывающей значения возникающих в физике или технике величин означает, что получен *закон* интересующего нас явления.

Реально в природе и технике в большинстве случаев интересующая нас величина (функция) зависит от нескольких величин. Например, сила тока зависит от двух величин: от разности потенциалов U и от сопротивления проводника R. Считая заданными (и постоянными) все величины, кроме одной, мы изучаем зависимость функции от одной переменной. Так, например, взяв аккумулятор с определенной разностью потенциалов, будем менять сопротивление проводника R и измерять силу тока I. В такой постановке опыта сила тока зависит только от сопротивления; величину U в формуле $I = \frac{U}{R}$ следует рассматривать как постоянную.

В математике дается понятие области определения функции. Иногда формула такова, что значение y существует только для x, заключенных в определенных пределах. Скажем, формула $y = \sqrt{x}$ позволяет найти y только для неотрицательных значений: $x \geq 0$. Если $y = \log_2(x - 2)$, то y существует только для $x > 2$.

В формулах, возникающих в физических, технических, геометрических и других задачах, ограничения возможных значений независимой переменной иногда вытекает из *смысла рассматриваемой задачи*. При этом "умные" формулы зачастую сами нас предупреждают о возможных границах значений переменной. Например, во многих формулах теории относительности скорость v движущегося тела фигурирует в виде выражения $\sqrt{c^2 - v^2}$, где c — скорость света, откуда вытекает, что в теории относительности всегда $v < c$.

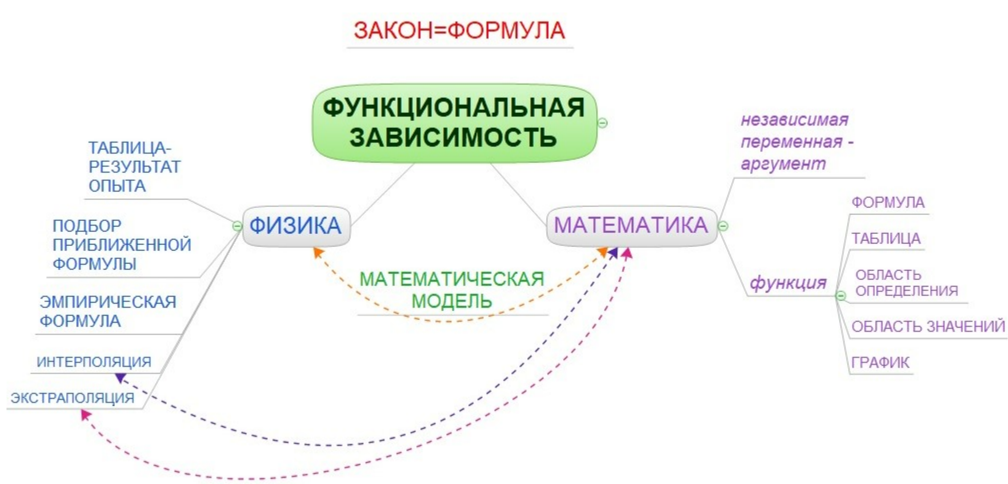


Рисунок 1.1 — Интеллект-карта понятия функциональная зависимость

Во многих других формулах никаких ограничений на величину независимой переменной не накладывается: x может быть положительным или отрицательным, большим или малым. То же относится и ко многим физическим величинам: например, электрический ток удобно считать положительной величиной, когда электроны движутся по проволоке в одном направлении, и отрицательной при противоположном движении электронов.

Зная формулу, дающую зависимость y от x, легко составить таблицу (табл. 1.1) значений y для нескольких произвольно заданных значений x.

Таблица 1.1 — Значения функции $y = \sqrt{x}$

x	0	1	2	3	4	5
$y = \sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24

Понятно, что по данной формуле можно составить и более подробную таблицу, задавая, например, значения $x = 0{,}1$; 0,2 и так далее. Таким образом, формула “сильнее” любой таблицы.

Формула содержит не только те сведения, которые приведены в данной таблице, но позволяет найти значения функции так же и при значениях независимой переменной, не содержащихся в таблице.

При некоторой привычке умение чтения формул часто позволяет быстрее представить себе ход функции, чем невыразительный ряд чисел (таблицы). Например,

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$$

при $x \to \pm\infty, \quad y \to 0; \quad x \to 0, \quad y \to \frac{1}{4}$; $y > 0$ для всех $x \in R$.

В естественных науках и в технике часто встречается такое положение, когда теории интересующего нас явления еще нет и физик (или химик, биолог, инженер) может указать только результаты проделанных им опытов — зависимость исследуемой величины от величины, задаваемой при постановке опыта. Так обстоит дело, например, при исследовании зависимости сопротивления проводника от его температуры. В этом случае функциональная зависимость может быть задана только в виде таблицы, суммирующей результаты опыта.

Из опыта известно, что для данного проводника (из определенного материала, заданного сечения и фиксированной длины) электрическое сопротивление зависит от температуры проводника. При каждом значении температуры T проводник имеет определенное сопротивление R, так что можно говорить о том, что $R = R(T)$. Проводя измерения, можно найти значения

R при различных температурах T и таким образом найти зависимость $R(T)$; при этом результатом опытов является таблица (табл. 1.2):

Таблица 1.2 — Результаты измерений сопротивления при различных температурах

$T, ^\circ C$	0	25	50	75	100
R, Ом	112,0	118,4	124,6	130,3	135,2

Практическая задача состоит в следующем: нужно подобрать приближенную формулу, хорошо согласующуюся с опытом для тех температур, при которых проведены измерения. Возьмем, например, соотношение

$$R^* = 112 + 0,272 \cdot T - 0,0004 \cdot T^2 \tag{11}$$

и составим по этой формуле таблицу (табл. 1.3):

Таблица 1.3 — Значения функции $R^* = R^*(T)$

$T, ^\circ C$	0	25	50	75	100
R^*, Ом	112,0	118,55	124,6	130,15	135,2

Мы видим, что формула (11) дает значения R, очень близкие к наблюдаемым на опыте. Поэтому законно предположение, что и при промежуточных температурах (например, при $T = 10^\circ$ С, $T = 80^\circ$ С или $T = 90^\circ$ С) эта формула также правильно описывает функциональную зависимость $R(T)$.

Математики формулируют последнее утверждение, говоря, что найденная зависимость $R(T)$ не дает больших ошибок *при интерполяции*, то есть при переходе от известных значений R к новым, промежуточным между уже имеющимися (*"interpolare" с лат.* "подновлять" или "вставка внутрь").

В математике *интерполяцией* называется всякий способ, с помощью которого по таблице, содержащей некоторые числовые данные, можно найти промежуточные результаты, которые непосредственно не даны в таблице. Нахождение промежуточных значений функции по ее графику называется *графической интерполяцией.*

При этом зависимость (11) сопротивления R от температуры T называют *эмпирически найденным законом*, или *эмпирической формулой* (*"emperia" с греч.* "опыт", эмпирический — опытный, "полученный опытным путем").

Однако эмпирическая формула нуждается, разумеется, в проверке: погрешность, получаемая при ее использовании, может оказаться и довольно значительной (ясно, что надежность эмпирической формулы будет тем выше, чем более густой является сетка тех наблюдаемых значений переменной, для которой мы подбирали данную формулу). И совсем нежелательно использование эмпирической формулы за пределами исследуемого интервала значений независимой переменной. Такое продолжение формулы называется *экстраполяцией* (частица *"ex" с лат.* "вне"): это может привести к большим ошибкам. Так, если взять $T = -200°C$ или $T = 500°C$, у нас нет никаких оснований ожидать, что при всех T зависимость $R(T)$ имеет вид (11), то есть является квадратичной зависимостью.

Итак, для открытия новых физических законов или функциональных зависимостей, протекающих в различных процессах, исследователь должен владеть математическим аппаратом — набором понятий, теорем, формул, условий, соотношений, с помощью которых решается задача. Применяя полученные решения на практике, мы закладываем основу для прикладной теории. В то же время теория, зародившаяся в прикладных задачах, может быть обобщена как новый математический аппарат.

Рисунок 1.2 — Интеллект-карта понятия математический аппарат

2. Координаты. Расстояния и углы, выраженные в координатах

Что такое система координат и почему их так много? Неужели нельзя придумать одну универсальную систему и везде ее использовать? Оказывается, нельзя. Давайте разберемся почему. Для начала выясним, что скрывается под таким общеупотребительным термином "система координат".

Система координат — это способ задания положения точки в пространстве. Главное свойство всех систем координат — положение любой точки однозначно определяется ее координатами. Так же как по адресу можно найти лишь одно здание в пределах города.

Люди издавна измеряли все, что поддается измерению. Расстояние, скорость, время.... Технологический процесс цивилизации можно проследить по эволюции измерительных приборов: от веревки с узелками до сверхточных атомных часов. И любые измерения в пространстве немыслимы без системы координат. Самая известная из всех и широко используемая, безусловно, прямоугольная система координат. Для наглядного изображения функциональной зависимости с помощью рисунка (графика) пользуются прямоугольными декартовыми координатами.

Впервые, такую привычную для нас, прямоугольную систему координат ввел французский ученый Рене Декарт в своей работе "Рассуждения о методе" в 1637 году. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые: ось Ox, или *ось абсцисс*, которая располагается горизонтально и ось Oy, или *ось ординат*, которую проводят вертикально; точка O пересечения осей называется *началом координат*.

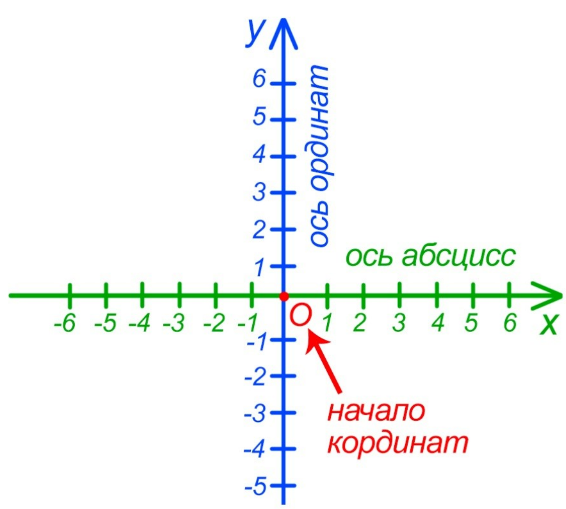


Рисунок 2.1 — Декартова система координат

Каждой паре x и y значений, например, $x = 2$ и $y = 4$ отвечает на координатной плоскости одна точка. Обратно, чтобы найти координаты произвольной точки B плоскости достаточно мысленно опустить из B перпендикуляр на оси координат и "прочесть" значения x и y.

Задание двух чисел — значения x и y — определяет положение точки на плоскости. Поэтому и все геометрические величины, относящиеся к этой точке, можно выразить через координаты точки.

Задача. Найти расстояние ρ точки A с координатами x и y от начала координат O, а также угол φ между прямой OA и осью абсцисс.

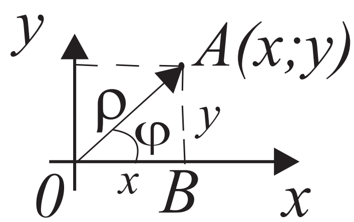


Рисунок 2.2 — Координаты, расстояние и угол

Решение. Из прямоугольного треугольника $\triangle OBA$ по теореме Пифагора $OA^2 = OB^2 + BA^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Таким образом $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$ по смыслу задачи $0 \leq \rho < +\infty$. Далее, по определению тангенса угла имеем $\mathrm{tg}\varphi = \frac{BA}{OB} = \frac{y}{x}$.

Заметим, что угол φ отсчитывается от положительного направления оси Ox, в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Но так как большие углы иногда оказываются неудобными, то в этих случаях используется $-\pi < \varphi \leq \pi$.

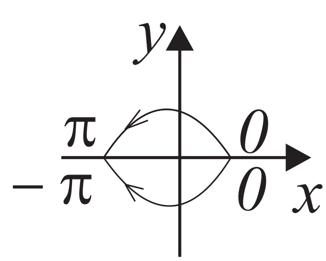


Рисунок 2.3 — Правило отсчета угла

Формула $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ в этом отношении не полна: она не позволяет установить, расположена ли рассматриваемая точка в I, III или во II, IV четвертях, так как знаки тангенса

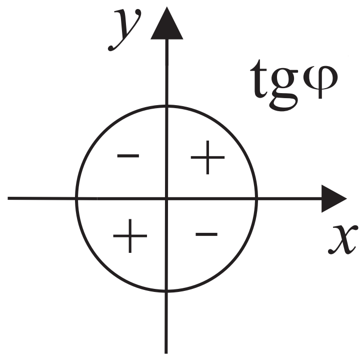


Рисунок 2.4 — Знаки функции тангенс

Для того, чтобы определить величину φ, надо еще учесть знаки x и y, позволяющие определить четверть, в которой находится точка, или воспользоваться более сложными формулами:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{где} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решим **обратную задачу**: пусть точка A находится на заданном расстоянии ρ от начала координат и отрезок OA образует угол φ с положительным направлением оси Ox. Требуется найти координаты точки A.

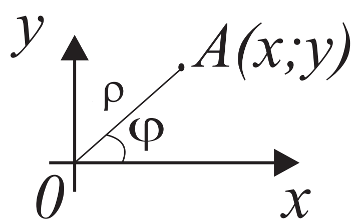


Рисунок 2.5 — Расстояние, угол и координаты

Получаем

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Эти формулы верны без всяких исключений, для любых положительных и отрицательных углов φ.

Ясно, что положение точки A на плоскости можно фиксировать, указав два числа x и y, а можно вместо этого задать расстояние ρ и угол φ.

Числа ρ и φ называют *полярными координатами точки* A; при этом точку O называют *полюсом* полярной системы координат, а луч Ox — *полярной осью*. (Заметим, что ось Oy в определении полярной системы координат не участвует).

Таким образом, формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, & 0 \le \rho < +\infty, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; & -\pi < \varphi \le \pi. \end{cases}$$

указывают правила перехода от декартовых прямоугольных координат к соответствующим полярным и наоборот.

Математики шутят: “Полярный медведь — это прямоугольный медведь после преобразования координат”.

Помимо полярной системы координат существует еще сферическая, цилиндрическая и много других систем координат. Зачем столько? Приведем такой пример. Перед вами стоит задача получить координаты точек на окружности. Можно использовать прямоугольную систему координат и получать пары координат x и y, поочередно измеряя положение каждой точки. Но можно перейти к полярной системе координат, однократно измерить радиус окружности R и далее измерять угол между *радиус-вектором* (это вектор, исходящий из начала координат) и положительным направлением оси Ox. Второй способ представляется более простым.

Итак, выбор конкретной системы координат зависит в первую очередь от удобства применения для решения поставленной задачи. А такое множество систем координат объясняется многообразием мира и широтой человеческой деятельности. Но нас это пугать не должно. Знать все придуманные человеком способы задания точек в пространстве необязательно.

Применение полярной системы координат.

В основном это задачи, связанные с направлением и расстоянием от некоторого центра. Многие физические системы — такие, которые содержат тела, движущиеся вокруг центра, либо явления, распространяющиеся из некоторого центра — гораздо проще моделировать в полярных координатах. Причиной создания полярной системы координат было исследование орбитального движения и движения по кругу.

Полярную систему координат часто применяют

- в навигации, поскольку пункт назначения можно задать как расстояние и направление движения от отправной точки;
- в авиации (применяется несколько измененная полярная система координат);
- в геодезии — для определения положения точек на плоскости, при составлении карт и планов небольших участков;

Рисунок 2.6 — Круговая диаграмма

- в астрономических наблюдениях;
- в фотографии используется фильтр, переводящий координаты точек из прямоугольной системы координат в полярную, создавая сферический эффект снимка;
- формат биржевых графиков на основе полярных координат. Такая система координат связывает градусы и время (в году 365 дней, в окружности 360°);
- в радиолокации координаты цели могут выдаваться в полярной системе координат (азимут, дальность);
- в медицине компьютерная томография сердца изображается в полярных координатах;
- в системах безопасности при идентификации по радужной оболочке глаза;
- в приборах измерительных лабораторий на предприятиях точного приборостроения микроэлектроники;
- в компьютерных играх.

Для того, чтобы построить кривую, заданную полярными координатами, необходимо выполнить следующие шаги:

- Задать через определенный шаг значения угла φ и на плоскости построить лучи под выбранными углами, отсчитываемые в положительном направлении от полярной оси (против часовой стрелки);

- По данной зависимости $\rho = \rho(\varphi)$ вычислить соответствующие значения радиуса ρ;

- Полученные значения ρ отложить в выбранном масштабе по соответствующему лучу, начиная от полюса;

- Полученные точки соединить плавной кривой.

При построении кривой в полярных координатах следует учитывать такие свойства функциональной зависимости, как:

- область определения $\rho = \rho(\varphi)$;

- четность;

- нечетность;

- периодичность,

что снижает объем вычислений.

Пример. Построить кривую $\rho = a \cdot (1 - \cos\varphi), \quad a > 0$.

Данная зависимость определена для любых значений φ, так как $1 - \cos\varphi > 0$; используем четность и периодичность $(T = 2\pi)$ функции $\cos\varphi$.

Построим таблицу значений функции $\rho = a \cdot (1 - \cos\varphi)$ при $a = \frac{1}{2}$. Возьмем значения $\varphi \in [0; \pi]$ с шагом $\frac{\pi}{6}$ (табл. 2.1):

Таблица 2.1 — Таблица значений функции $\rho = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos\varphi)$

φ, рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ, ед.	0	0,07	0,25	0,50	0,75	0,94	1

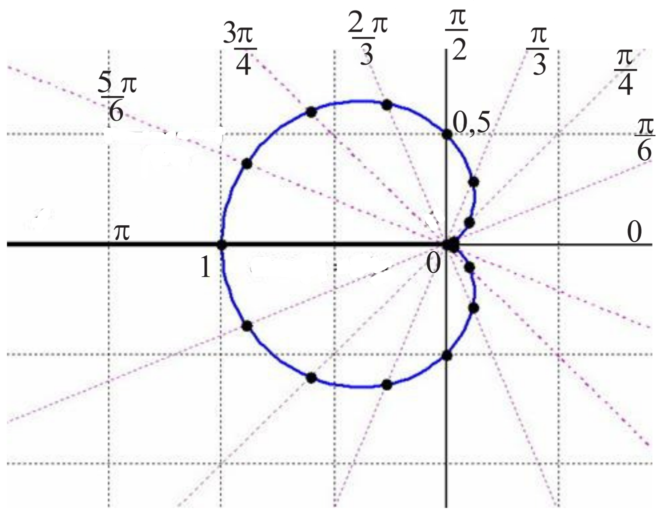


Рисунок 2.7 — Кардиоида в полярной системе координат

Затем достроим кривую симметрично полученной для остальных значений углов в $[\pi; 2\pi]$.

3. Графическое изображение функций. Уравнение прямой

Каждой паре значений x и y соответствует определенная точка на плоскости. Если y есть функция от x, то каждому значению x отвечает определенное значение y. Множество точек $(x; y)$ на плоскости называется *графиком функции* $y = y(x)$.

Рассмотрим так называемую линейную зависимость $y = kx + b$, где k, b — действительные числа. Примеры линейных физических законов:

1. $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}t$ — скорость при равноускоренном движении;

2. $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ — угловая скорость при вращательном равноускоренном движении;

3. $V = V_0(1 + \alpha t)$ — закон Гей-Люссака;

4. $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ — зависимость удельного сопротивления металла от температуры.

Примеры прямой пропорциональности, встречающейся в физике:

1. $\overrightarrow{F} = -k \cdot \triangle\overrightarrow{r}$ — закон Гука;

2. $\overrightarrow{a} = \frac{\sum\limits_i \overrightarrow{F_i}}{m}, \quad m = const$ — второй закон Ньютона;

3. $C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R$ — молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении;

4. $S = k \cdot \ln W$ — статистическое определение энтропии;

5. $\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q_0}$ — определение напряженности электрического поля.

Пример. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: $A(1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(6; 1)$. Составьте уравнение стороны AB.

Решение. Способ 1. Уравнение стороны AB — это прямая $y = kx + b$. Подставим в это уравнение поочередно координаты точек A и B. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} k \cdot 1 + b = 2, \\ k \cdot 2 + b = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $k = -4$, $b = 6$. Тогда уравнение стороны AB: $y = -4x + 6$.

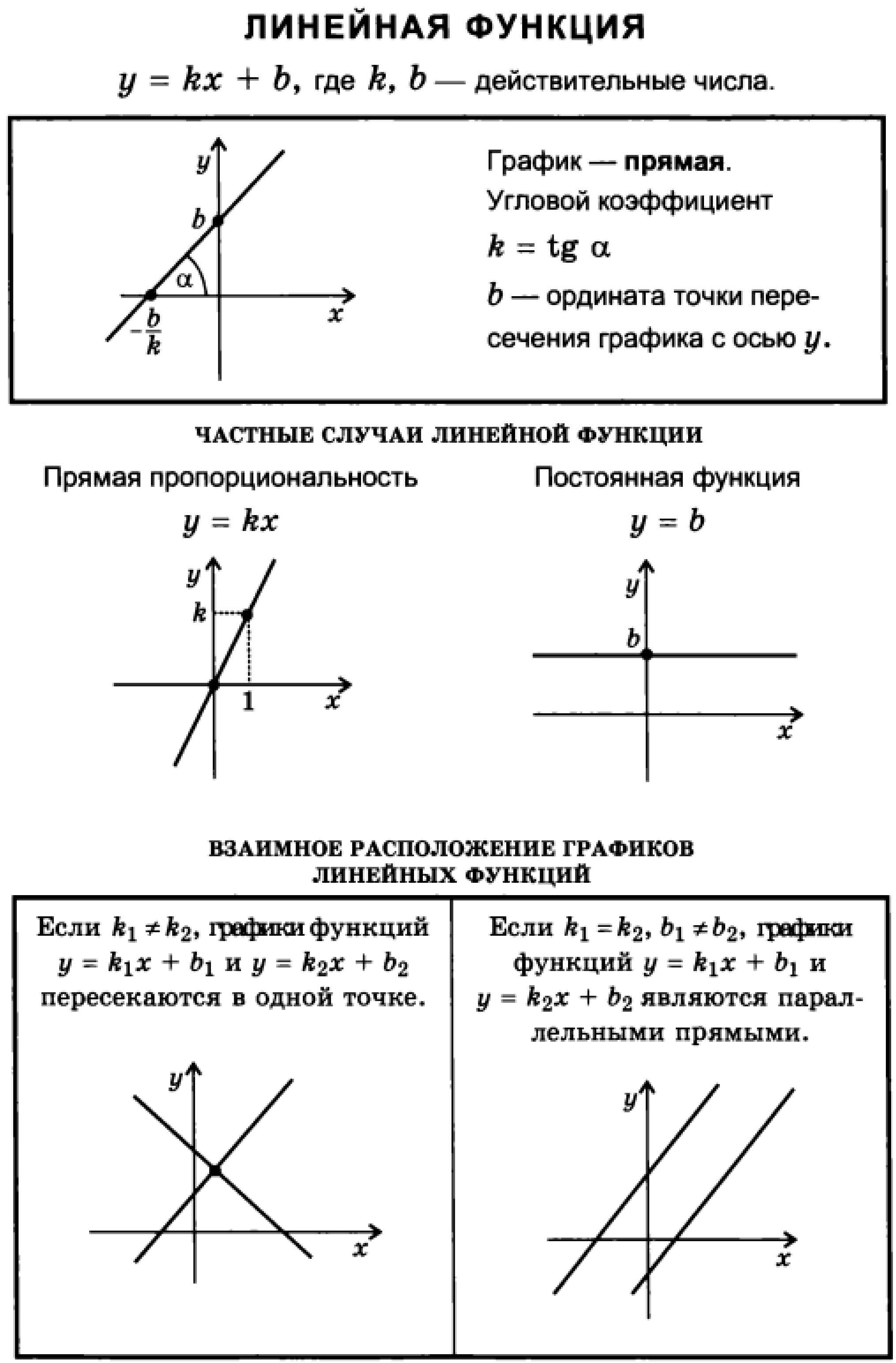


Рисунок 3.1 — Линейная функция

Способ 2. Воспользуемся формулой нахождения уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставим в эту формулу координаты точек A и B. Получим:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{-2 - 2}.$$

После преобразований получаем уравнение стороны AB: $y = -4x + 6$.

4. Обратная пропорциональность и гипербола

Рассмотрим некоторые функциональные зависимости, которые часто встречаются в физических законах.

Вид зависимости между y и x, описываемый формулой

$$y = \frac{k}{x},$$

называется *обратной пропорциональностью* (с коэффициентом k) между y и x.

Для любых двух точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ прямая пропорциональность означает, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

а обратная пропорциональность означает выполнение равенства

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}.$$

График обратной пропорциональности есть *гипербола*.

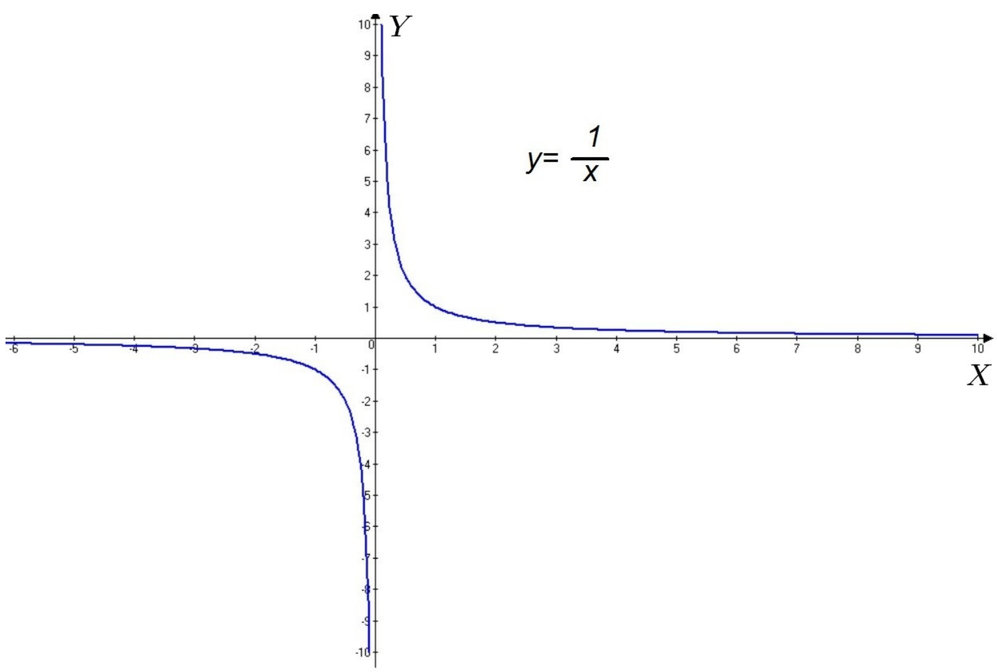


Рисунок 4.1 — Гипербола

Заметим, если $x \to -\infty$, $y \to 0$; если $x \to +\infty$, $y \to 0$; если $x \to -0$, $y \to -\infty$; если $x \to +0$, $y \to +\infty$.

Выражение $y \to 0$ означает: величина y становится сколь угодно малой по абсолютной величине, но никогда ее не достигает. При $x \to +0$ (выражение означает, что величина x становится сколь угодно малой, если приближаться к нулю со стороны бо́льших, чем нуль, значений), $y \to +\infty$ означает, что величина y становится сколь угодно большой по абсолютной величине.

Прямые $x = 0$ (ось ординат) и $y = 0$ (ось абсцисс) являются асимптотами гиперболы.

Если $k > 1$, то k — коэффициент растяжения; если $0 < k < 1$, то k — коэффициент сжатия.

Физические приложения прямой и обратной пропорциональности

Прямая и обратная пропорциональность очень часто встречаются в физических законах.

Закон Ома $I = \frac{U}{R}$ означает, что сила тока I изменяется прямо пропорционально напряжению U и обратно пропорционально сопротивлению R.

При заданном сопротивлении R ($R = const$) сила тока прямо пропорциональна напряжению U с коэффициентом пропорциональности $k = \frac{1}{R}$.

При заданном напряжении U ($U = const$) величина силы тока обратно пропорциональна сопротивлению R: здесь $I = \frac{k}{R}$, где $k = U$.

Аналогично этому простая зависимость $S = v \cdot t$ между путем S, скоростью v равномерного движения и временем t показывает, что время $t = \frac{S}{v}$ прямо пропорционально пути S и обратно пропорционально скорости v.

Давление газа в силу закона Бойля-Мариотта $P \cdot V = const$ обратно пропорционально его объему $P = \frac{const}{V}$ (при $m = const$, $T = const$).

Примеры обратной пропорциональности, встречающейся в физических функциональных зависимостях:

1. $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ r}$ — потенциал электростатического поля точечного заряда;
2. $B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r}$ — магнитная индукция бесконечного проводника;
3. $\lambda = \frac{c}{\nu}$ — длина электромагнитной волны в вакууме.

Пример 1. Переменная x обратно пропорциональна y, переменная y обратно пропорциональна переменной z, z в свою очередь обратно пропорциональна v. В какой зависимости находятся x и v?

Решение. Так как

$$x = \frac{k_1}{y}, \qquad y = \frac{k_2}{z}, \qquad z = \frac{k_3}{v},$$

тогда

$$x = \frac{k_1}{k_2} \cdot z = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_3}{v},$$

то есть переменная x обратно пропорциональна v.

Пример 2. При электролизе количество выделяющегося на электроде вещества пропорционально силе тока, сила тока пропорциональна проводимости электролита, проводимость пропорциональна концентрации электролита, концентрация при данном количестве вещества обратно пропорциональна объему растворителя. Как количество выделяющегося на электроде вещества зависит от объема растворителя?

Решение. Так как

$$q \sim I \sim \rho \sim n \sim \frac{1}{V} \Rightarrow q \sim \frac{1}{V}.$$

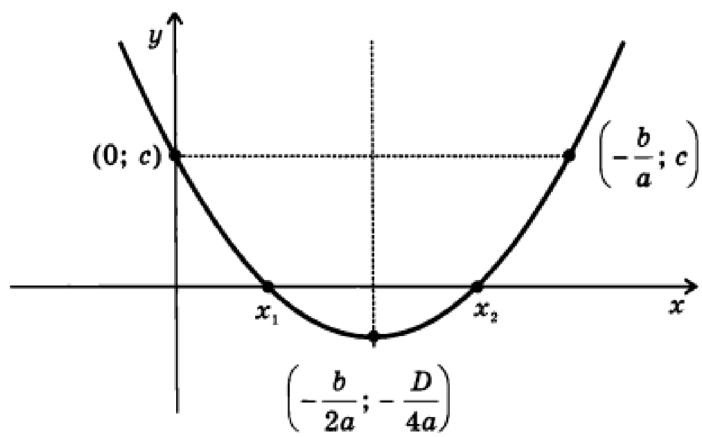
Следовательно, количество выделяющегося на электроде вещества обратно пропорционально объему растворителя.

5. Парабола

Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

График квадратичной функции называется *параболой* с осью симметрии, параллельной оси Oy и вершиной $M(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a})$.

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ И ОСЬ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$



- ***Направление ветвей параболы:***
  при $a > 0$ ветви направлены вверх
  при $a < 0$ ветви направлены вниз
- ***Координаты вершины параболы:*** $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$
- ***Ось симметрии параболы*** — **прямая** $x = -\frac{b}{2a}$
- ***Точки пересечения (касания) графика с осью*** x:

  $D > 0$: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ **(точки пересечения)**

  $D = 0$: $x_1 = -b/(2a)$ **(точка касания)**

  $D < 0$: **общих точек у графика с осью x нет**
- ***Точка пересечения графика с осью*** y: $(0; c)$, **симметричная ей точка относительно оси параболы** $(-b/a; c)$

Рисунок 5.1 — Построение графика квадратичной функции

Для построения графика квадратичной функции используются некоторые из указанных характеристик. Например, если уравнение $ax^2+bx+c = 0$ имеет два корня, удобно использовать координаты вершины параболы и координаты двух точек пересечения параболы с осью Ox. Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

График — **парабола**.

Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и *дискриминанта*

$$D = b^2 - 4ac.$$

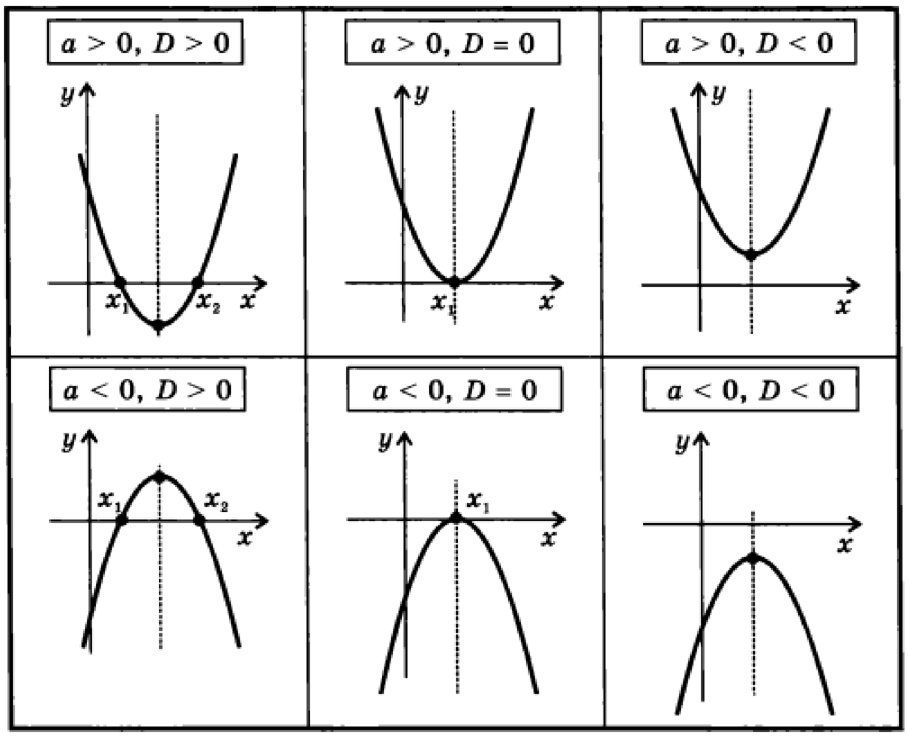


Рисунок 5.2 — Графики квадратичной функции

Отметим, что экстремумами квадратичной функции являются:
при $a > 0$ $\quad x_{min} = -b/(2a); \quad y_{min} = -D/(4a)$;
при $a < 0$ $\quad x_{max} = -b/(2a); \quad y_{max} = -D/(4a)$.

Различные представления квадратичной функции

1. Выделение полного квадрата

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Пример.

а) $y = x^2+6x-4 = x^2+2\cdot3\cdot x-4 = x^2+2\cdot3\cdot x+3^2-3^2-4 = (x+3)^2-13.$

б) $y = x^2+x+1 = x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+1 = x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 =$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

2. Разложение на линейные множители

при $D > 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

при $D = 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)^2$

при $D < 0$ $\quad$ нет вещественных корней, есть комплексные корни $y = ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Пример. а) $y = 9x^2+8x-1 = 9(x+1)\left(x-\frac{1}{9}\right)$;

б) $y = x^2-6x+9 = (x-3)^2$;

в) $y = x^2+x+1 = \left(x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right).$

Теорема Виета

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют квадратным уравнением. Числа a, b и c носят следующие названия: a — первый коэффициент; b — второй коэффициент; c — свободный член. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют *приведенным*. Если $a \neq 1$, то квадратное уравнение называют *неприведенным*.

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то сумма корней приведенного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Справедлива **теорема, обратная теореме Виета**.

Если числа x_1 и x_2 таковы, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется равенство $a + b + c = 0$, то корни уравнения

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = \frac{c}{a}. \end{array} \right.$$

Пример. В уравнении $x^2 + 4x - 5 = 0$ выполняется равенство $a + b + c = 1 + 4 - 5 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

На примере гиперболы и параболы рассмотрим понятие *выпуклости вниз* и *выпуклости вверх*.

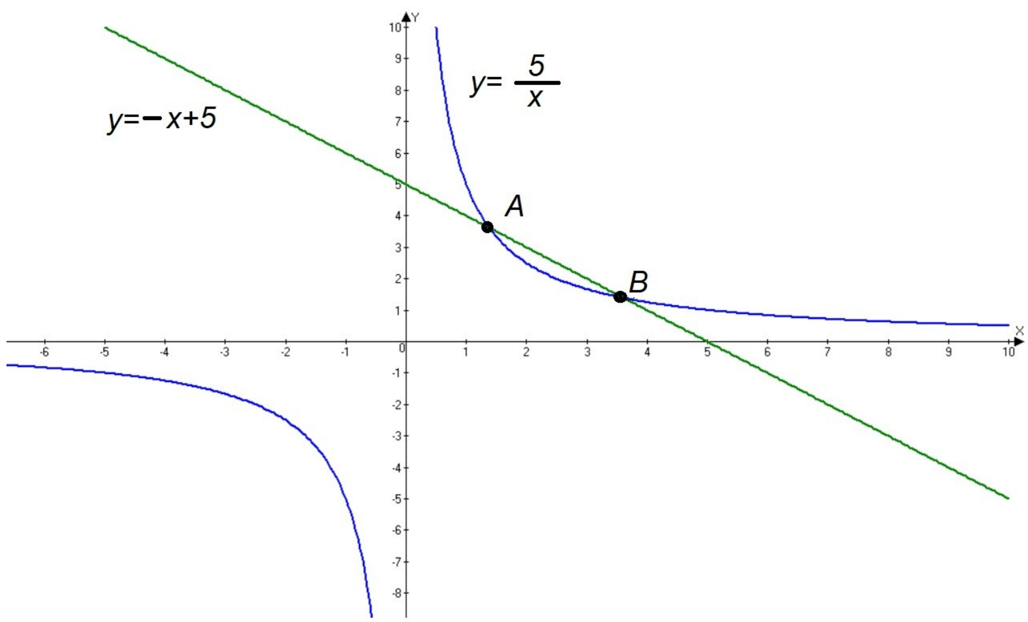


Рисунок 5.3 — Выпуклость вниз и выпуклость вверх графика гиперболы

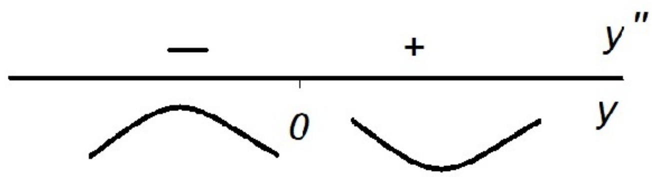
Рассмотрим на кривой какие-либо две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Проведем через них прямую. Если часть кривой, расположенная между точками AB лежит ниже хорды AB кривой, то говорят, что кривая обращена *выпуклостью вниз*. Если часть кривой, расположенная между точками AB лежит выше хорды AB кривой, то кривая обращена *выпуклостью вверх*.

Например, для гиперболы $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ при $x > 0$ кривая выпукла вниз; при $x < 0$ кривая выпукла вверх.

Докажем это утверждение при помощи производной.

$$y' = \left(\frac{k}{x}\right)' = k \cdot \left(x^{-1}\right)' = k \cdot \left(-x^{-2}\right) = -\frac{k}{x^2}.$$

$$y'' = \left(-k \cdot x^{-2}\right)' = -k \cdot \left(-2x^{-3}\right) = \frac{2k}{x^3}.$$



При $x = 0$ y'' не имеет смысла. Кривая выпукла вверх в интервале, в котором $y'' < 0$ и выпукла вниз на интервале, в котором $y'' > 0$. Точка $x = 0$ — точка, где происходит смена направлений выпуклости — *точка перегиба* графика функции.

Примеры квадратичных физических законов:

1. $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$ — зависимость радиус-вектора от времени при равноускоренном движении;
2. $E_k = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия поступательного движения;
3. $W = \frac{q^2}{2C}$ — энергия заряженного конденсатора;
4. $r_n = n^2 \cdot \frac{4\pi\varepsilon_\circ \cdot \hbar}{m_e \cdot e^2}$ — радиус n-ой боровской орбиты в атоме водорода.

6. Параболы и гиперболы высших порядков

Кривую, являющуюся графиком функции

$$y = a \cdot x^n, \qquad \text{где} \quad n\text{— натуральное число,}$$

называют *параболой порядка* n. Так, например, графики параболы 3-го порядка, или кубической параболы, и параболы 4-го порядка имеют вид:

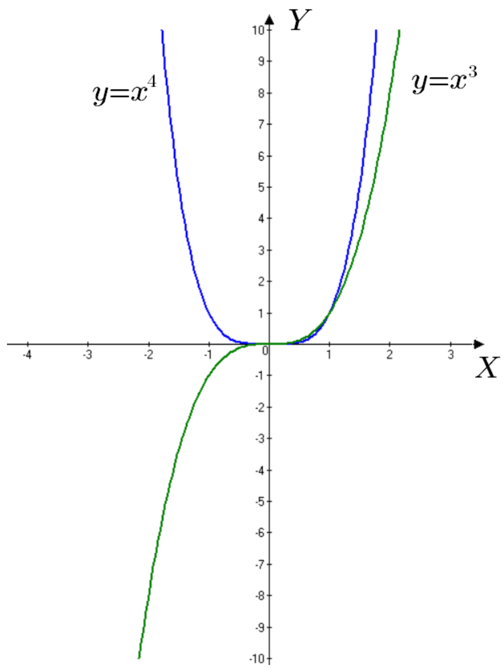


Рисунок 6.1 — Графики кубической параболы и параболы 4-го порядка

Точка $O(0;0)$ — точка касания кривой с осью Ox (то есть $x = 0$ — n-кратный нуль). Если n четно, то функция имеет в точке $x = 0$ минимум и график симметричен относительно оси Oy. Если n нечетно, то точка $O(0;0)$ — точка перегиба с горизонтальной касательной и кривая симметрична относительно начала координат.

Графики функций $y = a \cdot x^n$ получаются в случае $a > 0$ растяжением ординат в a раз; в случае $a < 0$ растяжением ординат в $|a|$ раз и последующим зеркальным отражением относительно оси Ox.

Кривую, являющуюся графиком функции

$$y = \frac{k}{x^n} = k \cdot x^{-n}, \qquad \text{где} \quad n\text{— натуральное число,}$$

называют *гиперболой* n-ой степени. Так, например, графики гиперболы 2-ой степени и гиперболы 3-ей степени имеют вид:

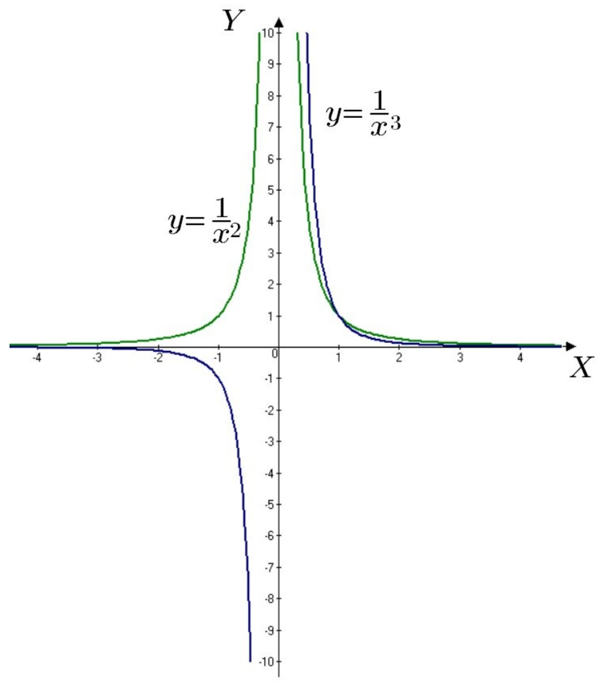


Рисунок 6.2 — Графики гиперболы 2-ой степени и гиперболы 3-ей степени

7. Обратная функция. Графики взаимно-обратных функций

Знание y как функции x означает, что каждому значению x соответствует определенное значение y:

$$x \xrightarrow{f} y, \quad y = f(x).$$

Но эту зависимость можно и обратить: задавать y и по нему находить соответствующее значение x

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x, \quad x = f^{-1}(y).$$

Рисунок 7.1 — Электропоезд компании Stadler

Так, например, закон движения электропоезда от одного пункта до другого устанавливается зависимостью положения поезда z от времени t, где за координату z можно принять, например, расстояние от начального пункта движения поезда. Этот закон имеет вид функциональной зависимости $z = f(t)$. Именно этой зависимостью z от t, заданной *в виде расписания движения поезда*, руководствуется его машинист. Но для пассажира электропоезда бóльший интерес может представить иная форма зависимости между пройденным путем z и временем t, а именно, зависимость времени от пути, указывающая, в какое время t_1 прибудет поезд в тот или иной пункт, определяемый координатой z_1. Эта зависимость $t = g(z)$ называется *обратной* по отношению к зависимости $z = f(t)$, другими словами, g есть функция обратная f. Говорят также, что функции f и g являются взаимно-обратными.

Пример. Найдите функцию, обратную заданной:

а) $y = 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad x(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3};$

б) $y = 1 - x \qquad \Rightarrow \quad x = 1 - y$;

в) $y = x^2 \qquad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y}$;

г) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \Rightarrow \quad x(y) = \frac{2^y - 2^{-y}}{2}$ или $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$;

д) $y = \frac{1-x}{1+x} \qquad \Rightarrow \quad x(y) = \frac{1-y}{1+y}$ или $y = \frac{1-x}{1+x}$.

Как связаны графики взаимно-обратных функций? Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно биссектрисы $\mathcal{L}$ I и III координатных углов.

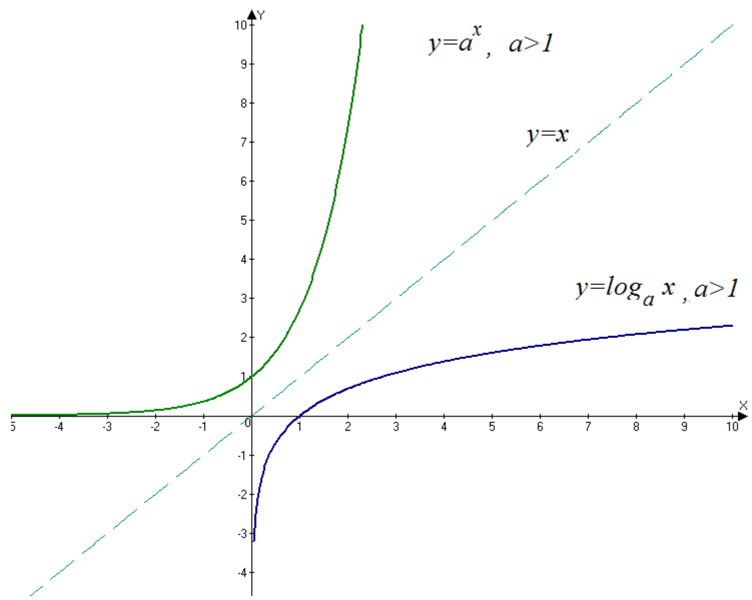


Рисунок 7.2 — Графики взаимно-обратных функций

В частности, если график функции симметричен относительно биссектрисы $\mathcal{L}$, то функция совпадает со своей обратной. Например, функция $y = 1 - x$ и обратная ей $x = 1 - y$, функция $y = \frac{1}{x}$ и обратная ей $x = \frac{1}{y}$.

Обратимся теперь к графику функции $y = x^2$ и $y = \pm\sqrt{x}$. Функция $y = \pm\sqrt{x}$, обратная квадратичной функции $y = x^2$ является двузначной. Каждому положительному значению независимой переменной x отвечают два значения функции $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. Для $x < 0$ функция y не определена.

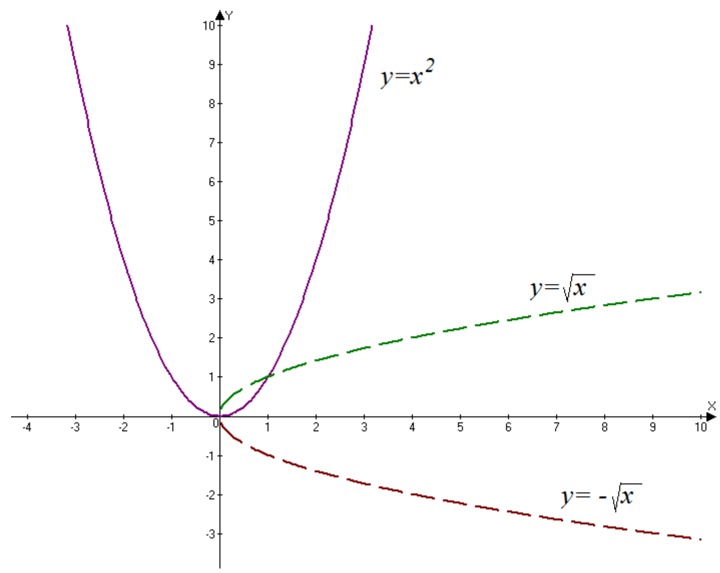


Рисунок 7.3 — Графики взаимно-обратных функций $y = x^2$ и $y = \pm\sqrt{x}$

Функция, определенная как обратная к заданной $f(x)$, вовсе не обязана быть однозначной. Так, в примере про электропоезд, пункты, которые проезжает электропоезд (они определяются расстоянием z от начального пункта O), разумеется, однозначно определяются по времени t: именно эта зависимость $z = f(t)$ дается расписанием движения поезда. Но если данный пригородный поезд совершает в течение суток ряд рейсов, то через определенный пункт своего маршрута он будет проходить многократно. Таким образом, обратная зависимость времени от расстояния $t = t(z)$ будет многозначной: одному и тому же расстоянию z от начального пункта движения отвечает ряд моментов времени, когда электропоезд удален от O именно на выбранное расстояние z.

Обратная функция всегда однозначна, если исходная однозначная функция $y = f(x)$ монотонна, то есть все время растет или все время убывает.

8. Параметрическое задание линий

Рассмотрим процесс движения материальной точки $M(x; y)$. Каждая из координат x, y точки будет меняться с течением времени t: движение M зададут две функции времени $x(t)$ и $y(t)$, например,

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi).$$

Эти зависимости можно изобразить графически в виде двух кривых на плоскости tOx и tOy.

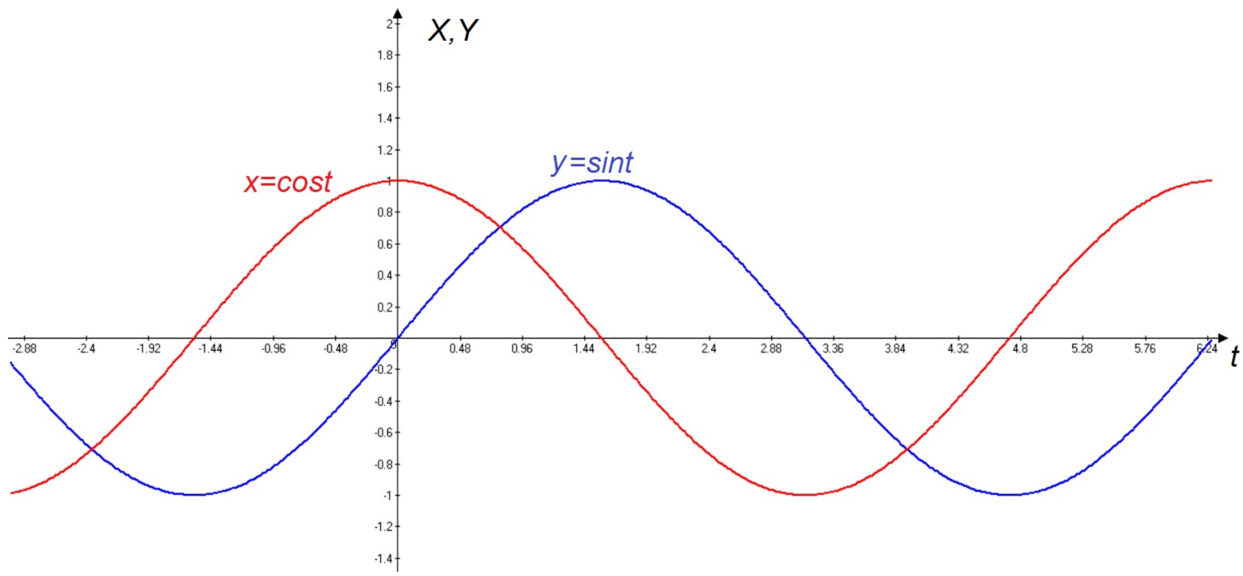


Рисунок 8.1 — Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Зададимся теперь вопросом о траектории точки M. Каждому значению t отвечают свои значения координат $x(t)$ и $y(t)$. Какую кривую опишет точка $M = M(x(t); y(t)) = M(t)$ при изменении t?

Для ответа на этот вопрос можно из двух уравнений $x = x(t)$ и $y = y(t)$ исключить величину t. Тогда мы получим выражение, в которое будут входить только y и x, то есть уравнения вида $y = y(x)$ — *явный способ задания кривой* или $F(x, y) = 0$ — *неявный способ задания кривой*. После этого будем строить кривую как обычно, задавая различные значения x и находя соответствующие y. Так, в приведенном примере,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Сопоставим полученное уравнение с каноническим уравнением окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Получаем уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=1$.

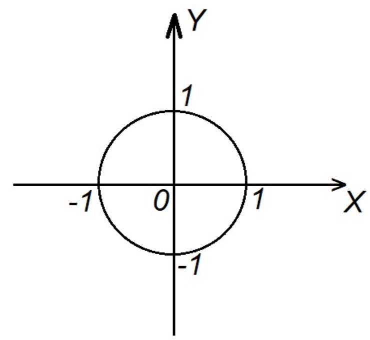


Рисунок 8.2 — График окружности $x^2+y^2=1$

Однако, часто даже сравнительно простые выражения при попытке исключить из них t приводят к очень сложным функциям.

Способ задания кривой или функциональной зависимости $y=y(x)$ двумя функциями $x(t)$ и $y(t)$

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t); \end{cases} \qquad t\in[t_1;t_2]\,,$$

называется *параметрическим*, а величина t называется *параметром.*

В физических задачах параметр часто имеет вполне определенный смысл. Параметр t может иметь смысл времени. В этом случае $x(t)$ и $y(t)$ — две функции времени. При этом можно интересоваться исключительно формой той кривой, которую опишет точка $M(x;y)$, но можно интересоваться и тем, с какой скоростью движется эта точка и какое положение она будет занимать в разные моменты времени. Рассмотрим для примера следующие кривые:

$$1)\quad \begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \qquad 2)\quad \begin{cases} x=\cos t, \\ y=-\sin t, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\sin 3t, \end{cases} \qquad 4)\quad \begin{cases} x=\sin 3t, \\ y=\cos 3t, \end{cases}$$

Во всех случаях, исключив параметр t, получим одну и ту же кривую: $x^2+y^2=1$ — окружность единичного радиуса в плоскости xOy. В чем же различие этих четырех случаев, как в каждом из них происходит движение? В случаях 1), 2), 3) в момент времени $t=0$ точка находится на оси абсцисс; в 4) — на оси ординат. В случаях 1), 3) точка (можно представить материальную частицу) движется по кругу против часовой стрелки; в 2), 4) — по часовой стрелке. По абсолютной величине угловая скорость вращения, а значит, и линейная скорость равны $\omega = 1$ рад/сек, $\quad |v| = 1$ м/с в 1) и 2); в случае 3) и 4) $\quad \omega = 3$ рад/сек, $\quad |v| = 3$ м/с.

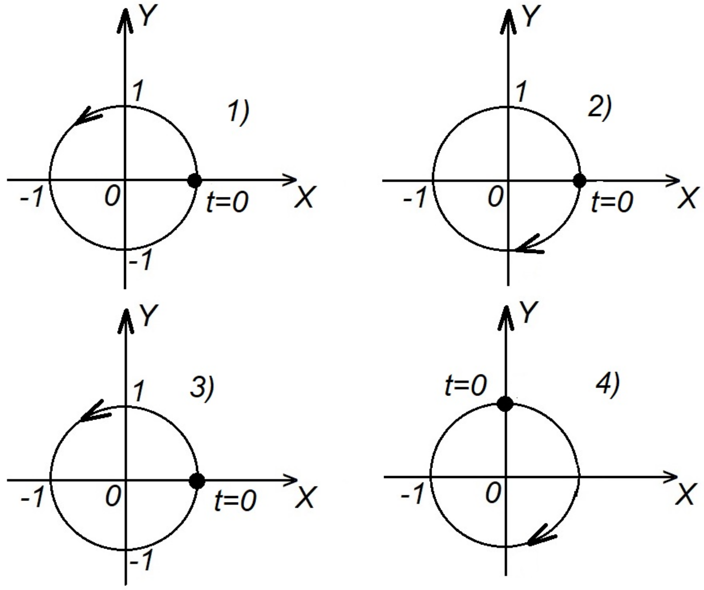


Рисунок 8.3 — Движение по окружности

Приведем еще примеры параметрически заданных кривых:

1. Параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)\,.$$

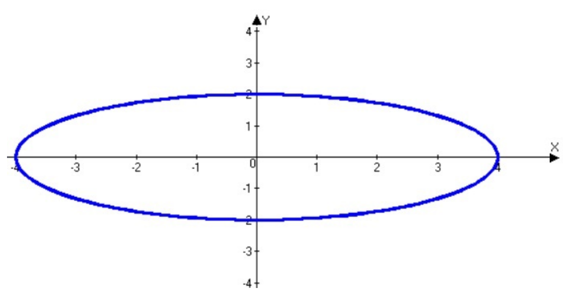


Рисунок 8.4 — Эллипс

2. Кривая, по которой движется точка обода велосипедного колеса при движении велосипедиста в одном направлении — фиксированная точка A на окружности диска радиуса r при качении диска по прямой. Эта кривая называется *циклоидой*.

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 + \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi)\,.$$

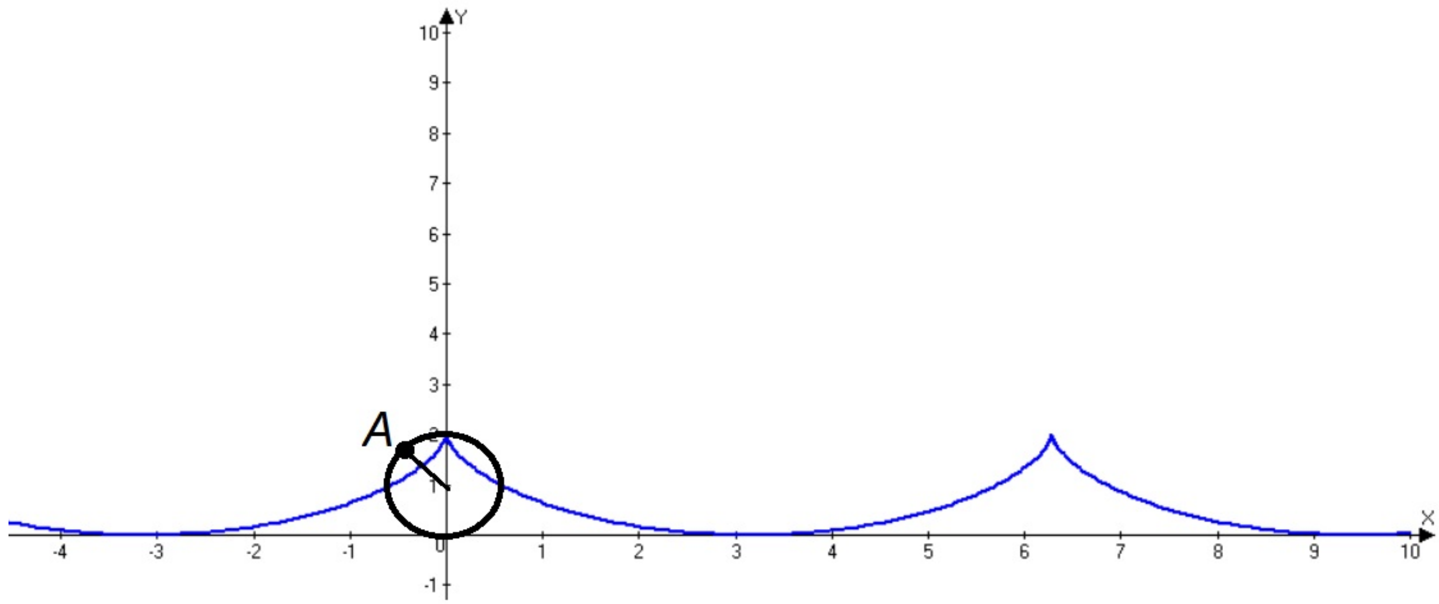


Рисунок 8.5 — Циклоида

3. Параметрические уравнения астроиды

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi) .$$

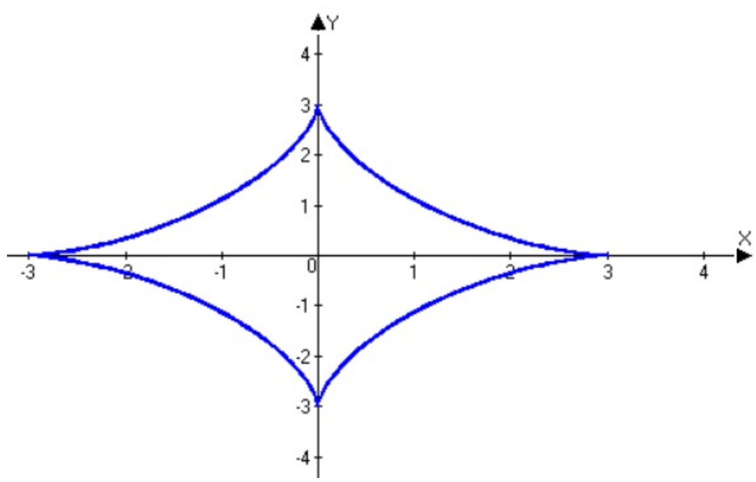


Рисунок 8.6 — Астроида

Задача. Определите траекторию и место падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скоростью v_0 на высоте h_0 (сопротивлением воздуха можно пренебречь).

Решение. Выберем систему координат. Предположим, что самолет сбрасывает груз в тот момент, когда он пересекает ось Oy.

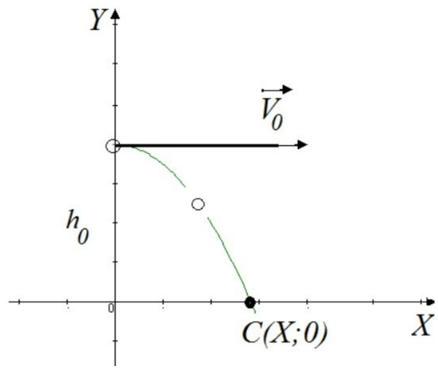


Рисунок 8.7 — Траектория и место падения груза

Горизонтальное перемещение груза будет равномерным, с постоянной скоростью v_0: $x = v_0 t$.

Вертикальное перемещение падающего груза под действием силы тяжести будет выражаться формулой $S = \frac{gt^2}{2}$.

Следовательно, расстояние груза от земли в любой момент времени будет выражаться формулой

$$y = h_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Два уравнения

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = h_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

— параметрические уравнения траектории. Исключим t: из первого уравнения $t = \frac{x}{v_0}$ подставим во второе уравнение

$$y = h_0 - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = h_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 + h_0$$

это уравнение **параболы** с вершиной в точке $M(0; h_0)$; ось Oy — ось симметрии параболы.

Определим величину отрезка OC. Обозначим абсциссу точки C через X. Заметим, что ордината этой точки $y = 0$. $\Rightarrow$

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot X^2 + h_0 \quad \Rightarrow \quad X = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot v_0$$

определяет место падения груза.

Ответ: траектория — парабола; место падения груза $X = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot v_0$.

9. Гиперболические функции

Во многих приложениях математического анализа встречаются комбинации показательных функций вида

$$\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Эти комбинации рассматривают как новые функции:

– гиперболический синус

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

– гиперболический косинус

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

С помощью этих функций можно определить еще две:

– гиперболический тангенс

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

– гиперболический котангенс

$$\mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Функции $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{th}x$ $\mathrm{cth}x$ определены для всех $x \in R$; функция $\mathrm{cth}x$ определена на R за исключением $x = 0$. Графики этих функций представлены на рисунках:

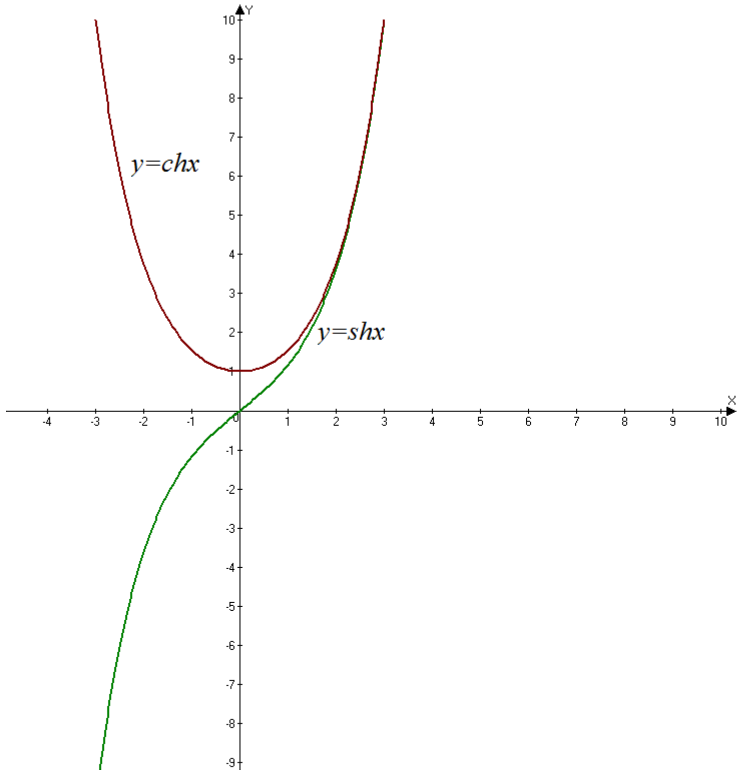


Рисунок 9.1 — Графики гиперболического синуса и гиперболического косинуса

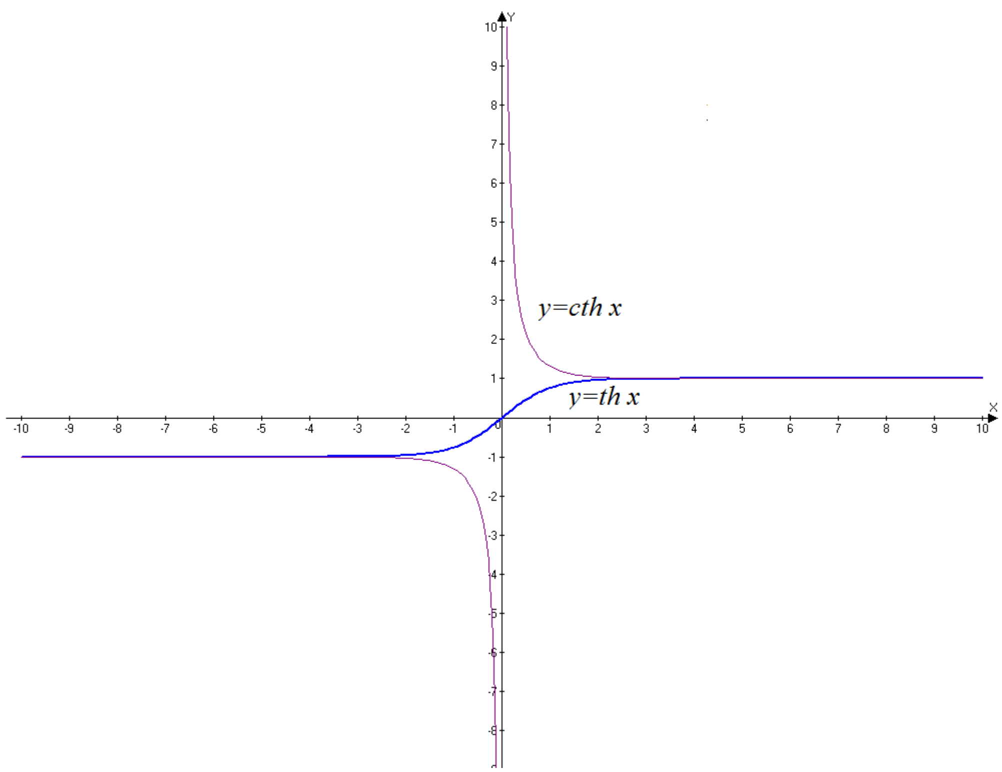


Рисунок 9.2 — Графики гиперболического тангенса и гиперболического котангенса

Из определения гиперболических функций вытекают соотношения, аналогичные соотношениям между соответствующими тригонометрическими функциями:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,$$

$$\mathrm{ch}(\alpha+\beta) = \mathrm{ch}\alpha\mathrm{ch}\beta + \mathrm{sh}\alpha\mathrm{sh}\beta,$$

$$\mathrm{sh}(\alpha+\beta) = \mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\beta + \mathrm{ch}\alpha\mathrm{sh}\beta.$$

Название “гиперболические функции” объясняется тем, что функции $\mathrm{sh}t$ и $\mathrm{ch}t$ играют ту же роль для параметрического представления гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, какую тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ для параметрического представления окружности $x^2+y^2 = 1$. Действительно, исключая параметр t из уравнений $x = \cos t$, $y = \sin t$, получим $x^2+y^2 = \cos^2 t+\sin^2 t = 1$ или $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение окружности.

Аналогично,исключая параметр t из уравнений $x = \mathrm{ch}\, t$, $y = \mathrm{sh}\, t$, получим $x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ или $x^2 - y^2 = 1$ — уравнение гиперболы.

Приведем без доказательства производные гиперболических функций:

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x, \quad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x,$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x},$$

которые вытекают из определения гиперболических функций.

10. Векторы

В физике мы часто встречаемся с векторами, то есть с величинами, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Примерами таких величин могут служить отрезок, соединяющий начало координат с данной точкой (то есть *радиус-вектор*); скорость движения материальной точки; сила, действующая на тело.

Если тело движется по определенной линии, например, по прямому пути, то положение тела можно определять расстоянием от определенной точки данной линии. Расстояние будем измерять вдоль этой линии. Вдоль заданной линии движение возможно лишь в двух направлениях. Направления можно различать, приписывая одному направлению знак плюс, а противоположному — знак минус.

Если же нам известно, что тело движется по плоскости (или в пространстве), то мы не сможем указать положение тела данный момент времени, если задано только расстояние тела от определенной точки; необходимо задать еще направление линии, соединяющей тело с этой точкой (началом координат). Точно также, задавая скорость тела, надо указывать ее величину и направление. Величины, имеющие направление, называются *векторами*. Мы будем обозначать их латинскими буквами со стрелкой или палочкой наверху. В отличие от векторов, величины, не имеющие направления и полностью определяющиеся своим числовым значением в выбранной системе единиц, называются *скалярами*. Примерами скаляров служат масса тела, его энергия, температура тела в какой-либо точке.

Векторы можно рассматривать в трехмерном пространстве или на плоскости (то есть в "двумерном пространстве"). Если отвлечься от направления векторной величины, то можно пользоваться модулем этой величины. *Модуль* — это положительный скаляр, имеющий размерность рассматриваемой величины. Например, для вектора $\overline{F}$ силы в 5 Н, имеющего определенное направление, модуль $\left|\overline{F}\right| = 5$ Н.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют равные модули, параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Это значит, что каждый вектор можно, не меняя его, перенести параллельно самому себе в любое место, то есть начало этого вектора может находиться где угодно. Таким образом, *задать вектор — это значит задать его модуль и направление.* Вектор геометрически изображается отрезком, направление которого обозначается стрелкой.

Линейные действия над векторами

К *линейным действиям* над векторами относятся сложение (и связанное с ним вычитание) и умножение вектора на скаляр. (Сложение вектора со скаляром так же нелепо, как сложение секунд и сантиметров).

Сложение двух векторов выполняется по правилу параллелограмма. При этом для нахождения суммы достаточно построить только один из треугольников.

$$\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{OC} = \overline{OB} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \quad \overline{OD} = \overline{OC} + \bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}.$$

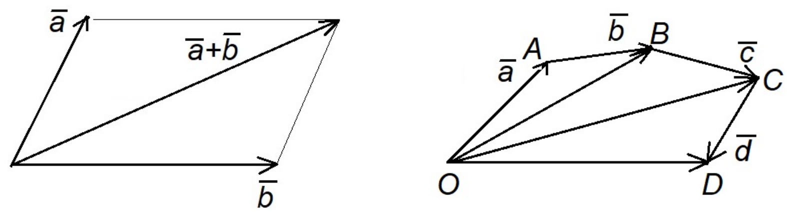


Рисунок 10.1 — Сложение векторов

В трехмерном случае векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ не обязаны лежать в одной плоскости. Направление суммарного вектора: от начала первого слагаемого к концу последнего. Если на рисунке изменить направление вектора $\overline{OD}$ на противоположное, приходим к следующему интересному выводу. Если векторы образуют *замкнутый многоугольник*, то сумма всех векторов равна *нуль-вектору* $\bar{0}$, то есть вектору, конец которого совпадает с его началом. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление его не определено.

Умножение вектора на скаляр (в частности на число) получается в результате обобщения сложения и вычитания векторов. Так, под вектором $3 \cdot \overline{F}$ понимается сумма $\overline{F} + \overline{F} + \overline{F}$; из построения ясно, что этот вектор направлен также, как $\overline{F}$, но в 3 раза длиннее.

Под вектором $(-1) \cdot \overline{F} = -\bar{F}$ понимается вектор, который в сумме с $\overline{F}$ дает $\bar{0}$; этот вектор направлен противоположно вектору $\bar{F}$ и имеет тот же модуль, что и $\overline{F}$. Обобщая, $\lambda \cdot \overline{F}$ — вектор, модуль которого равен $|\lambda| \cdot |\overline{F}|$; имеет одинаковое направление, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$. При линейных действиях над векторами выполняются все обычные правила элементарной математики.

Всякое выражение вида

$$\alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} + \ldots + \mu \cdot \bar{d},$$

где α, β, γ, ..., μ — некоторые скаляры, называется *линейной комбинацией векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., $\bar{d}$. Заданные векторы называются *линейно зависимыми*, если какой-либо из этих векторов является линейной комбинацией остальных; в противном случае эти векторы называются *линейно независимыми*. Линейная зависимость для двух векторов означает их параллельность. Если взять на плоскости любые два не параллельные вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то какой угодно третий вектор $\bar{c}$ в этой плоскости можно "разложить по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$", то есть представить в виде линейной комбинации:

$$\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{b}.$$

Поэтому на плоскости можно указать *два линейно независимых вектора*, но всякие три вектора уже линейно зависимы. Указанное разложение часто применяется в механике и других дисциплинах (например, разложение силы по двум направлениям), причем каждое из слагаемых $\lambda \cdot \bar{a}$ и $\mu \cdot \bar{b}$ называется *составляющей (компонентой) вектора* $\bar{c}$, а совокупность векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ называется *базисом*.

Подобным образом в пространстве можно указать уже три линейно независимых вектора (любые три вектора, не параллельные одной плоскости). Их можно принять за базис, то есть по ним можно разложить какой угодно четвертый вектор, а поэтому в пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.

Наиболее широко применяются базисы, состоящие из единичных, (то есть с безразмерным модулем, равным 1), взаимно перпендикулярных векторов; такие базисы называются *декартовыми*.

Векторы, образующие декартов базис, обычно обозначаются $\bar{i}$, $\bar{j}$ на плоскости; $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в пространстве. Таким образом, можно написать разложение любого вектора

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} \quad \text{на плоскости,}$$

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} \quad \text{в пространстве,}$$

где a_x, a_y, a_z — коэффициенты разложения — декартовы координаты вектора $\bar{a}$.

Выясним геометрический смысл координат вектора $\bar{a}$ в декартовом базисе.

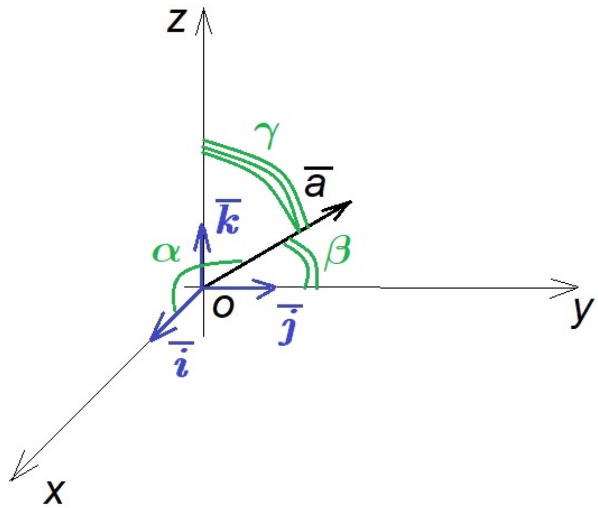


Рисунок 10.2 — Геометрический смысл декартовых координат вектора

Пусть α, β, γ — углы наклона вектора $\bar{a}$ к осям Ox, Oy, Oz. Умножим скалярно на $\bar{i}$ обе части равенства

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.$$

Тогда

$$(\bar{a}, \bar{i}) = a_x \left(\bar{i}, \bar{i}\right) + a_y \left(\bar{j}, \bar{i}\right) + a_z \left(\bar{k}, \bar{i}\right),$$

$$\left(\bar{i}, \bar{i}\right) = 1, \quad \left(\bar{i}, \bar{j}\right) = 0, \quad \left(\bar{i}, \bar{k}\right) = 0,$$

$$a_x = \left(\bar{a}, \bar{i}\right) = |\bar{a}| \cdot |\bar{i}| \cdot \cos\alpha = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = \text{Пр}_{\bar{i}}\bar{a}.$$

Аналогично,

$$a_y = \left(\bar{a}, \bar{j}\right) = |\bar{a}| \cdot |\bar{j}| \cdot \cos\beta = |\bar{a}| \cdot \cos\beta = \text{Пр}_{\bar{j}}\bar{a},$$

$$a_z = \left(\bar{a}, \bar{k}\right) = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{k}\right| \cdot \cos\gamma = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma = \text{Пр}_{\bar{k}}\bar{a}.$$

Итак, декартовы координаты вектора $\bar{a}$ представляют собой проекции данного вектора на базисные векторы. Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы данного вектора, совпадают с координатами орта $\bar{a}^{\circ}$, характеризуют направление данного вектора и связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проекция вектора есть скаляр. Ее физическая размерность такая же, как размерность проектируемого вектора.

Пример. Найдите вектор, который составляет одинаковые острые углы с положительно направленными осями Ox, Oy, Oz.

Решение. Так как $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = x$, то $x^2 + x^2 + x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда единичный вектор

$$\bar{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Некоторые физические приложения векторной алгебры

1. Момент силы $\overline{F}$, приложенной к точке A относительно некоторой точки O, есть векторное произведение векторов $\overline{OA}$ и $\overline{F}$, $\overline{M} = [\overline{OA}, \overline{F}]$.

2. Линейная скорость $\bar{v}$ точки, вращающейся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, есть векторное произведение вектора угловой скорости и радиус-вектора $\bar{r}$ этой точки $\bar{v} = [\bar{\omega}, \bar{r}]$.

3. Сила Кориолиса, действующая на тело, участвующее во вращательном движении с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и относительном движении со скоростью $\bar{v}_e$, пропорциональна векторному произведению векторов скоростей $\bar{F}_k = 2m \cdot [\bar{v}_e, \bar{\omega}]$, где m — масса тела. Так, например, на автомобиль массой 1 т, движущийся на север по меридиану на широте $\varphi = 45^\circ$ северной широты со скоростью 100 км/ч, действует сила Кориолиса, направленная на восток и по величине равная

$$\left|\bar{F}_k\right| = 2m \cdot |\bar{\omega}| \cdot |\bar{v}_e| \cdot \sin\varphi,$$

$$|\bar{\omega}| = 1 \text{ об/сут} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с},$$

$$|\bar{v}_e| = 100 \text{ км/ч} = \frac{100 \cdot 1000}{3600} \approx 27{,}8 \text{ м/с},$$

Тогда величина силы Кориолиса

$$\left|\bar{F}_k\right| = 2 \cdot 10^3 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 27{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}8 \text{ Н}.$$

4. На частицу с электрическим зарядом q, движущуюся в магнитном поле со скоростью $\bar{v}$, действует сила Лоренца, пропорциональная векторному произведению вектора скорости и вектора магнитной индукции $\bar{B}$, являющегося силовой характеристикой магнитного поля $\bar{F} = q \cdot \left[\bar{v}, \bar{B}\right]$.

11. Тензоры

Как уже было замечено, для описания физических или геометрических объектов вводится та или иная система координат. Это позволяет описать объект одним числом или набором чисел. Например, скалярные величины (масса, температура) описываются одним числом, причем, значения этих величин не изменяются при переходе от одной системы координат к другой. Другие величины — векторные (сила, скорость и т. д.) описываются тремя числами (компонентами вектора), причем, при переходе от одной системы координат к другой компоненты вектора преобразуются по определенному закону.

Наряду со скалярными и векторными величинами во многих вопросах физики и геометрии встречаются величины более сложного строения. Эти величины, называемые *тензорами*, описываются в каждой системе координат несколькими числами (компонентами тензора), причем закон преобразования этих чисел при переходе от одной системы координат к другой более сложен, чем для векторов. При введении системы координат, помимо чисел, описывающих сам объект или физическое явление, появляются числа, описывающие его связь с выбранной системой координат.

Тензор (от лат. tensus "напряженный") — это объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элемент другого. Частные случаи тензоров — скаляры, векторы, билинейные формы. Часто тензор представляют в виде матрицы (многомерной таблицы) $n \times n \times \cdots \times n$, заполненной числами — *компонентами тензора*. Здесь n — размерность векторного пространства, в котором задан тензор, а число сомножителей совпадает с так называемой *валентностью или рангом* тензора. Такое представление возможно только после выбора базиса (или системы координат). При смене базиса компоненты тензора меняются определенным образом. Сам тензор от выбора базиса не зависит. Например, рассмотрим вектор — частный случай тензора. Компоненты вектора меняются при смене координатных осей, но сам вектор — образом которого может быть просто нарисованная стрелка — от этого не изменяется.

Тензор обычно обозначают буквой с совокупностью верхних (*контрвариантных*) и нижних (*ковариантных*) индексов:

$$X^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}.$$

При смене базиса ковариантные компоненты меняются так же как и базис (с помощью того же преобразования), а контрвариантные — обратно изменению базиса (обратным преобразованием). Так, вектор (тензор 1-го ранга) задается столбцом, линейный оператор — двумерной матрицей; скаляр — тензор нулевого ранга — одним числом.

Запишем в качестве примера закон Ньютона в векторной форме

$$\overline{F} = m\bar{a},$$

где $\overline{F}$ — вектор силы, $\bar{a}$ — вектор ускорения, m — масса. Закон Ньютона может быть записан в координатной форме:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z.$$

Первое уравнение — это *инвариантная запись*, в отличие от формы *неинвариантной* — через компоненты векторов. Инвариантная форма никак не изменится при переходе к другим координатам. В то время как F_x, F_y, F_z, a_x, a_y, a_z зависят от принятых координат. Запись физических уравнений в инвариантном виде является более "правильной", поскольку законы природы не могут зависеть от произвольного, случайного выбора системы координат. Инвариантная форма не содержит в явном виде информации о *размерности* (числе измерений) пространства. Эта размерность должна подразумеваться особо. В этом примере нам удалось инвариантно записать умножение вектора на постоянную величину m. С другими операциями (как скалярное произведение) уже возникнут трудности, как и при переходе к более сложным объектам. Потребуются особые приемы, которым предстоит научиться.

Итак, *тензор* — это

1) математическое представление некоторого объекта (геометрического или физического), существующего в пространстве, в виде матрицы величин — компонент тензора;

2) значения компонент зависят от принятой системы координат, и изменяются (преобразуются) при переходе к другим координатам;

3) преобразование компонент таково, что оставляет, тем не менее, неизменными некоторые особые величины — инварианты.

Тензорное исчисление — это математическая теория, изучающая тензоры, их свойства и правила действия над ними. Тензорное исчисление, как и векторное исчисление, является математическим аппаратом, при котором *исключается влияние выбора системы координат*. Это достигается тем, что задание компонент тензора в какой-либо системе координат определяет их *во* *всех других системах координат.* Задача тензорного исчисления — развить такую форму записи тензоров, чтобы обойтись без матрицы компонент, то есть развить инвариантную форму. Причем, вид инвариантной формы позволит записывать любые (инвариантные) операции над тензорами.

Тензорные операции — это прямое обобщение матричных операций — умножение матриц между собой и с векторами, а также векторных операций, таких как скалярное произведение. С помощью этих операций тензоры связываются с такими фундаментальными геометрическими объектами как векторы и скаляры. Эти же операции связывают тензоры с матрицами преобразования координат (матрицы Якоби).

Тензоры, тензорная алгебра и тензорный анализ (в котором изучаются правила дифференцирования тензоров) играют в современной физике очень важную роль.

Например, при разработке элементов опто- и наноэлектроники приходится решать задачу определения кристаллографического направления, задающего ориентацию кристаллической пластины, вдоль которого используемое в работе прибора физическое свойство (электрическое, оптическое, упругое и т. д.) кристалла достигает требуемого значения. Для решения подобных задач в кристаллофизике существует метод отыскания собственных векторов и собственных значений физического свойства, описываемого тензором второго ранга.

А. Эйнштейн применил тензорный анализ к электродинамике и теории тяготения, чем привлек к тензорам широкое внимание физиков и математиков. В тензорных терминах формулируются основные законы теории упругости, электродинамики и оптики анизотропной среды и т. д. Это дает возможность не связывать исследование с какой-то одной системой координат. Отметим, что во многих случаях достаточно ограничиваться декартовой системой координат.

12. Комплексные числа

Число вида

$$z = x + i \cdot y,$$

где x и y — любые действительные числа, а i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется *комплексным числом.* Число x называется действительной частью комплексного числа z, число y называется мнимой частью комплексного числа z, числа обозначаются $x = Rez$, $y = Imz$.

Запись комплексного числа в виде $z = x+iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа.*

Комплексное число $z = x + iy$ может быть изображено в декартовой координатной плоскости xOy либо точкой с абсциссой x и ординатой y, либо радиус-вектором этой точки.

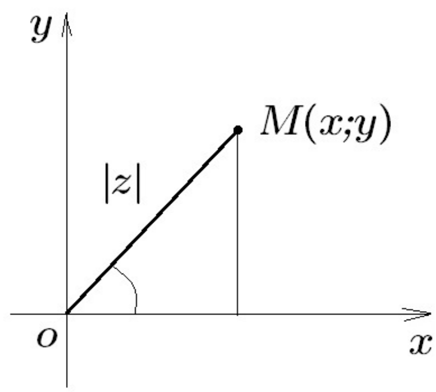


Рисунок 12.1 — Изображение комплексного числа на плоскости

Длина этого вектора называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется *аргументом* числа z и обозначается $Argz$

$$\operatorname{tg}(Argz) = \frac{y}{x}.$$

Величина $Argz$ многозначна и определена с точностью до числа, кратного 2π:

$$Argz = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Значение $Argz$, заключенное в пределах от $-\pi$ до π, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$ или φ.

$$-\pi < \varphi \le \pi,$$

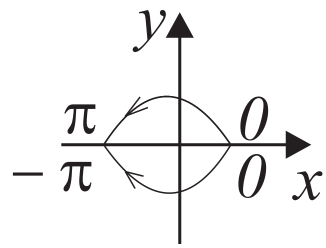


Рисунок 12.2 — Главное значение аргумента

причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0,\ y > 0,\ y < 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Пример. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + i$.
Решение. $x = -1, \quad y = 1$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$.

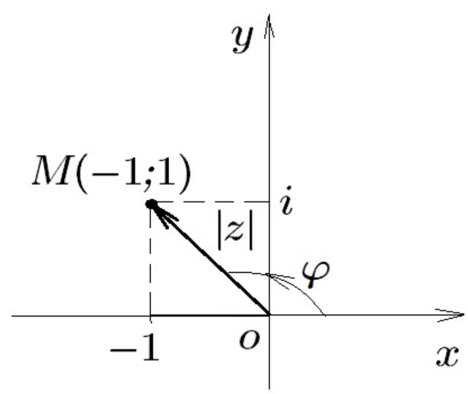


Рисунок 12.3 — Изображение комплексного числа $z = -1 + i$ на плоскости

$\arg z = \pi - \operatorname{arctg}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (функция $y = \operatorname{arctg}x$ является нечетной $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}x$). $Argz = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Пример. $z = -1 - 3i, \quad \overline{z} = -1 + 3i$.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме, производятся по следующим правилам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примеры. 1) $(1 + 5i) + (4 - i) = 5 + 4i$,
2)$(1 + 5i) \cdot (4 - i) = 9 + 19i$,
3)$\frac{1+5i}{4-i} = \frac{1+5i}{4-i} \cdot \frac{4+i}{4+i} = \frac{-1+21i}{17} = \frac{-1}{17} + \frac{21}{17}i$.
Отсюда, в частности, следует, что

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Действительная часть Rez и мнимая часть Imz выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$z = x + iy,\, \overline{z} = x - iy \;\Rightarrow\; x = Rez = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = Imz = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) векторов, изображающих эти числа.

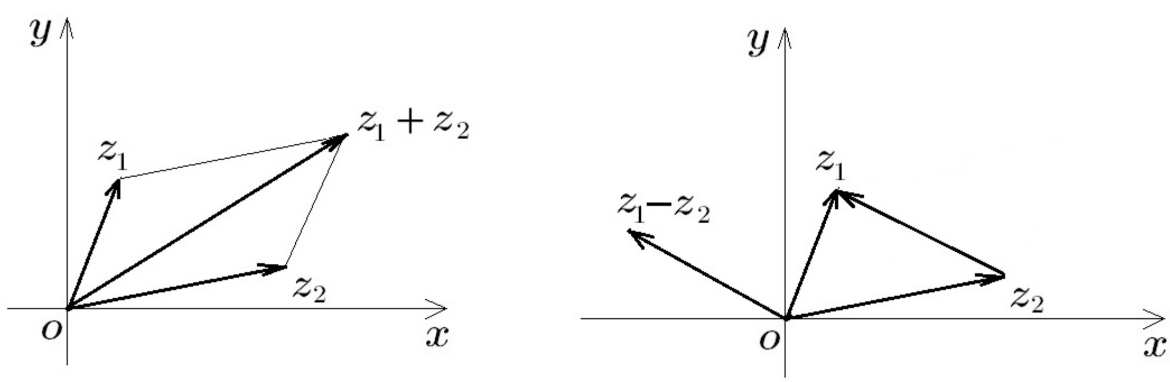


Рисунок 12.4 — Сложение (вычитание) комплексных чисел

Радиус-вектор *суммы* комплексных чисел z_1 и z_2 является диагональю параллелограмма, построенного на радиус-векторах слагаемых. Радиус-вектор *разности* комплексных чисел z_1 и z_2 находится следующим образом: нужно соединить конец радиус вектора *вычитаемого* с концом радиус-вектора *уменьшаемого*, а затем полученный вектор перенести параллельно самому себе, поместив его начало в точку O.

Тригонометрическая форма комплексного числа

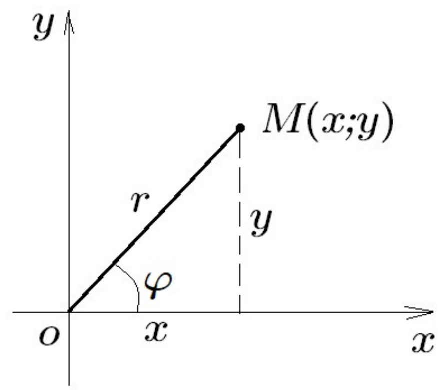


Рисунок 12.5 — Изображение комплексного числа на плоскости

Из рисунка видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и любое комплексное число $z = x + iy$, $z \neq 0$, можно представить в виде

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Эта запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Число, комплексно-сопряженное к данному, записывается в виде

$$\overline{z} = r\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right).$$

Комплексное число в показательной форме

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то по формуле $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ *обозначается символом* $e^{i\varphi}$, то есть функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Следовательно, для любого действительного числа φ имеют место равенства

$$\varphi = \arg e^{i\varphi}, \quad \left|e^{i\varphi}\right| = 1.$$

В частности,

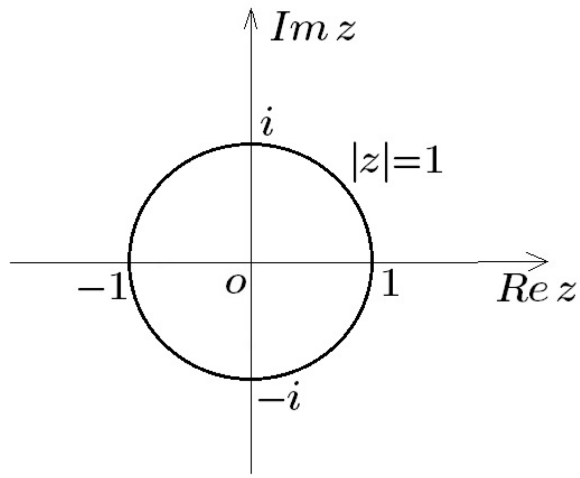


Рисунок 12.6 — Изображение комплексного числа на плоскости

$$e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{-i\pi/2} = -i.$$

Заменой φ на $-\varphi$ получается равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Сложим и вычтем равенства

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

получаются *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi\cdot n}, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

Из последних свойств вытекает *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Из формул

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

и

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|,\ \varphi = \arg z.$$

Эта запись комплексного числа называется *показательной формой комплексного числа.* Легко получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$\Rightarrow$ Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,,$$

а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \arg\left(z_1 \cdot z_2\right).$$

Аналогично, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z \neq 0,$$

а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}.$$

Пример. Вычислите

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 \cdot (1+i)^2\,.$$

Решение. Для комплексного числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, записанного в алгебраической форме, $x_1 = 1$, $y_1 = -\sqrt{3}$, $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$,
$arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Запишем число z_1 в показательной форме: $z_1 = |z_1| \cdot e^{i \cdot arg z_1}$, $z_1 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Аналогично для комплексного числа z_2, записанного в алгебраической форме, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. Запишем число z_2 в показательной форме: $z_2 = |z_2| \cdot e^{i \cdot arg z_2}$, $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Тогда

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3 \cdot (1+i)^2 = \left(2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 =$$

$$= 2^3 \cdot 2 \cdot e^{-i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^4 \cdot (-1) \cdot i = -16i.$$

Возведение комплексного числа в степень

Произведение n равных комплексных чисел z называется *n-ой степенью числа*. Например, $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$. Результат возведения в целую степень *единственен*.

Пусть $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а $Arg z$ — его аргумент, где $Arg z = \varphi + 2\pi k$, φ — главное значение аргумента. Комплексное число в показательной форме:

$$z = r \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}, \quad k \in Z.$$

Тогда

$$z^n = \left(r \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)}\right)^n = r^n \cdot e^{i(\varphi \cdot n + 2\pi k \cdot n)},\ k \in Z.$$

Соответствующая формула в тригонометрической форме называется *формулой Муавра*

$$z^n = r^n \left[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right].$$

При возведении в целую степень можно не учитывать неоднозначность аргумента $Arg z = \varphi + 2\pi k$, так как в результате целое количество полных оборотов $2\pi k$ все равно можно отбросить. С геометрической точки зрения при возведении в натуральную степень радиус-вектор точки удлиняется (укорачивается) и поворачивается на новый угол, который составляет с положительным направлением действительной оси величину $n\varphi$.

Извлечение корня

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a,$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число. Найдем корни этого уравнения z_k.

Пусть $a = \rho \cdot e^{i\theta}$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Тогда

$$r^n \cdot e^{i\varphi n} = \rho \cdot e^{i\theta}.$$

Так как правило равенства комплексных чисел, записанных в показательной форме $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ гласит: $z_1 = z_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, где k — некоторое целое число, то с помощью этого свойства находим:

$$r^n = \rho, \qquad n\varphi = \theta + 2\pi k.$$

Откуда

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{и} \quad z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \cdot \frac{(\theta+2\pi k)}{n}}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Заметим, что числа z_0, z_1, $\ldots$, z_{n-1} различны, так как их аргументы $\varphi_0 = \frac{\theta}{n}$, $\varphi_1 = \frac{\theta+2\pi}{n}$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} = \frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}$ различны и отличаются друг от друга меньше, чем на 2π.

Рассматривая далее, $z_n = z_0$, так как $|z_n| = |z_0| = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi_n = \frac{\theta+2\pi n}{n} = \varphi_0 + 2\pi$, $z_{n+1} = z_1$, $z_{-1} = z_{n-1}$ и т. д.

Таким образом, уравнение $z^n = a$ при $a \neq 0$ имеет ровно n различных корней:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

На комплексной плоскости точки z_k расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке O. То есть при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n-й степени из числа a

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример. Найдите все значения корня $\sqrt[4]{16i}$.

Решение. Комплексное число $z = 16i$ запишем в показательной форме:

$$16i = 16 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, \ k \in Z.$$

Извлечем корень 4-ой степени из модуля (возьмем его арифметическое значение), а аргумент разделим на n. Укажем значения k.

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16} \cdot e^{\frac{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{4}} = 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right)}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Изобразим полученные значения корней на комплексной плоскости.

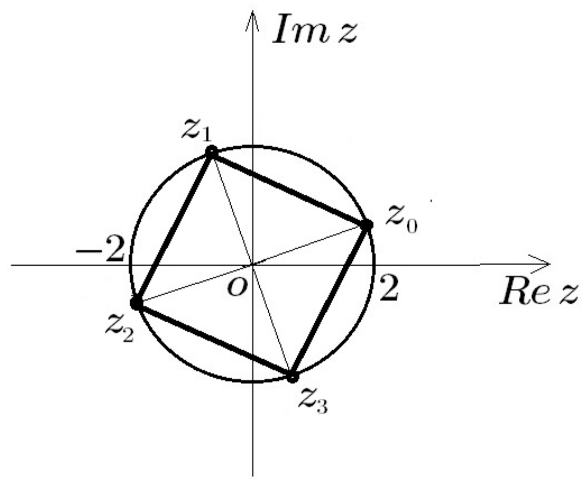


Рисунок 12.7 — Значения корня 4-ой степени из комплексного числа

На комплексной плоскости точки z_k расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке O. То есть имеется ровно 4 различных значения из комплексного числа $\sqrt[4]{16i}$

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)}, \quad z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}, \quad z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)}.$$

Свойства комплексно сопряженных чисел

Если $z = x+iy$, то по определению $\overline{z} = x-iy$. Модули комплексно сопряженных чисел равны: $|z| = |\overline{z}|$. Установим связь между их аргументами. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда из формул Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

или из рисунка видно, что $\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$.

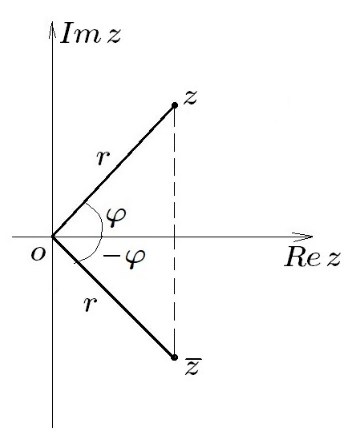


Рисунок 12.8 — Комплексно сопряженные числа

Таким образом, если $\varphi = arg z$, то $-\varphi = arg\overline{z}$. Отметим, что операция сопряжения перестановочна с арифметическими операциями над комплексными числами:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0,$$

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad z \neq 0 \quad \text{при} \quad n < 0.$$

Эти равенства проверяются непосредственно.

Сделаем еще одно важное замечание. Пусть

$$P_n(z) = a_0 \cdot z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n$$

многочлен с действительными коэффициентами. Тогда

$$\overline{P_n(z)} = a_0 \cdot (\overline{z})^n + a_1 \cdot (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_n = P_n(\overline{z}).$$

В частности, если $P_n(z_0) = 0$, то $P\left(\overline{z_0}\right) = \overline{P_n\left(z_0\right)} = 0$, то есть если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ *также является корнем этого многочлена.*

Пример. а) $z^2 + 1 = 0, \quad (z - i)(z + i) = 0, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -i.$

б) $z^2 + 4z + 5 = 0, \quad z_1 = -2 + i, \quad z_2 = -2 - i.$

Основная теорема алгебры устанавливает, что любой многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет ровно n корней (в общем случае — комплексных). Нахождение этих корней является одним из элементов алгоритма решения некоторых типов дифференциальных уравнений.

Применение комплексных чисел в электротехнике

В электротехнике тема “Переменный ток” занимает значительное место. Это объясняется тем, что большинство электротехнических установок работает на переменном токе, который изменяется синусоидально.

Уравнение переменного напряжения имеет вид

$$u = U_{\text{М}} \cdot \sin(\omega t + \psi)\,,$$

где u — мгновенное значение напряжения,

$U_{\text{М}}$ — максимальное значение (амплитуда) напряжения,

ω — угловая частота,

t — время,

ψ — начальный фазовый угол,

$\omega t = \alpha$ — электрический угол.

Это уравнение связывает две переменные величины: напряжение u и время t. С течением времени напряжение изменяется синусоидально.

Аналогичный вид имеют уравнения и других синусоидально изменяющихся величин:

$$\text{тока} \qquad i = I_{\text{М}} \cdot \sin(\omega t + \psi)\,,$$

$$\text{и Э.Д.С.} \quad e = E_{\text{М}} \cdot \sin(\omega t + \psi)\,.$$

При расчете цепей переменного тока приходится использовать синусоидально изменяющиеся величины, то есть производить сложение, вычитание, умножение и деление указанных выражений. Сложение синусоидальных величин трудоемко, особенно если приходится складывать большое число выражений.

Пример. Рассмотрим узел электрической цепи, в который втекают два переменных электрических тока одинаковой частоты ω:

$$i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad \text{и} \quad i_2(t) = I_2 \sin(\omega t + \alpha_2)\,,$$

где I_1 и I_2 — амплитуды токов; α_1 и α_2 — начальные фазы токов. Определите характеристику тока i_3, вытекающего из узла.

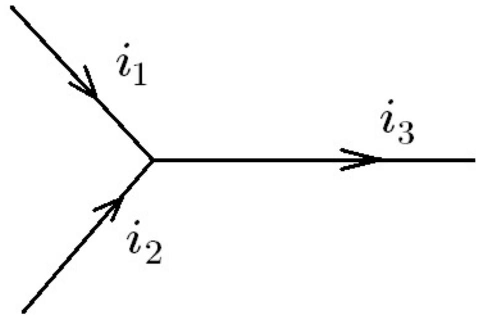


Рисунок 12.9 — Узел электрической цепи

Решение. Как следует из первого закона Кирхгофа, искомый ток должен подчиняться следующему правилу:

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

При этом суммарный ток также будет синусоидальным с той же частотой ω:

$$i_3(t) = I_3 \sin\left(\omega t + \alpha_3\right).$$

Определение амплитуды I_3 и начальной фазы α_3 этого тока с помощью тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и недостаточно наглядным (особенно, если суммируется большое число синусоидальных величин). Значительно проще это осуществить с помощью векторной диаграммы.

Синусоидальная величина однозначно представлена вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а начальное положение определяется углом ψ, вращение вектора происходит с угловой скоростью ω. Операции производятся с выражениями, имеющими одинаковую угловую частоту, то есть все векторы, заменяющие выражения, вращаются с одинаковой угловой скоростью. Следовательно их взаимное расположение не меняется, отпадает необходимость вращения векторов. Так как векторы заменяют *синусоидальные величины*, то сложение и вычитание возможно заменить сложением или вычитанием *векторов*.

Итак, переменная синусоидальная величина обладает свойствами:

- переменная синусоидальная величина может быть однозначно представлена вектором;
- сложение (вычитание) синусоидальных величин можно заменить сложением (вычитанием) векторов.

Кроме сложения и вычитания синусоидальные величины приходится делить и умножать. И здесь на помощь приходят комплексные числа. Комплексное число на плоскости может быть представлено вектором, длина которого равна модулю комплексного числа, а угол наклона — аргументу. В электротехнике в отличие от математики мнимая единица обозначается буквой j. То есть комплексное число $A = a + j \cdot b$ можно представить вектором, где $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа, $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ — аргумент комплексного числа. *Комплексное число* однозначно представлено *вектором*, а определенному вектору соответствует определенное комплексное число. Таким образом, если переменная синусоидальная величина может быть представлена *вектором*, а определенному вектору соответствует определенное комплексное число, то *переменная синусоидальная величина может быть представлена комплексным числом.* Такие величины как напряжение и ток, сопротивление и проводимость, мощность, выражаются комплексными числами.

Построение векторной диаграммы заключается в том, что на декартовой плоскости из начала координат проводят вектор, длина которого равна амплитудному значению переменной величины. Данный вектор вращается против часовой стрелки (это направление вращения принято за положительное) с угловой частотой, равной ω. Угол, который составляет вектор с осью Ox, равен начальной фазе.

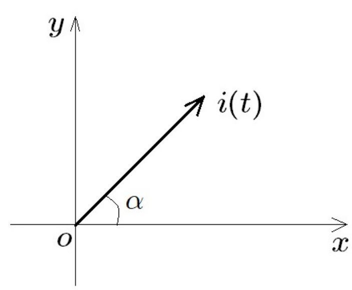


Рисунок 12.10 — Векторная диаграмма

Тогда любому из рассматриваемых переменных токов можно сопоставить комплексное число в виде $i(t) = I_m e^{i(\omega t + \alpha)}$, которое, в свою очередь, можно представить в виде вектора на плоскости.

Таким образом, ток $i_3(t)$ можно представить в виде суммы комплексных чисел:

$$i_3(t) = I_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + I_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)},$$

которой, в свою очередь, можно сопоставить векторную диаграмму:

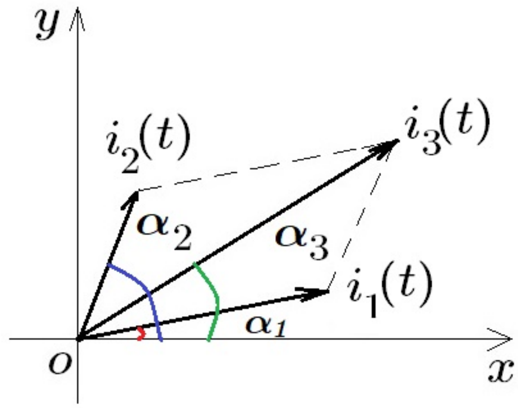


Рисунок 12.11 — Векторная диаграмма для тока $i_3(t)$

На рисунке изображены начальные положения векторов тока при $t = 0$. При вращении этих векторов с одинаковой угловой скоростью ω их взаимное расположение не меняется, и угол сдвига фаз между ними остается равным $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = const$. Таким образом, построение векторной диаграммы, связанной с геометрическим представлением комплексных чисел, позволяет определить значения I_3 и α_3 по формулам:

$$I_3 = \sqrt{(I_1 \cos\alpha_1 + I_2 \cos\alpha_2)^2 + (I_1 \sin\alpha_1 + I_2 \sin\alpha_2)^2} =$$

$$= \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)};$$

$$\alpha_3 = \mathrm{arctg}\frac{I_1 \sin\alpha_1 + I_2 \sin\alpha_2}{I_1 \cos\alpha_1 + I_2 \cos\alpha_2}.$$

Таким образом, получаем ответ:

$$I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)};$$

$$\alpha_3 = \mathrm{arctg}\frac{I_1 \sin\alpha_1 + I_2 \sin\alpha_2}{I_1 \cos\alpha_1 + I_2 \cos\alpha_2}.$$

Напряжение и ток

Имеется уравнение

$$u = U_{\text{М}} \cdot \sin(\omega t + \psi).$$

В электротехнике за длину вектора берется не максимальное, а *действующее значение*. Оно обозначается буквой U без индекса и вычисляется путем деления максимального Uм значения напряжения на $\sqrt{2}$: $U = \frac{U_{\text{М}}}{\sqrt{2}}$.

Синусоидальная величина, выраженная комплексным числом, называется *комплексом* и обозначается прописной буквой с точкой наверху: $\dot{U}$. Комплекс напряжения можно написать в трех формах:

$$\dot{U} = U_{\text{a}} + jU_{\text{p}} \quad \text{— в алгебраической,}$$

$$\dot{U} = U(\cos\psi + j\sin\psi) \quad \text{— в тригонометрической,}$$

$$\dot{U} = Ue^{j\psi} \quad \text{— в показательной.}$$

Таким образом, в комплексе напряжения модуль равен действующему значению, аргумент — начальному фазовому углу, активная составляющая — вещественной части комплекса напряжения, реактивная — мнимой части.

Аналогично для тока:

$$i = I_{\text{М}} \cdot \sin(\omega t + \psi), \qquad I = \frac{I_{\text{М}}}{\sqrt{2}};$$

$$\dot{I} = I_{\text{a}} + jI_{\text{p}} \quad \text{— в алгебраической,}$$

$$\dot{I} = I(\cos\psi + j\sin\psi) \quad \text{— в тригонометрической,}$$

$$\dot{I} = Ie^{j\psi} \quad \text{— в показательной.}$$

Пример. Дан ток в комплексной форме $\dot{I} = 3 - j \cdot 4$. Написать уравнение тока.

Решение. Чтобы написать уравнение тока, надо знать амплитуду и начальный фазовый угол. Поэтому надо найти модуль — действующее значение и аргумент — начальный фазовый угол заданного комплекса тока.

$$I = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\ A \quad \text{— действующее значение;}$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53^\circ;$$

$$I_{\text{М}} = I \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7,07\ A;$$

$$i = I_{\text{М}} \sin(\omega t + \psi) = 7,07 \sin(\omega t - 53^\circ).$$

Сопротивление

Имеется цепь:

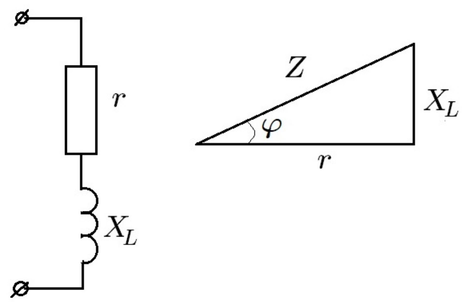


Рисунок 12.12 — Схема электрической цепи с лампой накаливания и сопротивлением

Здесь r — активное сопротивление (лампа накаливания), X_L — индуктивное сопротивление (катушка), z — общее сопротивление цепи, называемое полным. Сопротивления r, X_L, z образуют прямоугольный треугольник сопротивления, угол φ — угол сдвига фаз. Сопротивления не являются синусоидальными величинами, однако отрезок z может быть выражен *комплексным числом*, считая, что отрезок r откладывается по действительной оси, а отрезок X_L — по мнимой оси. Сопротивление в комплексной форме обозначается буквой Z. Комплекс сопротивления записывается

$$Z = r + jX_L \quad \text{— в алгебраической форме,}$$

$$Z = z\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \quad \text{— в тригонометрической форме,}$$

$$Z = z \cdot e^{j\cdot\varphi} \quad \text{— в показательной форме,}$$

где модуль $z = \sqrt{r^2 + X_L^2}$, аргумент $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_L}{r}$. Таким образом, в комплексе сопротивления модуль равен полному сопротивлению, а аргумент — сдвигу фаз.

Мощность

Комплекс мощности получится, если комплекс напряжения умножить на сопряженный комплекс тока

$$\widetilde{S} = \dot{U} \cdot I^*,$$

где $\widetilde{S}$— комплекс мощности, $\dot{U}$— комплекс напряжения, I^* — сопряженный комплекс тока. После умножения получим комплексное число, у которого вещественная часть равна активной мощности, а мнимая часть — реактивной мощности

$$\widetilde{S} = P + jQ,$$

где $P = Re\widetilde{S}$— активная мощность, $Q = Im\widetilde{S}$ — реактивная мощность.

Пример. Даны комплекс тока $\dot{I} = 10{,}4 + j \cdot 9{,}35$ и комплекс напряжения $\dot{U} = 43{,}5 + j \cdot 55{,}6$. Определите активную мощность P и реактивную мощность Q.

Решение. Запишем показательную форму комплекса напряжения и комплекса тока

$$U = \sqrt{43{,}5^2 + 55{,}6^2} \approx 70,6\ B,$$

$$\psi_1 = \mathrm{arctg}\frac{55{,}6}{43{,}5} \approx 52^\circ, \quad \dot{U} = 70{,}6 \cdot e^{j52^\circ};$$

$$I = \sqrt{10{,}4^2 + 9{,}35^2} \approx 14\ A,$$

$$\psi_2 = \mathrm{arctg}\frac{9{,}35}{10{,}4} \approx 42^\circ, \quad \dot{I} = 14 \cdot e^{j42^\circ}.$$

Определим сопряженный комплекс тока: $I^* = 14 \cdot e^{-j42^\circ}$. Тогда

$$\widetilde{S} = \dot{U} \cdot I^* = 70{,}6 \cdot e^{j52^\circ} \cdot 14 \cdot e^{-j42^\circ} \approx$$

$$\approx 988 \cdot e^{j10^\circ} = 988 \cdot (\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ) \approx 973{,}6 + 172 \cdot j.$$

Итак, активная мощность $P = Re\widetilde{S} \approx 973{,}6$ Вт и реактивная мощность $Q = Im\widetilde{S} \approx 172$ Вт.

13. Физические и геометрические приложения производной

При решении различных задач геометрии, механики, физики и других отраслей знания возникла необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции $y = f(x)$ получить новую функцию, которую называют *производной функцией* (или просто *производной*) данной функции $f(x)$ и обозначают символом $f'(x)$.

Физический смысл производной

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент являются физическими величинами, то производная $f'(x_0)$ — скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0. Например,

- если $S = S(t)$ — расстояние, пройденное телом за время t, то ее производная $S'(t_0) = v(t_0)$ — скорость в момент времени t_0;
- если $Q = Q(t)$ — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в момент времени t, то ее производная $Q'(t_0) = I(t_0)$ — скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, то есть сила тока в момент времени t_0.

Пример. 1) Зависимость пути от времени выражается законом $S(t) = t \cdot \ln(t+1)$. Найдите скорость движения в конце второй секунды.

Решение. Найдем производную пути по времени

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = (t \cdot \ln(t+1))' = t' \cdot \ln(t+1) + t \cdot (\ln(t+1))' =$$

$$= \ln(t+1) + \frac{t}{t+1}.$$

Вычислим значение производной при $t = 2$

$$v(2) = \ln 3 + \frac{2}{3} \approx 1{,}77 \quad \text{м/с}.$$

2) Постоянный ток определяется как количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Определите ток в конце пятой секунды, если известно, что количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$ задано зависимостью $Q(t) = 2t^2 + 3t + 1$.

Решение. Мгновенный ток в момент времени t определяется формулой $I(t) = Q'(t)$. Вычислим производную $Q'(t) = 4t + 3$. Тогда $I(5) = Q'(5) = 23$ А.

Физические задачи на оптимизацию

При исследовании физических систем часто возникают вопросы

– об оптимальной конфигурации;

– об оптимальном режиме работы;

– об экстремальных значениях величин, характеризующих систему.

Понятие экстремума. Пусть дана функция $y = f(x)$ и точка $x = x_0$ — некоторая внутренняя точка области определения $D(y)$. Функция имеет в точке $x = x_0$ *максимум*, если значение функции в этой точке является наибольшим по сравнению со значениями функции в соседних точках, то есть $f(x_0) \geq f(x)$.

Функция имеет в точке $x = x_0$ *минимум*, если значение функции в этой точке является наименьшим по сравнению со значениями функции в соседних точках, то есть $f(x_0) \leq f(x)$.

Функция имеет в точке $x = x_0$ *экстремум*, если она имеет в этой точке максимум (max) или минимум (min).

Необходимое и достаточное условие существования экстремума. Для того, чтобы непрерывная в точке x_0 и ее окрестности функция $y = f(x)$ имела в этой точке экстремум, необходимо чтобы первая производная функции $y'(x)$ в этой точке

– либо обращалась в ноль $y'(x_0) = 0$,

– либо в бесконечность $y'(x) = \infty$,

– или не существовала $y'(x)\ \nexists$.

Точки из области определения функции, в которых $y'(x_0) = 0$, $y'(x) = \infty$, $y'(x)\ \nexists$, называются *критическими*. Достаточно, чтобы при переходе через x_0 первая производная функции $y'(x)$ меняла свой знак, а именно, если при переходе через критическую точку $x = x_0$ в положительном направлении знак $y'(x)$ меняется с “+” на “−”, то точка $x = x_0$ есть **точка максимума**. Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ в положительном направлении знак $y'(x)$ меняется с “−” на “+”, то точка $x = x_0$ есть **точка минимума**.

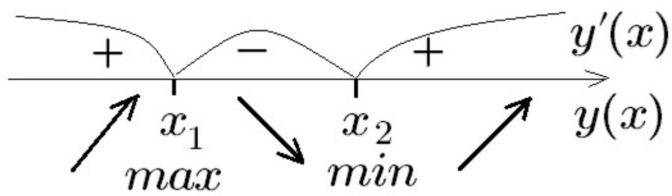


Рисунок 13.1 — Достаточное условие экстремума

Если знак производной при переходе через критическую точку не меняется, то экстремума в этой точке нет.

Пример. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-2; 4]$. На рисунке приведен график ее **производной**. Укажите абсциссу точки графика функции $y = f(x)$, в которой она принимает наименьшее значение.

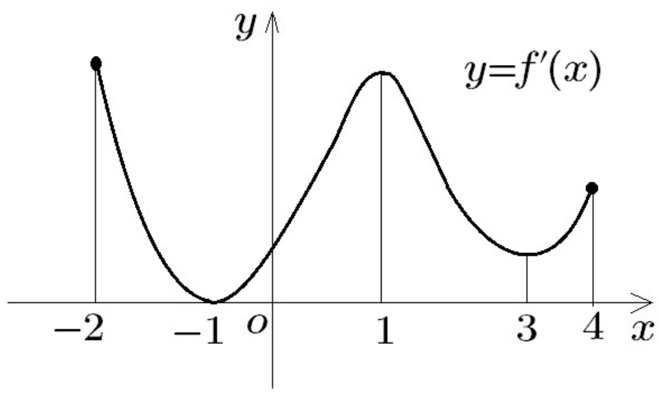


Рисунок 13.2 — График производной $y = f(x)$

Решение. Как следует из рисунка, $f'(-1) = 0$, но $f'(x)$ не меняет знак при переходе через эту точку. Поэтому критическая точка $x_0 = -1$ не является точкой экстремума. На отрезке $[-2; 4]$, за исключением точки $x = -1$, производная функции $f'(x) > 0$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает. Тогда наименьшее и наибольшее значения функции достигаются на концах этого отрезка. Тогда абсцисса точки графика функции $y = f(x)$, в которой она принимает наименьшее значение, равна $x_{min} = -2$.

Ответ: $x_{min} = -2$.

Второе достаточное условие экстремума. В ряде физических задач, связанных с исследованием функции на экстремум, удобно пользоваться вторым достаточным условием экстремума.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка в окрестности точки $x = x_0$. Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 есть точка экстремума функции. При этом

– если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума;

– если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

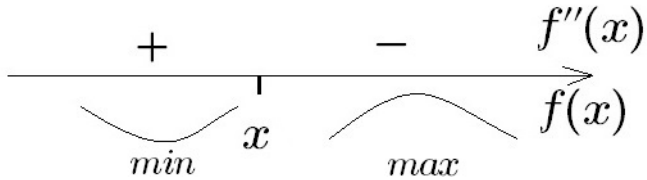


Рисунок 13.3 — Второе достаточное условие экстремума

Пример. Дождевая капля с начальной массой m_0 падает под действием силы тяжести. По мере падения капля испаряется так, что ее масса уменьшается со временем по линейному закону $m(t) = m_0 - bt$, где b — скорость испарения. Определите момент времени, при котором кинетическая энергия капли будет наибольшей.

Решение. Кинетическая энергия тела, падающего из состояния покоя, выражается формулой

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(gt)^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2}.$$

Подставляя в эту формулу закон изменения массы капли, имеем

$$E(t) = \frac{(m_0 - bt)g^2t^2}{2} = \frac{m_0g^2}{2}t^2 - \frac{bg^2}{2}t^3.$$

Найдем критические точки:

$$E'(t) = 0; \quad E' = m_0g^2t - \frac{3}{2}bg^2t^2 = 0;$$

$$t\left(m_0 - \frac{3}{2}bt\right) = 0; \quad t_1 = 0 \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{2m_0}{3b}.$$

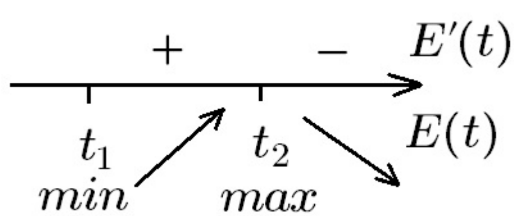


Рисунок 13.4 — Знаковая кривая для производной

$$t_1 = 0 \quad — \min; \quad t_2 = \frac{2m_0}{3b} \quad — \max.$$

Следовательно, капля будет иметь наибольшую кинетическую энергию в момент времени $t = \frac{2m_0}{3b}$

$$E_{max}\left(t_{max}\right) = E\left(\frac{2m_0}{3b}\right) = \left(m_0 - b \cdot \frac{2m_0}{3b}\right) \cdot \frac{g^2\left(\frac{2m_0}{3b}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}m_0 \cdot \frac{g^2}{2} \cdot \frac{4m_0^2}{9b^2} = \frac{2}{27} \cdot \frac{m_0^3 \cdot g^2}{b^2}.$$

Ответ: $t_{max} = \frac{2m_0}{3b}, \quad E_{max} = \frac{2m_0^3 g^2}{27b^2}.$

Заключение

Итак, прикладные задачи физики, техники сводятся к построению математических моделей.

Математическое моделирование заключается в том, что мы стремимся придать математическую форму свободно протекающему явлению и исследовать поведение процесса в зависимости от того или иного параметра.

Аналитическое решение (если оно возможно) часто обладает преимуществом, так как оно представляет собой функцию нескольких независимых переменных. Фиксируя все переменные кроме одной и применяя математический аппарат, мы исследуем функциональную зависимость.

Асимптотические формулы пригодны для качественного описания явления. В свою очередь, численное решение задачи дает большой объем информации для последующего анализа.

Нужно помнить, что цель расчетов — это понимание, а не числа. Всем результатам вычислений нужно придать смысл в терминах области поставленной задачи. Причем, расчеты на основе адекватной модели должны выявить тенденцию изменения в среднем и возможности прогнозирования.

Любое исследование должно стоять на фундаменте научного опыта. В науке нет "проторенных дорог". Какую дорогу выбрать — проторенную или тернистую, но свою, поможет решить характер. Если человек склонен быть исследователем, любит узнавать что-то новое, не боится экспериментировать и, самое главное, способен делать выводы из опыта, он безусловно выберет собственный путь. Такие люди нужны человечеству для эволюции.

Список рекомендуемой литературы

1. Тростников, В. Н. Человек и информация / В. Н. Тростников. — Издательство “Наука”, 1970.— 187 с.

2. Зельдович, Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике / Я. Б. Зельдович — М.: Физматлит, 2010. — 519 с.

3. Зельдович, Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 592 с.

4. Литвак, Н. Кому нужна математика? Понятная книга о том, как устроен цифровой мир / Н. Литвак, А. Райгородский — М.: Издательство “Манн, Иванов и Фербер”, 2017. — 465 с.

5. Прошкин, С. С. Математика для решения физических задач: учебное пособие / С. С. Прошкин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-1670-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/211754 (дата обращения: 01.03.2024) — Режим доступа: для авториз. пользователей.

6. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 12-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2024. — 492 с. — ISBN 978-5-507-47523-0. — Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/386402 (дата обращения: 01.03.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.