Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Б. А. Люкшин
Г. Е. Уцын
Н. Ю. Гришаева

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Методические указания к лабораторным и самостоятельным работам
по дисциплине «Прикладная механика»
для студентов технических направлений подготовки и специальностей
всех форм обучения

Томск
2024

УДК 531
ББК 22.2
Л94. 2

**Рецензент:**
**Бочкарева С. А.**, доцент кафедры механики и графики ТУСУР, канд. физ.-мат. наук

**Люкшин, Борис Александрович**
Л94. 2 Определение координат центра тяжести: методические указания к лабораторным и самостоятельным работам по дисциплине «Прикладная механика» для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения / Б. А. Люкшин, Г. Е. Уцын, Н. Ю. Гришаева – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. – 10 с.

Методические указания представляют собой руководство по выполнению лабораторных и самостоятельных работ для студентов, изучающих дисциплины «Прикладная механика». В пособии рассмотрена последовательность выполнения лабораторной работы по определению координат центра тяжести различных фигур.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям всех форм обучения.

Одобрено на заседании каф. механики и графики, протокол №165 от 08.04.2024

УДК 531
ББК 22.2

# Содержание

# Введение

На каждую частицу тела действует направленная к центру Земли сила, которую называют силой тяжести. Эти силы образуют поле сил тяжести.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с размерами Земли, силы тяжести, действующие на частицы тела, считаются параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянное значение при любых поворотах тела. Силовое поле, в котором выполняются указанные два условия, называется однородным полем силы тяжести. Модуль равнодействующей сил тяжести, действующей на частицы данного тела, называется весом тела. Равнодействующая сил тяжести проходит через точку, которая называется центром тяжести тела. При изменении положения тела в пространстве, что соответствует изменению направлений сил относительно тела, точка, соответствующая центру тяжести, не изменяет своего положения по отношению к телу. Нахождение центра тяжести сводится к нахождению центра параллельных сил.

## 1 Цель работы

Экспериментальным путем найти координаты центра тяжести плоской фигуры и сравнить с результатами расчета.

## 2 Краткие теоретические сведения

Координаты центра тяжести $x_c$, $y_c$, $z_c$, как центра параллельных сил, определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \ , y_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot y_i \ , z_c = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i \ , \qquad (1)$$

где $x_i, y_i, z_i$ - координаты точек приложения сил тяжести $\overline{p_i}$, действующих на частицы тела; $P$ - вес тела.

Для однородного тела вес $p_i$ любой его части пропорционален объему $V_i$ этой части, т.е. $p_i = \gamma \cdot V_i$, а вес тела $P$ пропорционален объему $V$ этого тела, т.е.

$$P = \gamma \cdot V$$

где $\gamma$ - вес единицы объем тела (удельный вес).

После подстановки значений $p_i$ и $P$ в выражения (1) получим:

$$x_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot x_i \ , y_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot y_i \ , z_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot z_i \ , \qquad (2)$$

Из выражений (2) видно, что положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы. Этот центр иногда называют центром объема.

Если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее справедливо:

$$x_c = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i \ , y_c = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i \ , \qquad (3)$$

где $A$ - площадь всей пластины; $A_i$ - площади ее частей.

Координаты центра тяжести однородной линии можно найти по формулам:

$$x_c = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot x_i \ , y_c = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot y_i \ , z_c = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot z_i \ , \qquad (4)$$

где $l$ - длина всей линии; $l_i$ - длина ее частей.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно либо в плоскости симметрии, либо на оси симметрии, либо в центре симметрии.

Если тело однородное и имеет правильную геометрическую форму, то его центр тяжести совпадает с геометрическим центром:

- у шара и круга центр тяжести находится в его центре;

-у тела, имеющего прямоугольную форму, центр тяжести находится в точке пересечения его диагоналей;

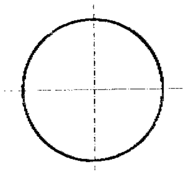
-у тела, имеющего форму треугольника, центр тяжести находится в точке пересечения его медиан, то есть прямых, соединяющих вершину треугольника с серединой противоположной стороны;

-у сектора центр тяжести находится на среднем его радиусе;

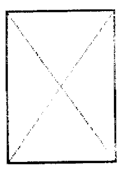
-у сегмента - на перпендикуляре, восстановленном из середины хорды;

-у дуги - на среднем радиусе.

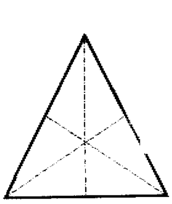
Для определения центра тяжести широко используются метод разбиения на части (метод группировки). Тела сложной формы разбиваются на конечное число частей, положение центра тяжести которых известны или легко находятся. В таких случаях центр тяжести сложной фигуры находятся по общим формулам (1), определяющим центр тяжести, только вместо элементарных частиц тела берутся его конечные части, на которое оно разбито. Разновидностью метода разбиения является метод отрицательных масс. Этот метод применяется к телам, имеющим вырезы, если центр тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.



Центр тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, локомотив, трактор и т.п.) можно определить экспериментально. Одним из экспериментальных методов нахождения положения центра тяжести является метод подвешивания, который заключается в том, что тело подвешивают за различные его точки на тросе или нити. Направление нити, будет указывать направление, на котором находиться центр тяжести тела. Точки пресечения этих направлений определяет положение центра тяжести тела.



Если однородное тело нельзя разбить на конечное число частей, положение центров, тяжести которых известны, то тело разбивают на бесконечно малые объемы, и затем эти объемы стягиваются в точку, т.е. переходят к пределу при стремлении малых объемов к нулю, тогда стоящие в выражениях (2) суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела, и формулы (2) записываются в виде.



$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x \cdot dV \quad , \quad y_c = \frac{1}{V}\int_V y \cdot dV \quad , \quad z_c = \frac{1}{V}\int_V z \cdot dV .$$

Аналогично для координат центров тяжести плоских фигур и линий получаем из формул (3) и (4):

$$x_c = \frac{1}{A}\int_A x \cdot dA \quad , \quad y_c = \frac{1}{A}\int_A y \cdot dA$$

и $x_c = \frac{1}{l}\int_l x \cdot dl \quad , \quad y_c = \frac{1}{l}\int_l y \cdot dl \quad , \quad z_c = \frac{1}{l}\int_l z \cdot dl$ .

## **Основные положения:**

1. Если тело обладает симметрией относительно центра, оси или плоскости, то центр тяжести соответственно совпадает с центром, лежит на оси или в плоскости.
2. Если центры тяжести отдельных частей тела лежат на одной прямой (плоскости), то и центр тяжести лежит на этой прямой (плоскости).
3. Если тело имеет полости (пустоты), то его можно рассматривать как систему, состоящую из сплошного тела и тел в форме пустот, имеющих отрицательную массу (метод отрицательных масс).
4. Если тело можно разбить на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам (1). Число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело.

Центр тяжести параллелограмма (ромба, прямоугольника) находится в точке пересечения диагоналей.

Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан.

Центр тяжести *C* сектора находится по формуле

$$x_c = 2R\sin\alpha/3\alpha,$$

где $x_c$ отсчитывается от центра сектора, $R$ – радиус сектора, α – половина центрального угла в вершине сектора (рис. 2), измеряемого в радианах. Так, при определении центра тяжести полукруга нужно принять $\alpha = \pi / 2$ .

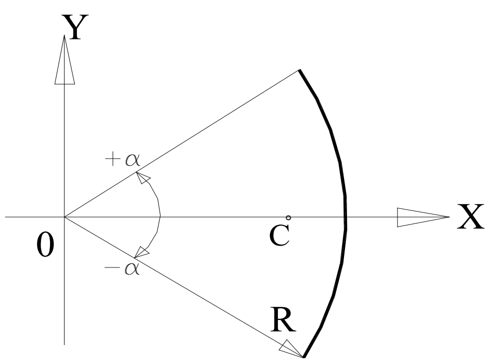



Рисунок 1 – К определению центра тяжести сектора

## 3 Описание лабораторной установки

Для нахождения координат центра тяжести фигур используется установка **ТМт-04М** (рисунок 2).

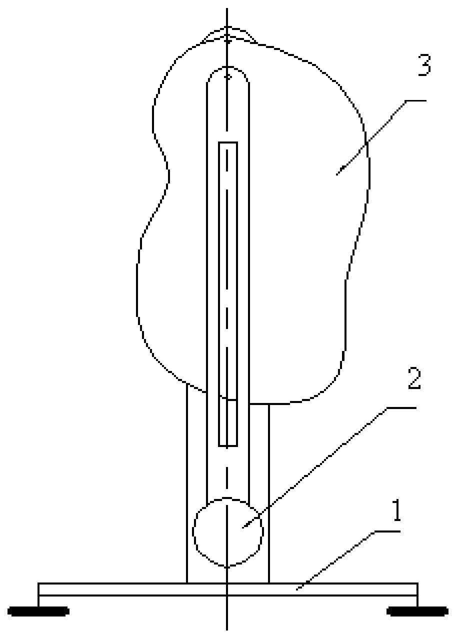



Рисунок 2 – Схема установки ТМт-04М

Установка ТМт-04М настольного типа содержит:

1 – основание с вертикальной стойкой; 2 – отвес с прорезью; 3 – комплект фигур (моделей) из 4-х штук.

## 4 Порядок выполнения работы

1. Проверить горизонтальность установки.
2. Подвесить на штырь плоское тело, для которого находится положение центра тяжести, используя одно из отверстий.
3. Приложить к телу отвес с прорезью.
4. Провести карандашом вдоль прорези прямую линию.
5. Перевесить плоское тело на второе отверстие, затем на третье, проводя каждый раз прямую линию.
6. Точка пересечения трех прямых линий соответствует центру тяжести плоского тела.
7. Определить положение центра тяжести плоского тела расчетным путем.

## 5 Порядок выполнения расчетов

1. Разбиваем плоскую фигуру на простые отдельные части, положение центра тяжести которых известны.

2. Выбираем систему координат. Вычисляем площади и координаты $x_k$, $y_k$ центров тяжести отдельных частей. Площади вырезанных частей берем со знаком минус.
3. Находим общую площадь фигуры по формуле
4. Определяем координаты центра тяжести фигуры.
5. Рассчитываем погрешность определения координат центра тяжести.

Большинство задач на определение центра тяжести допускает несколько способов разбиения фигуры. Этим можно воспользоваться для проверки результата.

Далее принять, что все линейные размеры даны с погрешностью не более 0.5 мм, а углы с погрешностью не более $1^o$.

Определить максимальную абсолютную погрешность определения координат центра тяжести.

Результаты записать в следующем виде (с указанием погрешности):

$S = \pm$
$x_c = \pm$
$y_c = \pm$

6. Нанести на исследуемое плоское тело точку, соответствующую центру тяжести, координаты которого получены расчетным путем.
7. Сравнить положения центров тяжести тела, найденные расчетным и опытным путем.

# 6 Расчет погрешностей

Различают два вида погрешностей - абсолютную и относительную.

**Абсолютная погрешность** некоторого числа равна разности между его истинным значением и приближенным значением, полученным в результате вычисления или измерения.

**Относительная погрешность** - это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа.

Таким образом, если $a$ - приближенное значение числа $x$, то выражения для абсолютной и относительной погрешностей запишутся соответственно в виде

$$\Delta x = x - a, \quad \delta x = \frac{\Delta x}{a}$$

При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшим и наименьшим значениями относительных погрешностей слагаемых; на практике принимается наибольшее значение.

При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются. При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени.

Для случая двух приближенных чисел $a$ и $b$ эти правила можно записать в виде формул:

$$\Delta (a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta\ (a \times b) = \Delta\ a \times b + \Delta\ b \times a,$$

и.т.д.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Предельная абсолютная погрешность вычисления функции равна произведению абсолютной величины ее производной на предельную абсолютную погрешность аргумента.

Абсолютная погрешность прямых измерений задана в условиях задач.

Абсолютные погрешности более сложных выражений определяются по правилам, приведенным выше.

# 7 Содержание отчета

1. Титульный лист отчета.
2. Наименование и цель работы.
3. Задание.
4. Расчетная часть (эскиз фигуры).
5. Вычисление погрешности.
6. Заключение и выводы.

# 8 Контрольные вопросы

1. Что называется, центром тяжести?
2. Как определить центр тяжести для тела простой геометрической формы?
3. Какие способы определения центра тяжести можно использовать в данной лабораторной работе?
4. Как теоретически определить центр тяжести фигуры сложной геометрической формы?
5. Как направлена сила тяжести и чем она отличается от массы тела?

# 9 Литература

1. Красковский, Е.Я. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем : учеб. пособие / Е.Я. Красковский, Ю.А. Дружинин, Е.М. Филатова. – Москва: Высш. шк., 2001. – 480 с.

2. Рощин, Г.И. Несущие конструкции и механизмы РЭА. / Г.И. Рощин. – Москва: Высш. шк., 1981. – 375 с.

3. Анурьев, В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: в 3-х т. Т.1. / В.И. Анурьев – 9-е изд., перераб. и доп./ под ред. И.Н. Жестковой. – Москва: Машиностроение, 1979. – 928 с.

4. Пономарев, С.Д. Расчет упругих элементов машин и приборов / С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреева. – Москва: Машиностроение, 1980.-326 с..

Приложение А
(обязательное)

## Образец титульного листа

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Кафедра механики и графики (МиГ)

Отчет по лабораторной работе

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ**

по дисциплине «Прикладная механика»

Выполнил студент:

Иванов Иван Петрович
группа 592-1

Проверил преподаватель:

_________________

Томск
2024