Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Д.Н. Черепанов
Н.А. Ярушкина

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по техническим направлениям подготовки бакалавриата

Томск
2024

УДК 517
ББК 22.143
Ч-46

Рецензент:
Иванова О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТГАСУ

Черепанов, Дмитрий Николаевич
Ч-46 Определенный интеграл: методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по техническим направлениям подготовки бакалавриата / Д.Н. Черепанов, Н.А. Ярушкина – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. – 34 с.

Настоящие методические указания по дисциплине «Математика», раздел «Определенный интеграл. Несобственный интеграл», составлены с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, основной профессиональной образовательной программы по техническим направлениям подготовки бакалавриата.

Методические указания содержат описание основных теоретических положений по разделу, примеры решения задач и их выполнения в Mathcad, задачи для самостоятельного решения обучающимися.

Одобрено на заседании кафедры промышленной электроники, протокол № 25 от 16.02.2024.

УДК 517
ББК 22.143

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие определенного интеграла возникло из потребности вычислять площади и объемы, связанные с фигурами и телами произвольной формы. Евдокс Книдский (V—IV вв. до н. э.) обобщая частные способы вычисления площадей и объемов сформулировал так называемый впоследствии «метод исчерпывания», неявно использующий методику, называемую в настоящее время предельным переходом. Метод заключался в том, что в фигуру, поверхность или тело вписывались последовательности фигур, поверхностей или тел с известными площадями или объемами, затем выдвигалась гипотеза об искомой величине, и доказывалось, что обратное утверждение приводит к противоречию. Евдокс, в частности, показал, что разность между площадью круга и площадью вписанного в него правильного многоугольника может быть сделана меньше произвольного заданного малого положительного числа при увеличении числа сторон, что позволило получить формулу для площади круга. Также были получены известные формулы для объемов пирамиды и конуса. Архимед доказал, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов, и вывел формулу для площади эллипса. Евклид в «Началах» сформулировал метод в виде леммы: «для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины», и привел шесть теорем о площадях и объемах. В X веке Сабит ибн Курра обобщил лемму, заменив «половину» на «любую часть».

Метод неделимых Г. Галилея и Б. Кавальери (17 в.) позволил вычислять площади, ограниченные степенными функциями. Этот метод использовали Э. Торричелли и Б. Паскаль. Далее неделимые были отождествлены с актуальными бесконечно малыми и в работах Дж. Валлиса, изложившего предельный переход в арифметической форме, понятия интеграла и предела соединились, образуя основания интегрального исчисления, созданного в трудах Барроу, И. Ньютона, Г. Лейбница их учеников К. Маклорена, Г. Лопиталя, братьев Якоба и Иоганна Бернулли, а также последователей, включая Л. Эйлера. С этого момента интеграл является одним из основных понятий математического анализа. Лейбниц по началу писал о «суммирующем исчислении» и рассматривал суммы бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов, на которые разбивается искомая величина

Теорема о переменном верхнем пределе и также формула Ньютона-Лейбница позволили свести вычисление определенного интеграла к нахождению первообразной, что объединило два направления развития заданные Ньютоном и Лейбницем в «Интегральное исчисление». Валлис считал, что в основе математического анализа лежат: метод исчерпывания; метод неделимых; арифметика бесконечного; метод бесконечных рядов.

Термин «определенный интеграл» предложил П. Лаплас (1779 г.), а современное обозначение – Ж. Фурье (1819–1822гг.). Строгое определение определенного интеграла Римана появилось в работах О. Коши, Б. Римана и Г. Дарбу (19 в.).

Необходимое и достаточное условие существования интеграла Римана позволило выделить классы интегрируемых функций. Интегралы, выходящие за рамки этих классов, или интегралы с бесконечным интервалом интегрирования были названы несобственными. Задачи, приводящие к несобственным интегралам, рассматривались в геометрической форме Э. Торричелли и П. Ферма (1644 г.). Точные определения несобственных интегралов даны О. Коши (1823 г.). Различие условно и абсолютно сходящихся несобственных интегралов установлено Дж. Стоксом и П. Г. Л. Дирихле (1854 г.). Ряд работ математиков 19 в. посвящен вычислению несобственных интегралов в случаях, когда соответствующая первообразная не выражается через элементарные функции. Значения многих несобственных интегралов приводятся в различных таблицах. Предложенные методы определения сходимости неопределенных интегралов привели к множеству задач по оценке величины сходящегося несобственного интеграла.

Целью рассматриваемой части интегрального исчисления, называемой «Определенный интеграл» является получение формул и частных результатов как для геометрических приложений (длин дуг, площадей и объемов), так и для физических приложений определенного интеграла.

Предлагаемые методические указания содержат лишь основные методы вычисления определенного интеграла, однако изложенное в достаточной мере соответствует цели изучения дисциплины «Математика» и позволяет освоить не только следующие части интегрального исчисления, но и последующие разделы курса математики.

Целью изучения дисциплины «Математика» является формирование научной картины мира на основе знания основных положений и методов математики; формирование способности привлекать для решения профессиональных задач соответствующий физико-математический аппарат; изучение основных математических понятий, их взаимосвязи; изучение методов расчета, используемых для анализа, моделирования и решения прикладных инженерных задач, а также формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1: способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности.

Как весь раздел математики «Интегральное исчисление», так и рассматриваемый раздел курса математики – «Определенный интеграл» относятся к фундаментальным, поскольку знания, умения и навыки, получаемые при их изучении, необходимы для освоения других разделов математики. Кроме того, успешное освоение приемов интегрирования необходимо для изучения других общетеоретических и специальных дисциплин, предусмотренных учебным планом.

Определенный интеграл широко используется во всех разделах математики и ее приложениях. Логическая структура изложения приемов интегрирования проста и может быть сведена к следующей последовательности: применение формулы Ньютона-Лейбница; применение метода интегрирования по частям для определенного интеграла; применение формулы замены переменной для определенного интеграла; применение формул для подсчета площади криволинейной трапеции, длины дуги кривой, площади поверхности тела вращения и объема тела вращения; применение формул для подсчета несобственных интегралов; применение признаков сходимости несобственных интегралов; методы оценки «неберущихся» и несобственных интегралов.

По окончанию освоения раздела «Определенный интеграл» обучающиеся должны демонстрировать следующие результаты обучения:

1) знать основные понятия и утверждения, а также команды из пакетов прикладных программ, относящиеся к определенному интегралу;

2) уметь вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, использовать как основную таблицу интегралов, так и расширенные таблицы неопределенных интегралов из справочников, использовать пакеты прикладных программ;

3) владеть основными методами интегрирования для определенного интеграла (по частям и замена переменной для определенного интеграла).

Материал раздела разбит на темы, каждая из которых содержит: теоретический материал; методические рекомендации по решению задач; типовые упражнения для решения на практических занятиях и указания для выполнения лабораторных работ в пакете прикладных программ «Mathcad», содержащем модули символьных вычислений.

Освоение раздела «Определенный интеграл» сопровождается выполнением индивидуального задания и его защитой, в качестве метода тестирования, определяющего уровень усвоения материала раздела.

Предусмотрено также проведение контрольных работ и тестирования в электронном курсе.

1 ПОНЯТИЕ, СВОЙСТВА И СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1 Основные теоретические положения

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, определенную в промежутке $[a,b]$. Выполним следующие операции:

1. Разобьем промежуток $[a,b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ произвольным образом на n частей. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, а наибольшую из длин этих частичных участков обозначим через λ (*ранг дробления*).

2. На каждом частичном участке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$.

3. Составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

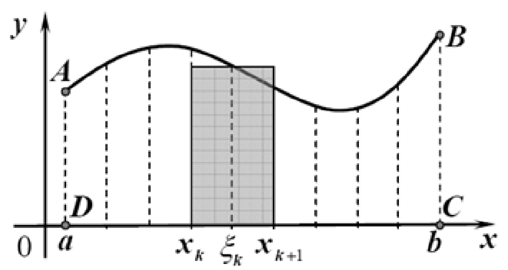


Рисунок 1 – Геометрический смысл определенного интеграла

4. Составим сумму $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$. Эта сумма называется интегральной суммой или *суммой Римана*.

5. Измельчая дробление (за счет увеличения числа точек дробления n) и устремляя при этом ранг дробления к нулю $(\lambda \to 0)$ (увеличивая число точек дробления, мы следим за тем, чтобы уменьшалась и стремилась к нулю длина всех частичных участков Δx_k), будем находить предел последовательности интегральных сумм

$$J = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sigma_n .$$

Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек ξ_k, то он называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Допустим, что функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна в промежутке $[a,b]$.

Рассмотрим криволинейную трапецию *ABCD* (рис. 1). Интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ дает сумму площадей прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$. Ее можно принять за приближенное значение площади криволинейной трапеции *ABCD*, т.е.

$$S_{ABCD} \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\cdot\Delta x_k\,,$$

причем, это равенство будет тем точнее, чем мельче дробление, и в пределе при $n\to+\infty$ и $\lambda\to 0$ получим площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Основные свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

2. При перемене местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

3. Линейность интеграла:

$$\int_a^b (\alpha f_1 \pm \beta f_2)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f_1(x)\,dx \pm \beta\int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

4. Каковы бы ни были числа a, b, c, если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $[a,c]$, $[c,b]$, $[a,b]$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Теорема (*Формула Ньютона-Лейбница*)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$, то определенный интеграл от этой функции по промежутку $[a,b]$ равен разности значений какой-либо первообразной этой функции на верхнем и на нижнем пределах интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Эта формула сводит нахождение определенных интегралов к нахождению неопределенных интегралов. Разность $F(b)-F(a)$ называется приращением первообразной и обозначается $F(x)\Big|_a^b$.

Алгоритм нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$:

1) находят первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$;

2) вычисляют значение $F(x)$ при $x=b$ (на верхнем пределе интегрирования);

3) вычисляют значение $F(x)$ при $x=a$ (на нижнем пределе интегрирования);

4) вычисляют разность $F(b)-F(a)$.

Основные способы вычисления определенного интеграла

1. ***Подстановка (замена переменной) в определенном интеграле.*** Необходимо выполнить следующие действия:

– ввести новую переменную $t=t(x)$;

– найти дифференциал новой переменной $dt=t'(x)dx$;

– вычислить новые значения пределов интегрирования:

$$\alpha=t(a) \text{ и } \beta=t(b);$$

– записать прежний интеграл, используя только переменную t и новые пределы α и β;

– используя таблицу интегралов, записать решение для полученной подынтегральной функции;

– применив формулу Ньютона-Лейбница, вычислить значение определенного интеграла.

2. ***Интегрирование по частям в определенном интеграле*** сводится к применению формулы:

$$\int_a^b u\cdot dv=(u\cdot v)\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du.$$

Если пределы интегрирования симметричны относительно нуля, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 0, & \text{если } f(-x)=-f(x), \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(-x)=f(x). \end{cases}$$

1.2 Примеры решения задач

Пример 1.1. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница определенные интегралы:

a) $\int_1^4 x^2dx$; b) $\int_0^{\pi/2}\cos x dx$; c) $\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение:

a) $\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$.

b) $\int_0^{\pi/2}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\pi/2-\sin 0=1-0=1$.

c) $\int_4^9\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot dx=\int_4^9\frac{2x}{5}\cdot dx+\int_4^9\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_4^9+\sqrt{x}\Big|_4^9=\frac{1}{5}\cdot\left(9^2-4^2\right)+\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)=\frac{1}{5}\cdot 65+1=14\,.$$

Пример 1.2. Вычислить методом замены переменной определенные интегралы:

a) $\int\limits_4^5 (4-x)^3\,dx$; b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}$; c) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{3-\cos x}dx$.

Решение:

a) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $4-x=t$. Дифференцируя, получаем $-dx=dt$, $dx=-dt$. Находим новые пределы интегрирования, подставляя в равенство $4-x=t$ значения $x=4$ и $x=5$, получим $\alpha=4-4=0$, $\beta=4-5=-1$. Следовательно,

$$\int\limits_4^5 (4-x)^3\,dx=-\int\limits_0^{-1} t^3dt=-\frac{t^4}{4}\Big|_0^{-1}=-\frac{1}{4}\left((-1)^4-0^4\right)=-\frac{1}{4}\,.$$

b) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $3x+1=t$. Дифференцируя, получаем $3dx=dt$, $dx=\frac{1}{3}dt$. Находим новые пределы интегрирования, подставляя в равенство $3x+1=t$ значения $x=0$ и $x=1$, соответственно получим $\alpha=3\cdot0+1=1$, $\beta=3\cdot1+1=4$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}=\int\limits_0^1 (3x+1)^{-2}\,dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^4 t^{-2}dt=-\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^4=-\frac{1}{3t}\Big|_1^4=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{4}\,.$$

c) Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $3-\cos x=t$. Дифференцируя, получаем $\sin xdx=dt$. Находим новые пределы интегрирования, подставляя в равенство $3-\cos x=t$ значения $x=0$ и $x=\pi/3$, соответственно получим $\alpha=3-\cos 0=2$, $\beta=3-\cos\frac{\pi}{3}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{3-\cos x}dx=\int\limits_2^{5/2}\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_2^{5/2}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{2\cdot 2}=\ln\frac{5}{4}\,.$$

Пример 1.3. Вычислить интегрированием по частям определенные интегралы:

a) $\int\limits_e^4 x\ln xdx$; b) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{2x}dx$; c) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

Решение:

a) Положим $u=\ln x$, $dv=xdx$, откуда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_e^4 x\ln xdx=\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_e^4-\frac{1}{2}\int\limits_e^4\frac{x^2dx}{x}=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_e^4 xdx=$$

$$=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_e^4=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(4^2-e^2\right)=8\ln 4-\frac{e^2}{4}-4.$$

b) Положим $u=x$, $dv=e^{2x}dx$, откуда $du=dx$, $v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}$. Следовательно,

$$\int_0^1 x\cdot e^{2x}dx = \left.\frac{x\cdot e^{2x}}{2}\right|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \left.\frac{e^{2x}}{4}\right|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

c) Положим $u = x$, $dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$, откуда $du = dx$, $v = -\mathrm{ctg}\, x$. Следовательно,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cdot \mathrm{ctg}\, x\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{ctg}\, x dx = -\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}\right) + \int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{ctg}\, x dx =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln\left(\sin x\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2.$$

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2x\, dx$;
2. $\int_{-2}^{0} \left(x^2-4\right)\cos 3x\, dx$;
3. $\int_{0}^{1} \dfrac{4\,\mathrm{arctg}\, x - x}{1+x^2}dx$;
4. $\int_{e+1}^{e^2+1} \dfrac{1+\ln\left(x-1\right)}{x-1}dx$;
5. $\int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$;
6. $\int_{0}^{1} \dfrac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}$;
7. $\int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$;
8. $\int_{0}^{\pi/4} \dfrac{2\cos x + 3\sin x}{\left(2\sin x - 3\cos x\right)^3}dx$;
9. $\int_{1}^{3} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}dx$;
10. $\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \dfrac{dx}{(3\,\mathrm{tg}\, x+5)\sin 2x}$.

2 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1 Основные теоретические положения

Вычисление площадей плоских фигур

Область называется *правильной относительно оси* $Oy\left(Ox\right)$, если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках. Если область правильная относительно осей *Ox* и *Oy*, то она просто называется *правильной областью*.

Если площадь *S* ограничена кривой $y = f\left(x\right)$ $\left(f\left(x\right)\geq 0\right)$, двумя вертикалями $x = a$, $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$, то

$$S = \int_a^b f\left(x\right)dx.$$

В случае, когда область *G*, правильная относительно оси Oy, проектируется на ось *Ox* в отрезок $[a, b]$, то ее граница разбивается на две линии: нижнюю границу области, задаваемую уравнением $y = f_1\left(x\right)$, и верхнюю, задаваемую уравнением $y = f_2\left(x\right)$. Тогда область *G* определяется системой неравенств

$$G:\begin{cases} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x), \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

Если площадь *S* ограничена линиями $x = g(y)$ $\left(g(y) \ge 0\right)$, $y = c$, $y = d$ и отрезком оси ординат $c \le y \le d$, то

$$S = \int_c^d g(y)\, dy.$$

В случае, когда область *G*, правильная относительно оси *Ox*, проектируется на ось *Oy* в отрезок $[c, d]$, то ее граница разбивается на две линии: левую границу области, задаваемую уравнением $x = g_1(y)$, и правую, задаваемую уравнением $x = g_2(y)$. В этом случае область *G* определяется системой неравенств

$$G:\begin{cases} g_1(y) \le x \le g_2(y), \\ c \le y \le d, \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$, на отрезке $[c, d]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \left(g_2(y) - g_1(y) \right) dy.$$

В случае параметрического задания кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$ и $b = \varphi(t_2)$ ($\psi(t) \ge 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

В случае, когда кривые заданы уравнениями $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, то

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi) \right) d\varphi.$$

Вычисление длины дуги кривой

Пусть дуга *AB* кривой задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда длина дуги *AB*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx,$$

где *a* и *b* $(a < b)$ – абсциссы начала и конца дуги.

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$, то

$$l=\int\limits_{c}^{d}\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy,$$

где c и d ($c < d$) – ординаты начала и конца дуги.

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то длина ее дуги вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 $(t_1<t_2)$ – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, то

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho(\varphi)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi,$$

где α и β $(\alpha<\beta)$ – значения полярного угла, соответствующие концам дуги.

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, отрезком оси абсцисс $a\le x\le b$ и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$V_{Ox}=\pi\int\limits_{a}^{b}y^2dx=\pi\int\limits_{a}^{b}f^2(x)\,dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x=g(y)$, отрезком оси ординат $c\le y\le d$ и двумя параллелями $y=c$ и $y=d$, вычисляются по формуле

$$V_{Oy}=\pi\int\limits_{c}^{d}x^2dy=\pi\int\limits_{c}^{d}g^2(y)\,dy.$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, объем тела вращения круг оси Ox вычисляется по формуле

$$V_{Ox}=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\varphi'(t)\,dt,$$

вокруг оси Oy

$$V_{Oy}=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi^2(t)\psi'(t)\,dt.$$

Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг полярной оси

$$V=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi,$$

где $0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi$.

Площадь поверхности вращения

Если дуга кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности фигуры, образованной вращением, вычисляется по формуле

$$S_{Ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

Если дуга вращается вокруг Oy, а уравнение кривой имеет вид $x = g(y)$, где $c \le y \le d$, то площадь поверхности фигуры, образованной вращением, вычисляется по формуле

$$S_{Oy} = 2\pi\int_c^d g(y)\cdot\sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\psi(t)\ge 0)$, то площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги этой кривой, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 $(t_1 < t_2)$ – значения параметра t, соответствующие концам дуги.

Для кривой, заданной в полярных координатах площадь поверхности вращения равна

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\left|\sin\varphi\right|\sqrt{\rho(\varphi)^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решение:

Найдем координаты точек пересечения заданных кривых:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1, \quad b = 1.$$

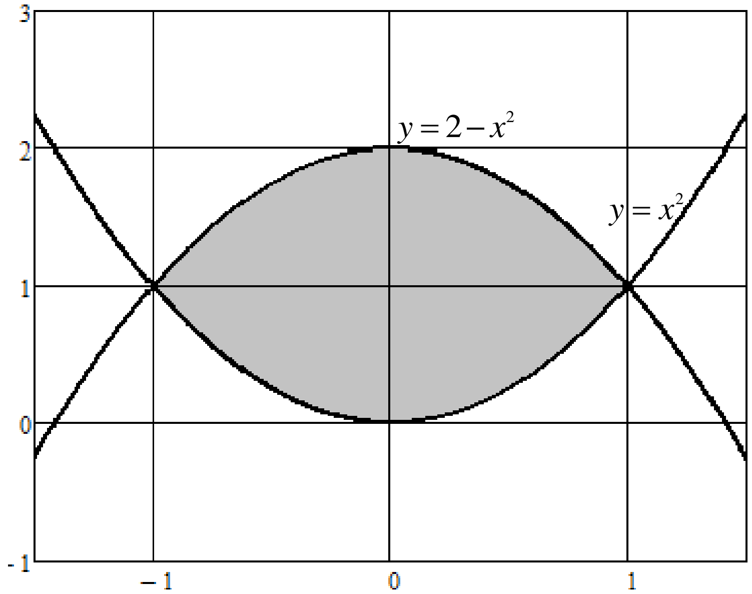


Рисунок 2 – График к примеру 2.1

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x^2\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho(\varphi) = 2\cos^3\varphi$.

***Решение*:**

Линия задана в полярных координатах, фигура симметрична относительно полярной оси, поэтому можно вычислить площадь верхней части фигуры, соответствующей изменению угла φ от 0 до π/2, и результат удвоить:

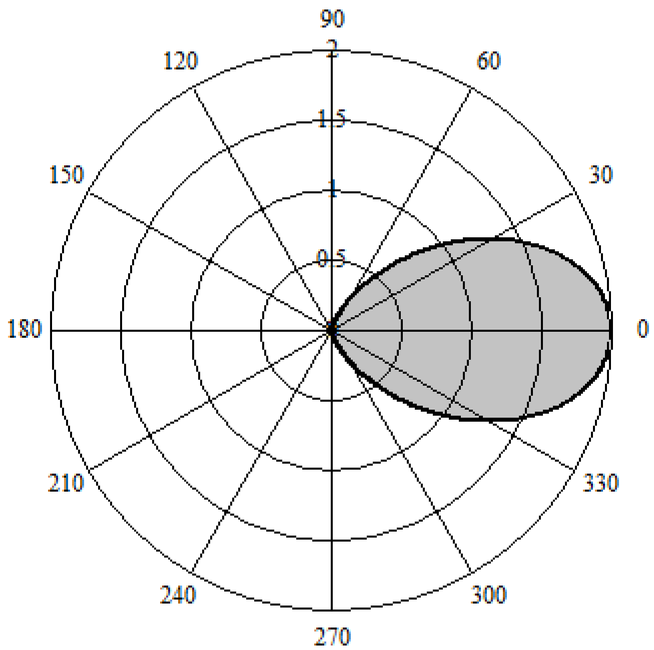


Рисунок 3 – График к примеру 2.2

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 4\cos^6\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi\, d\varphi.$$

Используя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле, имеем:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \cos^5\varphi; & dv = \cos\varphi\, d\varphi \\ du = -5\cos^4\varphi \sin\varphi\, d\varphi; & v = \sin\varphi \end{matrix} \right| = \cos^5\varphi \cdot \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+5\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \cdot \sin^2\varphi\, d\varphi = 5\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\left(1 - \cos^2\varphi\right) d\varphi = 5\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi - 5\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi\, d\varphi,$$

$$\text{или } 6\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi\, d\varphi = 5\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi, \text{ т. е.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \cos^3\varphi; & dv = \cos\varphi\, d\varphi \\ du = -3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi; & v = \sin\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{5}{6}\left(\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi\ \Big|_0^{\pi/2}+3\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\, d\varphi\right)=$$

$$=\frac{15}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{15}{24}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{24}\varphi\Big|_0^{\pi/2}-\frac{15}{24}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi=\frac{15}{48}\pi-\frac{15}{48}\varphi\Big|_0^{\pi/2}-\frac{15}{48}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{5\pi}{32}.$$

Таким образом,

$$\frac{S}{2}=2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\, d\varphi=\frac{2\cdot 5\pi}{32} \qquad \text{или} \qquad S=\frac{5\pi}{8}.$$

Пример 2.3. Найти площадь петли кривой $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{cases}$, $-1\le x\le 0$, $0\le t\le -1$.

Решение:

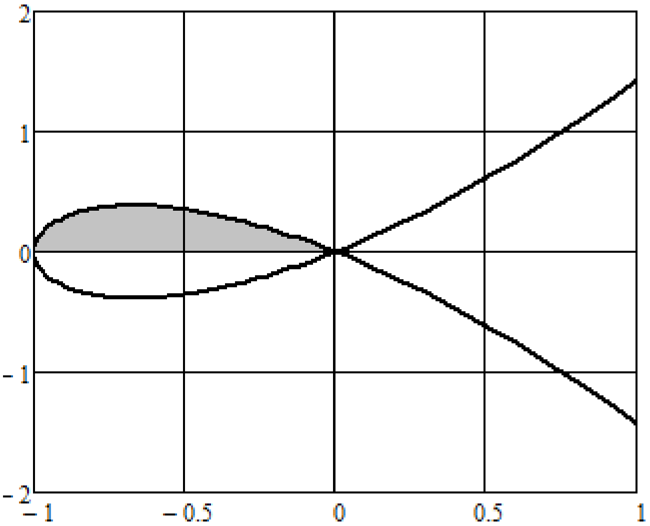


Рисунок 4 – График к примеру 2.3

Линия задана параметрически, следовательно

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)\cdot dt=2\int_0^{-1}\left(t^3-t\right)2tdt=-4\int_{-1}^{0}\left(t^4-t^2\right)dt=-4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{15}.$$

Пример 2.4. Вычислить длину дуги кривой $y=2x^{3/2}$ на отрезке $[0, 11]$.

Решение:

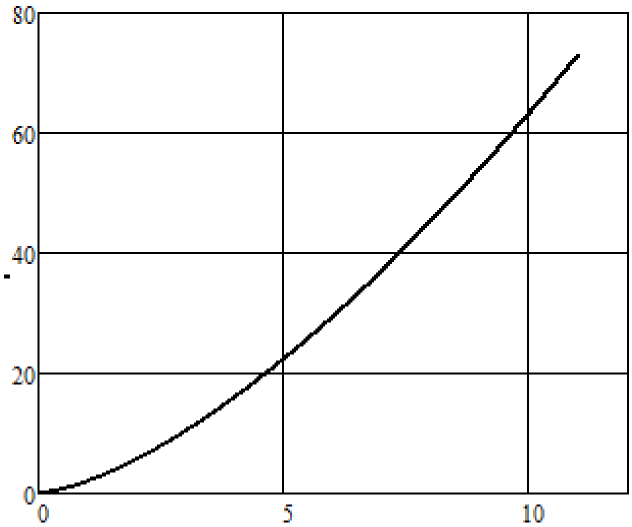


Рисунок 5 – График к примеру 2.4

Вычисляем производную функции, задающей кривую:

$$y' = \left(2x^{3/2}\right)' = 3x^{1/2}.$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx = \int_0^{11} \sqrt{1+\left(3x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^{11} \sqrt{1+9x}\,dx.$$

Выполняем подстановку $1+9x=t$, $9dx=dt$.

Вычисляем пределы интегрирования $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=11 \Rightarrow t=100$.

$$l = \frac{1}{9}\int_1^{100} t^{1/2}dt = \frac{2}{9}\cdot\frac{t^{3/2}}{3}\Bigg|_1^{100} = \frac{2}{27}\left(100^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{2}{27}\left(1000-1\right) = 74.$$

Пример 2.5. Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho(\varphi)=\varphi$.

Решение:

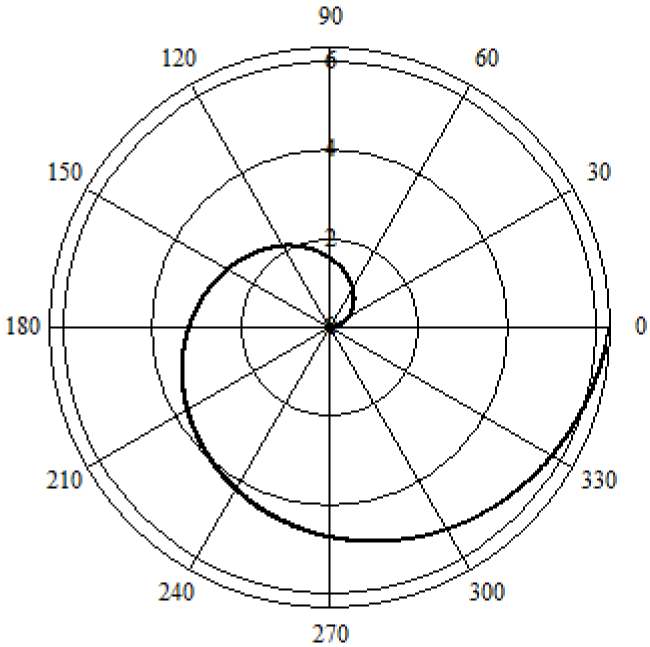


Рисунок 6 – График к примеру 2.5

Линия задана в полярной системе координат, причем первый виток спирали соответствует изменению угла φ от 0 до 2π:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}\varphi=\operatorname{ctg}t\\ d\varphi=-\dfrac{dt}{\sin^2 t}\end{array}\right|=-\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}.$$

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int\frac{dt}{\sin^3 t}=\left|\begin{array}{ll}u=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}; & dt=\dfrac{2du}{1+u^2}\\ \sin t=\dfrac{2u}{1+u^2} & \end{array}\right|=\int\frac{\left(1+u^2\right)^3\cdot 2du}{8u^3\left(1+u^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^3}\cdot du=$$

$$=-\frac{1}{8u^2}+\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{1}{8}u^2+c=-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+c.$$

Таким образом,

$$l=-\int_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}\frac{dt}{\sin^3 t}=-\left(-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\operatorname{arcctg}2\pi}=$$

$$=-\left(-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\left(\frac{1-\operatorname{tg}^4\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}}{8\operatorname{tg}^2\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arcctg}2\pi}{2}\right|\right).$$

Пример 2.6. Вычислить длину дуги $x(t)=2(\cos t-t\sin t)$, $y(t)=2(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение:

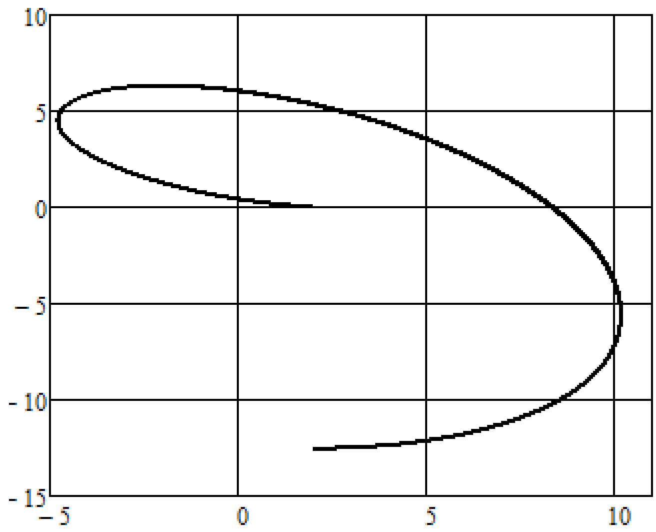


Рисунок 7 – График к примеру 2.6

В данном случае кривая задана параметрически, предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 2(\cos t + t\sin t)' = 2(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 2t\cos t,$$

$$y'(t) = 2(\sin t - t\cos t)' = 2(\cos t - \cos t + t\sin t) = 2t\sin t,$$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2t^2\cos^2 t + 2^2t^2\sin^2 t}\;dt = \int_0^{2\pi} 2\cdot\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 2\cdot\frac{4\pi^2}{2} = 4\pi^2.$$

Пример 2.7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=0$, $x=2$ $\left(0\le x\le 2\right)$.

Решение:

В условиях нашей задачи $a=0$, $b=2$.

Объем полученного тела вращения равен

$$V = \pi\int_0^2 y^2dx = \pi\int_0^2\left(4x-x^2\right)dx = \pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = 16\frac{\pi}{3}.$$

Пример 2.8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y=2x-x^2$, $y=0$, $x=1$ $\left(0\le x\le 1\right)$.

Решение:

В условиях нашей задачи $a=0$, $b=1$.

Объем полученного тела вращения равен

$$V = \pi\int_0^1 y^2dx = \pi\int_0^1\left(2x-x^2\right)^2dx = \pi\int_0^1\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3}-1+\frac{1}{5}-0\right) = \frac{8\pi}{15}.$$

Пример 2.9. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры $y=\sin x,\quad y=0,\quad 0\le x\le\pi$, вокруг оси Ox.

Решение:

В условиях нашей задачи $y=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$.

Объем тела вращения равен

$$V = -\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi dx - \int_0^1 \cos 2x\,dx\right) = \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\bigg|_0^\pi == \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Пример 2.10. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy астроиды $x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\sin^3 t$.

Решение:

Астроида задана параметрически, поэтому подставляя в формулу выражения $x^2=a^2\cos^6 t$ и $dy=3a\sin^2 t\cos t\,dt$ и, переходя к новым пределам интегрирования (по *t*), $t_1=-\dfrac{\pi}{2}$

и $t_2=\dfrac{\pi}{2}$, получаем искомый объем

$$V_{Oy}=\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2\cos^6 t\cdot a\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=3\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)^3\sin^2 t\cdot d\left(\sin t\right)=$$

$$=3\pi a^2\left(\frac{\sin^3 t}{3}-\frac{3\sin^5 t}{5}+\frac{3\sin^7 t}{7}-\frac{\sin^9 t}{9}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

Пример 2.11 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линией $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=\sqrt{2t+3},\end{cases}$ при $2\le t\le 3$.

Решение:

Объем тела вращения равен

$$V_{Ox}=\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi^2(t)\varphi'(t)\,dt=\pi\int_2^3\left(\sqrt{2t+3}\right)^2(\ln t)'\,dt=\pi\int_2^3(2t+3)\frac{1}{t}dt=\pi\left(2t+3\ln|t|\right)\Big|_2^3=\pi\left(2+3\ln\frac{3}{2}\right).$$

Пример 2.12 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда $\rho(\varphi)=a\sin 2\varphi\ \ (a>0,\ 0\le\varphi\le\pi)$ вокруг полярной оси.

Решение:

Объем тела вращения равен

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=2\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi=\frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\cdot\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{64}{105}\pi a^3.$$

Пример 2.13. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $3y-x^3=0$, $0\le x\le 1$.

***Решение*:**

Приводим функцию, описывающую дугу кривой к явному виду $y=\dfrac{1}{3}x^3$, находим производную $y'=\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^2$.

Площадь поверхности вращения равна

$$S=2\pi\int_0^1\frac{1}{3}x^3\cdot\sqrt{1+(x^2)^2}\,dx=\frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1(1+x^4)^{\frac{1}{2}}d(1+x^4)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

Пример 2.14. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

Решение:

Вычисляем $\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}=2\sin\dfrac{t}{2}$. Тогда площадь поверхности вращения равна

$$S_{Ox}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt=2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}dt=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=16\pi\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=16\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=16\pi\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{64\pi}{3}.$$

Пример 2.15. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды $\rho(\varphi)=a(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение:

Вычисляем $\rho^2(\varphi)+\left[\rho'(\varphi)\right]^2=4a^2\cdot\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Так как при $0\le\varphi\le\pi$ справедливо $|\sin\varphi|=\sin\varphi$, то имеем поверхности вращения

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\rho(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{\rho(\varphi)^2+\left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi=2\pi\int_0^\pi 2a^2(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8\pi a^2\int_0^\pi\sin\varphi\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=16\pi a^2\int_0^\pi\sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=-32\pi a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=-32\pi a^2\left(\frac{1}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=-32\pi a^2\left(0-\frac{1}{5}\right)=\frac{32}{5}\pi a^2$$

2.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

a) кривой $y=4-x^2$ и осью Ox;

b) кардиоидой $\rho(\varphi)=5(1+\cos\varphi)$;

c) астроидой $\begin{cases}x=3\cos^3 t,\\ y=3\sin^3 t.\end{cases}$

2. Вычислить длину дуги:

a) кривой $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\dfrac{3}{4}$ до точки $x_2=2{,}4$;

b) одной арки циклоиды: $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t);\end{cases}$

c) кривой $\rho(\varphi)=\dfrac{1}{\cos\varphi}$, заключенной между точками $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=\pi/4$.

3. Найти объем тела:

a) полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной гиперболой $y=\dfrac{6}{x}$, осью Oy и прямыми $y=1$ и $y=6$;

b) образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=\dfrac{1}{4}x^2$ прямой $x=4$ и осью Ox;

c) образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды: $\begin{cases}x=3(t-\sin t),\\ y=3(1-\cos t).\end{cases}$

d)) образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда $\rho(\varphi)=4\cdot\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi)$ вокруг полярной оси.

4. Найти площадь поверхности, образованной вращением:

a) вокруг оси Ox эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

b) астроиды $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$ вокруг оси Oy;

c) вокруг полярной оси кардиоиды $\rho(\varphi)=1+\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1 Основные теоретические положения

Несобственный интеграл первого рода

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $[a, +\infty]$ и интегрируема на промежутке $[a, B]$, где $B \geq a$. Несобственным интегралом первого рода называется конечный или бесконечный предел вида

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл расходится.

К несобственным интегралам 1-го рода относятся также интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$$

и интеграл с двумя бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_c^B f(x)dx.$$

Определение несобственного интеграла дает одновременно и метод его вычисления: нахождение предела обычного определенного интеграла:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)dx = \lim_{B\to\infty} F(x)\Big|_a^B = \lim_{B\to\infty} F(B) - F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx = F(b) - \lim_{A\to-\infty} F(A);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_c^B f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B) - \lim_{A\to-\infty} F(A).$$

В геометрическом смысле несобственные интегралы 1-го рода можно рассматривать как площади бесконечных вправо, влево или в обе стороны криволинейных трапеций.

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.1. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; b) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; c) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\cos x dx$.

Решение:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty}\int_0^B\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^B = \lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ – интеграл сходится.

b) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{B\to\infty}\int_{\sqrt{e}}^{B}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{\sqrt{e}}^{B}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 B} - \frac{1}{\ln^2\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}(0-4) = 2$ – интеграл сходится.

c) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_1^{B}\frac{d(x+3)}{\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{B\to\infty}\left(2\sqrt{x+3}\Big|_1^B\right)=\lim\limits_{B\to\infty}2\sqrt{B+3}-2\sqrt{4}=\infty$ – интеграл расходится.

d) $\int\limits_{-\infty}^{0}x\cos xdx=\lim\limits_{A\to-\infty}\left(x\sin x\Big|_A^0+\cos x\Big|_A^0\right)=0-\lim\limits_{A\to-\infty}A\sin A+1-\underbrace{\lim\limits_{A\to-\infty}\cos A}_{не\cdot существует}$ – интеграл расходится.

Пример 3.2. Исследовать интеграл на сходимость в зависимости от параметра α

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}},\alpha>0:$$

a) $\alpha=1$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_a^{B}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{B\to\infty}(\ln B-\ln a)=+\infty$$ – интеграл расходится.

b) $\alpha\neq1$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_a^{+\infty}x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{B\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_a^B=\lim\limits_{B\to\infty}\left(\frac{B^{-\alpha+1}}{1-\alpha}-\frac{a^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)=\lim\limits_{B\to\infty}\frac{1}{B^{\alpha-1}(1-\alpha)}-\underbrace{\frac{a^{-\alpha+1}}{1-\alpha}}_{число}$$

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\alpha-1>0\Rightarrow\alpha>1-\text{сходится,}\\ \alpha-1<0\Rightarrow\alpha\leq1-\text{расходится.}\end{cases}$$

Рассмотренный интеграл является *эталонным* при использовании следующей теоремы.
Теорема (сравнения). Пусть выполнены условия:

1) Функции $f(x)\geq0$ и $g(x)\geq0$ на множестве $[a;+\infty)$,
2) Функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве $[a;B)$, $B\in[a;+\infty)$,
3) $f(x)\leq g(x)$ на множестве $[a;+\infty)$.

Тогда, если:

a) интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ тоже сходится;

b) интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ тоже расходится.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость интегралы:

a) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; b) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$.

Решение:

a) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ – для любого значения x справедливо неравенство $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}<\frac{1}{x^{5/3}}$, а т.к. интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$ – сходится, то сходится и исходный интеграл.

b) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$ – для любого значения x справедливо неравенство $\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x}(\ln x<x)$, а т.к.

интеграл $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x}$ щ – расходится, то расходится и исходный интеграл.

Несобственный интеграл 2-го рода

Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на любом промежутке $[a,b-\delta]$, где $\delta>0$, причем $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$. Тогда $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$ называется несобственным интегралом 2-го рода функции $y=f(x)$ на промежутке $[a,b]$, а точка $x=b$ называется *особой*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx.$$

Если предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл *сходится*. Если предел не существует, либо равен бесконечности, то интеграл *расходится*.

Если функция терпит разрыв на левом конце промежутка $[a,b]$, то имеем несобственный интеграл вида

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^{b}f(x)dx,$$

и точка $x=a$ называется *особой*.

Если функция терпит разрыв во внутренней точке промежутка $[a,b]$, то имеем несобственный интеграл вида

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b}f(x)dx,$$

и точка $x=c$ называется *особой*.

В геометрическом смысле несобственные интегралы 2-го рода есть также площади бесконечных криволинейных трапеций.

Пример 3.4. Исследовать на сходимость интегралы:

a) $\int\limits_1^5\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; b) $\int\limits_0^2\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}$; c) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение:

a) $$\int\limits_1^5\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^5\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\delta\to 0}2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^5=\lim_{\delta\to 0}2\left(\sqrt{5-1}-\sqrt{(1+\delta)-1}\right)=4-\lim_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{\delta}\right)=4-0=4$$

– интеграл сходится.

b) $$\int\limits_0^2\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{2-\delta}\frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2-\delta}\frac{d\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2-4\right)}\right)\Bigg|_0^{2-\delta}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{4-4\delta+\delta^2-4}-\frac{1}{-4}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-0}-\frac{1}{-4}\right)=+\infty$$ – интеграл расходится.

c) $$\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{-1}^{0-\delta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int\limits_{0+\delta}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\lim_{\delta\to 0}\left(3x^{1/3}\Big|_{-1}^{0-\delta}+3x^{1/3}\Big|_{0+\delta}^1\right)=-3\sqrt[3]{-1}+3\sqrt[3]{1}=6$$ –

интеграл сходится.

Пример 3.5. Исследовать на сходимость в зависимости от параметра α:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}, \alpha>0,\ \ x=a \text{ – особая точка.}$$

a) $\alpha = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{\delta\to 0}\ln|x-a|\Big\|_{a+\delta}^b = \lim_{\delta\to 0}\left(\ln|b-a|-\ln\delta\right)=\infty$$ – интеграл расходится.

b) $\alpha \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b (x-a)^{-\alpha}\, d(x-a) = \lim_{\delta\to 0}\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_{a+\delta}^b = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}-\frac{\delta^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}-\frac{\delta^{-\alpha+1}}{1-\alpha}.$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \begin{cases}\alpha-1>0 \Rightarrow \alpha\geq 1 - \text{расходится,}\\ \alpha-1<0\Rightarrow \alpha<1-\text{сходится.}\end{cases}$$

Рассмотренный интеграл является *эталонным* при использовании теоремы сравнения, аналогичной теореме сравнения несобственных интегралов 1-го рода.

Пример 3.6. Исследовать интегралы на сходимость.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx$.

Решение:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $x=1$ – особая точка; $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1+x^2)}_{\geq 1}(1-x)\underbrace{(1+x)}_{\geq 1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ – сходится, т.к. $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}<1\right)$ – следовательно по теореме сравнения будет сходиться и исследуемый интеграл.

2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx$, $x=1$ – особая точка; $\displaystyle\frac{2+\cos x}{(x-1)^2}\geq\frac{1}{(x-1)^2}$ – расходится $(\alpha=2>1)$, следовательно по теореме сравнения будет расходиться и исследуемый интеграл.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}dx$; 2. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4}$; 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

4. $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$; 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 6. $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}$;

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$; 8. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx$; 9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg} x\, dx$.

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В MATHCAD

Для вычисления определенных интегралов и их приложений в среде MathCad используется оператор, расположенный на панели Calculus (Исчисление) и позволяющий вставить шаблон с четырьмя полями ввода.

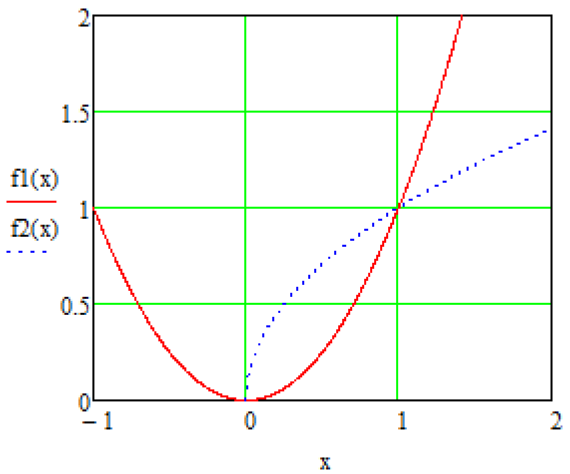
$$\int_0^{\ln(2)} e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}\, dx \to \frac{2}{3} \qquad \int_0^{\ln(2)} e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}\, dx = 0.667$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{3 - \cos(x)}\, dx \to \ln(5) - \ln(4) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{3 - \cos(x)}\, dx \to \ln(5) - \ln(4) = 0.223$$

Рисунок 8 – Вычисление определенных интегралов

Найти площадь фигуры, ограниченную линиями:

$f1(x) := x^2 \qquad f2(x) := \sqrt{x}$



Находим точки пересечения линий:

Given

$\sqrt{x} = x^2$

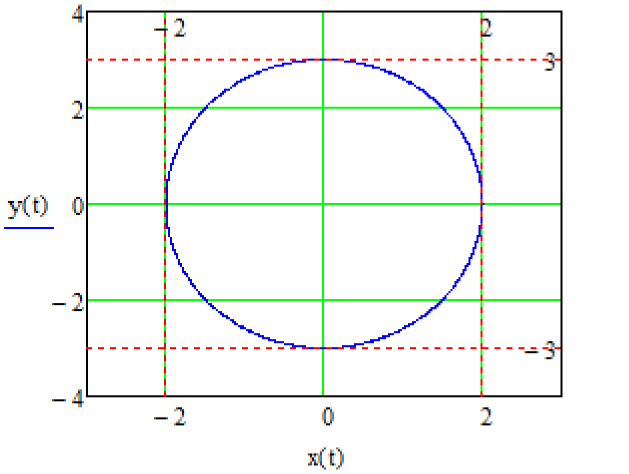
$\mathrm{Find}(x) \to (1\ \ 0)$

Вычисяем площадь $S := \left| \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx \right| \to \frac{1}{3}$

Рисунок 9 – Нахождение площади фигуры, ограниченной кривыми, заданными явно

Найти площадь фигуры, ограниченную кривой:

$x(t) := 2 \cdot \cos(t) \qquad y(t) := 3 \cdot \sin(t) \qquad 0 \le t \le 2 \cdot \pi$



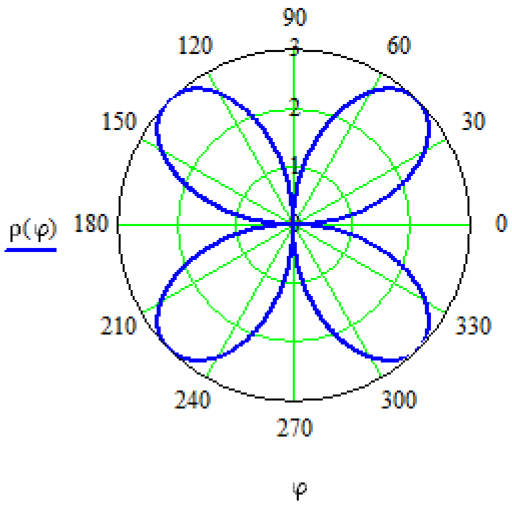
$x1(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow -2 \cdot \sin(t)$

Площадь эллипса: $S := \left| \int_0^{2\cdot\pi} y(t) \cdot x1(t)\, dt \right| = 18.85$

Рисунок 10 – Нахождение площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически

Найти площадь фигуры, ограниченную одним лепестком полярной розы:

$\rho(\varphi) := 3 \cdot \sin(2 \cdot \varphi)$



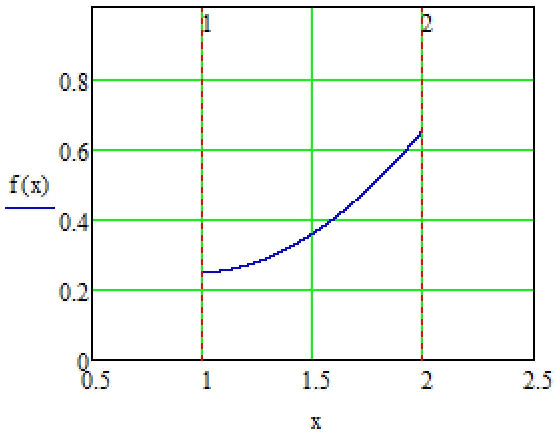
Значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствует $\rho = 0$

Площадь одного лепестка равна: $S := \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho(\varphi))^2\, d\varphi \rightarrow \frac{9 \cdot \pi}{8}$

Рисунок 11 – Нахождение площади фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах

Найти длину дуги кривой:

$f(x) := 0.25 \cdot x^2 - 0.5 \cdot \ln(x) \qquad x := 1, 1.0001 .. 2$



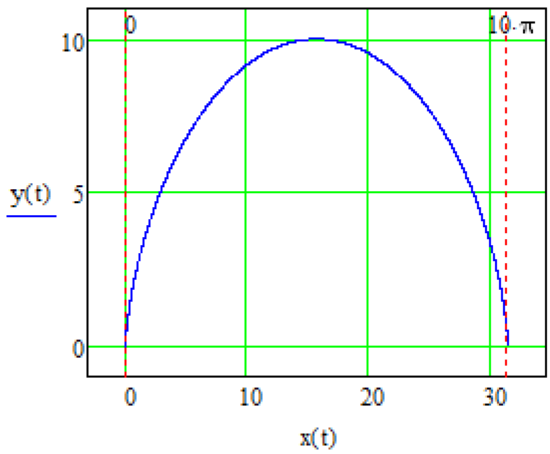
$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 0.5 \cdot x - \frac{0.5}{x}$

Длина дуги $\quad L := \int_1^2 \sqrt{1 + (f1(x))^2}\, dx = 1.097$

Рисунок 12 – Нахождение длины дуги кривой, заданной явно

Найти длину дуги одной арки циклоиды:

$x(t) := 5 \cdot (t - \sin(t)) \qquad y(t) := 5 \cdot (1 - \cos(t)) \qquad t := 0, 0.001 .. 2 \cdot \pi$



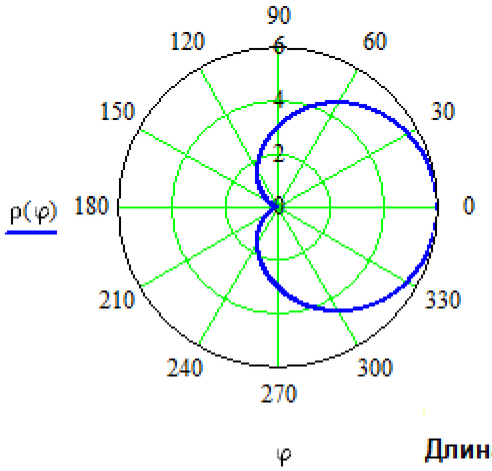
$x1(t) := \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow 5 - 5 \cdot \cos(t) \qquad y1(t) := \frac{d}{dt} y(t) \rightarrow 5 \cdot \sin(t)$

Длина дуги $\quad L := \int_0^{2 \cdot \pi} \sqrt{(x1(t))^2 + (y1(t))^2}\, dt = 40$

Рисунок 13 – Нахождение длины дуги кривой, заданной параметрически

Найти длину кардиоиды:

$\rho(\varphi) := 3 \cdot (1 + \cos(\varphi))$

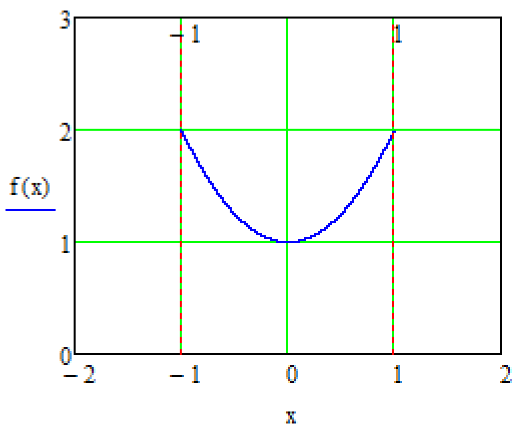


Длина кардиоиды $L := \int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + \left(\frac{d}{d\varphi}\rho(\varphi)\right)^2}\, d\varphi = 24$

Рисунок 14 – Нахождение длины дуги кривой, заданной в полярных координатах

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями вокруг оси ординат:

$f(x) := 1 + x^2 \qquad x = -1 \qquad x = 1 \qquad y = 0 \qquad x := -1, -1 + 0.0001 .. 1$



Вращаем трапецию, расположенную в первом квадранте вокруг оси ординат. Для вычисления объема тела вращения нельзя воспользоваться формулой непосредственно, т.к. фигура сверху ограничена не прямой, а параболой.

Рассмотрим вращение прямоугольника, ограниченного осью ординат и прямыми $x = -1 \quad x = 1$

При вращении получаем цилиндр, объем которого равен $V1 := \pi \cdot \int_0^2 1\, dy \rightarrow 2 \cdot \pi$

Рассмотрим вращение фигуры, ограниченной осью ординат, прямой $y = 2$

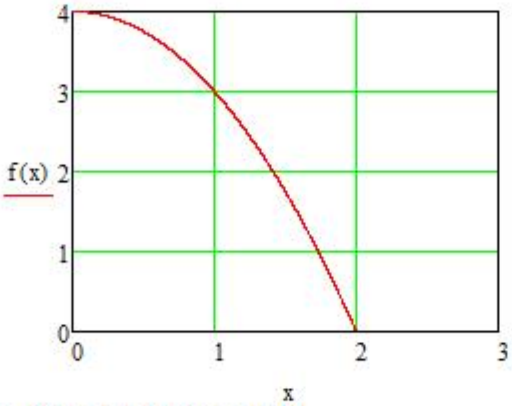
и параболой $f(x) := 1 + x^2$

Объем тела вращения равен $V2 := \pi \cdot \int_1^2 (y - 1)\, dy \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Искомый объем $V := V1 - V2 \qquad V \rightarrow \frac{3 \cdot \pi}{2}$

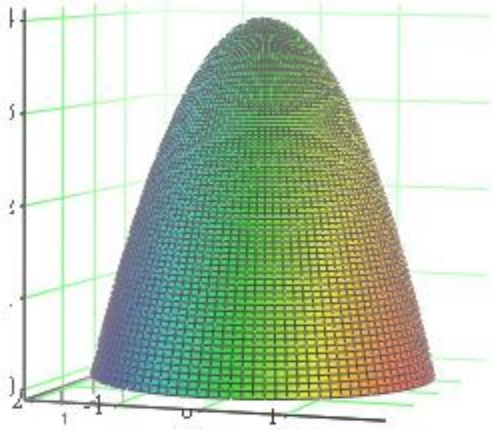
Рисунок 11 – Нахождение объема тела вращения

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями вокруг оси ординат $f(x) := 4 - x^2$ $\quad y = 0$ $\quad x = 0$ $\quad x := 0, 0.001 .. 2$



Вращение вокруг оси OY $\quad a := 0 \quad b := 2$

$$Z(u,v) := \begin{pmatrix} u \cdot \sin(v) \\ f(u) \\ u \cdot \cos(v) \end{pmatrix} \qquad Z1 := \mathrm{CreateMesh}(Z, a, b, -\pi, \pi, 100)$$



Z1

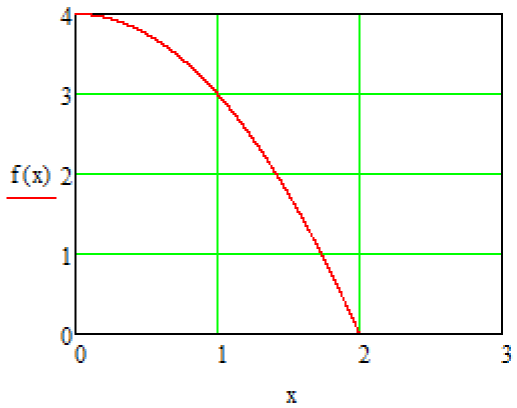
Объем тела вращения:

$$V := \pi \cdot \int_0^4 (4 - y)\, dy \rightarrow 8 \cdot \pi$$

Рисунок 12 – Построение тела вращения и нахождение его объема

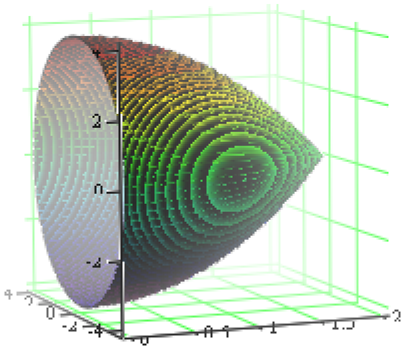
Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями вокруг оси абсцисс

$f(x) := 4 - x^2$ $\quad y = 0 \quad x = 0 \quad x := 0, 0.001 .. 2$



Вращение вокруг оси OX $\quad a := 0 \quad b := 2$

$$Z(u,v) := \begin{bmatrix} u \\ (f(u))\cdot\cos(v) \\ (f(u))\cdot\sin(v) \end{bmatrix} \qquad Z2 := \mathrm{CreateMesh}(Z, a, b, 0, 2\cdot\pi, 100)$$



Z2

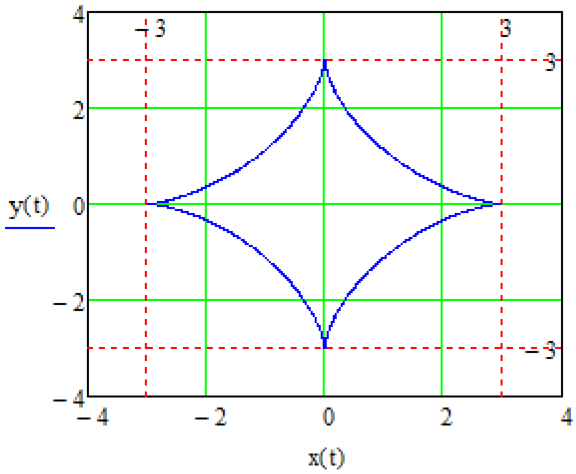
Объем тела вращения:

$$V := \pi\cdot\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx \rightarrow \frac{256\cdot\pi}{15}$$

Рисунок 13 – Построение тела вращения и нахождение его объема

Найти объем тела, образованного вращением астроиды вокруг оси абсцисс:

$x(t) := 3\cdot(\cos(t))^3 \qquad y(t) := 3\cdot(\sin(t))^3$



Вращаем часть астроиды, расположенную в первом квадранте

$$x1(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow -9\cdot\cos(t)^2\cdot\sin(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y(t))^2\cdot x1(t)\,dt \rightarrow -\frac{144}{35}$$

Объем тела вращения: $\qquad V := 2\cdot\pi\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y(t))^2\cdot x1(t)\,dt\right| \rightarrow \frac{288\cdot\pi}{35}$

Рисунок 14 – Нахождение объема тела вращения кривой, заданной параметрически

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \rightarrow 1 \qquad \int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \rightarrow 2\cdot\sqrt{2}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(x)\,dx \rightarrow \text{undefined} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \rightarrow \infty$$

Рисунок 15 – Вычисление несобственных интегралов

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение интегральной суммы для функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$.
2. Что называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$?
3. Какая функция называется интегрируемой на $[a,b]$?
4. Назовите условия существования определенного интеграла.
5. Какие функции являются интегрируемыми?
6. Каков геометрический смысл определенного интеграла от функций $f(x) \geq 0$?
7. Сформулируйте и докажите свойства о вынесении постоянного множителя за знак интеграла и об интеграле от суммы функций.
8. Сформулируйте и докажите свойство о равенстве интеграла по промежутку сумме интегралов по частям промежутка, если первоначальный промежуток разбит на две части.
9. Дайте геометрическую иллюстрацию свойства об оценке определенного интеграла, если $f(x) \geq 0$.
10. Каков геометрический смысл теоремы о среднем в случае непрерывной подынтегральной функции?
11. Как сравнить интегралы $\int_a^b |f(x)|\,dx$ и $\int_1^e x^2 \ln\left(\frac{x}{3}\right)dx$?
12. Сформулируйте теорему об интеграле с переменным верхним пределом и запишите формулу Ньютона-Лейбница.
13. Как вычисляются определенные интегралы методом подведения под знак дифференциала, заменой переменных, а также интегрированием по частям.
14. Дайте геометрическую иллюстрацию свойства об оценке определенного интеграла.
15. Сформулируйте определение интеграла функции $y = f(x)$ по неограниченному промежутку?
16. Сформулируйте определение интеграла от неограниченной функции $y = f(x)$.
17. Сформулируйте признаки сравнения о сходимости несобственных интегралов 1-го рода.
18. Сформулируйте признаки сравнения о сходимости несобственных интегралов 2-го рода.
19. Укажите формулы вычисления площадей плоских фигур в декартовой системе координат.
20. Сформулируйте определение длины дуги кривой в прямоугольных координатах.
21. Запишите формулу длины дуги кривой в полярной системе координат.
22. Выведите формулы объема тел вращения.
23. Выведите формулы площади поверхности вращения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ельцов, А.А. Интегральное исчисление: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: ТУСУР, 2013. – 138 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/6063 (дата обращения: 10.05.2023).
2. Ельцов, А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: ТУСУР, 2005. – 204 с. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/39 (дата обращения: 06.05.2023).
3. Потапов, А.П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Часть 2. Учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. – 268 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04679-3. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – Режим доступа: https://urait.ru/bcode/515214 (дата обращения: 16.05.2023).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 0$	12. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$, $x \neq 0$	14. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
7. $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$	17. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$
8. $\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln\|\sin x\| + C$	18. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C$	19. $\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th}\, x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$	20. $\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth}\, x + C$