Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет систем управлени
Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А. А. Мицель

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания
по выполнению практических работ
для студентов технических специальностей

2024

УДК 519.6(076)
ББК 22.19я73
М 70

Рецензент:

Катаев М.Ю., д.т.н., профессор кафедры РЭТЭМ ТУСУР

Мицель А. А.
Методы прикладной математики: методические указания по выполнению практических работ для студентов технических специальностей. – Томск: ТУСУР, 2024. – 78 с.

В пособии приводится описание практических занятий по методам прикладной математики. Вкратце изложена теория численных методов. Каждый метод иллюстрируется решением примеров. Даны задания на ЭВМ, задачи для самостоятельного решения, примеры алгоритмов.

Для студентов, обучающихся по техническим специальностям. Представляет интерес для инженеров, аспирантов, преподавателей, учёных, занимающихся вопросами численного моделирования и решения прикладных задач.

Методические указания утверждены на заседании кафедры РЭТЭМ

№ 87 от 28 февраля 2024 г.

УДК 519.6(076)
ББК 22.19я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При использовании ЭВМ численные методы выступают как мощное математическое средство решения практических задач. Современные успехи в решении таких важных проблем, как атомные, космические, экономические не были бы возможны без применения ЭВМ и численных методов. По оценкам ученых эффект, достигаемый за счет совершенствования численных методов, составляет 40% общего эффекта, достигаемого за счет повышения производительности ЭВМ [1].

Численные методы – это методы, позволяющие при помощи алгоритмов, имеющих конечное число итераций, решать различные математические задачи (заданные в аналитическом виде).

Проведение сложных математических расчетов требуется во многих отраслях науки и техники. При этом объем этих расчетов таков, что вручную за разумное время их выполнить невозможно. Примеры – распределение нагрузки между подключенными к электростанции объектами (оно должно происходить практически мгновенно при изменении потребляемой мощности), вычисление траектории космических тел, расчет движений земной коры в геоинформационных системах (а это задачи нефтяной, газовой и других отраслей) и многое другое. Для этого и внедряются в промышленность и науку вычислительные системы и пишутся специализированные пакеты для проведения численных расчетов. Распространение же ЭВМ ставит, в свою очередь, новые математические задачи, не существовавшие ранее – распределение Internet-трафика, обсчет трехмерных моделей в графических редакторах и играх и т. п.

Таким образом, знание численных методов необходимо инженеру, область деятельности которого связана с программным обеспечением вычислительной техники и, в особенности, автоматизированных систем.

В предлагаемом пособии рассмотрены в примерах и задачах основные численные методы решения задач из следующих разделов вычислительной математики: решение уравнений с одной переменной, решение задач линейной алгебры (решение систем линейных алгебраических уравнений), приближение функций, численное дифференцирование и интегрирование функций, минимизация функции одной перемсенной и минимизация функции многих переменных. В каждом разделе приводятся краткие сведения из теории [2], описываются алгоритмы вычислений и разбираются примеры по каждому из описываемых алгоритмов. В конце каждого раздела приводятся задачи и примеры для самостоятельного решения, а также задания на практические работы. В приложении представлены примеры отчетов по контрольной и лабораторным работам.

ГЛАВА 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 Отделение корней

Решение нелинейных уравнений с одной переменной представляет одну из важнейших задач прикладного анализа.

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде

$$f\left(x\right)=0, \tag{1.1}$$

где $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Всякое число $\xi\in[a,b]$, обращающее функцию $f\left(x\right)$ в нуль, т. е. $f\left(\xi\right)=0$, называется корнем уравнения (1.1). Число ξ называется корнем k-ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в ноль её производные до $(k-1)$ порядка включительно

$$f(\xi) = f'(x) = \ldots = f^{(k-1)}(\xi) = 0.$$

Однократный корень называется простым.

Первый этап численного решения уравнения (1.1) состоит в отделении корней, т. е. в установлении тесных промежутков, содержащих только один корень. Фактически этот этап состоит в нахождении грубого значения корня. Рассмотрим графический способ отделения корня. Для этого строится график функции $f(x)$. Точка пересечения с осью абсцисс и есть искомый корень. Построение графика часто удаётся упростить, если уравнение (1.1) удаётся заменить равносильным ему уравнением $f_1(x) = f_2(x)$ (рис. 1.1).

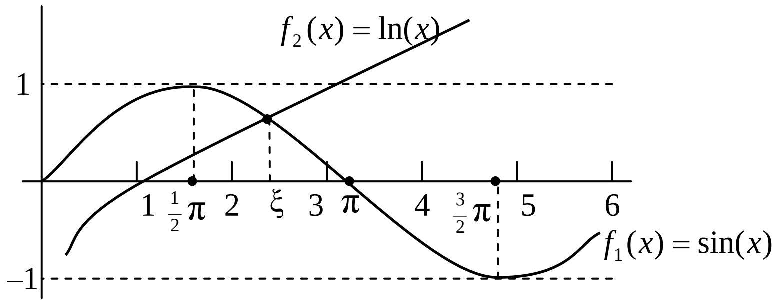


Рис. 1.1 – Графический метод решения уравнения
$f(x) = \ln x - \sin x$

Пример 1.1. $f(x) = \ln x - \sin x;\quad f_1(x) = \ln x;\quad f_2(x) = \sin(x).$

Для нахождения приближённого значения корней с использованием ЭВМ поступают следующим образом. Задают сетку $\{x_i\} : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и вычисляют значения функции $f(x_i) = f_i$.

Если для двух соседних точек выполняется неравенство

$$f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0,$$

то в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ расположен по крайней мере один корень $\xi_m \in [x_i, x_{i+1}]$. Далее, если положить $\xi_m = 1/2(x_i + x_{i+1})$, то точность определения корня ξ_m равна

$$\Delta_m = 1/2(x_{i+1} - x_i).$$

Далее надо убедиться, что на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ существует только один корень.

На втором этапе уточняют значение найденного корня. Для этой цели можно использовать различные методы. Рассмотрим некоторые из них.

1.2 Интервальные методы поиска корней

1.2.1 Метод перебора

Пусть на интервале $\left[a,b\right]$ расположен один корень. Требуется найти ξ с точностью ε. Разобьём $\left[a,b\right]]$ на n равных частей

$$x_i = a + ih; h = \left(b-a\right)/n,\ i = 0,\ldots,n,\ \text{ãäå}\ n = \left(b-a\right)/\varepsilon$$

и вычислим значение функции $f_i = f\left(x_i\right)$. Здесь h – шаг сетки.

Если для двух соседних точек выполняется неравенство $f_i \cdot f_{i+1} < 0$, то полагают $\xi = 1/2\left(x_i + x_{i+1}\right)$. Погрешность составит $\Delta = h/2 = \varepsilon/2$.

1.2.2 Метод дихотомии (метод половинного деления)

Пусть на $\left[a,b\right]$ $f\left(x\right)$ имеется один корень ξ. Зададим точность ε. Вычисляем среднюю точку $c = 1/2\left(a+b\right)$ и значение функции $f\left(c\right)$.

Если $f\left(c\right) \le \varepsilon$, то c – корень.

Если $f\left(c\right) \ge \varepsilon$, то рассматриваем два случая:

если $f\left(a\right) \cdot f\left(c\right) < 0$, то $b = c$ и повторяем процесс деления, либо если $f\left(c\right) \cdot f\left(b\right) < 0$, то $a = c$ и повторяем процесс деления.

Так как за каждую итерацию интервал, где расположен корень, уменьшается в два раза, то через n итераций интервал будет равен

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}\left(b-a\right), \text{ при этом } a_n \le \xi \le b_n.$$

В качестве корня ξ возьмем $\frac{1}{2}\left(b_n + a_n\right)$. Тогда погрешность определения корня будет равна $\left(b_n - a_n\right)/2$. Если выполняется условие

$$\left(b_n - a_n\right)/2 < \varepsilon, \tag{1.2}$$

то процесс поиска заканчивается и $\xi = \frac{1}{2}\left(b_n + a_n\right)$.

Метод дихотомии иллюстрирует рис. 1.2. Сходимость метода линейная с коэффициентом $\alpha = 0.5$.

Пример 1.2. Методом половинного деления уточнить корень уравнения $f\left(x\right) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ до 2 верных знаков, лежащий на отрезке $[0,1]$.

Решение: Последовательно имеем

$$f\left(0\right) = -1;\ f\left(1\right) = 1;\ f\left(0\right) \cdot f\left(1\right) < 0;$$

$$c = 0.5;$$
$$f(0.5) = 0.062 + 0.25 - 0.5 - 1 = -1.19;\ \ f(0.5)\cdot f(1) < 0;$$

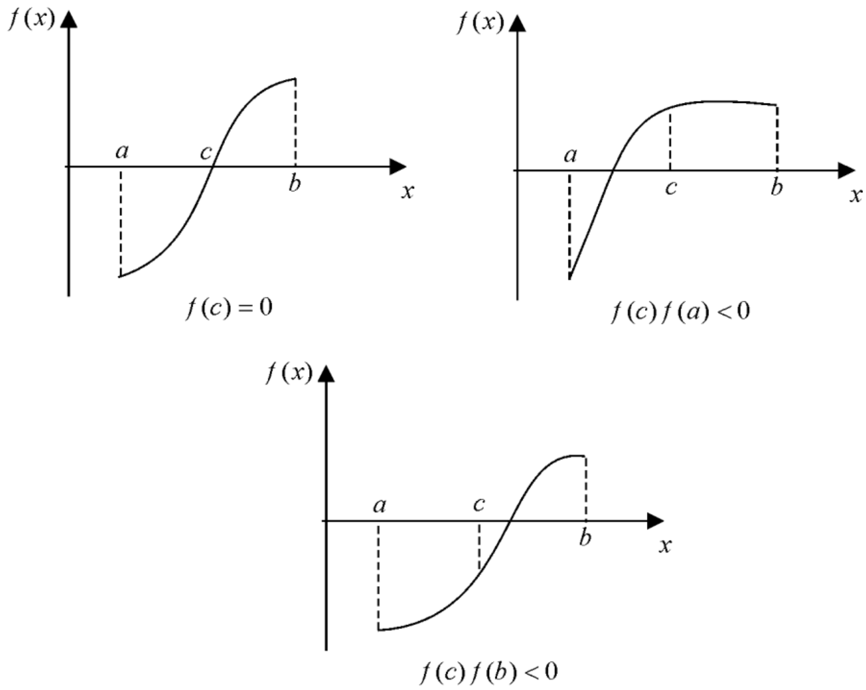


Рис. 1.2. Графическая иллюстрация метода дихотомии

С учетом того, что корень лежит в интервале $[0.5, 1]$, заданная точность до 2 верных знаков означает, что погрешность корня должна быть не более 0.01 (в широком смысле), т. е. $\varepsilon = 0.01$.

Проверяем условие (2) $\Delta = 1/2(1 - 0.5) = 0.25 > \varepsilon$, следовательно продолжаем процесс поиска корня: $c = 0.75$;

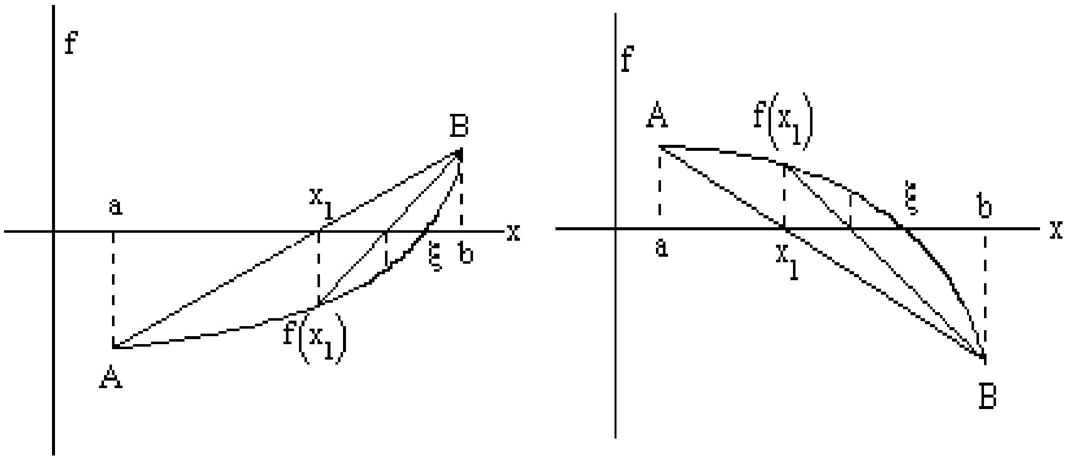
$$f(0.75) = 0.316 + 0.844 - 0.75 - 1 = -0.59;\ f(0.75)\cdot f(1) < 0;$$
$$\Delta = 1/2(1 - 0.75) = 0.125 > \varepsilon;\ c = 0.875;$$
$$f(0.875) = 0.59 + 1.34 - 0.88 - 1 = 0.05;$$
$$f(0.75)\cdot f(0.875) < 0;$$
$$\Delta = 1/2(0.875 - 0.75) = 0.063 > \varepsilon;\ c = 0.812;$$
$$f(0.812) = 0.435 + 1.071 - 0.812 - 1 = -0.306;$$
$$f(0.812)\cdot f(0.875) < 0;\ \Delta = 1/2(0.875 - 0.812) = 0.031 > \varepsilon;$$
$$c = 0.8435 \approx 0.844;$$
$$f(0.844) = 0.507 + 1.202 - 0.844 - 1 = -0.135;$$
$$f(0.844)\cdot f(0.875) < 0;\ \Delta = 1/2(0.875 - 0.844) = 0.016 > \varepsilon;$$

$$c = 0.859;$$
$$f(0.859) = 0.544 + 1.268 - 0.859 - 1 = -0.047;$$
$$f(0.859) \cdot f(0.875) < 0;\ \Delta = 1/2(0.875 - 0.859) = 0.008 < \varepsilon.$$
Таким образом, в качестве корня можно принять:
$$\xi = 1/2(0.859 + 0.875) = 0.867 \approx 0.87.$$

1.2.3 Метод хорд

Метод хорд является более быстрым методом поиска корня. Суть его иллюстрируется на рисунках 1.3 и 1.4.

$f''(x) > 0$ $\qquad\qquad$ $f''(x) < 0$



а $\qquad\qquad$ *б*

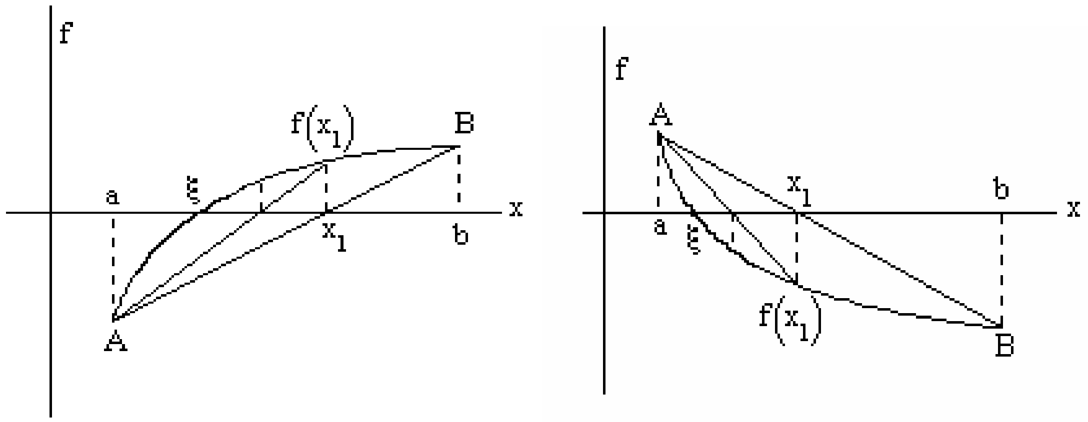
Рис. 1.3 – Графическая иллюстрация метода хорд
(конец *b* неподвижен)

Пусть на интервале $[a,b]$ имеется корень, т. е. $f(a)\,f(b) < 0$.

Находим точку x_1 по формуле $x_1 = a - \dfrac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$.

Если выполняется условие
$$f(x_n)\,f(b) < 0;\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

$f''(x) < 0$ $\qquad\qquad$ $f''(x) > 0$



а $\qquad\qquad$ *б*

Рис. 1.4 – Графическая иллюстрация метода хорд
(конец *а* неподвижен)

то итерационный процесс строится по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}(b - x_{n-1});\quad x_0 = a. \tag{1.4}$$

Здесь *b*-неподвижный конец (см. рис. 1.5). Если выполняется условие

$$f(x_n)\, f(a) < 0;\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

то итерационный процесс строится по формуле:

$$x_n = a - \frac{f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)}(x_{n-1} - a);\quad x_0 = b. \tag{1.6}$$

Здесь *a* – неподвижный конец (см. рис. 1.6). На практике может встретиться ситуация, когда первая или вторая производная функции на интервале $[a, b]$ меняют знак. В такой ситуации попеременно будут выполняться (1.3) и (1.5). Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть сначала было выполнено условие (1.3). Итерационный процесс строим по формуле (1.4). Предположим, что при некотором $n = p$ условие (1.3) не выполнено. В этом случае переходим к формуле (1.6), в которой $a = x_{p-1};\ x_0 = x_p$. Далее, если при некотором $n = m$ будет нарушено условие (1.5) (в котором теперь $a = x_{p-1}$), то переходим опять к формуле (1.4), где полагаем $b = x_m;\ x_0 = x_{m-1}$.

Условие окончания процесса $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, где ε – заданная точность. Значение корня равно $\xi \approx x_n$.

Сходимость метода хорд линейная с коэффициентом $\alpha = 1 - \dfrac{m_1}{M_1}$, где $m_1 = \min\left|f'(x)\right|;\ M_1 = \max\left|f'(x)\right|$.

Пример 1.3.
Найти методом хорд положительный корень с точностью до 0.002 уравнения $f\left(x\right) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$ на интервале $\left[1, 2\right]$.

Решение. Вычисляем значения функции

$$f\left(1\right) = -0.6 < 0,\ f\left(2\right) = 5.6 > 0.$$

Таким образом, $\xi \in [1, 2]$.

Вычисляем

$$x_1 = a - \frac{f\left(a\right)}{f\left(b\right) - f\left(a\right)}\left(b - a\right) = 1 - \frac{-0.6 \cdot 2}{5.6 - (-0.6)} \approx 1.194.$$

$$f(1.194) = -0.022.$$

Так как $f(1.194) \cdot f(2) < 0,$ то для вычисления приближений корня используем формулу (1.4).

$$x_2 = 1.194 - \frac{-0.022}{5.6 - (-0.022)}\left(2 - 1.194\right) = 1.197.$$

Проверяем условие $\left|1.197 - 1.194\right| = 0.003 > \varepsilon.$

Продолжаем процесс.

$$f(1.197) = -0.011;$$

$$x_2 = 1.197 - \frac{-0.011}{5.6 - (-0.011)}\left(2 - 1.197\right) = 1.199;$$

$$\left|1.199 - 1.197\right| = 0.002 = \varepsilon.$$

Процесс можно закончить.
Ответ: $\xi = 1.199$.

1.2.4 Метод золотого сечения

Метод золотого сечения (см. рис. 1.5), так же как и метод дихотомии, относится к интервальным методам (или методам исключения интервалов).

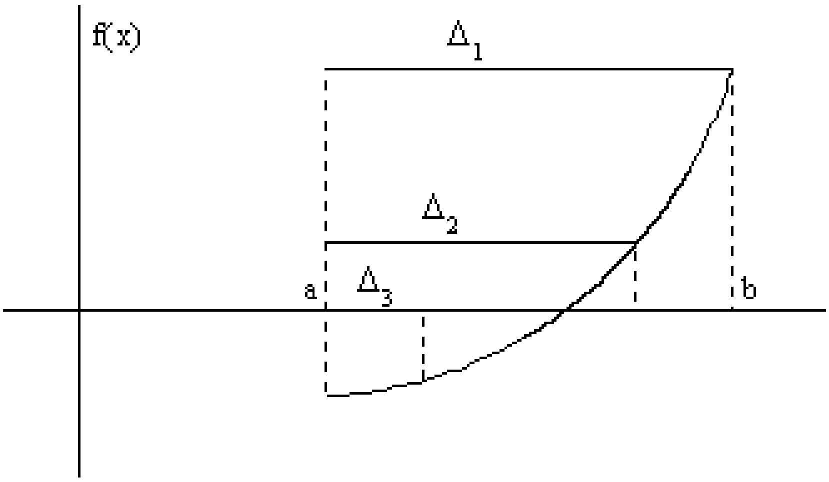


Рис. 1.5 – Графическая иллюстрация метода
золотого сечения

Точки деления интервала выбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение между интервалами:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \ldots = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_{k+2}} = \gamma,$$

где $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ – золотое сечение.

Представим алгоритм поиска нулей следующим образом в форме последовательного выполнения итераций.

Задаем точки $a_1 = a;\ b_1 = b$.

Шаг 1. Определяем координаты золотого сечения:

$$d_1 = a_1 + \Delta_2 = a_1 + \frac{\Delta_1}{\gamma};\ \ \frac{1}{\gamma} = \gamma - 1;$$

$$c_1 = a_1 + \Delta_3 = a_1 + \frac{\Delta_1}{\gamma^2};\ \ \frac{1}{\gamma^2} = (\gamma - 1)^2.$$

Вычисляем точку $x_1 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_1)$.

Шаг 2. Вычисляем значения функции $f(a_1),\ f(c_1), f(d_1),\ \ f(b_1)$ и проверяем условия:

а) если $f(a_1) \cdot f(d_1) < 0$, то $a_2 = a_1;\ b_2 = d_1; \Delta_2 = b_2 - a_2$;

б) если $f(c_1) \cdot f(b_1) < 0$, то $a_2 = c_1;\ b_2 = b_1; \Delta_2 = b_2 - a_1$;

$$d_2 = a_2 + \frac{\Delta_2}{\gamma};$$

$$c_2 = a_2 + \frac{\Delta_2}{\gamma^2}.$$

$x_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$. Если $\Delta_2 < \varepsilon$, то конец, иначе на Шаг 1.

Скорость сходимости линейная с коэффициентом $\alpha = \gamma - 1$.

Пример 1.4. Найти нуль функции $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ на интервале $[0,5;0,6]$ с точностью $\varepsilon = 0.03$ методом золотого сечения.

Решение. Вычисляем интервалы $\Delta_1 = 0,6 - 0,5 = 0,1$. Задаем координаты золотого сечения:

$$a_1 = 0,5;$$

$$c_1 = a_1 + \frac{\Delta_1}{1,618^2} = 0,5382;$$

$$d_1 = a_1 + \frac{\Delta_1}{1,618} = 0,5618;$$

$$b_1 = 0,6.$$

Вычисляем значения функции в точках золотого сечения

$$f(a_1) = -0.351;\ f(c_1) = -0.145;\ f(d_1) = -0,026;\ \ f(b_1) = 0,155.$$

Определяем интервал, в котором расположен корень

$f(c_1) \cdot f(b_1) < 0$, поэтому $a_2 = c_1 = 0,5382;\ b_2 = b_1 = 0,6;$

$$\Delta_2 = b_2 - a_2 = 0,6 - 0,5382 = 0,0618.$$

Проверяем условие останова $\Delta_2 = 0,0618 > \varepsilon$, т. е. точность не достигнута. Вычисляем точки золотого сечения

$$c_2 = a_2 + \frac{\Delta_2}{\gamma^2} = 0.5618;\ d_2 = a_2 + \frac{\Delta_2}{\gamma} = 0.5764.$$

Вычисляем значения функции в точках золотого сечения

$$f(a_2) = -0,145;\ f(c_2) = -0.026;\ f(d_2) = 0.045;\ f(b_2) = 0,155.$$

Определяем интервал, в котором расположен корень

$f(c_2) \cdot f(b_2) < 0$, поэтому $a_3 = c_2 = 0,5618;\ b_3 = b_2 = 0.6;$

$$\Delta_3 = b_3 - a_3 = 0,6 - 0,5618 = 0,0382.$$

Проверяем условие останова $\Delta_3 = 0.0382 > \varepsilon$. Не выполнено.
Продолжаем вычисления.

$$c_3 = a_3 + \frac{\Delta_3}{\gamma^2} = 0,5764;\ d_3 = a_3 + \frac{\Delta_3}{\gamma} = 0.5854;$$

$$f(a_3) = -0,026;\ f(c_3) = 0,045;\ f(d_3) = 0,088;\ f(b_3) = 0,155$$

Определяем интервал, в котором расположен корень

$$f(a_3)\cdot f(d_3) < 0, \text{ поэтому } a_4 = a_3 = 0,5618;\ b_4 = d_3 = 0,5854;$$

$$\Delta_4 = b_4 - a_4 = 0,5854 - 0,5618 = 0,0236.$$

Проверяем условие останова $\Delta_4 = 0,0236 < \varepsilon$. Условие выполнено.
В качестве решения берем

$$\xi = (a_4 + b_4)/2 = (0,5618 + 0,5854)/2 = 0,574.$$

1.3 Итерационные методы поиска корней

1.3.1 Метод Ньютона

Итерационный процесс выполняется по следующей схеме:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(x_{n-1}\right)};\quad n = 1,2,..., \tag{1.7}$$

при этом в качестве x_0 берется либо точка a, либо точка b. Если известна вторая производная $f''(x)$, то точка x_0 выбирается в соответствии со следующим условием:

а) если $f\left(a\right) f''\left(a\right) > 0$, то $x_0 = a$;

б) если $f\left(b\right) f''\left(b\right) > 0$, то $x_0 = b$.

Если $f''(x)$ не известна, то поступают следующим образом. Задают $x_0 = a$ и проводят вычисления x_1 по формуле (1.7). Если x_1 удовлетворяет условию

с) $a \le x_1 \le b$,

то продолжают вычислять приближения $x_2, x_3, x_4, ...x_n$.

Если условие (с) не выполняется, то задают $x_0 = b$ и далее по формуле (1.7) проводят вычисления $x_i,\ i = 1,2,...$ Вычисления заканчивают при выполнении двух условий

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon,\ \left|f(x_n)\right| < \varepsilon_1, \text{ где } \varepsilon, \varepsilon_1 \text{ – заданные числа.}$$

В качестве корня берут $\xi = x_n$.
Геометрическая интерпретация метода Ньютона показана на рис. 1.6

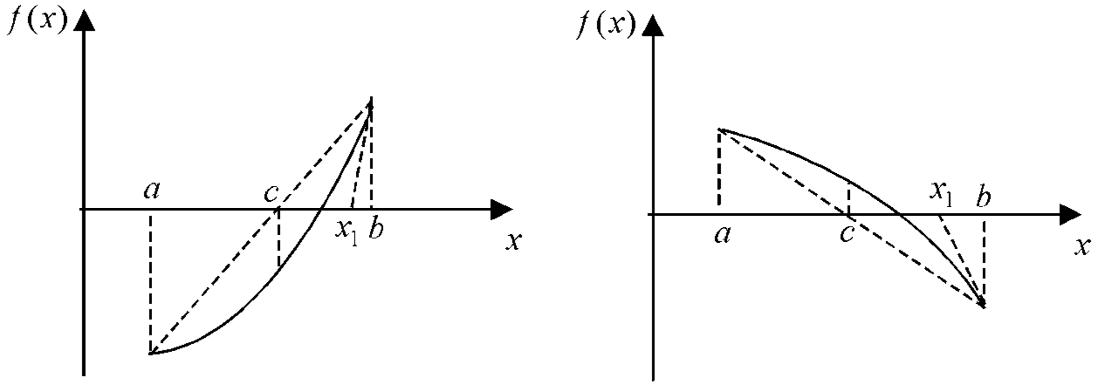
Отметим, что приведенный алгоритм поиска корня может расходиться. Например, для функции $f(x) = \sin x$ на интервале $[\pi/6, 11\pi/6]$ корень $\xi = \pi$ (см. рис. 1.7). Однако алгоритм метода Ньютона для этой функции не пригоден. Действительно, пусть $x_0 = a = \pi/6$. Тогда первое приближение равно:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = -0.054,$$

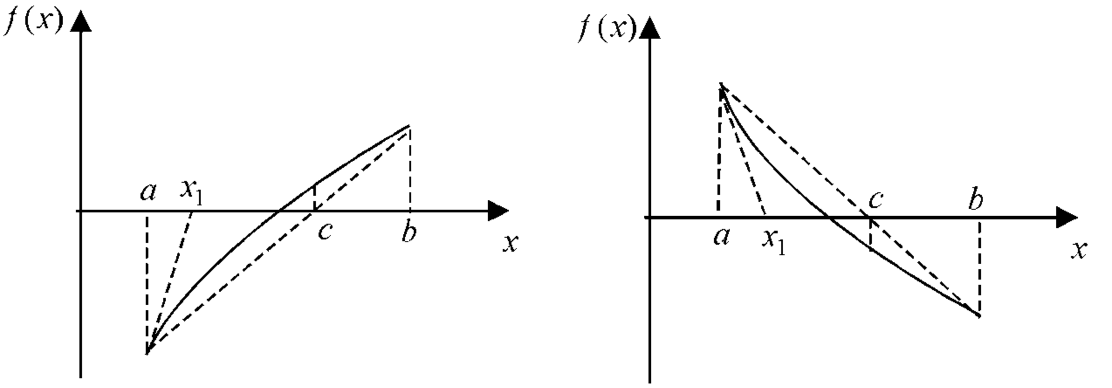
т. е. мы вышли за границы интервала $[\pi/6, 11\pi/6]$. Аналогичная ситуация будет, если за x_0 взять правую границу $x_0 = b = 11\pi/6$.

Скорость сходимости метода Ньютона квадратичная с коэффициентом

$$\alpha = \frac{M_2}{2m_1}, \text{ где } M_2 = \max\left|f''(x)\right|;\ m_1 = \min\left|f'(x)\right|.$$



$f(a)f(c) > 0 \quad x_0 = b$



$f(a)f(c) < 0 \quad x_0 = a$

Рис. 1.6 – Геометрическая интерпретация метода Ньютона

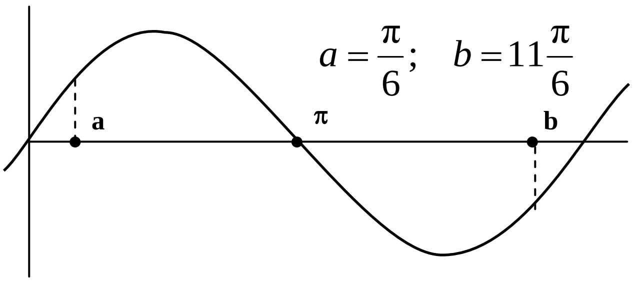


Рис. 1.7 – Пример расходимости алгоритма Ньютона

Пример 1.5.

Найти методом Ньютона нуль функции $f(x)=x\sin x-1$ на интервале $[0,\pi/2]$ с точностью $\varepsilon=0.01$.

Решение: $f'(x)=\sin x+x\cos x$. Возьмем $x_0=\pi/2$ и вычислим первое приближение $x_1=x_0-\dfrac{f(\pi/2)}{f'(\pi/2)}=(\pi/2)-\dfrac{1.571}{1.571}=0.571$. Значение x_1 не выходит за границы интервала $[0,\pi/2]$, поэтому продолжаем вычислять приближения корня по формуле (1.7). Сначала проверим условие завершения процесса $|0.571-1.571|=1>\varepsilon$. Так как условие не выполнено, то продолжаем процесс вычислений корня.

$$x_2=0.571-\frac{f(0.571)}{f'(0.571)}=0.571-\frac{-0.691}{1.021}=1.248;$$

$$|1.248-0.571|=0.677>\varepsilon;$$

$$x_3=1.248-\frac{f(1.248)}{f'(1.248)}=1.248-\frac{0.184}{1.344}=1.111;$$

$$|1.111-1.248|=0.137>\varepsilon;$$

$$x_4=1.111-\frac{f(1.111)}{f'(1.111)}=1.111-\frac{-0.004}{1.389}=1.114;$$

$$|1.114-1.111|=0.003<\varepsilon;$$

Проверяем также условие $|f(1.114)|=0.0002<\varepsilon$.

Ответ: $\xi=1.11$.

1.3.2 Метод итераций

Одним из наиболее эффективных способов численного решения уравнений является метод итерации. Сущность этого метода заключается в замене исходного уравнения $f(x)=0$ на эквивалентное

$$x = \varphi(x). \tag{1.8}$$

Итерационный процесс имеет вид

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.9}$$

Останов процесса осуществляется по критерию

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon,$$

где ε – заданная точность; $q = \max|\varphi'(x)| < 1$.

Сходимость метода итерации линейная с коэффициентом сходимости $\alpha = q$.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом (см. рис. 1.8). Построим на плоскости xOy графики функции $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (1.8) является абсциссой точки пересечения M кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$.

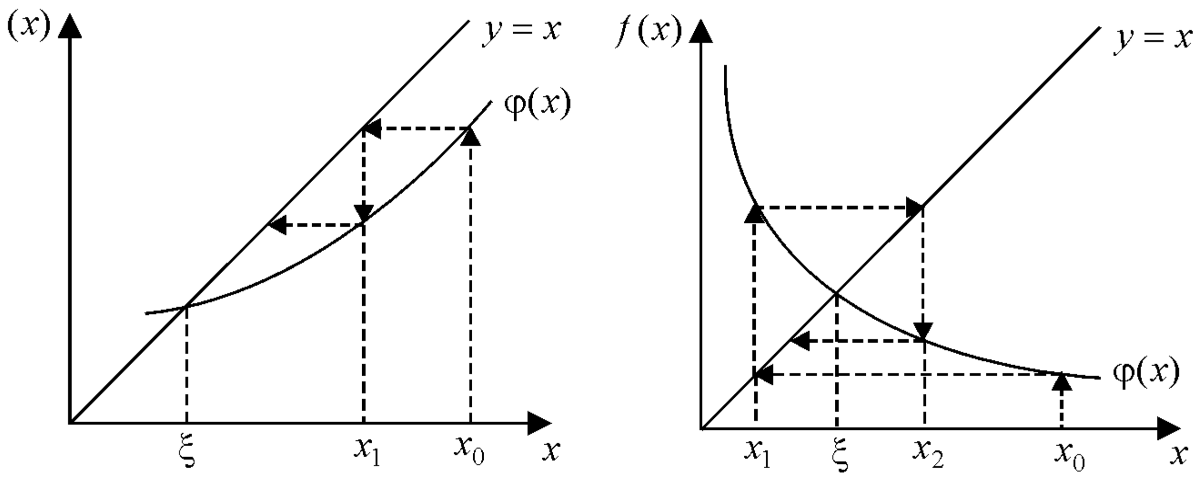


Рис. 1.8 – Сходящийся итерационный процесс ($|\varphi'(x)| < 1$)

Отправляясь от некоторой точки $A_0[x_0; \varphi(x_0)]$, строим ломанную линию A_0 B_1 $A_1 B_2$ A_2 … («лестница»), звенья которой попеременно параллельны оси Ox и оси Oy, вершины A_0, A_1, A_2… лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины B_1, B_2, B_3, ... лежат на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения $x_1, x_2, \ldots$ корня ξ.

Возможен также другой вид ломанной A_0, B_1, A_1, B_2, A_2,… («спираль»). Легко сообразить, что решение в виде «лестницы» получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а решение в виде «спирали», если $\varphi'(x)$ отрицательна.

На рис. 1.9 кривая $y = \varphi(x)$ в окрестности корня ξ – пологая, т. е. $|\varphi'(x)| < 1$, и процесс итерации сходится. Однако если рассмотреть случай $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации будет расходиться (рис. 1.9). Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

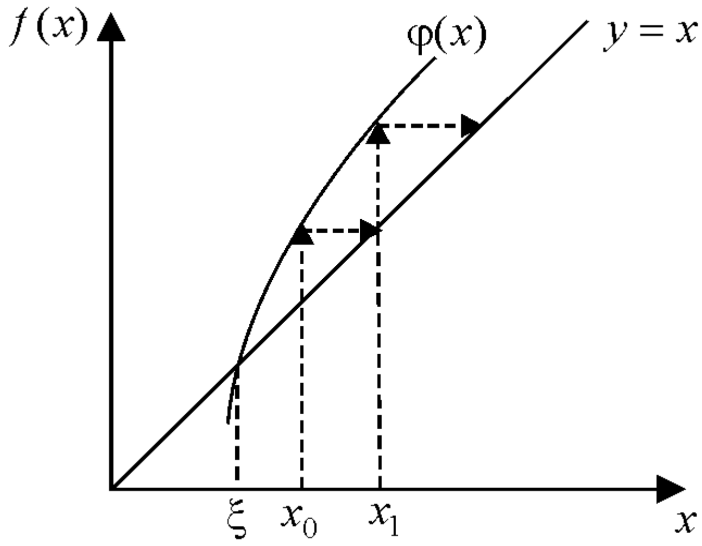


Рис. 1.9 – Расходящийся итерационный процесс $(|\varphi'(x)|>1)$

Теорема: Пусть функция $\phi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем все ее значения $\phi(x)\in[a,b]$, и пусть $|\varphi'(x)|\le q<1$ при $x\in[a,b]$. Тогда процесс итерации $x_n=\varphi(x_{n-1})$ сходится независимо от начального значения $x_0\in[a,b]$ и предельное значение $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}x_n$ является единственным корнем уравнения $x=\varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим способ задания функции $\phi(x)$. Перепишем (1.8) в форме

$$x=x-\lambda\cdot f(x), \tag{1.10}$$

где $\lambda=1/M_1,\ M_1=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$.

Таким образом, из (1.10) имеем $\varphi(x)=x-\lambda\cdot f(x)$. Если $f'(x)<0$, то $\varphi(x)=x+\lambda\cdot f(x)$.

Пример 1.6.

Найти методом итерации нуль функции $f(x)=x+\ln x$ на интервале $[0.1,0.7]$ с точностью $\delta=0.01$.

Решение. $\varphi(x)=x-\lambda(x+\ln x);\ \lambda=1/M_1;$

$$M_1=\max|f'(x)|=\max\left|1+\frac{1}{x}\right|=11.$$

В результате получим

$$\varphi(x) = x - \frac{x + \ln x}{11} = x - 0.0909(x + \ln x).$$

Проверим условие сходимости

$$|\varphi'(x)| = 1 - 0.0909(1 + \frac{1}{x}); \ \max|\varphi'(x)| = 0.78 < 1,$$

следовательно, процесс будет сходиться. Вычислим параметр точности $\varepsilon = \frac{1-q}{q}\delta \approx 0.003$.

Возьмем $x_0 = 0.7$ и вычислим x_1 и x_2.

$$x_1 = 0.7 - 0.0909(0.7 - 0.3567) \approx 0.6688;$$

$$x_2 = 0.6688 - 0.0909(0.6688 - 0.4023) = 0.6446.$$

Проверим условие останова $|x_2 - x_1| = 0.024 > \varepsilon$.

Продолжаем вычисления дальше

$x_3 = 0.6446 - 0.0909(0.6446 - 0.4391) = 0.6259;$

$|x_3 - x_2| = 0.019 > \varepsilon;$

$x_4 = 0.6259 - 0.0909(0.6259 - 0.4686) = 0.6116;$

$|x_4 - x_3| = 0.014 > \varepsilon;$

$x_5 = 0.6116 - 0.0909(0.6116 - 0.4917) = 0.6001;$

$|x_5 - x_4| = 0.011 > \varepsilon;$

$x_6 = 0.6001 - 0.0909(0.6001 - 0.5106) = 0.5920;$

$|x_6 - x_5| = 0.008 > \varepsilon;$

$x_7 = 0.5920 - 0.0909(0.5920 - 0.5242) = 0.5858;$

$x_8 = 0.5858 - 0.0909(0.5858 - 0.5348) = 0.5812;$

$x_9 = 0.5812 - 0.0909(0.5812 - 0.5427) = 0.5777;$

$x_{10} = 0.5777 - 0.0909(0.5777 - 0.5487) = 0.5751;$

$|x_{10} - x_9| = 0.003 = \varepsilon.$

Ответ: $\xi = x_{10} = 0.575$.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти корень методом половинного деления с точностью 1% уравнения $f(x) = 2x - \cos x$ на интервале $[0, \pi/2]$.

2. Найти корень методом хорд с точностью до 0.001 функции $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$ на интервале $[0,1]$.
3. Найти нуль функции $\mathrm{f(x) = x + lnx}$ с тремя верными знаками на интервале (0.2, 0.9) методом хорд.
4. Найти методом Ньютона корень с четырьмя верными знаками уравнения $f(x) = x - 10\sin x = 0$ на интервале $[\pi/2, 11\pi/12]$.
5. Найти нуль функции $\mathrm{f(x) = x + lnx}$ комбинированным методом с тремя верными знаками на интервале (0.2, 0.9).
6. Методом золотого сечения найти корень уравнения $2x - \cos x = 0$ на интервале $[0, \pi/2]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.
7. Найти нуль функции $f(x) = \sin x - 0.2x$ на интервале $[\pi/2, \pi]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом итераций.

1.5 Практическое задание №1

1а) Построить график функции для своего варианта.

1б) С помощью математического пакета Mathcad вычислить «вручную» корень уравнения интервальными методами (методами перебора, дихотомии, хорд, золотого сечения). Погрешность корня.

1в) Вычислить корень уравнения с помощью встроенной функции Mathcad и сравнить с полученными в п. (1б) результатами.

2) С помощью математического пакета Mathcad вычислить «вручную» корень уравнения методом Ньютона и методом итерации.

1.5.1 Варианты заданий

1) $f(x) = (0.2x)^3 - \cos x$.
2) $f(x) = x - 10\sin x$.
3) $f(x) = 2^{-x} - \sin x; \quad x < 10$.
4) $f(x) = 2^x - 2\cos x; \quad x > -10$.
5) $f(x) = \lg(x+5) - \cos x; \quad x < 5$.
6) $f(x) = \sqrt{4x+7} - 3\cos x$.
7) $f(x) = x\sin x - 1$.
8) $f(x) = 8\cos x - x - 6$.
9) $f(x) = \sin x - 0.2x$.
10) $f(x) = 10\cos x - 0.1x^2$.
11) $f(x) = 2 \cdot \lg(x+7) - 5\sin x$.
12) $f(x) = 4\cos x + 0.3x$.

13) $f(x) = 5\sin 2x - \sqrt{1-x}$.

14) $f(x) = 1.2x^4 + 2x^3 - 24.1 - 13x^2 - 14.2x$.

15) $f(x) = 2x^2 - 5 - 2^x$.

16) $f(x) = 0.5x^2 - 10 + 2^{-x}$.

17) $f(x) = 4x^4 - 6.2 - \cos 0.6x$.

18) $f(x) = 3\sin 8x - 0.7x + 0.9$.

19) $f(x) = 1.2 - \ln x - 4\cos 2x$.

20) $f(x) = \ln(x + 6.1) - 2\sin(x - 1.4)$.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots.. + a_{1n}\cdot x_n = b_1; \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots.. + a_{2n}\cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots.. + a_{nn}\cdot x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Обозначим за $a_{i,n+1} = b_i$.

2.1 Метод Гаусса

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных. Суть его состоит в преобразовании (1) к системе с треугольной матрицей, из которой затем последовательно (обратным ходом) получаются значения всех неизвестных. Рассмотрим одну из вычислительных схем. Эта схема называется схемой единственного деления.

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент).

Этап 1

Приводим систему к треугольному виду:

$$m_{i,1} = a_{i,1} / a_{1,1}, \quad i = 2,3,\ldots,n$$

Шаг 1:
$$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j} - m_{i,1}a_{1,j},$$
$$b_i^{(1)} = b_i - m_{i,1}b_1,$$
$$i, j = 2,3,\ldots,n.$$

$$m_{i,2} = a_{i,2}^{(1)} / a_{2,2}^{(1)}, \quad i = 3,4,\ldots,n$$

Шаг 2:
$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - m_{i,2}a_{2,j}^{(1)},$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i,2}b_2^{(1)},$$
$$i, j = 3,4,\ldots,n.$$

$$m_{n,n-1} = a_{n,n-1}^{(n-2)} / a_{n-1,n-1}^{(n-2)},$$

Шаг (n – 1):
$$a_{n,n}^{(n-1)} = a_{n,n}^{(n-2)} - m_{n,n-1}a_{n-1,n}^{(n-2)},$$
$$b_n^{(n-1)} = b_n^{(n-2)} - m_{n,n-1}b_{n-1}^{(n-2)}.$$

Этап 1 можно представить в следующем виде:

$$m_{i,k} = a_{i,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)}, \quad k = 1,2,3,4,\ldots,n-1$$
$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k-1)},$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - m_{i,k} b_k^{(k-1)},$$
$$i, j = k+1, k+2, \ldots, n.$$

где k – номер шага; $a_{1,j}^{(0)} = a_{1,j}$, $b_1^{(0)} = b_1$.

Этап 2

Вычисляем неизвестные:

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)},$$
$$x_{n-i} = (b_{n-i}^{(n-i-1)} - \sum_{j=0}^{i} a_{n-i,n-j}^{(n-i-1)} \cdot x_{n-j}) / a_{n-i,n-i}^{(n-i-1)},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Этап 3

Для проверки вычисляем невязку $\|e\|$, где $e_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i; \quad i = 1,\ldots,n.$ Если решение верное, то невязка будет равна нулю или очень малой величиной.

Пример 2.1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$$

Решение. Результаты прямого хода выпишем в таблицу

	x_1	x_2	x_3	b
A	7	2	3	15
	5	–3	2	15
	10	–11	5	36
A_1	7	2	3	15
	0	–31/7	–1/7	30/7
	0	–97/7	5/7	102/7
A_2	7	2	3	15
	0	–31/7	–1/7	30/7
	0	0	36/31	36/31

Обратный ход

$$x_3 = 1;\; x_2 = -\frac{30}{31} - \frac{1}{31}\cdot 1 = -1;\; x_1 = \frac{15}{7} - \frac{2}{7}\cdot(-1) - \frac{3}{7}\cdot 1 = 2.$$

2.2 Метод простой итерации

При большом числе неизвестных схема Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этом случае для нахождения корней системы используют приближенные методы. Одним из приближенных методов является метод простой итерации.

Пусть дана линейная система (2.1), которую запишем в матричном виде.

$$\mathrm{A}x = b. \qquad (2.2)$$

Предположим, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$ Разрешим первое уравнение системы (2.1) относительно x_1, второе относительно x_2 и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n; \\ x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где $\beta_i = b_i / a_{ii};\; \alpha_{ij} = -a_{ij} / a_{ii};\; i \neq j;\; \alpha_{ii} = 0.$

Введем матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & \alpha_{nn} \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Систему (2.3) можем записать в матричной форме:

$$x = \beta + \alpha x. \qquad (2.4)$$

Систему (2.3) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$. Далее последовательно находим решения

$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$ (первое приближение);

$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$ (второе приближение) и т. д.

$(k+1)$-е приближение вычисляется по формуле:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)};\; k = 1, 2, \ldots \qquad (2.5)$$

Критерий завершения процесса (14) имеет вид

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \frac{1 - \|\alpha\|}{\|\alpha\|} \cdot \varepsilon, \qquad (2.6)$$

где ε – заданная точность.

В методе простой итерации можно предварительно оценить число шагов, необходимых для достижения заданной точности ε, исходя из следующей формулы: $\frac{\|\alpha\|^{n+1}}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\beta\| < \varepsilon$. Отсюда следует

$$n \le \frac{\lg[\varepsilon\cdot(1-\|\alpha\|)]-\lg\|\beta\|}{\lg\|\alpha\|}-1. \qquad (2.7)$$

Пример 2.2. Методом простой итерации решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

с точностью до $\varepsilon = 0.01$.

Решение. Приведем эту систему к эквивалентному виду, удобному для итерации

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3; \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3; \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Оценим норму матрицы $\|\alpha\| = \max\limits_i \sum\limits_j |\alpha_{ij}| = 0.4$ и величину $\delta = \frac{1-\|\alpha\|}{\|\alpha\|}\cdot\varepsilon = 0.015.$

В качестве нулевого приближения решения возьмем $x^{(0)} = (1.2, 1.3, 1.4).$

Подставим $x^{(0)}$ в (2.16), получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1\cdot 1.3 - 0.1\cdot 1.4 = 0.93; \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2\cdot 1.2 - 0.1\cdot 1.4 = 0.92; \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2\cdot 1.2 - 0.2\cdot 1.3 = 0.9. \end{cases}$$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \max_i \left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| > \delta = 0.0015.$$

Продолжим вычисления:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0.92 - 0.1 \cdot 0.9 = 1.018; \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.93 - 0.1 \cdot 0.9 = 1.024; \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.93 - 0.2 \cdot 0.92 = 1.03. \end{cases}$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = \left| x_3^{(2)} - x_3^{(1)} \right| = 0.13 > \delta.$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.024 - 0.1 \cdot 1.03 = 0.9946; \\ x_2^{(3)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.018 - 0.1 \cdot 1.03 = 0.9934; \\ x_3^{(3)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.018 - 0.2 \cdot 1.024 = 0.9916. \end{cases}$$

$$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\| = \left| x_3^{(3)} - x_3^{(2)} \right| = 0.0384 > \delta.$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0.9934 - 0.1 \cdot 0.9916 = 1.0015; \\ x_2^{(4)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9946 - 0.1 \cdot 0.9916 = 1.00192; \\ x_3^{(4)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9946 - 0.2 \cdot 0.9934 = 1.0024. \end{cases}$$

$$\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\| = \left| x_3^{(4)} - x_3^{(3)} \right| = 0.0108 < \delta.$$

В качестве корня берем $x = x^{(4)} \approx (1.002, 1.002, 1.002)$.

Точное решение $x = (1.000, 1.000, 1.000)$.

2.3 Решение переопределенной системы

При обработке данных эксперимента часто приходится иметь дело с переопределенными системами линейных алгебраических уравнений, т. е. с системами, в которых число уравнений больше числа неизвестных.

Пусть дана система

$$\mathrm{A}x = b, \tag{2.9}$$

где $\mathrm{A} - (n \times m)$ – матрица, причем $n \geq m$;

$x - m$-мерный вектор неизвестных;

$b - n$-мерный вектор правой части.

Если $n > m$, то есть число уравнений больше числа неизвестных, то говорят, что система (2.19) переопределена.

Для решения переопределенной СЛАУ используют метод наименьших квадратов (МНК). Идея его состоит в минимизации суммы квадратов невязок

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j)^2. \tag{2.10}$$

Из необходимого условия минимума (24)

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = 0, \ \ k = 1, \ldots, n$$

получим систему уравнений с квадратной матрицей

$$\sum_{k=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ik}) \cdot x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot b_i \text{ или}$$

$$\sum_{k=1}^{m} c_{jk} \cdot x_k = g_j, \ \ j = 1, \ldots, m. \tag{2.11}$$

В матричной форме система (2.11) имеет вид (2.9).

Система (2.11) решается любым известным методом.

Пример 2.3. Найти решение системы:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 2; \\ &x_1 - x_2 = 0.5; \\ &3x_1 - 4x_2 = -1; \\ &5x_1 - 3x_2 = 2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Решение.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}; \ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 36 & -27 \\ -27 & 27 \end{pmatrix};$$

$$g = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

В результате, вместо (2.12), мы получили систему

$$\begin{aligned} &36x_1 - 27x_2 = 9.5; \\ &-27x_1 + 27x_2 = -0.5. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Решение системы (2.23) $x = (1, \ 0.981)$.

2.4 Практическое задание №2

2.4.1 Задание 2.1

1а) С помощью пакета Mathcad решить «вручную» систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

1б) Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью встроенных функций: *find* , *lsolve* и $x = A^{-1} \cdot b$ и сравнить с результатами п. (1а).

2.4.2 Варианты заданий 2.1

1) $\begin{cases} 2.74x_1 - 1.18x_2 + 3.17x_3 = 2.18; \\ 1.12x_1 + 0.83x_2 - 2.16x_3 = 1.15; \\ 0.81x_1 + 1.27x_2 + 0.76x_3 = 3.23. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

$x = (-3,\ 2,\ 1).$

5) $\begin{cases} 3.2x_1 + 5.4x_2 + 4.2x_3 + 2.2x_4 = 2.6; \\ 2.1x_1 + 3.2x_2 + 3.1x_3 + 1.1x_4 = 4.8; \\ 1.2x_1 + 0.4x_2 - 0.8x_3 - 0.8x_4 = 3.6; \\ 4.7x_1 + 10.4x_2 + 9.7x_3 + 9.7x_4 = -8.4; \end{cases}$

$x = (5,\ -4,\ 3,\ -2).$

6) $$\begin{cases} 3.2x_1 + 5.4x_2 + 4.2x_3 + 2.2x_4 = 11.4; \\ 2.1x_1 + 3.2x_2 + 3.1x_3 + 1.1x_4 = 9.2; \\ 1.2x_1 + 0.4x_2 - 0.8x_3 - 0.8x_4 = 0.4; \\ 4.7x_1 + 10.4x_2 + 9.7x_3 + 9.7x_4 = 30.4; \end{cases}$$

$$x = (5,\ -4,\ 3,\ 2).$$

7) $$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = -11.33; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32; \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42. \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} 1.1161x_1 + 0.1254x_2 + 0.1397x_3 + 0.1490x_4 = 1.5471; \\ 0.1582x_1 + 1.1675x_2 + 0.1768x_3 + 0.1871x_4 = 1.6471; \\ 0.1968x_1 + 0.2071x_2 + 1.2168x_3 + 0.2271x_4 = 1.7471; \\ 0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 = 1.8471. \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68; \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 = 9.95; \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6; \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 = 1. \end{cases}$$

2.4.3 Задание 2.2

2а) С помощью пакета Mathcad решить «вручную» систему линейных алгебраических уравнений методом простой итерации.

2б) Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью встроенных функций: *find* , *lsolve* и $x = A^{-1} \cdot b$ и сравнить с результатами п. (2а).

2.4.4 Варианты заданий 2.2

1) $$\begin{cases} 4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8; \\ 0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9; \quad \varepsilon = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-3}. \\ 0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20; \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 0.24x_2 + x_3 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0; \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$

3) $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_3 = 1; \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4; \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$

5) $\begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1; \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7; \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8; \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$

6) $\begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2; \\ 1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1; \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6; \end{cases}$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$

7) $$\begin{cases} 3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8; \\ 2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4; \\ 1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

8) $$\begin{cases} 2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5; \\ 4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6; \\ 5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

9) $$\begin{cases} 3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2; \\ 6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8; \\ 2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

10) $$\begin{cases} 2.4x_1 + 0.2x_2 - 0.3x_3 - 1.1x_4 + 5.86x_5 = 23.84; \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 + 1.1x_3 + 10.2x_4 + x_5 = 38.85; \\ 0.5x_1 - 6.2x_2 + 0.1x_3 + 1.5x_4 - 1.2x_5 = 17.23; \\ 0.1x_1 + 2.1x_2 + 5.1x_3 + 0.2x_4 - 0.3x_5 = 6.56; \\ 2.5x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.4x_5 = 6.63; \end{cases}$$

$$x = (1.54;, -2.7;\ 2.5;\ 3.1;\ 4.3);\ \varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-2}.$$

ГЛАВА 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

3.1 Постановка задачи

Под приближением функции $f(x)$, заданной на интервале $[a,b]$, будем понимать замену $f(x)$ некоторой другой функцией $P(x)$, близкой к исходной функции $f(x)$. Простейшая задача, приводящая к приближению функций, состоит в следующем. Пусть на сетке $\{x_i\}$ задана табличная функция $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,...,n$. Требуется найти значения функции $f(x)$ в точках x_j, не совпадающих с узлами исходной сетки x_i.

Рассмотрим некоторую систему действительных линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$, определенных на отрезке $[a,b]$, и составим обобщенный полином

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x).$$

Определение. Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x),..., \varphi_n(x)$ называется системой Чебышева на отрезке $[a,b]$, если любой обобщенный полином по этой системе функций имеет на $[a,b]$ не более n корней.

Задача приближения состоит в подборе коэффициентов c_i таким образом, чтобы отклонение $f(x)$ от $P(x)$ было минимальным на заданном множестве X. Полином $P(x)$ при этом называют **аппроксимирующим** или приближающим.

Если параметры c_i, $i = 0,1,...,n$ определяются из условия совпадения значений $f(x)$ и $P(x)$ в узлах сетки x_k

$$f(x_k) = P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_k), \; k = 0,1,...,n,$$

то такой способ приближения называют **интерполяцией** или интерполированием, а сетку $\{x_k\}$ называют интерполяционной сеткой. При этом полагается, что значения сетки $\{x_j\}$, в которой мы хотим вычислять $P(x_j)$, не выходят за пределы интервала $[a,b]$ $(a \le x_j \le b; \; j = 1,2,...,m)$. Если мы хотим вычислить значение $P(x_j)$ в точках $x_j \notin [a,b]$, то приближение называют **экстраполяцией**.

На практике чаще всего используют следующие системы функций $\varphi_i(x)$:

а) $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$ либо линейные комбинации этих функций (например, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева);

б) $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx$;

в) $e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_3 x}, ..., e^{\alpha_n x}$ либо линейные комбинации этих функций (например, ортогональные экспоненциальные функции), где α_i – некоторая последовательность попарно различных действительных чисел.

В случае (а) интерполирование называется алгебраическим, в случае (б) – тригонометрическим, в случае (в) – экспоненциальным.

Рассмотрим алгебраическое интерполирование.

3.2 Алгебраическое интерполирование

3.2.1 Формула Ньютона для равномерной сетки

Пусть для функции $f(x) = y$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ в равностоящих узлах $x_i = a + ih,\ i = 0,1,...,n;\ h = (b-a)/n$.

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)^{[2]} + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)^{[n]}, \quad (3.1)$$

где $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = (\Delta y_1 - \Delta y_0)$, $\Delta^n y_0 = (\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0)$ – конечные разности первого, второго, n-го порядка;

$$(x-x_0)^{[1]} = (x-x_0),\ (x-x_0)^{[2]} = (x-x_0)(x-x_1),$$

$(x-x_0)^{[n]} = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})$ – обобщенные степени первого, второго, n-го порядка.

Введем переменную $q = \dfrac{x-x_0}{h}$. Тогда формула (3.1) примет вид

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (3.2)$$

Пусть $n = 1$, тогда из (3.2) получим формулу линейного интерполирования:

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При $n = 2$ получим формулу квадратичного (параболического) интерполирования:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

При $n = 3$ получим формулу кубического интерполирования:

$$P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2}{6}\Delta^3 y_0.$$

На практике обычно ограничиваются полиномами первого – третьего порядков. При этом, по возможности, в качестве x_0 берут ближайший слева от требуемой точки x узел интерполяционной сетки.

Погрешность интерполирования (остаточный член) $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ вычисляется по формуле:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi); \ \xi \in [a,b]. \quad (3.3)$$

Введем переменную $q = (x - x_0)/h$, тогда из (5.3) следует

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)...(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi); \ \xi \in [a,b]. \quad (3.4)$$

На практике точка ξ, как правило, не известна. Поэтому вместо $f^{(n+1)}(\xi)$ обычно используют $M_{n+1} = \max\limits_{x} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Для табличной функции значение производной $(n+1)$-го порядка функции $f(x)$ приближенно можно положить $f^{(n+1)}(\xi) \approx \dfrac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$ и формула (5.4) примет вид

$$R_n(x) = \frac{q(q-1)...(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0. \quad (3.5)$$

Пример 3.1. Пусть имеем таблицу значений функции $f(x) = y$

x	3.5	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33	34.8	36.8	39.1	41.9

Составим таблицу разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
3.50	33.0	1.8	0.2	0.1	0.1
3.55	34.8	2.0	0.3	0.2	
3.60	36.8	2.3	0.5		
3.65	39.1	2.8			
3.70	41.9				

Примечание. Таблица конечных разностей получается следующим образом: столбец Δy – вычитанием цифр столбца y; столбец $\Delta^2 y$ – вычитанием цифр столбца Δy; столбец $\Delta^3 y$ – вычитанием цифр столбца $\Delta^2 y$ и т. д.

По данной таблице можно построить полином максимальной степени, равной 4. Построим полином третьей степени. Здесь $h = 0.05$. Для построения полинома используем данные первой строки таблицы: $x_0 = 3.5$; $y_0 = 33.0$; $\Delta y_0 = 1.8$; $\Delta^2 y = 0.2$; $\Delta^3 y = 0.1$. Значения $x_1 = 3.55$; $x_2 = 3.60$. Используя формулу (3.1), получим

$$P_3(x) = 33.0 + \frac{1.8}{1\cdot(0.05)}(x-3.5) + \frac{0.2}{2\cdot(0.05)^2}(x-3.5)\cdot(x-3.55) +$$

$$+\frac{0.1}{6\cdot(0.05)^3}(x-3.5)\cdot(x-3.55)\cdot(x-3.60).$$

Погрешность оцениваем по формуле (3.5):

$$R_3(x) = \frac{(x-3.50)(x-3.55)(x-3.60)(x-3.65)}{4!\cdot(0.05)^4}\cdot|0.1|.$$

С помощью полученного полинома $P_3(x)$ можно вычислить значение интерполируемой функции $f(x)$ для любого x из интервала $3.50 \le x \le 3.65.$ Если требуется вычислить $f(x)$ в интервале $[3.65, 3.70]$, то необходимо построить полином $P_3(x)$ по данным второй строки таблицы: $x_0 = 3.55;$ $y_0 = 34.8;$ $\Delta y_0 = 2.0;$ $\Delta^2 y = 0.3;$ $\Delta^3 y = 0.3$. Соответственно, $x_1 = 3.60;$ $x_2 = 3.65.$

Пример 3.2. Получить формулу для вычисления суммы ряда $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, т. е. вычислить $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Решение. Найдем конечные разности

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2;$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3;$$

$$\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = 2(n+1) + 3 - [2n+3] = 2.$$

Поскольку $\Delta^3 S_n$ не зависит от n, то S_n можно аппроксимировать полиномом степени не выше третьей. Составим таблицу

n	S_i	ΔS_i	$\Delta^2 S_i$	$\Delta^3 S_i$
1	1	4	5	2
2	5	9	7	
3	14	16		
4	30			

Имеем: $h = 1.$ $x_0 = 1;$ $x_1 = 2;$ $x_2 = 2;$ $x_3 = 3.$ Введем переменную $q = \frac{n-1}{1} = n-1$. Строим полином по первой строке таблицы ($y_0 = 1;$ $\Delta S_0 = 4;$ $\Delta^2 S_0 = 5;$ $\Delta^3 S_0 = 2$). В результате имеем

$$P_3(n) = 1 + 4(n-1) + 5\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

После преобразования получим $P_3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Таким образом, для S_n мы получили формулу $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3.2.2 Формула Ньютона для неравномерной сетки

Пусть функция $f(x)$ задана на неравномерной сетке $\{x_i\} = a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Интерполяционный полином Ньютона имеет вид

$$\begin{aligned} P(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... \\ + [x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ – разделенная разность первого порядка в точке x_0;

$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ – разделенная разность второго порядка в точке x_0;

$[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{[x_1, x_2, ..., x_n] - [x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ – разделенная разность n-го порядка в точке x_0.

Погрешность интерполяции рассчитывается по формуле (3.3)

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Значение производной M_{n+1} $(n+1)$-го порядка для табличной функции может быть оценено приближенно через конечную разность $(n+1)$-го порядка $f^{(n+1)}(x) \approx (n+1)! \cdot [x_0, x_1, ..., x_{n+1}]$.

Пример 3.3. Дана табличная функция $f(x)$

x	$f(x)$	1 порядок	2 порядок	3 порядок
0.0	0.4	0.04	0.008	0.002
2.5	0.5	0.08	0.02	
5.0	0.7	0.2		
6.0	0.9			

Решение. По формуле (3.6) строим полином второго порядка по первой строке. Здесь $x_0 = 0$. Получим

$$P_2(x) = 0.4 - 0.04x - 0.008x(x - 2.5).$$

Для оценки погрешности нам потребуется производная третьего порядка. Приближенную оценку можно получить следующим образом. Запишем полином 3-го порядка и возьмём производную 3-го порядка.

$$P_3'''(x) = 6 \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3] = 6 \cdot (0.002) = 0.012 \approx f'''(x).$$

Возьмем абсолютное значение $M_3 = |f'''(x)| = 0.012$. Таким образом, погрешность интерполирования равна

$$R_2(x) = \frac{M_3}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \approx \frac{0.012}{6}(x - 0.0)(x - 2.5)(x - 5.0).$$

3.2.3 Интерполяционная формула Лагранжа

Полином Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \quad (3.7)$$

При $n = 1$ (дана сетка из 2-х узлов x_0, x_1) из (3.7) имеем

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

При $n = 2$ (дана сетка из 3-х узлов x_0, x_1, x_2).

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Можно показать, что формула Лагранжа и формула Ньютона это две разные формы записи одного и того же полинома. Поэтому численные значения функций, полученных по формуле Лагранжа и Ньютона, будут совпадать. По этой же причине погрешность интерполяционного полинома Лагранжа вычисляется по той же формуле (3.3), по которой вычисляется погрешность интерполяционного полинома Ньютона:

$$R_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x),$$

где $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

Пример 3.4. Построить полином Лагранжа для табличной функции

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

Решение. По формуле (3.7) имеем

$$L_3(x) = 2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)} + 3\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)} +$$

$$+12\cdot\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)} + 147\cdot\frac{(x-1)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}.$$

3.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Построить полином для вычисления суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

2. Просуммировать ряд $S_n = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2$.

3. С какой погрешностью можно вычислить $\sqrt{2}$ с помощью полиномов 1 и 2 порядка, построенных для отрезка $[1.69, 2.25]$. Узлы интерполяции взять следующие: $x_0 = 1.69;\ x_1 = 1.96;\ x_2 = 2.25$.

4. Требуется составить четырехзначную таблицу функции $f(x) = \sin x$ на интервале $0 \le x \le \pi/2$. Какой величины должен быть шаг таблицы h, чтобы погрешность интерполяции была не больше погрешности таблицы: а) при линейной интерполяции; б) при квадратичной интерполяции.

5. Построить интерполяционные полиномы Ньютона 1 и 2 порядка для функции $f(x)$, заданной таблично на равномерной сетке.

x	0	1	2	3	4	5
y	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

Вычислить значения полинома и погрешности в точках:
а) $x = 0.5$;
б) $x = 3.5$.

3.4 Практическое задание №3

3.4.1 Контрольный пример 1

В таблице даны значения интеграла вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$$

на интервале $x \in [0.51, 0.57]$ с шагом $h = 0.1$. Построить полиномы Ньютона 1 и 2 порядка.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.51	0.5292437	0.0086550	–0.0000896	$-7\cdot10^{-7}$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.52	0.5378987	0.0085654	–0.0000903	$-7\cdot10^{-7}$
0.53	0.5464641	0.0084751	–0.0000910	$-7\cdot10^{-7}$
0.54	0.5549392	0.0083841	–0.0000917	$-6\cdot10^{-7}$
0.55	0.5633233	0.0082924	–0.0000923	
0.56	0.5716157	0.0082001		
0.57	0.5798158			

а) вычислить значение функции на новой сетке

$$\{x_j\} = 0.51 + j\cdot h;\ \ h = 0.005;\ \ j = 0, 1, \dots, 12;$$

б) вычислить погрешность интерполяции функции.

Рекомендация. В качестве точки x_0 брать ближайшую к точке x_j, причём $x_0 \le x_j$. Вывести таблицы:

- исходных данных и конечных разностей;
- значений функции $\Phi(x)$ в узлах новой сетки и погрешностей интерполяции.

3.4.2 Контрольный пример 2

Построить полиномы Ньютона и Лагранжа для таблично заданной функции

x	y	1 порядок	2 порядок	3 порядок
0.0	132.651	81.13	15.8	1
0.2	148.877	85.87	16.2	1
0.3	157.464	89.11	16.7	1
0.4	166.375	95.79	17.3	
0.7	195.112	104.44		
0.9	216.000			

а) вывести значения функции и погрешности на новой сетке

$$\{x_j\} = j\cdot 0.05;\ \ j = 0,1,\dots,18;$$

б) дать интерпретацию полученных результатов.

3.4.3 Варианты заданий

1)

x	0.2	0.24	0.27	0.3	0.33	0.36
$f(x)$	1.22	1.27	1.32	1.36	1.37	1.35

2)

x	0.1	0.13	0.20	0.3	0.31	0.35
$f(x)$	2.32	2.27	2.00	1.36	1.40	2.00

3)

x	2	3.12	4.27	5.33	6.40	7.8
$f(x)$	100	80	60	40	35	20

4)

x	10	15	20	30	40	50
$f(x)$	41.2	51.3	55.6	51.3	41.2	30.3

5)

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$f(x)$	0.000	0.521	1.175	2.129	3.627	6.050	10.018	16.543	27.290

6)

x	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$f(x)$	0	0.389	0.717	0.932	1	0.909	0.675	0.335	–0.058

7)

x	–1.4	–1.0	–0.6	–0.2	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
$f(x)$	0.17	0.54	0.825	0.98	0.98	0.825	0.54	0.17	–0.227

8)

x	1.5	1.9	2.3	2.7	3.1	3.5	3.9	4.3
$f(x)$	0.071	–0.323	–0.666	–0.904	–0.999	–0.936	–0.726	–0.401

9)

x	–1	–0.7	–0.4	–0.1	0.2	0.5	0.8	1.1
$f(x)$	0.368	0.613	0.852	0.99	0.961	0.779	0.527	0.298

10)

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
$f(x)$	1	0.914	0.698	0.445	0.237	0.105	0.039	0.012

Примечание. Для вариантов с 1 по 10 новую сетку задать самостоятельно.

11)

$$y=\sin^2 x+1; \qquad x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right];\ h=\frac{\pi}{20};\ x_j=j\frac{h}{2};\quad j=0,\ \ldots,\ 20.$$

12)

$$y=1-\cos^2 x;\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]; \qquad h=\frac{\pi}{20};\quad x_j=j\frac{h}{2};\ j=0,\ \ldots,\ 20.$$

13)

$$y=\frac{1}{1+\lg x};\quad x\in[0,100];\ h=2;\quad x_j=1+j\frac{h}{2};\ j=0,\ \ldots,\ 100.$$

14)

$$y=\frac{1}{\sin x};\ x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right];\ h=\frac{\pi}{60};\quad x_j=\frac{\pi}{3}+j\frac{h}{2};\ j=0,\ \ldots,\ 20.$$

15)

$$y = 2 \cdot tgx; \quad x \in [0, 0.2\pi]; \; h = 0.02\pi; \; x_j = j\frac{h}{2}; \quad j = 0, \ldots, 20.$$

16)

$$y = 3 \cdot \mathrm{ctg}x; \quad x \in [0.3\pi, 0.5\pi];$$

$$h = 0.02\pi; \quad x_j = 0.3\pi + j\frac{h}{2}; \quad j = 0, \ldots, 20.$$

17)

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}; \quad x_i = -\frac{1}{4}\pi + 0.1\pi \cdot i; \; i = 1, 2, \ldots, 9;$$

$$x_j = -\frac{1}{4}\pi + 0.05\pi \cdot j; \; j = 1, \ldots, 18.$$

18)

$$y = \sin x + \cos x; \quad x_i = -\frac{3}{4}\pi + 0.1\pi \cdot i; \; i = 0, 1, 2, \ldots, 20;$$

$$x_j = -\frac{3}{4}\pi + 0.15\pi \cdot j; \; j = 1, \ldots, 10.$$

19)

$$y = \sin x; \quad x_i = 0.1\pi \cdot i; \; i = 0, 1, 2, \ldots, 10;$$

$$x_j = 0.05\pi \cdot j; \; j = 0, \ldots, 20.$$

20)

$$y = \cos x; \quad x_i = 0.1\pi \cdot i - \frac{\pi}{2}; \; i = 0, 1, 2, \ldots, 10;$$

$$x_j = 0.05\pi \cdot j - \frac{\pi}{2}; \; j = 0, \ldots, 20.$$

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Формулы численного дифференцирования получаются путем дифференцирования интерполяционных формул. Наиболее широкое распространение получили формулы Ньютона и Лагранжа.

4.1 Формулы Ньютона

Пусть задана табличная функция $f(x)$ на равномерной сетке $x_i = a + i \cdot h,$ $i = 0,...,n$, h – шаг сетки. Дифференцируя полином Ньютона, для первой производной получим

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right. \left. + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right], \tag{4.1}$$

где $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, $x_0 = a$; Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$ – конечные разности первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Погрешность дифференцирования равна

$$R'_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!h}\frac{d}{dq}[q(q-1)\cdots(q-n)]. \tag{4.2}$$

В частности, при $x = x_0$

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right], \quad R'(x_0) = \frac{(-1)^n}{h}\frac{\Delta^{n+1} y_0}{n+1}. \tag{4.3}$$

Для второй производной получим следующие формулы (путем дифференцирования (4.1) и (4.2)):

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]; \quad R''(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!h^2}\frac{d^2}{dq^2}[q(q-1)\cdots(q-n)]. \tag{4.4}$$

В частности, при $x = x_0$ будем иметь:

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right];$$

$$R''(x_0) = \frac{2(-1)^{n+1}\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}. \tag{4.5}$$

Примечание 1. При нахождении производных $y', y'', \ldots$ в фиксированной точке x в качестве x_0 следует брать ближайшее слева от x табличное значение аргумента.

Примечание 2. В качестве т. x_0 может быть использована любая узловая точка. Поэтому формулы (4.3) и (4.5) могут быть применены для любой т. x_i, если она удовлетворяет условию $x_i \le x_{n-j}$, где j – порядок полинома.

Пример 4.1.
Найти $y'(0)$ и $y''(0)$ функции $y = f(x)$, заданной таблично:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,0	16,991	0,411	–0,028	–0,007	0,017
5,0	17,402	0,383	–0,035	0,010	
10	17,785	0,348	–0,025		
15	18,133	0,323			
20	18,456				

Здесь шаг равен 5.
Решение. По формулам (4.3), (4.4) получим (используя интерполяционный полином 3-ого порядка):

$$y'(0) = \frac{1}{5}\left[0.411 + \frac{1}{2}0.028 - \frac{1}{3}0.007\right] \approx 0.0845;$$

$$R'(0) = \frac{(-1)}{5\cdot 4}\Delta^4 y_0 = -8.5\cdot 10^{-4}.$$

$$y''(0) = \frac{1}{25}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0\right] = \frac{1}{25}\left[-0.028 + 0.007\right] = -8.4\cdot 10^{-4};$$

$$R''(0) = \frac{2\cdot(-1)\cdot\Delta^4 y_0}{4\cdot 25}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -6.2\cdot 10^{-4}.$$

Результаты этого примера показывают, что погрешность второй производной сравнима с величиной второй производной.

4.2 Формула Лагранжа

Запишем полином Лагранжа

$$y = \sum_{j=0}^{n} P_j(x) y_j\ , \tag{4.6}$$

где $P_j(x) = \dfrac{\Pi(x)}{(x-x_j)\Pi'(x_j)}$; $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$;

$$\Pi'(x)(x_j) = (x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n).$$

Для первой производной получим выражение

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{d}{dx} P_j(x);\ \frac{d}{dx} P_j(x) = P_j(x) \sum_{k \neq j}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$

или

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j P_j(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{x - x_k}. \qquad (4.7)$$

Вторая производная вычисляется по формуле:

$$y''(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{d^2}{dx^2} P_j(x),$$

которая после преобразования примет вид

$$y''(x) = 2\sum_{j=0}^{n} y_j P_j(x) \left[\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{(x - x_k)} \right)^2 - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2} \right]. \qquad (4.8)$$

При $x = x_i$ (т. е. в узлах) из (4.7) и (4.8) следует:

$$y'(x_i) = y_i \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} + \Pi'(x_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} y_j \frac{1}{\Pi'(x_j)(x_i - x_j)}. \qquad (4.9)$$

$$y''(x_i) = 2\left[y_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_j} \sum_{\substack{k=j+1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} + \right.$$

$$\left. + \Pi'(x_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{y_j}{\Pi'(x_j)(x_i - x_j)} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i \neq j}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} \right]. \qquad (4.10)$$

Вычислим погрешность первой и второй производной.

$$R_n'(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \Pi(x);\ R_n''(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^2}{dx^2} \Pi(x).$$

Так как

$$\frac{d}{dx}\Pi_{n+1}(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x-x_j)},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Pi_{n+1}(x) = \Pi_{n+1}(x)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x-x_j)}\right)^2 - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x-x_j)^2}\right],$$

то получим

$$R'(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\Pi(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{x-x_j}\right|, \tag{4.11}$$

$$R''(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\Pi(x)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{x-x_j}\right)^2 - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x-x_j)^2}\right]\right|. \tag{4.12}$$

Для программирования формулы (4.7) и (4.8) удобно представить в виде (чтобы не было деления на нуль):

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{1}{\Pi'(x_j)}\sum_{\substack{k=0\\k\ne j}}^{n} P_{jk}(x), \tag{4.13}$$

$$y''(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{1}{\Pi'(x_j)}\sum_{\substack{k=0\\k\ne j}}^{n}\sum_{\substack{r\ne k\\r\ne j\\r=0}}^{n} P_{jkr}(x), \tag{4.14}$$

где

$$P_{jk}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots$$
$$\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n),$$

т. е. в $P_{jk}(x)$ пропущены сомножители с номерами j и k;

$$P_{jkr}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots$$
$$\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n).$$

Здесь пропущены сомножители с номерами $j,\ k$ и r.

Пример 4.2.

Рассмотрим предыдущий пример. Вычислить $y'(0)$ и $y''(0)$ с помощью полинома 3-го порядка.

x	y
0,0	16,991
5,0	17,402
10	17,785

15	18,133
20	18,456

Решение. По формуле (4.9) получим:

$$y'(x_0) = y_0\left[\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_0-x_2}+\frac{1}{x_0-x_2}\right]+(x_0-x_1)\cdot$$

$$\cdot(x_0-x_2)(x_0-x_3)\left[y_1\frac{1}{x_0-x_1}\cdot\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\right.$$

$$+y_2\frac{1}{x_0-x_2}\cdot\frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$

$$\left.+y_3\frac{1}{x_0-x_3}\cdot\frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right].$$

Подставим данные таблицы:

$$y'(x_0) = y_0(-\frac{11}{30})+(-750)\left[\frac{y_1}{(-5)}\cdot\frac{1}{250}+\frac{y_2}{(-10)}\cdot\frac{1}{(-250)}+\right.$$

$$\left.+\frac{y_3}{(-15)}\cdot\frac{1}{750}\right]=(-\frac{11}{30})\cdot 16.991+\frac{3}{5}\cdot 17.402-$$

$$-\frac{3}{10}\cdot 17.785+\frac{1}{15}\cdot 18.133 = 0.0845.$$

По формуле (4.10) имеем:

$$y''(x_0) = 2\left\{y_0\left[\frac{1}{x_0-x_1}\left(\frac{1}{x_0-x_2}+\frac{1}{x_0-x_3}\right)+\frac{1}{(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\right]+\right.$$

$$+(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdot\left[y_1\frac{1}{x_0-x_1}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\left(\frac{1}{x_0-x_2}+\frac{1}{x_0-x_3}\right)+$$

$$+y_2\frac{1}{x_0-x_2}\cdot\frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\left(\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_0-x_3}\right)+$$

$$\left.\left.+y_3\frac{1}{x_0-x_3}\cdot\frac{1}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\left(\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_0-x_2}\right)\right]\right\}.$$

Подставим табличные данные, получим:

$$y''(x_0) = 2\left\{ y_0 \left[\frac{1}{-5}\left(\frac{1}{-10} + \frac{1}{-15} \right) + \frac{1}{(-10)(-15)} \right] + \right.$$

$$+ y_1(-750)\left[\frac{1}{(-5)5(-5)(-10)} \left(\frac{1}{-10} + \frac{1}{-15} \right) \right] +$$

$$+ y_2(-750)\left[\frac{1}{(-10)10 \cdot 5(-5)} \left(\frac{1}{-5} + \frac{1}{-15} \right) \right] +$$

$$\left. + y_3(-750)\left[\frac{1}{(-15)15 \cdot 10 \cdot 5} \left(\frac{1}{-5} + \frac{1}{-10} \right) \right] \right\} =$$

$$= 2\left\{ y_0 \frac{1}{25} - y_1 \frac{1}{10} + y_2 \frac{2}{25} - y_3 \frac{1}{50} \right\} = -8.4 \cdot 10^{-4}.$$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

1. Исходя из формул Лагранжа (4.7), (4.8) получить формулы (4.9), (4.10) для первой и второй производной в узлах сетки.

2. Пусть дана равномерная сетка. На примере полинома Лагранжа третьего порядка получить из формул (4.9), (4.10) формулы Ньютона (4.3), (4.5) для производных $y'(x_i),\ y''(x_i)$.

3. Материальная точка движется прямолинейно. Закон движения $S = f(t)$ представлен в виде таблицы

t, сек	S, м	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$	$\Delta^4 S$
0	0	2	6	6	0
1	2	8	12	6	0
2	10	20	18	6	0
3	30	38	24	6	
4	68	62	30		
5	130	92			
6	222				

Найти скорость V и ускорение w т. М в момент $t = 3.5$ сек.

4. Дана функция $y(x) = e^{-x/2},\ x \in [0,1]$. Получить таблицу значений с шагом $h = 0.2$. С помощью полинома Ньютона 3 порядка вычислить значения первой и второй производной в т. $x = 0.1$. Оценить погрешность.

5. Дана функция $y(x)=e^{-x/2}$, $x\in[0,1]$. Получить таблицу значений с шагом $h=0.2$. С помощью полинома Лагранжа вычислить значения первой и второй производной в т. $x=0.1$. Оценить погрешность.

6. Дана функция $y(x)=e^{x^2}$, $x\in[0,1]$. Получить таблицу значений с шагом $h=0.2$. С помощью полинома Ньютона 3 порядка вычислить значения первой и второй производной в т. $x=0.1$. Оценить погрешность.

7. Дана функция $y(x)=e^{x^2}$, $x\in[0,1]$. Получить таблицу значений с шагом $h=0.2$. С помощью полинома Лагранжа вычислить значения первой и второй производной в т. $x=0.1$. Оценить погрешность.

4.4 Практическое задание №4

4.4.1 Контрольный пример

Задана табличная функция:

	x	$f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	1	1	4	12	6
x_1	2	5	16	18	6
x_2	3	21	34	24	6
x_3	4	55	58	30	
x_4	5	113	88		
x_5	6	201			

1) Рассчитать f', f'' с помощью формулы Ньютона 2-го порядка и вычислить погрешность. Значения $f'(x)$, $f''(x)$, $R'(x)$, $R''(x)$ вычислить на исходной сетке и на новой сетке $\overline{x}=\{1.5,\ 2.5,\ 3.5,\ 4.5,\ 5.5\}$.

2) Вычислить f', f'' с помощью формул Лагранжа и вывести значение f' и f'' на исходной сетке и на новой сетке.

Ответ:

По формуле Ньютона 3-го порядка: а) в точке $x=2$, $f'(2)=9$, $R'(2)=0$; $f''(2)=12$, $R''(2)=0$; б) в точке $x=1.5$, $f'(1.5)=3.75$; $f''(1.5)=9$.

Формула Лагранжа 3-го порядка даст тот же результат, т. е. $f'(2)=9$, $f''(2)=12$ (дать объяснение).

Формула Лагранжа 5-го порядка дает следующий результат: $f'(2)=9$, $f''(2)=12$.

Объяснить, почему формулы 3-го и 5-го порядка дают одинаковый результат.

4.4.2 Варианты заданий

1) $y = e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in [0, 1], \quad h = 0.1; \; x_j = j\frac{h}{2}, \quad j = 0, \ldots, 20$.

2) $y = \sqrt[3]{x}, \; x \in [1, 2], \; h = 0.1; \quad x_j = 1 + j\frac{h}{3}, \quad j = 0, \ldots, 30$.

3) $y = e^{-(x-5)^2}, \; x \in [4, 6], h = 0.2; \; x_j = 4 + j\frac{h}{2}; \; j = 0, \ldots, 20$.

4) $y = e^{-(x-3)^2} + e^{-(x-5)^2}, \; x \in [2, 6], \; h = 0.2;$

$x_j = 2 + j\frac{h}{2}, \quad j = 0, \ldots, 40$.

5) $y = e^{x^2}, \; x \in [-1, 1], \; h = 0.1; \; x_j = -1 + j\frac{h}{3}, \; j = 0, \ldots, 40$.

6) $y = x\ln x, \; x \in [1, 2], h = 0.1; \; x_j = 1 + j\frac{h}{2}, j = 0, \ldots, 20$.

7) $y = \dfrac{1}{1 - x^3}, x \in [2, 4], \; h = 0.2; \; x_j = 2 + j\frac{h}{3}, \; j = 0, \ldots, 30$.

8) $y = \ln(x - 1), x \in [2, 3], h = 0.1; x_j = 2 + j\frac{h}{2} j, j = 0, \ldots, 20$.

9) $y = \sqrt{x} + 1, x \in [1, 2], h = 0.1; \; x_j = 1 + j\frac{h}{2}, \; j = 0, \ldots, 20$.

10) $y = \sin^2 x + 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], h = \frac{\pi}{20}; \; x_j = j\frac{h}{2}, j = 0, \ldots, 20$.

11) $y = 1 - \cos^2 x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], h = \frac{\pi}{20}; \; x_j = j\frac{h}{2}, \; j = 0, \ldots, 20$.

12) $y = \dfrac{1}{1 + \lg x}, x \in [0, 100], \; h = 2; \; x_j = 1 + j\frac{h}{2}, \; j = 0, \ldots, 100$.

13) $y = \dfrac{1}{\sin x}, \; x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], \; h = \frac{\pi}{60}; \; x_j = \frac{\pi}{3} + j\frac{h}{2}, \; j = 0, \ldots, 20$.

14) $y = 2 \cdot \mathrm{tg}x, \; x \in [0, 0.2\pi], h = 0.02\pi; \; x_j = j\frac{h}{2}, \; j = 0, \ldots, 20$.

15) $y = 3\cdot \mathrm{ctg} x,\ x \in [0.3\pi, 0.5\pi],\ h = 0.02\pi;\ x_j = 0.3\pi + j\dfrac{h}{2},\ j = 0, \ldots, 20$.

16) $y = e^x - \dfrac{1}{x},\ x_i = 0.2 + 0.5\cdot i;\ i = 0,1,\ldots,10;$

$x_j = 0.2 + 0.25\cdot j;\ j = 0,1,\ldots,20$

17) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x};\ x_i = -\dfrac{1}{4}\pi + 0.1\pi\cdot i;\ i = 1,2,\ldots,9;$

$x_j = -\dfrac{1}{4}\pi + 0.05\pi\cdot j;\ \ j = 1,\ldots,18.$

18) $y = \sin x + \cos x;\ \ x_i = -\dfrac{3}{4}\pi + 0.1\pi\cdot i;\ \ i = 0,1,2,\ldots,20;$

$x_j = -\dfrac{3}{4}\pi + 0.15\pi\cdot j;\ \ j = 1,\ldots,10.$

19) $y = \sin x;\ \ x_i = 0.1\pi\cdot i;\ \ i = 0,1,2,\ldots,10;$

$x_j = 0.05\pi\cdot j;\ \ j = 0,\ldots,20.$

20) $y = \cos x;\ x_i = 0.1\pi\cdot i - \dfrac{\pi}{2};\ \ i = 0,1,2,\ldots,10;$

$x_j = 0.05\pi\cdot j - \dfrac{\pi}{2};\ \ j = 0,\ldots,20.$

ГЛАВА 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формулы численного интегрирования в общем случае получаются путем интегрирования интерполяционных полиномов, построенных для подынтегральной функции.

5.1 Формулы трапеции и Симпсона

Запишем интерполяционный полином Лагранжа для равномерной сетки

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n+1}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i}, \tag{5.1}$$

где $q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)$ – обобщенная степень переменной $q = \dfrac{x-x_0}{h}$; $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг сетки. Если подынтегральную функцию $f(x)$ на интервале $[a,b]$ аппроксимировать полиномом Лагранжа (5.1), то для интеграла от $f(x)$ получим

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i, \tag{5.2}$$

где H_i – коэффициенты Ньютона – Котеса

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq, \quad i = 0,\ldots,n. \tag{5.3}$$

Формулы вида (5.2) называют *квадратурами*, или квадратурными формулами.

1) При $n = 1$ (т. е. имеется два узла на интервале $[a,b]$) получим из (5.3) $H_0 = H_1 = \dfrac{1}{2}$. В этом случае формула (5.2) примет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

Применяя эту формулу ко всем подынтервалам $x_{i+1} - x_i = h$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n]. \tag{5.4}$$

Для остаточного члена

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n]$$

можно получить следующее выражение:

$$R_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 y''(\xi), \tag{5.5}$$

где $a < \xi < b$.

Формулу (5.4) называют квадратурной формулой *трапеций*. Геометрически формула (5.4) означает замену графика функции $y = f\left(x\right)$ на ломаную линию (см. рис.5.1).

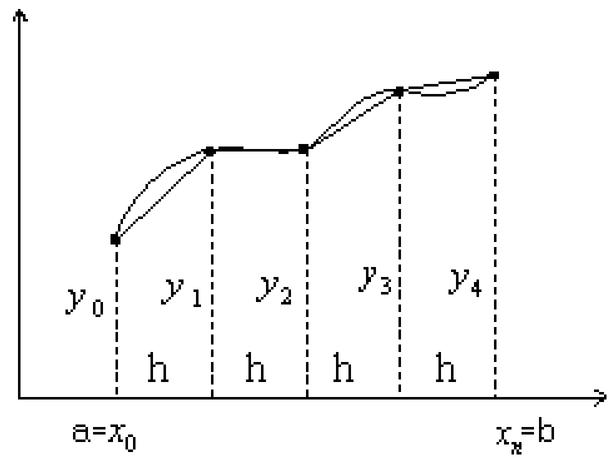


Рис. 5.1 К вопросу о формуле трапеций

Из формул (5.5) видно, что если $y'' > 0$, то формула трапеции (5.4) даст значение интеграла с *избытком*, если $y'' < 0$, то – с *недостатком*.

Для неравномерной сетки формула трапеций (5.4) принимает вид

$$\begin{cases} \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} h_i (y_{i+1} + y_i), \\ R_T = -\frac{1}{12}\sum h_i^3 y''(\xi_i); \xi_i \in [x_i; x_{i-1}]. \end{cases} \tag{5.6}$$

2) При $n = 2$ коэффициенты Ньютона – Котеса равны

$$H_0 = \frac{1}{6};\ H_1 = \frac{4}{6};\ H_2 = \frac{1}{6}$$

и формула (5.2) примет вид

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{2h}{6}[y_0 + 4y_1 + y_2]. \tag{5.7}$$

Чтобы получить квадратуру для произвольного интервала $[a,b]$, рассмотрим сетку с $n = 2m$ узлами. Здесь m – количество подынтервалов длиной $2h$. Применяя формулу (7.7) к каждому подынтервалу, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{6}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2m-1}) + \qquad (5.8)$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})].$$

Эта формула получила название квадратурной формулы *Симпсона.*

Здесь $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{2m}$; n – четное число ($n+1$ – количество узлов сетки).

Остаточный член

$$R_C = \int_a^b f(x)dx - \frac{2h}{6}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2m-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})]$$

выражается формулой:

$$R_C = -\frac{b-a}{180} h^4 y^{(4)}(\xi). \qquad (5.9)$$

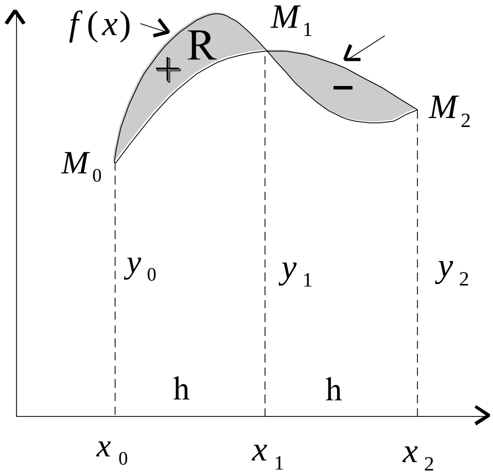


Рис. 5.2 К вопросу о формуле Симпсона

Здесь вошла производная 4-го порядка, поэтому формула Симпсона (5.8) будет точна для подынтегральных функций, заданных полиномами не только 2-го порядка, но и 3-го порядка.

Геометрически формула Симпсона означает, что кривую $y = f(x)$ мы заменяем параболой $y = L_2(x)$, проходящей через три точки: $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$.

Для неравномерной сетки ($h_i = x_i - x_{i-1}$) формула Симпсона имеет следующий вид

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{k=1}^{m} \frac{h_{2k-1} + h_{2k}}{6h_{2k-1}h_{2k}} \Big\{ y_{2k-2}\left(2h_{2k-1} - h_{2k}\right)h_{2k} + y_{2k-1}\left(h_{2k-1} + h_{2k}\right)^2 + y_{2k}\left(2h_{2k} - h_{2k-1}\right)h_{2k-1} \Big\}, \qquad (5.10)$$

где $m = n/2$.

5.2 Формулы прямоугольников

Из геометрических соображений можно получить формулы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} y_i h_i, \; h_i = x_{i+1} - x_i$$ – левосторонняя; (5.11)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_i, \quad \xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$$ – центральная. (5.12)

Погрешности квадратурных формул (5.11) и (5.12) (для $h = const$) равны

$$R_1 = \frac{b-a}{2} h y'(\xi)$$ – левосторонняя; (5.13)

$$R_2 = \frac{b-a}{24} h^2 y''(\xi)$$ – центральная. (5.14)

Сравнивая формулы погрешностей (5.5) и (5.14), делаем заключение, что центральная формула прямоугольников в 2 раза точнее формулы трапеций.

Пример 5.1.

Найти $\ln 2$ с точностью до 10^{-4} из соотношения $\ln 2 = \int_{0.5}^{1} \frac{dx}{x}$, вычислив интеграл тремя методами: 1) по формуле Симпсона; 2) по формуле трапеций; 3) по центральной формуле прямоугольников.

Решение. Оценим требуемое количество узлов для обеспечения заданной точности квадратурных формул. Для этого вычислим производные.

$$f(x) = \frac{1}{x}; \; f''(x) = \frac{2}{x^3}; \; f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

На отрезке $[1/2, 1]$ имеем

$$f''(x) < \frac{2}{(1/2)^3} = 16 = M_2; \; f^{(4)}(x) = 24 \cdot 2^5 = 768 = M_4.$$

Для метода Симпсона погрешность равна

$$|R_C| = M_4 \frac{(b-a)}{180} h^4; \; h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1}{4m}; \; b-a = \frac{1}{2}.$$

Поэтому погрешность выражается через количество узлов следующим образом:

$$|R_C| = 768 \frac{1}{2 \cdot 180} \left(\frac{1}{4m} \right)^4 < 10^{-4}.$$

Отсюда $(4m)^4 > 2.13 \cdot 10^4$ или $m = 4, \; n = 2m = 8$, т. е. получим 9 узлов.

Занесем данные в таблицу.

x			
$x_0 = 0.5$	$f(x_0) = 2$		
$x_1 = 0.5625$		$f(x_1) = 1.77777$	

$x_2 = 0.6250$			$f(x_2) = 1.60$
$x_3 = 0.6875$		$f(x_3) = 1.45454$	
$x_4 = 0.7500$			$f(x_4) = 1.33333$
$x_5 = 0.8125$		$f(x_5) = 1.23077$	
$x_6 = 0.8750$			$f(x_6) = 1.14286$
$x_7 = 0.9375$		$f(x_7) = 1.06666$	
$x_8 = 1.0$	$f(x_8) = 1.0$		

Получим промежуточные результаты. Сложим цифры по столбцам $A_1 = 3;\ A_2 = 5.52976;\ A_3 = 4.07619$. В результате получим искомый результат $\ln 2 = \frac{h}{3}\left[A_1 + 4A_2 + 2A_3\right] = 0.6931$.

Рассмотрим формулу прямоугольников:

$$R < \frac{b-a}{24} h^2 M_2;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2n};\ b-a = \frac{1}{2}.$$

Получим $R < \frac{1}{2 \cdot 24} 16 \left(\frac{1}{2n}\right)^2 < 10^{-4}$.

Отсюда $n^2 > 10^4 / 12$ или $n = 29$.

Если использовать формулу трапеций, то для нахождения $\ln 2$ с точностью 10^{-4} потребуется 58 узлов сетки подынтегральной функции.

Заметим, что если для формулы прямоугольников взять $n = 8$, то погрешность вычисления интеграла $\ln 2 = \int_{0.5}^{1} \frac{dx}{x}$ будет превосходить 10^{-3}.

5.3 Правило Рунге оценки остаточного члена

На практике часто используют правило Рунге для оценки погрешности интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx - S_n = \frac{S_{n2} - S_{n1}}{2^m - 1},$$

где S_{n1}, S_{n2} – значения интеграла, вычисленные по какой-либо квадратурной формуле с количеством узлов $n1$ и $n2$ соответственно;

$m = 2$ – для формулы прямоугольников и трапеции;

$m = 4$ – для формулы Симпсона.

Увеличивая число узлов, можно увеличить точность интегрирования. Если задать точность ε, то, используя критерий

$$\left|\frac{S_{n2}-S_{n1}}{2^m-1}\right|\le\varepsilon, \tag{5.15}$$

можно обеспечить требуемую погрешность интегрирования. В качестве значения интеграла берут S_{n2}. При этом обычно $n2=2\cdot n1$, т. е. количество узлов удваивается.

5.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Получите формулу для остаточного члена квадратуры трапеции.
2. Получите формулу для остаточного члена квадратуры Симпсона.
3. Получите формулу для остаточного члена квадратуры центральных прямоугольников.
4. Получите формулу для остаточного члена квадратуры левосторонних прямоугольников.
5. По формуле Симпсона вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.
6. По формуле трапеций вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.
7. По формуле центральных прямоугольников вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.
8. По формуле Симпсона вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.
9. По формуле трапеций вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.
10. По формуле центральных прямоугольников вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$, приняв $n=10$. Вычислить погрешность.

5.5 Практическое задание №5

1) С помощью встроенных функций пакета Mathcad провести вычисления интегралов на заданной сетке и составить таблицу.
2) Используя полученную таблицу вычислить интеграл по формулам: а)левых прямоугольников; б) правых прямоугольников; в) центральных прямоугольников; г) трапеций; д) Симпсона и оценить погрешность.
3) Сравнить полученные результаты с точным значением

5.5.1 Варианты заданий

1. $\int_0^2 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},\ \varepsilon=10^{-6}.$

2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[4]{(1-x)^3}},\ \varepsilon=10^{-4}$

3. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(e^{x/2}+3)},\ \varepsilon=10^{-4}$

4. $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\ \varepsilon=10^{-4}.$

5. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}},\ \varepsilon=10^{-4}.$

6. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},\ \varepsilon=10^{-4}.$

7. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}},\ \varepsilon=10^{-4}.$

8. $\int_0^1 \ln x\ln(1+x)dx,\ \varepsilon=10^{-4}.$

9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}},\ n=8.$

10. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos xdx,\ n=6.$

11. $\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{2+x},\ n=10.$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin xdx,\ n=6.$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\ \varepsilon=10^{-6}.$

14. $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}},\ \varepsilon=10^{-5}.$

15. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4},\ \varepsilon=10^{-5}.$

16. $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},\ \varepsilon=10^{-5}.$

17. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx,\ \varepsilon=10^{-5}.$

18. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1},\ \varepsilon=10^{-5}.$

19. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx,\ \varepsilon=10^{-5}.$

20. $\int_0^2 \sqrt{1+x^5}dx,\ \varepsilon=10^{-5}.$

ГЛАВА 6. ПОИСК МИНИМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1 Методы прямого поиска

6.1.1 Метод равномерного поиска (МРП)

Пусть $f(x) \in Q[a,b]$ и требуется найти какую-либо из точек минимума x^* на $[a,b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$. Разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $x_i = a + i \cdot h,\ i = 0,1,...,n;\quad h = \dfrac{b-a}{n}$, где $n = \dfrac{b-a}{\varepsilon}$. Найдем точку x_m, для которой

$$f(x_m) = \min_{0 \le i \le n} f(x_i) \tag{6.1}$$

и полагаем $x^* \approx x_m,\ \ f^* \approx f(x_m)$.

6.1.2 Метод деления отрезка пополам (МДОП)

Пусть задана $f(x) \in Q[a,b]$. Надо найти x^* и f^*. Пусть $\varepsilon > 0$ – требуемая точность определения точки x^*. Выбрав $\delta \in (0, \varepsilon)$ (здесь δ – параметр метода) построим последовательность $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, n = 1,\ldots$, используя рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} a_0 = a; b_0 = b; \\ x_1^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} - 2\delta)/2; \\ x_2^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} + 2\delta)/2; \\ a_n = a_{n-1}, b_n = x_2^{(n-1)} \ \ \textit{если} \ \ f(x_1^{(n-1)}) \le f(x_2^{(n-1)}); \\ a_n = x_1^{(n-1)}, b_n = b_{n-1} \ \ \textit{если} \ \ f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}). \end{cases} \tag{6.2}$$

За точку x^* принимаем $x^* = (a_n + b_n)/2$, погрешность равна $\varepsilon_n = \dfrac{(b_n - a_n)}{2}$.

Условие завершение процесса $\varepsilon_n \le \varepsilon$. Обычно берут $\delta = \varepsilon/2$

6.1.3 Метод Фибоначчи (МФ)

Этот метод основан на использовании *чисел Фибоначчи* F_n, задаваемых рекуррентной формулой $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \ (n \ge 2),\ \ F_0 = 1,\ \ F_1 = 1.$

Шаг 1.

Задаем точность ε.

По таблице проверяем условие

$$\Delta_n = \frac{\Delta_0}{F_n} \le \varepsilon; \quad \Delta_0 = (b-a) \tag{6.3}$$

и определяем число n. В таблице 6.1 приведены числа Фибоначчи F_n.

Таблица 8.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

Шаг 2.

Определяем точку d_0 из условия $\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}, \quad n = 4,5,6,...$

$$d_0 = a_0 + \Delta_1. \tag{6.4}$$

Шаг 3.

Определяем точку c_0 так, чтобы она была симметрична d_0 относительно середины интервала Δ_0, т.е. $d_0 - a_0 = b_0 - c_0$, откуда $c_0 = b_0 + a_0 - d_0$.

Шаг 4.

Вычисляем значение функции в точках (a_0, b_0, c_0, d_0). Сравниваем значения функции, возможны ситуации:

$$\begin{aligned} &1) \quad f(c_0) \le f(d_0), \\ &2) \quad f(c_0) > f(d_0). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Шаг 5.

Определяем новый (приведенный) интервал:

Ситуация 1) $a_1 = a_0; \quad b_1 = d_0; \quad d_1 = c_0; \quad x_1 = d_1$.

Точка c_1 находится из условия $b_1 - c_1 = d_1 - a_1$, откуда

$$c_1 = b_1 + a_1 - d_1. \tag{6.6}$$

Ситуация 2) $a_1 = c_0;\ \ b_1 = b_0;\ \ c_1 = d_0;\ \ x_1 = c_1$

Точка d_1 находится из условия $b_1 - c_1 = d_1 - a_1$, откуда

$$d_1 = b_1 + a_1 - c_1 \tag{6.7}$$

Итерируем до тех пор, пока не достигнем значения $i = n$. Полагаем $x^* \approx x_n$

Скорость сходимости линейная с коэффициентом

$$\alpha = \frac{F_n}{F_{n-1}} \to \frac{1}{\gamma} = 0,618$$

6.1.4 Метод золотого сечения (МЗС)

Идея метода золотого сечения такая же, как и идея метода Фибоначчи. Отличие состоит в том, что здесь не надо заранее задавать n, чтобы производить поиск точек d_0 и c_0.

Длины последовательных интервалов в МЗС берутся в фиксированном отношении:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \ldots = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \gamma, \quad \Delta_0 = b - a, \tag{6.8}$$

где $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$ – золотое сечение. Заметим, что в методе Фибоначчи

$$\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \gamma.$$

Шаг 1.

Определяем c_0 и d_0 из условий: $\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1} = \gamma$ и $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} = \gamma$

$$c_0 = a_0 + \Delta_2, \quad d_0 = a_0 + \Delta_1. \tag{6.9}$$

Шаг 2.

Вычисляем значение функции в точках $(a_0, b_0 c_0, d_0)$. Сравниваем значения функции, возможны ситуации:

1) $f(c_0) \le f(d_0)$,

2) $f(c_0) > f(d_0)$.

Шаг 3. Определяем новый (приведенный) интервал:

Ситуация 1) $a_1 = a_0;\ \ b_1 = d_0;\ \ d_1 = c_0;\ \ x_1 = d_1$.

Точка c_1 находится из условия $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_3} = \gamma$, откуда

$$c_1 = a_0 + \Delta_3. \tag{6.10}$$

Ситуация 2) $a_1 = c_0;\ \ b_1 = b_0;\ \ c_1 = d_0;\ \ x_1 = c_1$

Точка d_1 находится из соотношения

$$d_1 = b_0 - \Delta_3 \tag{6.11}$$

Шаг 4.

Продолжаем процесс, пока не достигнем заданной точности

$$\Delta_n = \Delta_0 \left(\frac{1}{\gamma} \right)^n \le \varepsilon. \tag{6.12}$$

На самом деле, погрешность будет равна $\dfrac{1}{2}\Delta_n = \dfrac{1}{2} \cdot \Delta_0 \left(\dfrac{1}{\gamma} \right)^n \le \varepsilon$

6.2 Полиномиальная аппроксимация

8.3.1 Метод Пауэлла

Этот метод основан на последовательном применении процедуры оценивания с использованием квадратичной аппроксимации.

Схема алгоритма Пауэлла: пусть x_1 - начальная точка; Δx - выбранная величина шага по оси x.

Шаг 1: Вычислить $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 2: Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 3: Если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$, если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$. Если $x_3 < x_1$, то перенумеровать точки в естественном порядке: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$.

Шаг 4: Вычислить $f(x_3)$ и найти

$$F_{\min} = \min\{ f_1, f_2, f_3 \}.$$

$X_{\min}$ равно точке x_i, которая соответствует $F_{\min}$.

Шаг 5: По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислить $\bar{x}$, используя формулу (2.1), т.е. используя квадратичную аппроксимацию.

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) является ли разность $\left|F_{\min} - f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$;

б) является ли разность $\left|X_{\min} - \bar{x}\right| \le \delta$,

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ - заданные точности.

Если условия а) и б) выполняются одновременно, то закончить поиск. Иначе переход на Шаг 8.

Шаг 7: Выбрать "наилучшую" точку ($X_{\min}$ или $\bar{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти на Шаг 2.

Замечание: после пятого шага необходимо провести дополнительную проверку, т.к. точка $\bar{x}$ может находиться за точкой x_3. В этом случае точка $\bar{x}$ заменяется точкой, координата которой вычисляется с учетом заранее установленной длины шага.

Пример 6.2*:* Найти $\min\ f(x) = 2x^2 + 16/x$.

Пусть начальная точка $x_1 = 1$ и длина шага $\Delta x = 1$.

Критерии останова:

$$\left|\frac{X_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| \le 3 \cdot 10^{-2}; \quad \left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| \le 3 \cdot 10^{-3}.$$

Замечание. Оба критерия должны выполняться одновременно.

Итерация 1:

Шаг 1: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2;$

Шаг 2: $f(x_1)=18; \quad f(x_2)=16;$

Шаг 3: $f(x_1) > f(x_2)$, следовательно $x_3 = 1+2 = 3$;

Шаг 4: $f(x_3)=23{,}33; F_{\min}=16; X_{\min}=x_2$.

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{16-18}{2-1} = -2; \; a_2 = \frac{1}{3-2}\cdot\left[\frac{23,33-18}{3-1} - (-2)\right] = \frac{5,33}{2} + 2 = 4,665.$$

В соответствии с (2.1) вычислим $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1+2}{2} - \frac{(-2)}{2\cdot 4{,}665} = 1{,}5 + \frac{1}{4{,}665} = 1{,}714; \; f(\bar{x}) = 15{,}210.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) $\left|\dfrac{16-15{,}210}{15{,}210}\right| = 0{,}0519 > 0{,}003$. Критерий останова не выполняется, следовательно поиск продолжается. Переход на Шаг 7.

Шаг 7: Выбираем $\bar{x}$ как "наилучшую" точку, а $x_1 = 1,\; x_2 = 2$ – как точки, которые ее окружают. Обозначим эти точки в естественном порядке и переходим к Шагу 2.

Итерация 2:

Шаг 4: $x_1 = 1,\; f_1 = 18;\; x_2 = 1{,}714,\; f_2 = 15{,}210 = F_{\min;}$
$X_{\min} = x_2 = 1{,}714;\; x_3 = 2;\; f_3 = 16.$

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{15{,}210-18}{1{,}714-1} = -3{,}908;$$

$$a_2 = \frac{1}{2-1{,}714}\cdot\left[\frac{16-18}{2-1} - (-3{,}908)\right] = \frac{1{,}908}{0{,}286} = 6{,}671;$$

$$\bar{x} = \frac{2{,}714}{2} - \frac{(-3{,}908)}{2\cdot 6{,}671} = 1{,}357 + 0{,}293 = 1{,}650; \; f(\bar{x}) = 15{,}142.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска: а) $\left|\dfrac{15{,}210-15{,}142}{15{,}142}\right| = 0{,}0045 > 0{,}003$.

Второй критерий останова не выполняется. Переход на Шаг 7.

Шаг 7: Выбираем $\bar{x}$ как "наилучшую" точку, а $x_1 = 1,\ x_2 = 1,714$ – как точки, которые ее окружают. Обозначим эти точки в естественном порядке и переходим к Шагу 2.

Итерация 3:

Шаг 4:

$$x_1 = 1;\ f_1 = 18;\ x_2 = 1,65;\ f_2 = 15,142 = F_{\min};\ X_{\min} = x_2 = 1,65;$$
$$x_3 = 1,714;\ f_3 = 15,210.$$

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{15,142 - 18}{1,65 - 1} = -4,397;$$
$$a_2 = \frac{1}{1,714 - 1,650} \cdot \left[\frac{15,210 - 18}{1,714 - 1} - (-4,397)\right] = 7,647;$$
$$\bar{x} = \frac{2,65}{2} - \frac{(-4,397)}{2 \cdot 7,647} = 1,6125; \quad f(\bar{x}) = 15,123.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) $\left|\dfrac{15,142 - 15,123}{15,123}\right| = 0,0013 < 0,003;$ б) $\left|\dfrac{1,65 - 1,6125}{1,6125}\right| = 0,023 < 0,03.$

Оба критерия останова выполняются, следовательно, поиск закончен.

Ответ: $\bar{x} = 1,6125;$ (точное решение $x^* = 1,5874$).

6.3 Методы с использованием производных

6.3.1 Метод Ньютона-Рафсона

Итерационная формула имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}. \tag{6.13}$$

Она легко получается, если разложить функцию $f'(x)$ в ряд Тейлора и ограничиться линейным приближением: $f'(x_n) \approx f'(x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$

Геометрическая интерпретация приведена на рис. 6.1. Здесь начальной точкой является точка x_n, а искомым экстремумом исследуемой функции точка x^*.

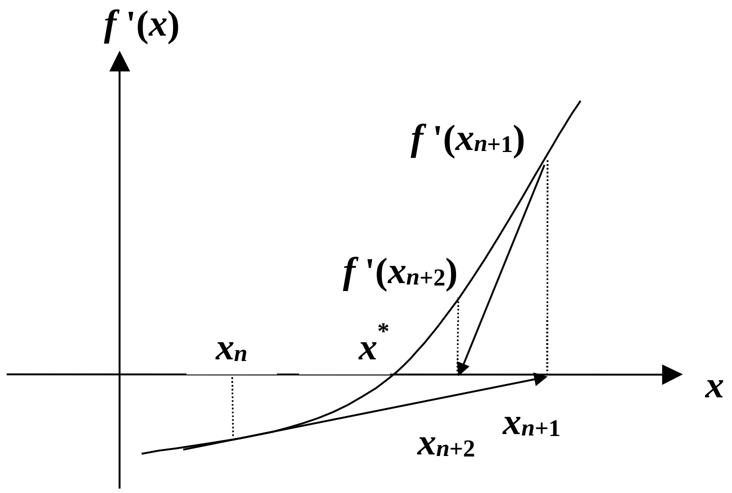


Рис. 6.1. Сходимость МНР

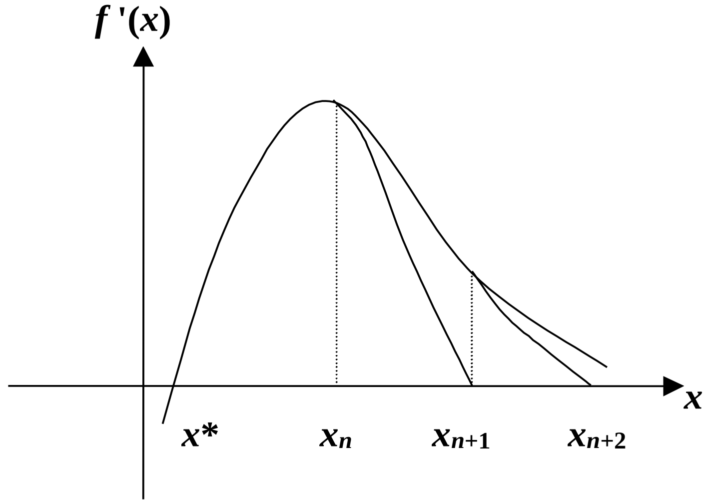


Рис. 6.2. Отсутствие сходимости МНР

Начальное приближение в МНР следует выбирать вблизи глобального экстремума, в противном случае метод будет расходящимся (рис. 6.2)

6.3.2 Метод средней точки (поиск Больцано)

Пусть $f(x) \in Q[a,b]$, т.е. функция унимодальна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Для нахождения корня уравнения $f'(x) = 0$ можно воспользоваться эффективным алгоритмом исключения интервалов, на каждой итерации которого рассматривается лишь одна пробная точка.

Если в точке z значение функции $f'(z) < 0$, то точка x^* не может быть левее точки z. В этом случае исключается интервал $[a,z]$.

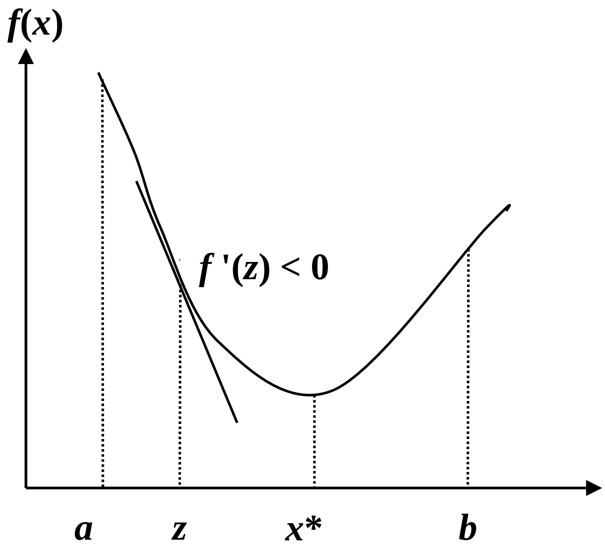


Рис. 6.3а. Поиск Больцано. Исключается интервал $[a,z]$.

Если в точке z $f'(z) > 0$, то минимум x^* не может быть расположен правее z. Исключается интервал $[z,b]$.

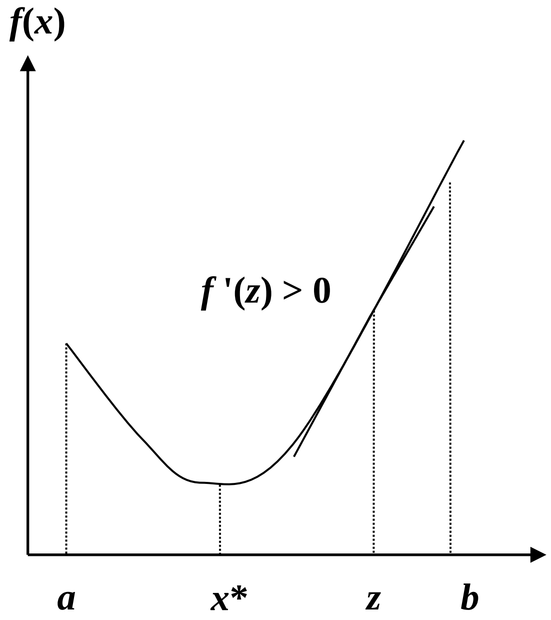


Рис. 6.3б. Поиск Больцано. Исключается интервал $[z, b]$.

Определим две точки L и R таким образом, что $f'(L) < 0$ и $f'(R) > 0$. Стационарная точка $\bar{x} \in [L, R]$. Вычислим координату средней точки $z = (L + R)/2$ и найдем $f'(z)$.

$$\text{Если} \quad \begin{cases} f'(z) > 0, & \text{то исключим } [z, R]; \\ f'(z) < 0, & \text{то исключим } [L, z]. \end{cases} \qquad (6.14)$$

Формализованное описание алгоритма. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in [a, b]$ и задана точность ε.

Шаг 1: Положить $L = a$, $R = b$ при этом $f'(a) < 0; f'(b) > 0$.

Шаг 2: Вычислить $z = \dfrac{R + L}{2}$; $f'(z)$.

Шаг 3: Если $|f'(z)| \le \varepsilon$, закончить поиск. Иначе:

$$\text{Если} \quad \begin{cases} f'(z) > 0, & \text{положить } R = z \to \textit{Шаг } 2; \\ f'(z) < 0, & \text{положить } L = z \to \textit{Шаг } 2. \end{cases}$$

Замечание: Здесь исследуется лишь знак производной независимо от ее значения.

6.4 Практическое задание №6

1) С помощью пакета Mathcad построить график функции

2) Найти минимум функции «вручную» с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя:

а) два прямых метода из четырех (метод равномерного поиска, метод деления отрезка пополам, метод Фибоначчи, метод золотого сечения);

б) полиномиальную аппроксимацию (метод Пауэлла);

в) два метода, основанных на производных (метод Ньютона-Рафсона, метод средней точки).

3) Найти минимум функции с помощью встроенной функции пакета Mathcad и сравнить с результатами задания 2.

6.4.1 Варианты задания

1) $f(x) = x^4 - 10 \cdot x^3 + 36 \cdot x^2 + 5 \cdot x; \quad x \in [3; 5]$.

2) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x; \quad x \in [0; \pi/4]$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{4} \cdot x^4 + x^2 - 8 \cdot x + 12; \quad x \in [0; 2]$.

4) $f(x) = x^3 - x + 1; \quad x^0 \in [-2; 0]$.

5) $f(x) = 2x^2 + {}^{16}\!/_{x}; \quad x \in [1; 5]$.

6) $f(x) = 4x^3 + 2x - 3x^2 + e^{x/2}$.

7) $S(t) = 12t^2 - \dfrac{2}{3} \cdot t^3$.

8) $f(x) = x^4 - 12 \cdot x^3 + 47 \cdot x^2 - 60 \cdot x$.

9) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$.

10) $f(x) = (10x^3 + 3x^2 + x + 5)$.

11) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1; \quad x \in [-1; 0]$.

12) $f(x) = x^2 + e^{-x}$

13) $f(x) = 2x + e^{-x}$.

13) $f(x) = x^2 + x + \sin x$.

14) $f(x) = x^2 - x + e^{-x}$.

15) $f(x) = 2x^2 - 5 - 2^x$

1) $f(x) = x^4 - 10 \cdot x^3 + 36 \cdot x^2 + 5 \cdot x; \quad x \in [3; 5]$.

2) $f(x)=\ln(1+x^2)-\sin x;\quad x\in[0;\pi/4]$.

3) $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4+x^2-8\cdot x+12;\quad x\in[0;2]$.

4) $f(x)=x^3-x+1;\quad x^0\in[-2;0]$.

5) $f(x)=2x^2+{}^{16}\!/_{x};\qquad x\in[1;5]$.

6) $f(x)=4x^3+2x-3x^2+e^{x/2}$.

7) $S(t)=12t^2-\frac{2}{3}\cdot t^3$.

8) $f(x)=x^4-12\cdot x^3+47\cdot x^2-60\cdot x$.

9) $f(x)=x^4-12x^3+47x^2-60x$.

10) $f(x)=(10x^3+3x^2+x+5)$.

11) $f(x)=x^4+2x^2+4x+1;\quad x\in[-1;0]$.

12) $f(x)=x^2+e^{-x}$

13) $f(x)=2x+e^{-x}$.

13) $f(x)=x^2+x+\sin x$.

14) $f(x)=x^2-x+e^{-x}$.

15) $f(x)=2x^2-5-2^x$

ГЛАВА 7. ПОИСК МИНИМУМА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1 Метод Хука-Дживса

Процедура Хука–Дживса представляет собой комбинацию двух поисков:

а) ***"исследующий" поиск*** (для выявления характера локального поведения ЦФ и определения направления движения вдоль "оврагов") с циклическим изменением переменных;

б) ***ускоряющий поиск*** *по образцу* с использованием определенных эвристических правил.

Исследующий поиск. Выбирается некоторая исходная точка x^0. Задается величина шага Δ_i, которая может быть различной для разных координатных направлений и изменяться в процессе поиска.

Если значение ЦФ в пробной точке меньше значения ЦФ в исходной точке, то шаг поиска успешный. В противном случае из исходной точки делается шаг в противоположном направлении. После перебора всех n координат исследующий поиск завершается. Полученная точка называется *базовой.*

Поиск по образцу. Осуществляется шаг из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей эту точку с предыдущей базовой. Новая точка образца определяется по формуле:

$$x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1}).$$

Как только движение по образцу не приводит к уменьшению ЦФ, точка x_p^{k+1} фиксируется в качестве временной базовой точки и вновь проводится исследующий поиск. Если в результате получается точка с меньшим значением ЦФ, чем в точке x^k, то она рассматривается как новая базовая точка x^{k+1}. Но если исследующий поиск неудачен, то следует вернуться в точку x^k и провести исследующий поиск с целью выявления нового направления минимизации. В конечном итоге возникает ситуация, когда такой поиск не приводит к успеху. В этом случае уменьшается шаг путем введения коэффициента α и возобновляется исследующий поиск.

Схема алгоритма Хука – Дживса

Введем следующие обозначения: x^k - текущая базовая точка; x^{k-1} - предыдущая базовая точка; x_p^{k+1} - точка, построенная при движении по образцу; x^{k+1} - следующая (новая) базовая точка.

Критерий останова: $\|\Delta x\| \le \varepsilon$.

Шаг 1. Определить начальную точку x^0; приращения (шаги) $\Delta_i,\ i=\overline{1,n}$; коэффициент уменьшения шага $\alpha > 1$; параметр окончания поиска .

Шаг 2. Провести исследующий поиск.

Шаг 3. Был ли исследующий поиск удачным (найдена ли точка с меньшим значением ЦФ)?

Да: переход на Шаг 5. Нет: продолжить, т.е. переход на Шаг 4.

Шаг 4. Проверка на окончание поиска. Выполняется ли неравенство $\|\Delta x\| \le \varepsilon$? Да: окончание поиска, т.е. текущая точка аппроксимирует точку экстремума x^*.

Нет: уменьшить приращение $\Delta_i / \alpha;\ i = 1, 2, \ldots, n$. Переход на Шаг 2.

Шаг 5. Провести поиск по образцу: $x_p^{k+1} = x^k + (x^k - x^{k-1})$.

Шаг 6. Провести исследующий поиск, используя точку x_p^{k+1} в качестве временной базовой точки. Пусть в результате получена точка x^{k+1}.

Шаг 7. Выполняется ли неравенство: $f(x^{k+1}) < f(x^k)$?

Да: положить $x^{k-1} = x^k;\ \ x^k = x^{k+1}$. Переход на Шаг 5.

Нет: переход на Шаг 4.

Пример 7.1. Найти точку минимума ЦФ

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

начальная точка: $x^0 = [-4; -4]^T$.

Решение. Зададим следующие величины:

$\Delta x = [1;\ 1]^T$ - векторная величина приращения шага;

$\alpha = 2$ - коэффициент уменьшения шага Δx;

$\varepsilon = 10^{-4}$ - параметр окончания поиска.

Итерации начинаются с исследующего поиска вокруг точки x^0, которой соответствует значение ЦФ $f(x^0)=272$.

Фиксируя переменную $x_2=-4$, дадим приращение x_1:

$x_1=-4+1 \to f(-3;-4)=200 < f(x^0) \to$ успех.

Далее, фиксируем $x_1=-3$ и дадим приращение x_2:

$x_2=-4+1 \to f(-3;-3)=153<200 \to$ успех.

Таким образом, в результате исследующего поиска найдена точка $x^1=[-3;-3]^T$, в которой значение ЦФ $f(x^1)=153$.

Так как исследующий поиск был удачным, переходим к поиску по образцу:

$x_p^2=x^1+(x^1-x^0)=[-2;-2]^T$; $\qquad f(x_p^2)=68$.

Далее проводится исследующий поиск вокруг точки x_p^2. В результате получаем точку $x^2=[-1;-1]^T$, в которой значение ЦФ $f(x^2)=17$.

Поскольку $f(x^2)<f(x^1)$, поиск по образцу следует считать успешным, и x^2 становится новой базовой точкой. Итерации продолжаются до тех пор, пока уменьшение величины шага не укажет на окончание поиска в ε-окрестности точки минимума $x^*=[0;0]^T$.

7.2 Градиентные методы

7.2.1 Метод наискорейшего спуска (метод Коши)

В этом методе (МК) λ_k выбираются так, чтобы минимизировать функцию по λ:

$$g(\lambda)=f\left[x^k-\lambda\nabla f(x^k)\right]$$

на множестве значений $\lambda \ge 0$ (одномерная минимизация).

Алгоритм Коши

Шаг 1. Выбрать начальную точку x^0.

Шаг 2. На k -ой итерации, где $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$, найти такое λ_k, что

$$f\left(x^k + \lambda_k d_k\right) = \min_{\lambda \geq 0} f\left(x^k + \lambda d_k\right).$$

Положить $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$.

Шаг 3. Проверка критерия останова.

Да: окончание поиска $\rightarrow$ конец. Нет: $k = k+1$, $\rightarrow$ Ш. 2.

Пример 7.2. Методом Коши найти

$$\min\ f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;\ x^0 = [10;10]^T.$$

Критерии останова: $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| \leq \varepsilon$ или $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leq \varepsilon$.

Решение. Вычислим компоненты градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 16x_1 + 4x_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 4x_1.$$

С помощью формулы $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f\left(x^0\right)$ построим первое приближение:

$$x^1 = x^0 - \lambda_0 \nabla f\left(x^0\right).$$

Выберем λ_0 таким образом, чтобы минимизировать функцию по λ:

$$f\left(x^1\right) \rightarrow \min_{\lambda} \rightarrow \lambda_0 = 0{,}056.$$

Следовательно: $x^1 = [-1{,}18; 2{,}14]^T$. Далее найдем точку

$$x^2 = x^1 - \lambda_1 \nabla f\left(x^1\right),$$

вычислив градиент в точке x^1 и проведя поиск вдоль прямой.

Данные, полученные при проведении итерации на основе одномерного поиска по методу квадратичной интерполяции, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

k	x_1^k	x_2^k	$f(x^k)$
1	-1,2403	2,13	24,23
2	0,1441	0,1447	0,354
3	-0,0181	0,0309	0,0052
4	0,0021	0,0021	0,0000

Несмотря на то, что МК не имеет большого практического значения, он реализует важнейшие шаги большинства градиентных методов.

7.2.2 Метод Ньютона (МН)

Итерационная формула МН имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f\left(x^k\right)\right]^{-1} \nabla f\left(x^k\right).$$

Эта формула есть не что иное, как МН в применении к решению системы нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание. В МН и направление, и шаг перемещения фиксированы.

Если $f(x)$ строго выпуклая функция, то МН сходится за одну итерацию.

Пример 9.3. Методом Ньютона найти

$$\min\ f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \text{ где } x^0 = [10;10]^T.$$

Решение. Найдем градиент и матрицу Гессе в начальной точке

$$\nabla f(x) = (16x_1 + 4x_2; 10x_2 + 4x_1),$$

$$H_f(x) = \nabla^2 f\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу МН, получаем:

$$x^1 = [10;10]^T - \frac{1}{144} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix} = [0;0]^T,$$

что совпадает с точным решением.

Если функция $f(x)$ не квадратичная, то МН не отличается высоким быстродействием и надежностью.

7.3 Практическое задание №7

1) С помощью пакета Mathcad построить график функции

2) Найти минимум функции «вручную» с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя:

а) метода Хука-Дживса;

б) метод наискорейшего спуска;

в) метод Ньютона.

3) Найти минимум функции с помощью встроенной функции пакета Mathcad и сравнить с результатами задания 2.

7.3.1 Варианты задания

1) $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$
$\overline{x} = (0;3);\ \overline{x}^0 = (3;2)$

2) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2$
$\overline{x} = (0;0); \overline{x}^0 = (5,23;4,41)$

3) $f(x) = 4 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{2/3}$
$\overline{x} = (0;0); \overline{x}^0 = (2,31;4,27)$

4) $f(x) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \left(\exp\left(-x_1^2 - x_2^2\right) - 1\right)$
$\overline{x} = (0;0); \overline{x}^0 = (1,5;2)$

5) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2$
$\overline{x} = (1;1); \overline{x}^0 = (1,5;0,7)$

6) $f(x) = 3x_1 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2$
$\overline{x} = \left(-1; -\frac{2}{3}\right); \overline{x}^0 = (0,78;1)$

7) $f\left(x\right)=x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2};\ x_{1,2}>0$

$\overline{x}=\left(5;2\right);\overline{x}^0=\left(2;2\right)$

8) $f\left(x\right)=x_1^2+x_2^3-2\ln x_1-18\ln x_2;\ x_{1,2}>0$

$\overline{x}=\left(1;1,817\right);\overline{x}^0=\left(2;1\right)$

9) $f\left(x\right)=2x_1^3-x_1x_2^2+5x_1^2+x_2^2$

$\overline{x}=\left(0;0\right);\overline{x}^0=\left(0,3;0,5\right)$

10) $f\left(x\right)=2-\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}$

$\overline{x}=\left(0;0\right);\overline{x}^0=\left(3;5\right)$

11) $f\left(x\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1+6x_2-2x_3$

$\overline{x}=\left(2;-3;1\right);\overline{x}^0=\left(10;20;30\right)$

12) $f(x)=100\cdot(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$

$\overline{x}=\left(1;1\right);\overline{x}^0=\left(-1,2;0\right)$

13) $f(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_1+x_2^2-11)^2$

четыре локальных минимума

$\overline{x}=\left(2,7;3,7\right);\overline{x}=\left(2,8541;3,8541\right);$

$\overline{x}=\left(3,7;-2,7\right);\overline{x}=\left(-3,8541;2,8541\right);$

сходимость обеспечена из любой начальной точки

14) $f(x)=\left(\dfrac{x_1-3}{100}\right)^2-(x_2-x_1)+\exp\ [20\cdot(x_2-x_1)]$

$\overline{x}=\left(3;2,850214\right);\overline{x}^0=(0;-1)$

Очень трудно найти минимум численными методами.

Можно облегчить задачу,если убрать 100 из знаменателя.

15) $f(x)=2x_1^3+4x_1x_2^2-10x_1x_2+x_2^2$

$\overline{x}=\left(1;1\right);\overline{x}^0=\left(1,2;0,75\right)$

16) $f(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$
$\overline{x} = (2;1); \overline{x}^0 = (7;4)$

17) $f(x) = 2 \cdot x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$
$\overline{x} = (0;0); \overline{x}^0 = (2;2)$

18) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$
$\overline{x} = (3;1); \overline{x}^0 = (0;0)$

19) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$
$\overline{x} = (-0{,}143; -0{,}428); \overline{x}^0 = (0;0)$

20) $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$
$\overline{x} = (0;0); \overline{x}^0 = (-1;-1)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 637 с. (40 экз.).
2. Мицель А. А. Вычислительные методы : учеб. пособие / А. А. Мицель. – Томск : В-Спектр, 2010. – 264 с. (50 экз.).
3. Мицель А. А. Практикум по численным методам / А. А. Ми-цель. – Томск : ТУСУР, 2004. – 196 с. (52 экз.).
4. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы: Учебное пособие для вузов [Электронный ресурс] / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – СПб. : Лань, 2023. – 672 с. – URL : https://e.lanbook.com/book/327497 (дата обращения 15.03.2024)
5. Романенко В. В. Вычислительная математика. Лабораторные работы / В. В. Романенко. – Томск : ТУСУР, 2006. – 114 с. (97 экз.).
6. Самарский А. А. Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич, Е. А. Самарская. – М. : Едиториал УРСС, 2003.