

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.С. Аникин

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА

Учебно-методические указания по проведению лабораторных работ

Томск
2024

УДК 621.396:519.2(075.8)

ББК 32.84

А–67

Рецензент:

Красненко Н.П., профессор кафедры радиотехнических систем,
доктор физико-математических наук, профессор

Аникин, Алексей Сергеевич

А–67 Статистическая радиотехника : учебно- методические указания по
проведению лабораторных работ / А. С. Аникин. – Томск: Изд-во Томск. гос.
ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2024 – 86 с.

Учебно-методические указания по проведению компьютерных лабораторных работ составлены с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО). Учебно-методические указания содержат краткие теоретические сведения, описание программ для проведения лабораторных работ, задания к лабораторным работам и контрольные вопросы. Предназначено для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения.

Одобрено на заседании каф. РТС, протокол № 4 от 16.11.2023.

УДК 621.396(075.8)

ББК 32.84

© Аникин А.С. , 2024

© Томск. гос. ун-т систем упр. и
радиоэлектроники, 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания для проведения компьютерных лабораторных работ включает в себя краткий теоретический материал, описание программы для проведения лабораторных работ, задания на лабораторные работы, а также контрольные вопросы.

Методические указания предназначены для студентов технических направлений и специальностей всех форм обучения.

В методических указаниях предусмотрены два варианта выполнения лабораторной работы:

- в программной среде моделирования Simulink [1];
- в программе моделирования формирования прохождения случайного процесса через формирующий фильтр.

В последнем случае, программу выдаёт преподаватель заблаговременно до начала выполнения лабораторной работы.

Дополнительный теоретический материал к выполнению лабораторных работ, приведён в литературе [2, 4 – 12].

Методические указания из разделов 1.2, 1.4, 2.4, 3.2 и 3.4 составлены на основе материалов д.т.н., проф. Чумакова А.С.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1: ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА НИЗКИХ ЧАСТОТ.....	7
1.1 ВВЕДЕНИЕ	7
1.2 СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ	8
1.3 СПОСОБЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ	26
1.4 ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В SIMULINK .	27
1.5 ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ.....	33
1.6 ВОПРОСЫ К ДОПУСКУ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ	38
1.7 ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	38
2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2: ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	39
2.1 ВВЕДЕНИЕ	39
2.2 СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ	39
2.3 СПОСОБЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ	44
2.4 ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В SIMULINK.....	44
2.5 ОЦЕНКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ.....	53
2.6 ВОПРОСЫ К ДОПУСКУ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ	58
2.7 ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	59
3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3: ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УЗКОПОЛОСНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	60
3.1 ВВЕДЕНИЕ	60
3.2 СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ	61
3.3 СПОСОБЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ	72
3.4 ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В SIMULINK	72
3.5 ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ	77
3.6 ВОПРОСЫ К ДОПУСКУ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ	84
3.7 ВОПРОСЫ К ЗАЩИТЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ.....	84
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	86
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	87

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1: ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА НИЗКИХ ЧАСТОТ

1.1 Введение

Цель работы: исследовать моментные функции случайного процесса на выходе фильтра низких частот.

В задачах синтеза или анализ радиотехнических систем необходимо оценивать моментные функции случайного процесса на основе одной реализации. Например, такая задача возникает на этапе разработки обнаружителя сигнала в радиолокаторе или демодулятора системы радиосвязи. В частности, при обнаружении сигнала необходимо знать среднее значение процесса и его дисперсию, чтобы правильно определить порог обнаружения.

Для достижения цели работы моделируются реализации случайного процесса на выходе фильтр низких частот. Для этого, генерируются реализации некоррелированного гауссовского случайного процесса на входе фильтра низких частот. Генерирование реализаций случайного процесса могут быть следующими:

1. Путём создания физического устройства на радиоэлектронной элементной базе. На выходе этого устройства наблюдается напряжение, случайно изменяющееся во времени. Недостаток этого способа получения случайного процесса в том, что для каждой новой практической задачи нужно создавать свой генератор с требуемым динамическим диапазоном, полосой частот и т.п..
2. Путём использования системы Simulink. Эта система является расширением системы инженерных и научных расчётов Matlab и позволяет решать задачи разработки моделей физических систем и моделирования процессов в этих системах. В системе Simulink для управления ходом вычислительного процесса разработано графическое описание модели в виде структурной схемы. Представление в виде структурных схем не требует написания программ из-за наличия библиотеки готовых программ, используемых для решения отдельных прикладных задач (библиотеки блоков).
3. С помощью специальной программы для ЭВМ, которая реализует алгоритм формирования случайного процесса, а также его прохождения через фильтр низких частот.

В данной работе студентам даются на выбор второй или третий способы генерации случайного процесса.

В случае третьего способа генерации случайного процесса студентам будет предоставлена программа на ЭВМ, имитирующая прохождение гауссовского процесса через фильтр низких частот.

1.2 Сведения из теории

Пусть имеется случайный процесс $X(t)$. В результате проведения некоторого опыта (или эксперимента) наблюдается одна i -я реализация случайного процесса $x(t)$. При повторении опытов реализации $x(t)$ случайного процесса меняются. По совокупности опытов реализации случайного процесса $X(t)$ принимают мгновенные случайные значения $x_1 = X(t_1), \dots, x_n = X(t_n)$ в моменты времени t_1, \dots, t_n .

Полное статистическое описание случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_1, \dots, t_n даётся многомерной плотностью распределения вероятности $W(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$. Однако такое описание в практических приложениях оказывается достаточно сложным для применения в инженерной практике.

Для приближенного описания статистических свойств случайного процесса используются те же характеристики, что и для описания случайных величин, а именно: моменты первого и второго порядков. Отличие в том, что для случайных величин моменты представляют собой некоторые постоянные числа, а для случайных процессов моменты в общем случае представляют собой детерминированные функции времени. По этой причине моменты применительно к случайным процессам называются моментными функциями.

Моментные функции случайных процессов первого и второго порядка определяются одномерной $W(x; t)$ или двумерной плотностью вероятности $W(x_1, x_2; t_1, t_2)$, соответственно.

Описание случайных процессов с помощью моментных функций основано на применении оператора усреднения (математического ожидания) $M[.]$. Математически усреднение выполняется *по всему ансамблю реализаций* случайного процесса:

- для непрерывных процессов путём вычисления интеграла с весовой функцией в виде плотности распределения вероятности (см. формулы 1-4);
- для дискретных во времени процессов путём вычисления суммы ряда с весовыми коэффициентами по всем значениям вероятностей (см. формулы 6-8).

По существу, отличие моментных функций между собой определяем тем, какое выражение используется вместо «.» при вычислении $M[.]$.

Применение оператора усреднения $\mathbf{M}[\cdot]$ для одной реализации возможно только для случайных процессов, обладающих эргодическим свойством. Эргодическое свойство таких процессов состоит в том, что любая вероятностная характеристика случайного процесса, полученная усреднением по совокупности реализаций, оказывается равной аналогичной характеристике, полученной усреднением одной и достаточно продолжительной (теоретически бесконечной) реализации. Эргодическое свойство упрощает определение моментных функции случайного процесса, поскольку достаточно использовать одну реализацию случайного процесса. Для эргодических случайных процессов наблюдение ансамбля реализаций случайного процесса не приносит дополнительной информации о статистических свойствах случайного процесса. Для случайных процессов в общем случае оператор усреднения применяется по совокупности реализаций (рисунок 1.1).



Рисунок 1.1 – Варианты усреднения при получении моментных функций

Таким образом, оператор усреднения $\mathbf{M}[\cdot]$ применяется для усреднения:

- ансамбля из бесконечного количества реализаций случайного процесса;
- одной реализации случайного процесса, наблюдаемой на достаточно продолжительном (теоретически бесконечном) интервале времени.

Рассмотрим сначала основные моментные функции неэргодического случайного процесса.

Математическим ожиданием или средним значением случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $\mathbf{M}[X(t)]$, которая в каждый момент времени t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса:

$$\mathbf{M}[X(t)] = m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x W[x;t] dx, \quad (1.1)$$

где

$W(x; t)$ – одномерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ для момента времени t .

Для формулы (1) оператор $\mathbf{M}[\cdot]$ обеспечивает *усреднение мгновенного значения* случайного процесса x в момент времени t по совокупности реализаций. Математически усреднение по совокупности реализации описывается как интегрирование по переменной x – мгновенному значению реализации случайного процесса с весовой функцией $W(x; t)$, определяющей распределение вероятностей.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция времени $\sigma_x^2(t)$, значения которой в любой момент времени t равны дисперсии случайной величины X в соответствующем сечении случайного процесса:

$$\sigma_x^2(t) = \mathbf{M} \left[\overset{\circ}{X}(t)^2 \right] = \mathbf{M} \left[(X(t) - m_x(t))^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t))^2 W[x; t] dx, \quad (1.2)$$

где

$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ – вариация (отклонение) случайного процесса относительно математического ожидания.

Для формулы (2) оператор $\mathbf{M}[\cdot]$ обеспечивает *усреднение квадрата вариаций (отклонений) мгновенного значения* случайного процесса x в момент времени t по совокупности реализаций с весовой функцией $W(x; t)$, определяющей распределение вероятностей. Если случайный процесс $X(t)$ – напряжение (Вольт), то величина $\sigma_x^2(t)$ равна средней по ансамблю мощности случайной в момент времени t .

Для статистического описания степени линейной зависимости значений случайного процесса $X(t)$ в два момента времени t_1 и t_2 вводят понятие **корреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$** , которая определяется как математическое ожидание произведения значений случайного процесса в два момента времени $R_x(t_1, t_2) = \mathbf{M} [X(t_1) X(t_2)]$ и вычисляется по формуле

$$R_x(t_1, t_2) = \mathbf{M} [X(t_1) X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 W[x_1, x_2; t_1, t_2] dx_1 dx_2 \quad (1.3)$$

где $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$.

Для формулы (3) оператор $\mathbf{M}[\cdot]$ обеспечивает *усреднение произведения мгновенных значений* случайного процесса x в два момента времени t_1 и t_2 по совокупности реализаций.

Ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$ называется математическое ожидание произведения вариаций (центрированных значений) случайного процесса в два момента времени

$$\begin{aligned}
K_x(t_1, t_2) &= \mathbf{M}\left[\left(X(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_x(t_2)\right)\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2})W[x_1, x_2; t_1, t_2] dx_1 dx_2
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

где $\mathbf{M}[x(t_1)] = m_{x1}$, $\mathbf{M}[x(t_2)] = m_{x2}$.

Для формулы (4) оператор $\mathbf{M}[\cdot]$ обеспечивает *усреднение произведения вариаций мгновенных значений* случайного процесса X в два момента времени t_1 и t_2 по совокупности реализаций. Другими словами, ковариационная функция описывает корреляцию вариаций случайного процесса в два момента времени $\overset{\circ}{X}(t_1)$ и $\overset{\circ}{X}(t_2)$.

Временем (интервалом) корреляции называют интервал времени τ_0 , на котором в среднем имеет место заметная линейная статистическая зависимость между значениями случайного процесса

$$\tau_0 = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau = \frac{1}{2R_x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau.
\tag{1.5}$$

Существуют следующие классы случайных процессов: стационарные и нестационарные. Случайный процесс называют **стационарным**, если плотность распределения вероятностей, описывающая процесс, инвариантна относительно произвольного сдвига τ шкалы времени:

$$W_n[x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n] = W_n[x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau].$$

Случайный процесс называют **нестационарным**, если плотность распределения вероятностей, описывающая процесс, изменяется при произвольном сдвиге τ шкалы времени.

Рассмотрим теперь моментные функции **стационарного и эргодического** случайного процесса. Напомним, что в этом случае оператор усреднения $\mathbf{M}[\cdot]$ реализует усреднение одной достаточно продолжительной (теоретически бесконечной) реализации случайного процесса по времени.

Ниже приводятся формулы для расчёта моментных функций дискретных во времени эргодических случайных дискретных последовательностей. Интервал дискретизации во времени реализации случайного процесса равен Δt . Поэтому N отсчётов реализации дискретного во времени случайного процесса следуют с шагом $t_1, t_2 = t_1 + \Delta t, t_3 = t_1 + 2 \Delta t, \dots, t_N = t_1 + (N - 1) \Delta t$.

В качестве моментных функций эргодического случайного процесса рассмотрим:

– **математическое ожидание** m_x , которое оценивается по формуле:

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{m}_x^t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i), \quad (1.6)$$

где

$T = N \Delta t$ – интервал времени усреднения реализации случайного процесса;

\hat{m}_x^t – оценка математического ожидания эргодического случайного процесса по N отсчётам;

– **дисперсия** D_x , которая оценивается по формуле:

$$D_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{D}_x^t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(t_i) - \hat{m}_x^t]^2, \quad (1.7)$$

для дискретных во времени процессов;

– **временная корреляционная функция** $R_x(\tau = n\Delta t)$, которая оценивается по формуле:

$$R_x(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{R}_x^t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N - n + 1} \sum_{i=1}^{N-n} [x(t_k) - \hat{m}_x^t][x(t_k - n\Delta t) - \hat{m}_x^t], \quad (1.8)$$

где

Δt – интервал дискретизации во времени реализации случайного процесса;

n – количество отсчётов, на которое сдвинута одна реализация случайного процесса (в первой квадратной скобке) относительно другой (во второй квадратной скобке).

Таким образом, для временной корреляционной функции усредняется по времени произведение реализации случайного процесса на её сдвинутую на $\tau = n \cdot \Delta t$ копию.

Для имитации прохождения случайного процесса через фильтр низких частот применяется концепция формирующего фильтра.

Формирующим называется фильтр, который на выходе формирует случайный процесс с требуемой спектральной плотностью мощности, если на вход фильтра подать белый шум.

Известно, что спектральные плотности случайных процессов на выходе $S_{\text{вых}}(\omega)$ и входе $S_{\text{вх}}(\omega)$ фильтра связаны соотношением:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot |K(j\omega)|^2 = S_0 \cdot |K(j\omega)|^2 = S_0 \cdot K(j\omega) \cdot K(-j\omega) \quad (1.9)$$

где

$S_{\text{вх}}(\omega) = S_0$ – спектральная плотность входного белого шума,

$S_{\text{вых}}(\omega)$ – спектральная плотность процесса на выходе фильтра (требуемая спектральная плотность),

$K(j\omega)$ - комплексный коэффициент передачи формирующего фильтра, который из белого шума формирует шум с требуемой спектральной плотностью.

Для формирования случайного процесса на выходе фильтра низких частот сначала формируется реализация случайного процесса на входе фильтра низких частот, выполняются преобразование Фурье и получают амплитудный спектр $X(\omega)$. Затем, получают реализацию случайного процесса на выходе фильтра низких частот $Y(\omega)$ по формуле

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot K(j\omega) \quad (1.10)$$

Затем выполняют обратное преобразование Фурье.

Переход от амплитудных спектров $X(\omega)$, $Y(\omega)$ к спектральной плотности мощности $S_{\text{вх}}(\omega)$, $S_{\text{вых}}(\omega)$ эквивалентен переходу от формулы (1.10) к формуле (1.9).

В лабораторной работе исследуются рассмотренные выше моментные функции случайного процесса на выходе фильтра низких частот (рисунок 1.2). Генератор случайного процесса формирует реализации нормального случайного процесса $X(t)$. Реализации случайного процесса $X(t)$ с моментными функциями m_x и D_x поступает на вход фильтра низких частот.

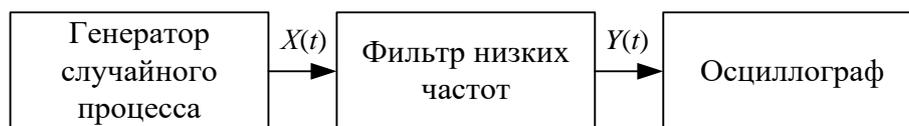


Рисунок 1.2 – Схема проведения численного эксперимента

На выходе фильтра низких частот образуются реализации случайного процесса $Y(t)$ с моментными функциями $m_y(t)$ и $D_y(t)$.

Для линейных динамических систем (в данном случае, фильтр низких частот) различают понятия **переходный и установившийся режим**. В переходном режиме статистические характеристики случайного процесса меняются во времени и это свидетельствует о нестационарном характере случайного процесса. Поэтому на интервале времени, соответствующем переходному режиму, математическое ожидание $m_y(t)$ и дисперсия $D_y(t)$ изменяются во времени. Соответственно, в установившемся режиме статистические характеристики случайного процесса достигают своих постоянных значений $m_y = const.$ и дисперсия $D_y = const.$

В лабораторной работе исследуются моментные функции $m_y(t)$ и $D_y(t)$ для случайного процесса $Y(t)$ в установившемся и переходном режимах.

1.2.1 Краткие сведения о Simulink

Построение модели некоторой системы в среде Simulink сводится к набору блоков из библиотеки системы Simulink и установлению линий связи между ними.

Для запуска системы *Simulink* необходимо предварительно выполнить запуск системы *Matlab*. После открытия командного окна системы *Matlab* нужно запустить систему *Simulink* путём выбора указателем мыши пиктограммы *Simulink* (8-ая слева) на панели инструментов системы *Matlab*. В результате появится окно *Simulink Library Browser* (Браузер главной библиотеки *Simulink*). При двойном нажатии левой клавиши мыши на пиктограммах в левой части окна *Simulink Library Browser* или при однократном нажатии на значок «+» появится список библиотек блоков. В случае нажатия левой кнопки мыши на строке с наименованием библиотеки блоков, в правой части окна появляется список блоков указанной библиотеки.

Для создания модели в среде *Simulink* необходимо последовательно выполнить ряд действий.

1. Создать новый файл модели с помощью команды *File/new/model* (Здесь и далее с помощью символа « / » указывается последовательность вызова пунктов меню).
2. Расположить блоки в окне модели. Для этого необходимо открыть соответствующий раздел библиотеки. Далее, указав курсором на требуемый блок и нажав на левую клавишу мыши, «перетащить» блок в созданное окно. Клавишу мыши нужно держать нажатой. Для удаления блока необходимо выбрать блок (указать курсором на его изображение и нажать левую клавишу мыши), а затем нажать клавишу *Delete* на клавиатуре.
3. Далее, если это требуется, нужно изменить параметры блока, установленные по умолчанию. Для этого необходимо дважды щёлкнуть левой клавишей мыши, указав курсором на изображение блока. Откроется окно параметров данного блока. При вводе числового значения параметра следует иметь в виду, что в качестве десятичного разделителя должна использоваться точка, а не запятая. После внесения изменений нужно закрыть окно кнопкой «*Ok*».
4. После установки на схеме всех блоков требуется выполнить их соединение. Для этого необходимо указать курсором на «*выход*» блока, а затем нажать и, не отпуская левую клавишу мыши, провести линию к входу другого блока. После чего отпустить клавишу. Если соединение не создано, то линия связи будет пунктирной и иметь красный цвет. В случае правильного соединения линия связи будет сплошной. Для создания точки разветвления в соединительной линии нужно подвести правую клавишу к предполагаемому узлу и, нажав правую клавишу мыши,

протянуть линию. Для удаления линии требуется выделить её, а затем нажать клавишу «Delete» на клавиатуре.

5. После составления расчётной схемы необходимо сохранить её в виде файла на диске, выбрав пункт меню *File/Save As...* в окне схемы и указав папку и имя файла. Следует иметь в виду, что имя файла может иметь произвольную длину, но должно начинаться с буквы и содержать только алфавитно-цифровые символы латиницы и знаки подчёркивания. При последующем редактировании схемы можно пользоваться пунктом меню *File/Save*. При повторных запусках программы *Simulink* загрузка схемы осуществляется с помощью меню *File/open...* в окне обозревателя библиотеки блоков.

1.2.2 Основные элементы окна модели

Окно модели содержит следующие элементы:

1. Заголовок с названием окна. Вновь созданному окну присваивается имя *Untitled* с соответствующим номером.
2. Панель меню – *File, Edit, View, Simulation, Format, Tools, Help*.
3. Панель инструментов.
4. Окно для создания схемы модели.
5. Строка состояния, содержащая информацию о текущем состоянии модели.

Меню окна содержит опции для редактирования модели, ее настройки и управления процессом расчёта, работы с файлами и т.п.

- *File* (Файл – работа с файлами моделей);
- *Edit* (Редактирование – изменение модели и поиск блоков);
- *View* (Вид – управление показом элементов модели и интерфейса);
- *Simulation* (Моделирование – задание настроек для моделирования и управление процессом расчёта);
- *Format* (Форматирование – изменение внешнего вида блоков и модели в целом);
- *Tools* (Инструментальные средства – применение специальных средств для работы с моделью (отладчик, инструмент линейного анализа и т.п.);
- *Help* (Справка– открытие окна справочной системы).

Для работы с моделью можно также использовать кнопки на панели инструментов.

Кнопки панели инструментов имеют следующее назначение:

1. *New Model* –открыть новое окно модели.
2. *Open Model* – открыть существующий файл модели (*mdl* – файл).
3. *Save Model* –сохранить файл на диске.
4. *Print Model* – вывести на печать схему модели.
5. *Cut* – вырезать выделенную часть модели в буфер хранения.
6. *Copy* – скопировать выделенную часть модели в буфер хранения.
7. *Paste* – вставить в окно модели содержимое буфера хранения.
8. *Undo* – отменить предыдущую операцию редактирования.
9. *Redo* –восстановить отменённую операцию редактирования.

10. *Start/Pause/Continue Simulation* – запуск процесса моделирования (кнопка *Start*); после запуска модели изображение кнопки заменяется символом ■, который соответствует команде *Pause* (приостановить моделирование). Для возобновления моделирования после паузы следует щелкнуть по той же кнопке, поскольку в режиме паузы ей соответствует команда *Continue* (продолжить)
11. *Stop* – закончить моделирование. Кнопка становится доступной после начала моделирования, а также после выполнения команды *Pause*.
12. *Build all* – создать исполняемый код модели (exe – файл) с помощью *Real Time Workshop* (Мастерская реального времени).
13. *Update diagram* – обновить окно модели.
14. *Library Browser* – открыть обозреватель библиотеки блоков. Если обозреватель уже открыт, то его окно будет выведено поверх остальных окон.
15. *Toggle Model Browser* – открыть окно обозревателя модели. При использовании данной опции в левой части окна модели будет открыто дополнительное окно, содержащее изображение иерархической структуры модели.
16. *Debug* – запуск отладчика модели.

1.2.3 Основные приемы подготовки и редактирования модели

1.2.4 Добавление текстовых надписей

Для повышения наглядности модели удобно использовать текстовые надписи. Для создания надписи достаточно указать мышью место надписи и дважды щелкнуть левой клавишей мыши. После этого появится блок надписи с курсором ввода. Так же можно изменить и подписи к блокам моделей. Для этого нужно установить мышь в область надписи и щелкнуть левой клавишей мыши – в подписи появится курсор ввода, и её можно будет редактировать. Надписи на русском языке для текущей версии Simulink крайне нежелательны.

1.2.5 Выделение объектов

Для выполнения какого – либо действия с элементом модели (блоком, соединительной линией, надписью) этот элемент необходимо сначала выделить. Для этого необходимо установить курсор мыши на нужном объекте и щёлкнуть левой клавишей мыши. Объект будет выделен. Об этом будут свидетельствовать маркеры по углам объекта. Можно также выделить несколько объектов. Для этого требуется установить курсор мыши вблизи них, нажать левую клавишу мыши и, удерживая её, начать перемещать мышь. Появится пунктирная рамка, размеры которой будут изменяться при перемещении мыши. Все охваченные рамкой объекты становятся выделенными. После выделения объекта его можно копировать или перемещать в буфер промежуточного хранения, извлекать из буфера, а также удалять, используя стандартные приёмы работы в *Windows* – программах.

1.2.6 Копирование и перемещение объектов в буфер хранения

Для копирования объекта в буфер его необходимо выделить, а затем выполнить команду *Edit/Copy* или воспользоваться соответствующей кнопкой на панели инструментов. При выполнении данной операции следует иметь в виду, что объекты помещаются в собственный буфер *Matlab* и недоступны из других

приложений. Использование команды *Edit/Copy model to Clipboard* позволяет поместить графическое изображение модели в буфер Windows и соответственно делает его доступным для других приложений

1.2.7 Вставка объектов из буфера хранения

Для вставки объекта из буфера необходимо предварительно указать место вставки, щелкнув левой клавишей мыши в предполагаемом месте вставки, а затем выполнить команду *Edit/Paste* или воспользоваться соответствующим инструментом на панели инструментов.

1.2.8 Удаление объектов

Для удаления объекта его необходимо предварительно выделить, а затем выполнить команду *Edit/Clear* или воспользоваться клавишей *Delete* на клавиатуре. Надо помнить, что команда *Clear* удаляет блок без помещения его в буфер обмена.

1.2.9 Соединение блоков

Для соединения выхода одного блока с входом другого курсор мыши устанавливается

на выходе блока, от которого должно исходить соединение. При этом курсор превращается в большой крест из тонких линий. Держа нажатой левую клавишу мыши, необходимо переместить курсор к входу следующего блока, где курсор мыши приобретает вид креста из тонких сдвоенных линий. Добившись протяжки линии к входу следующего блока, надо отпустить левую клавишу мыши. Соединение будет завершено, и в конце его появится жирная стрелка.

Созданную линию можно выделить, признаком чего будут квадратные маркеры, расположенные в узловых точках соединительной линии. Для выделенной линии доступны те же операции, что и для блоков модели: удаление, перемещение, копирование в буфер хранения и т.д.

1.2.10 Изменение размеров блоков

Для изменения размеров блока он выделяется, после чего курсор мыши необходимо установить на один из маркеров по углам блока. Как только курсор мыши превратится в двунаправленную диагональную стрелку, можно будет при нажатой левой клавише мыши растягивать блок по диагонали, увеличивая или уменьшая его размеры. При этом изменяется только графическое изображение блока, а размеры его названия в виде текстовой надписи остаются прежними.

1.2.11 Перемещение блоков и вставка блоков в соединение

Блок, участвующий в соединении, можно перемещать в окне модели, выделив его и перетаскивая, как обычно, мышью. При этом соединение не разрывается, а просто сокращается или увеличивается в длине. В длинное соединение можно вставить новый блок, поместив его в нужное место линии. Такая вставка возможна лишь для блоков, имеющих один вход и один выход, которые включаются в соединение.

1.2.12 Использование команд Undo и Redo

В процессе освоения программы пользователь может совершать действия, кажущиеся на первый взгляд необратимыми (например, случайное удаление части модели, наложение блоков друг на друга при копировании и т.д.). В этом случае следует воспользоваться командой Undo из меню Edit –отмена последней операции. Для восстановления отменённой операции служит команда Redo.

1.2.13 Форматирование объектов

В меню *Format* (так же как и в контекстном меню, вызываемом нажатием правой клавиши мыши на объекте) находится ряд опций форматирования блоков. Рассмотрим некоторые из них:

- *Format/Font* – команда выводит окно с установками шрифта для текстовых надписей, позволяющее изменять вид шрифта надписи, размер шрифта, начертание и т.п. параметры надписи.
- *Flip name* – помещение подписи блока сверху или снизу блока;
- *Flip block* – зеркальное отображение блока относительно вертикальной оси симметрии;
- *Rotate block* – поворот блока на 90° - по часовой стрелке.

1.2.14 Установка параметров моделирования и его выполнение

Перед выполнением моделирования необходимо предварительно задать параметры. Задание параметров выполняется в панели управления меню *Simulation/Parameters*. Установка параметров моделирования выполняется с помощью элементов управления, размещённых на вкладке *Solver*.

1.2.15 Установка параметров моделирования

Simulation time: [интервал моделирования]. Величина интервала моделирования задаётся с помощью указания начального (*Start time*) и конечного (*Stop time*) значений времени. Начальное время, как правило, задаётся равным нулю. Величина конечного времени задаётся пользователем, исходя из условий решаемой задачи.

1.2.16 Выполнение моделирования

Запуск моделирования выполняется с помощью выбора пункта меню *Simulation/Start* или кнопки \triangleright на панели инструментов. Процесс моделирования можно завершить досрочно, выбрав пункт меню *Simulation/Stop*. Моделирование можно также остановить (*Simulation/Pause*) и затем продолжить (*Simulation/Continue*).

1.2.17 Завершение работы

Для завершения работы необходимо сохранить модель в файле, закрыть окно модели, окно обозревателя библиотеки блоков, а также командное окно системы Matlab.

1.2.18 Блоки системы Simulink

В системе *Simulink* принято группировать модели объектов и устройств по функциональному уровню: источники сигналов, моделируемые системы и регистрирующие устройства. Модели источников сигналов – блоки, которые сгруппированы в библиотеки блоков *Sources* (Источники сигналов).

Моделируемые системы даются блоками в библиотеке *Continuous* (Непрерывные системы). Блоки, являющиеся моделями устройств для измерения переменных, размещены в библиотеке блоков *Sinks* (Средства регистрации).

В настоящей работе используются лишь некоторые блоки, хотя описание дано для всех блоков, которые будут использованы в последующих лабораторных работах.

1.2.18.1 Блоки из библиотеки Sources

Блоки из библиотеки блоков *Sources* (Источники сигналов) не содержат входных портов и имеют один выходной порт. Описание блоков из данной библиотеки блоков можно получить из справочной системы. Типовые сигналы, которые используются при моделировании динамических систем:

- Блок *Constant* (Постоянная величина) реализует функцию, равную константе, т.е. выходная переменная имеет постоянное значение. Данный параметр задаётся в диалоговом окне *Block Parameters* и его значение отображается на изображении блока
- Блок *Step* (Ступенчатый сигнал) реализует ступенчатую функцию. Параметрами блока являются время, когда подаётся ступенчатый сигнал, величина амплитуды в начальный момент времени и амплитуда ступенчатого сигнала.
- Блок *Sine Wave* (Генератор синусоиды), в котором в качестве параметров задаётся амплитуда, фаза и частота гармонического сигнала.
- Блок *Signal Generator* (Генератор периодических сигналов) может иметь в качестве выходного сигнала: синусоидальный сигнал, прямоугольные импульсы или пилообразный сигнал. Для формирования сигналов сложной формы можно использовать линейные преобразование выходных переменных блоков из библиотеки *Sources*.
- Единичная импульсная функция. Данный сигнал часто используется как тестовый сигнал для исследования поведения динамических систем. Единичная импульсная функция называется также δ - функцией. Единичный импульс

$\delta(t - a)$ определяется как сигнал, имеющий нулевую длительность и обладающий свойствами:

$$\delta(t - a) = 0, t \neq a, \quad (1.11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.12)$$

Используя δ – функцию, можно представить только идеальный сигнал, который не может быть физически реализуем. Можно аппроксимировать воздействие в виде δ – функции двумя ступенчатыми сигналами, с использованием блоков *Step* (Ступенчатый сигнал) и блока *Sum* (Сумматор). В момент времени a подаётся импульсное воздействие с амплитудой M и короткой длительностью, равной d , так что величина $M \cdot d = 1$. Следует обратить внимание на задание величины d , которая может определяться наибольшей собственной частотой в спектре модели. Величина d должна быть достаточно малой для уменьшения погрешности представления импульсного сигнала нулевой длительности. Структурная схема, показанная на рисунке, обеспечивает формирование импульсного сигнала, подаваемого в момент времени 0,5 с, имеющего длительность 0,01 с и величину амплитуды, равную 100. Для блока с именем *Step Start pulse* в текстовых полях *Step time*, *Initial value* и *Final value* аналогового окна задаются численные значения 0,5, 0 и 100 соответственно. Параметры блока с именем *Step End pulse* задаются в текстовых полях *Step time*, *Initial value* и *Final value* диалогового окна и имеют значения 0,51, 0 и 100 соответственно. Конечное время моделирования равно 1 с. Выходная переменная формируется на выходе блока *Sum*. Блок *Integrator* выполняет интегрирование выходной переменной блока *Sum*. Результат отображается в блоке *Display* (рисунок 1.3).

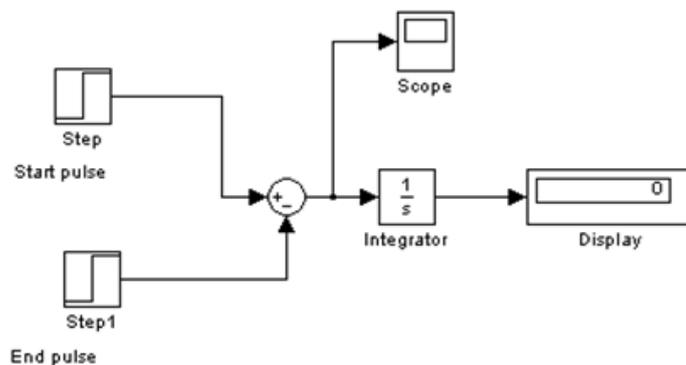


Рисунок 1.3 – Формирование единичного импульса

1.2.18.2 Блоки из библиотеки Sinks (Средства регистрации)

- Блок *Scope* (Осциллограф) предназначен для построения графиков исследуемых сигналов в функции времени. Позволяет наблюдать за изменением сигналов в процессе моделирования.

Для того чтобы открыть окно просмотра сигналов, необходимо выполнить двойной щелчок левой клавишей мыши на пиктограмме блока. Это можно сделать на любом этапе (как до начала моделирования, так и после него, а также во время моделирования). В верхней части диалогового окна *Scope* расположена панель инструментов, с помощью которой выполняется настройка окна осциллографа. Чтобы сделать осциллограф многоканальным (для просмотра процессов в нескольких точках схемы) необходимо щёлкнуть по второй кнопке слева на панели инструментов (*Parameters*) окна *Scope* и указать требуемое число осей. Описание пиктограмм панели инструментов можно найти в любой книге по системе *Simulink*.

Изменение масштабов отображаемых графиков можно выполнить несколькими способами:

1. Нажать соответствующую кнопку (*Zoom X-axis* или *ZoomY-axis*) и щёлкнуть один раз левой клавишей мыши в нужном месте графика. Произойдёт 2,5 – кратное увеличение масштаба
2. Нажать соответствующую кнопку (*Zoom X-axis* или *ZoomY-axis*) и, нажав левую клавишу мыши, с помощью динамической рамки или отрезка указать область графика для увеличенного изображения.
3. Щёлкнуть правой клавишей мыши в окне графиков и выбрать команду *Axes properties...* в контекстном меню. Откроется окно свойств графика, в котором с помощью параметров *Y-min* и *Y-max* можно указать предельные значения вертикальной оси.

Окно задания параметров блока *Scope* имеет две вкладки.

На вкладке *General* задаются следующие параметры:

Number of axes [число входов (систем координат) осциллографа]. При изменении этого параметра на изображении блока появляются дополнительные входные порты.

Time range [величина временного интервала, для которого отображаются графики]. Если время расчёта превышает заданное параметром *Time range*, то вывод графика производится порциями, при этом интервал отображения каждой порции графика равен заданному значению *Time range*.

Sampling [установка параметров вывода графиков в окне]. Задаёт режим вывода расчётных точек на экран. Значения параметра выбирается из списка:

- *Decimation* – прореживание. Параметр определяет кратность вывода расчётных точек в окне осциллографа. Например, при значении параметра, равном 2, на экран будет выводиться каждая вторая расчётная точка.

- *Sample time* – шаг по времени, или, по другому интервал дискретизации. Значение параметра определяет интервал квантования по времени при отображении сигнала.

- Блок *XY Graph* Данный блок позволяет строить график значений одного сигнала в функции другого. Блок имеет два входа. Верхний вход предназначен для подачи сигнала, который является аргументом (*X*), нижний – для подачи значений функции (*Y*). В диалоговом окне блока задаются предельные значения по осям координат и период квантования. Графопостроитель можно использовать для построения графиков в функции времени. Для этого на первый вход следует подать временной сигнал с выхода блока *Clock*.

1.2.18.3 Блоки из библиотеки *Continuous* (Непрерывные системы)

- Блок *Integrator* (Интегратор). Открытие диалогового окна блока *Integrator* осуществляется двойным нажатием мыши на изображении блока. Для задания начальных условий следует ввести значение в текстовое поле *Initial condition* (Начальные условия), которое по умолчанию задается равным 0.

- Блоки передаточных функций. В системе *Simulink* математические модели в виде передаточных функций представляются:

- как отношение двух полиномов (блок *Transfer Fcn*);

Диалоговое окно блока *Transfer Fcn* включает два текстовых поля: *Numerator* (Числитель) и *Denominator* (Знаменатель). В поле *Numerator* задаётся вектор – строка, включающая значения коэффициентов многочлена числителя передаточной функции в порядке убывания степеней многочлена. В поле *Denominator*

вводится вектор – строка, включающая значения коэффициентов многочлена знаменателя передаточной функции в порядке убывания степеней многочлена.

- как отношение разложений многочленов на множители (блок *Zero – Pole*).

В диалоговом окне *Zero – Pole* имеются три текстовых поля: *Zeros* (Нули), *Poles* (Полюсы), и *Gain* (Коэффициент усиления). В поле *Zeros* вводятся значения нулей передаточной функции (корней многочлена числителя). В поле *Poles* вводятся значение полюсов (корней многочлена знаменателя). Нули или полюса могут быть заданы комплексными числами. В этом случае нули и полюса должны быть заданы комплексно-сопряжёнными парами полюсов или нулей соответственно. В текстовом поле *Gain* задаётся значение коэффициента усиления передаточной функции.

Математические модели блоков *Transfer Fcn* и *Zero – Pole* эквивалентны, различным является вид их представления.

1.3 Способы выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа может быть выполнена в среде Simulink или с помощью специально разработанной программы. Предлагается самостоятельно выбрать среду выполнения лабораторной работы.

При выполнении лабораторной работы:

- в среде Simulink необходимо в папке с лабораторной работой выбрать соответствующий файл формата *.mdl.

- с помощью специально разработанной программы необходимо в папке с лабораторной работой выбрать файл «[Лабораторная работа №1.exe](#)».

1.4 Исследование моментных функций случайного процесса в Simulink

1.4.1 Описание математического аппарата модели в Simulink

Для создания генератора случайного процесса с заданной корреляционной функцией или, что тоже самое, с заданной спектральной плотностью в среде Simulink можно использовать генератор белого шума и формирующий фильтр.

Формирующим называется фильтр, при подаче на вход которого белого шума, на выходе получается шум с требуемой спектральной плотностью. Известно, что спектральные плотности процессов на выходе и входе фильтра связаны соотношением:

$$S(\omega) = S_0 |K(j\omega)|^2 = S_0 K(j\omega) K(-j\omega), \quad (10)$$

где

S_0 - спектральная плотность входного белого шума,

$S(\omega)$ - спектральная плотность процесса на выходе фильтра (требуемая спектральная плотность),

$K(j\omega)$ - комплексный коэффициент передачи формирующего фильтра, который из белого шума формирует шум с требуемой спектральной плотностью.

Для получения комплексного коэффициента передачи формирующего фильтра необходимо факторизовать требуемую спектральную плотность, т.е. представить её в виде произведения двух сопряжённых множителей. Множитель, у которого нули и полюса лежат в верхней полуплоскости комплексных величин (т.е. имеют положительную мнимую часть), будет представлять искомый коэффициент передачи.

Белого шума в природе не существует. Однако нас устроит белый шум с ограниченным по полосе спектром. Это значит, что спектральная плотность такого шума постоянна в пределах ограниченной полосы частот и равна нулю вне её.

В системе Simulink есть блок Sources/Band-Limited White Noise, который создаёт шум заданной мощности, равномерно распределённой в пределах заданной полосы частот. В окне задания параметров устанавливаются параметры блока: Noise Power (мощность шума) и Sample Time - такт дискретности, равный интервалу между соседними выборочными значениями.

Чтобы выборочные значения представляли систему независимых случайных величин, необходимо, чтобы Sample Time t_c и граничная частота спектра f_{max} (в герцах) были связаны соотношением:

$$t_c = \frac{1}{2f_{\max}}, \quad (11)$$

Граничная частота спектра f_{\max} белого шума, ограниченного по полосе, определяется частотой дискретизации t_c .

Спектральная плотность белого шума, ограниченного по полосе равна отношению мощности шума P_n к ширине спектра, равной $2f_{\max}$.

Если требуемая полоса пропускания формирующего фильтра равна f_{\max} , то необходимо установить Sample Time t_c в несколько раз меньше, чем $2\pi/f_{\max}$, напри-

мер $t_c \cong \frac{2\pi}{100f_{\max}}$.

Seed : (начальное значение генератора случайных чисел по умолчанию равно 23341).

Если необходимо посмотреть несколько реализаций случайного процесса, то для каждой реализации нужно устанавливать своё значение *Seed*.

Модель формирующего фильтра можно создать с помощью блоков системы Simulink *Continuous/Transfer Fcn* или *Continuous/Zero-Pole* в зависимости от того, в какой форме задана его передаточная функция. Если передаточная функция задана в виде отношения полиномов, то надо выбрать *Transfer Fcn*.

Numerator [вектор коэффициентов полинома числителя, расположенных по убыванию степени переменной s].

Denominator [вектор коэффициентов полинома знаменателя].

Если передаточная функция выражена через нули и полюса, т.е. задана в виде

$$H(s) = k \frac{(s - Z(1))(s - Z(2))(s - Z(3)) \dots (s - Z(m))}{(s - P(1))(s - P(2))(s - P(3)) \dots (s - P(n))}, \quad (11)$$

где

Z - вектор нулей передаточной функции (корней полинома числителя);

P - вектор полюсов передаточной функции (корней полинома знаменателя), то необходимо использовать блок *Zero-Pole*.

В окне задания параметров надо указать параметры блока: *Zero* [вектор нулей], *Poles* [вектор полюсов], *Gain* [коэффициент усиления передаточной функции]. Нули или полюса могут быть заданы комплексными числами. В этом случае нули и полюса должны быть заданы комплексно-сопряжёнными парами полюсов или нулей соответственно.

Последовательное соединение генератора белого шума, ограниченного по полосе, и формирующего фильтра образует генератор шума с желаемой спектральной плотностью.

Измерение среднего значения случайного процесса производится с помощью блока **mean**, который будет открыт путём последовательности вызовов пунктов меню **Signal Processing Blockset/Statistics/mean**. Аналогично для измерения дисперсии случайного процесса надо взять блок **variance (Signal Processing Blockset/Statistics/variance)**. В обоих случаях устанавливается параметр **Running**. В этом случае блок выдаёт текущее значение среднего значения или дисперсии случайного процесса во времени.

1.4.2 Задание на лабораторную работу

1. Создать модель генератора случайного процесса, спектральная плотность которого задаётся выражением (одно выражение на подгруппу):

$$S_{x1}(\omega) = \frac{\omega^2 + 10}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}, \quad S_{x2}(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 64}, \quad S_{x3}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 10\omega^2 + 6},$$

$$S_{x4}(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 8\omega^2 + 7}.$$

Для этого запустить систему *Simulink*, как указано в п. 3.2 и создать новый файл модели с помощью команды *File/new/model*. В открывшееся окно перетащить из библиотеки **Sources** блок **Sources/Band-Limited White Noise**. К выходу этого блока включить формирующий фильтр, передаточная функция (если используется комплексная частота s) или комплексная частотная характеристика (если используется вещественная частота ω) получаются путём факторизации заданной спектральной плотности $S_x(\omega)$.

В нашем случае передаточная функция будет представлять отношение двух полиномов относительно переменной s ($s = j\omega$). Чтобы создать модель формирующего фильтра, необходимо из библиотеки **Continuous** перетащить блок **Transfer Fcn** и в окне задания параметров блока указать:

Numerator [вектор коэффициентов полинома числителя, расположенных по убыванию степени переменной s],

Denominator [вектор коэффициентов полинома знаменателя, расположенных в порядке убывания степени переменной s].

Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя получаются после факторизации спектральной плотности мощности случайного процесса, т.е. представления спектральной плотности мощности в виде произведения двух комплексно-сопряжённых сомножителей:

$$S_x(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + \dots + a_\nu\omega^{2\nu}}{b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_\mu\omega^{2\mu}} = \frac{a_\nu(\omega - \lambda_1)(\omega - \lambda_2)(\omega - \lambda_3)\dots(\omega - \lambda_{2\nu})}{b_\mu(\omega - \gamma_1)(\omega - \gamma_2)(\omega - \gamma_3)\dots(\omega - \gamma_{2\mu})} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_\nu}(\omega - \lambda_1)\dots(\omega - \lambda_\nu)}{\sqrt{b_\mu}(\omega - \gamma_1)\dots(\omega - \gamma_\mu)} * \frac{\sqrt{a_\nu}(\omega - \lambda_1^*)\dots(\omega - \lambda_\nu^*)}{\sqrt{b_\mu}(\omega - \gamma_1^*)\dots(\omega - \gamma_\mu^*)}, \quad \nu < \mu \quad (12)$$

Чтобы факторизовать спектральную плотность мощности находятся корни числителя и знаменателя (нули и полюса). К одному сомножителю относят нули и полюса с положительной мнимой частью, к другому – нули и полюса с отрицательной мнимой частью. Вещественные нули и полюса делят пополам между этими множителями.

Пример:

$$S(\omega) = \frac{25(\omega^2 + 16)}{\omega^4 + 34\omega^2 + 225}. \text{ Делаем замену: } \omega \rightarrow js. \text{ Тогда: } S(s) = \frac{25(-s^2 + 16)}{s^4 - 34s^2 + 225}.$$

Корни числителя: $s_{1,2} = \pm 4$. Корни знаменателя: $s_{1,2} = \pm 3$, $s_{3,4} = \pm 5$. Значит:

$25(-s^2 + 16) = 5(s + 4)5(-s + 4)$ и $s^4 - 34s^2 + 225 = (s + 3)(s + 5)(-s + 3)(-s + 5)$. Поэтому:

$$S(s) = \frac{25(-s^2 + 16)}{s^4 - 34s^2 + 225} = \frac{5(s + 4)}{(s + 3)(s + 5)} \cdot \frac{5(-s + 4)}{(-s + 3)(-s + 5)}. \text{ Или:}$$

$$S(s) = \frac{25(-s^2 + 16)}{s^4 - 34s^2 + 225} = \frac{5(s + 4)}{s^2 + 8s + 15} \cdot \frac{5(-s + 4)}{s^2 - 8s + 15}.$$

$$K(s) = \frac{5(s + 4)}{s^2 + 8s + 15} = \frac{5s + 20}{s^2 + 8s + 15}$$

Коэффициенты числителя: 5, 20.

Коэффициенты знаменателя: 1, 8, 15.

К выходу созданной модели подключить блоки для измерения среднего значения и дисперсии случайного процесса. Следует отметить, что указанные блоки работают только с дискретными входными сигналами. Поэтому, если на входе этих блоков действует дискретная последовательность отсчётов процесса, то необходимо на входе установить блок **Discrete/Zero-Order Hold** [13]. Этот блок является интерполятором нулевого порядка, который обеспечивает преобразование отсчётов дискретной последовательности в дискретный процесс. Для преобразования дискретной последовательности в дискретный процесс в блоке фиксируется значение дискретной последовательности в начале интервала квантования и поддерживает на выходе это значение до окончания интервала квантования. Затем выходной сигнал изменяется скачком до величины дискретной последовательности на следующем шаге квантования (рисунок 1.4).

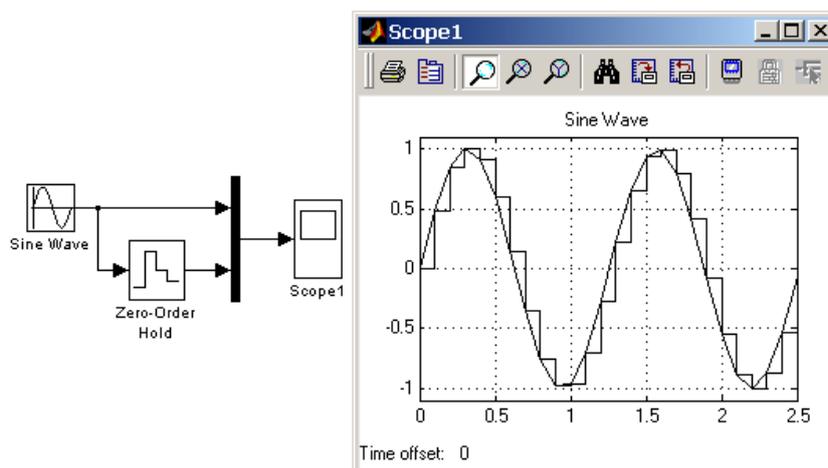


Рисунок 1.4 – Результат применения блока **Discrete/Zero-Order Hold** [13]

Интервал времени между выборочными значениями определяется с помощью параметра **Sample Time**. Установка -1 означает, что **Sample Time** унаследовано от предыдущего блока.

2. В окне задания параметров блоков **mean** и **variance** установить параметр **running**. Блоки **mean** и **variance** берутся из библиотеки **SignalProcessingBlockset/Statistics/mean** или **variance**. Для изучения поведения переходных процессов для среднего значения и дисперсии случайного процесса во времени необходимо подключить осциллографы (scope) из библиотеки **sinks/scope** к выходу блоков **mean** и **variance**. Для определения среднего значения и дисперсии случайного процесса в конце установленного интервала наблюдения в цифровой форме необходимо к выходу блоков **mean** и **variance** подключить дисплей **sinks/display**.

Перед выполнением моделирования необходимо предварительно задать параметры. Задание параметров выполняется в панели управления меню **Simulation/Parameters**. Установка параметров моделирования модели выполняется с помощью элементов управления, размещенных на вкладке **Solver**.

Прежде всего устанавливается **Simulation time** (интервал моделирования). Величина интервала моделирования задаётся с помощью указания начального (**Start time**) и конечного (**Stop time**) значений времени. Начальное время, как правило, задается равным нулю. Запуск моделирования выполняется с помощью выбора пункта меню **Simulation/Start** или кнопки \triangleright на панели инструментов. Процесс моделирования можно завершить досрочно, выбрав пункт меню **Simulation/Stop**.

3. Снять переходные процессы во времени для среднего значения и дисперсии и определить их численные значения в конце интервала наблюдения для нескольких реализаций случайного процесса. Для просмотра нескольких реализаций

случайного процесса необходимо для каждой реализации устанавливать своё значение **Seed** в блоке **Sources/Band-Limited White Noise**.

4. Изменить в два раза интервал моделирования (**Simulation time**) в сторону больших и меньших значений и посмотреть, как изменятся численные величины оценок среднего значения и дисперсии случайного процесса. Дать объяснение полученным результатам.

5. Изменить ширину спектра моделируемого случайного процесса на уровне половинной мощности в сторону больших и меньших значений и повторить п.3. Дать объяснение полученным результатам.

1.5 Исследование моментных функций случайного процесса на основе разработанной программы

1.5.1 Описание программы моделирования

Главное окно программы изображено на рисунке 1.5. Окно программы можно условно разделить на две части: верхнюю и нижнюю часть.

Верхняя часть окна программы предназначена для установки:

А. Среднего значения m_x и среднеквадратичного значения σ_x стационарного Гауссовского случайного процесса (СП) $X(t)$:

$$W[x;t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m_x(t)}{\sigma_x(t)} \right)^2} \quad (1.13)$$

В. Времени наблюдения (секунды) и частоты случайного процесса (Гц).

С. Полосы пропускания (Гц) и ослабления в полосе подавления (дБ) фильтра низких частот (ФНЧ).

В верхней правой части окна показана амплитудно-частотная характеристика ФНЧ.

В нижней части окна отображаются:

- реализация СП на входе фильтра;
- реализация СП на выходе фильтра;
- математическое ожидание СП на входе фильтра;
- математическое ожидание СП на выходе фильтра;
- дисперсия СП на входе фильтра;
- дисперсия СП на выходе фильтра.

В нижней правой части окна показаны автокорреляционные функции СП на входе фильтра (верхний рисунок) и на выходе фильтра (нижний рисунок).

Эти результаты изображаются в графических окнах. Для копирования графиков в буфер обмена следует нажать кнопку «Сору» рядом с графическим окном.

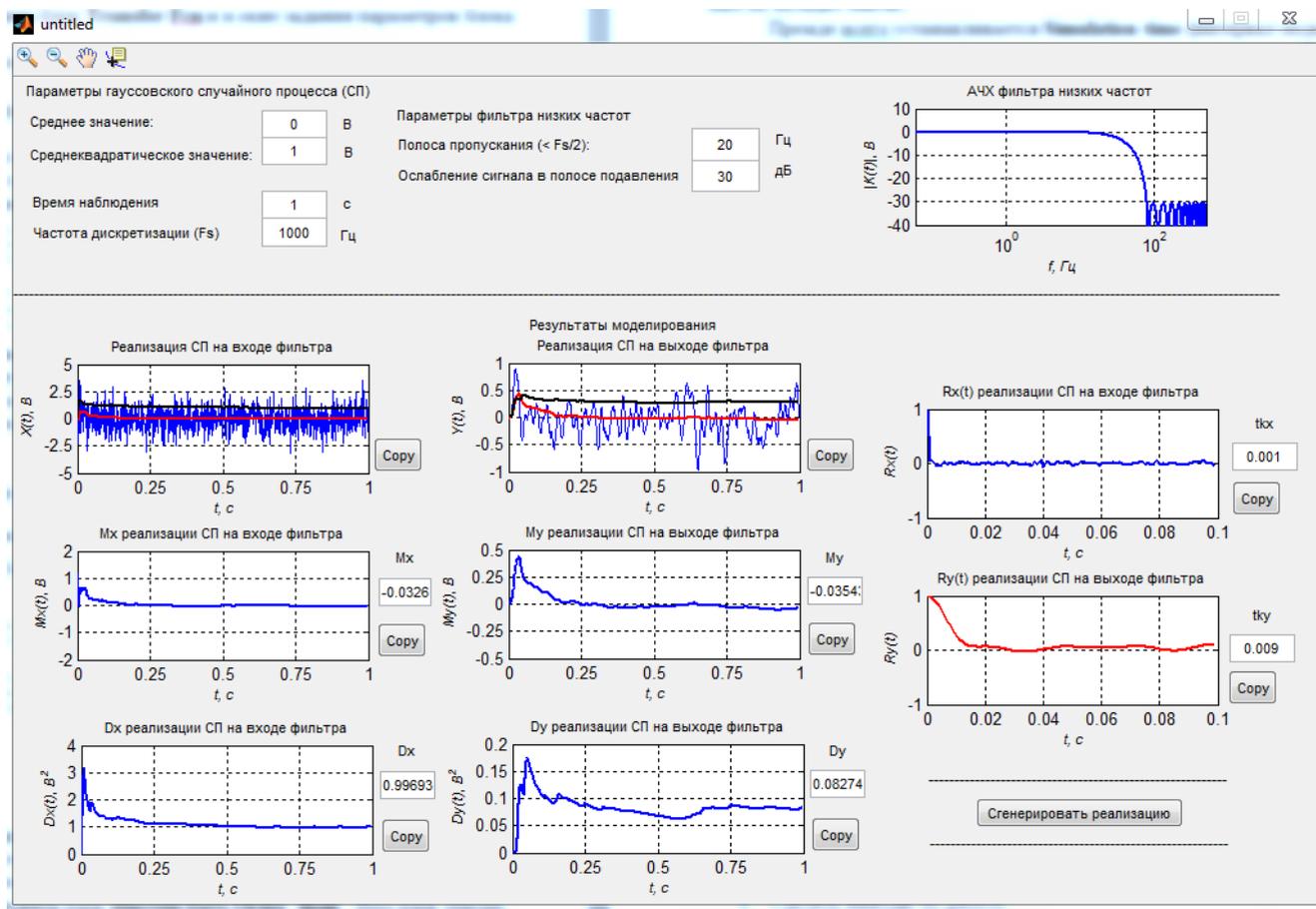


Рисунок 1.5 – Главное окно программы

При нажатии кнопки «Сгенерировать реализацию» формируется случайный процесс на входе фильтра, производится его фильтрация в соответствии с АЧХ ФНЧ, а затем определяются по формулам (10) - (12) моментные функции случайных процессов.

1.5.2 Задание на лабораторную работу

1. Установить m_x равным 0.
2. Задать σ_x , взяв произвольное значение из интервала от 1 до 5. Зафиксировать это значение в тетради.
3. Установить время наблюдения равным 1 с и частоту дискретизации 1000 Гц. Зафиксировать эти значения в тетради.
4. Установить полосу пропускания ФНЧ $\Delta f = 20$ Гц. Зафиксировать это значение в тетради.
5. Нажать кнопку «Сгенерировать реализацию».
6. Снять реализации случайного процесса на входе и выходе фильтра, а также соответствующие им моментные функции: математическое ожидание, дисперсию и корреляционная функция.
7. Определить и зафиксировать в тетради значения математического ожидания, дисперсии и интервала корреляции случайных процессов на входе и выходе фильтров.
8. Увеличить в 5 раз время наблюдения и выполнить пп.5 - 7. Дать объяснение полученным результатам.
9. Установить время наблюдения как в п.3.
10. Уменьшить в 5 раз время наблюдения и выполнить пп.5 - 7. Дать объяснение полученным результатам.
11. Установить время наблюдения как в п.3.
12. Увеличить σ_x и выполнить пп. 5 - 7.
13. Установить значение σ_x , которое было задано в п.2.
14. Уменьшить σ_x и выполнить пп. 5 - 7.
15. Установить значение σ_x , которое было задано в п.2.
16. Увеличить полосу пропускания ФНЧ Δf_1 и повторить пп.5 - 7.
17. Установить значение полосы пропускания ФНЧ Δf , которое было задано в п.4.

18. Уменьшить полосу пропускания ФНЧ Δf_2 и повторить пп.5 - 7.
19. Проанализировать и дать объяснение полученным результатам.
20. Составить, распечатать и подписать отчёт. Страницы отчёта скрепить скрепками или скобами с помощью степлера.

1.5.3 Содержание отчета

1. Отчёт оформляется в соответствии с текущим образовательным стандартом ТУСУР [3] и содержит следующие элементы:

- 1) Титульный лист, оформленный в соответствии с приложением А;
- 2) Цель работы;
- 3) Краткое изложение задания своими словами сведений из параграфа 1.2.

Введение должно содержать: определение понятий «математическое ожидание», «дисперсия» и «корреляционная функция» случайного процесса с необходимыми пояснениями в виде формул, рисунков.

4) Основная часть (результаты выполнения пунктов заданий, иллюстрации с пояснениями). В основной части достаточно привести только те графики или таблицы из пунктов заданий, по которым будут сделаны выводы.

5) Выводы. В этом разделе кратко излагаются основные результаты лабораторной работы: каждый исполнитель лабораторной работы должен изложить свой результат и дать этому результату ясное объяснение. При написании выводов рекомендуется ссылаться на результаты работы, рисунки, таблицы и т. д. Основой для вывода может являться ответ на вопрос из списка вопросов к защите лабораторной работы. При выполнении лабораторной работы в группе каждый участник группы должен написать хотя бы один вывод. При этом выводы следует пронумеровать и указать авторов выводов.

Вывод должен содержать:

- I: наблюдаемый факт по результатам выполнения работы;
- II: ссылки на номера рисунков и таблиц, подтверждающих наблюдаемый факт;

– III: объяснение наблюдаемого факта.

Для примера, ниже показан образец вывода для данной лабораторной работы:

«Математическое ожидание реализации случайного процесса непредсказуемо меняет свой вид при смене реализации.»

Это подтверждают рис. 1-4, где приведены реализации случайных процессов и соответствующие им временные зависимости математического ожидания.

Непредсказуемость математического ожидания можно объяснить следующим образом. Математическое ожидание на момент времени t в данном случае вычисляется как среднее арифметическое значений X_i реализации случайного процесса, которые предшествовали моменту времени t ($i = 1...n$, где n – общее количество значений X_i на момент времени t). Поскольку реализации случайным образом меняются, то случайно меняются значения X_i , а значит и среднее арифметическое этих значений, равное математическому ожиданию.»

Этот пример нельзя использовать в отчёте для выводов.

2. Требования к оформлению графиков в отчёте:

- 1) Все графики должны быть чёткими и наглядными;
- 2) Каждый график должен иметь подпись, поясняющий график;
- 3) Оси на графиках должны быть подписаны, на осях указаны единицы измерения;
- 4) На графиках должна быть изображена сетка.

1.6 Вопросы к допуску к лабораторной работе

1. Что такое математическое ожидание случайного процесса и что оно показывает ?
2. Что такое дисперсия случайного процесса и что она показывает ?
3. Что такое корреляционная функция случайного процесса и что она показывает ?
4. Что показывает интервал корреляции случайного процесса ?
5. С помощью каких формул определяются моментные функции эргодического случайного процесса ?

1.7 Вопросы к защите лабораторной работы

1. Объяснить и пояснить, что происходит моментными функциями (математическим ожиданием, дисперсией, интервалом корреляции и корреляционной функцией) случайного процесса **до и после фильтра низких частот** при:
 - 1.1. Переходе (смене) от одной реализации к другой реализации ?
 - 1.2. Изменении времени наблюдения случайного процесса ?
 - 1.3. Изменении полосы пропускания ФНЧ ?
2. Как изменяются во времени моментные функции (математическое ожидание, дисперсия, интервал корреляции и корреляционная функция) случайного процесса до и после прохождения ФНЧ ? Объяснить, почему происходят эти изменения?
3. Прочие вопросы.

2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2: ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1 Введение

Цель работы: исследовать оценку плотности распределения вероятности $W(x)$ и оценку функции распределения $F(x)$ случайного процесса в зависимости от изменения:

- ширины интервала анализа dx гистограммы;
- мощности узкополосного случайного процесса;
- полосы пропускания формирующего фильтра.

В задачах синтеза или анализ радиотехнических систем необходимо оценивать плотность вероятности или функцию распределения случайного процесса на основе одной реализации. Например, такая задача возникает на этапе разработки обнаружителя сигнала в радиолокаторе или демодулятора системы радиосвязи. В частности, при обнаружении сигнала необходимо знать закон распределения случайного процесса. Это позволяет получить формулу для расчёта порога обнаружения по заданным требованиям.

2.2 Сведения из теории

Пусть $x(t)$ - стационарный случайный процесс. Вероятностное описание этого процесса обычно выполняется по следующей схеме. Фиксируется некоторый момент времени t ; значение процесса в этот момент времени представляет собой случайную величину X . Эта случайная величина может быть исчерпывающим образом описана функцией распределения $F(x)$. Функция распределения $F(x)$, по определению, есть вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие некоторого фиксированного значения x :

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.1)$$

Таким образом, функция распределения есть зависимость вероятности неравенства $X < x$ от текущего значения аргумента x . Для непрерывных случайных процессов более удобной характеристикой является плотность вероятностей $W(x)$, которая является производной от функции распределения:

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.2)$$

Во многих практических задачах достаточно знать лишь одномерные функцию распределения и плотность вероятностей. Это справедливо для гауссовских стационарных случайных процессов.

Экспериментальное определение законов распределения наиболее просто для случайных процессов, обладающих эргодическим свойством.

Эргодическое свойство случайного процесса позволяет определить закон распределения не по множеству реализаций, зафиксированных в некоторый момент времени, а по одной реализации $x(t)$ на большом интервале времени $0 - T$. При времени наблюдения \square , во много раз превышающем интервал корреляции, случайные отклонения статистических характеристик случайного процесса от теоретических становятся несущественными.

Наиболее распространенным методом экспериментального определения одномерного закона распределения случайного процесса является:

– при измерении *функции распределения*: метод измерения относительного времени пребывания процесса $x(t)$ выше уровня $x_{\text{порог}}$;

– при измерении *плотности вероятностей*: метод измерения относительного времени пребывания процесса $x(t)$ между уровнями $x_{\text{порог}}$ и $x_{\text{порог}} + dx$.

Для стационарного случайного процесса, обладающего эргодическим свойством, относительное время пребывания реализации случайного процесса $x(t)$ может быть оценено *по одной реализации*.

Оценкой функции распределения $F(x) = P(X < x)$ случайного процесса $x(t)$ по одной реализации является оценка $P^*(x(t) < x_{\text{порог}})$ вероятности НЕ превышения

этой реализацией уровня $x_{\text{порог}}$: $F^*(x_{\text{порог}}) = P^*(x(t) < x_{\text{порог}})$. Оценка вероятности здесь обозначена звёздочкой «*».

Однако технически проще оценивать, наоборот, превышения порога, т.е. вероятность $P^*(x(t) > x_{\text{порог}})$. Тогда оценка функции распределения случайного процесса $x(t)$ по одной реализации может быть получена экспериментально следующим образом:

$$F^*(x_{\text{порог}}) = 1 - P^*(x(t) > x_{\text{порог}}) \quad (2.3)$$

Найденная таким образом оценка $F^*(x_{\text{порог}})$ при достаточном времени наблюдения позволяет оценить теоретическую функцию распределения $F(x)$.

Эпюры, поясняющие оценку $F^*(x_{\text{порог}})$ через относительное время пребывания случайного процесса, показаны на рисунке 2.1. Номера эпюр выделены кружком. На эпюре 1 изображена реализация случайного процесса и два уровня ограничения $x_{\text{порог}}$ и $x_{\text{порог}} + dx$. На эпюре 2 показана часть реализации случайного процесса, превысивший уровень $x_{\text{порог}}$. Далее примем, что $x = x_{\text{порог}}$. Чтобы не затемнять рисунок, часть реализации случайного процесса, превысившая уровень $x+dx$, не показана. На эпюре 3 изображены прямоугольные импульсы, которые относятся к реализации случайного процесса между уровнями x и $x+dx$. На эпюрах 4 и 5 показаны импульсы, длительность которых соответствует времени пребывания реализации выше уровня x и между уровнями x и $x+dx$, **заполненные счетными импульсами**.

Интервалы времени t_i , в течение которых реализация случайного процесса находится выше установленного порога, будучи просуммированными, дают оценку для вероятности $P^*(x(t) > x)$, т.е.

$$P^*(x(t) > x) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{T}. \quad (2.4)$$

Здесь $\frac{t_i}{T}$ – относительное время (доля времени) пребывания случайного процесса выше порогового уровня x , а переменная « n » представляет собой количество интервалов времени t_i за длительность реализации T .

В соответствии с формулами (2.3), (2.4) выражение для оценки функции распределения $F^*(x)$ принимает вид

$$F^*(x) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{T}. \quad (2.5)$$

Изменяя пороговый уровень x так, чтобы перекрыть диапазон возможных значений исследуемого процесса и, всякий раз определяя долю времени, когда случайный процесс превышает установленный уровень, мы по формуле (2.5) определим экспериментальную функцию распределения $F^*(x)$.

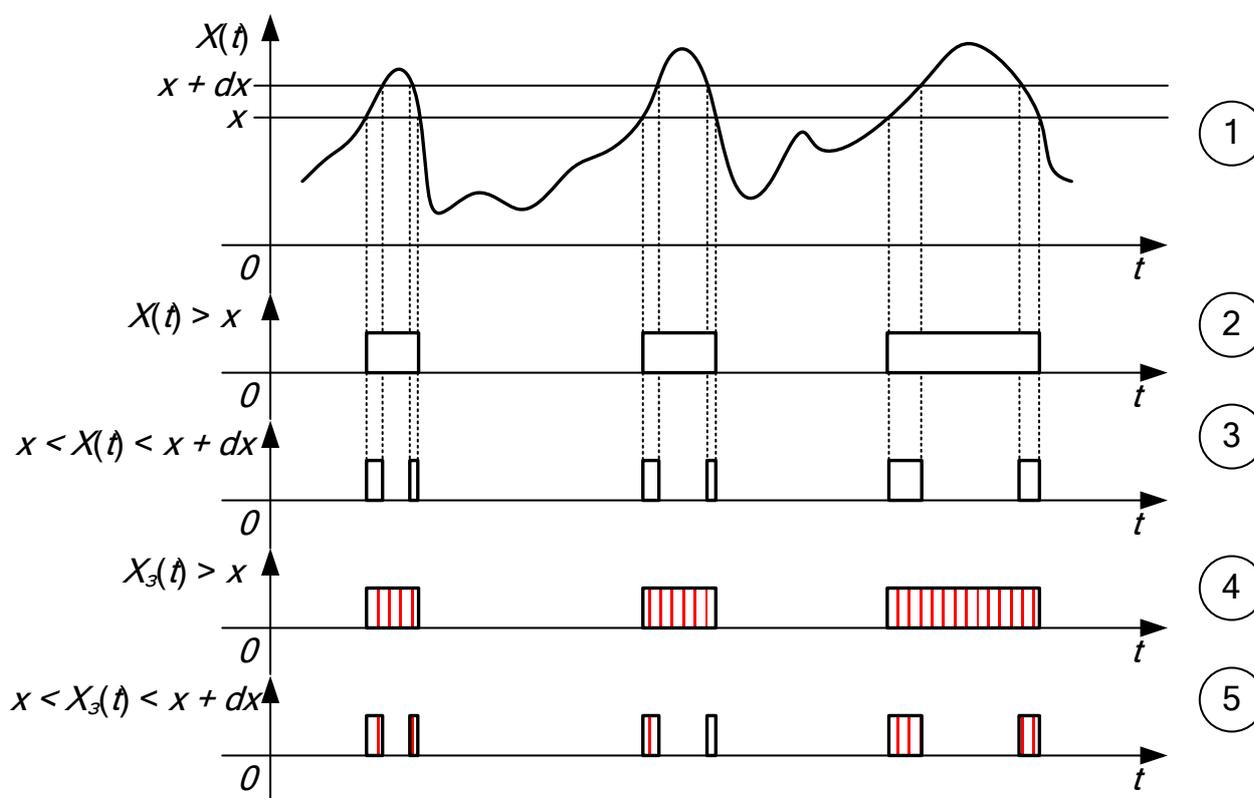


Рисунок 2.1 – Эпюры напряжений, показывающие принцип измерения функции распределения и плотности вероятностей случайного процесса

Аналогичный принцип используется для экспериментального определения плотности вероятностей $W^*(x)$ стационарного случайного процесса. Действительно, измеряя относительное время пребывания случайного процесса между двумя уровнями, мы получим оценку для вероятности $P^*(x < X(t) < x + dx)$ того, что значение процесса $x(t)$ в фиксированный момент времени лежит в интервале от x

до $x + dx$, где dx – интервал анализа. Экспериментально найденная оценка вероятности $P^*(x < X(t) < x + dx)$ позволяет оценить плотность вероятностей $W^*(x)$ с помощью соотношения

$$W^*(x) \approx \frac{P^*(x < X(t) < x + dx)}{dx}. \quad (2.6)$$

Процесс измерения $W^*(x)$ по относительному времени t'_i иллюстрируется на рисунке 2.1. Определяя отношение времени, в течение которого реализация случайного процесса находится между уровнями x и $x+dx$, к общему времени наблюдения T , мы получим оценку для вероятности, стоящей в числителе выражения (2.6). Деление оценки вероятности $P^*(x < X(t) < x + dx)$ на величину интервала между уровнями dx дает выражение для экспериментальной оценки плотности вероятностей (гистограммы)

$$W^*(x) = \sum_{i=1}^{n'} \frac{t'_i}{dx \cdot T} \quad (2.7)$$

Здесь $\frac{t'_i}{T}$ – относительное время (доля времени) пребывания случайного процесса в интервале от x до $x + dx$, а переменная « n' » представляет собой количество интервалов времени t'_i за длительность реализации T . Относительно время дополнительно нормируется (делится) на dx , чтобы площадь под плотностью вероятности была равна единице (свойство плотности вероятности).

Для того чтобы получить значения экспериментальной плотности вероятностей $W^*(x)$ для всех значений аргумента x , необходимо, оставляя постоянной величину интервала dx , изменять уровень анализа x , чтобы перекрыть весь диапазон возможных значений случайного процесса $x(t)$.

2.3 Способы выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа может быть выполнена в среде Simulink или с помощью специально разработанной программы. Предлагается самостоятельно выбрать среду выполнения лабораторной работы.

При выполнении лабораторной работы:

- в среде Simulink необходимо в папке с лабораторной работой выбрать соответствующий файл формата *.mdl.

- с помощью специально разработанной программы необходимо в папке с лабораторной работой выбрать файл «[Лабораторная работа №2.exe](#)».

2.4 Оценка функции распределения и плотности вероятности случайного процесса в Simulink

2.4.1 Построение модели для оценки функции распределения $F^*(x)$ случайного процесса

Рассмотрим вначале модель устройства для измерения функции распределения. Первой операцией, которую надо выполнить над наблюдаемой реализацией случайного процесса, является определение той ее части, которая превышает установленный уровень x . Это можно сделать с помощью блока *Saturation* (ограничитель) из библиотеки *Discontinuities* (нелинейные блоки). Итак, после открытия окна модели, необходимо перетащить в него блок *Saturation* и в окне задания параметров установить *Upper limit* (верхний порог ограничения, который не может превысить с большой вероятностью любая реализация случайного процесса). Для этого с помощью блока *variance* (*Signal Processing Blocset/Statistics/ variance*) измерить дисперсию на выходе генератора случайного процесса, определить среднее квадратическое значение σ и установить верхний предел из условия, что он должен быть больше 3σ . *Lower limit* (нижний предел) должен быть равен установленному уровню x (аргументу, для которого находится функция распределения). Сигнал на

выходе ограничителя будет содержать постоянную составляющую, равную нижнему пределу ограничения. Для устранения этой составляющей необходимо использовать два блока: сумматор (*Sum*) из библиотеки *Math Operations* (блоки математических операций) и источник постоянного сигнала (*Constant*) из библиотеки *Sources* (источники сигналов). В блоке *Constant* установить постоянный по уровню сигнал, равный нижнему пределу ограничения. На выходе сумматора будет сигнал, минимальное значение которого равно нулю.

Для того чтобы сформировать прямоугольные импульсы, длительность которых равна времени пребывания процесса выше уровня x , необходимо сигнал с выхода ограничителя усилить и ограничить с помощью блоков *Gain* (усилитель) из библиотеки *Math Operations* и блока *Saturation* из библиотеки *Discontinuities*. Коэффициент усиления в блоке *Gain* установить, возможно, большим, а в блоке *Saturation* установить нижний предел, равным нулю, а верхний предел, равный единице. Таким образом, сигнал на выходе второго ограничителя будет представлять последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой, равной единице, и длительностью, равной интервалу времени, в течении которого наблюдаемая реализация случайного процесса находится выше установленного уровня.

Чтобы измерить суммарное время пребывания реализации выше установленного уровня, поступим следующим образом: заполним сформированные прямоугольные импульсы счетными импульсами с известным периодом следования и считаем их за время наблюдения $0 - T$. Это достигается путем использования блока *Product* (умножение) из библиотеки *Math Operations*, на один из входов которого подаются импульсы с выхода второго ограничителя, а на второй вход - счетные импульсы. Счетные импульсы генерируются в блоке *Sources/Pulse Generator*; в окне задания параметров которого указать амплитуду равную единице, период (возможно меньшее значение) и длительность импульсов, составляющую 50 % от периода. Чем меньше установлен период счетных импульсов, тем точнее будет измерена длительность импульсов с выхода второго ограничителя. На выход блока *Product* будут проходить те счетные импульсы, которые по времени совпадают с импульсами на втором входе блока. Счетчик импульсов можно организовать на

базе сумматора, в цепи обратной связи которого установлен блок *Transport Delay* (Блок фиксированной задержки) из библиотеки *Continuous* и *Display* (цифровой дисплей) из библиотеки *Sinks*. В блоке *Transport Delay* установить время задержки (*Time delay*), равное периоду следования счетных импульсов.

Вышеперечисленные операции над наблюдаемой реализацией будут выполняться в модели, структурная схема которой показана на рисунке 2.2.

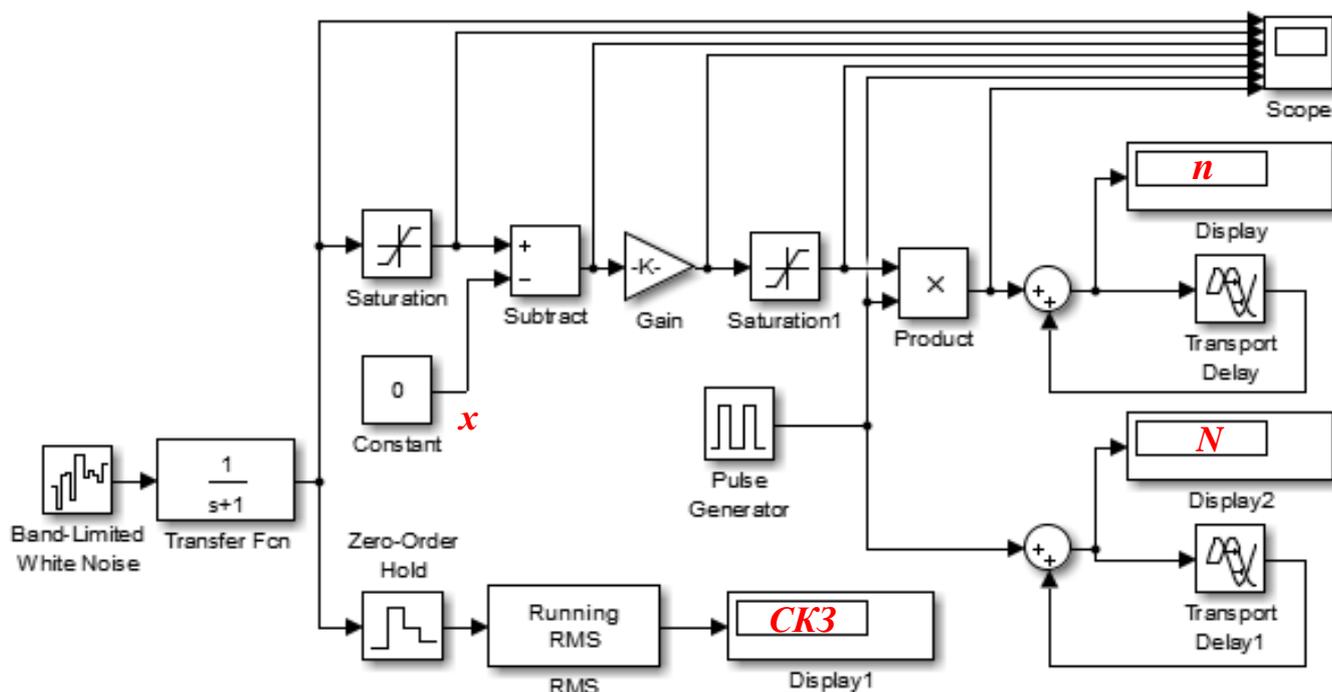


Рисунок 2.2 – Структурная схема модели устройства для измерения функции распределения случайного процесса

Модель устройства сохранить в файле. Число импульсов n , которое показывает *Display*, пропорционально суммарной длительности импульсов на выходе второго ограничителя (Суммарной длительности пребывания случайного процесса выше установленного уровня x). Число счетных импульсов N за время наблюдения T равно частному от деления T на период следования счетных импульсов. Согласно формуле (3) эмпирическая функция распределения будет равна

$$F^*(x) = 1 - \frac{n}{N}. \quad (2.8)$$

2.4.2 Оценка функции распределения $F^*(x)$ случайного процесса

Для измерения функции распределения случайного процесса $x(t)$ необходимо открыть окно, в котором расположен генератор случайного процесса и устройство для измерения функции распределения и, в панели управления меню *Simulation/Parameters* на вкладке *Solver* установить интервал моделирования (время наблюдения реализации случайного процесса). Измерение функции распределения реализации случайного процесса для некоторого значения x выполняется в следующем порядке:

1. Определить максимальное x_{max} и минимальное x_{min} значение реализации случайного процесса на выходе формирующего фильтра (см. рисунок 2.2) с помощью осциллографа *Scope*. Осциллограф *Scope* отображает реализацию случайного процесса в первом сверху окне. Выбрать из двух значений $|x_{max}|$ и $|x_{min}|$ наибольшее и приравнять к величине $X_{maximum}$, т.е. $X_{maximum} = \max(|x_{max}|, |x_{min}|)$.
2. Значение верхнего предела «**Upper limit**» блока **Saturation** установить равным $X_{maximum}$.
3. Установить значение аргумента (уровня анализа) функции распределения x , для чего в блоке **Saturation** установить «**Lower limit**» (нижний уровень ограничения) равный значению x . Это же значение установить для параметра «**Constant value**» блока **Constant** (Верхний предел «**Upper limit**» блока **Saturation** не изменять!).
4. Далее осуществить запуск моделирования с помощью пункта меню *Simulation/Start* или кнопки \triangleright на панели инструментов. Записав показание n из блока *Display* (см. рисунок 2.2) и поделив его на число счетных импульсов за время наблюдения N (см. рисунок 2.2), получим по формуле (2.8) значение функции распределения при аргументе, равном x .

Внимание! Контролируйте, чтобы значение «*Period*» в блоке «*Pulse generator*» было равно значению «*Time delay*» в блоке «*Transport Delay*». В свою очередь крайне желательно, чтобы значения «*Period*» (блок «*Pulse generator*»),

«Time delay» (блок «Transport Delay») были равны значению «Sample time» блока «Band-Limited White Noise».

Таким образом, изменив значение аргумента x (значение «**Lower limit**» в блоке **Saturation** и «**Constant value**» в блоке **Constant**), получим значение функции распределения при другом значении аргумента. Шаг dx изменения аргумента x определить по формуле:

$$dx = 2X_{\text{maximum}} / 15 \quad (2.9)$$

Изменять значение x аргумента функции распределения $F(x)$ рекомендуется в интервале от x_{\min} до x_{\max} (т.е. от минимума до максимума) с шагом dx : первое измерение выполнить для аргумента (уровня анализа) $x = x_{\min}$, второе измерение для $x = x_{\min} + dx$, третье для $x = x_{\min} + 2dx$ и так до тех пор, пока выполнится равенство $x = x_{\max}$. Последнее измерение выполнить для $x = x_{\max}$. Перебрав все возможные значения аргумента, по точкам построим функцию распределения $F(x)$ для реализации исследуемого случайного процесса.

2.4.3 Модель устройства для оценки плотности вероятностей $W^*(x)$ случайного процесса

Согласно формуле (2.6) плотность вероятностей $W^*(x)$ оценивается как отношение вероятности того, что случайный процесс будет находиться между двумя уровнями x и $x+dx$, к величине интервала dx между уровнями. Эту формулу положим в основу построения модели устройства для измерения плотности вероятностей. Вероятность, стоящую в числителе формулы (2.6), можно выразить через функцию распределения

$$P^*(x < x(t) < x + dx) = F^*(x + dx) - F^*(x), \quad (2.10)$$

и плотность вероятностей записать в виде

$$W^*(x) = \frac{F^*(x + dx) - F^*(x)}{dx}. \quad (2.11)$$

Из последней формулы следует, что плотность вероятностей $W^*(x)$ случайного процесса можно оценить с помощью двух каналов, в каждом из которых оцениваются функции распределения $F^*(x)$ при аргументах x и $x+dx$ соответственно.

Структурная схема модели устройства для измерения плотности вероятностей показана на рисунке 2.3 и содержит два канала: верхний и нижний.

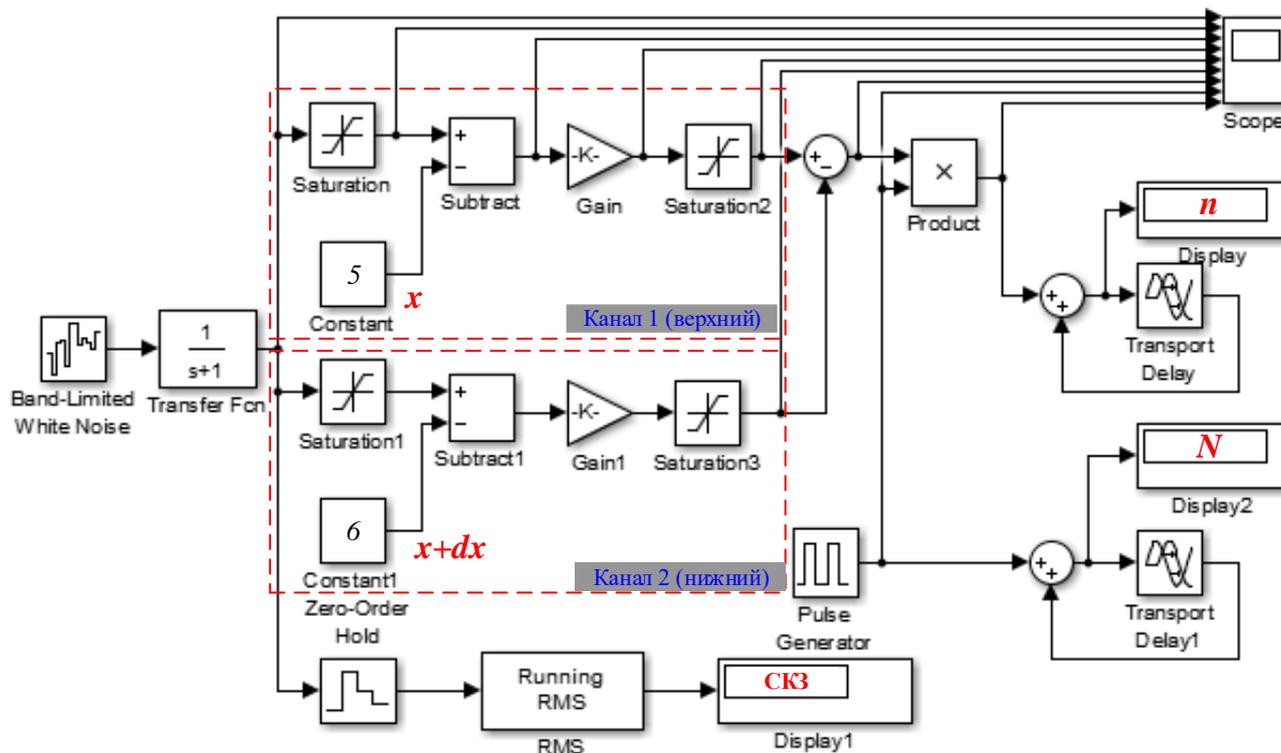


Рисунок 2.3 – Структурная схема модели устройства для измерения плотности вероятности случайного процесса

В верхнем канале (**Saturation** и **Constant**) уровень ограничения «**Lower limit**» в блоке **Saturation** и значение «**Constant value**» блока **Constant** устанавливаются равными уровню анализа x , а в нижнем канале (**Saturation1** и **Constant1**) эти параметры устанавливаются равными уровню анализа $x+dx$ (в нижнем канале для блока **Saturation1** параметр «**Lower limit**» равен $x+dx$, а значение «**Constant value**» в блоке **Constant** равно $x+dx$). Уровень анализа «**Upper limit**» устанавливается так, как описано в параграфе 2.4.2.

На выходе блока **Saturation 2** будут формироваться прямоугольные импульсы, длительность которых равна времени пребывания реализации случайного процесса выше уровня $x+dx$, на выходе блока **Saturation 3** будут формироваться импульсы, длительность которых равна времени пребывания реализации выше

уровня x . На выходе сумматора будут формироваться импульсы, длительность которых равна времени пребывания реализации между уровнями x и $x+dx$.

Важным моментом является выбор интервала dx между уровнями анализа. Если интервал dx небольшой, то в него попадет малое число счетных импульсов, и период счетных импульсов будет представлять существенную часть длительности импульсов на выходе сумматора. Следствием этого будет малая точность определения длительности импульсов (времени пребывания реализации случайного процесса между двумя уровнями анализа). Если интервал dx большой, то выражение (2.6) выполняется лишь приближенно. Для точной оценки плотности вероятности $W^*(x)$ необходимо dx устремить к нулю.

Таким образом, существует оптимальное значение интервала dx , при котором погрешность измерения времени пребывания реализации между двумя уровнями будет наименьшей.

2.4.4 Оценка плотности вероятностей $W^*(x)$ случайного процесса

Для измерения плотности вероятностей случайного процесса надо открыть окно, в котором находится генератор случайного процесса и модель устройства для измерения плотности вероятностей. В панели управления меню *Simulation/Parameters* установить интервал моделирования (время наблюдения реализации случайного процесса). Порядок измерения плотности вероятности случайного процесса для некоторого значения x следующий:

1. Определить максимальное x_{max} и минимальное x_{min} значение реализации случайного процесса на выходе формирующего фильтра (см. рисунок 2.3) с помощью осциллографа *Scope*. Осциллограф *Scope* отображает реализацию случайного процесса в первом сверху окне. Выбрать из двух значений $|x_{max}|$ и $|x_{min}|$ наибольшее и приравнять к величине $X_{maximum}$, т.е. $X_{maximum} = \max(|x_{max}|, |x_{min}|)$.

2. Значение верхнего предела «**Upper limit**» блоках **Saturation** (верхний канал) и **Saturation1** (нижний канал) сделать одинаковыми и равными равным $X_{maximum}$.
3. Вычислить интервал dx между уровнями анализа по формуле (2.9).
4. В первом ограничителе верхнего канала (**Saturation**) установить нижний уровень ограничения, записав в поле «**Lower limit**» значение установленного уровня анализа x . Значение поля «**Constant value**» в блоке **Constant** установить также установить равным уровню анализа x .
5. В первом ограничителе нижнего канала установить нижний уровень ограничения (**Saturation1**), записав в поле «**Lower limit**» значение установленного уровня анализа $x+dx$. Значение «**Constant value**» в блоке **Constant1** также установить равным уровню анализа $x+dx$.
6. Далее осуществляется запуск моделирования. Число импульсов n , которое показывает *Display* (см. рисунок 2.3), пропорционально вероятности пребывания реализации случайного процесса между уровнями x и $x+dx$. Эмпирическая плотность вероятностей для уровня анализа x будет равна:

$$W^*(x) \approx \frac{n}{N \cdot dx} \quad (2.12)$$

где \square - общее число счетных импульсов за время наблюдения \square .

Внимание! Контролируйте, чтобы значение «Period» в блоке «Pulse generator» было равно значению «Time delay» в блоке «Transport Delay». В свою очередь крайне желательно, чтобы значения «Period» (блок «Pulse generator»), «Time delay» (блок «Transport Delay») были равны значению «Sample time» блока «Band-Limited White Noise».

Таким образом, изменив значение аргумента x (значения параметров в блоках **Saturation** и **Constant**); получим значение плотности распределения при другом значении аргумента. Изменять значение x аргумента плотности распределения вероятности $W(x)$ рекомендуется в интервале от x_{min} до x_{max} (т.е. от минимума до максимума) с шагом dx : первое измерение выполнить для аргумента (уровня анализа) $x = x_{min}$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + dx$ (в нижнем канале), второе измерение

для $x = x_{min} + dx$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + 2dx$ (в нижнем канале), третье для $x = x_{min} + 2dx$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + 3dx$ (в нижнем канале), и так до тех пор, пока выполнится равенство $x = x_{max}$ для верхнего канала и $x + dx = x_{max} + dx$ в нижнем канале. Последнее измерение выполнить для $x = x_{max}$ в верхнем канале и $x + dx = x_{max} + dx$ в нижнем канале. Перебрав все возможные значения аргумента, по точкам построим плотность распределения вероятностей $W(x)$ для реализации исследуемого случайного процесса.

Чтобы построить график эмпирической плотности вероятностей, нужно по оси OX отметить границы интервалов x и $x + dx$, следующих друг за другом с шагом dx , а по оси OY отметить значение $W(x)$ для соответствующего интервала $[x: x+dx]$.

2.4.5 Задание на лабораторную работу

1. Открыть окно модели и поместить в него генератор случайного процесса и модель устройств для измерения функции распределения $F(x)$. Формирующий фильтр следует взять из предыдущей лабораторной работы. Перед началом работы выбрать случайным образом значение *Seed* в блоке «*Band-Limited White Noise*».
2. Установите значения параметров отдельных блоков так, как указано в параграфе 2.4.2. Аргумент x функции распределения $F(x)$ устанавливается в блоках **Saturation** и **Constant**. Измерить и построить функцию распределения реализации случайного процесса так, как указано в параграфе 2.4.2.
3. Затем открыть окно, в котором размещены блоки генератора белого шума и модель устройства для измерения плотности вероятностей случайного процесса $W(x)$.
4. Измерить и построить плотность распределения вероятности $W(x)$ реализации случайного процесса так, как указано в параграфе 2.4.4.
5. Изменить величину интервала dx в сторону больших (dx_1) и меньших значений (dx_2) и повторить оценку плотности распределения вероятностей

случайного процесса $W(x)$ согласно пункту 4 отдельно для dx_1 и отдельно для dx_2 . Рекомендуется увеличить или уменьшить ширину интервала dx не менее чем в два раза. Представить таблицы и графики плотности вероятностей для новых значений dx .

6. Увеличить мощность шума в два раза, для чего изменить в соответствующее число раз значение параметра «*Noise Power*» в блоке «*Band-Limited White Noise*». Повторить пункты 2 и 4.

2.5 Оценка функции распределения и плотности вероятности случайного процесса на основе разработанной программы

2.5.1 Описание программы

Главное окно программы изображено на рисунке 2.4. Это окно можно условно разделить на две части: верхнюю и нижнюю часть.

Верхняя часть окна программы предназначена для установления необходимых параметров:

– Гауссовского случайного процесса (СП) $X(t)$: среднее значение m_x и среднеквадратичное значение σ_x :

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (2.13)$$

– Наблюдения случайного процесса: время наблюдения (секунды) и частота дискретизации (Гц).

– Фильтра низких частот (ФНЧ): полоса пропускания (Гц) и ослабление сигнала в полосе подавления (дБ).

– Построения функции распределения $F(x)$ и гистограммы $W(x)$:

а) пределы построения указанных функций – минимальное X_{min} и максимальное X_{max} значения случайного процесса на **входе** ФНЧ и минимальное Y_{min} и максимальное Y_{max} значения случайного процесса на **выходе** ФНЧ.

б) интервал анализа dx для случайного процесса на **входе** фильтра и интервал анализа dy для случайного процесса на **выходе** фильтра.

В верхней правой части окна показана амплитудно-частотная характеристика ФНЧ.

В нижней части окна отображаются результаты моделирования случайных процессов, их статистических характеристик и других величин. В частности, результатами моделирования являются:

- реализация СП на входе фильтра низких частот;
- реализация СП на выходе фильтра низких частот;
- функция распределения $F(x)$ СП на входе фильтра низких частот;
- функция распределения $F(y)$ СП на выходе фильтра низких частот;
- плотность распределения $W(x)$ СП на входе фильтра низких частот;
- плотность распределения $W(y)$ СП на выходе фильтра низких частот;

В нижней правой части окна показаны автокорреляционные функции СП на входе фильтра (верхний рисунок) и на выходе фильтра (нижний рисунок).

Эти результаты изображаются в графических окнах. Для копирования графиков в буфер обмена следует нажать кнопку «Сору» рядом с графическим окном.

При нажатии кнопки «Сгенерировать реализацию» формируется случайный процесс на входе фильтра, производится его фильтрация в соответствии с АЧХ ФНЧ, а затем по формуле (2.8) оценивается функция распределения и по формуле (2.12) оценивается плотность вероятностей случайного процесса.

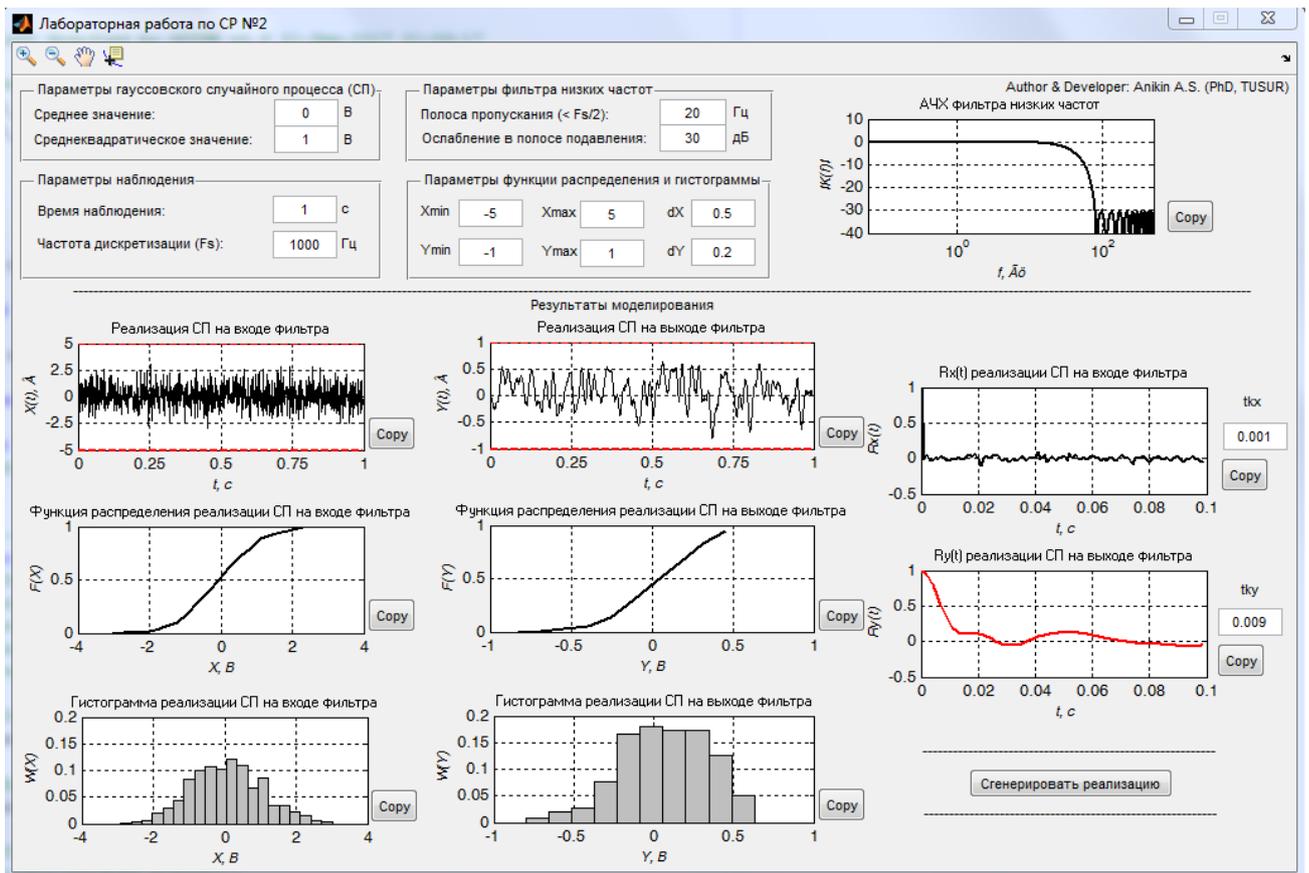


Рисунок 2.4 – Главное окно программы

2.5.2 Задание на лабораторную работу

1. Установить m_x равным 0.
2. Задать σ_x , взяв произвольное значение из интервала от 1 до 5. Зафиксировать это значение в тетради.
3. Установить время наблюдения равным 1 с и частоту дискретизации 1000 Гц. Зафиксировать эти значения в тетради.
4. Установить полосу пропускания ФНЧ $\Delta f = 20$ Гц. Зафиксировать это значение в тетради.
5. Нажать кнопку «Сгенерировать реализацию».
6. Визуально определить минимальное X_{min} и максимальное X_{max} значения случайного процесса на **входе** ФНЧ и минимальное Y_{min} и максимальное Y_{max} значения случайного процесса на **выходе** ФНЧ. Установить значения интервалов dx , dy примерно равные $dx \approx (X_{max} - X_{min})/K$ и $dy \approx (Y_{max} - Y_{min})/K$, где K любое целое число

из интервала $[5, 10]$. Эти значения являются параметрами для построения **оценок** функций распределения $F(x)$ и плотности вероятности (гистограммы) $W(x)$. Зафиксировать эти значения в тетради.

7. Нажать кнопку «Сгенерировать реализацию».
8. Снять реализации случайного процесса на входе и выходе фильтра, а также соответствующие им функции распределения, гистограммы, автокорреляционные функции.
9. Увеличить в 5 раз время моделирования и выполнить п.7 и п.8. Дать объяснение полученным результатам.
10. Установить время наблюдения как в п.3.
11. Уменьшить в 5 раз время моделирования и выполнить п.7 и п.8. Дать объяснение полученным результатам.
12. Установить время наблюдения как в п.3.
13. Увеличить σ_x и выполнить п.п. 5 - 8.
14. Установить значение σ_x , которое было задано в п.2.
15. Уменьшить σ_x и выполнить п.п. 5 - 8.
16. Установить значение σ_x , которое было задано в п.2.
17. Увеличить интервалы dx, dy (например, в 2 раза или более) и выполнить п.п. 5 - 8.
18. Установить значения интервалов dx, dy , которые были заданы в п. 6.
19. Уменьшить интервалы dx, dy (например, в 2 раза или более) и выполнить п.п. 5 - 8.
20. Установить значения интервалов dx, dy , которые были заданы в п.6.
21. Увеличить полосу пропускания ФНЧ Δf_1 и повторить п.п. 5 - 8.
22. Установить значение полосы пропускания ФНЧ Δf , которое было задано в п.4.
23. Уменьшить полосу пропускания ФНЧ Δf_2 и повторить п.п. 5 - 8.
24. Проанализировать и дать объяснение полученным результатам.
25. Составить, распечатать и подписать отчёт. Страницы отчёта скрепить скрепками.

2.5.3 Содержание отчета

Отчёт оформляется в соответствии с текущим образовательным стандартом ТУСУР [3] и содержит следующие элементы:

1. Титульный лист, оформленный в соответствии с приложением А.
2. Введение в виде краткого реферата сведений из параграфа 2.2. Введение должно содержать:

а) цель работы, определение понятий «функция распределения» и «плотность распределения вероятностей случайного процесса с необходимыми пояснениями в виде формул, рисунков.

б) описание порядка измерения функции распределения и плотности распределения реализаций случайного процесса. Привести формулы для функции распределения и плотности вероятностей случайного процесса, которые используются при экспериментальном их измерении.

3. Результаты работы. В этом разделе следует привести необходимые иллюстрации измеренных функций распределения и плотности вероятностей случайного процесса, получаемых в указанных выше пунктах.

Достаточно привести только те графики или таблицы из пунктов заданий, по которым будут сделаны выводы.

Рисунки с графиками должны иметь сквозную нумерацию. Иллюстрации должны иметь сопровождающий текст - объяснения полученных результатов со ссылкой на номер рисунка.

4. Выводы.

В этом разделе приводятся краткое изложение основных результатов лабораторной работы: каждый исполнитель лабораторной работы должен изложить свой результат и дать этому результату ясное объяснение. При написании выводов рекомендуется ссылаться на результаты работы, рисунки, таблицы и т. д. Основой для вывода может являться ответ на вопрос из списка вопросов к защите лабораторной работы. Выводы следует пронумеровать и указать ответственного за вывод.

Вывод должен содержать:

- I: утверждение по проделанной работе;

- II: подтверждение утверждения графиками или таблицами;
- III: объяснение утверждения (причины, почему так происходит и т.п.).

Для примера, ниже показан образец вывода для данной лабораторной работы:
«Математическое ожидание реализации случайного процесса непредсказуемо меняет свой вид при смене реализации.»

Это подтверждают рис. 1-4, где приведены реализации случайных процессов и соответствующие им временные зависимости математического ожидания.

Непредсказуемость математического ожидания можно объяснить следующим образом. Математическое ожидание на момент времени t в данном случае вычисляется как среднее арифметическое значений X_i реализации случайного процесса, которые предшествовали моменту времени t ($i = 1...n$, где n – общее количество значений X_i на момент времени t). Поскольку реализации случайным образом меняются, то случайно меняются значения X_i , а значит и среднее арифметическое этих значений, равное математическому ожиданию.»

Этот пример нельзя использовать в отчёте для выводов.

2.6 Вопросы к допуску к лабораторной работе

1. Что такое функция распределения случайного процесса и что она показывает ?
2. Что такое плотность распределения случайного процесса и что она показывает ?
3. Для каких процессов достаточно знать функцию распределения и плотность распределения в один момент времени ?
4. Как измеряется функция распределения случайного процесса ?
5. Как измеряется плотность распределения случайного процесса ?

2.7 Вопросы к защите лабораторной работы

Объяснить и пояснить, что происходит с функцией распределения, плотностью распределения реализации и корреляционной случайного процесса на входе и выходе фильтра, при:

1. Переходе от одной реализации к другой реализации ?
2. Изменении времени наблюдения случайного процесса ?
3. Изменении среднеквадратического отклонения случайного процесса ?
4. Смене интервалов анализа dx, dy ?
5. Изменении полосы пропускания ФНЧ ?

Дать объяснение полученным результатам.

3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3: ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УЗКОПОЛОСНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1 Введение

Цель работы: исследовать статистические свойства огибающей и фазы на основе реализаций узкополосного случайного процесса.

В радиотехнических устройствах полезный сигнал принимается на фоне шумов приёмной аппаратуры, который в первом приближении можно описать моделью белого шума.

Для обнаружения полезного сигнала на фоне шумов, определения параметров сигналов необходимо знать статистические характеристики аддитивной смеси полезного сигнала и шума.

Фильтры в приёмниках настраиваются на частоту полезного сигнала, а их полоса соизмерима с полосой полезного сигнала. *Белый шум на выходе таких фильтров преобразуется в белый шум, ограниченный по полосе и центрированный по частоте полезного сигнала.* Поэтому в данной работе формирующий фильтр создаёт из белого шума узкополосный случайный процесс на частоте полезного сигнала. Именно такой узкополосный случайный процесс моделирует внутренние шумы аппаратуры, на фоне которых и наблюдается полезный сигнал.

Поскольку внутренние шумы аппаратуры обусловлены беспорядочным блужданием многочисленных электронов в проводнике, то согласно центральной предельной теореме узкополосный случайный процесс является гауссовским (плотность распределения случайного процесса описывается гауссоидой).

3.2 Сведения из теории

Узкополосным называется случайный процесс, основная мощность которого сосредоточена в узкой полосе частот $\Delta\omega^y$ по сравнению со средней частотой процесса ω_0 :

$$x^y(t) = V(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0 t - V(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0 t, \quad (3.1)$$

где

$$x_c(t) = V(t)\cos\varphi(t), \quad (3.2)$$

$$x_s(t) = V(t)\sin\varphi(t), \quad (3.3)$$

косинусная и синусная квадратурные составляющие процесса $x^y(t)$.

При исследовании узкополосных случайных процессов обычно интересуются огибающей и фазой, поскольку именно эти параметры используются для получения радиотехнических величин для измерения дальности, пеленга на цель, скорости движения цели.

Огибающая $V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного процесса выражаются через косинусную $x_c(t)$ и синусную $x_s(t)$ квадратурные составляющие с помощью формул:

$$V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}, \quad (3.4)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} [x_s(t)/x_c(t)]. \quad (3.5)$$

Обычно узкополосный случайный процесс получается в результате прохождения белого шума через фильтр, настроенный на центральную частоту ω_0 и имеющий ширину полосы $\Delta\omega^y$.

Если случайный процесс низкочастотный (широкополосный), то его спектральная плотность $S_x(\omega)$ записывается в виде:

$$S_x^H(\omega) = \frac{2 \cdot k}{\omega^2 + (\alpha^{\text{ФНЧ}})^2}, \quad (3.6)$$

где

$\alpha^{\text{ФНЧ}}$ – ширина спектральной плотности (энергетического спектра) по уровню 0,5;

k – коэффициент усиления формирующего фильтра.

Переходя к комплексно частоте $s = j\omega$, получим передаточную функцию фильтра низких частот $H(p)$ полосой $\alpha^{\Phi_{НЧ}} = \Delta\omega^{\Phi_{НЧ}}$ и квадрат его амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) $|H_{\phi\phi}^n(j\omega)|^2$, формирующего спектральную плотность случайного процесса вида (3.1):

$$H(p) = \frac{\sqrt{2 \cdot k}}{p + \alpha^{\Phi_{НЧ}}} = \frac{\sqrt{2 \cdot k}}{p + \Delta\omega^{\Phi_{НЧ}}}, \quad (3.7)$$

$$|H_{\phi\phi}^n(j\omega)|^2 = H(p)H(-p) = \frac{\sqrt{2 \cdot k}}{(p + \alpha^{\Phi_{НЧ}})} \frac{\sqrt{2 \cdot k}}{(-p + \alpha^{\Phi_{НЧ}})} = \frac{2 \cdot k}{-p^2 + (\alpha^{\Phi_{НЧ}})^2}. \quad (3.8)$$

Согласно выражениям (3.7), (3.8) числитель передаточной функции $H(s)$ имеет один коэффициент равный $\sqrt{2 \cdot k}$, в знаменателе же два коэффициента при переменной s : первый равен единице, а второй равен $\alpha^{\Phi_{НЧ}}$.

Если случайный процесс узкополосный и сосредоточен около частоты ω_0 , то спектральная его плотность мощности записывается как:

$$S_X^y(\omega) = \frac{k}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{k}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2}, \quad (3.9)$$

где

ω_0 – центральная (средняя) частота узкополосного случайного процесса.

Аналогично находится передаточная функция и квадрат АЧХ формирующего фильтра для узкополосного случайного процесса (7):

$$|H_{\phi\phi}^y(j\omega)|^2 = H(p) \cdot H(-p) = \frac{\sqrt{2 \cdot k} (p + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2})}{[p^2 + 2 \cdot p \cdot \alpha + (\alpha^2 + \omega_0^2)]} \frac{\sqrt{2 \cdot k} (-p + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2})}{[p^2 - 2 \cdot p \cdot \alpha + (\alpha^2 + \omega_0^2)]}. \quad (3.10)$$

Согласно выражению (3.10) числитель передаточной функции $H(p)$ содержит два коэффициента: $\sqrt{2 \cdot k}$ и $\sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$; в знаменателе три коэффициента при переменной p : первый равен единице, второй $2 \cdot \alpha$, а третий равен $(\alpha^2 + \omega_0^2)$.

Реализация низкочастотного случайного процесса показана на рисунке 3.1, а на реализация узкополосного случайного процесса показана на рисунке 3.2.

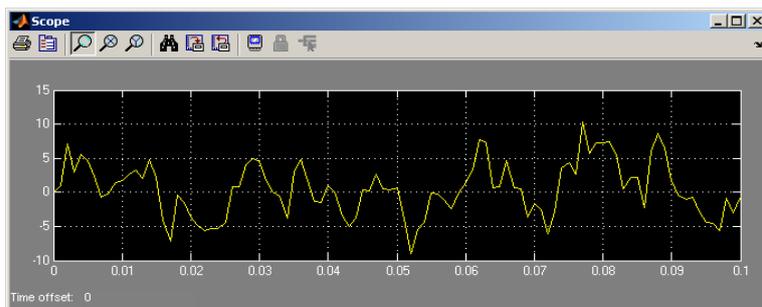


Рисунок 3.1 – Реализация низкочастотного случайного процесса, ширина спектра которого 100 Гц

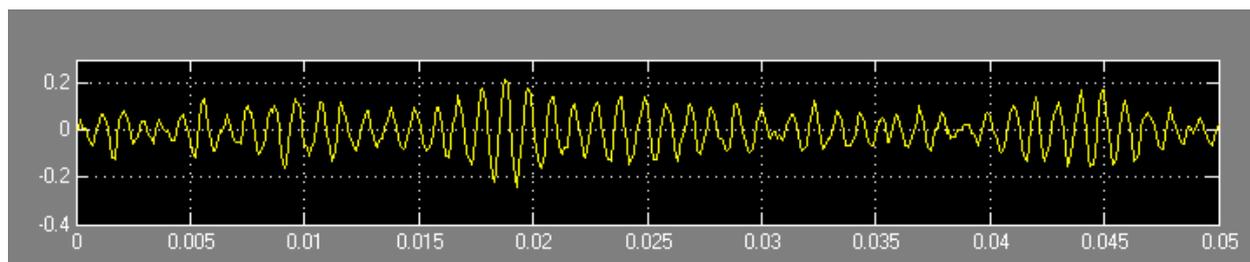


Рисунок 3.2 – Реализация узкополосного случайного процесса, ширина спектра $\Delta\omega$ которого равна 100 Гц и центральная частота $\omega_0 = 1000$ Гц.

Как видно из рисунка 3.2, реализация узкополосного шума представляет синусоиду со средней частотой ω_0 процесса, у которой мгновенные амплитуда $V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ случайно изменяются во времени, но гораздо медленнее синусоиды на частоте ω_0 . Это наблюдение позволяет записать узкополосный процесс (3.1) в виде:

$$x(t) = V(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (3.11)$$

где

$V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ - огибающая и фаза узкополосного случайного процесса.

Огибающая $V(t)$ узкополосного случайного процесса – это случайная функция, которая описывает случайное изменение во времени мгновенной амплитуды гармонического колебания на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Начальная фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного процесса – это случайная функция, которая описывает случайное изменение во времени мгновенной фазы гармонического колебания на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0$. Далее вместо термина начальная фаза используем термин фаза.

Передаточная функция, АЧХ формирующего фильтра и спектральная плотность мощности случайного процесса различаются. Для примера на рисунке 3.3 приведены нормированные передаточная функция и АЧХ формирующего фильтра (3.10) для $\alpha = \Delta\omega^y = 3$ и $\omega_0 = 10$, вместе со спектральной плотностью мощности белого шума, ограниченного по полосе $S_{бш0}(\omega)$ и спектральной плотностью узкополосного случайного процесса $X(t)$.

Для правильной работы формирующего фильтра необходимо, чтобы верхняя частота $\omega_{в,бш}$ в спектре белого шума, ограниченного по полосе, превышала в 2-10 раз верхнюю частоту формируемого узкополосного случайного процесса $(\omega_0 + \Delta\omega^y)$, т.е.

$$\omega_{в,бш} = (2 \dots 10) \cdot (\omega_0 + \Delta\omega^y) \gg (\omega_0 + \Delta\omega^y) \quad (3.12)$$

или, с учётом $\omega_0 \gg \Delta\omega$:

$$\omega_{в,бш} = (2 \dots 10) \cdot \omega_0 \gg (\omega_0 + \Delta\omega^y), \quad f_{в,бш} = \omega_{в,бш}/2\pi \quad (3.13)$$

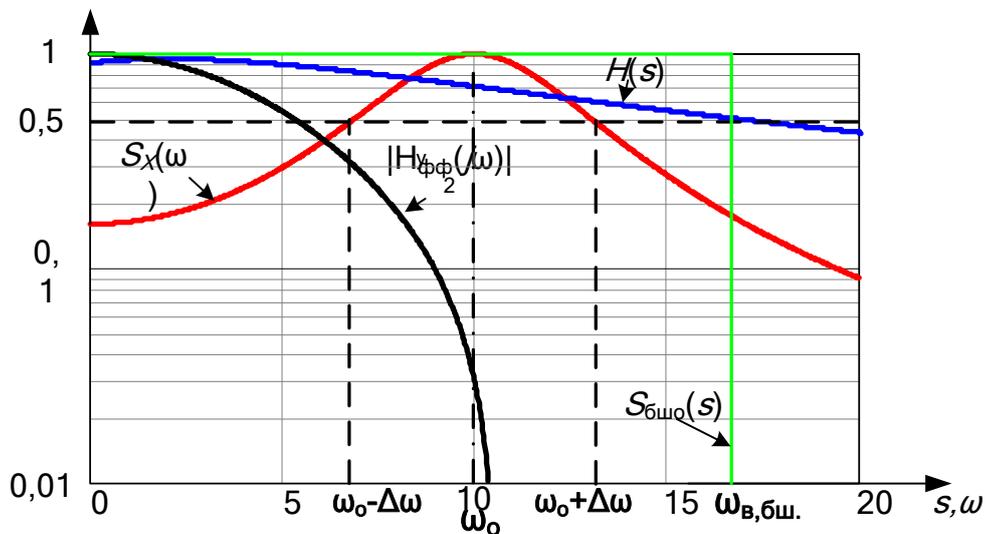


Рисунок 3.3 – На рисунке для сравнения изображены:

- **красным**: спектральная плотность узкополосного случайного процесса (3);
- **синим**: передаточная функция $H(s)$ формирующего фильтра (4);
- **чёрным**: АЧХ формирующего фильтра;
- **зелёным**: спектральная плотность $S_{бш0}(\omega)$ белого шума, ограниченного по полосе

3.2.1 Построение генератора узкополосного случайного процесса

Для генерации узкополосного случайного процесса $x^y(t)$ необходимо белый шум $x(t)$ подать на вход формирующего фильтра с передаточной функцией (3.10). Чтобы построить генератор узкополосного случайного процесса необходимо последовательно соединить генератор белого шума $x_{бшo}(t)$ с ограниченным спектром по полосе (Band-Limited White Noise) $x_{бшo}(t)$ и формирующий фильтр. Граничная частота $f_{в.бш} = \omega_{в.бш}/2\pi$ генератора белого шума вычисляется по формуле (3.13), тогда спектральная плотность белого шума $x_{бшo}(t)$ будет значительно «перекрывать» частотную характеристику формирующего фильтра (см. рисунок 3.3). Чтобы установить в **Band-Limited White Noise** полученное значение граничной частоты $f_{в.бш}$, необходимо временной интервал дискретизации (**Sample time**) τ_c выбрать из условия:

$$\tau_c \leq \frac{1}{(2...10) \cdot f_{в.бш}}. \quad (3.14)$$

Передаточная функция формирующего фильтра для узкополосного случайного процесса $x^y(t)$ определяется формулой (3.10) и может быть записана как:

$$H(p) = \frac{\sqrt{2 \cdot k} \cdot (p + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2})}{p^2 + 2 \cdot p \cdot \alpha + (\alpha^2 + \omega_0^2)}. \quad (3.15)$$

Пусть узкополосный случайный процесс $x^y(t)$ имеет ширину спектра $\Delta f^y = 10$ Гц ($\alpha = \Delta\omega^y = 2\pi \Delta f^y$) и центральную частоту $f_o = 100$ Гц ($\omega_o = 2\pi f_o$). Тогда, приняв для простоты $k = 1$, запишем (3.15) как:

$$H(p) = \frac{1,4 \cdot p + 884}{p^2 + 125 \cdot p + 398732}. \quad (3.16)$$

Чтобы верхняя граничная частота белого шума, ограниченного по полосе, $x_{бшo}(t)$ превосходила верхнюю частоту узкополосного сигнала (см. рисунок 3.3), интервал дискретизации по времени отсчётов шума (параметр **Sample time**) должен быть не больше:

$$\tau_c \leq \frac{1}{(2 \dots 10) \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100} = 0,0002 \dots 0,0007. \quad (3.17)$$

Примем интервал дискретизации белого шума, ограниченного по полосе $x_{\text{бшн}}(t)$, равным **Sample time** = 0,0002 ($f_{\text{в.бшн}} = 397$ Гц $\ll (f_o + \Delta f^y) = 110$ Гц) и запишем это значение в блок **Band-Limited White Noise**.

После прохождения белого шума $x_{\text{бшн}}(t)$, ограниченного верхней частотой 397 Гц, через формирующий фильтр с центральной частотой 100 Гц, на выходе формирующего фильтра (3.15) наблюдается реализация узкополосного случайного процесса $x^y(t)$, с периодической составляющей на частоте 100 Гц (период гармоники 0,01 с).

3.2.2 Получение квадратурных составляющих и огибающей узкополосного процесса

Узкополосный процесс $x^y(t)$ можно представить в виде:

$$x^y(t) = V(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - V(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.18)$$

где

$$x_c(t) = V(t) \cos \varphi(t), \quad (3.19)$$

$$x_s(t) = V(t) \sin \varphi(t), \quad (3.20)$$

косинусная и синусная квадратурные составляющие процесса $x^y(t)$.

Огибающая $V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного процесса выражаются через косинусную $x_c(t)$ и синусную $x_s(t)$ квадратурные составляющие с помощью формул:

$$V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}, \quad (3.21)$$

$$\varphi(t) = \text{arctg} [x_s(t)/x_c(t)]. \quad (3.22)$$

Чтобы выделить квадратурные составляющие узкополосного случайного процесса, помножим выражение (3.18) на $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$. Тогда получим:

$$x^y(t) \cos \omega_0 t = 0,5 \cdot V(t) \left\{ \cos \varphi(t) + \cos [2\omega_0 t + \varphi(t)] \right\}, \quad (3.23)$$

$$x^y(t) \sin \omega_0 t = 0,5 \cdot V(t) \left\{ \sin \varphi(t) + \sin [2\omega_0 t + \varphi(t)] \right\}. \quad (3.24)$$

Первые слагаемые в (3.23) и (3.24) являются низкочастотными и представляют квадратурные составляющие (3.21) и (3.22) случайного процесса $x(t)$. Вторые слагаемые являются высокочастотными и их мощность сосредоточена на частоте $2\omega_0$.

Если теперь результат перемножения $x^y(t)\cos(\omega_0 t)$ и $x^y(t)\sin(\omega_0 t)$ пропустить через низкочастотный фильтр (ФНЧ) с передаточной функцией $H(p)$ из (3.8) и полосой ФНЧ $\Delta\omega^{\text{ФНЧ}} \ll 2\omega_0$, то вторые слагаемые в (3.21) и (3.22) будут близки к нулю. На выходе ФНЧ с передаточной функцией (6) будут выделены квадратурные составляющие узкополосного случайного процесса $x^y(t)$.

Чтобы получить огибающую $V(t)$ узкополосного случайного процесса $x^y(t)$ из выражения (3.18), необходимо согласно (3.21) возвести квадратурные составляющие (3.19), (3.20) в квадрат, сложить их и извлечь корень квадратный.

Все описанные операции выполняются в модели, изображенной в верхней части рисунок 3.4. В нижней части рисунок 3.4 изображена модель устройства для измерения плотности вероятности и огибающей узкополосного случайного процесса из лабораторной работы №2.

Перед запуском модели следует установить параметры отдельных блоков. В блоке **Band-Limited White Noise** значение параметра **Sample Time** определить по формуле (3.14). В блоке **Sine Wave**, генерирующий косинусоиду, выбрать следующие значения параметров: амплитуда - 1, частота - 100 Гц, фаза - в одном канале равна 0 радиан (**Sine Wave**), в другом $\pi/2$ радиан (**Sine Wave1**).

Внимание! В блоке Sine Wave частота задаётся в радиан/секундах, а не в герцах. Начальная фаза задаётся в радианах.

Полосу пропускания ФНЧ $\Delta\omega^{\text{ФНЧ}}$ для блоков **Transfer F_{cn1}** и **Transfer F_{cn2}** выбрать из условия:

$$\Delta\omega^{\text{ФНЧ}} = 0,05 \cdot \omega_0, \quad (3.25)$$

$$\alpha^{\text{ФНЧ}} = 0,05 \cdot \omega_0, \quad (3.26)$$

где

$\alpha^{\text{ФНЧ}} = \Delta\omega^{\text{ФНЧ}}$ – полоса пропускания ФНЧ с передаточной функцией (3.7) и (3.8);

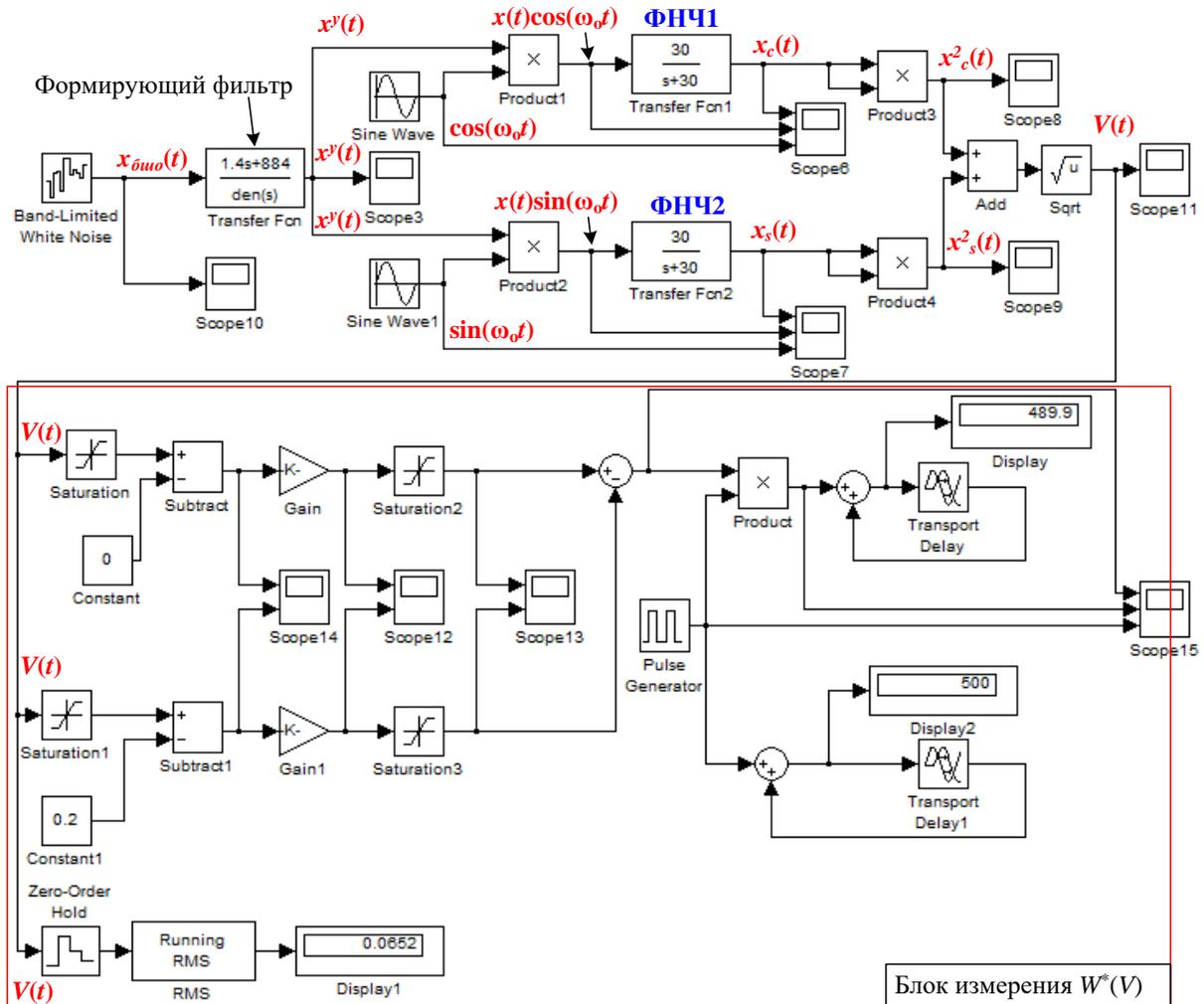


Рисунок 3.4 – Структурная схема модели для исследования плотности распределения вероятности $W(V)$ огибающей узкополосного случайного процесса $x^y(t)$

При выполнении условий (3.25), (3.26) ФНЧ пропускает медленные изменения квадратурных составляющих узкополосного случайного процесса, и подавляют составляющие сигнала на частоте $2 \cdot \omega_0$ (см. формулы (3.23) и (3.24)).

Внимание! Полоса пропускания ФНЧ должна быть разумной: при полосе ФНЧ $\Delta\omega^{\text{ФНЧ}}$ значительно меньшей полосы $\Delta\omega^y$ узкополосного случайного процесса ($\Delta\omega^{\text{ФНЧ}} \ll \Delta\omega^y$) сказываются переходные процессы ФНЧ и

оценка плотности распределения вероятностей огибающей может быть искажённой.

При установке параметров модели для измерения плотности вероятности, огибающей рекомендуется использовать описание к лабораторной работе №2.

3.2.3 Статистическое описание огибающей смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала

Огибающая $V(t)$ и фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного процесса меняются случайно при изменении времени t , поэтому также являются случайными процессами. Для статистического описания огибающей $V(t)$ и фазы $\varphi(t)$ определяют плотность распределения вероятностей огибающей $W(V)$ и фазы $W(\varphi)$.

На практике узкополосный случайный процесс наблюдается либо без полезного сигнала, либо вместе с полезным сигналом.

В данном случае полезным сигналом $s(t)$ является косинусоида амплитудой A на частоте ω_0 , равной центральной частоте узкополосного случайного процесса, с начальной фазой полезного сигнала Ψ т.е. $s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \Psi)$:

$$y^y(t) = x^y(t) + s(t) = \underbrace{V(t) \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \varphi(t)]}_{\text{Узкополосный случайный процесс}} + \underbrace{A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Psi]}_{\text{Полезный сигнал}}. \quad (3.27)$$

Равенство центральной частоты узкополосного случайного процесса и частоты полезного сигнала связано с тем, что в радиотехнических устройствах полосовой фильтр с передаточной функцией (3.10) настраивается на несущую частоту ω_0 полезного сигнала. При прохождении белого шума, обусловленного внутренними шумами аппаратуры, через такой полосовой фильтр (3.10) образуется узкополосный случайный процесс (3.18). Этот случайный процесс принимается вместе с полезным сигналом (в простейшем случае, косинусоидой) $s(t)$, т.е. образуется их аддитивная смесь (3.27).

В зависимости от амплитуды A полезного сигнала $s(t)$ плотность распределения огибающей узкополосного случайного процесса $W(V)$ меняется. Поэтому рассматривают два предельных случая:

1) В отсутствии полезного сигнала $s(t)$ или при ничтожно малой его амплитуде A плотность распределения огибающей узкополосного случайного процесса $W(V)$ подчиняется закону Релея:

$$W(V) = \frac{V}{\sigma_x^2} e^{-\frac{V^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (3.28)$$

где

σ_x^2 – дисперсия узкополосного случайного процесса $x^y(t)$.

2) При значительной амплитуде сигнала в сравнении с дисперсией узкополосного случайного процесса ($A \gg \sigma_x^2$) плотность распределения огибающей узкополосного случайного процесса $W(V)$ подчиняется Гауссовскому (нормальному) закону:

$$W(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(V-A)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.29)$$

3.2.4 Исследование статистических характеристик огибающей смеси узкополосного случайного процесса и полезного синусоидального сигнала

При исследовании квадратурных составляющих и огибающей смеси узкополосного случайного процесса и синусоидального сигнала (3.27) можно использовать модель, изображенную на рисунке 3.4, добавив два блока. Этими блоками являются генератор синусоидального сигнала (**Sine Wave2**) и сумматор (см. рисунок 3.5).

На один вход сумматора подается сигнал с выхода формирующего фильтра, на второй вход - сигнал от вновь введенного генератора синусоидального сигнала **Sine Wave2**. Выходной сигнал сумматора подается на перемножители в каналах выделения квадратурных составляющих. Частота генератора синусоидального сигнала в **Sine Wave2** устанавливается равной центральной частоте узкополосного

процесса ω_0 , фаза произвольная, а амплитуда такой, чтобы обеспечить требуемое отношение сигнал/шум q по мощности:

$$q = \frac{A^2}{2 \cdot \sigma_x^2}, \quad (3.30)$$

где,

A - амплитуда синусоидального полезного сигнала $s(t)$,

σ_x^2 – дисперсия (она же мощность) узкополосного случайного процесса $x^y(t)$.

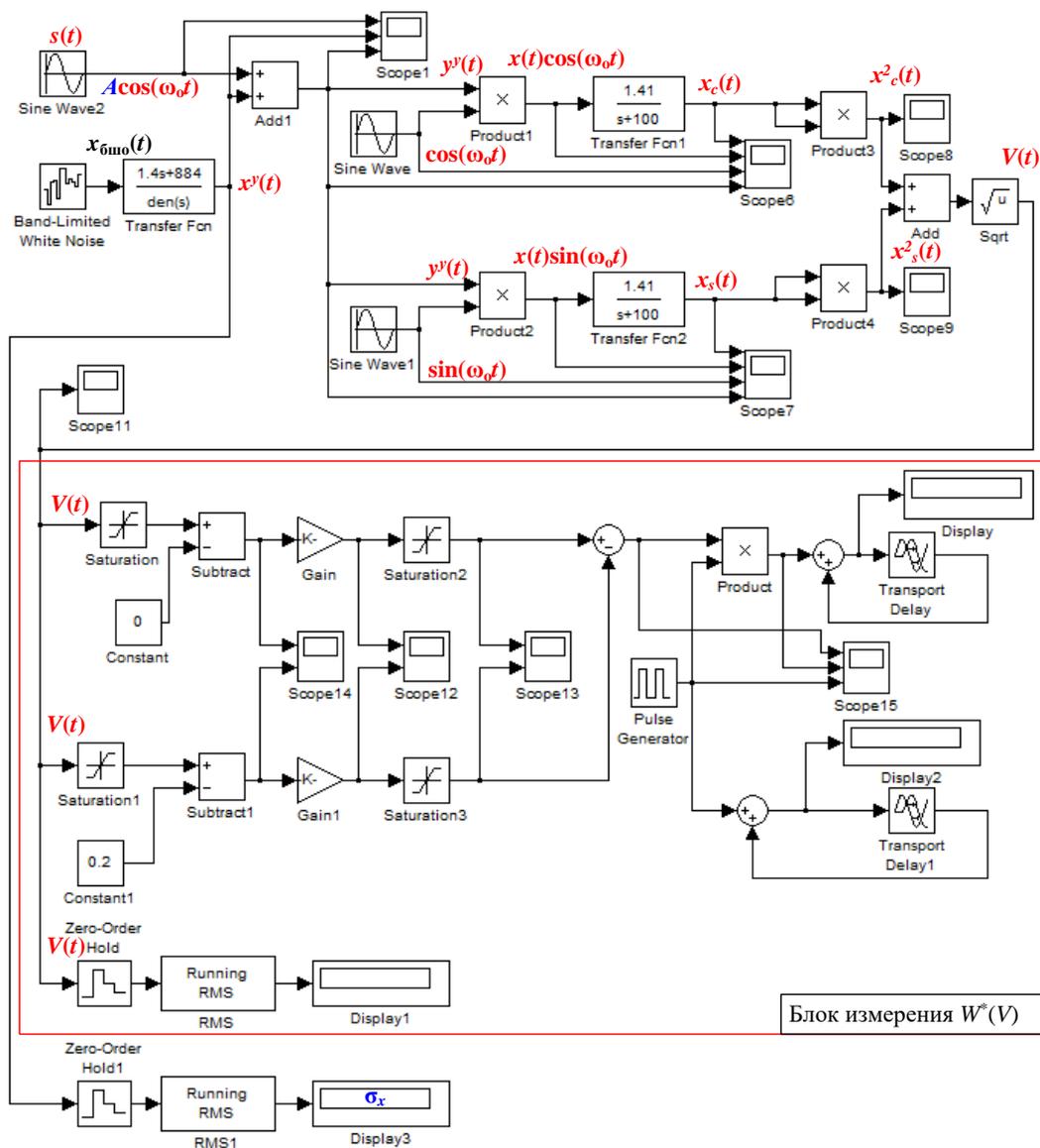


Рисунок 3.5 – Структурная схема модели для исследования плотности распределения вероятности огибающей смеси $y^y(t)$ полезного сигнала $s(t)$ и узкополосного случайного процесса $x^y(t)$

Обратите внимание, что в формуле (3.30) используется действующая амплитуда полезного сигнала $A_{\text{действ.}} = A/\sqrt{2}$, так что мощность полезного сигнала равна $P_c = (A/\sqrt{2})^2 = A^2/2$.

Измерив среднеквадратическое значение узкополосного случайного процесса на выходе формирующего фильтра с помощью **Running RMS1**, возведя его в квадрат, и задавшись отношением сигнал/шум q , из (3.30) находим какую амплитуду A надо установить в генераторе синусоидального сигнала **Sine Wave2**.

3.3 Способы выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа может быть выполнена в среде Simulink или с помощью специально разработанной программы. Предлагается самостоятельно выбрать среду выполнения лабораторной работы.

При выполнении лабораторной работы:

- в среде Simulink необходимо в папке с лабораторной работой выбрать соответствующий файл формата *.mdl.
- с помощью специально разработанной программы необходимо в папке с лабораторной работой выбрать файл «[Лабораторная работа №3.exe](#)».

3.4 Исследование статистических свойств огибающей и фазы узкополосного случайного процесса в Simulink

1. Построить модель генератора узкополосного шума и модель устройства выделения квадратурных составляющих и огибающей этого шума (рисунок 3.4, файл LabRab3.mdl).
2. Принять ширину спектра Δf^y узкополосного случайного процесса равной 10 Гц ($\alpha = \Delta\omega^y = 2\pi \Delta f^y$), а центральную частоту f_0 равной 100 Гц ($\omega_0 = 2\pi f_0$).

3. Рассчитать параметры формирующего фильтра с передаточной функцией (3.15) для принятых значений ширины спектра и центральной частоты. Принять в (3.15) $k = 1$. Коэффициенты числителя и знаменателя из (3.15) переписать в поля «**Numenator**» и «**Denominator**» блока **Transfer F_{cn}** .
4. Для блоков **Sin Wave** и **Sin Wave1** установить значение параметра «**Frequency**» («Частота») равным $\omega_0 = 2\pi f_0$ (из пункта 2).
5. Для блока **Sin Wave** значение параметра «**Phase**» («Фаза») установить равным 0, а для блока **Sin Wave1** значение параметра «**Phase**» установить равным $\pi/2$.
6. Рассчитать по формуле (3.13) граничную частоту $f_{в.бш}$ белого шума, ограниченного по полосе, а по формуле (3.14) временной интервал дискретизации (**Sample time**) τ_c . Установить рассчитанное значение τ_c в блок **Band-Limited White Noise**.
7. Рассчитать полосу пропускания ФНЧ по формуле (3.25), (3.26) и подставить полученное значение в (3.7). Принять в (3.7) $k = 1$. Коэффициенты числителя и знаменателя из (3.7) переписать в поля «**Numenator**» и «**Denominator**» блоков **Transfer F_{cn1}** и **Transfer F_{cn2}** .
8. Установить значение «**Period**» блока «**Pulse generator**» равным значению «**Sample time**» из блока «**Band-Limited White Noise**».
9. Установить значение «**Time delay**» блоков «**Transport Delay**» и блоков «**Transport Delay 1**» равным значению «**Sample time**» из блока «**Band-Limited White Noise**».
10. Запустить первую модель (рисунок 3.4) и снять осциллограммы процессов на выходе формирующего фильтра, квадратурных составляющих и огибающей узкополосного случайного процесса.
11. Измерить плотность вероятности, огибающей узкополосного случайного процесса, для чего сделать следующее:
 - А. Определить максимальное x_{max} и минимальное x_{min} значение реализации огибающей случайного процесса с помощью осциллографа Score 11. Выбрать из двух значений $|x_{max}|$ и $|x_{min}|$ наибольшее и приравнять к величине $X_{maximum}$, т.е.

$$X_{maximum} = \max(|x_{max}|, |x_{min}|).$$

В. Значение верхнего предела «**Upper limit**» блоках **Saturation** (верхний канал) и **Saturation1** (нижний канал) сделать одинаковыми и равными равным $X_{maximum}$.

С. Вычислить зазор dx между уровнями анализа по формуле:

$$dx = (2 \cdot X_{maximum}) / 15$$

Д. В первом ограничителе верхнего канала (**Saturation**) установить нижний уровень ограничения, записав в поле «**Lower limit**» значение установленного уровня анализа x . Значение поля «**Constant value**» в блоке **Constant** также установить равным уровню анализа x .

Е. В первом ограничителе нижнего канала установить нижний уровень ограничения (**Saturation1**), записав в поле «**Lower limit**» значение установленного уровня анализа $x+dx$. Значение «**Constant value**» в блоке **Constant1** также установить равным уровню анализа $x+dx$.

Ф. Далее осуществляется запуск моделирования. Число импульсов n , которое показывает Display, пропорционально вероятности пребывания реализации случайного процесса между уровнями x и $x+dx$. Эмпирическая плотность вероятностей для уровня анализа x будет равна:

$$W(x) \approx \frac{n}{N \cdot dx}.$$

где N - общее число счетных импульсов за время наблюдения T .

Внимание! Контролируйте, чтобы значение «Period» в блоке «Pulse generator» было равно значению «Time delay» в блоке «Transport Delay». В свою очередь крайне желательно, чтобы значения «Period» (блок «Pulse generator»), «Time delay» (блок «Transport Delay») были равны значению «Sample time» блока «Band-Limited White Noise».

Таким образом, изменив значение аргумента x (значения параметров в блоках **Saturation** и **Constant**); получим значение плотности распределения при другом значении аргумента. Изменять значение x аргумента плотности распределения вероятности $W(x)$ рекомендуется в интервале от x_{min} до x_{max}

(т.е. от минимума до максимума) с шагом dx : первое измерение выполнить для аргумента (уровня анализа) $x = x_{min}$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + dx$ (в нижнем канале), второе измерение для $x = x_{min} + dx$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + 2dx$ (в нижнем канале), третье для $x = x_{min} + 2dx$ (в верхнем канале) и $x + dx = x_{min} + 3dx$ (в нижнем канале), и так до тех пор, пока выполнится равенство $x = x_{max}$ для верхнего канала и $x + dx = x_{max} + dx$ в нижнем канале. Последнее измерение выполнить для $x = x_{max}$ в верхнем канале и $x + dx = x_{max} + dx$ в нижнем канале. Перебрав все возможные значения аргумента, по точкам построим плотность распределения вероятностей $W(x)$ для реализации исследуемого случайного процесса.

Чтобы построить график эмпирической плотности вероятностей, нужно по оси OX отметить границы интервалов x и $x + dx$, следующих друг за другом с шагом dx , а по оси OY отметить значение $W(x)$ для соответствующего интервала $[x: x+dx]$.

12. Увеличить полосу пропускания формирующего фильтра в 4 раза ($\Delta f^y = 40$ Гц). Повторить п. 3-9.
13. Уменьшить полосу пропускания формирующего фильтра в 10 раз ($\Delta f^y = 1$ Гц). Повторить п. 3-9.
14. Открыть вторую модель (рисунок 3.5, файл LabRab3_.mdl).
15. Принять частоту полезного сигнала равной $f_0 = 100$ Гц.
16. Принять ширину спектра Δf^y узкополосного случайного процесса равной 10 Гц ($\alpha = \Delta\omega^y = 2\pi \Delta f^y$), а центральную частоту f_0 равной 100 Гц ($\omega_0 = 2\pi f_0$).
17. Принять отношение сигнал/шум q равным единице, т.е. $q = 1$.
18. Рассчитать параметры формирующего фильтра с передаточной функцией (3.15) для принятых значений ширины спектра и центральной частоты. Принять в (3.15) $k = 1$. Установить рассчитанные значения коэффициентов числителя и знаменателя в блок **Transfer F_{сн}**.
19. Рассчитать по формуле (3.13) граничную частоту $f_{в.бш}$ белого шума, ограниченного по полосе, а по формуле (3.14) временной интервал дискретизации

(**Sample time**) τ_c . Установить рассчитанное значение τ_c в блок **Band-Limited White Noise**.

20. Рассчитать полосу пропускания ФНЧ по формуле (3.25), (3.26). Коэффициенты числителя и знаменателя установить в блоках **Transfer F_{cn1}** и **Transfer F_{cn2}** .

21. Установить значение «**Period**» блока «**Pulse generator**» равным значению «**Sample time**» из блока «**Band-Limited White Noise**».

22. Установить значение «**Time delay**» блоков «**Transport Delay**» равным значению «**Sample time**» из блока «**Band-Limited White Noise**».

23. Измерить дисперсию σ_x^2 узкополосного случайного процесса с помощью блока **Running RMS1**, возведя в квадрат среднеквадратическое отклонение.

24. Вычислить требуемую амплитуду A полезного сигнала $s(t)$ по формуле (3.30) с учётом принятого значения q и дисперсии σ_x^2 . Значения амплитуды A и частоты f_0 полезного сигнала $s(t)$ ввести в блок **Sine Wave2**. Для этого у блока **Sin Wave2** установить значение параметра «**Frequency**» («Частота») равным $\omega_0 = 2\pi f_0$ (из пункта 15), а значение параметра «**Phase**» («Фаза») установить равным 0.

25. Запустить вторую модель (рисунок 3.5) и снять осциллограммы процессов на выходе формирующего фильтра, квадратурных составляющих и огибающей узкополосного случайного процесса.

26. Измерить плотность вероятности огибающей узкополосного случайного процесса, используя рекомендации $A-F$ из п. 9.

27. Увеличить полосу пропускания формирующего фильтра в 4 раза ($\Delta f^y = 40$ Гц). Повторить п. 15-24.

28. Принять отношение сигнал/шум q равным 200. Повторить п. 14, пропустить п. 15 и далее выполнить п. 16-25.

29. Принять отношение сигнал/шум q равным 0. Повторить п. 14, пропустить п. 15 и далее выполнить п. 16-24.

3.5 Исследование статистических свойств огибающей и фазы узкополосного случайного процесса на основе разработанной программы

3.5.1 Описание программы

Главное окно программы изображено на рисунке 3.6. Это окно можно условно разделить на две части: верхнюю и нижнюю часть.

Верхняя часть окна программы предназначена для установления необходимых параметров:

– Узкополосного гауссовского случайного процесса (СП) $X(t)$: среднее значение m_x и среднеквадратичное значение σ_x , а также ширина его спектра Δf по уровню половинной мощности:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2},$$

– Наблюдения случайного процесса: время наблюдения (секунды) и частота дискретизации (Гц).

– Полезного сигнала: амплитуда A (В), центральная частота f_0 (Гц) и начальная фаза Ψ (градусы).

– Построения функции гистограммы $W(x)$:

а) минимальное V_{min} и максимальное V_{max} значения *огибающей* аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;

б) минимальное F_{min} и максимальное F_{max} значения *начальной фазы* аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;

в) минимальное $X_{cs_{min}}$ и максимальное $X_{cs_{max}}$ значения *косинусной и синусной квадратурных составляющих* аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;

г) интервал анализа dV для *огибающей* аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;

- д) интервал анализа dF для **начальной фазы** аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;
- ж) интервал анализа dX_{cs} для **косинусной и синусной квадратурных составляющих** аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;
- Среднеквадратическое отклонение (СКО) временной реализации узкополосного случайного процесса и отношение сигнал/шум по мощности q аддитивной смеси узкополосного случайного процесса и полезного сигнала;

При нажатии кнопки «Сгенерировать реализацию» формируется аддитивная смесь узкополосного случайного процесса и полезного сигнала, их квадратурные составляющие, а затем определяются гистограмма (оценка плотности вероятностей) указанных случайных процессов.

В нижней части окна отображаются результаты аддитивной смеси узкополосного случайного процесса (СП) и полезного сигнала, их квадратурных составляющих, а также соответствующие им гистограммы. В частности, результатами моделирования являются:

- реализация косинусной $X_c(t)$ квадратурной составляющей аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала;
- реализация синусной $X_s(t)$ квадратурной составляющей аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала;
- реализация $X(t)$ аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала;
- реализация огибающей V аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала;
- реализация начальной фазы φ аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала;
- гистограмма огибающей V аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала $W(V)$;

- гистограмма начальной фазы φ аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала $W(\varphi)$;
- гистограмма косинусной квадратурной составляющей $X_c(t)$ аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала $W(X_c(t))$;
- гистограмма синусной квадратурной составляющей $X_s(t)$ аддитивной смеси узкополосного СП и полезного сигнала $W(X_s(t))$;

Эти результаты изображаются в соответствующих графических окнах. Для копирования графиков в буфер обмена следует нажать кнопку «Сору» рядом с графическим окном.

В верхнем правом углу каждого графика имеется квадратная кнопка чёрного или светло-серого цвета. Нажатием на эту кнопку можно изменить цвет линии графика.

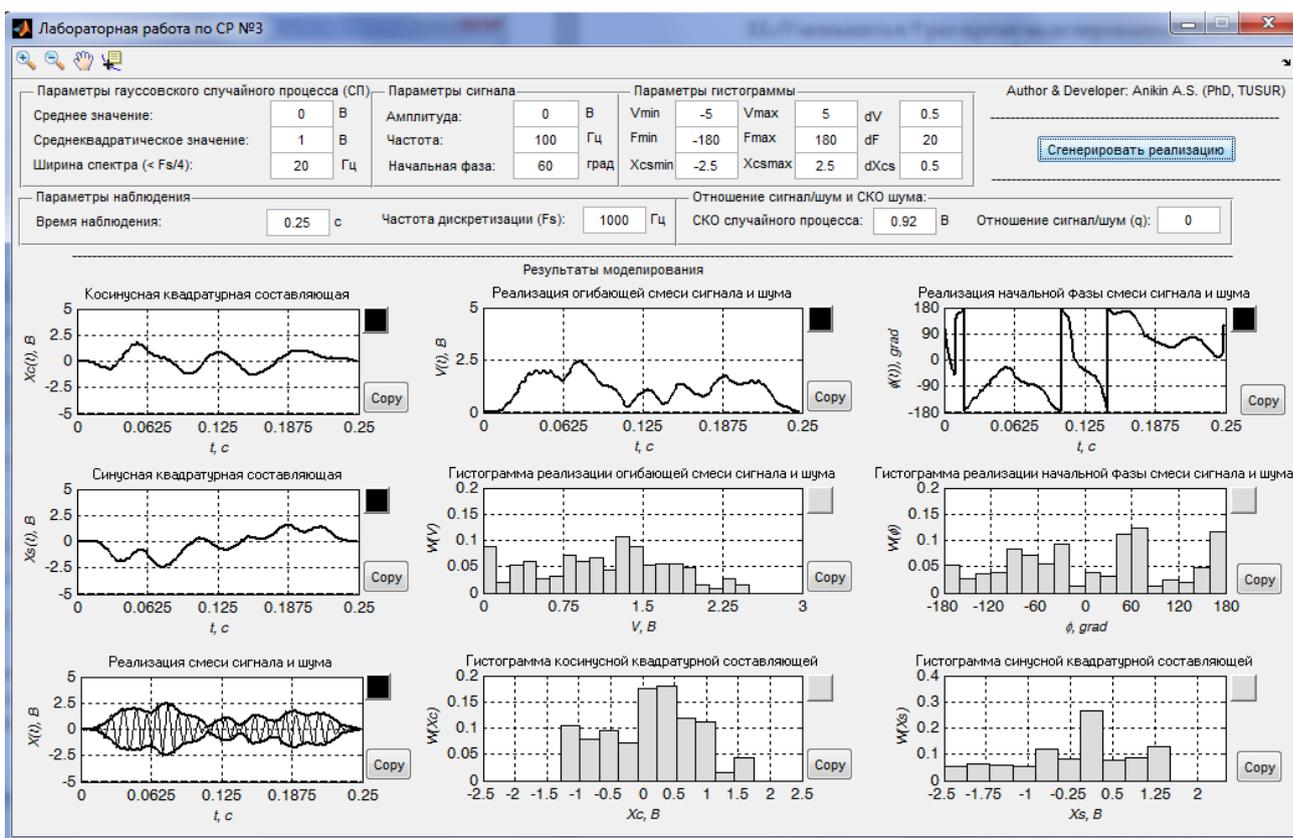


Рисунок 3.6 – Главное окно программы

3.5.2 Задание на лабораторную работу

1. Задать параметры узкополосного случайного процесса:

Среднее значение m_x равным 0 В;

Среднеквадратическое значение равным $\sigma_x = 1$ В.

Ширину спектра узкополосного случайного процесса $\Delta f^y = 20$ Гц.

Зафиксировать эти значения в тетради.

2. Задать параметры полезного сигнала:

Амплитуду A равной 0 В (полезный сигнал отсутствует). Зафиксировать отношение сигнал/шум q ;

Центральную частоту f_0 равной = 100 Гц.

Начальную фазу равной $\Psi = 60$ градусов.

Зафиксировать эти значения в тетради.

3. Задать время наблюдения равным 0,25 с и частоту дискретизации 1000 Гц.

Зафиксировать эти значения в тетради.

4. Нажать кнопку «Сгенерировать реализацию».

5. Визуально определить и задать интервал значений $[V_{min}:V_{max}]$, в который попадают наблюдаемые значения огибающей V . Аналогично найти интервалы наблюдаемые значений начальной фазы $[F_{min}:F_{max}]$ и квадратурных составляющих $[X_{csmin}:X_{csmax}]$ аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного случайного процесса. Границы интервалов можно взять с некоторым запасом, на усмотрение студента.

6. Установить значения интервалов dV , dF и dX_{cs} примерно равные $dV \approx (V_{max} - V_{min})/K_1$, $dF \approx (F_{max} - F_{min})/K_2$ и $dX_{cs} \approx (X_{csmax} - X_{csmin})/K_3$, где K_i – любое целое число из разумного интервала, например $[5, 20]$. Эти значения следует установить в качестве параметров построения гистограммы.

7. Нажать кнопку «Сгенерировать реализацию».

8. Снять реализации квадратурных составляющих, огибающей и начальной фазы аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного случайного процесса, а также соответствующие им гистограммы.

9. Установить ширину спектра узкополосного случайного процесса $\Delta f^y = 40$ Гц.
10. Выполнить п.п. 4 - 6.
11. Выполнить п. 8.
12. Установить ширину спектра узкополосного случайного процесса $\Delta f^y = 10$ Гц.
13. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
14. Установить ширину спектра узкополосного случайного процесса $\Delta f^y = 20$ Гц.
15. Задать время наблюдения равным 5 с.
16. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
17. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
18. Задать амплитуду A равной 0,25 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
19. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
20. Задать время наблюдения равным 5 с.
21. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
22. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
23. Задать амплитуду A равной 0,5 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
24. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
25. Задать время наблюдения равным 5 с.
26. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
27. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
28. Задать амплитуду A равной 1 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
29. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
30. Задать время наблюдения равным 5 с.
31. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
32. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
33. Задать амплитуду A равной 2 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
34. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
35. Задать время наблюдения равным 5 с.
36. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
37. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
38. Задать амплитуду A равной 5 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .

39. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
40. Задать время наблюдения равным 5 с.
41. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
42. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
43. Задать амплитуду A равной 10 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
44. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
45. Задать время наблюдения равным 5 с.
46. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
47. Задать время наблюдения равным 0,25 с.
48. Задать амплитуду A равной 100 В. Зафиксировать отношение сигнал/шум q .
49. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.
50. Задать время наблюдения равным 5 с.
51. Выполнить п.п. 10, 11. Дать объяснение полученным результатам.

3.5.3 Содержание отчета

Отчёт оформляется в соответствии с текущим образовательным стандартом ТУСУР [3] и содержит следующие элементы:

1. Титульный лист, оформленный в соответствии с приложением А.
2. Введение в виде краткого реферата сведений из параграфа 2.2. Введение должно содержать:
 - а) цель работы, определение понятий «узкополосный случайный процесс», «полезный сигнал», «аддитивная смесь полезного сигнала и узкополосного случайного процесса», «квадратурные составляющие», «огибающая», «начальная фаза» с необходимыми пояснениями в виде формул, рисунков.
 - б) описание порядка формирования узкополосного случайного процесса, аддитивной смеси полезного сигнала и узкополосного случайного процесса, а также их квадратурных составляющих.
3. Результаты работы. В этом разделе следует привести необходимые иллюстрации измеренных функций распределения и плотности вероятностей случайного процесса, получаемых в указанных выше пунктах.

Достаточно привести только те графики или таблицы из пунктов заданий, по которым будут сделаны выводы.

Рисунки с графиками должны иметь сквозную нумерацию. Иллюстрации должны иметь сопровождающий текст - объяснения полученных результатов со ссылкой на номер рисунка.

4. Выводы.

В этом разделе приводятся краткое изложение основных результатов лабораторной работы: каждый исполнитель лабораторной работы должен изложить свой результат и дать этому результату ясное объяснение. При написании выводов рекомендуется ссылаться на результаты работы, рисунки, таблицы и т. д. Основой для вывода может являться ответ на вопрос из списка вопросов к защите лабораторной работы. Выводы следует пронумеровать и указать ответственного за вывод.

Вывод должен содержать:

- I: утверждение по проделанной работе;
- II: подтверждение утверждения графиками или таблицами;
- III: объяснение утверждения (причины, почему так происходит и т.п.).

Для примера, ниже показан образец вывода для данной лабораторной работы:
«Математическое ожидание реализации случайного процесса непредсказуемо меняет свой вид при смене реализации.»

Это подтверждают рис. 1-4, где приведены реализации случайных процессов и соответствующие им временные зависимости математического ожидания.

Непредсказуемость математического ожидания можно объяснить следующим образом. Математическое ожидание на момент времени t в данном случае вычисляется как среднее арифметическое значений X_i реализации случайного процесса, которые предшествовали моменту времени t ($i = 1...n$, где n – общее количество значений X_i на момент времени t). Поскольку реализации случайным образом меняются, то случайно меняются значения X_i , а значит и среднее арифметическое этих значений, равное математическому ожиданию.»

Этот пример нельзя использовать в отчёте для выводов.

3.6 Вопросы к допуску к лабораторной работе

1. Что такое «узкополосный случайный процесс» и чем он отличается от «широкополосного случайного процесса» ?
2. Что такое узкополосный «гауссовский случайный процесс»?
3. Что такое аддитивная смесь полезного сигнала и узкополосного случайного процесса?
4. Что такое «огibaющая», «начальная фаза» и квадратурные составляющие узкополосного случайного процесса ? Есть ли огibaющая и начальная фаза у детерминированного процесса ? Поясните рисунком.
5. Огibaющая и начальная фаза узкополосного случайного процесса изменяется во времени детерминировано или случайно ? Пояснить рисунком.
6. Каким образом формируется узкополосный случайный процесс ?
7. Каким законам распределения подчиняется огibaющая и начальная фаза узкополосного гауссовского случайного процесса ? При каких условиях это справедливо ?
8. Что такое отношение «сигнал/шум» по мощности и как оно вычисляется ?

3.7 Вопросы к защите лабораторной работы

Объяснить и пояснить, что происходит с реализациями и гистограммой (оценкой плотности распределения вероятности) огibaющей, начальной фазы и квадратурных составляющих узкополосного случайного процесса при изменении:

1. времени наблюдения ?
2. ширины полосы узкополосного случайного процесса ?

Объяснить и пояснить, что происходит с реализациями и гистограммой (оценкой плотности распределения вероятности) огibaющей, начальной фазы и квадратурных составляющих узкополосного случайного процесса при изменении:

1. Времени наблюдения ?
2. Ширины полосы узкополосного случайного процесса ?
3. Отношения сигнал/шум ?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После успешного выполнения курса лабораторных работ по основам статистической радиотехники студенты радиотехнических специальностей обладают навыками в части исследования статистических характеристик случайных сигналов или помех в результате прохождения типовых радиотехнических звеньев. Это позволяет закрепить знания в части способов описания случайных сигналов, определения их статистических характеристик, в том числе, после прохождения через линейные системы.

Для углубленного изучения статистической радиотехники в части теоретического освоения дисциплины рекомендуется литература [4 – 12].

Основы статистической радиотехники, как и прежде, применяются для изучения статистической теории радиотехнических систем, для описания стохастических систем, а также для разработки оптимальных систем обработки информации в радиотехнических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Потемкин В. Г. Среда создания инженерных приложений MATLAB //М. : МИФИ. – 2002. – 444 с.
- 2 Чумаков А.С. Основы статистической радиотехники. – ТУСУР, 2003. – 394 с.
- 3 Образовательный стандарт ТУСУР 01-2021. Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления от 2021 // <https://regulations.tusur.ru/documents/70>. - 2021 (дата обращения: 23.04.2023).
- 4 Горяинов В. Т. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи/ В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлев, В. И. Тихонов; под ред. В. И. Тихонова. – М. : Сов. радио, 1980. – 544 с.
- 5 Давенпорт В. Б. Введение в теорию случайных сигналов и шумов, 1960. – 467 с.
- 6 Кловский Д. Д. Теория электрической связи. Сборник задач и упражнений : учеб. пособие для вузов / Д. Д. Кловский, В. А. Шилкин. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.
- 7 Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд. Переработанное и дополненное. – М. : Радио и связь, 1982. – 622 с.
- 8 Тихонов В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи : в 4 т. Т. 1. Случайные величины и процессы : учеб. пособие для вузов /В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых; под ред. В. В. Сизых. – М. : Радио и связь, 2003. – 400 с.
- 9 Тихонов В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи : в 4 т. Т. 2. Линейные и нелинейные преобразования : учеб. пособие для вузов /В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых; под ред. В. В. Сизых. – М.: Радио и связь, 2004. – 400 с.
- 10 Тихонов В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи : в 4 т. Т. 4. Оптимальное обнаружение сигналов : учеб. пособие для вузов /В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 368 с.
- 11 Купер Д. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989. – 376 с.

12 Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Наука, 1979. – Т. 426.

13 Блок экстраполятора нулевого порядка Zero-Order Hold // Языки программирования URL: https://life-prog.ru/2_88301_blok-ekstrapolyatora-nulevogo-poryadka-Zero-Order-Hold.html (дата обращения: 01.05.2023).

Приложение А

Пример оформления титульного листа

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра радиотехнических систем (РТС)

ТЕМА ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Отчёт к лабораторной работе по дисциплине «Статистическая радиотехника»

Выполнил:
студент гр. 12Х-Х
_____ А.А. Иванов

« ____ » _____ 202У г.

Руководитель:
доцент каф. РТС
_____ А.С. Аникин

« ____ » _____ 202У г.

202У