

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

**Томский государственный университет систем
управления и радиоэлектроники (ТУСУР)**

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.Я. Суханов

Исследование операций

Учебно-методическое пособие по лабораторным занятиям, самостоятельной и
индивидуальной работе для студентов всех направлений

Томск
2023

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.185
С910

Рецензент:

Исакова А.И., доцент кафедры Автоматизированных систем управления ТУСУР,
канд. техн. наук

Суханов, Александр Яковлевич

С910 Исследование операций : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ, самостоятельной и индивидуальной работе для студентов всех направлений / А. Я. Суханов. – Томск: ТУСУР, 2023. – 99 с.

Настоящее учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ и самостоятельной работе студентов составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО). Учебное пособие содержит задания на выполнение лабораторных работ по дисциплине исследование операций, теоретические материалы, примеры программных реализаций и хода решений, набор вопросов на теоретическое освоение математических и теоретических основ исследования операций, систем массового обслуживания и элементов теории игр. Даны все необходимые указания для выполнения лабораторных студентами всех направлений специальностей и бакалавриата.

Одобрено на заседании кафедры АСУ протокол № 11 от 23 ноября 2023 года.

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.185

© Суханов А. Я., 2023
© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2023

Оглавление

Введение	5
1 Исследование операций. Введение в дисциплину	6
1.1 Контрольные вопросы по терминологии Исследования операции.....	13
2 Векторная операция	14
2.1 Метод уступок.....	16
2.1.1 Метод равномерной уступки	16
2.1.2 Принцип справедливой абсолютной уступки	17
2.1.3 Принцип относительной справедливой уступки	18
2.1.4 Принцип последовательных уступок	19
2.2 Метод идеальной точки.	19
2.3 Метод ограничений.....	20
2.4 Метод свертки векторной операции.....	23
2.4.1 Теорема о свертке	26
2.5 Практические задания по векторной операции	28
2.6 Контрольные вопросы по теории.....	29
3 Задача линейного программированию и ОСНОВЫ анализа на чувствительность	30
3.1 Постановка и классификация задач математического программирования.....	30
3.2 Основы анализа на чувствительность.....	36
3.2.1 Первая задача анализа на чувствительность	36
3.3 Вторая задача анализа на чувствительность. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?.....	39
3.4 Третья задача анализа на чувствительность	40
3.5 Условия Куна-Таккера	41
3.6 Задание на лабораторную работу по линейному программированию.....	42
4 Динамическое программирование. Задача о распределении ресурсов	43
4.1 Алгоритм метода динамического программирования.....	43
4.2 Задача о распределении ресурсов	44
4.2.1 Распределение ресурсов по неоднородным этапам	44
4.2.2 «Классическая» задача распределения ресурсов	45
4.2.3 Задача резервирования ресурсов	46
4.2.4 Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.	46
4.2.5 Решение «классической» задачи распределения ресурсов	47
4.2.6 Связь различных типов задач распределения ресурсов.....	51
4.2.7 Пример задачи динамического программирования о распределении нескольких ресурсов.....	52
4.3 Задание на задачу динамического программированию по распределению ресурсов	52
5 Генерация случайных величин	54
5.1 Метод численного моделирования (Метод Монте-Карло).....	54
5.2 Моделирование случайных величин с равномерным распределением	54
5.2.1 Общие сведения о моделировании равномерного распределения	54
5.2.2 Псевдослучайные числа	55
5.2.3 Примеры датчиков псевдослучайных чисел	58
5.3 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения	61
5.3.1 Моделирование дискретных случайных величин.....	61
5.3.2 Моделирование случайных событий.....	61
5.3.3 Моделирование непрерывной случайной величины.....	62
5.3.4 Моделирование экспоненциального распределения.....	62
5.3.5 Пуассоновская случайная величина	62
5.3.6 Гауссовская случайная величина.....	63
5.3.7 Случайная величина с логнормальным распределением	64
5.4 Моделирование n-мерной случайной величины.....	64

5.5	Расчет площади или объема методом Монте-Карло.....	65
5.6	Задания на моделирование случайных величин и метод Монте-Карло.....	65
6	Теория Систем Массового Обслуживания (СМО).....	69
6.1	Многоканальная СМО с ожиданием.....	72
6.2	Моделирование систем массового обслуживания.....	74
6.3	Задание на Системы массового обслуживания.....	75
6.4	Контрольные вопросы по теории массового обслуживания.....	76
7	Теория игр.....	77
7.1	Типы игр.....	78
7.1.1	Кооперативная и некооперативная игра.....	78
7.1.2	С нулевой суммой и ненулевой суммой.....	78
7.1.3	Параллельные и последовательные.....	78
7.1.4	С полной или неполной информацией.....	78
7.2	Решение матричной игры $n \times m$ по критерию Гурвица, Сэвиджа, Байеса и Вальда.....	78
7.2.1	Игры с природой.....	78
7.2.2	Критерий Вальда (максиминный).....	79
7.2.3	Критерий максимума (максимаксный).....	79
7.2.4	Критерий Гурвица.....	79
7.2.5	Критерий Сэвиджа (минимаксный).....	80
7.2.6	Критерий Байеса.....	80
7.3	Чистые и смешанные стратегии.....	80
7.4	Решение матричной игры (2×2)	82
7.5	Упрощение матричной игры.....	87
7.6	Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$	89
7.7	Решение коалиционных игр, нахождение ядра и вектора Шепли.....	92
7.7.1	Ядро.....	93
7.7.2	Вектор Шепли.....	94
7.8	Задания по теории игр.....	95
7.9	Контрольные вопросы по теории игр.....	96
	Список использованных источников.....	97
	Приложение А. Пример оформления титульного листа отчета.....	98
	Приложение Б. Список экзаменационных вопросов.....	99

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов бакалавров очной формы обучения и содержит теоретический материал по дисциплине «Исследование операций» для студентов бакалавров всех направлений специальностей. Данный курс включает в себя также элементы теории игр и теории массового обслуживания и формирует у студента навыки исследователя, применяющего системный подход к решению возникающих задач, объясняя необходимость математического моделирования практически во всех областях человеческой деятельности на простых примерах о производстве, а так же объясняя важность применения подобных подходов.

Целью дисциплины «Исследование операций» является овладение методикой операционного исследования, усвоение вопросов теории и практики построения и анализа операционных моделей в системах различного назначения.

Основными задачами изучения дисциплины является:

Обучение приемам и методам исследования операций, математическим методам оптимизации, а также методам математического моделирования операций теории игр.

Обучение основам и методам решения задач теории массового обслуживания.

Получение навыков решения задач линейного и динамического программирования, методам анализа принятого решения на устойчивость.

1 Исследование операций. Введение в дисциплину

Исследование операций (ИО) – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением математических и количественных методов для нахождения оптимальных решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности или дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности [1-6].

Происхождение названия "**Исследование Операций**" объясняется историческими причинами. Впервые исследования в этой области были выполнены в Англии в период Второй Мировой войны и имели целью помочь командованию принять решения по руководству боевыми операциями. Успех работы привёл к тому, что после войны оформившиеся приёмы и методы исследования операций начали использовать в других областях, где было необходимо управление сложными техническими и экономическими человеко-машинными системами.

В годы Второй мировой войны исследование операций широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по исследованию операций работали в командовании бомбардировочной авиации США, дислоцированном в Великобритании. Ими исследовались многочисленные факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к четырёхкратному повышению эффективности бомбометания. Из-за дислокации в отделе оперативных действий (Operations) дисциплина и получила своё оригинальное название по имени адреса, на который высылались почта для отдела: Operations/Research.

В начале войны боевое патрулирование самолетов союзников для обнаружения кораблей и подводных лодок противника носило неорганизованный характер. Привлечение к планированию специалистов по исследованию операций позволило установить такие маршруты патрулирования и такое расписание полетов, при которых вероятность оставить объект незамеченным была сведена до минимума. Полученные рекомендации были применены для организации патрулирования над Южной Атлантикой с целью перехвата немецких кораблей с военными материалами. Из пяти вражеских кораблей, прорвавших блокаду, три были перехвачены на пути из Японии в Германию, один был обнаружен и уничтожен в Бискайском заливе и лишь одному удалось скрыться благодаря тщательной маскировке.

Решение – выбор из ряда возможностей, имеющихся у организатора.

Чем сложнее и масштабнее планируемое мероприятие, тем менее допустимы в нем "волевые" решения и тем важнее становятся научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать наиболее удачные; установить, достаточно ли имеющейся информации для правильного выбора решения, и если нет-какую информацию нужно получить дополнительно. Слишком опасно в таких случаях опираться на свою интуицию, на "опыт и здравый смысл". В эпоху научно-технической революции техника и технология меняются настолько быстро, что "опыт" просто не успевает накапливаться. К тому же часто идет речь о мероприятиях уникальных, проводимых впервые. "Опыт" в этом случае молчит, а "здравый смысл" легко может обмануть, если не опирается на расчет. Такими расчетами, облегчающими людям принятие решений, и занимается исследование операций.

Особую актуальность приобретает улучшение работы координирующих и управляющих центров, которым предоставлено право принимать ответственные решения. В том числе при управлении какими то объектами, что представляет в общей совокупности автоматизированную систему управления – АСУ.

АСУ можно определить как систему организационно-технического управления,

основанного на использовании достоверной и полной информации, современной вычислительной техники, научных методов для анализа возможных решений.



Рисунок 1.1 – Автоматизированная система управления

Как раз для выработки решений применяемых при управлении АСУ и применяются методы исследования операций. Хотя в настоящее время появляются не только автоматизированные или автоматические системы, напомним, что автоматизированная система предполагает наличие человека в схеме управления, в отличие от автоматической, но и интеллектуальные и интеллектуализированные. Данные системы позволяют вырабатывать новый алгоритм поведения в новых сложившихся условиях, такие системы, например интеллектуальные уже используют алгоритмы обучения с подкреплением.

Приведем классические задачи, которые решались с использованием методики Исследования операций и найдем в них общие закономерности, которые позволят нам дать определения для терминологии использующейся данной дисциплиной.

1. Продажа сезонных товаров.

Для реализации сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется определить их число, размещение, запасы, количество персонала для получения максимальной прибыли.

2. Снегозащита дорог.

В условиях Крайнего Севера метели, заносащие снегом дороги, представляют серьезную помеху движению. Любой перерыв движения приводит к экономическим потерям. Существует ряд возможных способов снегозащиты (профиль дороги, защитные щиты и т. д.), каждый из которых требует известных затрат на сооружение и эксплуатацию. Известны господствующие направления ветров, есть данные о частоте и интенсивности снегопадов. Требуется разработать наиболее эффективные экономически средства снегозащиты (какую из дорог, как и чем защищать?) с учетом потерь, связанных с заносами.

3. Выборочный контроль продукции.

Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер контрольной партии, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль.

4. Медицинское обследование.

Известно, что в каком-то районе обнаружены случаи опасного заболевания. С целью выявления заболевших (или носителей инфекции) организуется медицинское обследование жителей района.

5. Библиотечное обслуживание.

Крупная библиотека обслуживает запросы, поступающие от абонентов. В фондах библиотеки имеются книги, пользующиеся повышенным спросом, книги, на которые требования поступают реже и, наконец, книги, почти никогда не запрашиваемые. Имеется ряд возможностей распределения книг по стеллажам и хранилищам, а также по диспетчеризации запросов с обращениями в другие библиотеки. Нужно разработать такую систему библиотечного обслуживания, при которой запросы абонентов удовлетворяются в максимальной мере.

6. План снабжения предприятий.

Имеются сырьевые базы и предприятия-потребители. Требуется разработать такой план снабжения сырьем каждого предприятия (с какой базы, в каком количестве, каким видом транспорта и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки. Здесь показатель эффективности – суммарные расходы на перевозки сырья в единицу времени ($R \rightarrow \min$).

7. Постройка участка магистрали.

При постройке участка магистрали в распоряжении имеются определенные средства (трудовые и материальные ресурсы), требуется спланировать строительство (распределить ресурсы) так, чтобы строительство было завершено в минимальный срок. Здесь необходимо учитывать случайные факторы (метеоусловия, отказы техники), и тогда показатель эффективности – среднее ожидаемое время окончания строительства ($T \rightarrow \min$).

8. Сеть торговых точек.

Требуется спланировать количество торговых точек, их размещение, товарные запасы, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи. Здесь показатель эффективности – средняя ожидаемая прибыль от реализации товаров ($\Pi \rightarrow \max$).

9. Задача о комплексном использовании сырья.

Исходное сырье или материал может перерабатываться различными технологическими способами. В каждом случае получается в различном сочетании несколько видов продукции. Требуется найти план переработки, при котором заданные объемы конечной продукции получались бы с наименьшими затратами исходных материалов. Одним из распространенных примеров применения этого типа задач является оптимальный раскрой материалов.

10. Противолодочный рейд.

Требуется рационально организовать боевую операцию по уничтожению подводной лодки группой самолетов (выбрать маршруты самолетов, высоту полета, способ атаки). Здесь показатель эффективности – вероятность того, что лодка будет уничтожена.

11. Распределение изделий между предприятиями (оборудования между участками) – минимизация суммарных затрат на изготовление всех изделий с учетом времени производства.

12. Регулирование парка вагонов (распределение вагонов разных типов под различные грузы) - минимизация суммарных затрат на погрузку.

13. Выбор рациональных пропорций производства и использования энергоресурсов при минимуме затрат (объем добычи угля и план распределения различных сортов угля между энергетическими установками, обеспечивающий их потребности наиболее экономным путем).

14. Задача планирования добычи угля в априорных решающих правилах.

В угольной промышленности технико-экономические показатели сильно зависят

от природных факторов, которые не всегда могут быть предсказаны заранее. Это: мощность и угол падения пластов, обводнённость участков, склонность к выбрасыванию газов, физико-механические свойства угля и пород, надёжность оборудования, эксплуатационные расходы. Природные условия сказываются на надёжности оборудования, эксплуатационных расходах и т. д. и, в конечном счете, на области определения допустимых решений. Поэтому выбор оптимального проекта плана (решения) – это задача стохастического программирования.

15. Задача о ранце.

Из заданного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес», требуется отобрать некое число предметов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес.

16. Задача коммивояжёра.

Задача, заключающаяся в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. В условиях задачи указываются критерий выгодности маршрута (кратчайший, самый дешёвый, совокупный критерий и тому подобное) и соответствующие матрицы расстояний, стоимости и тому подобного.

17. Транспортная задача.

Математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение. Для простоты понимания рассматривается как задача об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

18. Задача об упаковке в контейнеры.

Задача заключается в упаковке объектов предопределённой формы в конечное число контейнеров предопределённой формы таким способом, чтобы число использованных контейнеров было наименьшим или количество или объём объектов (которые упаковывают) были наибольшими.

В соответствии с общими чертами характеризующим данные задачи вырабатываются и общие приемы решения подобных задач, в совокупности составляющие методологическую схему и аппарат исследования операции. Из приведённых выше примеров следует, что не для всех из них на практике применяются математические методы обоснования решений; в некоторых случаях решения принимаются интуитивно. Однако с течением времени доля задач, где для выбора решения применяются математические методы, постоянно растёт.

Рассмотрим основные понятия, выработанные данной дисциплиной.

Операция – всякое мероприятие или система действий, объединённые единым замыслом и направленные на достижение какой-то цели, существующее во времени, проходящее различные этапы(фазы) развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью.

Примеры

1. Разработка плана снабжения предприятий при минимальных затратах.
2. Организация продажи сезонных товаров при максимальной экономической эффективности.
3. Обеспечение требуемого качества продукции при минимальных расходах на контроль
4. Организация системы медицинского обслуживания для скорейшего прекращения распространения инфекции.

Оперирующие стороны – отдельные лица и коллективы, объединённые организационным руководством и активно стремящиеся к достижению поставленной цели.

Активные средства проведения операции – совокупность материальных,

энергетических, денежных, трудовых и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых оперирующей стороной для обеспечения успешного хода *операции* и достижения её цели.

Стратегии оперирующей стороны в данной операции – допустимые (не выходящие за пределы технических, организационных, физических возможностей) способы расходования ею имеющихся *активных средств*. Среди допустимых находятся и *оптимальные стратегии*.

Действующие факторы операции – объективные условия и обстоятельства, определяющие её особенности и непосредственно влияющие на её исход. Различают **факторы**:

Определённые (точно известные)

Неопределённые (имеющие вероятностную природу или проявляющиеся беспорядочно)

Все они разделяются на:

Контролируемые *оперирующей стороной*

Неконтролируемые *оперирующей стороной*

Пример определённого неконтролируемого фактора – сила притяжения Земли или количество минут в часах, максимальное время трудового рабочего дня с точки зрения работника и работодателя в отношении трудового законодательства.

Пример контролируемого фактора – количество войск в армии (известно количество человек в армии и это количество можно менять путем мобилизации), максимальное время трудового рабочего дня с точки зрения государственной законодательной власти.

Пример неопределённого неконтролируемого фактора – температура в этот день через год, время прихода маршрутки на остановку с точки зрения пассажира на остановке.

Критерий эффективности операции (целевая функция) – показатель требуемого, или ожидаемого, или достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью *операции*. Важнейшая функция *критерия* – возможность сравнительной оценки различных *стратегий* до начала их реализации.

Правильный выбор показателя эффективности является необходимым условием полезности исследования, применяемого для обоснования решения.

Показатель эффективности часто называют целевой функцией. Для иллюстрации принципов выбора показателя эффективности вернемся опять к нашим примерам. Выберем для каждого из них естественный показатель эффективности и укажем, требуется его максимизировать или минимизировать.

1. План снабжения предприятий.

Задача операции-обеспечить снабжение сырьем при минимальных расходах на перевозки. Показатель эффективности R-суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например, месяц ($R \Rightarrow \max$)

2. Продажа сезонных товаров.

В качестве показателя эффективности можно взять среднюю ожидаемую прибыль П от реализации товаров за сезон ($\Pi \Rightarrow \max$)

3. Выборочный контроль продукции.

Естественный показатель эффективности, подсказанный формулировкой задачи, это средние ожидаемые расходы R на контроль в единицу времени, при условии, что система контроля обеспечивает заданный уровень качества например, средний процент брака не выше заданного ($R \Rightarrow \max$)

4. Медицинское обследование.

В качестве показателя эффективности можно выбрать средний процент (долю) Q больных и носителей инфекции, которых удалось выявить ($Q \Rightarrow \max$).

Состоянием операции в некоторый момент времени t называется совокупность

ее характеристик (особенностей), проявляющихся в этот момент и отражающих объективно сложившееся положение дел.

Всякая операция представляет собой процесс, существующий во времени, проходящий различные этапы (фазы) развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью.

Математическая модель – формальные соотношения, устанавливающие связь принятого *критерия эффективности* с *действующими факторами операции*. Она должна быть достаточно полной (т.е. учитывать все важные *факторы*), но достаточно простой и исключать второстепенные *факторы* (чтобы можно было установить обозримые зависимости).

Аналитические (детерминированные)

Статистические и игровые

Требования к модели противоречивы. С одной стороны, она должна быть достаточно полной, т.е. в ней должны быть учтены все важные факторы, от которых существенно зависит исход операции. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было установить обозримые (желательно - аналитические) зависимости между входящими в нее параметрами. Модель не должна быть "засорена" множеством мелких, второстепенных факторов, их учет усложняет математический анализ и делает результаты исследования трудно обозримыми.

Типичный пример модели операции и задачи исследования операций, найти оптимум:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (1.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Второе выражение ограничений добавляет условие неотрицательности на переменные (контролируемые действующие факторы).

Типичный пример решения задачи в инженерной и научной практике сводится к процессу построению модели и постепенному ее уточнению (рисунок 1.2). Примером может служить уточнение Ньютоновской механики на случай скоростей близких к скоростям света.

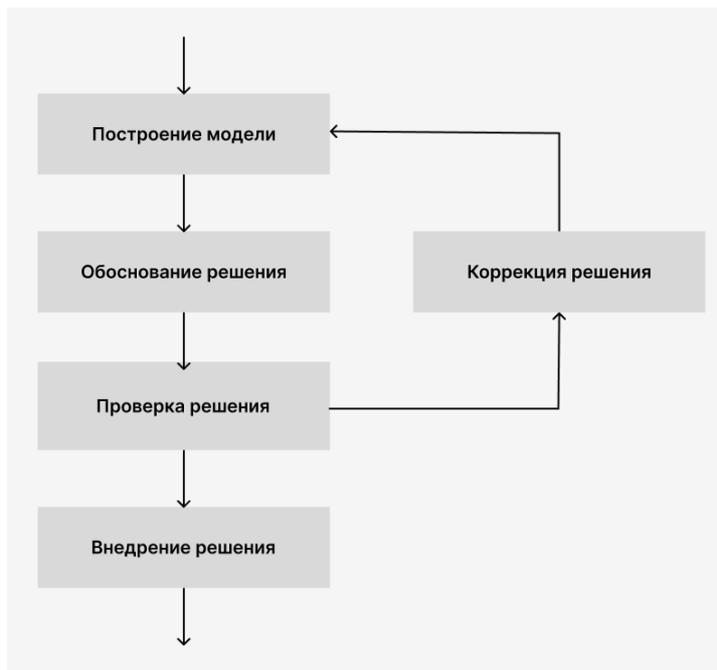


Рисунок 1.2 – Схема показывающая сущность процесса моделирования

При отсутствии неконтролируемых неопределенных факторов, задача является детерминированной, в случае же наличия таких факторов задача является недетерминированной, во втором случае в модели кроме констант и переменных присутствуют и случайные величины.

Детерминированный случай:

$$W = W(a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots) \quad (1.3)$$

Когда все факторы заданы заранее: условия (a), они же определенные неконтролируемые факторы и решения (x), являющиеся контролируруемыми факторами, которые мы ищем решая задачу оптимизации.

Недетерминированный случай:

$$W = W(a_1, a_2, \dots, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) \quad (1.4)$$

Здесь добавляются неизвестные случайные факторы или величины (y), они же неопределенные неконтролируемые.

При наличии неопределенных неконтролируемых факторов задача поиска оптимального решения теряет определенность, т.к. нельзя максимизировать неизвестную величину. Это превращает её в **задачу принятия решения в условиях неопределённости**.

Для того чтобы в этом случае решить задачу первый способ использует сведение задачи к детерминированной, путем замены случайных величин на их средние или наиболее вероятные значения. Например, температура на завтра хоть и является случайной величиной, но мы можем использовать прогноз погоды на завтра и взять среднюю температуру за день.

Другой способ это оптимизация в среднем:

$$\bar{W} = M[W] = \int \int \dots \int W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) f(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots \quad (1.5)$$

В данном случае $f(y_1, y_2, \dots)$ – функция совместной плотности распределения случайных величин y, x – переменные – неопределённые контролируемые факторы, y – случайные величины (неопределенные неконтролируемые факторы), α – константы – определённые неконтролируемые факторы.

При этом функционал, который представляет собой математическое ожидание первого порядка оптимизируется по переменным x. Соответственно, в зависимости от критерия эффективности производится максимизация или минимизация среднего значения, предполагая, что операция производится множество раз и выбирается такое решение, которое приведет, например, к максимизации выигрыша в среднем. Можно привести примеры такой оптимизации в среднем, в задачах обучения с подкреплением или на примере стратегий поведения у живых организмов. Например, утки каждый раз на зиму улетают на Юг, а затем возвращаются, такая стратегия позволит выживать их виду. Обучение с подкреплением часто оптимизирует среднюю сумму получаемых выигрышей, например, в алгоритмах Actor critic (A3C, A2C), policy gradients.

Для решения подобных задач оптимизации разработаны хорошо известные методы оптимизации. Среди них используются методы градиентного спуска, использующие первые и вторые производные и частные производные от функционала, так же используются методы случайного поиска и методы, использующие только значение самого функционала. Выделяют так же бионические методы, заимствующие природные механизмы для решения задач оптимизации. Например, генетические алгоритмы, дифференциальной эволюции, алгоритмы имитации иммунной системы, клональные алгоритмы, алгоритм роя частиц, муравьиный алгоритм, данные алгоритмы позволяют решать и NP - сложные задачи, используя соответствующие заимствованные природные эвристики, в отличие от градиентных алгоритмов более вероятно позволяют найти глобальный оптимум.

1.1 Контрольные вопросы по терминологии Исследования операции

Дать определение операции, оперирующей стороне, активным средствам, критерию эффективности, стратегиям. Привести примеры операций и критериев эффективности.

Дать определение действующим факторам операции, привести их примеры и какими они бывают.

Как можно поставить задачу ИО в условиях неопределенных неконтролируемых факторов, какие способы решения могут быть.

2 Векторная операция

Векторная операция представляет собой вектор частных критериев эффективности, каждый из которых зависит от действующих факторов операции. Здесь X представляют собой контролируемые факторы.

$$W(X) = (W_1(X), W_2(X), \dots, W_n(X)) \quad (2.1)$$

$X \in \Omega_x$ - область допустимых решений – когда допустимое множество всех возможных точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи.

$\Omega_x^c \in \Omega_x$ - область согласия – когда возможно улучшение качества одновременно всех критериев или, по крайней мере, не ухудшение одного при увеличении другого.

$\Omega_k^c \in \Omega_x$ - область компромиссов – когда существуют противоречия между некоторыми критериями.

Очевидно, что: $\Omega_x = \Omega_x^k \cup \Omega_x^c$, $\Omega_x^k \cap \Omega_x^c = \emptyset$, $\Omega_x^k = \Omega_x / \Omega_x^c$.

В область согласия входят решения, для любого из которых можно найти решение из области компромиссов, превосходящее или равное по соответствующим критериям.

Область же компромиссов часто еще называют областью оптимальных по Парето решений и в данной области все решения между собой несравнимы по Парето, при этом сравнивая два решения, по одним из критериев какое-то решение будет лучше, по другим хуже.

В области оптимальных по Парето всегда находятся лучшие решения, для области согласия всегда можно найти решение которое будет лучше.

Для векторной операции всегда существует ряд задач, которые необходимо решить.

Выделить область компромиссов, найти и выбрать одно какое-то решение в области компромиссов, провести нормализацию критериев.

Выделим общие проблемы **векторной оптимизации**:

Определение **области компромисса**

Выбор **схемы компромисса**

Нормализация **критериев**

Учёт приоритета **критериев**

Для определения области компромиссов можно воспользоваться определением области компромиссов и области согласия, взять какую-то точку в области допустимых решений и проверить есть ли лучшая точка с учетом поставленной задачи оптимизации частных критериев. Если такая точка есть, то это предыдущая входит в область согласия, затем постепенно сдвигаясь в области допустимых решений выделить область, соответствующую области компромиссов. Пример поиска области компромиссов в случае задачи максимизации векторных критериев приведен на рисунке 2.1.

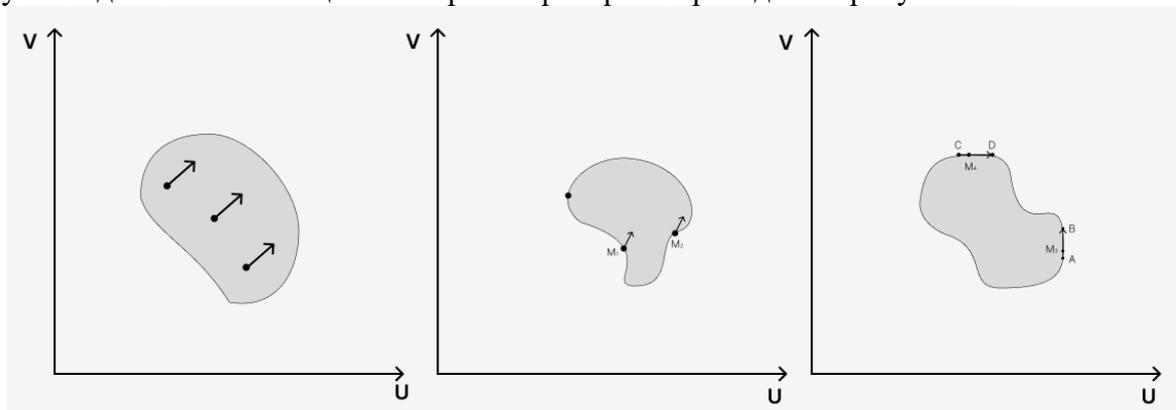


Рисунок 2.1 – Поиск области компромиссов

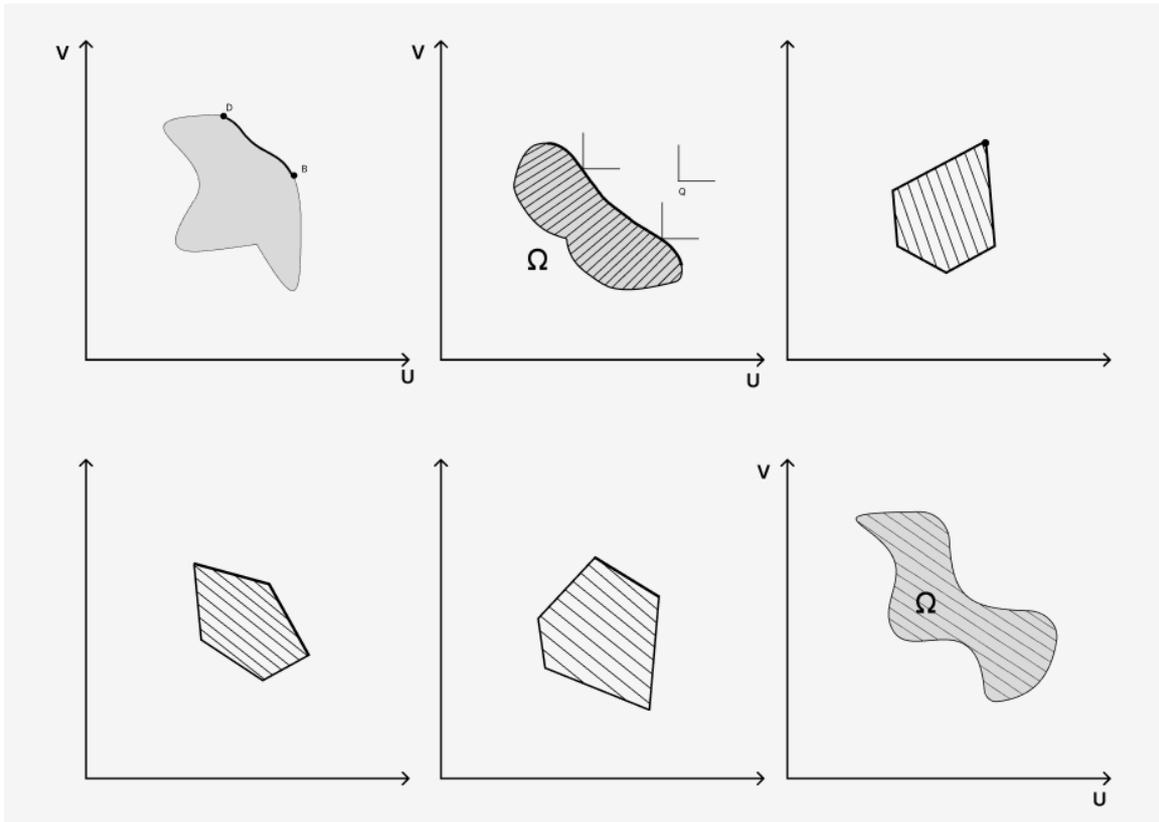


Рисунок 2.2 – Пример области компромиссов для случая максимизации критериев

На рисунке 2.2 приведен еще один способ определения области компромиссов, путем построения перпендикулярных векторов в виде осей координат в направлении оптимизации, при этом если эти вектора пересекают только в своем начале область допустимых решений, то это точка в области компромиссов.

Можно то же самое дать через сравнимость по Парето и с использованием операций над множествами.

Пусть дана векторная операция с минимизируемыми критериями, если это не так, то максимизацию всегда можно свести к задаче минимизации и наоборот, взяв отрицательно значение функционала, иногда так же прибегают к делению, но тогда

функционал не должен принимать нулевое значение

$$\begin{cases} \Phi(x) \rightarrow \max \\ \Psi(x) \rightarrow \min \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi(x) \rightarrow \max \\ -\Psi(x) \rightarrow \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Phi(x) \rightarrow \min \\ \Psi(x) \rightarrow \min \end{cases} :$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x))^T \quad (2.2)$$

$$\min\{f(x): x \in X\} \quad (2.3)$$

Тогда для данной задачи выделим несколько множеств:

$f_i(x) < f_i(y), i \in L(x, y)$, множество частных критериев, для которых решение (стратегия) x лучше решения (стратегии) y .

$f_i(x) > f_i(y), i \in G(x, y)$, множество частных критериев, для которых, решение x хуже решения y .

$f_i(x) = f_i(y), i \in E(x, y)$, множество критериев, для которых стратегии x и y дают одинаковый результат, равнозначны.

Если множество G пустое $G(x, y) = \emptyset$, то стратегия x не хуже стратегии y .

Если множество G пустое $G(x, y) = \emptyset$ и множество L не пустое $L(x, y) \neq \emptyset$, то стратегия x лучше стратегии y по Парето.

Если множество G и L не пустое $G(x, y) \neq \emptyset$, $L(x, y) \neq \emptyset$, то стратегия x и стратегия y несравнимы по Парето.

Область оптимальных по Парето (она же компромиссов) определяется как множество, где нет других лучших по Парето решений.

Как можно легко убедиться в области согласия есть несравнимые по Парето, но также есть и лучшие по Парето, в области же компромиссов все решения несравнимые по Парето.

Рассмотрим пример:

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, f \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, f \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, f \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Сравним первые два решения с точки зрения задачи минимизации, окажется, что первое решение лучше второго, так как по первому критерию соблюдается равенство, а по второму критерию у первого решения (стратегии) меньшее значение. При этом для первого решения все остальные являются несравнимыми по Парето. Также для третьего решения по сравнению с четвертым, оно оказывается лучше, но для него больше нет сравнимых. Таким образом, первое и третье решение оказываются в области оптимальных по Парето.

Далее рассмотрим методы связанные с поиском оптимального решения в области компромиссов, это методы уступок, свертки, метод ограничений, метод идеальной точки.

Метод уступок – один или несколько критериев снижаются, в зависимости от совокупности других критериев (постепенно ослабляют первоначальные требования, невыполнимые совместно).

Метод идеальной точки – в области допустимых значений неизвестных ищется такая их совокупность, которая способна обеспечить набор значений критериев, в том или ином смысле ближайших к наилучшему, но недостижимому (точки утопии).

Метод свёртывания – сведение многокритериальной задачи к задаче с одним критерием.

Метод ограничений – множество допустимых значений неизвестных уменьшается путём осмысленного введения дополнительных ограничений.

Метод анализа иерархий – на основании суждений экспертов оценивается вклад в общую оценку каждого критерия.

2.1 Метод уступок

2.1.1 Метод равномерной уступки

Принцип равномерной уступки заключается в приравнивании между собой частных критериев (рисунок 2.3).

Недостаток – при равномерных уступках найденное оптимальное решение может просто не попасть в область компромиссов или даже выйти за пределы области допустимых решений.

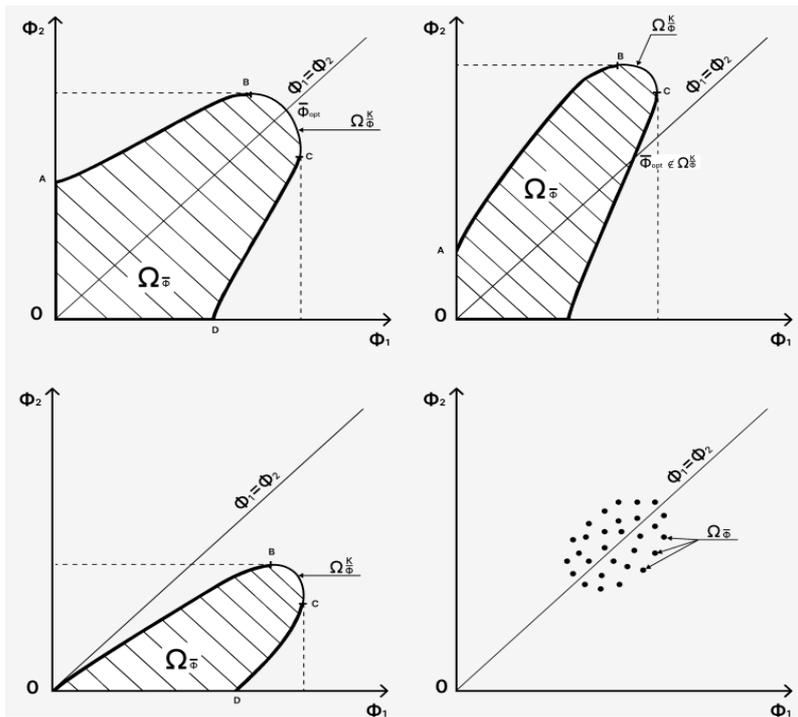


Рисунок 2.3 – Принцип равномерной уступки

2.1.2 Принцип справедливой абсолютной уступки

Справедливым считается такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень снижения одного или нескольких критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня повышения других критериев.

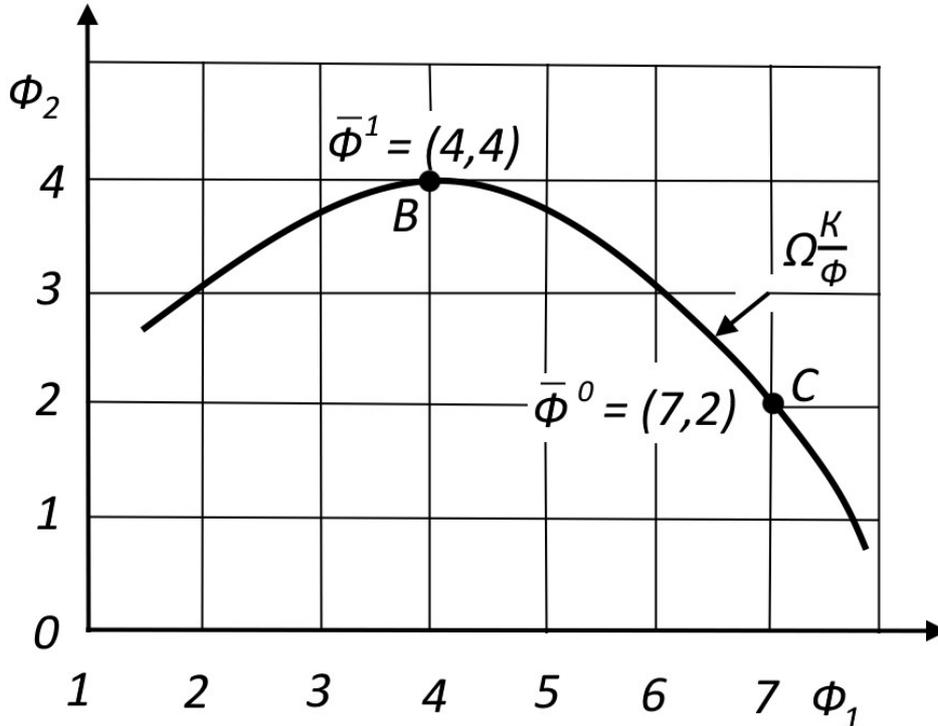


Рисунок 2.4 – Пример сравнения по принципу абсолютной справедливой уступки

Как легко показать метод сводится к максимизации или минимизации суммы частных критериев, и как мы увидим далее, это является частным случаем экономической свертки при коэффициентах свертки равным единицам.

Пусть первое решение лучше второго, в этом случае по принципу абсолютной

справедливой уступки должно наблюдаться превышение улучшения одного критерия по сравнению с ухудшением другого, то есть, например:

$$W_1^1 - W_1^0 \geq W_2^0 - W_2^1$$

Верхний индекс определяет номер решения, нижний номер критерия в векторной операции из двух критериев. Критерий 2 у первого решения ухудшился, но его ухудшение должно быть меньше улучшения первого критерия. Это мы и записали.

Перенесем все в левую часть неравенства.

$$W_1^1 - W_1^0 - W_2^0 + W_2^1 = W_1^1 + W_2^1 - (W_1^0 + W_2^0) \geq 0$$

Выполнение данного условия для всех возможных точек сравнения из области компромиссов может наблюдаться для решения только с максимальной суммой частных критериев:

$$opt \bar{W} = \max_{W \in \Omega_x^k} \sum_i^n W_i \quad (2.4)$$

2.1.3 Принцип относительной справедливой уступки

Справедливым является такой компромисс, при котором суммарный относительный уровень снижения одного или нескольких локальных критериев не превосходит суммарного относительного уровня повышения эффективности по остальным критериям. Важным преимуществом принципа является то, что он инвариантен к масштабу измерения критериев.

$$\sum_i^n \frac{W_i^1 - W_i^0}{W_i^0} \geq 0$$

Данное условие можно свести к максимизации произведения частных критериев.

$$opt \bar{W} = \max_{W \in \Omega_x^k} \prod_i^n W_i \quad (2.5)$$

Пример:

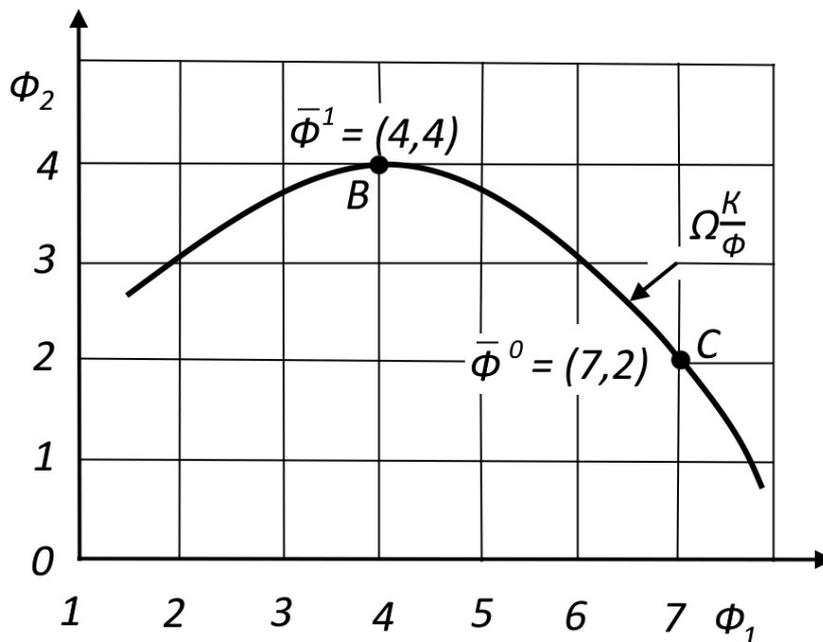


Рисунок 2.5 – Пример сравнения по принципу относительной справедливой уступки

Для примера представленного на рисунке 2.5 получается что решение (7,2) хуже:

$$\frac{7-4}{7} < \frac{4-2}{2}$$

Относительное увеличение меньше чем относительное уменьшение.

2.1.4 Принцип последовательных уступок

Метод состоит в том, что лицо, принимающее решения (ЛПР), работая в режиме диалога с аналитиком-специалистом, последовательно сужает множество точек на границе Парето и в конце концов соглашается остановиться на некоторой компромиссной паре значений критериев.

$$U = \Phi(x, y), V = \Psi(x, y), (x, y) \in w$$

$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset A_5B_4 \supset \dots \quad (2.6)$$

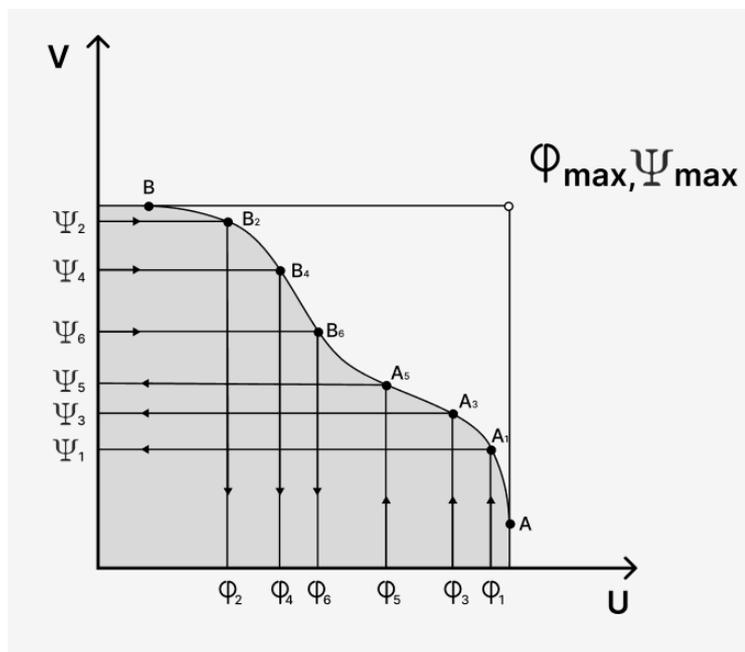


Рисунок 2.6 – Графическое представление метода последовательных уступок

Приведем пример, государство выдает акцизы на продажу табака и пополняет бюджет налоговыми поступлениями, при этом заинтересовано в здоровье людей и повышении продолжительности жизни. Если рассматривать данный график, то видим, что чем больше здоровых людей, тем меньше доход. С другой стороны чем больше доход тем меньше здоровых людей, лицо принимающее решение может условно жертвовать в пользу дохода или здоровья людей, например, можно пожертвовать определенным уровнем дохода, тем самым сдвигаемся в большую сторону по доходам. Конечно, это утрированный пример, тем не менее, он примерно показывает смысл данного способа.

2.2 Метод идеальной точки.

Состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии. Точка утопии находится как точка пересечения оптимальных значений критериев полученных независимо друг от друга. Очевидно, что точка так называется в связи с тем, что данная точка недостижима и находится за пределами области допустимых решений, но при этом она является по всем критериям оптимальной.

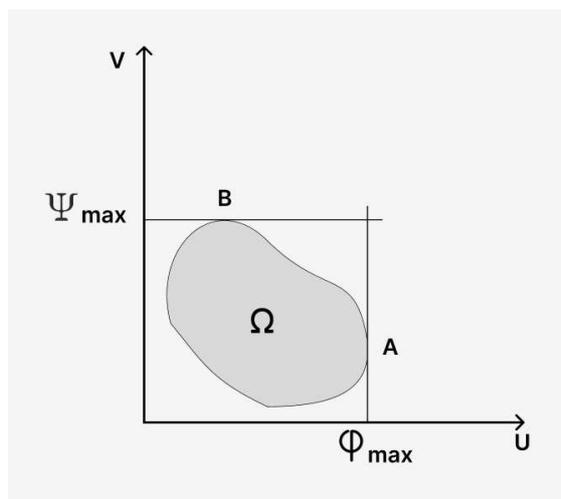


Рисунок 2.7 – Пример точки утопии для задачи максимизации критериев

Рассмотрим метод идеальной точки с точки зрения решения двумерной векторной операции. Предположим, что мы имеем выделенную область компромиссов в виде кусочно-заданной нелинейной функции:

$$V = f_i(U), i = 1..n, U \in (u_i, u_{i+1})$$

Обозначим точку утопии как $(U^*, V^*) = (\max \Phi(x), \max \Psi(y))$, где x применяемая стратегия дающая максимум первого критерия и y стратегия дающая максимум второго критерия.

Запишем задачу поиска идеальной точки как минимизацию расстояния между точкой утопии и идеальной точкой:

$$\min_{U \in U_i} \min_{U_i} \{(U^* - U_i)^2 + (V^* - f_i(U_i))^2\} \quad (2.7)$$

Данную задачу можно решить, например, путем получения производной и приравнивания полученного выражения 0, и затем, применяя стандартные методы решения уравнений с одним неизвестным, так же можно использовать методы оптимизации. К сожалению если область задана кусочно, придется решать так же задачу перебора нескольких вариантов, в зависимости от количества кусочно-заданных частей, затем выбрать наименьшее расстояние.

2.3 Метод ограничений

Относятся к линейным многокритериальным задачам, когда у критериев есть свой вес, в зависимости от степени важности.

В методе уступок и методе идеальной точки, заданные критерии по степени важности неразличимы. Однако нередко приходится сталкиваться с ситуациями, в которых подобное равноправие критериев нарушено, и у каждого из них есть свой вес.

Метод свертывания и метод ограничений показывают, как можно решать многокритериальную задачу с критериями, разными по степени важности.

Общая постановки линейной многокритериальной задачи.

Задача. Предположим заданными область изменения допустимых значений переменных $x_1..x_n$ определяемую совокупностью линейных уравнений и неравенств, и набор критериев $Cr_1..Cr_m$, оценивающих качество искомого решения.

Будем считать, что каждый из этих критериев линейно связан с переменными $x_1..x_n$:

$$Cr_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k \quad (2.8)$$

где γ_{ik} известные константные значения.

В области ω требуется найти такой набор переменных $x_1..x_n$ при котором по всем критериям достигались бы максимальные значения.

$$Cr_1 \rightarrow \max, Cr_2 \rightarrow \max, \dots, Cr_m \rightarrow \max \quad (2.9)$$

Метод свертывания с использованием экономической свертки заключается в том, что лицо, принимающее решения, из некоторых, часто доступных только ему соображений назначает веса критериев $w_1, w_2 \dots w_m$.

$$\begin{aligned} w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \dots w_m \geq 0 \\ \sum_{i=1}^m w_i = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

что позволяет свернуть заданные критерии в один глобальный критерий,

$$Cr = \sum_{i=1}^m w_i Cr_i = w_1 Cr_1 + w_2 Cr_2 + \dots + w_m Cr_m \quad (2.11)$$

и свести исходную задачу к обычной задаче линейного программирования с одним критерием: найти в области ω такой набор переменных $x_1 \dots x_n$, при котором глобальный критерий Cr достигает максимального значения.

Метод ограничений строится таким образом, что лицо, принимающее решения, определяет веса заданных критериев, опираясь только на количественную информацию о степени их важности, которую оно получает в ходе изучения поставленной задачи.

Специально подчеркнем, что в распоряжении лица, принимающего решения, никаких предварительных сведений о сравнительной важности критериев нет.

Общая схема решения

Для решения многокритериальной задачи методом ограничений требуется несколько шагов (но не больше $m-1$, где m число частных критериев).

Первый шаг, как и следующие за ним, разбивается на ряд этапов.

На первом этапе в области допустимых значений ω осуществляется оптимизация отдельно по каждому из критериев (решаются соответствующие задачи линейного программирования).

Затем для каждого найденного при этой однокритериальной оптимизации набора неизвестных $x_1 \dots x_n$ вычисляются значения всех критериев.

Пусть, например, при оптимизации по критерию $Cr_i, i = 1..m$, мы получили набор $x_{1i} \dots x_{ni}$. Обозначим через $C_{pi}, p = 1..m, i = 1..m$ значения критериев для этого набора и составив таблицу

Таблица 2.1 – Таблица значений критериев относительно лучшего другого критерия

	Cr_1	...	Cr_i	...	Cr_m
Cr_1	C_{11}	C_{m1}
...	
Cr_j	C_{1j}	...	C_{ij}	...	C_{mj}
...		
Cr_m	C_{1m}		C_{im}		C_{mm}

В столбцах данной таблицы расположены значения всех различных критериев, которые получены для решения приносящего максимум критерию с данным номером столбца. Очевидно, что на диагонали данной матрицы расположены максимальные возможные значения критериев, или точка утопии. Например, берем первый столбец, находим решение, при котором критерий Cr_1 достигает максимума, записываем в первом столбце все значения критериев при данном решении. Берем второй столбец, находим решение, при котором достигается максимум второго критерия Cr_2 , в строки второго столбца в соответствии с номером строки заносим значения критериев полученных при данном решении.

Затем проводится нормировка найденных значений критериев к значениям в промежутке $[0, 1]$ путем деления на максимальное значение в каждом столбце, если все значения критериев положительны, либо с учетом минимального значения в столбце, таким образом, на диагонали мы получим единицы:

$$Cn_{pi} = \frac{c_{pi} - \min_p c_{pi}}{\max_p c_{pi} - \min_p c_{pi}}, p = 1..m \quad (2.12)$$

$$Cn_{pi} = \frac{c_{pi}}{\max_p c_{pi}} = \frac{c_{pi}}{c_{ii}} \quad (2.13)$$

Таблица 2.2 – Таблица нормированных значений критериев

	Cr_1	...	Cr_i	...	Cr_m
Cr_1	1	C_{m1}
...	...	1		...	
Cr_j	C_{1j}	...	1	...	C_{mj}
...		...		1	
Cr_m	C_{1m}		C_{im}		1

В столбцах данной матрицы содержится ценная информация, например, чем ближе значение к 1, тем меньше влияние критерия под номером столбца на данный критерий, чем меньше значение или ближе к 0, тем больше влияние данного критерия. Таким образом, возникает простая идея, назначить более влияющим критериям больший вес, а меньше влияющим критериям больший вес, таким образом, если в столбце все значения близки к 1, то данный критерий не оказывает влияния и можно его учитывать с меньшим весом. Можно тогда усреднить значения критериев по столбцу и отнять от 1, пронормировать и взять его в качестве коэффициента.

Таким образом, пусть a_i^0 среднее (арифметическое) значение, взятое по всем элементам i -го столбца, кроме диагонального элемента равного 1. Вес w_i^0 критерия определяется формулой:

$$w_i^0 = \frac{1 - a_i^0}{\sum_{p=1, p \neq i}^m 1 - a_p^0} \quad (2.14)$$

Найденный вес — это своеобразный коэффициент внимания, которое следует уделять i -му критерию при поиске решения. Предположим, к примеру, что все элементы 1-го столбца в таблице близки к 1. Тогда среднее значение a_i^0 , также будет близко к 1, $1 - a_i^0$ будет мало, малым будет и соответствующий вес w_i^0 .

Это означает, что если при оптимизации по другим критериям значение данного критерия близко к наилучшему, то ему вряд ли стоит уделять внимание. Наоборот, критерию, сильно зависящему от изменения других критериев (a_i^0 мало), должны соответствовать большие значения веса.

Введенные веса иногда называют техническими, для того чтобы подчеркнуть, что они вычисляются, а не назначаются, как, например, в методе свертывания.

Следующий этап — оптимизация по глобальному критерию

$$Cr_{gl}^0 = \sum_{i=1}^m w_i Cr_i = w_1 Cr_1 + w_2 Cr_2 + \dots + w_m Cr_m \quad (2.15)$$

Осуществляется поиск $x_1..x_n$, максимизирующие данный глобальный критерий, например, симплекс методом, вычисляются соответствующие этому решению частные значения критериев $Cr_1^0, Cr_2^0 \dots Cr_m^0$ и осуществляется предъявление этого вектора критериев руководителю.

Анализ лицом, принимающим решения, предъявленных результатов — следующий важнейший этап. Сначала, сравнивая компоненты вектора утопии $z^0 = \{max Cr_1, max Cr_2 \dots max Cr_m\}$ с только что найденными значениями критериев $y^0 = \{Cr_1^0, Cr_2^0 \dots Cr_m^0\}$.

Лицо, принимающее решения, отвечает на вопрос: все ли компоненты вектора y^0 имеют удовлетворительные значения? Если да, то искомое решение получено. Если нет, то лицо, принимающее решения, выделяет (один) критерий с наименее удовлетворительным значением (пусть это будет критерий Cr_i) и просит назначить для критерия Cr_i пороговое значение l_i признавая тем самым, что приемлемо любое значение

этого критерия, удовлетворяющее условию $Cr_i \geq l_i$.

Неравенство $Cr_i \geq l_i$ накладывает на область допустимых значений ω переменных $x_1 \dots x_n$ дополнительное ограничение и сужает ее до ω_0 .

2-й шаг

Начинается с этапа расчета для новой области допустимых значений.

При этом число критериев на единицу меньше исходного. Завершается 2-й шаг выбором порогового значения для еще одного критерия.

Вследствие того что набор критериев конечен и на каждом шаге их число уменьшается на единицу, этот процесс рано или поздно подойдет к концу, и приемлемые значения будут получены по всем критериям.

2.4 Метод свертки векторной операции.

При формализации многокритериальных задач в теории исследования операций выделены некоторые часто используемые приемы. О них и пойдет речь ниже. Но подчеркнем, что выбор такого приема каждый раз должен определяться из содержательного анализа моделируемой операции, тем более, что приведенные ниже примеры далеко не исчерпывают всех возможностей.

Причины появления многокритериальности могут быть различными. Например, оперирующая сторона может представлять собой группу лиц, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои цели.

Часто многокритериальность появляется при рассмотрении динамических процессов. Например, если коммерческая фирма стремится к увеличению прибыли, и ее функционирование рассматривается на достаточно длинном временном интервале, то возникает целый ряд показателей, характеризующих прибыль в каждый из моментов времени.

Иногда удобно чисто формально рассматривать как многокритериальную задачу обычную модель операции, в которой имеется неопределенный фактор, рассматривая в качестве частных критериев значения общего критерия операции при конкретных значениях неопределенных факторов.

В ряде случаев задачу с неопределенными факторами преобразуют в двухкритериальную модель, формулируя задачу минимум и задачу максимум.

Очень часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда оперирующая сторона просто не может сформулировать свои предпочтения.

Иногда происходит путаница, и в качестве критерия задаются ограничения, которые должны соблюдаться в данной задаче. Например, цель поехать в отпуск, накопив определенную сумму денег. Вряд ли эту сумму надо максимизировать, просто она должна быть больше определенной суммы, или вряд ли нужно стараться, чтобы она была именно такой или максимальной. Хотя такой критерий можно свести далее к качественному критерию путем свертки. Либо минимизировать время на какую-либо технологическую операцию, получив выигрыш в несколько секунд, но при этом окажется, что в рамках существующего технологического уровня придется пожертвовать большими затратами и вложениями, при этом эти лишние секунды не так важны в данной задаче.

Напомни, что критерий в любой модели операции должен выражаться через управления оперирующей стороны, а так же действующие определенные и неопределенные факторы.

Данные соображения приводят к следующим определениям.

Определение. Многокритериальной задачей называется набор $(U, g^1, g^2, \dots, g^m)$, где U – множество, а g^i – функции, отображающие U в множество действительных чисел.

Здесь будут рассмотрены способы построения на основе многокритериальной задачи $(U, g^1, g^2, \dots, g^m)$ модели операции вида (U, g) .

Часто такую операцию строят, задавая функцию F , и полагая, что $g(u) = F(g^1(u), g^2(u), \dots, g^m(u))$. Функцию F в таком случае называют функцией свертки (или просто сверткой) критериев.

Удобно разделить цели операций на два класса: количественные и качественные. К первым относятся те, которые могут быть либо достигнуты, либо нет. Ко вторым – те, степень достижения которых может быть выражена числом.

Разумеется, качественная цель может быть описана количественным критерием, который, например, принимает значение 1, если цель достигнута, и значение 0 в противном случае.

Экономический способ свертки. Свертка частных критериев g^1, \dots, g^m представляет собой взвешенную сумму

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i \quad (2.16)$$

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Предприятие выпускает m видов продукции. Критерии g^1, \dots, g^m выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. Доходы предприятия от реализации продукции выражаются сверткой $\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$. Коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

Пример. Рассмотрим деятельность фирмы за m лет. Критерии g^1, \dots, g^m выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. Свертка $\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$ оценивает суммарную прибыль за весь период. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

Пример. В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов g^1 и время прохождения дистанции g^2 . Результат спортсмена оценивается по линейной свертке $60 \frac{\text{секунд}}{\text{промах}} g^1 + 1 \cdot g^2$ (если время измерять в секундах).

Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Пусть имеется количественный критерий g и число γ . Свертка задает качественный критерий

$$h = \begin{cases} 1, & \text{если } g \geq \gamma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Пример. Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием g , принимающим значения от двух до пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается критерием $h = \begin{cases} 1, & \text{если } g \geq 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Пример. При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение от работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала некоторый приемлемый уровень жизни.

Пример. Нужно три часа в неделю тратить на спорт.

Лексикографическая свертка. Пусть даны критерии g^1, \dots, g^m , ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия g^1 , из них выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^2 и так далее. Наконец, из уже отобранных, выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^m . Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума.

Пример. При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Дизьюнкция. Пусть есть m качественных критериев g^1, \dots, g^m . Цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей описывается критерием

$$g = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i) \quad (2.18)$$

Пример. Каждый настоящий инженер обязан иметь хотя бы одну тройку в аттестате. Если оценки за экзамены пронумерованы от 1 до m и критерии g^1, \dots, g^m описывают получение тройки по какой-то дисциплине, то их свертка $g = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$ описывает настоящего инженера.

Конъюнкция. Пусть есть m качественных критериев g^1, \dots, g^m . Цель, состоящая в достижении, сразу всех частных целей описывается критерием

$$g = \prod_{i=1}^m g^i. \quad (2.19)$$

Пример. Если за сессию студенту предстоит сдать m экзаменов и каждый из критериев g^1, \dots, g^m описывает сдачу одного из них, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием $g = \prod_{i=1}^m g^i$.

Отрицание. Пусть имеется качественный критерий g . Критерий $1-g$ описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

Пример. Если исходная цель g состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием $1-g$.

Обобщенная дизъюнкция. Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть m количественных критериев g^1, \dots, g^m . Результирующий критерий образуется по правилу $g(u) = \max_{1 < i < m} \lambda_i g^i(u)$.

Пример. Пусть в эстафете принимают участие m спортсменов из одной команды и критерии g^1, \dots, g^m задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на одного лидера, то есть критерий команды есть $g(u) = \max_{1 < i < m} \lambda_i g^i(u)$.

Обобщенная конъюнкция. Это свертка, при которой количественные критерии g^1, \dots, g^m заменяются общим критерием $g(u) = \min_{1 < i < m} \lambda_i g^i(u)$.

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Пусть для производства изделия требуются комплектующие m видов и количества произведенных деталей описываются числами g^1, \dots, g^m . Критерий $g(u) = \max_{1 < i < m} \lambda_i g^i(u)$ описывает количество готовых изделий, которое из них можно собрать. Числа $\frac{1}{\lambda_i}$ имеют при этом смысл количества деталей i -го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

Пример. По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

Случайная свертка. В литературе встречается и такой способ свертки критериев. На множестве критериев задается вероятностная мера, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. Понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки, формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

Принцип наименьшего сожаления. Это свертка, при которой количественные критерии g^1, \dots, g^m заменяются общим критерием $g(u) = \max_{1 < i < m} [\max_{v \in U} g^i(v) - g^i(u)]$, который нужно минимизировать.

Принцип принятия решений в ЕЭС. По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. В этом случае можно считать, что имеется столько качественных критериев, сколько стран принимает участие в голосовании. Из них делается два количественных критерия, которые в свою очередь сворачиваются в один качественный.

Старый способ судейства в фигурном катании. Каждый из девяти судей

выставлял две оценки от 0 до 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, у которого выше оценка за артистизм). Затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии с взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

Способ судейства в прыжках в длину. Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из них. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

Лексимин. Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи прежде всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои у каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Разумеется, не существует и не может существовать идеального способа свертки, пригодного на все случаи жизни. Если уж правилами предусмотрен такой способ подведения итогов, как в предыдущем примере, то в соответствующей модели надо пользоваться именно им. Но совсем глупо было бы использовать его в задаче о караване судов.

2.4.1 Теорема о свертке

Теорема. Пусть каждый из критериев g^1, \dots, g^m принимает лишь два значения 0 и 1, а $F: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$ – произвольная функция. Тогда критерий g , определенный условием $g(u) = F(g^1(u), \dots, g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

конъюнкция: $g^1, \dots, g^m \rightarrow \prod_{i=1}^m g^i$;

дизъюнкция: $g^1, \dots, g^m \rightarrow 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$;

отрицание: $g^i \rightarrow 1 - g^i$.

Доказательство. Пусть $y = (y_1, \dots, y_m)$ – произвольный булев вектор размерности m (здесь y_i равны 0 или 1 при любом $i=1, \dots, m$). Рассмотрим функцию $F_y: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$, определенную условием $F_y(x) = \prod_{i=1}^m z_i$, где $z_i = x_i$, если $y_i = 1$, и $z_i = 1 - x_i$, если $y_i = 0$. Непосредственно проверяется, что $F_y(y) = 1$, и $F_y(x) = 0$ для любого $x \neq y$.

Пример. На референдуме о сохранении Союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власти предлагали своим сторонникам ответить «да, да, нет, да». Таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия g^i (ответ на i -ый вопрос). Если общая цель g состоит в лояльности власти, то она выражается через частные с помощью свертки $g = g^1 g^2 (1 - g^3) g^4$.

Для заданной нам функции F , обозначим $Y = \{y: F(y) = 1\}$. Покажем, что интересующий нас критерий g представляется в виде

$$g(u) = 1 - \prod_{y \in Y} (1 - F_y(g^1(u), \dots, g^m(u))) \quad (2.20)$$

В самом деле, если $g(u) = 1$, то по определению вектор $t = (g^1(u), \dots, g^m(u))$ принадлежит множеству Y . Значит, произведение в формуле (2.20) содержит множитель $1 - F_y(g^1(u), \dots, g^m(u))$, равный нулю. Следовательно, и все произведение равно нулю, а вся правая часть формулы (2.20) равна 1.

Если же $g(u) = 0$, то вектор $t = (g^1(u), \dots, g^m(u))$ не принадлежит множеству Y , и для всех $y \in Y$ имеем $F_y(g^1(u), \dots, g^m(u)) = 0$. Значит, для этого u все сомножители в формуле (2.20) равны 1, а тогда и произведение в правой части равенства (2.20) равно 1, а сама правая часть равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что при построении функций

F_γ мы пользовались лишь операциями отрицания и конъюнкции, а в формуле (2.20) использовалась еще и дизъюнкция.

Замечание. Легко видеть, что сама операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то есть список «элементарных» операций может быть сокращен.

Теорема. Пусть каждый из критериев g^1, \dots, g^m принимает лишь конечное число значений, а F – произвольная функция. Тогда критерий g , определенный условием $g(u) = F(g^1(u), \dots, g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка: $g^1, \dots, g^m \rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$;
2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные:

$$g^i \rightarrow \begin{cases} 1, \text{ если } g^i \geq \gamma^i \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

3. конъюнкция: $g^1, \dots, g^m \rightarrow \prod_{i=1}^m g^i$; 34r3
4. дизъюнкция: $g^1, \dots, g^m \rightarrow 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$;
5. отрицание: $g^i \rightarrow 1 - g^i$.

Доказательство. Значения, которые может принимать критерий g^i , обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$. При сформулированных условиях критерий g может тоже принимать лишь конечное число значений. Обозначим их в порядке возрастания символами $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$. Дальнейшие рассуждения разобьем на шесть шагов.

Для каждого $i=1, \dots, m$ и каждого $\gamma \in \gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$ с помощью элементарной операции второго типа образуем вспомогательный критерий $g_\gamma^i(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^i(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$ Разумеется, критерий g_γ^i может быть выражен как функция критерия g^i .

Верно и обратное: критерий g^i может быть представлен как функция критериев g_γ^i . Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$g^i(u) = \sum_{j=1}^{k_i} (\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i) g_{\gamma_j^i}^i \quad (2.21)$$

где положено $\gamma_0^i = 0$.

В самом деле, если $g^i(u) = \gamma_l^i$, то для всех $j > l$ справедливо равенство $g_{\gamma_j^i}^i(u) = 0$, а для всех $j \leq l$ будем иметь $g_{\gamma_j^i}^i(u) = 1$. Поэтому для такого u правая часть равенства (2.21) может быть переписана в виде $\sum_{j=1}^l (\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i)$. Эта сумма, очевидно, равна $\gamma_l^i - \gamma_0^i = \gamma_l^i$, то есть равенство (2.21) справедливо.

Рассмотрим вспомогательные критерии $g_\gamma(u)$, определенные условиями

$$g_\gamma(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

(здесь $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$). Каждый из этих критериев является функцией критерия g .

Тогда по условию теоремы, тогда критерий g_γ^i может быть представлен, как функция критериев g^1, \dots, g^m . Значит, в силу утверждения п. 2 он может быть представлен и как функция вспомогательных критериев g_γ^i .

Но каждый из критериев g_γ и g_γ^i принимает лишь значения 0 и 1, поэтому в силу предыдущей теоремы, каждый из критериев g_γ может быть выражен через критерии g_γ^i с использованием лишь элементарных операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Аналогично формуле (2.21) доказывается равенство

$$g(u) = \sum_{j=1}^k (\gamma_j - \gamma_{j-1}) g_{\gamma_j}(u) \quad (2.22)$$

где $\gamma_0=0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что критерии g_γ^i мы получили, пользуясь только сверткой типа 2, на шаге 4 для получения критериев g_γ использовались свертки типов 3,4,5, и, наконец, на шаге 6 использовалась свертка типа 1. Теорема доказана.

Рассмотрим пример решения задачи о свертке: цель операции заработать больше 200 тыс. рублей за год, при этом за каждый месяц указывается заработок, сдать сессию на оценки выше 3 при известных критериях показывающих оценку за 5 экзаменов от 2 до 5, поехать на каникулы отдыхать.

Итак, введем критерии заработка в месяц:

$$z_i \in R, i = \{1..12\}$$

$$z^* = \begin{cases} 1, & \sum_1^{12} z_i \geq 200000 \\ 0 & \end{cases}$$

Введем критерии сдачи сессии на хорошие оценки:

$$g_j \in \{2,3,4,5\}, j = \{1..5\}.$$

$$g_j^* = \begin{cases} 1, & g_j \geq 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Поехать отдыхать качественный критерий:

$$f \in \{0,1\}$$

Итоговый максимизируемый критерий будет выглядеть следующим образом:

$$h = f \cdot z^* \prod_1^5 g_j^*$$

2.5 Практические задания по векторной операции

Записать свертку критериев с помощью элементарных функций. Начиная с восьмого задания, не обязательно использовать только элементарные функции, так как некоторые критерии могут принимать значения в неограниченной области.

1 Мнение ученого совета по любому вопросу складывается из мнений каждого из m его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета нечетно.

2 Мнение ученого совета по любому вопросу складывается из мнений каждого из m его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета четно и в случае равенства голосов решающим является мнение председателя совета.

3 Студенту за сессию предстоит сдать пять экзаменов, на каждом из которых он может получить оценку от 2 до 5. Для получения стипендии необходима сдать все экзамена как минимум на удовлетворительно, и при этом получить не более одной тройки. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

4 В биатлонной гонке принимают участие 7 спортсменов от каждой страны. По ее итогам каждый из них получает целое число очков от 0 до 30. В командный зачет идет сумма результатов трех лучших гонщиков. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

5 В каждой гонке, входящей в зачет кубка мира спортсмен получает целое число очков от 0 до 50. В общий зачет идет сумма очков, набранных в 30 гонках, за исключением трех худших. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

6 В командной гонке конькобежцев принимают участие три спортсмена. Результат команды равен времени третьего из финишировавших. Выразите

соответствующую свертку критериев через элементарные операции (время измеряется с точностью до сотых долей секунды).

7 Качество прыжка в соревнованиях по прыжкам с трамплина оценивают пять арбитров. Каждый из них выставляет оценку от 0 до 20 баллов с шагом 0.5 балла. Самая высокая и самая низкая оценка отбрасываются, а сумма трех оставшихся идет в зачет соревнования. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

8 Ведется война и осуществляется продажа оружия страной ведущей войну, как записать свертку критериев выигрыш в войне и получение максимальной прибыли от продажи оружия.

9 Пойдя на рыбалку нужно выловить не более 5 кг рыбы, получить максимальный улов, не промокнуть, не встретить медведя, сменить минимальное по количеству мест поклевки (максимальное количество мест выбрать самостоятельно).

10 Заработать максимум денег, максимальное количество дней в году, потратив на отдых, минимальное количество раз заболев, максимум дней в году потратив на спорт.

2.6 Контрольные вопросы по теории

Векторная операция, область согласия, область компромиссов. Уметь найти область компромиссов для заданной области допустимых решений.

Оптимальность по Парето.

Метод абсолютной и относительной справедливой уступки. Доказать что метод абсолютной справедливой уступки это частный случай экономической свертки.

Метод идеальной точки.

Метод свертки.

Метод уступок.

Метод ограничений.

3 Задача линейного программирования и ОСНОВЫ анализа на чувствительность

3.1 Постановка и классификация задач математического программирования

Когда говорят о задачах математического программирования (МП), то имеют в виду задачи оптимизации, возникшие в последние четыре десятилетия в связи с попытками повысить эффективность промышленных транспортных, военных систем за счет улучшений в работе координирующих и управляющих органов.

Все эти задачи МП формально сводятся к одной общей постановке:

Найти значения переменных x_1, \dots, x_n , доставляющие максимум (минимум) заданной скалярной функции $z = f(x_1, \dots, x_n)$ при условиях:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = | \leq | \geq b_i, i = 1..m \quad (3.1)$$

Условия, о которых идет речь, ограничивают выбор значений x_1, \dots, x_n и могут обладать самыми разнообразными свойствами, определяемыми видом функций. В каждой из m строк здесь сохраняется какой-либо один знак (равенство, неравенство).

Договоримся записывать задачу в стандартной форме:

$$z = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min \\ g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1..m \quad (3.2)$$

Множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяющих системе ограничений $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i$ есть область определения Ω_x поставленной выше задачи. Целевая функция z достигает экстремального значения в одной или нескольких точках области Ω_x , которые предстоит найти.

Обычно вид функций f и g известен, константы b_i заданы, величины m и n являются произвольными целыми. Специально оговариваются ограничения, выраженные в требованиях неотрицательности и целочисленности x_j .

Учитывая сказанное, можно дать краткую запись условий задачи математического программирования: $\min_{x \in \Omega_x} F(x)$.

В основу классификации таких задач положены особенности функций z или g_i , встречающихся в конкретных исследованиях. Различают два основных класса задач: задачи линейного и нелинейного программирования

К первым относятся те, в которых и целевая функция z , и все функции g_i линейны относительно переменных x_j .

Ко вторым, те, в которых присутствуют различного рода нелинейности.

В качестве примеров назовем лишь хорошо изученные и широко распространенные задачи:

Задачи, решаемые средствами классической математики при условии, что среди ограничений нет неравенств, при этом выполняется условие $m < n$, нет требований неотрицательности или целочисленности переменных, функции z и g_i непрерывны и по крайней мере дважды дифференцируемы;

Имеющие линейные ограничения и целевую функцию, представляющую собой полином второй степени относительно x_j .

Имеющие целевую функцию, представленную в виде суммы произвольных функций отдельных переменных x_j .

Обладающие такими универсальными свойствами, как выпуклость z и Ω_x что позволяет формировать и использовать условия существования решений независимо от конкретных форм задания z и g_i .

Приведенная классификация касается только задач, в которых все исходные параметры определены - детерминированный случай.

Примером задачи для решения, которых используются методы линейного программирования, может служить задача о производстве, транспортная задача и так далее.

Пример задачи о производстве красок. Небольшая фабрика изготавливает два вида красок: для внутренних (I) и наружных (E) работ, либо можно обозначить через 1 и 2. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу.

Для производства красок используются два исходных продукта-А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т соответственно. Расходы А и В на 1 т соответствующих красок и максимально возможный запас приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Затраты продуктов на производство и их максимально возможный запас

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски		Максимально возможный запас, т
	Краски E	Краски I	
А	1	2	6
В	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме этого установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3 тыс. долл. для краски E 2 тыс. долл. для краски I.

Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи можно начать с ответов на три следующие вопроса:

Для определения каких величин должна быть построена модель?

Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, для моделируемой системы?

В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Отвечая на поставленные вопросы сформулируем суть проблемы - фирме требуется определить *объемы производства* (в тоннах) каждой из красок, который максимизирует доход (в тысячах долларов) от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Введем переменные: так как нужно определить объемы производства каждого вида краски, то переменными в модели являются

x_1 - суточный объем производства краски E (в тоннах), x_E .

x_2 - суточный объем производства краски I (в тоннах), x_I .

Так как стоимость 1 т краски E равна 3 тыс. долл., суточный доход от ее продажи составит $3x_1$ тыс. долл. Аналогично доход от реализации x_2 тонн краски I составит $2x_2$ тыс. долл. в сутки. При допущении независимости объемов сбыта каждой из красок можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить (допустимые) значения x_1 и x_2 , максимизирующие величину общего дохода $F = 3x_1 + 2x_2$

Общая математическая модель задачи будет представлена следующим образом. Найти наибольшее значение функции

$$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях системы

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Что определяет линейный характер построенной модели? С формальных позиций данная модель является линейной потому, что все входящие в нее функции (ограничения и целевая функция) линейны. Линейность предполагает наличие двух свойств - пропорциональности и аддитивности.

Пропорциональность означает, что вклад каждой переменной x_1 и x_2 в целевую функцию прямо пропорционален этим переменным.

Аддитивность заключается в том, что целевая функция представляет собой сумму вкладов от различных переменных. Однако если фирма производит два конкурирующих вида продукции, увеличение сбыта одного из которых отрицательно сказывается на объеме реализации другого, то такая модель не обладает свойством аддитивности.

Точки, координаты которых удовлетворяют одновременно всем неравенствам системы ограничений, называются областью допустимых решений.

Очевидно, для нахождения области допустимых решений данной задачи, необходимо последовательно рассмотреть каждое неравенство.

Это стандартная схема решения. Если область допустимых решений представляет собой точку или пустое множество, то решение будет короче.

Рассмотрим неравенство 1 системы ограничений.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

Построим прямую: $x_1 + 2x_2 = 6$

Пусть $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$

Пусть $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$

Найдены координаты двух точек (0, 3) и (6, 0). Соединяем их и получаем необходимую прямую (1).

Нас интересуют точки расположенные выше или ниже построенной прямой (1)? Вернемся к исходному неравенству.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

Преобразуем неравенство, оставив в левой части только x_2

$$2x_2 \leq -x_1 + 6$$

$$x_2 \leq -1/2 x_1 + 3$$

Знак неравенства \leq . Следовательно, нас интересуют точки расположенные ниже построенной прямой (1).

Объединим данное условие с предыдущим рисунком. В итоге получим область допустимых решений, изображенную на рисунке 3.1.

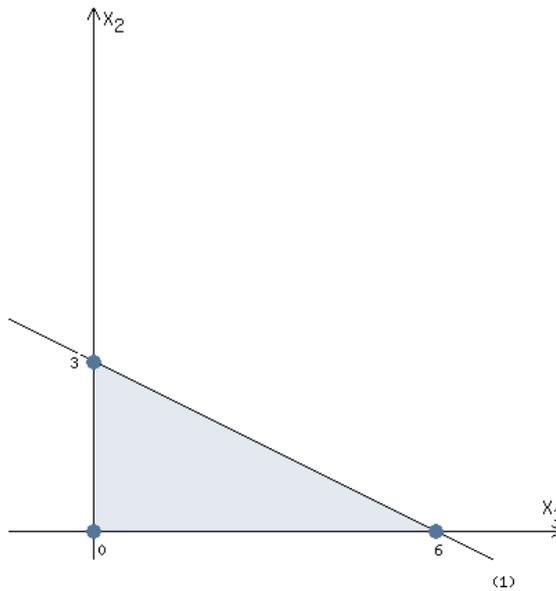


Рисунок 3.1 – Область допустимых решений, учитывающая неравенство 1 и ограничения на неотрицательность переменных

Аналогично поступая для остальных неравенств, можно построить полную область допустимых решений (рисунок 3.2)

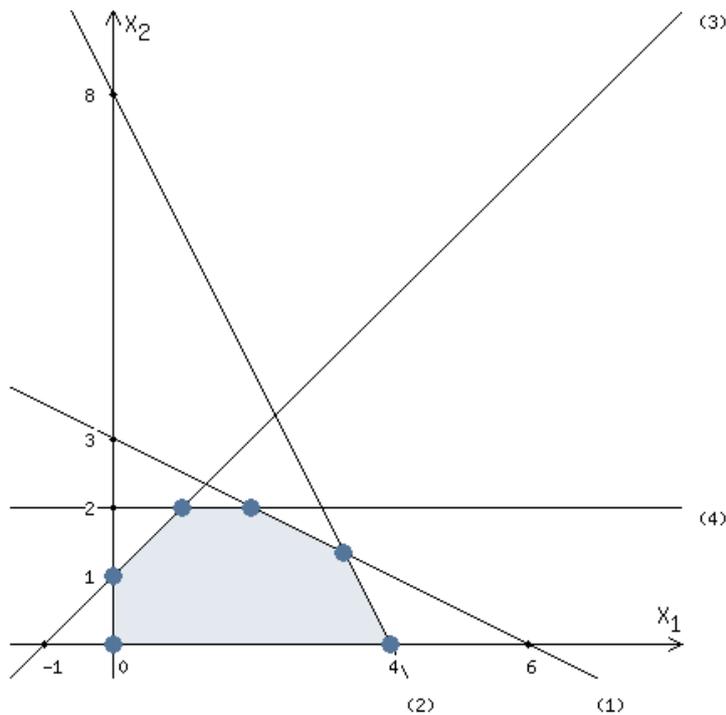


Рисунок 3.2 – Полная область допустимых решений

Очевидно, что решение лежит в области допустимых решений и мы должны выбрать такое, которое приносит максимум целевой функции. Для этого можно построить целевую функцию в нуле, либо вектор $C = (3, 2)$, координатами которого являются коэффициенты функции F (рисунок 3.3) и показывающий направление роста целевой функции.

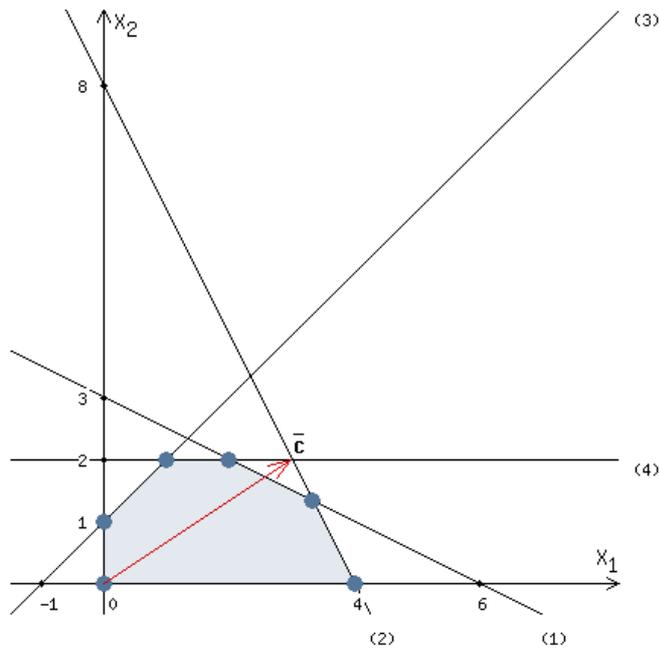


Рисунок 3.3 – Вектор показывающий направление роста целевой функции

Будем перемещать красную прямую, перпендикулярно вектору C , от левого нижнего угла к правому верхнему в направлении роста целевой функции.

Красная прямая называется линией уровня. В каждой точке линии уровня значение функции F есть величина постоянная.

В точке, в которой красная прямая в первый раз пересечет область допустимых решений, функция F достигает своего наименьшего значения.

В точке, в которой "красная" прямая в последний раз пересечет область допустимых решений, функция F достигает своего наибольшего значения.

Отсюда можно сделать очевидный вывод, что решение будет лежать в точке пересечения ограничений или на прямой ограничения.

Функция F достигает наибольшего значения в точке A . (см. рисунок 3.4)

Найдем координаты точки A .

Точка A одновременно принадлежит прямым (1) и (2), то есть является пересечением двух этих прямых.

Решая два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6 \Rightarrow x_1 = 10/3 \\ 2x_1 + x_2 &= 8 \Rightarrow x_2 = 4/3 \end{aligned}$$

Вычислим значение функции F в точке $A (10/3, 4/3)$.

$$F(A) = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3$$

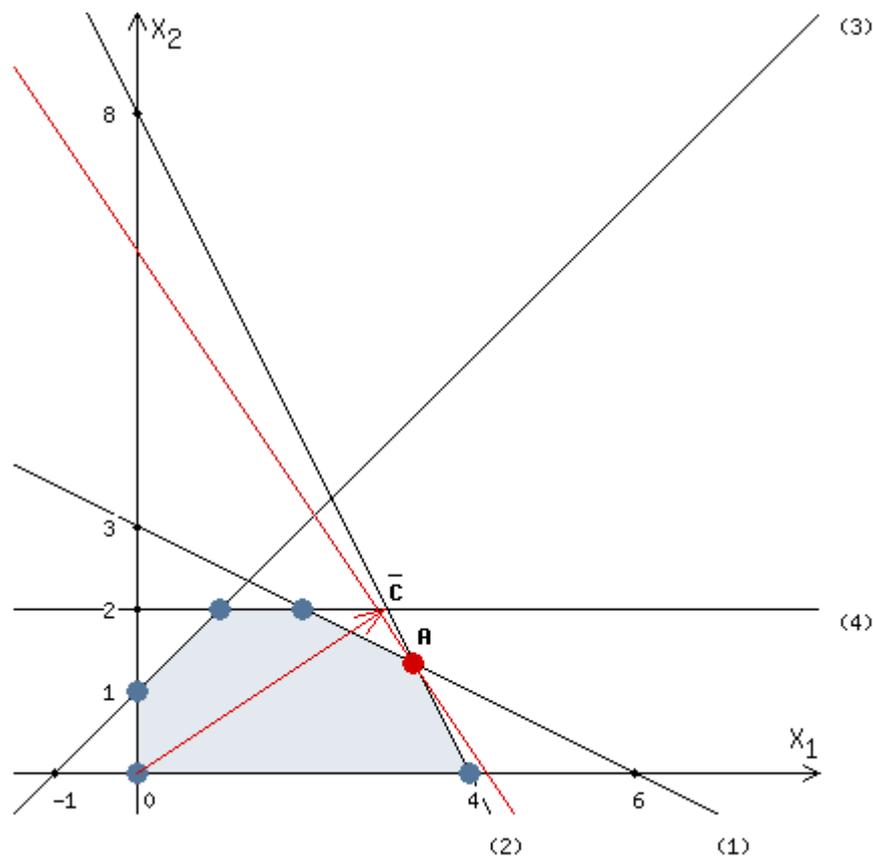


Рисунок 3.4 – Получение точки оптимума решения задачи

Таким образом, решением задачи является:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10/3 \\ x_2 &= 4/3 \\ F_{max} &= 38/3 \end{aligned}$$

Решение ОЗЛП, если оно существует, не может лежать внутри области допустимых решений, а только на ее границе.

Решение ОЗЛП может быть и не единственным, например, если уравнение прямой целевой функции совпадает с уравнением прямой ограничения.

Действительно, если основная прямая параллельна той стороне многоугольника допустимых решений, где достигается минимум, то он достигается не в одной точке, а на всей этой стороне. В этом случае ОЗЛП имеет бесчисленное множество оптимальных решений.

ОЗЛП может не иметь решения даже в случае, когда существует ОДР.

Это бывает тогда, когда в направлении роста или падения (в зависимости от задачи оптимизации) целевой функции ОДР не ограничена, т. е. в области допустимых решений линейная функция не ограничена снизу или сверху.

Решение ОЗЛП, минимизирующее целевую функцию (оптимальное решение), всегда достигается в одной из вершин многоугольника допустимых решений {если оно достигается на целой стороне, то оно же достигается и в каждой из вершин, через которые проходит эта сторона}. Решение, лежащее в одной из вершин ОДР, называется опорным решением, а сама вершина-опорной точкой.

Для того, чтобы найти оптимальное решение, в принципе достаточно перебрать все вершины ОДР (опорные точки) и выбрать из них ту, где целевая функция достигает оптимума.

3.2 Основы анализа на чувствительность

Анализ моделей на чувствительность проводится после получения оптимального решения задачи. В рамках такого анализа выявляется чувствительность данного решения к определенным изменениям исходной модели. В задаче о производстве красок, например, может вызывать интерес вопрос о том, как повлияет на доход увеличение и уменьшение спроса или изменения запасов исходных продуктов. Также можно проанализировать влияние изменения рыночных цен.

При таком анализе рассматривается некоторая совокупность оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую провести анализ влияния возможных изменений исходных условий на полученное оптимальное решение.

Динамические характеристики модели фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие анализа, позволяющего выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное статическое решение устареет еще до своей реализации.

Для проведения анализа модели на чувствительность будем использовать графический метод.

3.2.1 Первая задача анализа на чувствительность

На какую величину можно сократить или увеличить запасы ресурсов?

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Особенно важно проанализировать следующие два аспекта.

На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции z ?

На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Так как величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части (ограничений).

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничения линейной модели как **связывающие (активные)** и **несвязывающие (неактивные) ограничения**. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае соответствующее ограничение будет не связывающим. На рисунке 3.5 связывающими ограничениями являются только ограничения (1) и (2), которые лимитируют запасы исходных продуктов (ресурсов) А и В.

Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к **разряду дефицитных ресурсов**, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано *несвязывающее* ограничение, следует отнести к **разряду недефицитных ресурсов** (т. е. имеющих в некотором избытке). Таким образом, при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

- предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение
- предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции.

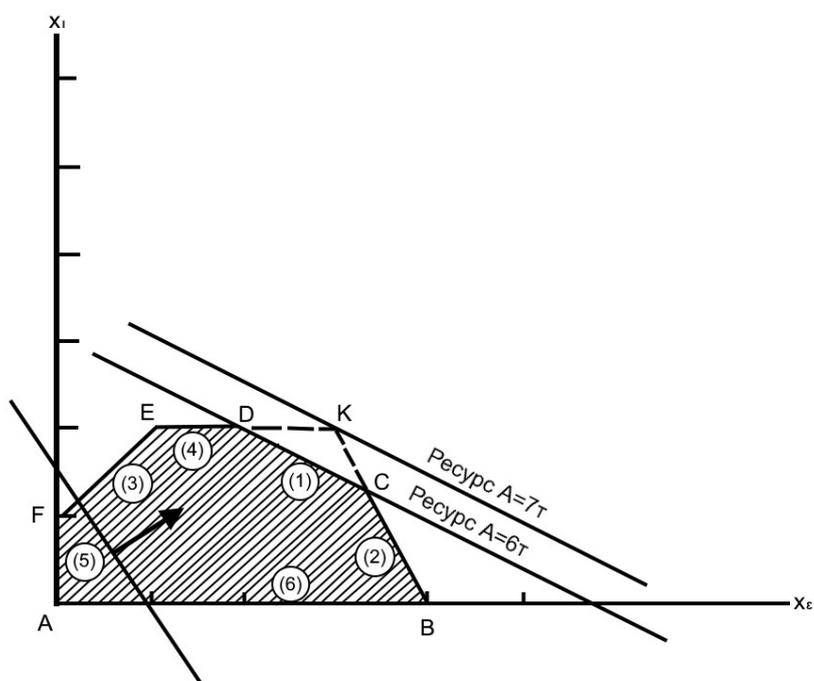
Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна в тех ситуациях, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей. Отметим, что увеличение избыточного ресурса не скажется на оптимальном решении

(избыточный ресурс станет еще более избыточным). Очевидно, что сокращение дефицитного ресурса не улучшит значения целевой функции.

Например, пусть недефицитный ресурс имеет смысл спроса, в этом случае анализируя ситуацию на рынке, мы можем обнаружить, что спрос на что-либо неудовлетворен и проанализировать на возможность инвестиций в производство продукта, на который имеется повышенный спрос, создать технологическую базу для реализации и производства такого продукта.

Еще одним примером может быть перенаправление недефицитного ресурса на повышение дефицитного тем самым увеличивая доход.

Вернемся к примеру о производстве красок. В рассмотренном примере используемые продукты А и В (ограничения (1) и (2)) являются дефицитными ресурсами. Рассмотрим сначала ресурс А. Из рис. 3.5 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок CD) перемещается вверх параллельно самой себе, постепенно "стягивая" в точку треугольник CDK. (Стороны CK и DK этого треугольника представляют собой продолжения прямых, соответствующих ограничениям (2) и (4)).



$$C: (3 \frac{1}{3}, 1 \frac{1}{3}); z = 12 \frac{1}{3}; K: (3, 2); z = 13.$$

Рисунок 3.5 – Графическое решение задачи

В точке К ограничения (2) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка К, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник АВКЕF. В точке К ограничение (1) (для ресурса А) становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса А не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку К. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Сначала нужно найти координаты точки К, в которой пересекаются прямые (2) и (4):

$$C: (3 \frac{1}{3}, 1 \frac{1}{3}); z = 12 \frac{1}{3}; J: (6, 0); z = 18$$

т. е. находится решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_E + x_I = 8 \text{ (прямая 2)}, \\ x_I = 2 \text{ (прямая 4)}. \end{cases}$$

В результате получается $x_E=3$ и $x_I=2$. Затем путем подстановки координат точки К в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса А: $x_E + 2x_I = 3 + 2 * 2 = 7$ т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3 * 3 + 2 * 2 = 13$ т.

Рисунок 3.6 иллюстрирует ситуацию, когда рассматривается вопрос о целесообразности увеличения запаса дефицитного ресурса (2) (исходного продукта В).

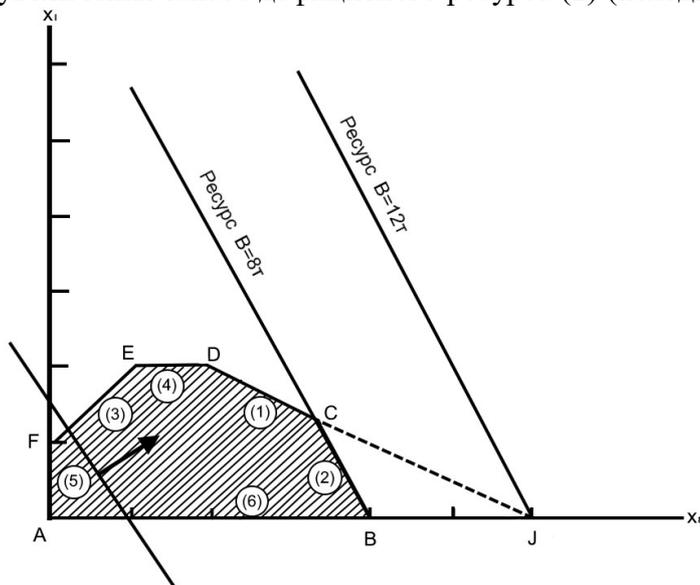


Рисунок 3.6 – Графическое решение задачи

Новой оптимальной точкой становится точка J, где пересекаются прямые (6) и (1), т. е. $x_I=0$ и $x_E + 2x_I = 6$. Отсюда следует, что $x_E=6$, $x_I=0$ причем запас продукта В можно увеличить до значения, равного $2x_E + x_I = 2 * 6 + 1 * 0 = 12$ т. При этом $z = 3x_E + 2x_I = 3 * 6 + 2 * 0 = 18$ т.

Рассмотрим теперь вопрос об уменьшении правой части не связывающих ограничений. Ограничение (4), $x_I=2$, фиксирует предельный уровень спроса на краску I. Из рис. 3.6 следует, что, не изменяя оптимального решения, прямую (4) (ED) можно опускать вниз до пересечения с оптимальной точкой C. точка C имеет координаты $x_E = 3 \frac{1}{3}$ и $x_I = 1 \frac{1}{3}$ уменьшение спроса, на краску I до величины $x_I = 1 \frac{1}{3}$ никак не повлияет на оптимальность ранее полученного решения.

Рассмотрим ограничение (3), $-x_E + x_I \leq 1$ которое представляет соотношение между спросом на краску I и спросом на краску E. И в этом случае правую часть ограничения можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) (EF) не достигнет точки C. При этом правая часть ограничения (3) станет равной

$$-x_E + x_I = (-3 \frac{1}{3}) + 1 \frac{1}{3} = -2,$$

что позволяет записать это ограничение в виде $-x_E + x_I \leq -2$ или в эквивалентной форме: $x_E - x_I \leq 2$. Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на краску E превысит спрос на краску I не более чем на 2т.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Изменение запасов и доходов

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, т	Максимальное изменение от реализации z, тыс.долл.
1	Дефицитный	$7 - 6 = +1$	$13 - 12 \frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$
2	Дефицитный	$12 - 8 = +4$	$18 - 12 \frac{2}{3} = +5 \frac{1}{3}$
3	Недефицитный	$-2 - 1 = -3$	$12 \frac{2}{3} - 12 \frac{2}{3} = 0$
4	Недефицитный	$1 \frac{2}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$	$12 \frac{2}{3} - 12 \frac{2}{3} = 0$

3.3 Вторая задача анализа на чувствительность. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?

В первой задаче анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов (т. е., изменения связывающих ограничений). При ограничениях на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? С помощью методов линейного программирования удастся ответить и на такой вопрос.

Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через y_i . Величина y_i определяется из соотношения

$$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } z}{\text{Максимально допустимый прирост объём ресурса } i} \quad (3.3)$$

Воспользовавшись данными указанной таблицы, для ограничения (1) (продукт А) получим

$$y_i = \frac{13 - 12 \frac{2}{3}}{7 - 6} = \frac{1}{3} \text{ тыс. долл. на тонну} \quad (3.4)$$

Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице: Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице:

Таблица 3.2 – Изменение дохода в зависимости от изменения ресурса на 1 единицу

Ресурс	Тип ресурса	Значение y_i тыс.долл./тонна
1	Дефицитный	$y_1 = \frac{1}{3}$
2	Дефицитный	$y_2 = \frac{4}{3}$
3	Недефицитный	$y_3 = 0$
4	Недефицитный	$y_4 = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса 2 (продукт В) и лишь затем на увеличение ресурса 1 (продукт А). Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

3.4 Третья задача анализа на чувствительность

В каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции?

Изменение коэффициентов целевой функции, которые определяются ценами на готовую продукцию, оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Очевидно, что идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит прежде всего от наклона этой прямой.

Это означает, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы:

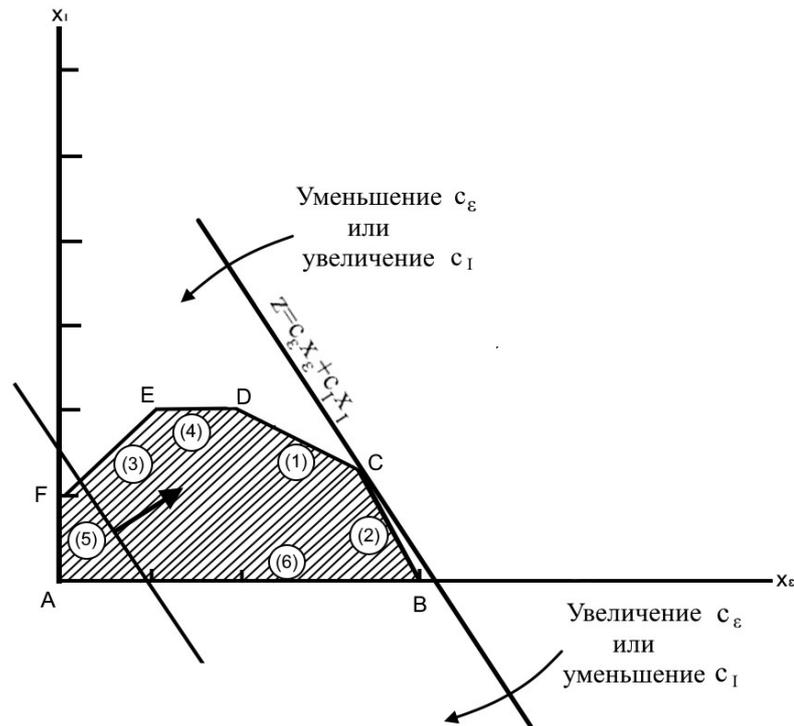


Рисунок 3.7 – Изменение коэффициентов целевой функции

Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

В каком диапазоне изменения целевых коэффициентов наше решение остается еще актуальным. Нам это необходимо знать, потому что параметры целевой функции могут меняться, что приведет к тому что, когда-то оптимальное решение может стать не оптимальным, и нужно будет его поменять. Но, обычно, в реальности это сопряжено с трудностями, например, если это компания производящая программные продукты, то мы должны будем с одного проекта переключиться на другой, что приведет к неминуемым издержкам по времени изучения нового проекта, что нашло даже отражение в некоторых методологиях гибкой разработки программного обеспечения. Например, в экстремальном программировании каждый участник проекта должен знать, что происходит в других проектах фирмы. Если же в таком анализе рассматривается

целочисленные целевые функции, то они могут носить смысл существования компании, техники, их выживаемости. Потому смена параметров может привести к ситуации, в которой, чтобы система «выжила», необходимо поменять решение и если заранее смена решения не продумана, то это может привести к печальным последствиям.

Обсудим некоторые из этих вопросов на нашем примере. Рассматривая первый вопрос, обозначим через c_E и c_I доходы фирмы от продажи 1 т краски E и 1 т краски I соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде: $z = c_E x_E + c_I x_I$. Из рисунка 3.7 видно, что при увеличении c_E или уменьшении c_I прямая, представляющая целевую функцию z , вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке.

Если же c_E уменьшается или c_I увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении - против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых, соответствующих ограничениям (1) и (2). Когда наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (1), получим две альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Аналогично, если наклон прямой z станет равным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки B и C. (Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же оптимальное значение z может достигаться при различных значениях переменных. Как только наклон прямой z выйдет за пределы указанного выше интервала, получим некоторое новое оптимальное решение (точка B или точка D).

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения c_E , при котором точка C остается оптимальной. Исходное значение коэффициента $c_I = 2$ оставим неизменным. Из рисунка 3.7 видно, что значение c_E можно увеличивать до тех пор, пока прямая z не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая z не совпадет с прямой (1). Эти крайние значения коэффициента c_E можно определить из равенства наклонов прямой z и прямой (2) (максимальное значение c_E) и равенства наклонов прямой z и прямой (1) (минимальное значение c_E). Так как тангенс угла наклона для прямой z равен $c_E/2$, а для прямых (1) и (2) соответственно $1/2$ и $2/1$, минимальное значение c_E определяем из равенства $c_E/2 = 1/2$, откуда $\min c_E = 1$, а максимальное значение c_E находим из равенства $c_E/2 = 2/1$ откуда $\max c_E = 4$.

Интервал изменения c_E , в котором точка C по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством $1 < c_E$.

3.5 Условия Куна-Таккера

Для задачи нелинейного программирования в общем виде:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ g_i &\leq 0, i = 1..m \\ x &\in R^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

можно записать условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x) &= 0, i = 1..m, \\ \lambda_i g_i(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если записать данные условия для задачи линейного программирования о производстве при известных значениях x_1, x_2, \dots, x_n , то найденные значения λ будут иметь смысл увеличения дохода при увеличении ресурса на 1 единицу (докажите это). При равенстве 0 данных коэффициентов это укажет на недефицитные ресурсы, то есть фактически, таким образом, можно решить первую и вторые задачи анализа на

чувствительность. При решении нужно рассматривать равенства нулю, где если один из множителей не равен нулю, то второй точно равен нулю.

Так же можно рассмотреть двойственную задачу линейного программирования, которая даст возможность провести такой же эконометрический анализ задач о производстве. Подобный анализ рассматривается на лекционных занятиях.

3.6 Задание на лабораторную работу по линейному программированию

Решить задачу линейного программирования в соответствии со своим вариантом задания и провести анализ на чувствительность к принятой модели (три задачи анализа на чувствительность). Записать для математической модели задачи условия Куна-Такера, проинтерпретировать полученные коэффициенты. Решать на примере задачи о красках.

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем первой линии – **A** изделий, второй линии – **B** изделий. На радиоприемник первой модели расходуется **C** однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – **D** таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен **E** единиц. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны **Q** и **P** ед. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей на основе графического решения задачи.

Таблица 3.3 – Варианты заданий для задачи о производстве приемников

№ варианта	A	B	E	C	D	Q	P
1	50	60	800	12	8	30	15
2	65	45	700	10	7	20	12
3	60	80	950	15	10	40	20
4	45	40	750	15	10	45	20
5	40	60	650	12	10	15	10
6	50	35	825	16	12	20	15
7	80	45	900	18	14	30	20
8	55	55	875	14	12	20	10
9	75	65	680	10	6	15	10
10	45	75	800	14	7	40	12

4 Динамическое программирование. Задача о распределении ресурсов

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический метод, заслуга создания и развития которого принадлежит, прежде всего, Беллману. Метод можно использовать для решения весьма широкого круга задач, включая задачи распределения ресурсов, замены и управления запасами, задачи о загрузке. Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Фундаментальным принципом, положенным в основу теории ДП и лежащим в основе решения всех задач динамического программирования, является принцип оптимальности: «Каково бы ни было состояние системы S перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным».

Динамическое программирование – это поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг. Управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

Основные термины и определения:

Отрасль - отрасль производства, в которое вкладываются исследуемые ресурсы.

Функция дохода показывает зависимость величины дохода, производимого отраслью, от количества вложенных средств. Общий вид функции дохода: $f(x) = I - e^{-Ax}$

A – коэффициент функции дохода (задается для каждой отрасли отдельно)

Функция траты (амортизации) показывает, какое количество средств, вложенных в производство, расходуется. Общий вид функции траты: $\varphi(x) = Kx$

K – коэффициент функции траты (задается для каждой отрасли отдельно)

$Z_i(Q)$ - условный оптимальный выигрыш, получаемый на всех последующих шагах, начиная с i -го и до конца.

4.1 Алгоритм метода динамического программирования

При решении любой задачи динамического программирования удобно придерживаться раз и навсегда установленного, стандартного порядка действий. Этот порядок можно установить в следующей форме:

1. Выбрать способ описания процесса, т.е. параметры (фазовые координаты), характеризующие состояние S управляемой системы перед каждым шагом.

2. Разбить операцию на этапы (шаги).

3. Выяснить набор шаговых управлений x_i для каждого шага и налагаемые на них ограничения.

4. Определить какой выигрыш приносит на i -ом шаге управление x_i , если перед этим система была в состоянии S , т.е. записать «функцию выигрыша»:

$$W_i = f_i(S, x_i) \quad (4.1)$$

5. Определить, как изменяется состояние системы S под влиянием управления x_i на i -ом шаге: оно переходит в новое состояние:

$$S' = \varphi_i(S, x_i) \quad (4.2)$$

6. Записать основное функциональное уравнение динамического программирования, выражающее условный оптимальный выигрыш $W_i(S)$ (начиная с i -го шага и до конца) через уже известную функцию $W_{i+1}(S)$:

$$W_i(S) = \max_{x_i} \{f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\} \quad (4.3)$$

Этому выигрышу соответствует условное оптимальное управление на i -м шаге $x_i(S)$ (причем в уже известную функцию $W_{i+1}(S)$: надо вместо S подставить измененное состояние $S' = \varphi_i(S, x_i)$)

7. Произвести условную оптимизацию последнего (m -го) шага, задаваясь гаммой состояний S , из которых можно за один шаг прийти до конечного состояния, вычисляя для каждого из них условный оптимальный выигрыш по формуле:

$$W_m(S) = \max_{x_m} \{f_m(S, x_m)\} \quad (4.4)$$

8. Произвести условную оптимизацию ($m-1$)-го, ($m-2$)-го и т.д. шагов по формуле (4.3), полагая в ней $i = (m-1), (m-2), \dots$, и для каждого из шагов указать условное оптимальное управление $X_i(S)$, при котором максимум достигается.

Заметим, что если состояние системы в начальный момент известно (а это обычно бывает так), то необходимо найти оптимальный выигрыш по формуле:

$$W^* = W_1(S_0) \quad (4.5)$$

9. Далее найти безусловные оптимальные управления (и, если надо, конечное состояние S_m^*) по цепочке:

$$S_0 \rightarrow x_1(S_0) \rightarrow S_1^* \rightarrow x_2(S_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow S_{m-1}^* \rightarrow x_m(S_{m-1}^*) \rightarrow S_m^*. \quad (4.6)$$

В дальнейшем при решении задач распределения ресурсов будем придерживаться вышеизложенной схемы: условные оптимальные управления находятся в обратном порядке, от последнего шага к первому, а безусловные – в прямом порядке, от первого шага к последнему.

4.2 Задача о распределении ресурсов

На практике часто встречаются многоэтапные операции, связанные с распределением каких-то ресурсов. Например, распределение денежных средств, сырья или рабочей силы по предприятиям.

Рассмотрим классическую задачу: Имеется начальное количество средств K_0 , которое мы должны распределить в течение m лет между двумя отраслями производства 1 и 2. Средства, вложенные в каждую отрасль приносят доход

Отрасль 1: x - вложение, $f(x)$ – доход, $\varphi(x)$ - уменьшение средств или амортизации, $\varphi(x) < x$.

Отрасль 2: $g(y)$ - доход от вложения y , $\psi(y)$ - амортизация.

$\varphi(x) + \psi(y)$ - остаток средств после 1-го года и т.д. Требуется найти способ управления ресурсами, при котором суммарный доход от обеих отраслей будет максимальным.

Возможны различные модификации этой задачи:

Распределение ресурсов по неоднородным этапам, когда функции $\varphi(x), \psi(y)$, неодинаковы для всех шагов.

Задача с резервированием ресурсов, когда имеется одна отрасль и некоторый запас ресурсов K_0 , который можно вкладывать в производство не целиком, нужно максимизировать доход за m лет, когда на каждом шаге часть средств резервируется.

Задача распределения ресурсов вложением доходов в производство и т.д.

4.2.1 Распределение ресурсов по неоднородным этапам

В этом случае функции дохода и трат для каждого шага отличаются.

K_0 – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n , где n – количество лет, в течение которых производится оптимизация.

$A1_i, A2_i$ – коэффициенты функций дохода на i -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K1_i, K2_i$ – коэффициенты функций траты на i -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

Рассматривается **система** – две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y , выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед i -ым шагом характеризуется количеством средств K , сохранившихся после предыдущих $i-1$ шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на i -ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i , вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором

суммарный доход $Z = \sum_{i=1}^n z_i$ будет максимальным.

Управление на i -ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i , $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на i -ом шаге описывается уравнением:

$$z_i(K, X_i) = f_i(X_i) + g_i(K - X_i) \quad (4.7)$$

Под влиянием управления X_i на i -ом шаге система переходит в новое состояние:

$$K' = \varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) \quad (4.8)$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i))\} \quad (4.9)$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем n -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{z(K, X_n)\} = f_n(X_n) + g_n(K - X_n) \quad (4.10)$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$ в соответствии с рекуррентной формулой 4.9.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$.
Изменение состояния системы производится по формуле 4.8.

4.2.2 «Классическая» задача распределения ресурсов

Задача является частным случаем задачи распределения ресурсов по неоднородным этапам (функции дохода и траты одинаковы для всех этапов).

Входные данные

K_0 – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

$A1, A2$ – коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

$K1, K2$ – коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

Схема решения

В нашем случае **система** – это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y , выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед i -ым шагом характеризуется количеством средств K , сохранившихся после предыдущих $i-1$ шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на i -ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i , вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z = \sum_{i=1}^n z_i$ будет максимальным.

Управление на i -ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i , $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на i -ом шаге описывается уравнением

$$z_i(K, X_i) = f(X_i) + g(K - X_i) \quad (4.11)$$

Под влиянием управления X_i на i -ом шаге система переходит в новое состояние

$$K' = (X_i) + \psi(K - X_i). \quad (4.12)$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f(X_i) + g(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i))\} \quad (4.13)$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем m -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{z(K, X_n)\} = f(X_n) + g(K - X_n) \quad (4.14)$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$ в соответствии с рекуррентной формулой 4.13.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$. Изменение состояния системы производится по формуле (4.12) настоящего документа.

4.2.3 Задача резервирования ресурсов

Задача с резервированием ресурсов заключается в следующем: требуется найти такой способ управления ресурсами, при котором максимизируется доход за m лет при резервировании части средств на каждом шаге.

Задача о резервировании ресурсов сводится к классической задаче, когда $g(Y) = 0$, а $\psi(Y) = Y$. Т.е. вводится некая фиктивная отрасль, которая при вложении в нее средств, не приносит дохода, но и не тратит их.

Входные данные

K_0 – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

A_1 – коэффициент функции дохода для первой отрасли. Коэффициент A_2 полагается равным 0.

K_1 – коэффициент функции траты для первой отрасли. Коэффициент K_2 полагается равным 1.

Ограничения

По истечению года, оставшиеся от K_0 средства можно вкладывать не целиком, а часть их резервировать.

Новых средств извне не поступает.

Доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно.

Схема решения

Схема решения задачи резервирования идентична схеме решения «классической» задачи распределения ресурсов.

4.2.4 Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.

В данной задаче помимо заданных функций дохода и траты, дополнительно, вводятся «функции отчислений» $r_i(D) \leq D, i = 1, \dots, n$, показывающие, какая часть дохода

D, полученного на i -м шаге, не вкладывается в производство на следующем $(i+1)$ -м шаге, а отчисляется.

Входные данные

K_0 – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n .

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация.

$A1_i, A2_i$ – коэффициенты функций дохода на i -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K1_i, K2_i$ – коэффициенты функций траты на i -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K3_i$ - коэффициент функций отчислений на i -м шаге оптимизации

Схема решения

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление X_i на i -ом шаге - вложение средств X_i в отрасль I, а остальных средств – в отрасль II ($Y_i = K - X_i$). Выигрыш на i -ом шаге описывается уравнением $z_i(K, X_i) = r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

Под влиянием управления X_i на i -ом шаге система переходит в новое состояние $K' = X_i + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \left\{ r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))) \right\}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем n -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \left\{ f_n(X_n) + g_n(K - X_n) + \psi_n(X_n) + \psi_n(K - X_n) \right\}$$

Произвести условную оптимизацию для $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$ в соответствии с рекуррентной формулой.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$. Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.1.2.5 настоящего документа.

4.2.5 Решение «классической» задачи распределения ресурсов

Планируется деятельность двух отраслей производства I и II сроком на 3 года ($N=3$).

Заданы функции дохода для первой и второй отраслей соответственно:

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

$$g(x) = 1 - e^{-2x}$$

Так же заданы функции траты:

$$\varphi(x) = 0.75x \text{ и}$$

$$\psi(y) = 0.3y \text{ для первой и второй отраслей соответственно.}$$

Требуется распределить имеющиеся средства в размере $Q = 2$ между отраслями, исходя из условия максимума дохода.

Задачу условной оптимизации на всех этапах будем решить численно.

Условный оптимальный выигрыш на последнем 3-ем шаге равен:

$$Z_3(Q) = \max_{0 \leq X_3 \leq Q} \{z(Q, X_3)\} = \max_{0 \leq X_3 \leq Q} \left\{ 2 - \left[e^{-X_3} + e^{-2(Q-X_3)} \right] \right\}$$

Здесь, $z(K, X_3)$ – выигрыш на 3-м шаге.

Выясним, в каких пределах может находиться Q , т.е. Q_{max} и Q_{min} .

Значение Q_{max} можно найти, считая, что на первых двух шагах все средства будут

вложены в первую отрасль, в которой затраты минимальны. Тогда после двух лет получим: $Q_{max} = K_0 * (0.75)^2 \approx 1.12$.

Величину Q_{min} можно найти, если на первых четырех шагах все средства вкладывать во вторую отрасль $Q_{min} = K_0 * (0.3)^2 \approx 0.18$. То есть, Q принадлежит интервалу

$[0.18; 1.12]$.

Возьмем опорные значения $Q = 0.28; 0.38; \dots; 1.08$ и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $x_3(Q)$ и условный максимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$. Для этого построим зависимости $z(Q, X_3)$ от X_3 для всех значений Q (см. рис. 4.1).

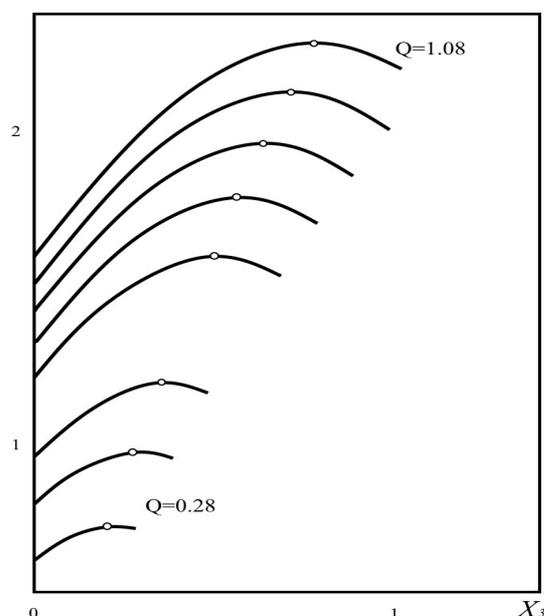


Рисунок 4.1 – Зависимость $z(Q, X_3)$ от X_3 для значений Q

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$ и соответствующее оптимальное управление $X_3(Q)$. Результаты вычисления координат максимального значения каждой кривой сведены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты вычисления

Q	$z(Q, X_3)$	X_3
0.18	0.302	0.000
0.28	0.429	0.000
0.38	0.533	0.022
0.48	0.628	0.089
0.58	0.716	0.156
0.68	0.799	0.222
0.78	0.876	0.289
0.88	0.949	0.356
0.98	1.017	0.422
1.08	1.080	0.489

С помощью полученных значений построим зависимости, показанные на рис. 4.2
 Кривая $Z_3(Q)$ строится путем линейной интерполяции на сетке значений Q и $z(Q, X_3)$, представленных в Таблице 4.1. Кривая $X_3(Q) - Q$ и X_3 .
 Таким образом, оптимизация последнего шага завершена.

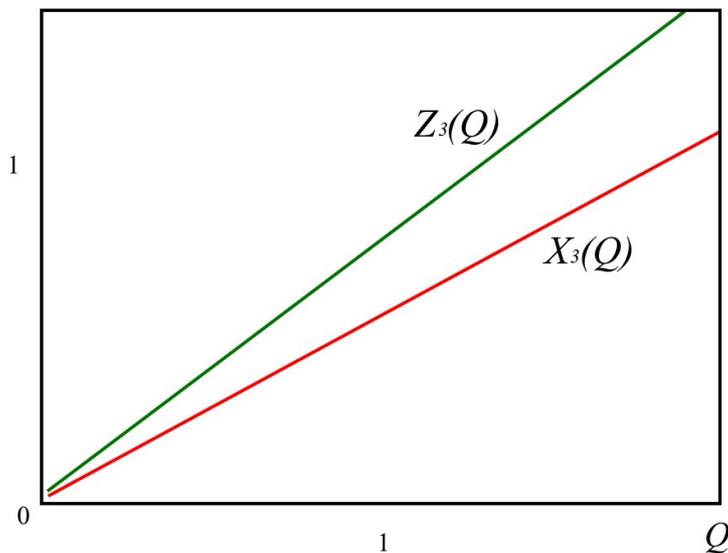


Рисунок 4.2 – Зависимости $Z_3(Q)$ и $X_3(Q)$

Рассмотрим 2-й шаг. Задачу условной оптимизации так же решается численно:
 $Z_2(Q, X_2) = \max \{ \tilde{Z}_2(Q, X_2) \}$, где условный полуоптимальный выигрыш равен

$$\tilde{Z}_2(Q, X_2) = z_2(Q, X_2) + Z_3(0.75X_2 + 0.3(Q - X_2))$$

$$z_2(Q, X_2) = 2 - \left[e^{-X_2} + e^{-2(Q-X_2)} \right] - \text{выигрыш на 2-ом шаге. Аналогично третьему}$$

шагу выясним пределы Q : $Q_{max} = K_0 * (0.75)^1 \approx 1.5$, а $Q_{min} = K_0 * (0.3)^1 \approx 0.6$ То есть, Q принадлежит интервалу $[0.6; 1.5]$.

Возьмем опорные значения $Q = 0.6; 0.8; \dots; 1.5$ и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $X_2(Q)$ и условный максимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$. Для этого построим зависимости $\tilde{Z}_2(Q, X_2)$ от X_2 для всех значений Q (см. рис. 4.3).

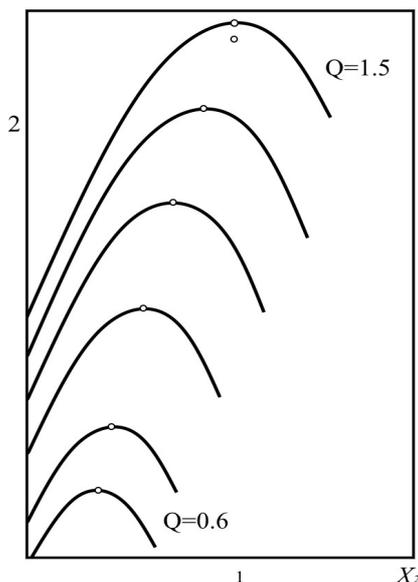


Рисунок 4.3 – Зависимость $\tilde{Z}_2(Q, X_2)$ от X_2 для значений Q

При этом второе слагаемое в формуле для полуоптимального выигрыша определяется по рис. 4.2 для аргумента $0.75X_2 + 0.3(Q - X_2)$.

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$ и соответствующее оптимальное управление $X_2(Q)$. Сведем результаты в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Результаты вычислений на втором шаге.

Q	$z(Q, X_2)$	X_2
0.6	1.180	0.335
0.8	1.460	0.474
1.0	1.710	0.622
1.2	1.934	0.756
1.4	2.135	0.899
1.5	2.228	0.970

Аналогично третьему шагу, с помощью полученных значений строятся зависимости, показанные на рис. 4.4.

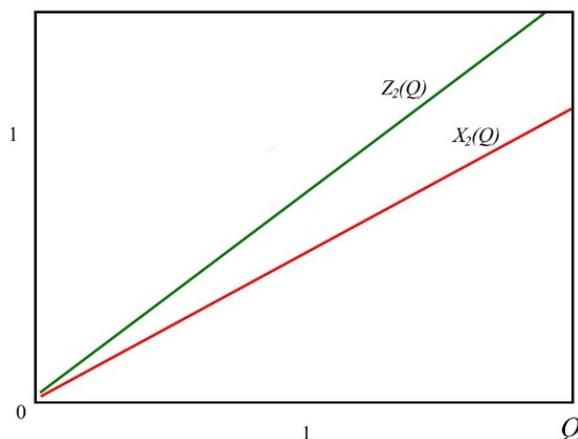


Рисунок 4.4 – Зависимости $Z_2(Q)$ и $X_2(Q)$

Теперь остается оптимизировать первый шаг.

Начальное состояние системы $Q_0 = 2$ и нужно построить зависимость $\tilde{Z}_1(Q_0, X_1)$ от X_1 : $\tilde{Z}_1(Q_0, X_1) = z_1(Q_0, X_1) + Z_2(Q') = 2 - \left[e^{-X_1} + e^{-2(Q_0 - X_1)} \right] + Z_2(0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1))$.

Второе слагаемое определяется по рис. 4.4 для аргумента $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$. Определяя на единственной кривой (см. рис. 4.5) максимум, найдем окончательное (уже не условное) значение максимального дохода за весь период $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$ и соответствующее оптимальное управление на первом шаге $X_1 = 1.47$.

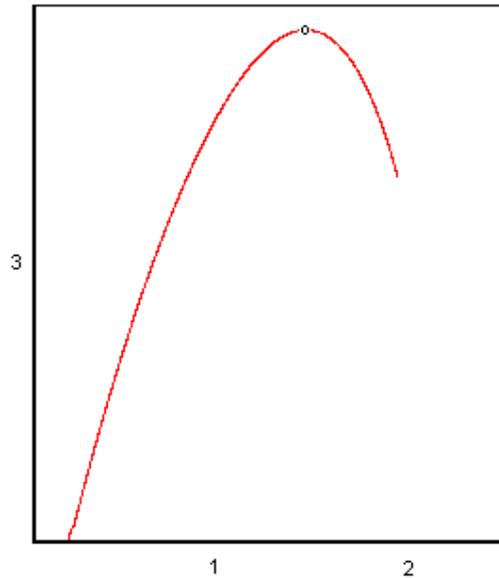


Рисунок 4.5 – Зависимость $\tilde{Z}_1(Q, X_1)$ от X_1

Найдем безусловные оптимальные управления по схеме:

$$x_1 \rightarrow Q_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow Q_3^* \rightarrow x_3.$$

Остаток средств после первого определяется следующим образом:

$$Q_2^* = 0.75x_1 + 0.3(Q_0 - x_1) = 1.26.$$

По рис. 4.4 определяем $x_2 = 0.8$. Остаток средств после второго шага:

$$Q_3^* = 0.75x_2 + 0.3(Q_2 - x_2) = 0.73. \text{ По этому значению из рис. 4.2 определим } x_3 = 0.26.$$

Полученные результаты сведены в таблице 4.3

Таблица 4.3 – Сводные результаты

Отрасли	Год		
	1	2	3
I	1.469	0.801	0.261
II	0.531	0.460	0.477

Вид оптимальной кривой в фазовом пространстве показан на рис. 4.6.

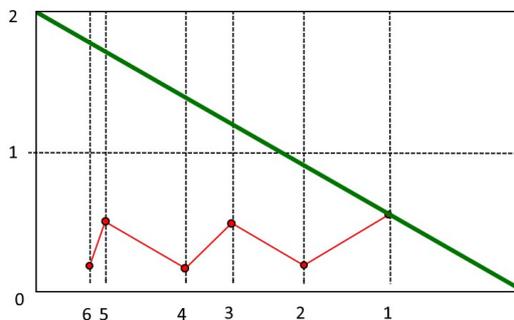


Рисунок 4.6 – Оптимальная кривая в фазовом пространстве

4.2.6 Связь различных типов задач распределения ресурсов

На рис. 4.7 показана зависимость между задачами распределения ресурсов.



Рисунок 4.7 – Связь между различными типами задач распределения ресурсов

4.2.7 Пример задачи динамического программирования о распределении нескольких ресурсов

Рассмотрим пример с 3-мя производствами и 2-мя ресурсами. Задача распределить ресурсы между производствами на n лет. Рассматривается система с 3 отраслями производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется 2 параметрами, выражающими количество средств в отраслях соответственно.

Таблица 4.4- Функции трат

Производство		1	2	3
Ресурс	1	$\varphi_{11}(x, y)$	$\varphi_{12}(x, y)$	$\varphi_{13}(x, y)$
	2	$\varphi_{21}(x, y)$	$\varphi_{22}(x, y)$	$\varphi_{23}(x, y)$

Функция Беллмана на последнем (n) шаге в соответствии с формулой будет иметь вид:

$$Z_n(K_{1n}, K_{2n}) = \max \{ f_{1n}(x_{1n}, y_{1n}) + f_{2n}(x_{2n}, y_{2n}) + f_{3n}(K_{1n} - x_{1n} - x_{2n}, K_{2n} - y_{1n} - y_{2n}) \}$$

Функция Беллмана на предпоследнем ($n-1$) шаге будет иметь вид:

$$Z_{n-1}(K_{1n-1}, K_{2n-1}) = \max \{ f_{1n-1}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + f_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + f_{3n-1}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1}) + Z_n(K_{1n}, K_{2n}) \}$$

где $Z_n(K_{1n}, K_{2n})$ - функция Беллмана на последнем шаге, полученная нами ранее, а K_{1n} и K_{2n} в соответствии с формулой равны:

$$K_{1n} = \varphi_{11}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + \varphi_{12}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + \varphi_{13}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1});$$

$$K_{2n} = \varphi_{21}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + \varphi_{22}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + \varphi_{23}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1});$$

где φ_{ij} – функции трат приведенные в таблице 4.4.

4.3 Задание на задачу динамического программированию по распределению ресурсов

Записать функцию Беллмана на последнем шаге и на предпоследнем шаге, объяснить, как решается задача.

Распределить ресурсы между производствами на n лет. Рассматривается система с **несколькими** отраслями производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется **несколькими** параметрами, выражающими количество средств в отраслях соответственно. Состояние системы перед i -ым шагом характеризуется

количеством средств K , сохранившихся после предыдущих $i-1$ шагов.

Варианты:

- 1 производства, 2 ресурса
- 2 производства, 3 ресурса
- 3 2 производства, 4 ресурса
- 4 производства, 3 ресурса
- 5 3 производства, 4 ресурса
- 6 производства, 1 ресурс
- 7 4 производства, 2 ресурса
- 8 4 производства, 3 ресурса
- 9 4 производства, 4 ресурса
- 10 производств, 1 ресурс

5 Генерация случайных величин

5.1 Метод численного моделирования (Метод Монте-Карло)

В последнее время область приложений метода численного моделирования или метода Монте-Карло существенно расширилась в связи с бурным развитием вычислительной техники. Особо следует отметить значительный прогресс, связанный с увеличением быстродействия вычислительных машин, что особенно важно при использовании метода Монте-Карло.

Определение. Методом Монте-Карло (ММК) называется численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Необходимо отметить, что ММК используется для решения любых математических задач, а не только задач вероятностного происхождения. Название «Монте-Карло» произошло от города Монте-Карло, известного своими казино, т. к. простейшим прибором для генерирования случайных чисел служит игральная рулетка. Возникновение метода Монте-Карло связывают с именами Дж. Неймана, С. Улама, Н. Метрополиса, Г. Канна и Э. Ферми, которые в 40-х годах работали в Лос-Аламосе. Официальной датой рождения ММК считают 1949 год, когда появилась статья под заглавием «Метод Монте-Карло» (Metropolis N., Ulam S.M. The Monte Carlo method. J. Amer. Statist. Assoc., 1949, 44, №247. P. 335–341).

Построение алгоритмов ММК основано на сведении задач к расчету математических ожиданий. Это означает, что для вычисления скалярной величины A нужно придумать такую случайную величину ξ , для которой ее математическое ожидание $m_1(\xi) = A$. Тогда, получив в численном эксперименте N независимых значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, можно найти, что

$$A \approx \frac{1}{N}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N).$$

Таким образом, в рамках данного курса мы рассматриваем так же и методы генерации случайных величин.

5.2 Моделирование случайных величин с равномерным распределением

5.2.1 Общие сведения о моделировании равномерного распределения

Плотность вероятности $f(\alpha)$ СВ α , равномерно распределенной в интервале $[0; 1]$, равна

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in [0; 1], \\ 0, & \alpha \notin [0; 1]. \end{cases} \quad (5.1)$$

Функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(\alpha') d\alpha' = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ 1, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Математическое ожидание $m_\alpha = 0,5$, а дисперсия $D(\alpha) = 1/12$. Иногда в качестве стандартной используют дискретную СВ ε , ряд распределения вероятности P которой имеет вид

Таблица 5.1 – Равномерное распределение

ε	0	1	2	...	9
P	0,1	0,1	0,1	.	0,1

Будем называть α – случайным числом, а ε – случайной цифрой. Установим связь

между α и ε . Представим число α в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 10^{-k} \quad (5.3)$$

Можно доказать следующую **теорему**: десятичные цифры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ случайного числа α представляют собой независимые случайные цифры. Наоборот, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ независимые случайные цифры, то формула (5.3) определяет случайное число.

Замечание. В вычислениях всегда используют числа с конечным числом десятичных знаков, поэтому случайные числа α заменяют на случайные конечные дроби $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$.

Таблица случайных чисел. Предположим, что осуществлено N независимых опытов, в результате которых получено N случайных цифр $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$. Записав эти цифры в порядке появления, получим таблицу случайных цифр. При проведении расчетов можно использовать как сами цифры, так и конструировать из них случайные числа $\alpha = 0, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1} \dots \varepsilon_{s+N}$.

Существуют физические датчики случайных чисел. Для их построения используют шумящие радиоэлектронные приборы. Они применяются довольно редко, т. к. являются неудобными для практического использования и требуют постоянного контроля качества случайных чисел. Кроме этого нет возможности повторно воспроизвести выборочную последовательность необходимую на стадии отладки программ и повторения расчетов.

5.2.2 Псевдослучайные числа

Пригодность случайных чисел определяется не процессом их получения, а тем, что они должны обладать интересующими нас свойствами независимых, равномерно распределенных СВ.

Определение. Последовательность чисел $\{\alpha_i\}$, которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении задач численным методом, называются **псевдослучайными числами**.

Из сказанного следует, что оказываются тождественными те свойства случайных и псевдослучайных чисел, которые требуются для решения широкого круга задач. По отношению к этим задачам разница между физически генерируемыми случайными числами и псевдослучайными практически отсутствует. К преимуществам псевдослучайных чисел можно отнести:

- небольшие затраты машинного времени для их получения;
- возможность многократного повторного воспроизведения одной и той же последовательности чисел при необходимости;
- большой период повторения;
- равномерность распределения, независимость, соответствие проверкам на d -размерность и k распределение.
- необходимость однократного тестирования алгоритмов вычисления псевдослучайных чисел.

Из последнего утверждения следует, что разрабатываемые датчики случайных чисел необходимо подвергать проверке с помощью специальных тестов, которые должны подтверждать их независимость и равномерность распределения. Важной характеристикой последовательности случайных чисел является ее периодичность. Это означает, что имеется некоторый достаточно большой номер L , начиная с которого случайные числа начинают повторяться. Очевидно, что использование при моделировании «большого» отрезка последовательности $\{\alpha_i\}$, чем период повторения, приведет к бессмысленному повторению испытаний в одних и тех же условиях.

Приведем на языке python пример моделирования случайных чисел равномерного

распределения и проверки его на d-размерность 2.

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d, Axes3D
print("Start")
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
#задаем массивы из 10000 случайных координат точек
x = np.random.random(10000)
y = np.random.random(10000)
z = np.random.random(10000)
#рисует график
ax.scatter3D(x,y,z)
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")

#создать два графика размещенных друг над другом (в так называемой сетке)
#можно задавать различное число ячеек, потом указывает какие из них
#будут заняты данным графиком
gridsize = (2, 1)
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))
#первый график занимает одну ячейку (правда здесь и второй тоже)
ax1 = plt.subplot2grid(gridsize, (0, 0), colspan=1, rowspan=1)
ax2 = plt.subplot2grid(gridsize, (1, 0))
#автоматическое построение гистограммы автоматическим заданием
#количества интервалов
ax1.hist(x, bins='auto')
ax2.hist(x, bins=10)
ax1.set_title(u'Автоматически заданное количество диапазонов')
ax2.set_title(u'Количество диапазонов равно 10')

#получение массива гистограммы самостоятельное
nhist = 10
hist = np.zeros(nhist)
for i in range(len(x)):
    j = int(x[i]/(1.0/nhist))
    hist[j]=hist[j]+1
gridsize = (2, 1)
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))

#первый график занимает одну ячейку (правда здесь и второй тоже)
ax3 = plt.subplot2grid(gridsize, (0, 0), colspan=1, rowspan=1)
ax4 = plt.subplot2grid(gridsize, (1, 0))
ind = np.array([i for i in range(nhist)])
ax3.bar(ind, hist)
zz = np.zeros((nhist,nhist))
for i in range(len(x)):
    i1 = int(x[i]/(1.0/nhist))
    i2 = int(y[i]/(1.0/nhist))
    zz[i1][i2]=zz[i1][i2]+1
```

```

from mpl_toolkits.axes_grid1.axes_divider import make_axes_locatable
#Цветовой график
axp = ax4.matshow(zz, cmap='copper',vmin = 0.0)

#размещение цветовой легенды рядом с графиком
divider = make_axes_locatable(ax4)
сах = divider.append_axes("right", size='5%', pad=0)
plt.colorbar(axp, сах = сах,ax=ax4)

print(zz)
plt.show()

```

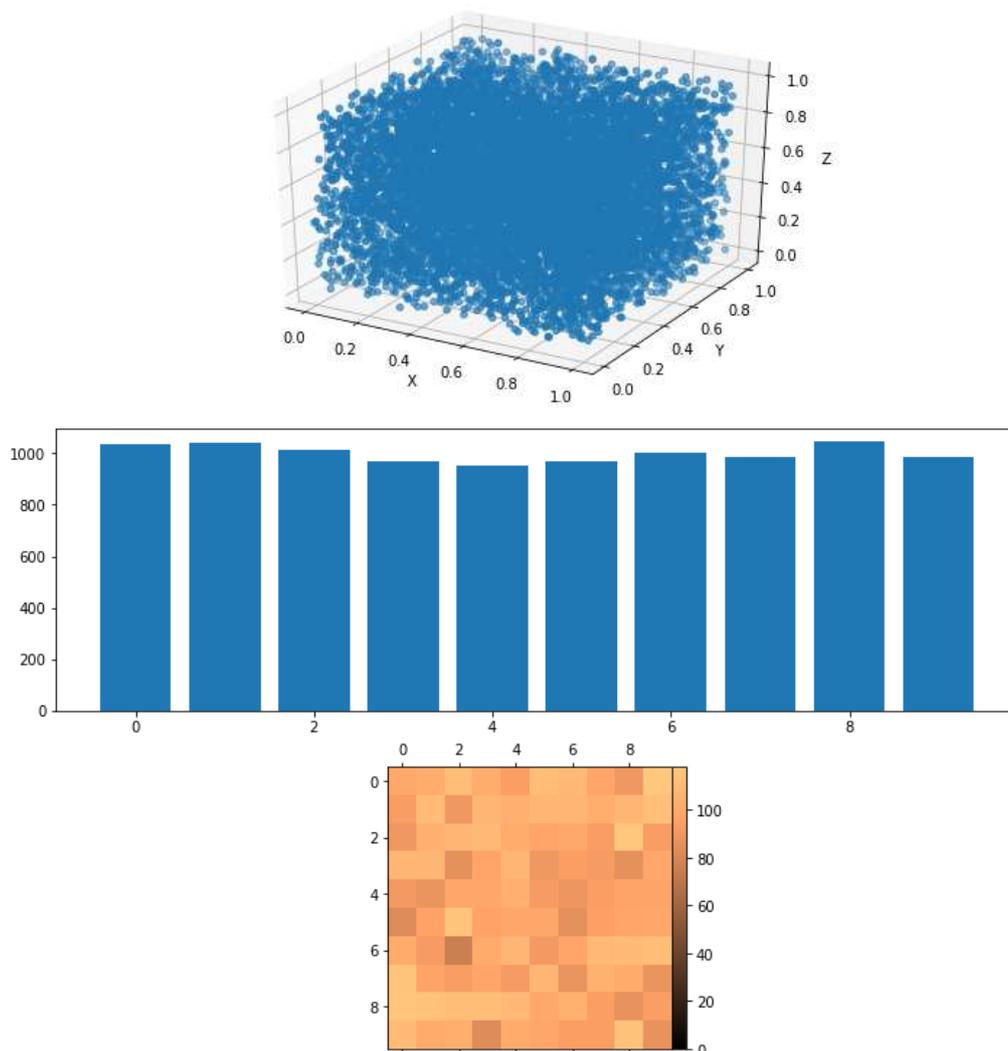


Рисунок 5.1 – Разброс точек и гистограммы 1d и цветовая 2d

Приведем пример построения гистограммы на MathCad.

Основные приемы с MathCad связаны с использованием форм со специальными элементами. Так, например форма Matrix содержит в себе возможности создания векторов и матриц. Выбрав, например элемент $m.n$, можно задать диапазон и используя элемент X_n заполнить вектор значениями, что и сделано в примере. В данном случае идет заполнение случайными значениями равномерного распределения от 0 до 1. Для расчета среднего и дисперсии используется форма Calculus и значки сумма, все нужные поля значка можно заполнить непосредственно в окне MathCad. Построить график, можно

выбрав элемент график и соответственно заполнить ось x и y соответствующими перебираемыми значениями. Так же здесь используется функция MathCad hist для расчета гистограммы. Когда мы нажимаем после выражение значок равно, MathCad автоматически рассчитывает выражение. Если нажать Ctrl+> можно реализовать символичные вычисления, $y + y \rightarrow 2y$.

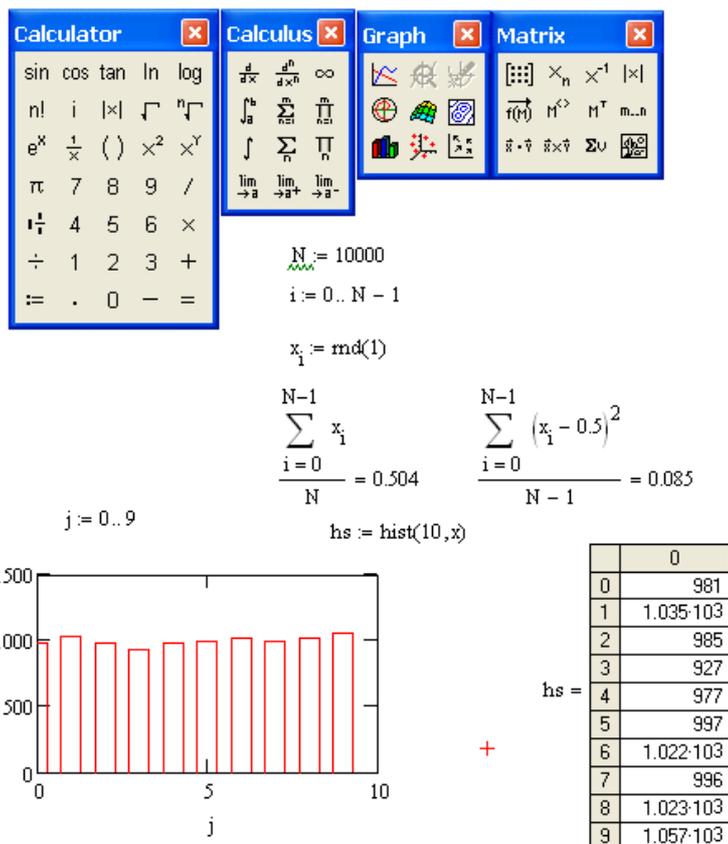


Рисунок 5.2 – Пример реализации задачи на MachCad

5.2.3 Примеры датчиков псевдослучайных чисел

Во всех языках программирования (Pascal, C/C++, Java и т. д.) и в приложениях Excel, MathCad, MathLab и др. есть стандартная функция, возвращающая случайное число. При этом существует возможность повторения одной и той же последовательности случайных чисел, например, в C++, Java. Наиболее распространенные алгоритмы, используемые в генераторах псевдослучайных чисел:

Линейный конгруэнтный метод (ЛКМ) – языки C, C++, Java;

Алгоритм Вичманна–Хилла (Wichmann–Hill) или AS 183 – языки Prolog, Python (версии 2.2 и предыдущие), Excel;

Алгоритм «Виток Мерсенна» (Mersenne Twister) или MT19937–Python (версии 2.3 и последующие);

Алгоритм Парка–Миллера;

Метод Фибоначчи с запаздыванием (Subtract-with-borrow Generators SWBG)

–Mathematica, MatLab.

Рассмотрим эти алгоритмы.

Линейный конгруэнтный метод (ЛКМ)

В стандарте ANSI-C имеется функция `rand()`, выдающая равномерно распределенные числа в интервале от 0 до `RAND_MAX`, и связанная с ней функция `srand()`, выполняющая начальную установку счетчика. Почти все подобные генераторы используют рекуррентную последовательность

$$I_{n+1} = (a \cdot I_n + c) \bmod m.$$

Здесь I_{n+1} равно остатку от деления $(aI_n + c)$ на m (или другими словами I_{n+1} – это наименьший положительный вычет $(aI_n + c)$ по модулю m). Число a называется мультипликатором, число c – инкрементом, а число m – модулем. Ниже приведена реализация генератора ANSI-C, опубликованного в качестве «примера».

```
/* (в модуле stdlib.h) */
#define RAND_MAX 32767

/* "пример" от комитета ANSI-C */
unsigned long next=1;

int rand(void) {
    next=next*1103515245+12345;
    return((unsigned int)(next/65536)%32768);
}
```

```
void srand(unsigned int seed) {
    next=seed;
}
```

Значение мультипликатора и инкремента в этом примере не являются оптимальными.

Алгоритм Вичманна–Хилла (Wichmann–Hill или AS183)

Псевдослучайные числа вычисляются по формуле

$$U_i = \left(\frac{X_i}{30269} + \frac{Y_i}{30307} + \frac{Z_i}{30323} \right) \bmod 1,0,$$

где функция `mod1,0` возвращает десятичную часть получившейся суммы.

Рекуррентные формулы для вычисления X_i , Y_i и Z_i имеют вид:

$$X_{i+1} = (171 \times X_i) \bmod 30269,$$

$$Y_{i+1} = (172 \times Y_i) \bmod 30307,$$

$$Z_{i+1} = (170 \times Z_i) \bmod 30323,$$

где функция `mod()` возвращает целое число, равное остатку от деления. По сути, этот алгоритм есть линейная комбинация трех конгруэнтных генераторов. При этом требуется задание трёх начальных значений. Алгоритм обладает периодом $6,95 \times 10^{12}$ ($\approx 2^{43}$), что недостаточно для современных нужд.

Алгоритм «Виток Мерсенна» (Mersenne Twister или MT19937)

Алгоритм разработан в 1997 году японскими учеными Макото Мацумото и Такудзи Нишимура. Обладает огромным периодом $2^{19937} - 1$ (создатели алгоритма доказали это свойство), имеет хорошее быстроедействие и проходит все статистические тесты.

Алгоритм Парка–Миллера (Park, Miller)

Самая простая рекуррентная последовательность, которую можно предложить для реализации генератора равномерного распределения, имеет вид:

$$I(j+1) = a \times (I(j) \bmod m).$$

Значения констант

$$a = 7^5 = 16807, \quad m = 2^{31} - 1 = 2147483647$$

были предложены Park, Miller и протестированы в исследованиях Lewis, Goodman, Miller. Прямое использование этого метода возможно на языке ассемблер, но языки высокого уровня могут при этом зафиксировать переполнение. Для обхода этого Scharge предложил метод частичной факторизации модуля. Для этого модуль записывается в виде:

$$\text{mod} = a \times q + r.$$

Если $r < q$ и $0 < z < m-1$, то при этом величины $a \times (z \bmod q)$ и $r \times [z/q]$ всегда лежат в интервале $0, \dots, m-1$. Для вычисления $a \times (z \bmod q)$ используется алгоритм:

$$t = a(z \bmod q) - r[z/q]$$

если $t < 0$, то $t += m$.

$$(a * z) \bmod m = t.$$

В случае констант Парка–Миллера можно использовать значения $q = 12773$ и $r = 2836$.

Если требуется число вызовов, превышающее по порядку 10^8 , то для этого случая L'Esuyer рекомендует комбинировать две последовательности с близкими, но отличающимися константами. В его исследованиях хороший результат был получен для значений:

$$m1 = 2147483563, \quad a1 = 40014, \quad q1 = 53668, \quad r1 = 12211;$$

$$m2 = 2147483399, \quad a2 = 40692, \quad q2 = 52774, \quad r2 = 3791.$$

При этом для современных компьютеров период повторения генерируемой последовательности оценивается по порядку примерно как 10^{18} .

Метод Фибоначчи с запаздыванием

Статистические свойства чисел, генерируемых линейным конгруэнтным алгоритмом, делают невозможным их использование для решения задач, чувствительных к качеству случайных чисел. В связи с этим линейный конгруэнтный алгоритм постепенно потерял свою популярность. Его место заняло семейство фибоначчиевых алгоритмов, позволяющих получать более качественные последовательности псевдослучайных чисел. В англоязычной литературе фибоначчиевы датчики называют обычно «Subtract-with-borrow Generators» (SWBG).

Один из фибоначчиевых датчиков основан на следующей итеративной формуле:

$$X(k) = \begin{cases} X(k-a) - X(k-b), & \text{если } X(k-a) \geq X(k-b), \\ X(k-a) - X(k-b) + 1, & \text{если } X(k-a) < X(k-b), \end{cases}$$

где $X(k)$ – вещественные числа из интервала $[0; 1]$, a, b – целые положительные числа, называемые лагами. Для работы фибоначчиеву датчику требуется знать максимальные значения предыдущих сгенерированных случайных чисел. При программной реализации для хранения полученных чисел используется конечная циклическая очередь на базе массива. Для старта фибоначчиевому датчику требуется $\max(a, b)$ случайных чисел, которые могут быть сгенерированы простым конгруэнтным датчиком. Лаги a и b не следует выбирать произвольно. Рекомендуются следующие пары значений лагов: $a = 55, b = 24$; $a = 17, b = 5$; $a = 97, b = 33$. Качество получаемых случайных чисел зависит от значения константы a , чем оно больше, тем выше размерность пространства, в котором сохраняется равномерность случайных векторов, образованных из полученных случайных чисел. В то же время с увеличением величины константы a возрастает объём используемой алгоритмом памяти.

Получаемые случайные числа обладают хорошими статистическими свойствами, причём все биты случайного числа равнозначны по статистическим свойствам. Период фибоначчиева датчика может быть оценен по следующей формуле:

$$T = (2^{\max(a,b)} - 1) \times 2^j$$

где j – число битов в мантиссе вещественного числа.

Функция `random()` в различных приложениях.

Pascal – `random(x)` возвращает псевдослучайное число типа `word` из интервала $[0; x]$. Переменная x должна быть типа `word`;

C, C++ – `rand(void)` возвращает псевдослучайное целое типа `int` число из интервала $[0; 32767]$; `RAND_MAX` – максимальное значение.

MathCad – `rnd(x)` возвращает псевдослучайное число из интервала $[0; x]$;

Excel – (СЛЧИС()) – для русской версии) возвращает псевдослучайное число из интервала $[0; 1,0]$;

Mathematica – `Random[]` возвращает псевдослучайное число типа `Real` из интервала $[0; 1,0]$;

MatLab – `rand` возвращает случайное псевдослучайное число из интервала $[0; 1,0]$;

Python – `import random; print random.random()` – возвращает псевдослучайное число из интервала $[0; 1,0]$;

Java – `Math.random()` возвращает псевдослучайное число типа `double` из интервала $[0; 1,0]$.

5.3 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

5.3.1 Моделирование дискретных случайных величин

Рассмотрим дискретную СВ X с рядом распределения

$$\begin{pmatrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

где $p_i = P(X = x_i)$. Для того чтобы моделировать эту величину, разделим интервал $[0; 1]$ на интервалы Δ_i (рис. 5.1) такие, что длина Δ_i равна вероятности p_i . Можно доказать следующую теорему.

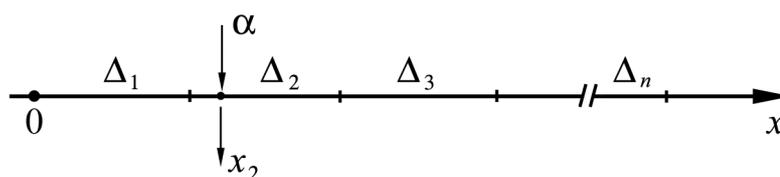


Рисунок 5.1 - Разбиение на интервалы диапазонов от 0 до 1

Теорема. Случайная величина X , определенная выражением $X = x_i$, если $\alpha \in \Delta_i$, имеет ряд распределения вероятностей (5.4). Схема моделирования: разыгрываем случайное число α и определяем интервала Δ_i , в который оно попало. В результате получим соответствующее значение СВ $X = x_i$ (для показанной на рис. 5.1 реализации $X = x_2$).

5.3.2 Моделирование случайных событий

Рассмотрим полную группу несовместных событий $\{A_i\}$ с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n ($\sum p_i = 1$). Разделим интервал $[0; 1]$ на n интервалов $\{\Delta_i\}$ таких, что длина

интервала Δ_i равна вероятности p_i . В результате получаем рассмотренную выше схему моделирования дискретной случайной величины.

Замечание. Если есть одно случайное событие A с вероятностью $P(A) = p$, то до полной группы событий его дополняет \bar{A} с вероятностью $P(\bar{A}) = 1 - p$.

5.3.3 Моделирование непрерывной случайной величины

Рассмотрим непрерывную СВ X с плотностью вероятности $f(x)$ (функция распределения вероятностей $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$). Можно доказать, что СВ X , удовлетворяющая уравнению $F(x) = \alpha$, имеет плотность вероятности $f(x)$. Таким образом, розыгрыш значения x непрерывной СВ X с заданной плотностью вероятности $f(x)$ сводится к процедуре розыгрыша случайного числа $\alpha \in [0; 1]$. Значение x находится из уравнения (рис. 5.2)

$$x = F^{-1}(\alpha). \quad (5.5)$$

Здесь F^{-1} обозначает обратную функцию по отношению к F . Рассмотренный метод моделирования непрерывной СВ называется **методом обратных функций**.

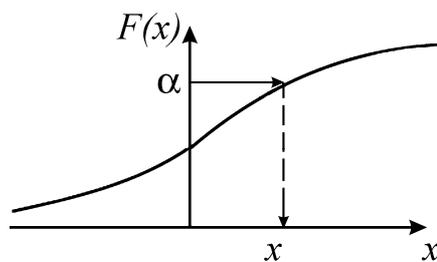


Рисунок 5.2 – Моделирование методом обратных функций

5.3.4 Моделирование экспоненциального распределения

Случайной величине X с экспоненциальной плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

где λ – параметр распределения, соответствует функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0) \quad (5.7)$$

На основании метода обратных функций найдем (см. рис. 5.2):

$$\alpha = 1 - e^{-\lambda x} \quad (5.8)$$

Решая относительно x , получим

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha) \quad (5.9)$$

Так как α – СВ с равномерным распределением в интервале $[0; 1]$, то $(1 - \alpha)$ также СВ с равномерным распределением в интервале $[0; 1]$. Окончательно получим

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(\alpha) \quad (5.10)$$

5.3.5 Пуассоновская случайная величина

Распределение вероятностей числа событий N на интервале времени Δt для

пуассоновской СВ с параметром λ определяется выражением

$$P(N = n, \Delta t) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!}. \quad (5.11)$$

Пуассоновский поток событий является простейшим потоком, для которого интервалы времени τ между соседними событиями являются независимыми СВ с экспоненциальной плотностью вероятности (5.6). Моделирование выполняется по следующей схеме: последовательно разыгрываем значения $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ СВ с экспоненциальной плотностью вероятности до тех пор, пока не выйдем за пределы временного интервала Δt (рис. 5.3). Число точек на интервале Δt и есть значение пуассоновской случайной величины N . Для реализации, показанной на рис. 5.3, $N = 3$.

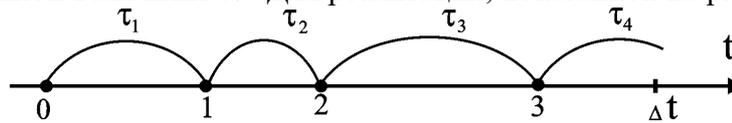


Рисунок 5.3 – Моделирование экспоненциального распределения

5.3.6 Гауссовская случайная величина

Гауссовская (нормальная) СВ X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (5.12)$$

Здесь m_x – среднее значение, σ_x^2 – дисперсия СВ X . Используя метод обратных функций, можно показать, что значение СВ X вычисляется по формуле

$$x = \sigma_x \Phi^{-1}(\alpha - 0,5) + m_x,$$

где Φ^{-1} – обратная функция по отношению к функции Лапласа Φ .

Однако этот алгоритм на практике не применяют из-за больших затрат машинного времени. Это связано с тем, что при использовании ММК необходимо получать достаточно много значений СВ для вычисления результата с приемлемой точностью. Поэтому распространен другой алгоритм, позволяющий получать сразу два независимых значения гауссовской СВ x'_1 и x'_2 с нулевыми средними и $\sigma_x = 1$:

$$x'_1 = \omega_1 \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \quad x'_2 = \omega_2 \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \quad (5.13)$$

где ω_1, ω_2 – координаты изотропного вектора $\vec{\omega}$ на плоскости. Это означает, что точка $\vec{\omega} / |\vec{\omega}|$ имеет равномерное распределение на окружности с единичным радиусом.

Моделирование ω_1, ω_2 :

- 1) $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_2, \quad \gamma_2 = 1 - 2\alpha_3, \quad d^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$.
- 2) если $d^2 > 1$, то повторяем 1) и т. д., иначе
- 3) $\omega_1 = \gamma_1 / d, \quad \omega_2 = \gamma_2 / d$.

Заданные значения m_x и σ_x можно учесть с помощью линейного преобразования

$$x = \sigma_x x' + m_x. \quad (5.14)$$

Другой способ моделирования гауссовской СВ основан на центральной предельной теореме, согласно которой сумма большого числа независимых СВ имеет приближенно гауссовское распределение. Чем больше слагаемых, тем точнее аппроксимация распределения суммы гауссовской плотностью вероятности. Например, сумма

$$Z = \sum_{i=1}^K \alpha_i \quad (5.15)$$

уже при значении $K = 6$ с хорошей степенью точности может считаться гауссовской СВ, пригодной для решения многих прикладных задач. Так как $m_\alpha = 0,5$ и $D_\alpha = 1/12$, то СВ Z необходимо пронормировать

$$X' = \frac{Z - K \times 0,5}{\sqrt{K \times (1/12)}}. \quad (5.16)$$

В результате получим СВ X' с нулевым средним и единичной дисперсией. Далее необходимо выполнить линейное преобразование (5.14) для перехода к СВ X с заданными значениями среднего и дисперсии.

5.3.7 Случайная величина с логнормальным распределением

Плотность вероятности СВ X с логнормальным распределением имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2\right\}. \quad (5.17)$$

Здесь параметры μ и σ^2 равны среднему и дисперсии $\ln X$. При этом математическое ожидание m_x и дисперсия D_x равны

$$m_x = e^{\mu + \sigma^2/2}, D_x = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Если Y имеет нормальное распределение с параметрами $m_y = 0$ и $\sigma_y = 1$, то СВ

$$X = \exp(\sigma Y + \mu)$$

имеет логнормальное распределение с параметрами (μ, σ^2) , средним m_x и дисперсией D_x .

Таким образом, моделирование СВ X с логнормальным распределением можно свести к моделированию гауссовской СВ Y с $m_y = 0$, $\sigma_y = 1$ и последующему преобразованию $X' = \exp(Y)$.

При этом $m_{X'} = e^{1/2}$, $D_{X'} = e(e-1)$. Если заданы среднее m_x и дисперсия D_x СВ X с логнормальным распределением, то ее значение можно найти с помощью линейного преобразования

$$X = \sqrt{D_x} \frac{\exp(Y) - e^{1/2}}{\sqrt{e(e-1)}} + m_x. \quad (5.18)$$

5.4 Моделирование n -мерной случайной величины

Рассмотрим непрерывную n -мерную СВ $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ с совместной плотностью вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2|x_1) f_3(x_3|x_2, x_1) \dots \quad (5.19)$$

Для ее моделирования сначала разыгрывают значение x_1 СВ X_1 . Это значение берется в качестве аргумента условной плотности вероятности $f(x_2|x_1)$, и разыгрывается значение x_2 СВ X_2 . Значения x_1, x_2 берутся в качестве аргументов условной плотности вероятности $f_3(x_3|x_1, x_2)$ и т. д.

5.5 Расчет площади или объема методом Монте-Карло

Сначала фигуру, для которой ищем объем или площадь необходимо вписать в куб или в прямоугольник (рисунок 5.4).

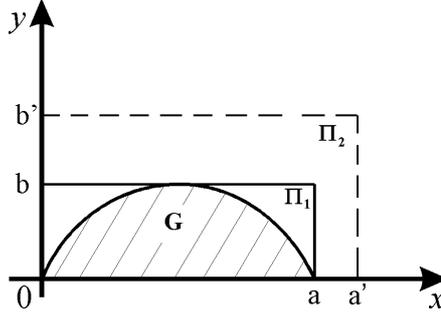


Рисунок 5.4 – Пример расчета площади

Для вычисления объема V_G (площади S_G) заданной геометрической фигуры G необходимо разыграть координаты N случайных точек с равномерным распределением в прямоугольной области Π (см. рис. 5.4). Тогда оценки величины объема \hat{V}_G (площади \hat{S}_G) можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned}\hat{V}_G &= a \times b \times c \times (N_G/N) \\ \hat{S}_G &= a \times b \times (N_G/N),\end{aligned}$$

где N_G – число точек, попавших в область G . Значение СВ X с равномерной плотностью вероятности в заданном интервале $[p; q]$ можно получить с помощью линейного преобразования

$$X = p + \alpha(q - p).$$

Здесь и далее α обозначает СВ с равномерной плотностью вероятности в интервале $[0; 1]$ (1). Более подробно моделирование случайных чисел с заданным законом распределения будет рассмотрено в материалах к лабораторной работе 2. Величину относительной среднеквадратической погрешности оценок объема \hat{V}_G (площади \hat{S}_G) можно вычислить по формуле:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{N - N_G}{NN_G}}.$$

5.6 Задания на моделирование случайных величин и метод Монте-Карло

Задание 1. Моделирование псевдослучайных чисел для равномерного распределения.

Для датчиков псевдослучайных чисел, используя математические пакеты и языки программирования (например, MathCad, язык Python, C), вычислить оценки среднего, дисперсии и построить гистограммы относительных частот (можно использовать любые другие три языка программирования). Сравнить полученные оценки с точными значениями математического ожидания $m_\alpha = 0,5$ и дисперсии $D(\alpha) = 1/12$.

В соответствии со своим вариантом промоделировать свой датчик случайных чисел равномерного распределения, рассчитать среднее, дисперсию и построить гистограмму. Чисел должно быть порядка 10000-100000.

Варианты на моделирование псевдослучайных чисел.

1. $z_{i+1} = \exp(z_i + b) - \text{int}[\exp(z_i + b)], b > 2$
2. Алгоритм Парка-Миллера.
3. Алгоритм Вичманна-Хилла.

4. Линейный конгруэнтный алгоритм.

5. Метод Фибоначчи с запаздыванием.

6. Алгоритм на основе плохо-обусловленной обратной матрицы. $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b+e \cdot i \end{bmatrix}$, где

e - малая величина, i - инкрементируемая величина. Берется обратная матрица и дробная часть от какого-либо элемента матрицы.

7. На основе данных из сжатого файла. Берем какой-либо байт с лагом из большого сжатого файла, например видео-файла.

8. Конкатенация двух случайных байт стандартного датчика. Получаем один случайный байт (0..255), второй, получаем слово и нормируем на 1.

9. $z_{i+1} = 2^{(z_i+b+a)} - \text{int}[2^{(z_i+b+a)}]$, $b > 4$, b - дробное число. Проверить. Что будет если степень окажется целой, как этого избежать.

10. $z_{i+1} = 3^{(z_i+b)} - \text{int}[3^{(z_i+b)}]$, $b > 4$, b - дробное число. Проверить.

Задание 2. Промоделировать на любом языке программирования или используя любой математический пакет случайные числа в соответствии с заданным законом распределения, полученным из своего варианта. Параметры распределения задать самостоятельно, рассчитать статистические значения среднего и дисперсии, сравнить их с аналитическими. Построить гистограмму распределения сравнить с плотностью вероятности моделируемой случайной величины, пронормировать аналитическую функцию плотности вероятности к частотам вероятностей и сравнить со статистически полученной гистограммой на одном графике.

При вычислении среднего и дисперсии СВ $Y = \varphi(X)$ можно воспользоваться формулами:

$$m_1[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f(x) dx,$$

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - m_1[Y]\}^2 f(x) dx.$$

Также следует учитывать, что для независимых случайных величин X и Y выполняются следующие соотношения:

$$m_1[X + Y] = m_1[X] + m_1[Y],$$

$$m_1[X \cdot Y] = m_1[X] \cdot m_1[Y],$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y),$$

$$D(X \cdot Y) = m_1^2[X] \cdot D(Y) + m_1^2[Y] \cdot D(X).$$

Варианты заданий на заданный закон распределения.

1. СВ с логнормальной плотностью вероятности.

2. Реализовать три алгоритма моделирования гауссовской СВ и по критерию согласия Пирсона сравнить их эффективность.

3. Пуассоновская СВ.

4. СВ с биномиальным распределением вероятностей: $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

, где C_n^m – число сочетаний из n по m ; $0 < p < 1$, $0 \leq m \leq n$. При моделировании СВ учесть, что биномиальное распределение является моделью случайных экспериментов, состоящих из n независимых однородных испытаний, в каждом из которых вероятность положительного исхода равна p .

5. СВ X с плотностью вероятности: $f(x) = \begin{cases} A \sin(x), & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (0, \pi). \end{cases}$

6. СВ X с плотностью вероятности: $f(x) = \begin{cases} A \cos(x), & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$

7. СВ X с плотностью вероятности (распределение Лапласа или двойное экспоненциальное распределение): $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.

8. СВ X с плотностью вероятности: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{x}{a^2}, & a^2 \leq x \leq ab, \\ \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{b^2}{x}, & a^2 \leq x \leq ab, \end{cases}$,

где a, b ($0 < a < b$) – параметры распределения.

9. СВ X с плотностью вероятности (распределение Коши): $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}$, где α, λ ($\lambda > 0$) – параметры распределения.

10. СВ X с плотностью вероятности (распределение Максвелла): $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где a – параметр распределения.

11. СВ $Z = X \cos \Omega$, где X и Ω независимые случайные величины. СВ X имеет распределение Релея: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $a \geq 0$ параметр распределения.

СВ Ω имеет равномерное распределение на интервале $|\omega| \leq \pi$.

12. Случайная величина $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, где X и Y независимые гауссовские СВ с различными параметрами.

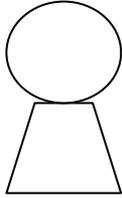
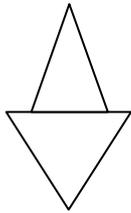
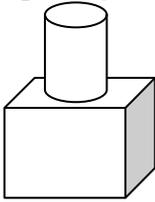
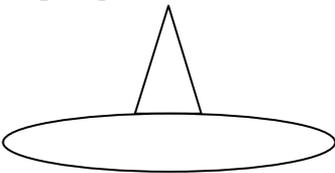
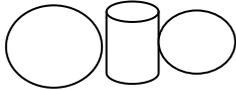
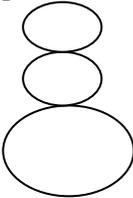
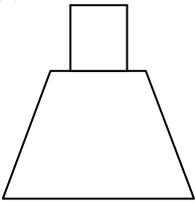
13. Случайная величина $Z = XY$, где X и Y независимые гауссовские СВ с различными параметрами.

14. Случайная величина $Z = X/Y$, где X и Y независимые релеевские СВ с различными параметрами (см. вариант 11).

15. Случайная величина $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, где X_i независимые случайные величины с равномерным распределением в интервале $[p, q]$. Определить степень отклонения полученной гистограммы СВ Z от гауссовской плотности вероятности.

Задание 3. Разработать алгоритм вычисления площади (объема) заданной фигуры методом Монте-Карло и написать для него программу на ЭВМ. Определить величину относительной средне-квадратичной ошибки вычисленной оценки для различных прямоугольных областей Π , содержащих заданную фигуру G . Найти точное значение площади (объема) заданной фигуры и сравнить полученные результаты. Фигуры взять в соответствии с вариантом.

Таблица 5.2 – Варианты заданий для расчета объема фигуры методом Монте-Карло

<p>1 Пирамида на цилиндре</p> 	<p>2 Шар на урезанной пирамиде</p> 	<p>3 Конус на перевернутой пирамиде</p> 
<p>4 Цилиндр на кубе</p> 	<p>5 Тетраэдр на эллипсоиде</p> 	<p>6 Цилиндра на шаре, шар на цилиндре</p> 
<p>7 Три шара</p> 	<p>8 Куб на усеченной пирамиде</p> 	<p>9 Конус на шаре</p> 
<p>10 Шар и тор</p>	<p>11 Тор и эллипсоид</p>	<p>12 Тор и цилиндр</p>

6 Теория Систем Массового Обслуживания (СМО)

При решении различных задач часто приходится сталкиваться с анализом эффективности работы систем массового обслуживания (СМО). Примеры СМО: телефонная станция, ремонтные мастерские, билетные кассы, автомобильные заправочные станции, железнодорожные сортировочные станции и т. п. Заявки поступают в СМО случайно, образуя поток заявок. Обслуживание заявок также выполняется в течение случайного времени. Это приводит к тому, что в некоторые моменты времени в СМО скапливается большое количество заявок, а в другие моменты заявок мало или они вообще отсутствуют. Обычно предполагается, что известен вероятностный закон, управляющий поступлением заявок. Впервые такая задача была решена датским математиком А.К. Эрлангом в начале XX века для анализа работы телефонной станции. В теории массового обслуживания понятие очереди является одним из основных.

Определение. Очередью называется линейная цепочка выстроившихся один за другим объектов, нуждающихся в обслуживании.

Все СМО характеризуются следующими основными элементами:

Входной поток – поток поступающих требований или заявок на обслуживание. Если поступление требований или заявок на обслуживание и процедура обслуживания выполняются строго по графику, то очереди можно избежать. На практике эти процессы носят случайный характер, и для построения их моделей следует привлекать методы теории вероятностей. Обычно требования в СМО поступают по одному. Такие системы называются системами с единичным поступлением. Однако бывают ситуации, когда требования поступают группами. Причем число требований в группе может быть фиксированным или случайным (число вагонов в железнодорожном составе, поступающих на сортировочную станцию). В этом случае речь идет о системе с *групповым поступлением требований*. Возможны ситуации, когда поступившие требования могут отказываться от обслуживания и покидать систему (система с потерями). Система, в которой обслуживаются все поступающие требования, называется СМО с ожиданием.

Механизм обслуживания. СМО различаются числом обслуживающих приборов, количеством обслуживаемых одновременно требований, продолжительностью обслуживания. Здесь также есть характеристики, которые носят случайный характер, например время обслуживания. Процесс обслуживания требований может состоять из нескольких этапов, выполняемых последовательно на различных обслуживающих устройствах. Такую систему называют многофазовой.

Дисциплина очереди или правила поведения в очереди, в соответствии с которыми обслуживающий механизм принимает поступившую заявку на обслуживание. Различают следующие виды дисциплины очереди:

- «живая очередь» – первый пришел и первым обслуживаешься;
- пришел последним, а обслуживаешься первым. Такая дисциплина очереди может быть использована, например, при выходе из лифта, идущего вниз, или когда в очереди стоят не люди, а некоторые объекты: вагоны, автомобили (без водителей);
- обслуживание по степени срочности. Например, телеграф, междугородные переговоры. Причем требование с более высоким приоритетом в момент своего поступления могут прервать процесс обслуживания требований с более низким приоритетом. В этом случае говорят о СМО с абсолютным приоритетом. Если прерывание недопустимо, то это СМО с относительным приоритетом;
- обслуживание по приоритетам. Например, обслуживание ветеранов или ликвидация аварий;
- случайный порядок обслуживания, который используют, например, педагоги при опросе учащихся.

Выходящий поток – поток требований, покидающих СМО после обслуживания. Этот поток играет важную роль, так как может быть входным потоком для других СМО. Часто обслуженные требования возвращаются в эту же систему. В этом случае имеют место замкнутые СМО. Примером может быть организация ремонта станочного парка предприятия, когда отремонтированные станки возвращаются в систему, образуя входящий поток.

Предмет теории массового обслуживания связан с установлением зависимости между характеристиками потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО и эффективностью обслуживания.

Эффективность работы СМО определяется следующими параметрами:

- среднее число обслуживаемых заявок СМО в единицу времени;
- среднее число заявок в единицу времени, покидающих СМО необслуженными;
- среднее время ожидания в очереди и т. п.

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания приводит к тому, что в СМО протекает случайный процесс. Если случайный процесс марковский, то удастся описать работу СМО с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и выразить характеристики обслуживания через параметры СМО и потоки заявок.

Для того чтобы протекающий в системе процесс был марковский, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, были пуассоновскими, или простейшими. Если потоки не пуассоновские, тогда для исследования основных характеристик такой системы используется метод Монте-Карло.

При изучении СМО можно выделить три класса рассматриваемых задач: задачи анализа систем, статические задачи и операционные задачи.

Задачи анализа поведения системы заключаются в том, чтобы на основе математических моделей, адекватно отражающих свойства СМО, выявить основные операционные характеристики, определяющие поведение этих систем в процессе их функционирования. К таким характеристикам относятся:

- 1) $Q(t)$ – число требований, находящихся в очереди в момент времени t ;
- 2) $W(t)$ – продолжительность ожидания в очереди требования, поступившего в СМО в момент времени t ;
- 3) I_n – продолжительность n -го периода простоя системы.

На практике часто используется показатель, который называется степенью загруженности обслуживающего прибора или коэффициентом нагрузки:

$$\rho = \frac{\text{интенсивность входного потока заявок}}{\text{интенсивность обслуживания}}. \quad (6.1)$$

Статистические задачи возникают при исследовании систем массового обслуживания и связаны с оценкой характеристик случайных процессов, протекающих в системе. При этом общая модель приводится в количественное соответствие с рассматриваемой СМО на основе статистического анализа эмпирических данных. Это позволяет оценить фигурирующие в модели характеристики потоков и их параметры.

Операционные задачи возникают при проектировании СМО, управлении системами и для оценки их эффективности. Некоторые из этих задач по своей природе относятся к разряду статистических.

При рассмотрении СМО часто используются обозначения, предложенные Кендаллом. Они позволяют описать систему с помощью следующих трех характеристик: вид входного потока, распределение продолжительности обслуживания, число обслуживающих приборов.

Используются следующие обозначения:

- M – пуассоновское, или экспоненциальное распределение;
- D – постоянная величина;

E_k – распределение Эрланга;

G – произвольное распределение;

GI – распределение в случае независимых событий.

Например, обозначение $M/D/s$ – означает, что имеется СМО с s приборами, обслуживающая поступающие требования за строго определенный интервал времени, входной поток – пуассоновский.

Замечание. Введенная классификация не учитывает правил формирования очереди, которые должны дополнять модель СМО.

Потоки событий

Основным понятием при рассмотрении случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем, к которым относятся СМО, является понятие **потока событий**.

Определение. Поток событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (поток автобусов на данной остановке, поток отказов какой-то системы и т. п.). Поток событий можно изображать последовательностью точек на оси времени, как это показано на рис. 6.

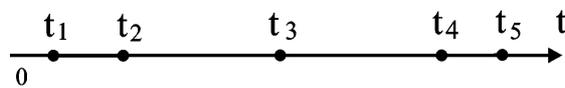


Рисунок 6.1 – Поток событий

Особое место занимают потоки событий, обладающие свойствами – стационарности, отсутствия последействия, ординарности:

Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания n событий в интервале времени $(t, t + \tau)$ зависит от τ и не зависит от t . Это означает, что интенсивность потока событий не зависит от времени. Такие потоки событий часто встречаются на практике. Однако об их стационарности строго можно говорить только на ограниченном интервале времени. Распространение этого свойства на весь временной интервал является удобным приемом.

Поток событий называется потоком без последействия, если события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

Поток событий называется ординарным, если вероятность осуществления на бесконечно малом интервале времени Δt двух и более событий $P(i, \Delta t)$ ($i = 2, 3, \dots$) пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью одного события $P(1, \Delta t)$, т. е. выполняется условие

$$P(1, \Delta t) \gg P(i, \Delta t), \quad i = 2, 3, \dots$$

Определение. Поток событий называется простейшим, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия. Для такого потока вероятность появления на интервале времени Δt n событий определяется формулой Пуассона

$$P(N = n, \Delta t) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!}.$$

Для простейшего потока интервал τ между соседними событиями имеет экспоненциальное распределение $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$. Если рассматривать бесконечно малый временной интервал Δt , то с учетом ординарности пуассоновского потока

$$P(0, \Delta t) + P(1, \Delta t) \approx 1.$$

Отсюда следует, что

$$P(1, \Delta t) \approx \lambda \Delta t$$

Определение. Поток событий называется рекуррентным или потоком «Пальма», если он стационарен, ординарен, а интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ между соседними событиями представляют собой независимые случайные величины с одинаковым произвольным распределением. Из определения следует, что простейший поток – это частный случай рекуррентного. Интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ имеют одинаковое экспоненциальное распределение, а их независимость обусловлена тем, что простейший поток есть поток без последдействия.

Важными для практики являются потоки Эрланга, которые образуются в результате «просеивания простейшего потока». Поток Эрланга n -го порядка получается, если в исходном простейшем потоке сохранить каждое n -е событие. На рис. 6.2 показан пример формирования потока Эрланга 4-го порядка.



Рисунок 6.2 – Поток Эрланга

Простейший поток является потоком Эрланга первого порядка. Можно показать, что плотность вероятности интервала времени между соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка имеет вид:

$$f_k(\tau) = \frac{\lambda(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda\tau} \quad (\tau > 0), \quad (6.2)$$

где λ – средняя интенсивность порождающего простейшего потока. При этом среднее и дисперсия СВ τ равны $m_1^{(k)}(\tau) = k/\lambda$, $D^{(k)}(\tau) = k/\lambda^2$.

6.1 Многоканальная СМО с ожиданием

Структура многоканальной СМО показана на рис. 6.3.

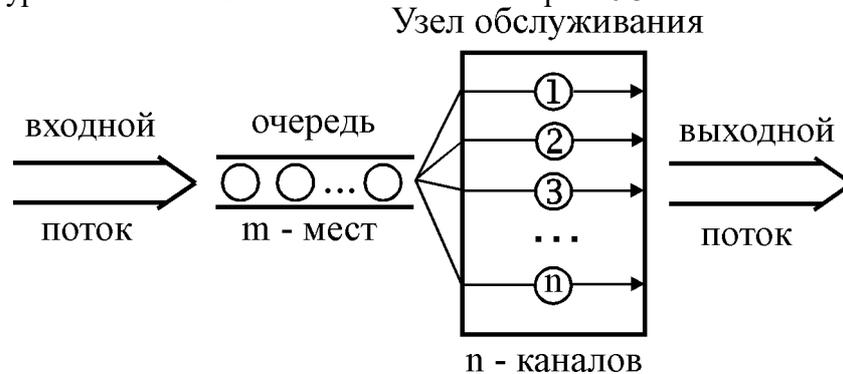


Рисунок 6.3 – Структура СМО

Число мест в очереди равно m , число обслуживающих устройств – n . Максимально в СМО одновременно может находиться $m+n$ требований. Если поступающее требование застаёт СМО полностью занятой, т. е. заняты все обслуживающие устройства и нет свободных мест в очереди, то это требование покидает систему. Если при поступлении требования свободно несколько обслуживающих устройств, то оно поступает на любое из них с равной вероятностью. Состояние системы будем нумеровать по числу находящихся в ней требований:

- Q_0 – все каналы свободны;
- Q_1 – занят один канал;
- Q_n – заняты все каналы;
- Q_{n+1} – одно требование стоит в очереди;
- Q_{n+m} – все каналы заняты, все места в очереди заняты.

Граф состояний такой СМО показан на рис. 3.4.4 и представляет собой схему «гибели и размножения».

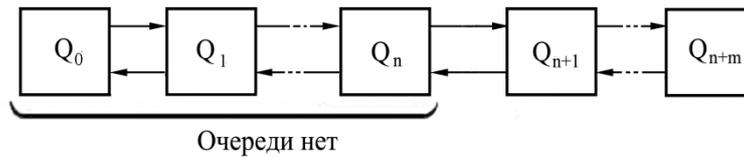


Рисунок 6.4 – Схема гибели и размножения

Пусть поток поступающих требований пуассоновский со средней интенсивностью λ , а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Можно показать, что в этом случае финальные вероятности состояний системы равны:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{(\rho/n)^{m+1} - \rho/n}{\rho/n - 1} \right]^{-1}, \quad (6.3)$$

$$p_k = \left(\frac{\rho^k}{k!} \right) p_0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.4)$$

$$p_k = \left(\frac{\rho^{n+i}}{n!n^i} \right) p_0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.5)$$

где параметр $\rho = \lambda / \mu$.

Основные характеристики СМО

Ниже перечислены основные характеристики СМО, определяемые при решении задач анализа. Аналитические результаты в виде формул приведены для случая пуассоновского потока заявок со средней интенсивностью λ и экспоненциального распределения времени обслуживания с параметром μ .

Вероятность того, что все обслуживающие устройства свободны, равна p_0 .

Вероятность того, что занято k обслуживающих устройств, равна p_k .

Вероятность того, что все обслуживающие устройства заняты и l требований находятся в очереди ($l \leq m$), находится из выражения:

$$p_{n+l} = \frac{\rho^{n+l}}{n!n^l} p_0, \quad 1 \leq l < m; \quad (6.6)$$

вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0. \quad (6.7)$$

Среднее число устройств, занятых обслуживанием требований, определяется выражением:

$$N_{\text{зан}} = \sum_{k=1}^n k p_k + n \sum_{l=1}^m p_{n+l}. \quad (6.8)$$

Если поток заявок пуассоновский, то, выполняя суммирование, найдем:

$$N_{\text{зан}} = \rho \left[1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0 \right]. \quad (6.9)$$

Среднее число простаивающих устройств

$$N_{\text{пр}} = n - N_{\text{зан}}. \quad (6.10)$$

Коэффициенты простоя и занятости

$$K_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{пр}}}{n}, \quad K_{\text{зан}} = 1 - K_{\text{пр}}. \quad (6.11)$$

Относительная пропускная способность равна доли обслуженных требований от общего числа поступивших в систему:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0. \quad (6.12)$$

Абсолютная пропускная способность A равна среднему числу требований, обслуживаемых в единицу времени:

$$A = \lambda q. \quad (6.13)$$

Среднее число требований, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{l=1}^m l p_{n+l} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \frac{1 - (\rho/n)^m (1 + m - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} p_0. \quad (6.14)$$

Среднее число требований, находящихся в СМО:

$$L = L_{\text{оч}} + N_{\text{зан}}. \quad (6.15)$$

Среднее время ожидания в очереди (формула Литтла)

$$W = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \quad (6.16)$$

6.2 Моделирование систем массового обслуживания

Рассмотрим пример, связанный с моделированием методом Монте-Карло системы массового обслуживания. Имеется одноканальная СМО ($n = 1$) с очередью, число мест в очереди $m = 1$. Поток заявок – пальмовский, т. е. соседние интервалы времени между заявками представляют собой независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности $f(\tau)$. Время обслуживания одной заявки – случайная величина с плотностью вероятности $\varphi(\tau)$.

Требуется, моделируя работу СМО методом Монте Карло и располагая одной длинной реализацией событий входного потока продолжительностью T , найти оценки:

- P_0 и P_1 , – вероятностей того, что канал не будет занят и канал будет занят;
- величины среднего времени ожидания в очереди $\hat{m}_1(t_{\text{из}})$ и дисперсии времени ожидания $\hat{D}(t_{\text{из}})$;
- вероятности отказа в обслуживании $P_{\text{отк}}$.

Решение. Граф состояний системы показан на рис. 6.5.

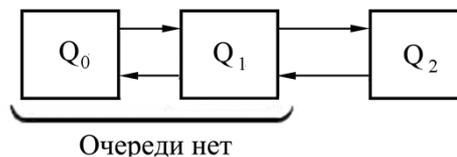


Рисунок 6.5 – Граф состояний системы

Будем считать, что в начальный момент времени система находится в состоянии Q_0 . Разыграем моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots прихода заявок. Для этого определим функцию распределения вероятностей интервалов времени между заявками

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} f(x) dx$$

и, используя метод обратной функции, последовательно разыграем интервалы времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, пример реализации которых показан на рис. 6.6.

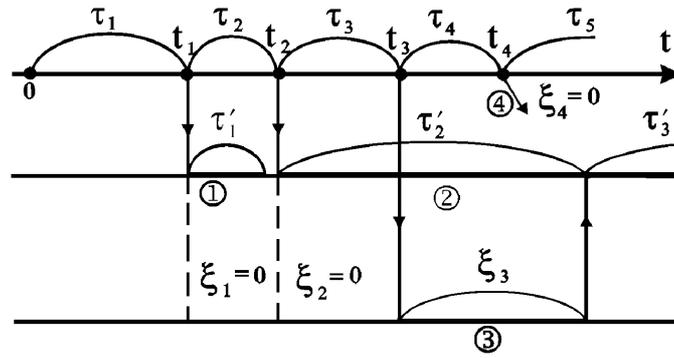


Рисунок 6.6 – Процесс моделирования

На второй оси (рис. 6.6) будем изображать состояние канала (жирная черта – «занято», тонкая – «свободно»). На третьей оси будем изображать состояние места в очереди. Заявка, пришедшая в момент времени t_1 , занимает канал. Время ее обслуживания τ'_1 разыгрывается с помощью метода обратных функций. Вторая заявка, пришедшая в момент t_2 , также занимает канал после его освобождения первой заявкой. Третья заявка занимает место в очереди, а четвертая покидает СМО. Обозначим через T_0 – время, в течение которого канал свободен, $T_1 = \sum \tau'_i$ – суммарное время обслуживания (для четвертой заявки время обслуживания $\tau'_4 = 0$). При достаточно большом значении T оценки вероятностей равны соответственно $\hat{P}_0 = \frac{T_0}{T}$ и $\hat{P}_1 = \frac{T_1}{T}$.

Оценка среднего времени ожидания $t_{ож}$ в очереди

$$m_1(t_{ож}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i,$$

где ζ_i – время ожидания в очереди i -й заявки (первая и вторая заявки сразу приняты к обслуживанию, а четвертая получила отказ, поэтому для этих заявок $\zeta_i = 0$), N – общее число заявок.

Оценка вероятности отказа $\hat{P}_{отк} = \frac{N_0}{N}$, где N_0 – число заявок, получивших отказ.

6.3 Задание на Системы массового обслуживания

Реализовать на ЭВМ алгоритм метода Монте-Карло моделирования СМО, позволяющий вычислять: относительную q и абсолютную A пропускную способность СМО, среднюю интенсивность потока заявок, покинувших СМО необслуженными, среднее время ожидания в очереди, средний интервал времени между событиями выходного потока. Входной поток заявок – поток Эрланга порядка k с параметром λ . Время обслуживания имеет экспоненциальную плотность вероятности с параметром μ . Число мест в очереди m , число обслуживающих устройств n и порядок потока Эрланга k приведены в таблице, значения параметров λ и μ выбрать самостоятельно.

Вычислить оценки указанных в задании характеристик СМО и определить величину их относительной среднеквадратической погрешности.

Построить гистограмму величины интервала времени между событиями выходного потока.

Провести исследование полученных результатов на устойчивость к принятой модели, изменив вид функции плотности вероятности интервалов времени между соседними заявками $f(\tau)$ входного потока. При этом параметры новой $f^*(\tau)$ подобрать так, чтобы величина среднего интервала $m_1(\tau)$ осталась неизменной.

Таблица 6.1 Варианты заданий

Номер варианта	m	n	k
1	2	2	2
2	3	2	2
3	4	2	2
4	2	3	2
5	3	3	3
6	4	3	3
7	2	4	3
8	3	4	3
9	4	4	3
10	2	2	4

6.4 Контрольные вопросы по теории массового обслуживания

- Какой поток событий называется рекуррентным?
- Какой поток событий называется простейшим?
- Какой вид имеет граф состояний рассмотренной вами СМО?
- Перечислите основные компоненты СМО.
- Что такое очередь и дисциплина очереди?
- Что такое абсолютный и относительный приоритет заявки?
- Какие параметры характеризуют эффективность работы СМО?
- Какова эффективность рассмотренной вами СМО?
- Как можно повысить эффективность СМО?
- Что характеризуют результаты расчетов при различных статистических характеристиках входного потока?
- Что такое обозначения Кендалла для СМО?
- Что такое марковский процесс?

7 Теория игр

Теория игр — это раздел математической экономики, изучающий решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий.

Конфликт может относиться к разным областям человеческого интереса: чаще всего это экономика, социология, политология, реже биология, кибернетика и даже военное дело.

Конфликтом является любая ситуация, в которой затронуты интересы двух и более участников, традиционно называемых игроками. Для каждого игрока существует определённый набор стратегий, которые он может применить. Пересекаясь, стратегии нескольких игроков создают определённую ситуацию, в которой каждый игрок получает определённый результат, называемый выигрышем, положительным или отрицательным. При выборе стратегии важно учитывать не только получение максимального профита для себя, но также возможные шаги противника, и их влияние на ситуацию в целом.

Конфликтная ситуация называется антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведёт к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и многочисленные. Участники множественной игры могут образовывать коалиции. Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

Стороны, участвующие в игре, называются игроками. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, оговаривается в процессе игры. Фактически, число стратегий совпадает с числом вариантов действий.

Игра называется конечной, если число стратегий игроков конечно и бесконечной, если хотя бы у одного из игроков число ситуаций является бесконечным.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника.

Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется ходом. Ходы бывают личные и случайные. Ход называется личным, если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (ход в шахматах, шашках). Ход называется случайным, если выбор производится не игроком, каким-либо механизмом случайной выборки (бросание монеты).

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечное множество стратегий, называются матричными.

Так как игра конечна, то множество стратегий X и Y конечны.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Если игрок I выбрал стратегию x_i , а игрок II — y_j , то выигрыш равен a_{ij} . Числа a_{ij} образуют матрицу A размером $(m \times n)$.

$$\begin{array}{l} \phantom{a_{11}} \phantom{a_{12}} \phantom{a_{1n}} \\ \phantom{a_{21}} \phantom{a_{22}} \phantom{a_{2n}} \\ \phantom{a_{31}} \phantom{a_{32}} \phantom{a_{3n}} \\ \\ x_m \rightarrow \left(a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn} \right) \end{array} = \|a_{ij}\| = A$$

Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях.

7.1 Типы игр

7.1.1 Кооперативная и некооперативная игра

Кооперативной игрой является конфликт, в котором игроки могут общаться между собой и объединяться в группы для достижения наилучшего результата.

Примером кооперативной игры можно считать карточную игру Бридж, где очки каждого игрока считаются индивидуально, но выигрывает пара, набравшая наибольшую сумму.

Некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Не смотря на то, что эти два вида противоположны друг другу, вполне возможно объединение стратегий, которое может принести больше пользы, чем следование какой-либо одной.

7.1.2 С нулевой суммой и ненулевой суммой

Игрой с нулевой суммой называют игру, в которой выигрыш одного игрока равняется проигрышу другого.

Например, банальный спор: если вы выиграли сумму N , то кто-то эту же сумму N проиграл.

В игре же с ненулевой суммой может изменяться общая цена игры, таким образом принося выгоду одному игроку, не отнимая ее цену у другого. В играх с ненулевой суммой проигрыш одного из игроков не является обязательным условием, хотя такой исход и не исключается.

В качестве примера здесь отлично подойдут шахматы: превращая пешку в ферзя игрок А увеличивает общую сумму своих фигур, при этом не отнимая ничего у игрока Б.

7.1.3 Параллельные и последовательные

Параллельной является игра, в которой игроки делают ходы одновременно, либо ход одного игрока неизвестен другому, пока не завершится общий цикл. В последовательной игре каждый игрок владеет информацией о предыдущем ходе своего оппонента до того, как сделать свой выбор. И совсем не обязательно информации быть полной, что подводит нас к следующему типу.

7.1.4 С полной или неполной информацией

Эти типы являются подвидом последовательных игр, и названия их говорят сами за себя.

7.2 Решение матричной игры $n \times m$ по критерию Гурвица, Сэвиджа, Байеса и Вальда

7.2.1 Игры с природой

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком один. Игроку два (природа) не важен результат, либо он не способен к осмысленным решениям. Или, возможно, условия не зависят от действий игрока, а определяются внешними факторами: реакция рынка, который не будет вредить одному конкретному игроку, государственная политика, реальная природа.

Различают два вида задач в играх с природой:

Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний;

Задачи о принятии решений в условиях неопределённости, когда нет

возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы;

Пример:

Первого игрока, за которого мы будем принимать решения, будет представлять Samsung. Вторым игроком, играющим «природу», будет компания Apple.

Подходит время выпуска нового смартфона, прошла презентация, эксперты высказали свое мнение, и игрок один должен принять важное решение, когда выпустить продукт? Упростив ситуацию, у нас останется три стратегии: до конкурента (A_1), вместе с ним (A_2) или после (A_3). Естественно, пока не выйдет новый iPhone мы не узнаем, будет он намного лучше нашего (B_1), таким же (B_2) или сильно уступающим в качестве (B_3). Посчитав прибыль во всех случаях, в итоге получим матрицу:

	B1	B2	B3
A1	5	5	7
A2	3	4	6
A3	2	4	8

Теперь же, для принятия решения, у нас есть несколько критериев.

7.2.2 Критерий Вальда (максиминный).

Игрок рассчитывает, что природа пойдет по наихудшему для него пути, и следует выбрать вариант с максимальной прибылью при самом плохом исходе, поэтому данный критерий считается пессимистическим. Представить его можно в виде $\max(\min i)$.

	B1	B2	B3
A1	5	5	7
A2	3	4	6
A3	2	4	8

Для A_1 минимальной прибылью является 5 у природы B_1 и B_2

Для A_2 минимальной прибылью является 3 у природы B_1

Для A_3 минимальной прибылью является 2 у природы B_1

$$\max\{5|3|2\} = 5$$

Таким образом из 5, 3 и 2 максимум прибыли нам даст вариант A_1

7.2.3 Критерий максимума (максимаксный)

Является оптимистическим, т.е. мы надеемся на самый благоприятный для нас исход представляется как $\max(\max i)$.

Для A_1 максимальной прибылью является 7 у природы B_3

Для A_2 максимальной прибылью является 6 у природы B_3

Для A_3 максимальной прибылью является 8 у природы B_3

$$\max\{7|6|8\} = 8$$

Таким образом, из 7, 6 и 8 максимум прибыли нам даст вариант A_3

7.2.4 Критерий Гурвица

Рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max(A \cdot \max i + (1 - A) \cdot \min i)$$

где A — степень оптимизма и изменяется в пределах от 0 до 1.

Критерий выдает результат, учитывающий возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $A=1$ данный критерий можно заменить критерием максимума, а при $A=0$ — критерием Вальда. Величина A зависит от степени ответственности игрока один: чем она выше, тем ближе A к единице. Для данного

примера $A=0,4$.

Для A_1 прибыль равна $0,4 \cdot 7 + 0,6 \cdot 5 = 5,8$

Для A_2 прибыль равна $0,4 \cdot 6 + 0,6 \cdot 3 = 4,2$

Для A_3 прибыль равна $0,4 \cdot 8 + 0,6 \cdot 2 = 4,4$

Из полученных ответов максимальную прибыль приносит действие A_1 .

7.2.5 Критерий Сэвиджа (минимаксный).

Суть его заключается в выборе стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, в которой вычисляется максимальная прибыль при каждом варианте действия игрока, и среди результатов выбирается наименьший. Его формула выглядит как $\min(\max i)$.

Для A_1 максимальной прибылью является 7 у природы B_3

Для A_2 максимальной прибылью является 6 у природы B_3

Для A_3 максимальной прибылью является 8 у природы B_3

Таким образом из 7, 6 и 8 минимум прибыли нам даст вариант A_2

7.2.6 Критерий Байеса

Предлагает придать равные вероятности всем рассматриваемым стратегиям, после чего принять ту из них, при которой ожидаемый выигрыш окажется наибольшим. Критерий имеет один недостаток: не всегда можно точно определить вероятность того или иного события со стороны природы. Формулой для него является $\max(\sum q \cdot i)$. Где q - вероятность наступления каждого из событий природы.

Вероятности событий для природы равны 0,5; 0,4; 0,1; соответственно. Таким образом Для A_1 $5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,1 = 5,2$

Для A_2 $3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,1 = 3,7$

Для A_3 $2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,1 = 3,4$

Очевидно, что максимальную прибыль мы получим от варианта A_1 .

Для выбора стратегий в условиях неопределённости можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера, принимающего решение (в частности, его склонности к риску).

Если решение принимается в условиях неопределённости, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учётом сильных и слабых сторон.

7.3 Чистые и смешанные стратегии

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком А и игроком В пара стратегий называются чистыми стратегиями.

В антагонистической игре пара стратегий (A_i, B_j) называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки А и В располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустим, что хотя бы одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведётся бессистемно.

Рассмотрим матричную игру G (3x4) (таблица 7.1).

В этом примере нижняя цена игры равна верхней: $a=b=9$, т. е. игра имеет

седловую точку.

Оказывается, что в этом случае максиминные стратегии A_2 и B_2 будут устойчивыми по отношению к информации о поведении противника.

Таблица 7.1 – Матричная игра 3x4

	B_1	B_2	B_3	B_4	A_1
A_1	5	7	10	8	5
A_2	10	9	11	10	9
A_3	8	6	7	4	4
B_1	10	9	11	10	

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии - это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии A_1 и B_1 (в рассматриваемом примере A_2, B_2), при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность - решением игры. Про саму игру в этом случае говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Величина $v = \alpha = \beta$ называется ценой игры.

Если $N > 0$, то игра выгодна для игрока А, если $N < 0$ - для игрока В; при $N = 0$ игра справедлива, т. е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Однако наличие седловой точки в игре - это далеко не правило, скорее - исключение. Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а, следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это - игры с полной информацией.

Теорема. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а, следовательно, решается в чистых стратегиях, т. е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный N .

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры. Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда - выигрышем черных, либо всегда - ничьей (только чем именно - мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу находится по принципу максимина.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку А выигрыш не менее A , игроку - проигрыш не больше b . Учитывая, что $a < b$, естественно для игрока А желание увеличить выигрыш, а для игрока В - уменьшить проигрыш. Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его смешанной стратегией.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков A и B соответственно

$$SA = \{p_1, p_2, \dots, p_m\},$$

$$SB = \{q_1, q_2, \dots, q_n\},$$

где p_i - вероятность применения игроком **A** чистой стратегии A_i ;

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

q_j - вероятность применения игроком **B** чистой стратегии B_j ;

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна - единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными p_i и q_j .

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок **A** применяет смешанную стратегию $SA = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|$, а игрок **B** смешанную стратегию $SB = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока **A** определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока **B** равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш N .

7.4 Решение матричной игры (2x2)

Пусть матричная игра G (2x2) имеет платежную матрицу

	B_1	B_2
A_1	A_{11}	A_{12}
A_2	A_{21}	A_{22}

Предположим, что игра не имеет седловой точки. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: $SA = \|p_1, p_2\|$ и $SB = \|q_1, q_2\|$, где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (7.1)$$

$$q_1 + q_2 = 1 \quad (7.2)$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры N , независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок **A** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **B** - свою чистую активную стратегию B_1 , то цена игры N равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \quad (7.3)$$

А при использовании игроком **B** чистой активной стратегии B_2 , выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \quad (7.4)$$

Уравнения (7.1), (7.3) и (7.4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным: p_1 , p_2 и v .

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.5)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.6)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.7)$$

Если игрок В использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок А - свою чистую активную стратегию A_1 , то цена игры N равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \quad (7.8)$$

А при использовании игроком А чистой активной стратегии A_2 , выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \quad (7.9)$$

Уравнения (7.2), (7.8) и (7.9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q_1 ; q_2 и v .

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.10)$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.11)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (7.12)$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (7.7) и (7.12)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (7.5), (7.6), (7.7), (7.10), (7.11), (7.12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0 \\ a_{11} - a_{12} > 0 \\ a_{22} - a_{12} > 0 \\ a_{11} - a_{21} > 0 \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0 \\ a_{11} - a_{12} < 0 \\ a_{22} - a_{12} < 0 \\ a_{11} - a_{21} < 0 \end{cases}$$

Тогда $0 < p_1 < 1$; $0 < p_2 < 1$; $0 < q_1 < 1$; $0 < q_2 < 1$.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырех выигрышей a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своём столбце.

Решения системы уравнений (7.5), (7.6), (7.7) и (7.10), (7.11), (7.12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис 7.1). Для нахождения вероятностей P_1 , P_2 и цены игры V в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность P_1 $[0,1]$, а по оси ординат - соответствующие этой вероятности - выигрыши игрока А.

При $p_1=0$, игрок А применяет чистую стратегию A_2 . Если при этом игрок В применяет чистую стратегию B_1 , то выигрыш игрока А равен a_{21} , а если игрок В применяет чистую стратегию B_2 , то выигрыш игрока А равен a_{22} . При $p_1=1$, игрок А применяет чистую стратегию A_1 .

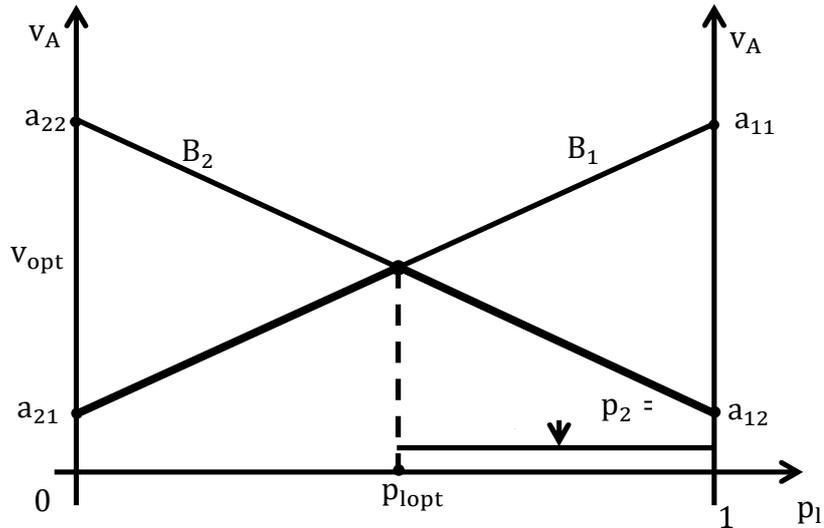


Рисунок 7.1 – Графический метод решения игры (игрок А)

Если при этом игрок В применяет чистую стратегию B_1 , то выигрыш игрока А равен a_{11} , а при применении чистой стратегии B_2 - a_{12} . Так как значения p_1 лежат в пределах $[0,1]$, то соединяя крайние точки для стратегий B_1 и B_2 (строая графики функций $V_A=(a_{11}-a_{12})p_1+a_{12}$ и $V_A=(a_{21}-a_{22})p_1+a_{22}$), получаем значения выигрышей игрока А для всех промежуточных значений P_1 .

В соответствии с принципом максимина, игрок А должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка N пересечения отрезков прямых (рис. 7.1) и определяет как оптимальную цену игры V_{Opt} , так и оптимальные вероятности P_{1opt} и $P_{2opt}=1-P_{1opt}$, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока А, т. е. даёт решения системы уравнений (7.1), (7.3), (7.4).

Для графического решения системы уравнений (7.2), (7.8), (7.9) отложим по оси абсцисс вероятность q_1 $[0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока В:

$$V_B=(a_{11}-a_{12})q_1+a_{12};$$

$$V_B=(a_{21}-a_{22})q_1+a_{22}.$$

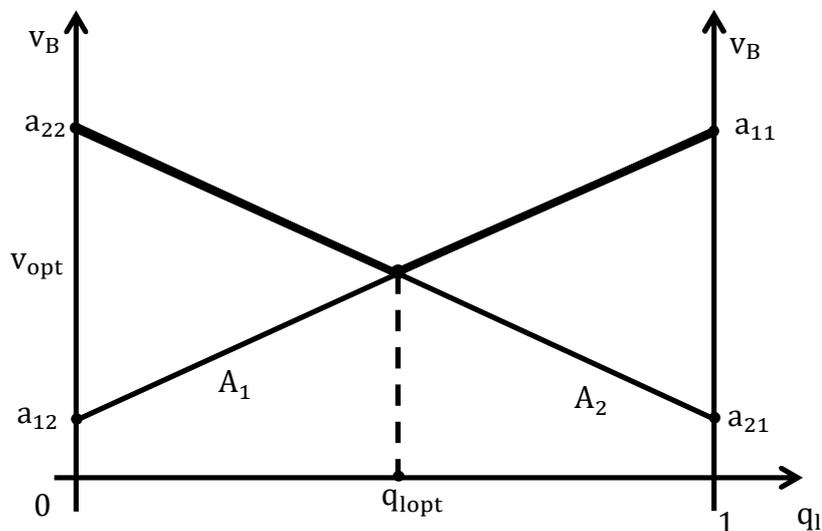


Рисунок 7.2 - Графический метод решения игры (игрок В)

Решением являются координат точки М (рис 7.2.) пересечения прямых, описываемых уравнений (7.13) и (7.14):

$$q_{1opt}; q_{2opt} = 1 - q_{1opt} \text{ и } V_{Opt}.$$

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок В должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры G(2x2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения быть представлена, например, следующим образом (рис. 7.3).

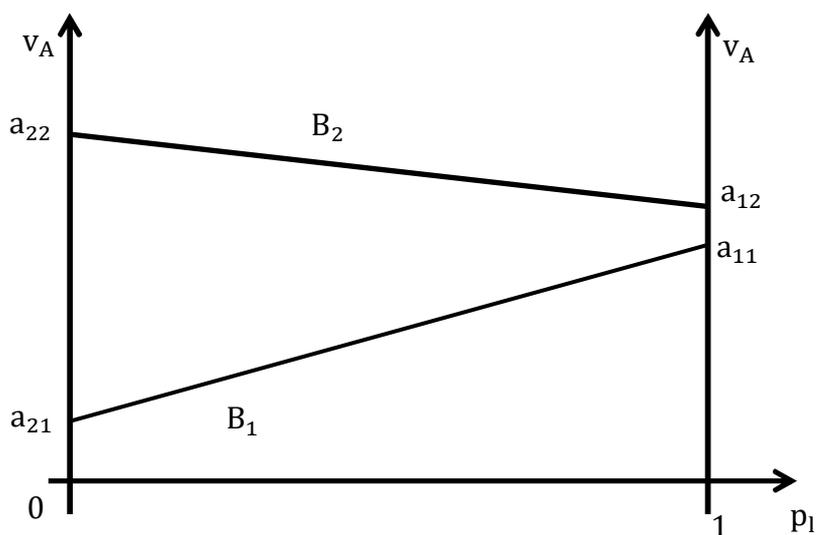


Рисунок 7.3 - Графический метод решения игры с седловой точкой

Стратегия B₂ игрока В является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии B₁. В данной игре p_{1opt}=1; p_{2opt}=0; V_{Opt}=a₁₁, т. е. игра имеет седловую точку N и решается в чистых стратегиях. Игрок А должен применять стратегию A₁, а игрок В - стратегию B₁.

На рис. 7.4 показан случай, в котором решением игры для игрока А является чистая стратегия A₂, а для игрока В - стратегия B₁.

Игра имеет седловую точку N.

Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B ₁	B ₂	A ₁
A ₁	4	-2	-2
A ₂	1	3	1
B ₁	4	3	

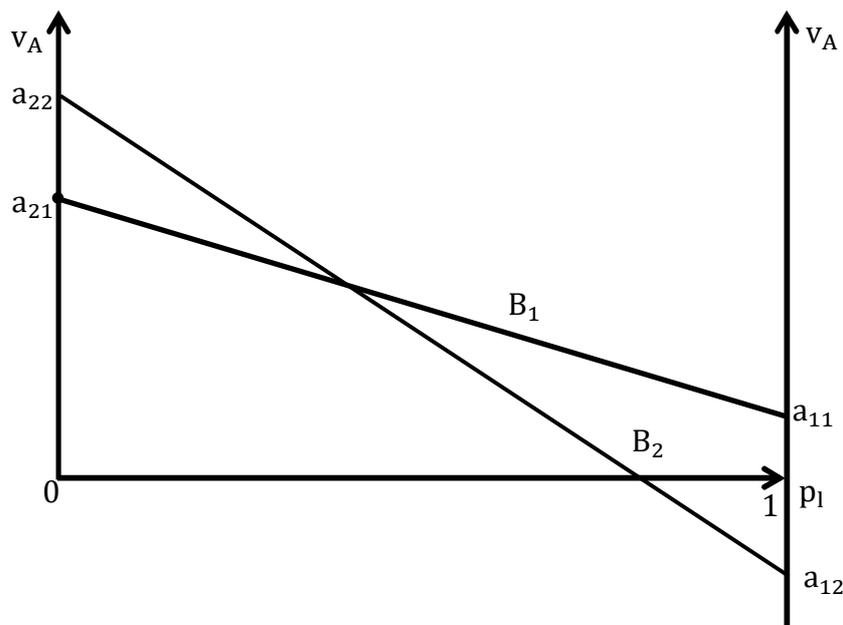


Рисунок 7.4 – Решение с чистыми стратегиями

В данной игре нижняя цена игры $a=1$ не равна верхней цене игры $b=3$, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока А, в соответствии с формулами (7.5) и (7.6), оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3 - 1}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 + 2}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока В, в соответствии с формулами (7.10) и (7.11), оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3 + 2}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 - 1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков

$$S_A = \left\| \left\| \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\| \right\|; S_B = \left\| \left\| \frac{5}{8}; \frac{3}{8} \right\| \right\|,$$

а цена игры равна:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{7}{4}.$$

Так как $N > 0$, то игра выгодна для игрока А.

Графическое изображение игры для игрока А показана на рис. 7.5.

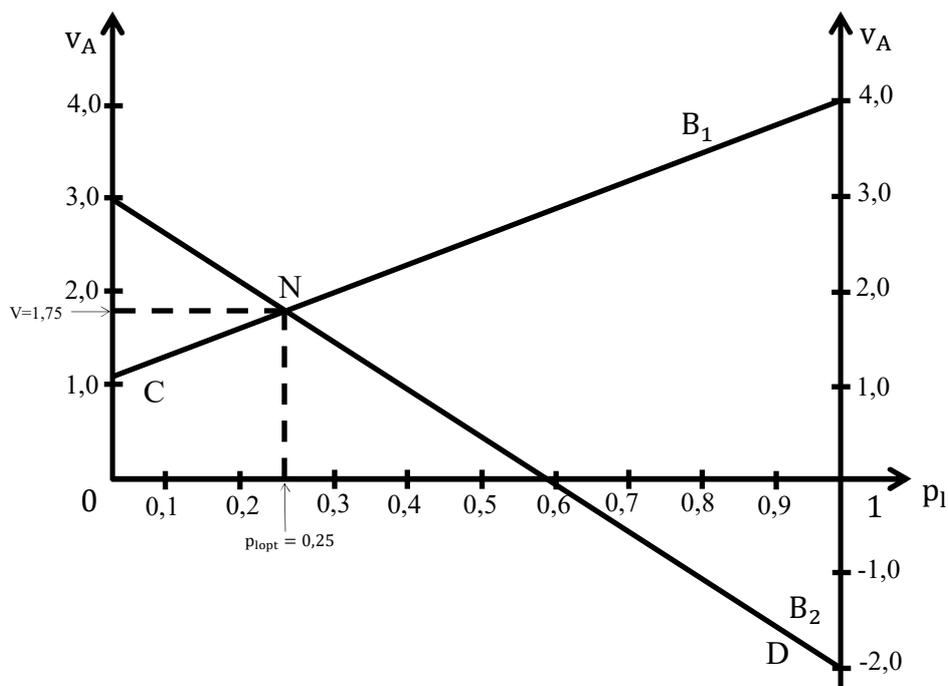


Рисунок 7.5 - Графическое изображение игры для игрока А

Нижняя граница выигрыша игрока А определяется ломаной CND . Оптимальное решение, определяется точкой N , естественно, даёт тоже решение, что и алгебраический метод: $S_A = \parallel 0,25; 0,75 \parallel, v = 1,75$.

Графическое изображение игры для игрока В показано на рис. 7.6.

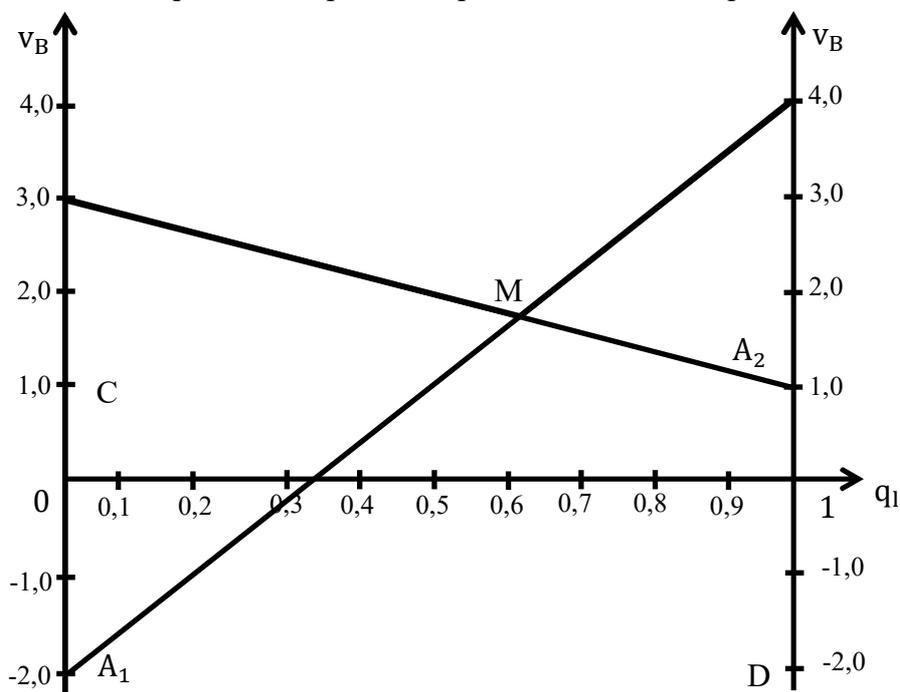


Рисунок 7.6 – Графическое изображение игры для игрока В

Оптимальное решение, определяемое точкой M , даёт решение $S_B = \parallel 0,625; 0,375 \parallel, v = 1,75$.

7.5 Упрощение матричной игры

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платёжной

матрицы. Поэтому для игр с платёжными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путём исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

Определение 1. Если в платёжной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

Определение 2. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока A , не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Определение 3. Если в платёжной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_j игрока B не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_j называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Решение матричной игры не изменится, если из платёжной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Упростить матричную игру, платёжная матрица которой имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9
A_4	4	8	3	4	5
A_5	4	7	7	9	10

Из платёжной матрицы видно, что стратегия A_2 дублирует стратегию A_5 , потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию A_5). Сравнивая почленно стратегии A_1 и A_4 , видим, что каждый элемент строки A_4 не больше соответствующего элемента строки A_1 . Поэтому применение игроком A доминирующей над A_4 стратегии A_1 всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии A_4 . Следовательно, стратегию A_4 можно отбросить. Таким образом, имеем упрощённую матричную игру с платёжной матрицей вида:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	9	3	4	5
A_2	4	7	7	9	10
A_3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока B доминируют над другими: B_3 над B_2 , B_4 и B_5 . Отбрасывая доминируемые стратегии B_2 , B_4 и B_5 , получаем игру 3×2 , имеющей платёжную матрицу вида:

	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7
A_3	4	3

В этой матрице стратегия A_3 доминируется как стратегией A_1 , так и стратегией A_2 . Отбрасывая стратегию A_3 , окончательно получаем игру 2×2 с платёжной матрицей

	B_1	B_3
A_1	5	3
A_2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, ее надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придём к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой - это

проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платёжной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

Свойство 1. Если ко всем элементам платёжной матрицы прибавить (вычесть) одно и то же число C , то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число C .

Свойство 2. Если каждый элемент платёжной матрицы умножить на положительное число k , то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на k .

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

Решить матричную игру 2×2 с платёжной матрицей вида:

	B1	B2
A1	0.5	-0.2
A2	0.1	0.3

Умножая все элементы платежной матрицы на 10, а затем прибавляя к ним число 2, получаем игру с платежной матрицей

	B1	B2
A1	7	0
A2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9}; \quad p_2 = \frac{7}{9};$$

$$q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9}; \quad q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7 \cdot 5 - 0 \cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2, исходная матричная игра имеет те же оптимальные смешанные стратегии: $S_A = \left\| \frac{2}{9}; \frac{7}{9} \right\|$ и $S_B = \left\| \frac{5}{9}; \frac{4}{9} \right\|$. А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким образом, получаем цену исходной игры: $\left(\frac{35}{9} - 2 \right) = \frac{17}{90}$.

7.6 Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$

У игры $2 \times n$ или $m \times 2$ всегда имеется решение содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков ($\min(2, n) = \min(m, 2) = 2$). Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры $2 \times n$ и $m \times 2$ превращаются в игры 2×2 , методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры $2 \times n$ осуществляется следующим образом:

- 1) строится графическое изображение игры для игрока А;
- 2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры V ;
- 3) определяется пара стратегий игрока В, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока В.

Таким образом, игра $2 \times n$ сведена к игре 2×2 , которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных

стратегий может быть выбрана любая пара из них.

Решение игры $m \times 2$ осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока В и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока В), и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Найти решение игры, платёжная матрица которой имеет вид:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока А (рис. 7.7)

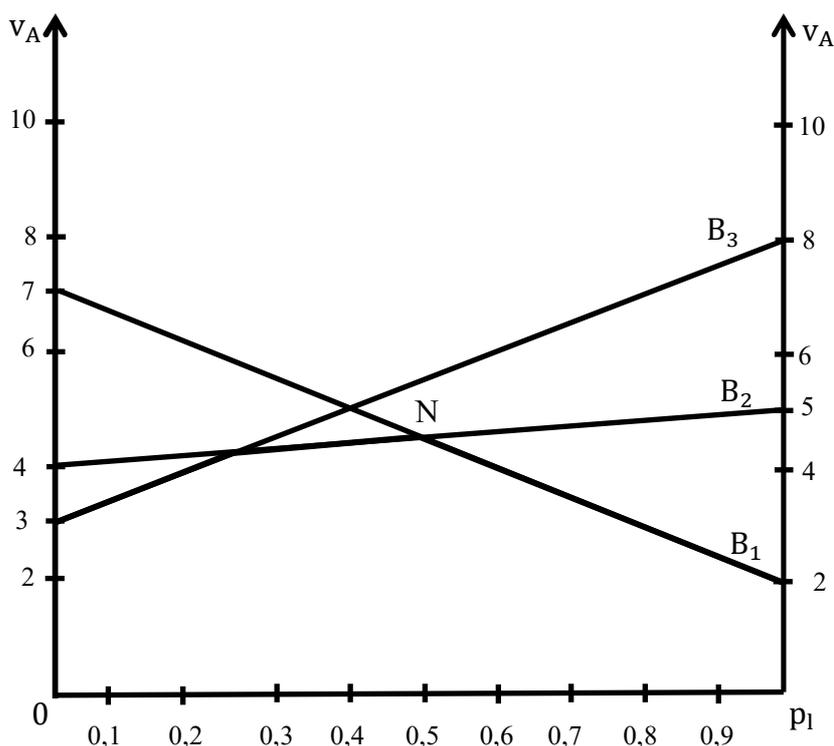


Рисунок 7.7 - Графическое изображение игры для игрока А

Точка N (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям B_1 и B_2 игрока В. Таким образом, исключая стратегию B_3 , получаем матричную игру 2×2 с платёжной матрицей вида

	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\| \right\|; S_B = \left\| \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\| \right\|; v = \frac{27}{6}.$$

Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B1	B2
A1	0	1
A2	4	2
A3	-1	4
A4	1	-3
A5	6	-2
A6	1,5	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре 2×2 строим ее графическое изображение для игрока В (рис. 7.8).

Точка М (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A_2 , A_6 и A_3 игрока А. Таким образом, исключая стратегии A_1 , A_4 и A_5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A_2 и A_3 или A_2 и A_6), приходим к матричной игре 2×2 . Выбор стратегий A_3 и A_6 исключён, так как в этом случае точка М перестанет быть точкой минимакса.

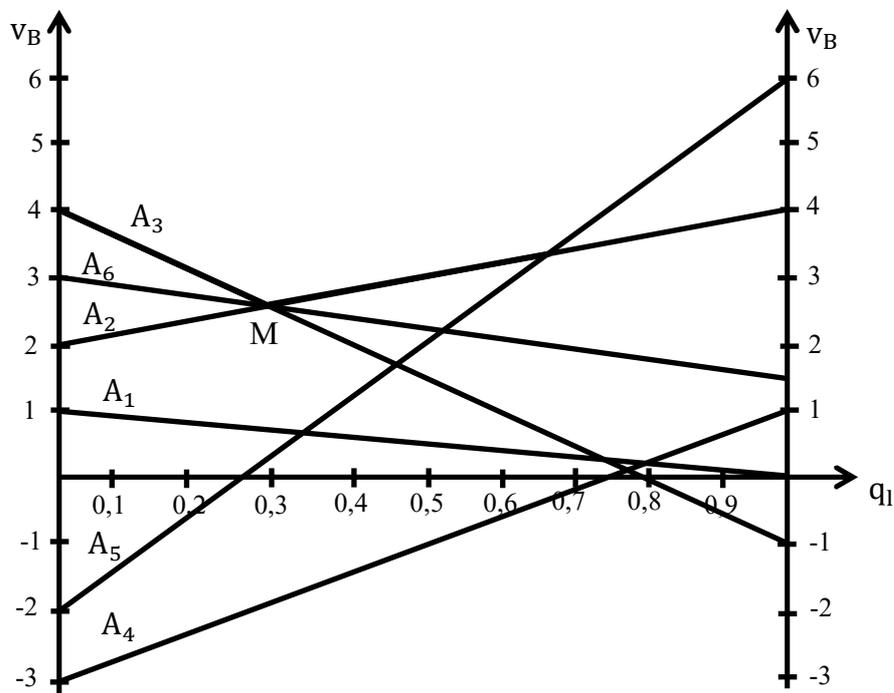


Рисунок 7.8 - Графическое изображение игры для игрока В

Пусть выбираются стратегии A_2 и A_3 . Тогда игра 2×2 приобретает вид

	B1	B2
A_2	4	2
A_3	-1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а, следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}; p_2 = \frac{2}{7};$$

$$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}; q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ: $S_A = \left\| \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0 \right\| \right\|$; $S_B = \left\| \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\| \right\|$; $v = \frac{18}{7}$.

Другой вариант игры 2×2 получается, если использовать стратегии A_2 и A_6 . В

этом случае платёжная матрица имеет вид

	B_1	B_2
A_2	4	2
A_6	1,5	3

Тогда

$$p_1 = \frac{3-1.5}{4+3-1.5-2} = \frac{3}{7}; p_2 = \frac{4}{7};$$

$$q_1 = \frac{3-2}{4+3-1.5-2} = \frac{2}{7}; q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 1.5}{4+3-1.5-2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| \left\| 0, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, \frac{4}{7} \right\| \right\|; S_B = \left\| \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\| \right\|; v = \frac{18}{7}.$$

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр $2 \times n$ и $m \times 2$:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры А не равна верхней цене игры В, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путём исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощённая игра имеет размерность не 2×2 , то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяется две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

7.7 Решение коалиционных игр, нахождение ядра и вектора Шепли

В экономике отдельные субъекты редко действуют поодиночке. Чаще всего они объединяются в союзы, коллективы, кооперации для достижения своих целей и принимают коллективные действия. Такие случаи изучаются в теории коалиционных игр. Коалиционной игрой называется игра с не противоположными интересами, в которой игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции) для объединения ресурсов.

Коалиция – подмножество игроков, а **большая коалиция** – синоним для множества всех игроков. Коалиционная игра в характеристической форме это:

1. Множество игроков N .

2. Характеристическая функция, v , сопоставляющая каждой коалиции сумму денег, которую эта коалиция может заработать самостоятельно. Равна гарантированному математическому ожиданию выигрыша.

Характеристическая функция может принимать отрицательные значения (например, при дележе расходов). Мы считаем, что пустая коалиция (куда никто не входит), не может заработать денег и никому ничего не должна, т.е. $v(\emptyset) = 0$. Именно характеристическая функция полностью описывает игру.

Если несколько непересекающихся коалиций объединяются, то вместе как одна коалиция они заработают не меньше, чем по отдельности и это называется свойством супераддитивности.

Определение. Игра называется супераддитивной, если для любых непересекающихся коалиций S_1, S_2 , верно неравенство $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$. В такой игре у игроков есть интерес в создании большой коалиции и дележе полученного $v(N)$. Есть две концепции деления $v(N)$: ядро и вектор Шепли. Несколько примеров таких игр:

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый.

Здесь $N = \{\text{Лёня, Лева, Паша}\}$, $v(\text{Лёня}) = v(\text{Лева}) = v(\text{Паша}) = 0$ (в одиночку никто не может получить 600 рублей); $v(\text{Лёня, Лева}) = 0$ (у них нет правого); для любой другой коалиции S , $v(S) = 600$, т.к. есть и правый и левый ботинки.

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков.

Здесь $N = \{\text{Андрей, Борис}\}$, $v(\text{Андрей}) = 60$, $v(\text{Борис}) = 120$, $v(\text{Андрей, Борис}) = 240$.

Решить коалиционную игру - значит назвать множество допустимых векторов выигрышей. **Вектор выигрышей игроков** – произвольный вектор, представляющий собой распределение полученного выигрыша. Представляется в виде: $x=(x_1, \dots, x_n)$, где каждый x_i - это выигрыш, который получает i -й игрок. **Допустимый вектор выигрышей** такой, что сумма выигрышей не превышает выигрыш большой коалиции.

7.7.1 Ядро

Ядро – решения кооперативных игр, основанные на минимизации степени неудовлетворённости выигрышем коалиций. Предположим, что большая коалиция решила каким-то образом разделить $v(N)$. С математической точки зрения, делёж - это вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поскольку большая коалиция может заработать $v(N)$, то любой делёж обязан удовлетворять бюджетному ограничению $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq v(N)$. Будем называть ядром $C(v)$ такое множество векторов выигрышей, которое:

Эффективно т.е. всё должно быть распределено между всеми без остатка, Для этого неравенство $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq v(N)$ должно быть выполнено как равенство;

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Устойчиво т.е. не должно найтись такой коалиции, которой было бы выгодно отколоться от данной. Например, если отсоединившись, коалиция S получает $v(S)$; а соглашаясь на делёж – получает, то для любой коалиции S должно соблюдаться условие

Находим ядро в наших примерах. Ядро можно найти решая систему из одного уравнения и нескольких неравенств.

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый. Считаем количество пар, а не стоимость: $x_1 + x_2 + x_r = 1$, $x_1 + x_r \geq 1$, $x_2 + x_r \geq 1$.

Решение одно $x_1=0$ $x_2=0$ $x_r=1$, победитель получает все или все получает владелец редкого ресурса. Если $x_1 + x_2 + x_r = 600$, $x_1 + x_r \geq 600$, $x_2 + x_r \geq 600$ $x_1=0$ $x_2=0$ $x_r=600$

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. $x_1 + x_2 = 240$, $x_1 \geq 60$, $x_2 \geq 120$.

Решение: любой делёж вида $(x_1, 240 - x_1)$, где x_1 принадлежит к $[60; 120]$.

Пример 3. «Бизнес»: Виктор и Сергей ведут совместный бизнес, их доход - \$1500 в месяц. Обязанности распределены таким образом, что если бы Виктор работал один, то получал бы \$600 в месяц, а один Сергей не смог бы зарабатывать вовсе. Как должны распределиться между ними выигрыши, чтобы они вступили в коалицию?

Возможны четыре коалиции: пустая, две по одному человеку и большая. Платежи в них будут следующие:

$$v(\text{пустое}) = v(\{\text{Сергей}\}) = 0;$$

$$v(\{\text{Виктор}\}) = 600;$$

$$v(\{\text{Виктор, Сергей}\}) = 1500;$$

Таким образом, Виктор должен получать не меньше 600, тогда как для Сергея допустима любая сумма.

У концепции Ядра есть недостатки:

оно может быть не единственным;

оно может быть пустым из-за того, что условие устойчивости слишком сильное;

Другими словами - оно может применяться не для всякой коалиционной игры.

7.7.2 Вектор Шепли

Вектор Шепли – принцип оптимальности распределения выигрыша между игроками, в котором выигрыш каждого игрока равен его среднему вкладу в благосостояние тотальной коалиции. Мы хотим получить вектор выигрышей, который:

эффективен - сумма выигрышей всех игроков равна выигрышу большой коалиции;

симметричен – игроки получают равные выигрыши, если при присоединении к коалиции внесли одинаковый взнос. А выигрыш не привнесшего ничего игрока равен нулю;

линейность – выигрыш любого игрока в игре, являющейся суммой двух коалиционных игр равен сумме выигрышей в каждой из этих двух игр по отдельности;

Вектор Шепли – это математическое ожидание вклада каждого игрока, если большая коалиция формируется в случайном порядке.

Допустим, игроки у нас занумерованы в некотором порядке π , где π -некая последовательность чисел от 1 до n . Будем добавлять игроков в коалицию в указанном порядке, формируя большую коалицию. Когда мы добавляем i -го игрока у нас уже сформирована некоторая коалиция S . Присоединяясь к этой коалиции S , игрок i увеличивает достижимый выигрыш на $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Назовём эту прибавку вкладом i -го игрока в большую коалицию, обозначим ее $Add(i, \pi)$. Он зависит от порядка формирования большой коалиции π .

Если же формировать большую коалицию добавляя игроков по одному в случайном порядке π , то прибавка, вносимая i -м игроком, $Add(i)$ – будет случайной величиной.

Вектор Шепли, это вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) , где выигрыш i -го игрока x_i определяется по принципу $x_i = E(Add(i))$.

Пример 1. «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - еще один такой же левый, а у Паши - правый. Если формировать большую коалицию в порядке Лёня, Лёва, Паша, то вклад Левы равен нулю. Если формировать большую коалицию в порядке Паша, Лёва, Лёня, то вклад Лёвы равен 600 руб.

Найдём $E(Add(r))$. Если Паша ходит первым, то его вклад равен нулю, иначе его вклад равен 600. Значит $E(Add(r)) = (2/3) * 600 = 400$. Вклад Лени равен 600 только если первым вошёл Паша, а вторым – Лёня. Значит $E(Add(l)) = (1/6) * 600 = 100$. Аналогично для Лёвы. Значит вектор Шепли равен: (100, 100, 400).

Пример 2. «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. Здесь $N = \{\text{Андрей, Борис}\}$, $v(\text{Андрей}) = 60$, $v(\text{Борис}) = 120$, $v(\text{Андрей, Борис}) = 240$.

Возможно два порядка формирования большой коалиции: Андрей-Борис и Борис-Андрей. В первом случае вклады игроков равны $Add(a, ab) = 60$, $Add(b, ab) = 180$, во втором - $Add(b, ba) = 120$, $Add(a, ba) = 120$. И вектор Шепли: $x_a = 90$, $x_b = 150$. Что

соответствует интуитивному дележу в пропорции 3/5.

7.8 Задания по теории игр

Задание №1 по теории игр, решение матричных игр, критерии Вальда, Гурвица, Байеса. Задача та же, что была рассмотрена в прошлом разделе, только прибыль у каждого варианта различна. Выбрать в соответствии со своим вариантом матрицу. Выбрать лучшую стратегию используя критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа и Байеса.

	2	3	5		21	13	5		1	1	7		18	12	4
1)	1	6	9	2)	11	4	7	3)	12	8	6	4)	3	8	17
	3	6	2		3	6	12		6	9	18		7	16	23
	1	3	8		4	12	9		7	9	5		5	3	9
5)	10	2	9	6)	9	9	2	7)	1	13	7	8)	3	4	1
	7	4	1		7	8	11		12	6	9		3	2	7
	4	8	1		5	4	2		6	13	3		7	9	4
9)	1	1	9	10)	7	2	7	11)	1	3	7	12)	3	8	1
	6	4	14		6	8	13		7	6	12		2	12	15

Задание №2. Упрощение игр и решение игр 2 на n или m на 2 в смешанных стратегиях.

Упростить матрицу, решить задачу в смешанных стратегиях математическим и графическим способом.

	2	3	33	3	2		6	51	4	4	6		7	5	13	7	5
1)	3	1	43	1	3	2)	3	27	3	3	3	3)	11	7	43	11	7
	4	3	77	3	4		7	33	3	3	7		7	6	87	7	6
	5	2	24	2	5		5	25	8	8	5		2	4	24	2	4
	4	10	43	10	4		14	70	4	4	14		8	10	53	8	10
	11	71	4	4	11		7	1	23	7	1		9	51	4	4	9
4)	3	27	3	3	3	5)	8	7	53	8	7	6)	3	27	3	3	3
	9	43	4	4	9		8	5	17	8	5		7	37	3	3	7
	2	27	2	2	2		5	4	54	5	4		5	25	8	8	5
	4	49	8	8	4		6	9	73	6	9		13	70	4	4	13
	3	3	33	3	3		6	71	6	6	6		7	1	23	7	1
7)	8	1	43	8	1	8)	3	27	3	3	3	9)	8	7	53	8	7
	3	4	27	3	4		9	43	4	4	9		8	5	17	8	5
	6	4	24	6	4		2	27	8	8	2		5	4	54	5	4
	4	15	43	4	15		8	40	3	3	8		6	9	73	6	9
	6	5	13	6	5		6	51	2	2	6		6	3	33	3	6
10)	11	7	43	11	7	11)	3	27	5	5	3	12)	3	1	43	1	3
	7	6	87	7	6		7	33	3	3	7		4	3	77	3	4
	2	4	24	2	4		5	25	8	8	5		5	2	24	2	5
	8	12	53	8	12		14	70	3	3	14		2	10	43	10	2

Задание №3. Решить коалиционную игру

Есть три игрока: Виктор, Сергей и Анатолий и у них есть ресурсы для изготовления часов – циферблаты и ремешки. У Виктора – А циферблатов и В ремешков, у Сергея – С циферблатов и D ремешков, а у Анатолия – Е циферблатов и F ремешков. Один циферблат стоит 10 рублей, а один ремешок – 30 рублей. Стоимость собранных

часов – 100 рублей.

Таблица 7.2 – Выбор задания по вариантам

Вариант	A1	B	A2	B2	A3	B3
1	5	10	10	5	5	5
2	2	11	4	4	11	2
3	4	7	6	6	8	5
4	8	7	4	7	9	7
5	10	5	5	10	10	10
6	11	2	4	4	2	11
7	7	4	6	6	5	8
8	7	8	7	4	7	9

В соответствии со своим вариантом записать характеристическую функцию игры, на случай коалиции Виктора и Анатолия, Сергея и Анатолия, отдельно Виктора и т.д. для всех. Записать доход. Записать ядро и вектор Шепли.

7.9 Контрольные вопросы по теории игр.

Равновесие Нэша.

Коррелированное равновесие.

Дилемма заключенного.

Аналоги дилеммы заключенного.

Оптимальное по Парето решение.

Теорема Коуза. Новая институциональная экономика. Оппортунизм.
Ограниченная рациональность.

Список использованных источников

1. Ржевский, Сергей Владимирович. Исследование операций : учебное пособие. - СПб. : Лань, 2021 on-line [Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/169378/#1> (дата обращения 20.7.2023).
2. Горлач, Борис Алексеевич. Исследование операций. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов : учебное пособие для вузов. - СПб.: Лань, 2021 on-line [Электронный ресурс] : — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/162371/#1> (дата обращения 22.7.2023).
3. Вентцель Е.С. Исследование операций (задачи, принципы, методология) М.: Наука. 1988. – 208 с.
4. Давыдов Э.Г. Исследование операций: учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа. 1990. – 382 с.
5. Северцев, Николай Алексеевич. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности : учебное пособие для вузов. - М. : Юрайт, 2020 on-line [Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-principy-prinyatiya-resheniy-i-obespechenie-bezopasnosti-454393#page/1> (дата обращения 24.7.2023).
6. Исследование операций в экономике : учебник для вузов. - М.: Юрайт, 2020 on-line [Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-v-ekonomike-460143#page/1> (дата обращения 24.7.2023).

Приложение А. Пример оформления титульного листа отчета

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

НАЗВАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Отчет по лабораторной работе по дисциплине «Исследование операций»
Вариант ____

Студент гр. _____

(И. О. Фамилия)

«__» _____ 20__ г.

Руководитель
доцент каф. АСУ,
канд. техн. наук

_____ А. Я. Суханов

«__» _____ 20__ г.

Томск 20__

Приложение Б. Список экзаменационных вопросов

- 1 Определения и примеры: операции, оперирующей стороны, стратегии оперирующей стороны, действующих факторов операции, критерия эффективности операции, состояния операции.
- 2 Понятие математической модели операции, классификация моделей и их построение.
- 3 Общая постановка задачи исследования операций, детерминированный случай.
- 4 Оптимизация решения в условиях неопределенности.
- 5 Основные проблемы векторной оптимизации и подходы к их решению: принцип равномерности, принципы абсолютной и относительной справедливой уступки. Оптимальность по Парето.
- 6 Способы свертки критериев.
- 7 Постановка и классификация задач математического программирования.
- 8 Графическое решение задачи линейного программирования.
- 9 Анализ решения задачи линейного программирования на чувствительность к принятой модели (три задачи анализа на чувствительность).
- 10 Решение задач нелинейного программирования.
- 11 Решение задач смешанно целочисленного программирования. Примеры задач.
- 12 Симплекс метод.
- 13 Динамическое программирование как метод оптимизации. Общая характеристика метода, примеры. Преимущества и недостатки.
- 14 Процедура построения оптимального управления методом динамического программирования.
- 15 Задача распределения ресурсов. Динамическое программирование.
- 16 Задача динамического программирования с мультипликативным критерием.
- 17 Понятие марковского случайного процесса с дискретным и непрерывным временем.
- 18 Поток событий, простейший поток событий.
- 19 Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
- 20 Предельные вероятности состояний.
- 21 Процесс «гибели и размножения» и предельные вероятности для него.
- 22 Основные понятия и определения теории массового обслуживания.
- 23 Классификация систем массового обслуживания. Характеристики эффективности систем массового обслуживания.
- 24 Одноканальная система массового обслуживания и ее основные характеристики.
- 25 Многоканальная система массового обслуживания и ее основные характеристики.
- 26 Метод численного моделирования.
- 27 Моделирование равномерного распределения в интервале $(0,1)$.
- 28 Моделирование дискретных и непрерывных случайных величин.
- 29 Оценки точности характеристик, полученных методом Монте-Карлою
- 30 Основные понятия и определения теории игр.
- 31 Позиционная форма игры.
- 32 Матричная форма игры.
- 33 Решение матричных игр двух лиц с нулевой суммой. Принцип минимакса. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица.
- 34 Равновесие Нэша.
- 35 Решение матричных игр в смешанных стратегиях.
- 36 Упрощение игр.
- 37 Решение и геометрическая интерпретация игр 2×2 .
- 38 Решение игр $2 \times m$.
- 39 Решение игр $n \times m$.