

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Аникин А. С., Зайков К. Д., Калашников Г. А.

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий,
лабораторных работ и организации самостоятельной работы студентов

Томск
2024

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.811.3я73

А–67

Рецензент:

Захаров Ф.Н., доцент кафедры радиотехнических систем,
кандидат физико-математических наук

Аникин, Алексей Сергеевич

А–67 Цифровая обработка сигналов : учебно-методическое пособие для проведения практических занятий, лабораторных работ и организации самостоятельной работы студентов технических направлений и специальностей / А. С. Аникин., К. Д. Зайков, Г. А. Калашников – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2024. – 157 с.

Учебно-методическое пособие по проведению практических занятий, лабораторных работ и организации самостоятельной работы для студентов составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО). Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по основам цифровой обработки сигналов, примеры решения задач, упражнения. Предназначено для студентов технических направлений подготовки и специальностей всех форм обучения.

Одобрено на заседании каф. РТС, протокол № 4 от 16.11.2023.

УДК 621.391(076.5)

ББК 32.811.3я73

© Аникин А.С.,
Зайков К. Д., Калашников Г. А., 2024
© Томск. гос. ун-т систем упр. и
радиоэлектроники, 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические материалы, примеры решения задач и выполнения лабораторно-практических работ, задачи для самостоятельного решения и организации лабораторно-практических занятий и самостоятельной работы студентов по основным темам дисциплины «**Цифровая обработка сигналов**». Материал разбит на разделы. В каждом разделе разбираются типовые задачи и лабораторно-практические задачи на определенную тему.

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки студентов технических направлений и специальностей всех форм обучения.

Некоторые примеры решения и задачи заимствованы из литературных источников [1 – 6], однако эти примеры значительно дополнены исходя из практики разбора задач со студентами.

Теоретический и справочный материал, необходимый для решения задач, приведён в литературе [7 – 21]. В частности, для решения задач необходимы знания по теории вероятностей [13 – 17], радиотехническим цепям и сигналам [18 – 21].

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	6
1.1 Разделы дисциплины	6
1.2 Проведение лабораторно-практических занятий.....	7
1.3 Материально-техническое обеспечение лабораторно-практических занятий.....	8
2 СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	10
2.1 Входной контроль	10
2.2 Тема «Знакомство с пакетом прикладных программ. Формирование дискретных сигналов»	11
2.2.1 Некоторые теоретические сведения.....	11
2.2.2 Знакомство с интерфейсом matlab	25
2.2.1 Примеры решения задач.....	30
2.2.2 Упражнения	31
2.3 Тема «Дискретное представление сигналов».....	35
2.3.1 Некоторые теоретические сведения.....	35
2.3.2 Примеры решения задач.....	42
2.3.3 Упражнения	47
2.4 Тема «Дискретное преобразование Фурье для спектрального анализа дискретных сигналов»	53
2.4.1 Некоторые теоретические сведения.....	53
2.4.2 Примеры решения задач.....	63
2.4.3 Упражнение	67
2.5 Тема «Линейная фильтрация дискретных сигналов»	71
2.5.1 Некоторые теоретические сведения.....	71
2.5.2 Примеры решения задач.....	86
2.5.3 Упражнения	97
2.6 Тема «Синтез дискретных систем»	103
2.6.1 Некоторые теоретические сведения.....	103
2.6.2 Примеры решения задач.....	114

2.6.3 Упражнения	122
2.7 Тема «Изменение частоты дискретизации сигналов в многоскоростных системах»	126
2.7.1 Некоторые теоретические сведения.....	126
2.7.2 Примеры решения задач.....	133
2.7.3 Упражнения	138
2.8 Тема «Эффекты квантования при обработке дискретных сигналов»	141
2.8.1 Некоторые теоретические сведения.....	141
2.8.2 Пример решения задачи	144
2.8.3 Упражнения	144
3 ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ	145
3.1 Проработка лекционного материала.....	145
3.2 Подготовка к опросам на занятиях.....	145
3.3 Подготовка к практическим занятиям	146
3.4 Подготовка к тестированию.....	147
3.5 Подготовка к лабораторной работе.....	147
3.6 Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе	148
3.7 Подготовка к экзамену (зачёту).....	148
3.8 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы	149
4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	151
5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	154
6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	155

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов в настоящее время является одной из фундаментальных дисциплин для подготовки специалистов радиотехнических специальностей. В этой дисциплине изучаются общие для различных технических областей принципы, методы, способы и алгоритмы обработки дискретных сигналов для реализации в средствах вычислительной техники.

Цифровая обработка сигналов играет ключевую роль в современном мире, влияя на различные аспекты нашей жизни. Цифровая обработка сигналов используется для передачи информации через различные коммуникационные каналы, включая интернет, мобильные сети и сети связи. Это позволяет эффективно передавать и обрабатывать данные, улучшая качество связи и повышая пропускную способность сетей. В здравоохранении цифровая обработка сигналов применяется для обработки и анализа медицинских изображений (например, снимков МРТ и КТ), мониторинга пациентов и диагностики различных заболеваний. В промышленности цифровая обработка сигналов используется для управления автоматическими системами, такими как роботы и автоматизированные производственные линии. Цифровая обработка сигналов также применяется для обработки и анализа различных типов данных, таких как аудио, видео, текст и изображения.

Цель изучения дисциплины «Цифровая обработка сигналов» связана с освоением подходов и способов описания дискретных сигналов, изучением методов расчёта временных и частотных характеристик дискретных систем, а также применения алгоритмов преобразования частоты дискретизации.

Практические занятия и лабораторные работы совмещены, поскольку типовые задачи цифровой обработки сигналов включают не только решение конкретной задачи, но и выполнение небольших исследований. Это позволяет эффективней закрепить материал лекционных занятий. Поэтому в настоящем пособии практические занятия и лабораторные работы называются лабораторно-практическими занятиями.

Практические и лабораторные задания, представленные в настоящем издании, выполняются учащимися в течение аудиторных занятий индивидуально под контролем преподавателя, либо в течение дистанционных занятий.

При изучении дисциплины «Цифровой обработки сигналов» у студентов формируются способности по применению основных методов цифровой обработки сигналов в радиотехнических устройствах, системах связи, радиолокации, радионавигации, а также при построении радиоэлектронных систем и комплексов.

1 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1 Разделы дисциплины

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов» разделена на разделы. В разделах раскрываются сведения о математическом описании дискретных сигналов, спектральном анализе дискретных сигналов, а также о способах анализа и синтеза дискретных систем (фильтров). По каждому разделу проводятся практические занятия и лабораторные работы, а также организуется самостоятельная работа студентов.

Наименование разделов и их содержание отражено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Наименование и содержание разделов

№ п/п	Наименование разделов	Содержание разделов
1	Введение	Применение цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах.
2	Дискретное представление сигналов	Дискретное представление сигналов, интервал дискретизации, спектр дискретного сигнала. Автокорреляционная и взаимная корреляционная функция дискретных сигналов и шумов.
3	Дискретное преобразование Фурье для спектрального анализа дискретных сигналов	Дискретное преобразование Фурье. Дискретная свёртка. Быстрое преобразование Фурье. Утечка спектра.
4	Линейная фильтрация дискретных сигналов	Дискретный трансверсальный и рекурсивный линейный фильтр. Разностное уравнение. Импульсная характеристика, системная функция, частотный коэффициент передачи, структурная схема дискретного фильтра. Устойчивость дискретного фильтра.
5	Синтез дискретных систем	Понятие синтеза дискретных систем. Методы синтеза нерекурсивных и рекурсивных дискретных систем. Автоматизация синтеза дискретных систем (фильтров).

Продолжение таблицы 1.1

№ п/п	Наименование разделов	Содержание разделов
6	Изменение частоты дискретизации сигналов в многоскоростных системах	Понятие многоскоростной системы. Прореживание (децимация), интерполяция и передискретизация. Автоматизация изменения частоты дискретизации.
7	Эффекты квантования при обработке сигналов	Понятие о цифровом сигнале и цифровом фильтре. Шумы квантования. Динамический диапазон аналого-цифрового преобразователя.

1.2 Проведение лабораторно-практических занятий

Лабораторно-практическое занятие начинается с определения темы. На одну тему может быть проведено несколько лабораторно-практических занятий, в зависимости от сложности задач и степени усвоения решения этих задач студентами.

На первом лабораторно-практическом занятии производится входной контроль и обсуждение его результатов. На остальных занятиях практическая работа направлена на усвоение различных примеров решения задач по цифровой обработке сигналов.

Преподаватель вместе со студентами повторяют необходимый для практических заданий и лабораторных работ материал из лекций. Затем преподаватель выдаёт студентам примеры решения задач. Студенты сначала самостоятельно разбирают примеры решения задач. При необходимости, преподаватель консультирует по вопросам, связанным с примерами решения задач в части цифровой обработки сигналов. Затем преподаватель выдаёт студентам задачи для упражнения. Студенты выполняют упражнения самостоятельно. Во время самостоятельного решения задач студентам запрещается передавать друг другу результаты решения задач и выполнения упражнений. При затруднениях, преподаватель, по возможности, оказывает консультацию и указывает студентам подход к решению задачи или указывает раздел методической литературы с ответом на вопрос студента. В противном случае, преподаватель даёт устные пояснения или демонстрирует решение задачи.

Студент представляет преподавателю результаты выполнения практических заданий в электронном виде при проведении аудиторных занятий или в виде файлов при проведении занятий дистанционно. При необходимости, преподаватель требует у студента пояснений к результатам выполнения задания. Задание выполнено студентом, если решение верно и не содержит принципиальных ошибок (например, логических или, по существу решения задачи). В противном случае, студент дорабатывает задание.

За одно занятие студент должен, как правило, решить 1 – 2 задачи. Если студент не успевает решить все заданные задачи в течение занятия, оставшиеся задачи студент решает дома к следующему занятию.

Консультация студентов, а также выдача им примеров решения задач, упражнений и задач для самостоятельной (домашней) работы осуществляется только во время занятий в аудитории или дистанционно.

Преподаватель должен оценивать и добиваться правильного понимания студентом существа и подхода к решению задачи. Это можно сделать только в ходе личной беседы.

Для закрепления материала, студентам даётся 1 – 2 домашние задачи на самостоятельное решение.

Студент должен проявлять внимательность и аккуратность при выполнении заданий, исправлять ошибки и недочёты по указанию преподавателя, в том числе, грамматические ошибки, небрежное оформление решений задач, графиков, рисунков, неточности в описании решения задачи.

1.3 Материально-техническое обеспечение лабораторно-практических занятий

Учебная аудитория для проведения практических занятий практического типа: 634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 74, 432 ауд.

Описание имеющегося оборудования:

- Доска магнитно-маркерная BRAUBERG;
- LMC-100103 Экран с электроприводом Master Control Matte 203*203 см White FiberGlass, черная кайма по периметру;
- Проектор NEC «M361X»;
- Системный блок (16 шт.);
- Мониторы (16 шт.);
- Компьютер;
- Комплект специализированной учебной мебели;
- Рабочее место преподавателя.

Программное обеспечение:

- LibreOffice
- Microsoft Windows 7 Pro
- OpenOffice
- PTC Mathcad 13, 14
- Scilab;
- Matlab версии не ниже 2010a.

Расположение рабочих мест в учебной аудитории и освещение должно удовлетворять действующим требованиям санитарных правил и норм (СанПиН).

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидами освоение материала осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения. Для лиц с нарушениями слуха предусмотрено использование мультимедийных средств и других технических средств приема/передачи учебной информации в доступных формах. Учебная аудитория, в которой занимаются обучающиеся с нарушением слуха, оборудована компьютерной техникой, аудиотехникой. Для лиц с нарушениями зрения предусмотрено использование слайдов на экране.

2 СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Ниже приводятся примерные темы и содержание лабораторно-практических занятий. При проведении лабораторно-практического занятия даются необходимые сведения из теории, типовые задачи и примеры их решения, а также методические рекомендации.

2.1 Входной контроль

На первом занятии проводится входной контроль для проверки комплекса остаточных знаний, выявления пробелов в знаниях, получения сведений об уровне подготовки студентов. Это позволяет приблизительно оценить степень освоения минимальных знаний, необходимых для успешного освоения дисциплины.

При проведении входного контроля студентам выдаются списки с вопросами. Вопросы составлены таким образом, чтобы ответы на них показывали минимум знаний по уже пройденным дисциплинам необходимый для освоения дисциплины.

Студенты письменно отвечают на вопросы. Преподаватель проверяет ответы на вопросы студентов. На основе анализа ответов преподаватель в ходе чтения материалов лекций или при проведении практических занятий даёт студентам необходимые пояснения в вопросах, которые вызвали трудности при ответе на вопросы входного контроля. При необходимости, преподаватель разбирает со студентами те вопросы, которые вызвали у них трудности.

1. Что такое сигнал?
2. Какие формы сигналов Вам известны? Напишите формулы для этих сигналов.
3. Что такое мощность сигнала?
4. Что такое ряд Фурье и преобразование Фурье?
5. Изобразите амплитудный и фазовый спектр синусоиды амплитудой 1 В и начальной фазой 3 рад?
6. Что такое фильтр? В каких задачах применяется фильтр? Приведите примеры.
7. Какой фильтр называют линейным?
8. С помощью каких характеристик описывают фильтр? Поясните каждую характеристику. Поясните рисунком.
9. Что такое комплексная частотная характеристика цепи? Что показывает амплитудно-частотная характеристика цепи? Что показывает фазочастотная характеристика цепи?
10. Что понимают под комплексной огибающей радиосигнала?
11. Что понимают под начальной фазой радиосигнала?
12. Что такое нелинейный элемент цепи?

2.2 Тема «Знакомство с пакетом прикладных программ. Формирование дискретных сигналов»

Цель: познакомиться с синтаксисом основных команд пакета прикладных программ и формированием простейших сигналов.

Вопросы для изучения:

1. Пакет прикладных программ Matlab. Файлы-сценарии. Файлы процедуры-функции.
2. Базовые сигналы при цифровой обработке.

2.2.1 Некоторые теоретические сведения

Пакет прикладных программ Matlab (сокр. От MATrix LABoratory, матричная лаборатория) предназначена для моделирования, вычисления и выполнения инженерных расчётов и проведения научных исследований. Базовым объектом в Matlab являются матрицы. Вычисления в Matlab выполняются в арифметике с плавающей точкой.

Пакет прикладных программ Matlab обеспечивает интерпретацию команд и операторов, которые вводятся пользователем с помощью командной строки так, что Matlab выполняет их обработку с выдачей результата. Однако, в Matlab существует возможность запуска на выполнение заранее подготовленной последовательности команд и операторов, образующие скрипт (программу) и представленную в виде М-файла с расширением *.m.

Существует два основных вида М-файлов: файлы-сценарии и процедуры-функции. М-файлы должны располагаться в рабочем каталоге, отображаемом в списке путей системы Matlab. Для изменения рабочего каталога необходимо выбрать в меню File пункт SetPath....

Файлы-сценарии

Файл-сценарий – это файл в текстовом формате, который содержит последовательность команд и операторов без заголовка вначале. В этом текстовом файле отсутствуют операнды, которые обозначают начало и конец сценария или точки входа. По умолчанию, началом сценария – это начало текстового файла, а конец – конец файла.

Имя сценария определяет его файла. Имя файла-сценария:

а) может содержать только символы латинского алфавита от А до Z и от а до z, цифры от 0 до 9 и символ подчеркивания;

б) должно начинаться с символов А...Z или а...z, или допустимо начало с символа подчеркивания.

После выполнения оператора результат отображается в окне командной строки. Однако, чтобы Matlab не выводил результат и не тратил ресурсы вычислителя на вывод результата, в конце каждого оператора необходимо ставить точку с запятой – «;».

Файл процедуры-функции

Файл процедуры-функции – это файл в текстовом формате, который содержит последовательность команд и операторов с обязательным заголовком в определённом формате:

```
function [<список выходных параметров>] = <имя функции>(<список
входных параметров>)

% Тело процедуры-функции
% {

% }

return
```

Имя функции должно совпадать с именем файла процедуры-функции.

При выполнении в Matlab процедуры-функции она сначала компилируется во внутренний формат, после чего исполняется. Поэтому время исполнения процедуры-функции на порядок быстрее по сравнению с файлом-сценария, поскольку последний исполняется в режиме интерпретации команд.

Начиная со второй строки процедуры-функции обычно добавляют комментарии, которые являются справкой по использованию процедуры-функции. Эта справка появляется после вызова с помощью команды *help* и имени функции. Например:

```
help filter % справка по функции filter
```

В качестве примера, рассмотрим процедуру-функцию для вычисления минимального и максимального значения массива (файл *minmax.m*):

```
function [minim, maxim] = minmax(a)
minim = min(a);
maxim = max(a);
return
```

Из примера видно, что процедура-функция имеет несколько возвращаемых значений. Пример процедуры-функции можно использовать следующим образом:

```
[a,b] = minmax(x); % В a будет минимум, а в b - максимум  
a = minmax(x); % В a будет минимум, а максимум не выводится
```

Процедура-функция может не иметь возвращаемого результата вычислений. Например, процедура-функция может быть предназначена для построения нескольких графиков.

Основные данные в пакете Matlab

В пакете прикладных программ Matlab основным типом данных является прямоугольный массив комплексных чисел. Для создания этого типа данных необходимо переменной присвоить некоторое значение.

Варианты создания массива:

а) Пустой массив – массив нулевого размера:

```
a = []
```

б) Скаляр – частный случай матрицы или массива размером 1×1 :

```
a = 50  
b = -40.8  
c = 0.025 + 1,8i % Комплексное число
```

в) Вектор длиной n – частный случай матрицы или массива размером $1 \times n$, который записывается в квадратных скобках как последовательность чисел, разделённых пробелами:

```
a = [0 10]  
b = [30.1 -60]  
c = [a 40 b] % Результат c = [0 1 4 3.1 -6]
```

г) Монотонно возрастающий (убывающий) вектор создаётся в следующем формате: *первый_элемент* : [*шаг*:] *конечный_элемент*. Если шаг равен 1, то его не пишут:

```
a = 1:9 % Результат a = [1 2 3 4 5 6 7 8 9]  
b = 4:-2:-4 % Результат b = [4 2 0 -2 -4]  
c = -1:3:10 % Результат c = [-1 2 5 8]
```

д) Массив, элементы которого записываются в квадратных скобках так, что элементы (столбцы) разделяются пробелами, а строки разделяются точкой с запятой:

```
a = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]    % Результат  a =  $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Bmatrix}$ 
```

Для объявления специальных массивов часто используют следующие функции:

- zeros*(*m*, *n*) – возвращает массив размером *m*×*n*, заполненный нулями;
- ones*(*m*, *n*) – возвращает массив размером *m*×*n*, заполненный единицами;
- rand*(*m*, *n*) – возвращает массив размером *m*×*n*, заполненный псевдослучайными вещественными числами, распределенными по равномерному закону;
- randn*(*m*, *n*) – возвращает массив размером *m*×*n*, заполненный псевдослучайными вещественными числами, распределенными по нормальному (гауссовскому) закону.

В этих специальных функциях первый операнд может опускаться. Тогда возвращается квадратная матрица *n*×*n*:

```
a = zeros(1, 10)    % Вектор из 10 нулей  
b = ones(200)      % Матрица 200×200 единиц  
c = rand(20, 500)  % Матрица 20×500 псевдослучайных чисел
```

Доступ к массивам и элементам массива в пакете Matlab

Доступ к массивам осуществляется с помощью их имен. Операции с массивами выполняются по значению (например, при исполнении операции присваивания копируются все элементы массива):

```
a = [2 4 5; 4 6 1]  
b = a
```

Переменная *b*, в этом случае, представляет собой массив (матрицу) размером 2×3 со значениями [2 4 5; 4 6 1]. Значения массивов *a* и *b* расположены в разных участках памяти.

Для доступа к элементу или элементам массива после имени следует указать в круглых скобках номер (индекс) элемента, состоящий из двух чисел или векторов, разделенных запятой. Нумерация (индексация) элементов начинается с единицы. Первое число или вектор определяет номер строки (номера строк), второе – соответственно столбца. Если номер строки пропущен (обычно при обращении к элементам вектора), то по умолчанию считается равным единице:

```
a = [11 12 13 14 15; % Исходный массив
     21 22 23 24 25;
     31 32 33 34 35;
     41 42 43 44 45]

b = a(2, 3)          % Результат: b = 23
a(3) = 6            % Результат: a(1,3) = 0
c = a(3, 2:4)       % Результат: c = [32 33 34]
d = a([1 3], 1:3)   % Результат: d = [11 12 13;
                                     % 31 32 33]

a([1 4], [1 5]) = zeros(2,2);
                    % Результат:
                    % a = [0 12 13 14 0;
                    % 21 22 23 24 25;
                    % 31 32 33 34 35;
                    % 0 42 43 44 0]
```

Арифметические операторы в пакете Matlab

В пакете Matlab используются два основных типа арифметических операций:

- Операции над матрицами определены по правилам линейной алгебры;
- Операции над массивами выполняются поэлементно.

Для обозначения операций над элементами массива используется знак точки«.» (см. таблицу 2.1).

Логические операторы и операторы отношения в пакете Matlab

В пакете Matlab используются логические операторы из таблицы 2.2. Логические операторы выполняют поэлементное сравнение двух массивов (матриц). Если один из операндов – скаляр, то этот скаляр поэлементно сравнивается со всеми элементами другого операнда.

В качестве логические операторы возвращают результат в виде массива того же размера, элементы которого равны единице, если результат сравнения

соответствующих элементов равен ИСТИНА, и нулю – в противоположном случае.

Таблица 2.1 – Основные арифметические операции над матрицами и массивами

Знак	Операция
+	<p>Сложение: $C=A+B$ Если A – скаляр, B – массив, то $C_{ij} = A + B_{ij}$. Если A – массив, B – скаляр, то $C_{ij} = A_{ij} + B$. Если A – массив, B – массив, то $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Для выполнения операции сложения массивов они должны иметь одинаковый размер.</p>
–	<p>Вычитание: $C=A-B$ Если A – скаляр, B – массив, то $C_{ij} = A - B_{ij}$. Если A – массив, B – скаляр, то $C_{ij} = A_{ij} - B$. Если A – массив, B – массив, то $C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$. Для выполнения операции вычитания массивов они должны иметь одинаковый размер.</p>
*	<p>Умножение матриц: $C=A*B$ Если A – скаляр, B – массив, то $C_{ij} = A \cdot B_{ij}$. Если A – массив, B – скаляр, то $C_{ij} = A_{ij} \cdot B$. Если A – массив, B – массив, то $C_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot B_{jk}$. Для выполнения операции число столбцов первого массива должно быть равно числу строк второго массива.</p>
.*	<p>Поэлементное умножение: $C=A.*B$ Если A – скаляр, B – массив, то $C_{ij} = A \cdot B_{ij}$. Если A – массив, B – скаляр, то $C_{ij} = A_{ij} \cdot B$. Если A – массив, B – массив, то $C_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}$. Для выполнения операции поэлементного умножения массивов они должны иметь одинаковый размер.</p>
`	<p>Транспонирование матрицы: $A^`$ Для действительных массивов результатом является транспонированная матрица. Для комплексных массивов транспонирование дополняется комплексным сопряжением.</p>
.`	<p>Транспонирование массива: $A.^`$ Для действительных и комплексных массивов строки просто заменяются столбцами. Комплексное сопряжение не выполняется.</p>

Таблица 2.2 – Логические операторы в пакете Matlab

Операция	Отношение
>	Больше
<	Меньше
>=	Больше или равно
<=	Меньше или равно
==	Равно
~=	Не равно

Операторы <=, >= используются для сравнения только действительных частей комплексных элементов, а операции == и ~= осуществляют сравнение как действительных, так и мнимых частей:

```
X = [2 4 2.5;
      12i 6 3]
Y = [3 4 12;
      2 3 6]
Z = X >= Y
% Результат
Z = [0 1 0;
      0 0 1]
```

Логические операции в пакете Matlab

В пакете Matlab используются в основном три логические операции из таблицы 2.3.

Таблица 2.3 – Логические операции в пакете Matlab

Операция	И	ИЛИ	НЕ
Обозначение	&		~

При выполнении логических операций массив рассматривается как совокупность булевых переменных, так что значение 0 соответствует булеву значению FALSE, а любое другое значение – булеву значению TRUE. Функция ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ реализована в виде функции xor(A, B). Логические операции имеют низший приоритет по отношению к операциям отношения и арифметическим операциям.

Оператор цикла с заданным числом операций в пакете Matlab

Оператор цикла с заданным количеством операций имеет следующий формат (синтаксис):

```
for v = <выражение-массив>
<операторы>
end
```

В качестве выражения-массива на практике чаще всего применяют линейные конструкции вида $m : n$ или $a : : b$:

```
for i = 1:10
x(i) = i.^ 2
end % Результат x = [1 4 9 16 ... 100]
y = []
for k = [0 3 1 2]
y = [y 2.^k]
end % Результат y = [1 8 2 4]
```

Для прерывания выполнения цикла используется оператор `break`.

Оператор цикла с неопределённым числом операций в пакете Matlab

Оператор цикла с неопределённым количеством операций имеет следующий формат (синтаксис):

```
while <логическое выражение>
<операторы>
end
```

Цикл `while ... end` выполняется до тех пор, пока логическое выражение не станет нулевым:

```
i = 1
s = 0
while x(i) ~= 0 & i < 4
s = s + x(i)
i = i + 1
end
```

Условный оператор в пакете Matlab

Оператор условного выражения имеет следующий формат (синтаксис):

```
if <логическое выражение>  
  <операторы>  
elseif <логическое выражение>  
  <операторы>  
else  
  <операторы>  
end
```

В условном выражении может присутствовать несколько блоков elseif или данный блок может отсутствовать:

```
if a > 0  
  b = 2  
elseif a < 0  
  b = 0  
else  
  b = 1  
end
```

Также может отсутствовать блок else.

Другой вариант организации условного выполнения операторов с помощью switch:

```
switch <анализируемое выражение>  
  case <выражение 1>  
    <операторы>  
  case <выражение 2>  
    <операторы>  
  ...  
  otherwise  
    <операторы>  
end
```

Оператор switch последовательно сравнивает анализируемое выражение с выражениями, записанными после case, и если выражения равны, то выполняются соответствующие операторы. Если не было найдено ни одного равенства, то выполняются операторы, записанные после otherwise.

Построение графиков в пакете Matlab

В пакете Matlab имеются различные графические возможности представления данных.

Функция *plot* служит для построения графика элементов одномерного массива в зависимости от номера имеет следующий формат (синтаксис):

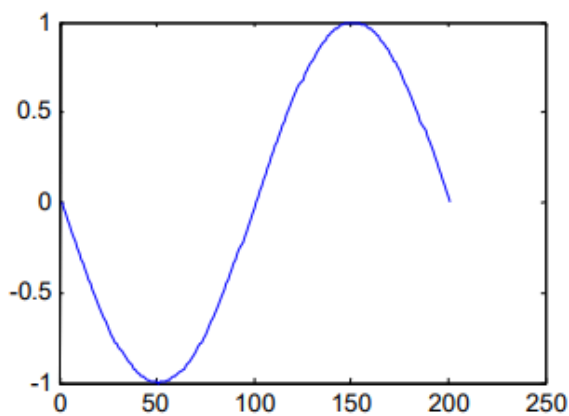
```
plot(y)
plot(x,y)
plot(x,y,s)
plot(x1,y1,s1,x1,y1,s1)
```

Если элементы массива *y* комплексные, то строится график, каждая точка которого определяется соответствующей действительной и мнимой частями числа.

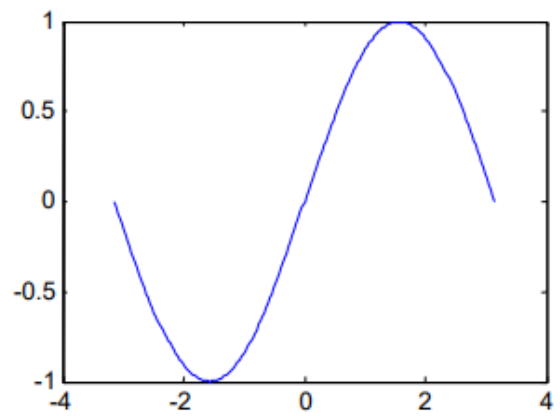
Функция *plot(x,y)* соответствует построению обычной функции, когда одномерный массив *x* соответствует значениям аргумента, а одномерный массив *y* – значениям функции (см. таблицу 2.4).

Функция *plot(x,y,p)* аналогична *plot(x,y)*, с той разницей, что текстовая строка *p* определяет цвет и стиль линии, а также вид точек графика:

```
x = -pi:pi/100:pi
y = sin(x)
plot(y) % Результат показан на рис. 1.1,а
plot(x, y) % Результат показан на рис.1.1,б
```



а



б

Рисунок 2.1 – Пример вывода графиков с помощью функции `plot`

Строка *p* может содержать до трех символов из таблицы 2.4. Если цвет линии не указан, он выбирается по умолчанию из шести первых цветов, с желтого до синего, повторяясь циклически. Функция `plot(x1,y1,p1,x2,y2,p2)` позволяет объединить несколько функций `plot(x, y, p)`.

Таблица 2.4 – Параметры функции `plot`

Тип линии	
Непрерывная	-
Штриховая	--
Двойной пунктир	:
Штрихпунктирная	-.
Тип точки	
Точка	.
Плюс	+
Звездочка	*
Кружок	o
Цвет	
Фиолетовый	m
Голубой	c
Красный	r
Зеленый	g
Синий	b
Черный	k

Для включения сетки на графике используется функция `grid on`, которую записывают сразу после функции `plot`.

Функция `stem` служит для построения графика элементов одномерного массива в виде вертикальных линий, которые оканчиваются в точках графика кружочком и имеет следующий формат (синтаксис):

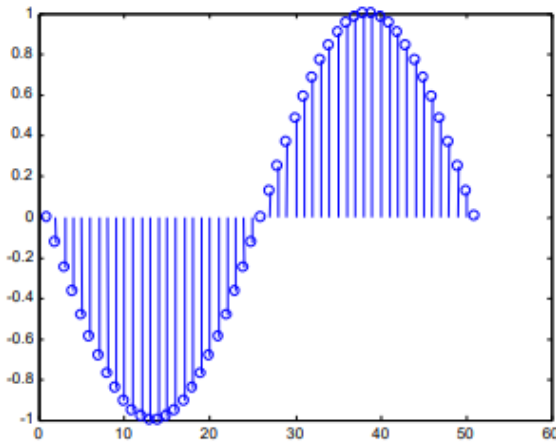
```
stem(y)
stem(x,y)
stem(x,y,p)
```

Первый вариант строит зависимость значений элементов массива от номера элемента, вторая зависимость – $y(x)$, а третья – аналогична второй, за исключением того, что позволяет задавать цвет и стиль линий с помощью строки *p*, аналогично функции `plot`:

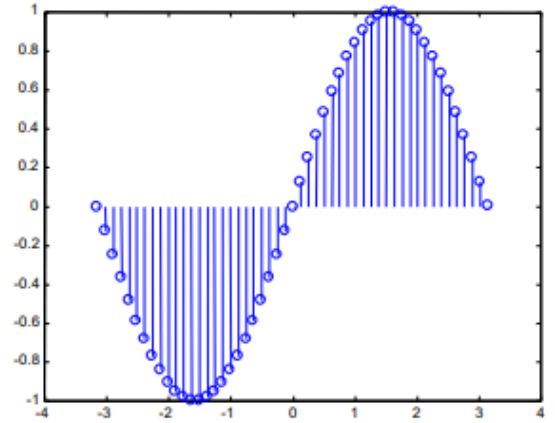
```

x = -pi:pi/25:pi
y = sin(x)
stem(y) % Результат показан на рис. 1.2,а
stem(x, y) % Результат показан на рис.1.2,

```



а



б

Рисунок 2.2 – Пример вывода графиков с помощью функции stem

Функция figure служит для создания специального окна для того, чтобы в это окно выводились все графики до тех пор, пока ещё раз не встретится эта же функция figure.

Функция subplot служит для разбиения окна на области и выбора активной области для вывода графика:

```
subplot(m,n,p);
```

где m указывает, на сколько частей разбивается окно по вертикали, n – по горизонтали, p определяет номер области, в которую будут выводиться графические данные:

```

n = 0:99
x = sin(0.3*n)
y = cos(0.4*n)
subplot(211)
plot(x)
subplot(212)
plot(y)

```

Указанная последовательность команд разбивает окно вывода на две части по вертикали и выводит график x в верхней части, а график y – в нижней:

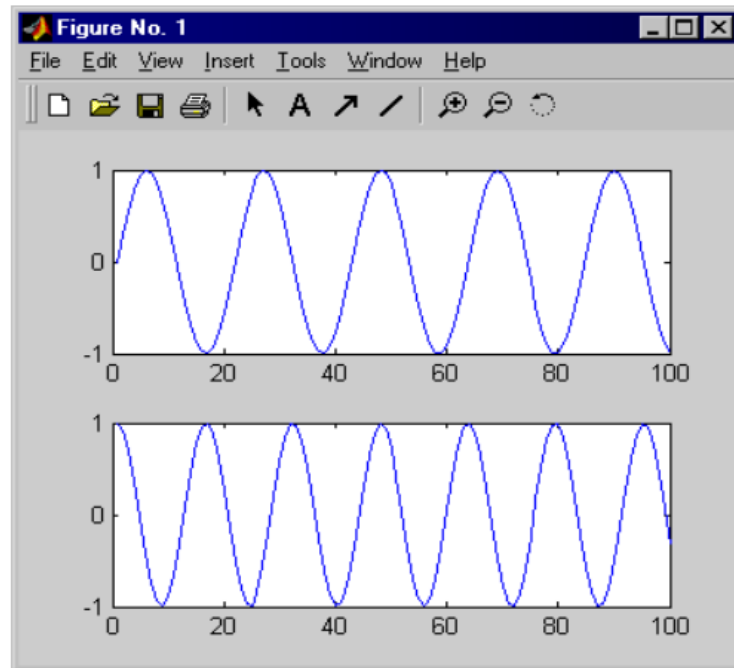


Рисунок 2.3 – Результат применения функции subplot

Базовые сигналы при цифровой обработке сигналов

Основными сигналами при цифровой обработке сигналов являются:

а) **Единичный импульс – дельта-функция:**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

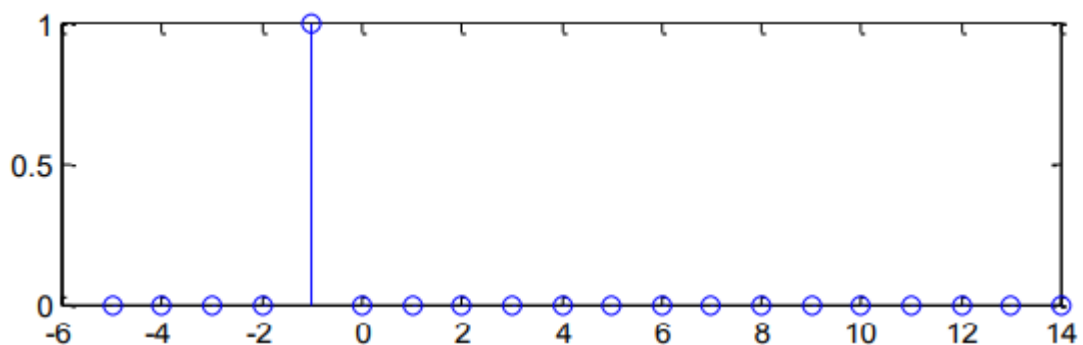


Рисунок 2.4 – Единичный импульс

б) **Единичный скачок – функция Хевисайда:**

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

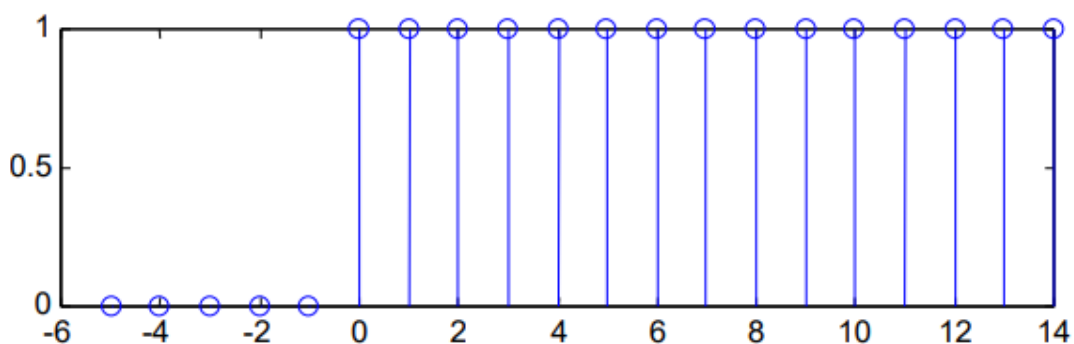


Рисунок 2.5 – Единичный скачок

в) **Убывающая экспонента:**

$$g(k) = a^k \cdot u(k), \quad |a| < 1. \quad (2.3)$$

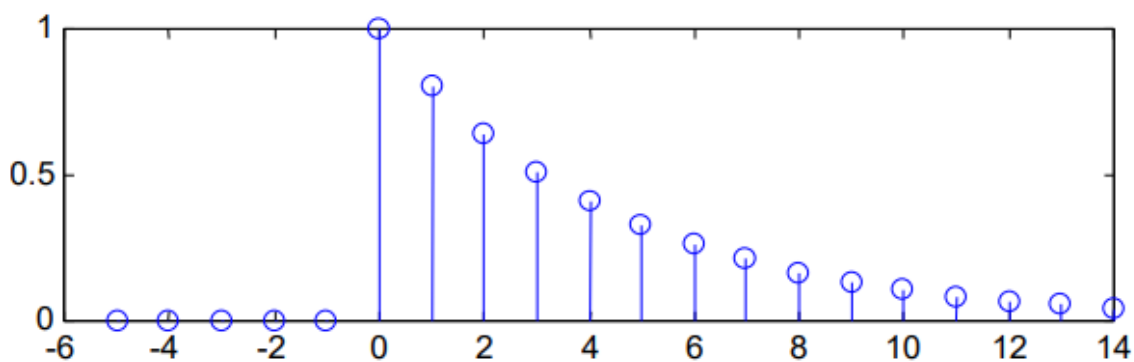


Рисунок 2.6 – Убывающая экспонента ($a = 0,8$)

г) **Косинусоида:**

$$h(k) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot k \cdot \Delta t + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{k_0} + \varphi_0\right). \quad (2.4)$$

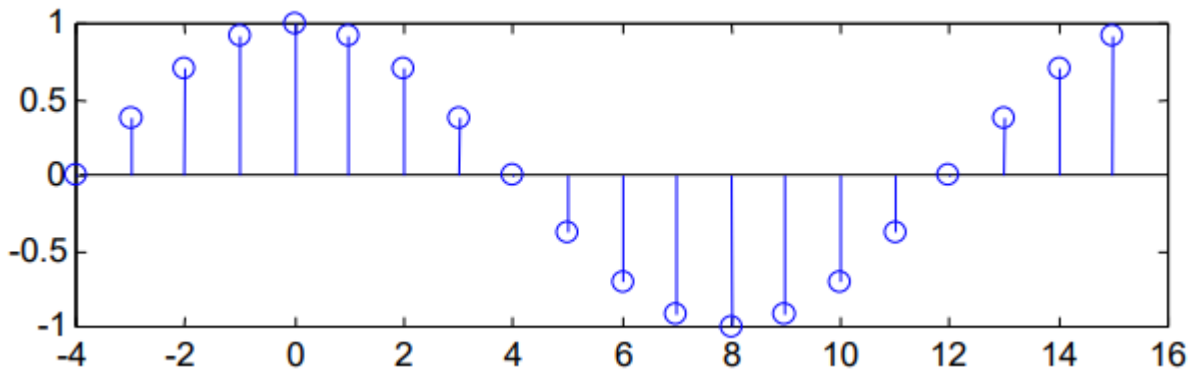


Рисунок 2.7 – Косинусоида ($A = 1, k_0 = 16, \varphi_0 = \pi/2$)

д) **Убывающая косинусоида:**

$$z(k) = h(k) \cdot g(k). \quad (2.5)$$

д) **Комплексная экспонента:**

$$q(k) = \exp(j \cdot \omega \cdot k) = \cos(\omega \cdot k) + j \cdot \sin(\omega \cdot k). \quad (2.6)$$

2.2.2 Знакомство с интерфейсом matlab

При открытии математического пакета *MATLAB* мы увидим три основные панели (рисунок 2.8): “*Current folder*” (стрелка 1), в котором мы храним файлы, с которыми мы работаем, “*Command window*” (стрелка 2), в которую мы вводим команды, и рабочее пространство “*Workspace*” – окно для хранения переменных (стрелка 3):

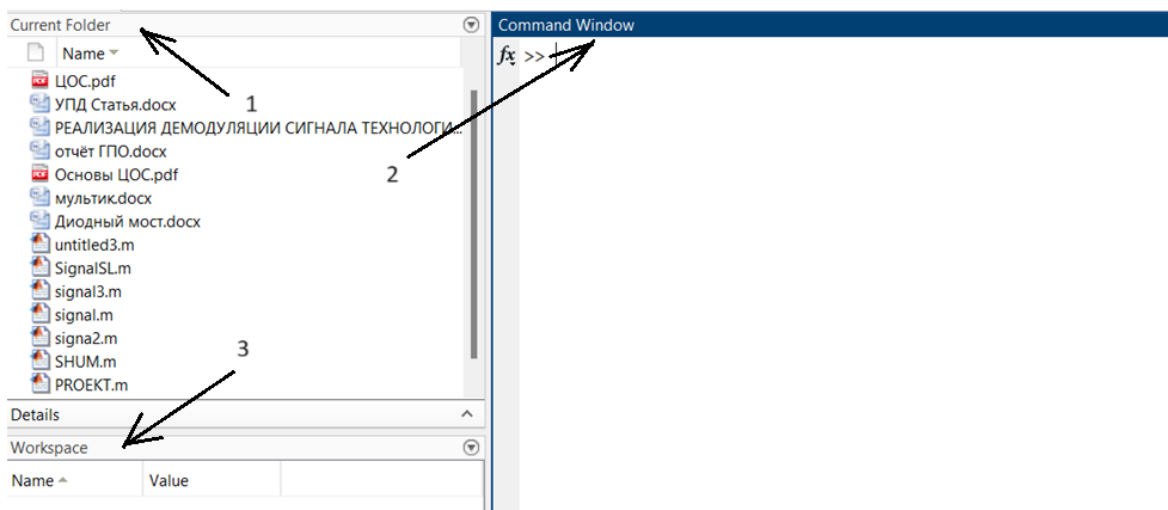


Рисунок 2.8 – Основные панели *MATLAB*

Если в панели “*Current folder*” выбрать один из *m*-файлов и кликнуть на него дважды левой кнопкой мыши, то в окне “*Editor*” откроется программный код, который написан пользователем в данном *m*-файле (рисунок 2.9):

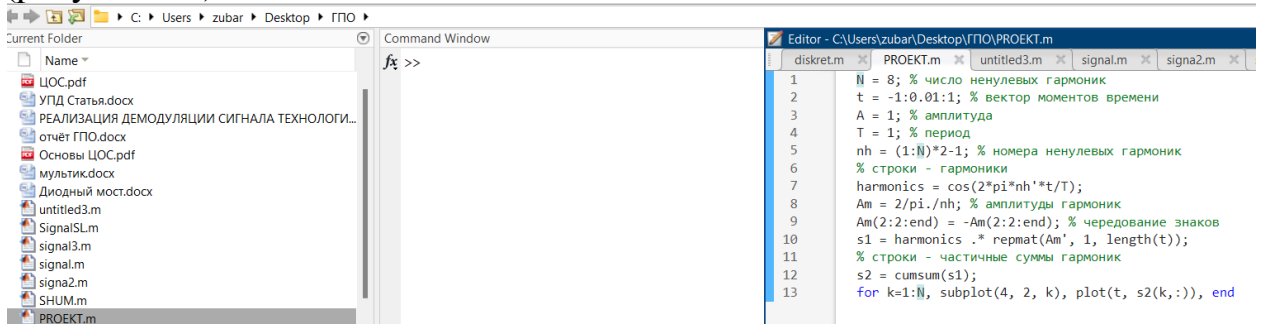


Рисунок 2.9 – Открытие *m*-файлов в окне “*Editor*”

Для запуска программы, выведенной в окне “*Editor*”, нужно кликнуть на кнопку “*Run*” на панели инструментов (рисунок 2.10):



Рисунок 2.10 – Панель инструментов в *MATLAB*

В конечном итоге программа нам выдаёт отдельное окно с названием “*Figure 1*”, где представлена реализация написанной программы (рисунок 2.11):

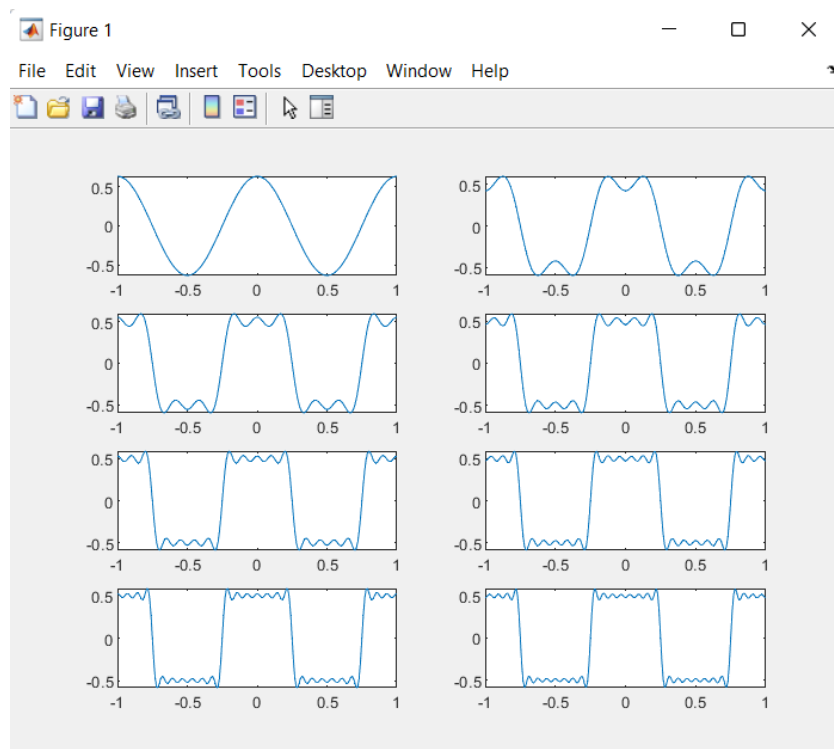


Рисунок 2.11 – Пример результата запуска программы

Создание *m*-файла

Создать новый *m*-файл можно несколькими способами:

- Нажатием сочетания клавиш *Ctrl* + *N*;
- Выбрать на панели инструментов кнопку *New Script* и кликнуть на неё левой кнопкой мыши (рисунок 2.12):

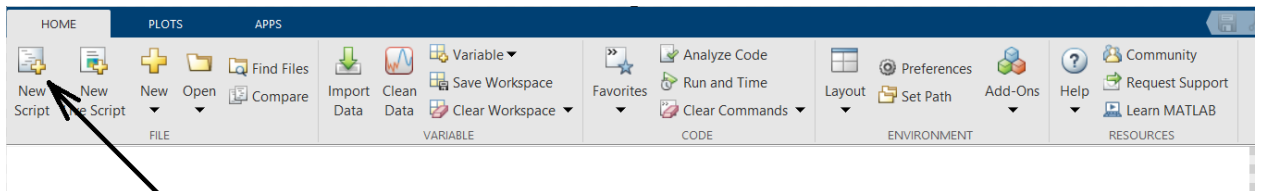


Рисунок 2.12 – Выбор кнопки “*New Script*” на панели инструментов

После выполнения одного из этих действий система нам откроет окно “*Editor*”, в котором будет указано название нашего *m*-файла (по умолчанию файл программа называет “*untitledn*” (где $n = 1, 2, 3, \dots$)), где мы можем начать писать свой программный код (рисунок 2.13):

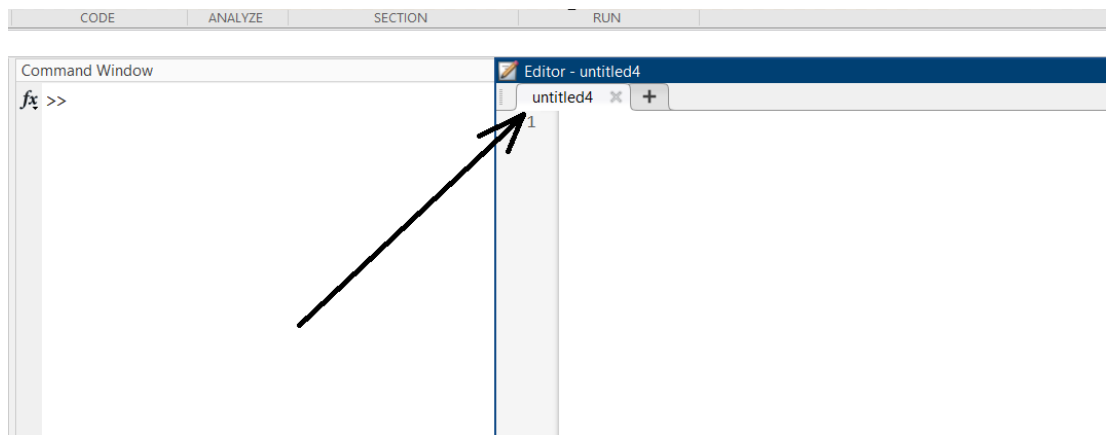


Рисунок 2.13 – Открытие окна “*Editor*”

Сохранение *m*-файла

Для того чтобы сохранить созданный нами файл нужно на панели инструментов выбрать кнопку *Save* и кликнуть на неё левой кнопкой мыши либо воспользоваться сочетанием клавиш *Ctrl* + *S* (рисунок 2.14):

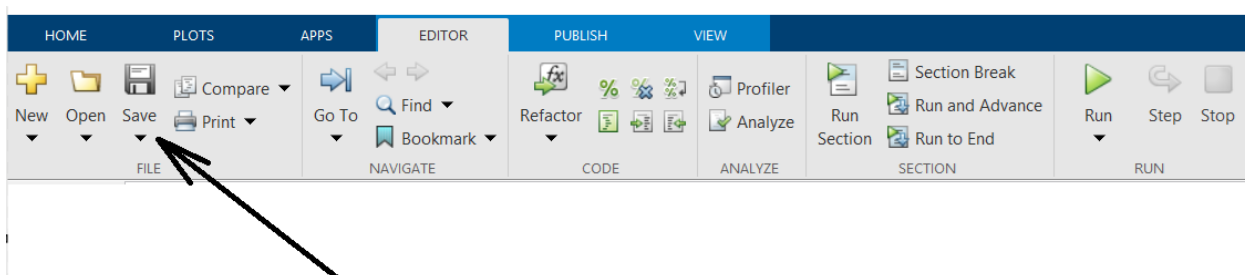


Рисунок 2.14 – Сохранение созданного *m*-файла

После нажатия данной кнопки система предлагает нам сохранить наш *m*-файл на рабочем столе нашего компьютера. При желании мы можем назвать наш *m*-файл как угодно, но только с использованием английской раскладки клавиатуры не используя пробелы и различные знаки препинания. Если одно из этих условий будет не соблюдаться, то программа нам выдаст ошибку, из-за которой наш программный код не будет работать при повторном открытии *m*-файла (рисунок 2.15):

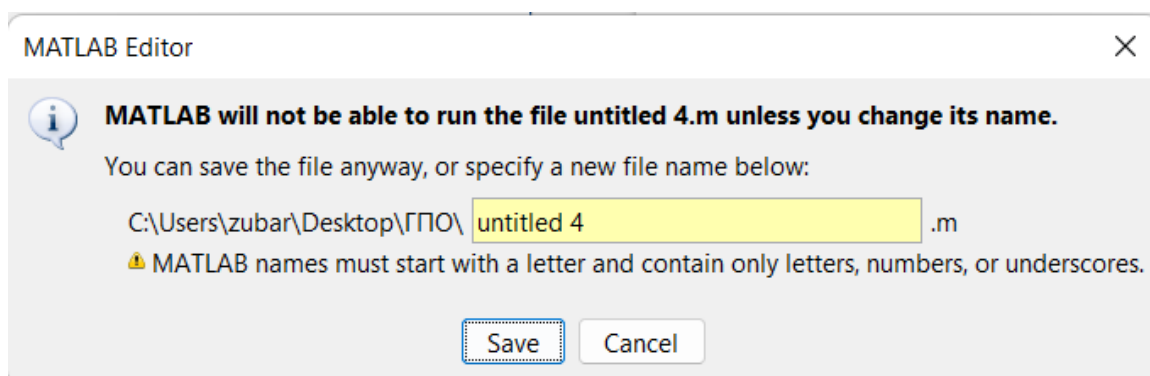


Рисунок 2.15 – Ошибка, выдаваемая системой при неправильном сохранении

Открытие файлов формата *txt*

Достаточно важным свойством данного математического пакета является способность открывать и обрабатывать *txt*-файлы. Данная функция этой программы может облегчить жизнь пользователю при попытках получить информацию из *txt*-файла. Как это работает, поясним на примере.

Для начала перенесём выбранный *txt*-файл в панель “*Command window*”. Система его нам там отобразит в таблицы из *n*-строк и *m*-столбцов и создаст в панели “*Workspace*” матрицу соответствующих размеров (рисунок 2.16):

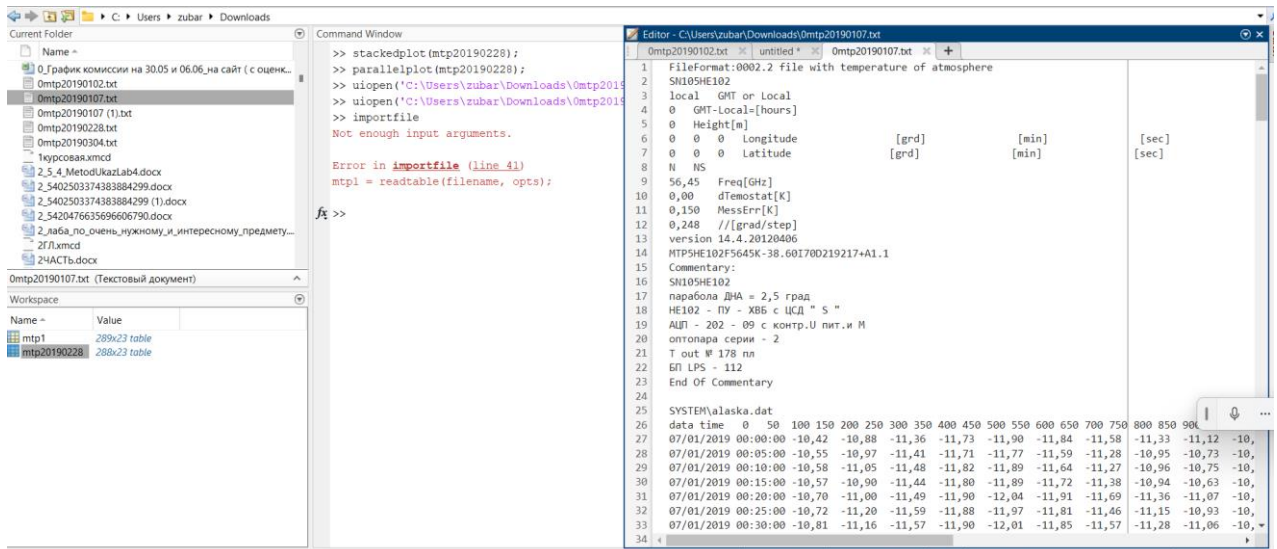


Рисунок 2.16 – Перенесение *txt*-файла в панель “*Command window*”

Для открытия выбранного нами *txt*-файла на панели инструментов нам нужно выбрать кнопку *Clean Data* (рисунок 2.17):

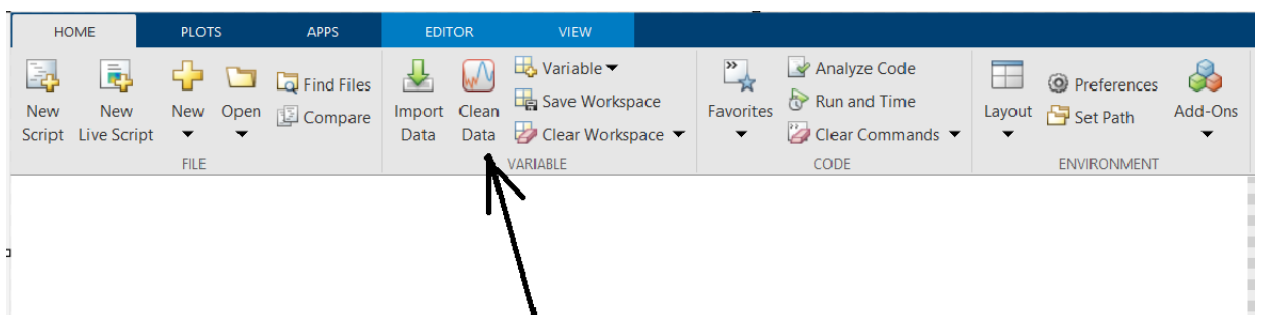


Рисунок 2.17 – Выбор функции *Clean Data*

После нажатия кнопки *Clean Data* система перенесёт нас в отдельное окно под названием “*Data Cleaner*” как показано на рисунке 2.18:

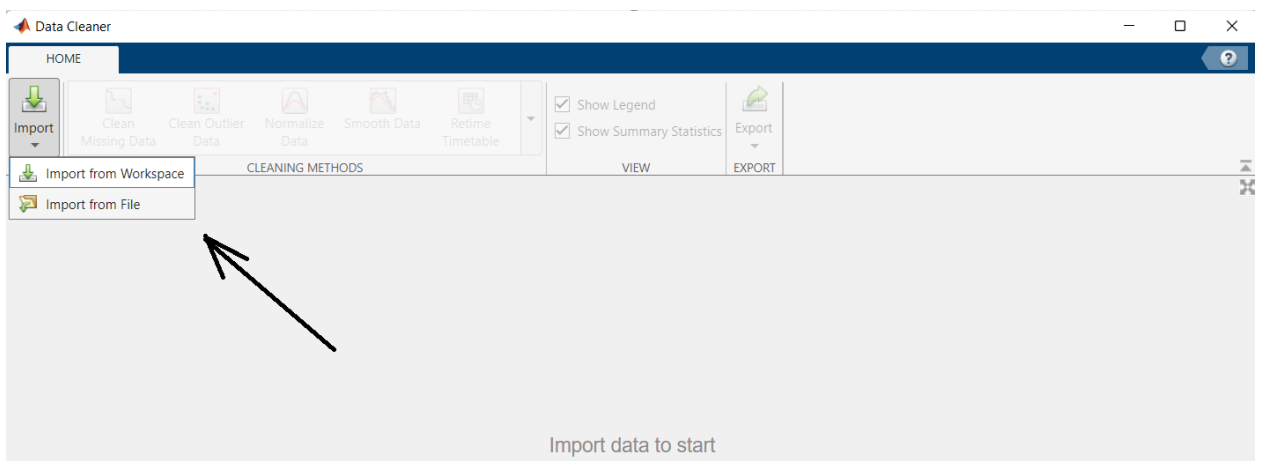


Рисунок 2.18 – Открытие окна “*Data Cleaner*”

После нажатия кнопки “*Import from Workspace*” система нам предложит выбрать интересующий нас файл с панели “*Workspace*”, где уже будет загружен нужный нам *txt*-файл. Потом после выбора нужного нам *txt*-файла система откроет его в виде набора графиков как показано на рисунке 2.19:

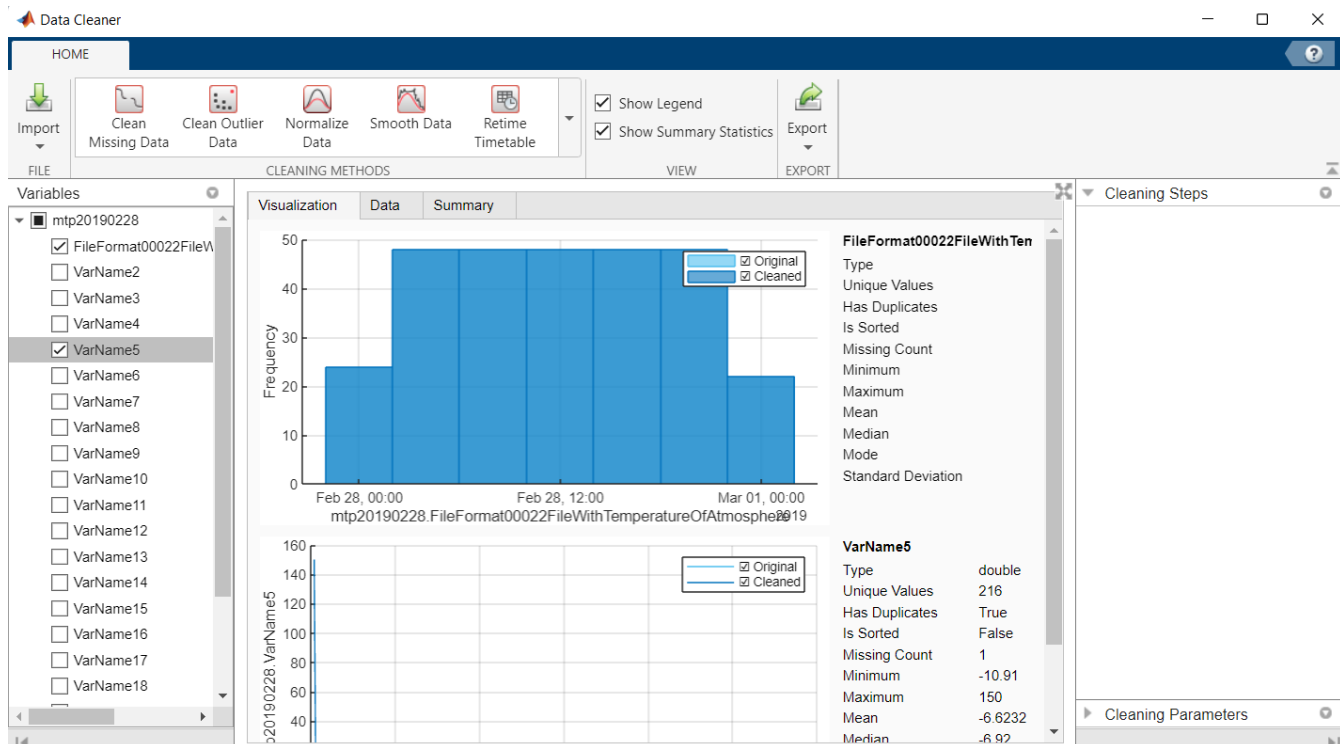


Рисунок 2.19 – Отображение графиков из *txt*-файла

В данном случае пользователь сам выбирает нужное ему количество графиков.

2.2.1 Примеры решения задач

1. Напишите скрипт для создания следующей последовательности и графика этой последовательности для $k = 1 \dots 200$:

$$x(k) = \sin^2(5 \cdot k).$$

Решение:

Скрипт (программа) для формирования и построения графика заданного дискретного сигнала на указанном интервале времени следующий:

```
clc;
clear;
close;
k = 0:100;
s = sin(0.1*k).^2;
```

```

figure;
plot(k, s);
grid on;
xlabel('Номер отсчёта');
ylabel('Напряжение, В');

```

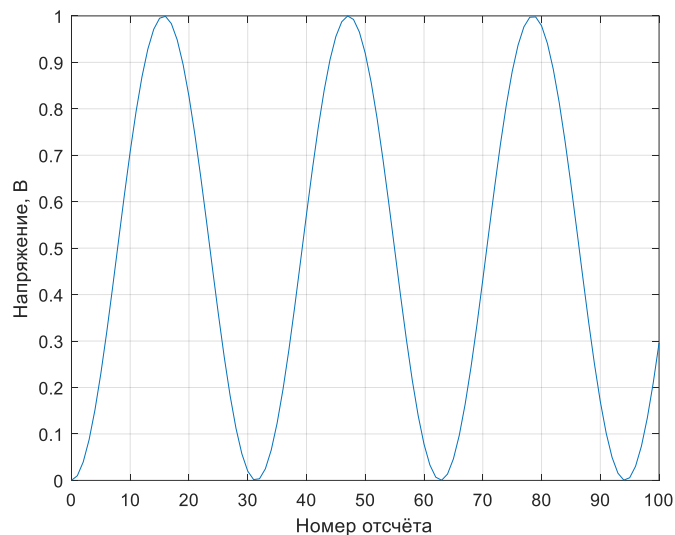


Рисунок 2.20 – Результат выполнения скрипта

2.2.2 Упражнения

2. Напишите скрипт для создания следующей последовательностей и их графиков для $k = 1 \dots 200$:

$$x_1(k) = \sin(\omega_1 \cdot k),$$

$$x_2(k) = \sin\left(\omega_2 \cdot k + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_3(k) = \cos(\omega_3 \cdot k),$$

для значений параметров ω_1 , ω_2 и ω_3 из таблицы 2.5.

Таблица 2.5 – Параметры последовательностей

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
ω_1	$\pi/13$	$\pi/14$	$\pi/15$	$\pi/16$	$\pi/17$	$\pi/18$
ω_2	π	2π	3π	π	2π	3π
ω_3	$\pi/\sqrt{19}$	$\pi/\sqrt{21}$	$\pi/\sqrt{23}$	$\pi/\sqrt{20}$	$\pi/\sqrt{22}$	$\pi/\sqrt{18}$

Упростите последовательность $x_2(k)$, чтобы не использовать тригонометрические функции.

3. Напишите скрипт для создания следующей последовательностей и их графиков для $k = 1 \dots 200$:

$$x_1(k) = a_1 \cdot \delta(k - b_1),$$

$$x_2(k) = a_2 \cdot \delta(k),$$

$$x_3(k) = a_3 \cdot \delta(k - b_3),$$

$$x_4(k) = a_4 \cdot \delta(k + b_4),$$

для значений параметров $a_1 - a_4$, $b_1 - b_3$ из таблицы 2.6.

Таблица 2.6 – Параметры последовательностей

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
a_1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
b_1	4	5	6	7	8	9
a_2	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2
a_3	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3
b_3	310	312	318	321	328	333
a_4	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8
b_4	3	4	5	6	7	8

4. Напишите скрипт для формирования дискретной синусоиды с частотой дискретизации f_d непрерывной синусоиды с начальное t_0 по конечное время t_1 и графика этой синусоиды с подписями осей:

$$s(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_0),$$

где

$t = 0, \Delta t, 2 \cdot \Delta t, 3 \cdot \Delta t \dots$ – шкала времени;

A – амплитуда (В);

f – частота (Гц);

φ_0 – начальная фаза (радианы).

Параметры синусоиды взять из таблицы 2.7.

Таблица 2.7 – Параметры синусоиды

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
Частота сигнала	900 Гц	1 кГц	1,1 кГц	1,3 кГц	1,4 кГц	1,5 кГц
Начальная фаза	45°	60°	30°	45°	60°	30°
Нормализованная амплитуда	40	45	50	55	60	65
Частота дискретизации	8 кГц	8 кГц	8 кГц	10 кГц	10 кГц	10 кГц
Начальное время	0 с	0 с	0 с	0 с	0 с	0 с
Конечное время	6 мс	7 мс	8 мс	4 мс	5 мс	6 мс

5. Напишите скрипт для формирования дискретной убывающей экспоненты с параметром a (см. формулу (2.3)) из таблицы 2.8. Постройте график дискретной синусоиды с подписями осей.

Таблица 2.8 – Параметры затухающей экспоненты

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
a	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95

6. Напишите скрипт для формирования дискретной убывающей косинусоиды с параметрами из таблиц 2.7, 2.8. Постройте график дискретной синусоиды с подписями осей.
7. Напишите скрипт для формирования прямоугольной видеоимпульса амплитудой A и длительностью τ_n на интервале времени $T = 10 \cdot \tau_n$. Шаг по времени отсчётов взять равным $\Delta t = \tau_n/10$. Амплитуду и длительность сформировать случайными целыми положительными числами. Постройте график дискретной синусоиды с подписями осей.
8. Напишите скрипт для формирования комплексной экспоненты с параметрами из таблицы 2.9 для $k = 0 \dots 100$.

$$q(k) = r^k \cdot \exp(j \cdot \theta \cdot k) = r^k \cdot [\cos(\theta \cdot k) + j \cdot \sin(\theta \cdot k)].$$

Комплексная единица в Matlab задается как $1j$ или $1i$.

Таблица 2.9 – Параметры комплексной экспоненты

Номер варианта	1	2	3	4	5	6
r	0,89	0,9	0,94	0,95	0,97	0,99
θ	30°	45°	60°	30°	45°	60°

Постройте график действительной и мнимой частей дискретной синусоиды с подписями осей. Как сказывается изменение параметра θ на вид графика? Постройте график, откладывая по оси ординат действительную часть, а по оси абсцисс – мнимую. Поэкспериментируйте с углом θ для получения спиралей различного вида. Объясните полученный результат.

2.3 Тема «Дискретное представление сигналов»

Цель: изучить основы дискретного представления сигналов.

Вопросы для изучения:

1. Дискретное представление сигналов, интервал дискретизации, спектр дискретного сигнала.
2. Автокорреляционная и взаимная корреляционная функция дискретных сигналов и шумов.

2.3.1 Некоторые теоретические сведения

Сигнал – зависимость напряжения $U(t) = s(t)$ на нагрузке (мощности, или тока в цепи) от времени t .

Сигнал является своего рода материей или «транспортом» для передачи информации от источника к получателю через некоторую среду.

Аналоговый сигнал – сигнал $s(t)$ с непрерывным изменением значений во времени.

Дискретный сигнал – сигнал $s(t_i)$ в виде последовательности N произвольных значений, отсчитываемых в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$. Значения (отсчёты) s_i дискретного сигнала непрерывны. Отсчёты $s_i = s(t_i)$ следуют друг за другом обычно через одинаковый интервал времени (шаг) Δt , т.е. $t_i = i \cdot \Delta t, i = 1, \dots, N$. Иногда Δt называют интервалом или шагом временной дискретизации.

Цифровой сигнал – сигнал в виде последовательности дискретных по уровню отсчётов s_i , следующих во времени $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$.

Шум – процесс со случайными значениями в каждый момент времени.

Некоррелированный шум – процесс, у которого случайные значения в любые два момента времени некоррелированные.

Гауссовский шум – процесс для которого в каждый момент времени случайные значения описываются гауссовской плотностью вероятности.

Дискретный сигнал образуется путём извлечения значений из аналогового сигнала с шагом Δt по времени.

Извлечение значений из сигнала в заданное время называют стробированием сигнала. Математически стробирование, в данном случае, сводится к перемножению аналогового сигнала на периодическую последовательность импульсов длительностью τ_s и периодом повторения Δt .

В идеальном случае $\tau_s \rightarrow 0$ и аналоговый сигнал $s(t)$ стробируется дельта-импульсами, т.е. умножается на функцию:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot \Delta t).$$

Таким образом, *дискретный сигнал* $s_d(t)$ во времени может быть выражен через аналоговый сигнал $s(t)$ или через отсчёты $s(k \cdot \Delta t)$ с помощью дельта-функций $\delta(t)$ следующими выражениями:

$$s_d(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{s(k \cdot \Delta t)}_{s_d(k)} \cdot \delta(t - k \cdot \Delta t). \quad (2.7)$$

Отсчёты из аналогового сигнала обозначены как $s_d(k) = s(k \cdot \Delta t)$. Следует различать отсчёты дискретного сигнала $s_d(k)$ (или просто дискретный сигнал) и дискретный сигнал во времени $s_d(t)$.

Спектр дискретного сигнала $s_d(t)$ может быть записан следующим образом:

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S} \left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t} \right). \quad (2.8)$$

Отсюда видно, что спектр дискретного сигнала представлен бесконечным рядом сдвинутых на $\omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{\Delta t}$ копий спектра аналогового сигнала.

Таким образом, спектр дискретного сигнала – периодический, а копии спектра расположены в зонах Найквиста:

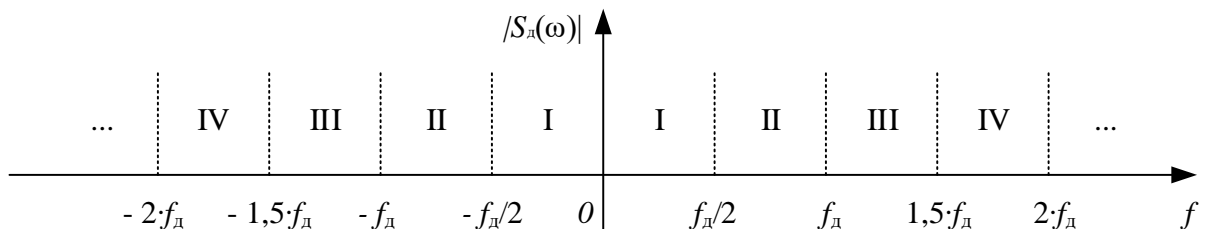


Рисунок 2.21 – Номера зон Найквиста

Зоны Найквиста разделены границами на частотах, кратных частоте $f_N = \frac{f_d}{2}$. Эта частота называется частотой Найквиста.

Важно! У дискретного сигнала $s_d(t)$ спектр расположен только в первых двух зонах Найквиста с номерами I и II.

Различают дискретизацию аналогового сигнала $s(t)$ со спектром:

– в первой зоне Найквиста:

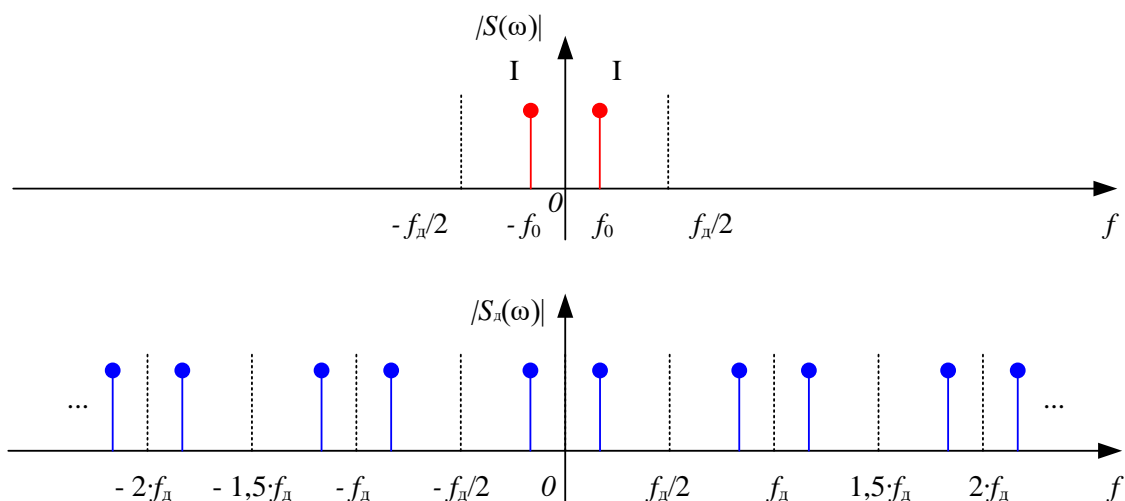


Рисунок 2.22 – Дискретизация аналогового сигнала из первой зоны Найквиста (красным – спектр аналогового сигнала, синим – спектр дискретного сигнала)

В этом случае, аналоговый сигнал $s(t)$ дискретизируется из первой зоны Найквиста.

– в высшей зоне Найквиста:

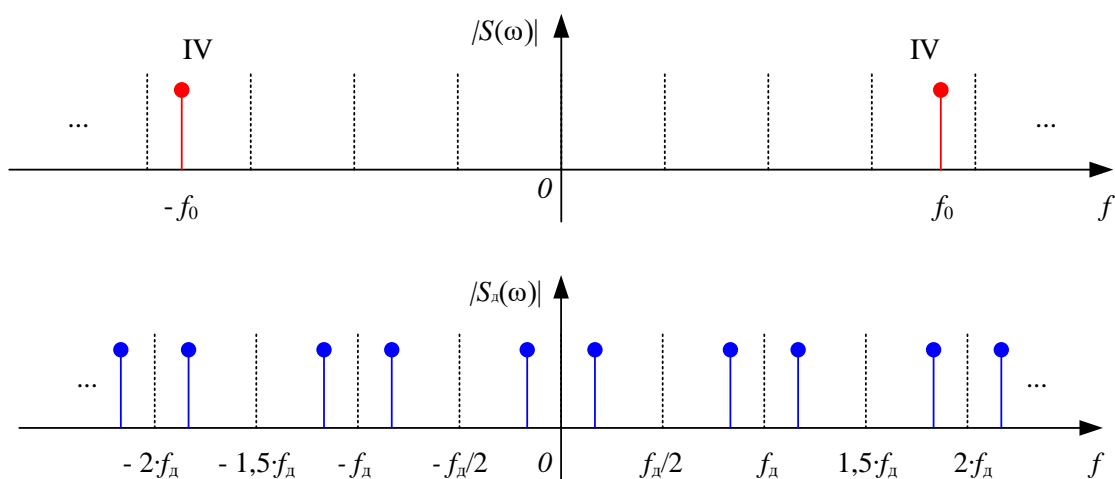


Рисунок 2.23 – Дискретизация аналогового сигнала из четвёртой зоны Найквиста (красным – спектр аналогового сигнала, синим – спектр дискретного сигнала)

В этом случае, аналоговый сигнал $s(t)$ дискретизируется из высшей (четвёртой, в данном случае) зоны Найквиста.

Важно! По отсчётам дискретного сигнала нельзя определить из какой зоны Найквиста был дискретизирован аналоговый сигнал.

Если вместо дельта-импульсов в формуле (2.7) аналоговый сигнал дискретизируется импульсами $s_{\text{и}}(t)$ произвольной формы, то дискретный сигнал может быть представлен как:

$$s_{\text{д}}(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\text{и}}(t - k \cdot \Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k \cdot \Delta t) \cdot s_{\text{и}}(t - k \cdot \Delta t), \quad (2.9)$$

а спектр такого дискретного сигнала $s_{\text{д}}(t)$ может быть записан следующим образом:

$$\dot{S}_{\text{д}}(\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{и}}(\omega)}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S} \left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t} \right), \quad (2.10)$$

где

$\dot{S}_{\text{и}}(\omega)$ – спектр одиночного импульса $s_{\text{и}}(t)$.

Для восстановления формы аналогового сигнала по дискретным отсчётам $s(k \cdot \Delta t)$ с помощью идеального фильтра низких частот используется ряд Котельникова:

$$s_{\text{восст.}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\text{д}}(k) \cdot \underbrace{\frac{\sin \left(\pi \cdot \frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t} \right)}{\pi \cdot \frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t}}}_{\varphi_k(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\text{д}}(k) \cdot \varphi_k(t). \quad (2.11)$$

Относительную ошибку восстановления формы аналогового сигнала $\varepsilon(t)$ определим как абсолютную разность между исходным аналоговым сигналом и восстановленным аналоговым сигналом, отнесённую к амплитуде исходного аналогового сигнала:

$$\varepsilon(t) = \frac{|s(t) - s_{\text{восст.}}(t)|}{\max[s(t)]} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Алиасингом называется эффект отображения спектра аналогового сигнала из **высшей зоны Найквиста в первую зону Найквиста**.

Алиасинг может приводить к искажениям формы спектра дискретного сигнала. Это характерно для аналоговых сигналов $s(t)$ со спектром, расположенным в разных зонах Найквиста. Пусть, например, аналоговый сигнал $s(t)$ имеет спектр в первой и четвёртой зонах Найквиста (см. рисунок 2.24.а). После дискретизации такого аналогового сигнала дискретный сигнал $s_{\text{д}}(t)$ будет иметь искажённый спектр (см. рисунок 2.24.б).

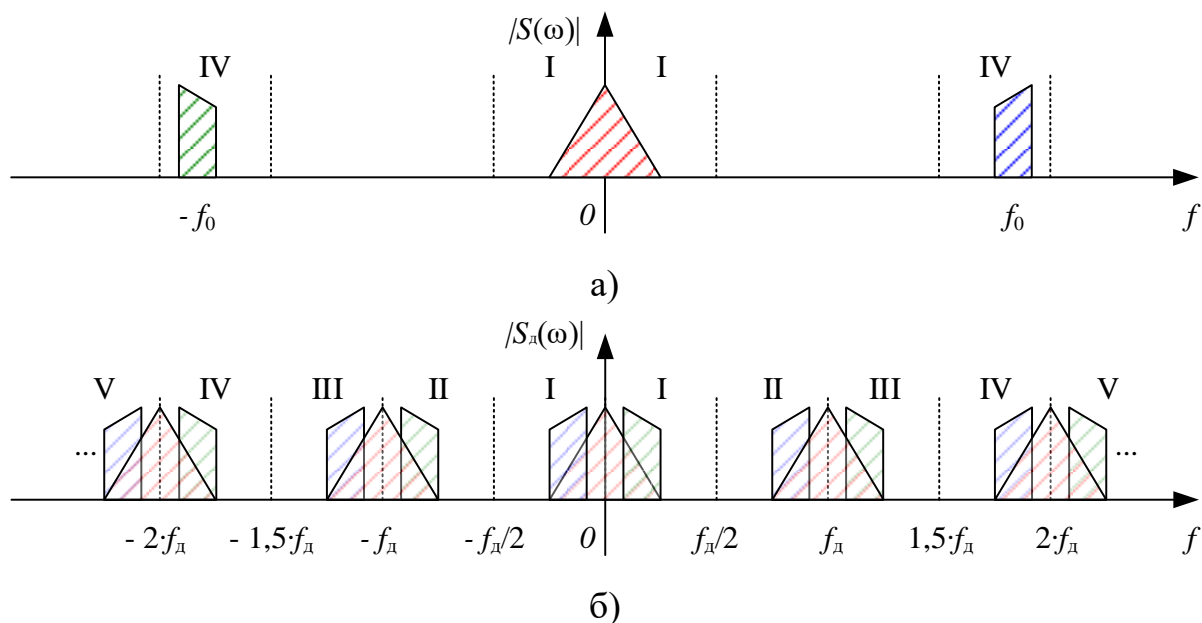
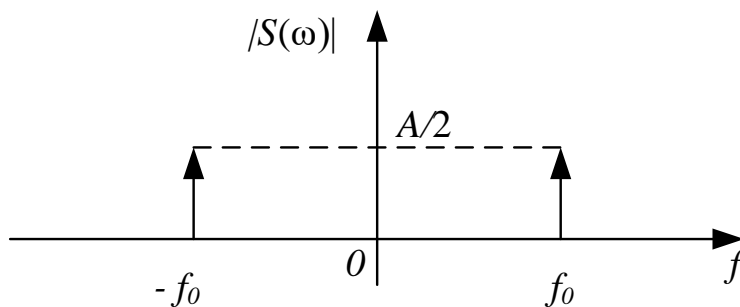


Рисунок 2.24 – Искажения формы спектра дискретного сигнала в результате алиасинга

Искажения вызваны тем, что для рассмотренного аналогового сигнала $s(t)$ не выполнены требования к выбору частоты дискретизации f_d или шага дискретизации Δt .

Для выбора шага временной дискретизации Δt обычно рассматривают три случая:

I) Случай дискретизации аналогового **гармонического** сигнала



Аналоговый гармонический сигнал частотой f_0 может быть представлен дискретными отсчётами, если частота дискретизации f_d больше его удвоенной частоты f_0 :

$$f_d = \frac{1}{\Delta t} > 2 \cdot f_0,$$

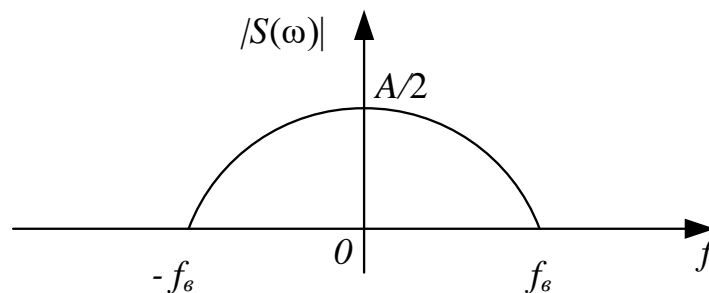
или

$$f_0 < \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t},$$

где

Δt – интервал временной дискретизации.

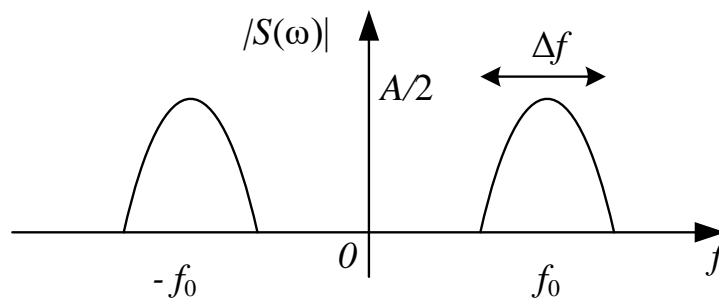
- II) Случай дискретизации **низкочастотного** сигнала с ограниченным спектром в полосе от $-f_B$ до f_B



Теорема Котельникова-Найквиста: сигнал со спектром в полосе от 0 до f_B может быть представлен дискретными отсчётами, если частота дискретизации f_d больше его верхней граничной частоты f_B :

$$f_d = \frac{1}{\Delta t} > 2 \cdot f_B.$$

- III) Случай дискретизации **полосового** сигнала на центральной частоте f_0 и шириной спектра Δf



Частота дискретизации полосового сигнала должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} f_d = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot f_0 - \Delta f}{m} + \frac{2 \cdot f_0 + \Delta f}{m+1} \right), \\ f_d > 2 \cdot \Delta f \end{cases}$$

где

m – чётное для спектра дискретного сигнала без инверсии, и m – нечётное в случае инверсии спектра дискретного сигнала.

Перед дискретизацией полоса сигнала Δf может быть определена:

– по уровню минус 3 дБ от максимального значения в амплитудном спектре аналогового сигнала;

– по первым нулям основного лепестка амплитудного спектра аналогового сигнала;

– исходя из доли λ % энергии в искомой полосе Δf относительно всей энергии в спектре путём решения уравнения:

$$\int_0^{\Delta f} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\lambda}{100} \cdot \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega.$$

В современных системах обработки сигналов вычисляются автокорреляционные и взаимные корреляционные функции. Автокорреляционная функция служит для определения качества сигнала при корреляционной обработке в рамках решения конкретной радиотехнической задачи. Взаимная корреляционная функция служит средством для определения качества различения разных сигналов, которые применяются в некоторой радиотехнической системе.

Автокорреляционная функция $R_s(k)$ дискретного сигнала $s_d(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$R_s(k) = \sum_{i=1}^N s_d(i) \cdot s_d(i-k) \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^N s_d(i) \cdot s_d(i+k) \cdot \Delta t, \quad -N \leq k \leq N. \quad (2.12)$$

Взаимная корреляционная функция $B_{s_1, s_2}(k)$ дискретных сигналов $s_d^{\text{№1}}(k)$ и $s_d^{\text{№2}}(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$B_{s_1, s_2}(k) = \sum_{i=1}^N s_d^{\text{№1}}(i) \cdot s_d^{\text{№2}}(i-k) \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^N s_d^{\text{№1}}(i) \cdot s_d^{\text{№2}}(i+k) \cdot \Delta t, \quad -N \leq k \leq N. \quad (2.13)$$

Энергия дискретного сигнала $s_d(k)$ определяется следующим образом:

$$E_s = R_s(0) = \sum_{i=1}^N s_d(i) \cdot s_d(i) \cdot \Delta t \quad \text{Вт}\cdot\text{с}. \quad (2.14)$$

Средняя мощность дискретного сигнала $s_d(k)$ определяется следующим образом:

$$P_s = \frac{R_s(0)}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N s_d(i) \cdot s_d(i) \quad \text{Вт}. \quad (2.15)$$

Автокорреляционная функция $R_X(k)$ **случайного** дискретного сигнала $X_d(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$R_X(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N-k} X_d(i) \cdot X_d(i-k). \quad (2.16)$$

Взаимная корреляционная функция $B_{X_1, X_2}(k)$ между **случайными** дискретными сигналами $X_d^{\text{№1}}(k)$ и $X_d^{\text{№2}}(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$B_{X_1, X_2}(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N-k} X_{\text{д}}^{\text{№1}}(i) \cdot X_{\text{д}}^{\text{№2}}(i-k). \quad (2.17)$$

Средняя полная мощность случайного дискретного сигнала $X_{\text{д}}(k)$ определяется следующим образом:

$$P_X = R_X(0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_{\text{д}}(k) \cdot X_{\text{д}}(k) \text{ Вт.} \quad (2.18)$$

Автоковариационная функция $K_X(k)$ **случайного** дискретного сигнала $X_{\text{д}}(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$K_X(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N-k} [X_{\text{д}}(i) - M_X] \cdot [X_{\text{д}}(i-k) - M_X], \quad (2.19)$$

где

$M_X = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_{\text{д}}(i)$ – оценка математического ожидания случайного дискретного сигнала $X_{\text{д}}(k)$.

Взаимная ковариационная функция $BK_{X_1, X_2}(k)$ между **случайными** дискретными сигналами $X_{\text{д}}^{\text{№1}}(k)$ и $X_{\text{д}}^{\text{№2}}(k)$ с количеством отсчётов N вычисляется как:

$$BK_{X_1, X_2}(k) = \frac{1}{N-k} \cdot \sum_{i=1}^{N-k} [X_{\text{д}}^{\text{№1}}(i) - M_{X_1}] \cdot [X_{\text{д}}^{\text{№2}}(i-k) - M_{X_2}], \quad (2.20)$$

где

$M_{X_1} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_{\text{д}}^{\text{№1}}(i)$, $M_{X_2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_{\text{д}}^{\text{№2}}(i)$ – оценки математического ожидания случайных дискретных сигналов $X_{\text{д}}^{\text{№1}}(k)$ и $X_{\text{д}}^{\text{№2}}(k)$.

Средняя мощность переменной (флуктуационной) составляющей **случайного** дискретного сигнала $X_{\text{д}}(k)$ определяется следующим образом:

$$P'_X = K_X(0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [X_{\text{д}}(i) - M_X] \cdot [X_{\text{д}}(i) - M_X] \text{ Вт.} \quad (2.21)$$

2.3.2 Примеры решения задач

1. Определите период дискретизации по теореме Котельникова для сигнала следующего вида:

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot t + 5 \cdot 10^6 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot t]).$$

Решение:

Период (временной интервал) дискретизации сигнала по теореме Котельникова определяется как

$$\Delta t = \frac{1}{2 \cdot f_s}, \quad (2.22)$$

где

f_s – верхняя (максимальная) частота в спектре дискретизируемого аналогового сигнала.

Определим мгновенную круговую частоту сигнала через его полную фазу:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{2 \cdot \pi \cdot 10^7 \cdot t + 5 \cdot 10^6 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot t]\} = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) = 2 \cdot \pi \cdot [10^7 - 5 \cdot 10^6 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)] \text{ рад/с.} \end{aligned}$$

Максимальное значение круговой частоты указанного сигнала равно:

$$\omega_s = \omega_{\max} = \omega(t) \Big|_{\sin(2 \cdot \pi \cdot t) = -1} = 2 \cdot \pi \cdot (10^7 + 5 \cdot 10^6) = 3 \cdot \pi \cdot 10^7 \text{ рад/с.}$$

Максимальное значение линейной частоты указанного сигнала равно:

$$f_s = \frac{\omega_s}{2 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot \pi \cdot 10^7}{2 \cdot \pi} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Гц.}$$

Отсюда, период дискретизации сигнала по теореме Котельникова составляет:

$$\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^7} \approx 3,33 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

2. Аналоговый прямоугольный видеоимпульс $s(t)$ амплитудой напряжения $U = 1$ В длительностью τ_u дискретизирован одиннадцатью дельта-импульсами. Определить спектр дискретного сигнала.

Решение:

Видеоимпульс $s(t)$ прямоугольной формы описывается выражением:

$$s(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq \frac{\tau_u}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_u}{2} \end{cases}.$$

По определению, спектр дискретного сигнала $s_d(t) = s(t_k) = s(k \cdot \Delta t)$ записывается следующим образом:

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t}\right), \quad (2.23)$$

где

$\dot{S}(\omega)$ – спектр аналогового сигнала $s(t)$ до дискретизации.

Вычислим спектр одиночного видеоимпульса $S(\omega)$:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} U \cdot e^{-j \cdot \omega t} dt = -\frac{U}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega t} \Big|_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} = \\ &= -\frac{U}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} - e^{j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} \right) = \frac{U}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} - e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} \right) = \frac{U}{j \cdot \omega} \cdot \underset{=1}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} - e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} \right) = \\ &= \left| \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right|_{x = \omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} = \frac{2 \cdot U}{\omega} \cdot \underset{=1}{\frac{\tau_u}{\tau_u}} \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{\tau_u}{2}\right) = U \cdot \tau_u \cdot \frac{\sin\left(\omega \cdot \frac{\tau_u}{2}\right)}{\omega \cdot \frac{\tau_u}{2}} = U \cdot \tau_u \cdot \text{sinc}\left(\omega \cdot \frac{\tau_u}{2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку аналоговый видеоимпульс дискретизирован 11-тью дельта-импульсами, то интервал временной дискретизации равен:

$$\Delta t = \frac{\tau_u}{10}.$$

Отсюда, спектр дискретного сигнала равен:

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U \cdot \tau_u \cdot \text{sinc}\left[\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t}\right) \cdot \frac{\tau_u}{2}\right] = \frac{1 \cdot \tau_u}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t}\right) \cdot \frac{\tau_u}{2}\right]}{\left(\omega - \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{\Delta t}\right) \cdot \frac{\tau_u}{2}} = \\ &= \left| \Delta t = \frac{\tau_u}{10} \right| = 10 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{\omega \cdot \tau_u}{2} - 10 \cdot \pi \cdot k\right]}{\frac{\omega \cdot \tau_u}{2} - 10 \cdot \pi \cdot k}. \end{aligned}$$

3. Аналоговый прямоугольный радиоимпульс $s(t)$ амплитудой напряжения $A = 1$ В длительностью $\tau_u = 1$ мс, центральной частотой $f_0 = 10$ кГц и начальной фазой $\varphi_0 = 0,7$ рад. дискретизирован с частотой дискретизации $f_d = 1$ МГц.

Составить скрипт (программу) для формирования и построения графика дискретного сигнала на интервале времени $t \in [0; 10 \cdot \tau_u]$.

Решение:

Скрипт (программа) для формирования и построения графика заданного дискретного сигнала на указанном интервале времени следующий:

```
clc;
clear;
close;
% Программа (скрипт) формирования импульсного радиосигнала

% Параметры радиосигнала
A = 1;           % Амплитуда радиосигнала, В
ti = 1e-3;       % Длительность радиосигнала, с
f0 = 10e3;       % Центральная частота радиосигнала, Гц
fi0 = 0.7;       % Начальная фаза радиосигнала, радианы
Tn = 10*ti;      % Интервал времени для формирования сигнала, с

% Параметры АЦП
fd = 1e6;        % Частота дискретизации радиосигнала, Гц
dt = 1/fd;       % Интервал временной дискретизации, с

% Начало программы

t = [0:dt:Tn-dt]; % Шкала времени

Ns = round(Tn/dt);
Nimp = round(ti/dt);
Nz = Ns - Nimp;

% Формируем дискретные отсчёты радиосигнала
S = A*cos(2*pi*f0*t + fi0).*[ones(1,Nimp), zeros(1,Nz)];

% Строим график
figure;
plot(t, S);
grid on;
xlabel('Время, с');
ylabel('Напряжение U(t), В');
```

4. Аналоговый гауссовский некоррелированный шум $n(t)$ мощностью $P_{ш}$. дискретизирован с частотой дискретизации $f_d = 1$ МГц. Составить скрипт (программу) для формирования и построения графика дискретного шума на интервале времени $t \in [0; 1]$ мс.

Решение:

Скрипт (программа) для формирования и построения графика заданного дискретного сигнала на указанном интервале времени следующий:

```
clc;
clear;
close;
% Программа (скрипт) формирования некоррелированного гауссовского
шума с
% заданной мощностью Pn

% Параметры шума
Pn = 1;      % Мощность шума, В
Tn = 1e-3;   % Интервал времени для формирования шума, с

% Параметры АЦП
fd = 1e6;    % Частота дискретизации радиосигнала, Гц
dt = 1/fd;   % Интервал временной дискретизации, с

% Начало программы

t = [0:dt:Tn-dt]; % Шкала времени

Nn = round(Tn/dt);

% Формируем дискретные отсчёты шума
Noise = sqrt(Pn)*randn(1, Nn);

% Строим график
figure;
plot(t, Noise);
grid on;
xlabel('Время, с');
ylabel('Напряжение U(t), В');
```

2.3.3 Упражнения

1. Определите интервал дискретизации Δt для аналогового сигнала следующего вида:

$$s(t) = A \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + B \cdot f_0 \cdot Z(t) + \varphi_0],$$

где параметры сигнала выбрать из таблицы 2.10.

Определите дискретные отсчёты $u(t)$ с помощью найденного шага Δt на интервале времени $t \geq [0, 150 \cdot \Delta t]$.

Восстановите форму аналогового сигнала с помощью ряда Котельникова.

Найти максимальную относительную ошибку восстановления аналогового сигнала $\varepsilon(t)$, в процентах.

Определите Δt , при котором максимальная относительная ошибка восстановления аналогового сигнала $\varepsilon(t)$ не превышает 10 %. Влияет ли на относительную ошибку значение начальной фазы φ_0 ?

Повторите задание для $B = 0$. Во сколько раз и как изменился шаг дискретизации? Во сколько раз изменилась максимальная относительная ошибка восстановленного аналогового сигнала?

Таблица 2.10 – Параметры сигнала

№	A, B	$f_0 \cdot 10^7$, Гц	B	Z(t)	φ_0 , рад
1	2	1,89	2,3	$\sin(2 \cdot \pi \cdot t)$	1,89
2	26	7,03	2,4	$\cos(2 \cdot \pi \cdot t)$	7,03
3	5	6,33	2,9	$\operatorname{tg}(2 \cdot \pi \cdot t)$	6,33
4	27	3,88	0,5	$\sin^2(2 \cdot \pi \cdot t)$	3,88
5	35	9,25	3,0	$\cos^2(2 \cdot \pi \cdot t)$	9,25
6	14	5,3	2,7	$\operatorname{tg}(2 \cdot \pi \cdot t)$	5,3
7	13	3,99	2	$\sin^3(2 \cdot \pi \cdot t)$	3,99
8	36	1,41	1,6	$\cos^3(2 \cdot \pi \cdot t)$	1,41
9	9	5,65	1,8	$\operatorname{tg}(2 \cdot \pi \cdot t)$	5,65
10	26	2,49	5	$\sin(2 \cdot \pi \cdot t)$	2,49
11	44	5,07	2,2	$\cos(2 \cdot \pi \cdot t)$	5,07

12	12	8,81	1,2	$tg(2 \cdot \pi \cdot t)$	8,81
13	8	1,21	5,0	$sin^2(2 \cdot \pi \cdot t)$	1,21
14	35	4,56	1,5	$cos^2(2 \cdot \pi \cdot t)$	4,56
15	16	2,18	2,1	$tg(2 \cdot \pi \cdot t)$	2,18
16	31	4,17	5,0	$sin^3(2 \cdot \pi \cdot t)$	4,17
17	25	2,27	1,9	$cos^3(2 \cdot \pi \cdot t)$	2,27
18	21	2,39	1,7	$tg(2 \cdot \pi \cdot t)$	2,39
19	13	9,25	2,8	$sin(2 \cdot \pi \cdot t)$	9,25
20	47	3,65	2,6	$cos(2 \cdot \pi \cdot t)$	3,65

2. Определите интервал дискретизации Δt по Котельникову для сигнала следующего вида:

$$s(t) = A \cdot \sin[B \cdot f_0 \cdot Z(t) + \varphi_0] + \frac{A}{2} \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot f_0 \cdot t + \frac{B}{3} \cdot f_0 \cdot Z(t) + 2 \cdot \varphi_0\right],$$

где параметры сигнала выбрать из таблицы 2.10.

При каком интервале дискретизации Δt наблюдается искажение формы дискретного сигнала?

Определите дискретные отсчёты $u(t)$ с помощью найденного шага Δt на интервале времени $t \geq [0, 150 \cdot \Delta t]$.

Восстановите форму аналогового сигнала с помощью ряда Котельникова.

Найти максимальную относительную ошибку восстановленного аналогового сигнала, в процентах.

Определите Δt , при котором максимальная относительная ошибка восстановления аналогового сигнала не превышает 10 %.

Влияет ли на относительную ошибку значение начальной фазы φ_0 ? Если влияет, то как?

Повторите задание для $B = 0$. Во сколько раз и как изменился шаг дискретизации? Во сколько раз изменилась максимальная относительная ошибка восстановленного аналогового сигнала?

3. Задан аналоговый сигнал $s(t)$ амплитудой напряжения A Вольт. Параметры и форма сигнала задана в таблице 2.11.

Определить:

- верхнюю частоту f_B аналогового сигнала по спектру;
- частоту f_d и интервал дискретизации Δt ;
- отсчёты дискретного сигнала $s_d(k)$;
- спектр дискретного сигнала $s_d(k)$;
- различие между спектром дискретного сигнала и аналогового сигнала;
- по отсчётам $s_d(k)$ форму аналогового сигнала с помощью ряда Котельникова;
- ошибку восстановления аналогового сигнала $\varepsilon(t)$;
- написать скрипт (программу), которая:
 - формирует и строит график дискретного сигнала с подписями осей и сеткой;
 - вычисляет мощность и энергию по отсчётам дискретного сигнала;
 - вычисляет и строит график автокорреляционной функции по отсчётам дискретного сигнала с подписями осей и сеткой;
 - вычисляет и строит график взаимной корреляционной функции заданного сигнала с любым другим сигналом из таблицы 2.11. Перед вычислением взаимной корреляционной функции выполнить дискретизацию выбранного сигнала с подписями осей и сеткой.

Программу реализовать с помощью формул из теоретического материала и с помощью встроенных функций.

Запустить программу. Доказать правильность работы программы, сравнив результаты работы программы с ожидаемыми.

Таблица 2.11 – Параметры и форма сигнала

№	Параметр	A, B	$s(t)$
1	$\omega_0 = 1$	1	$\begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), t \in [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \\ 0, t \notin [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \end{cases}$
2	$\alpha = 1$	1	$A \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$
3	$\alpha = 1$	1	$A \cdot t \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$

№	Параметр	A, B	$s(t)$
4	$\tau_H = 1$	1	$\begin{cases} A, t \in [0, \tau_H] \\ 0, t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$
5	$\tau_H = 1$	1	$\begin{cases} A \cdot \left(1 - \frac{ t - 0,5 \cdot \tau_H }{0,5 \cdot \tau_H}\right), t \in [0, \tau_H] \\ 0, t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$
6	$\omega_0 = 1$	1	$\begin{cases} A \cdot \cos \left[\omega_0 \cdot \left(t - 0,5 \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \right], t \in \left[0, \frac{\pi}{\omega_0} \right] \\ 0, t \notin \left[0, \frac{\pi}{\omega_0} \right] \end{cases}$
7	$\alpha = 1$	1	$A \cdot e^{-\frac{(t-4\alpha)^2}{2\alpha^2}}, t \in [0; 4 \cdot \alpha]$
8	$\omega_0 = 10$	10	$\begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), t \in [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \\ 0, t \notin [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \end{cases}$
9	$\alpha = 2$	5	$A \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$
10	$\alpha = 3$	5	$A \cdot t \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$
11	$\tau_H = 1,5$	5	$\begin{cases} A, t \in [0, \tau_H] \\ 0, t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$
12	$\tau_H = 4$	10	$\begin{cases} A \cdot \left(1 - \frac{ t - 0,5 \cdot \tau_H }{0,5 \cdot \tau_H}\right), t \in [0, \tau_H] \\ 0, t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$
13	$\omega_0 = 10$	10	$\begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), t \in [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \\ 0, t \notin [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \end{cases}$
14	$\alpha = 5$	10	$A \cdot e^{-\frac{(t-4\alpha)^2}{2\alpha^2}}, t \in [0; 4 \cdot \alpha]$
15	$\alpha = 12$	15	$A \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$
16	$\alpha = 14$	15	$A \cdot t \cdot e^{-\alpha t}, t \in [0; 10/\alpha]$
17	$\tau_H = 8$	9	$\begin{cases} A, t \in [0, \tau_H] \\ 0, t \notin [0, \tau_H] \end{cases}$

№	Параметр	A, B	$s(t)$
18	$\tau_n = 15$	12	$\begin{cases} A \cdot \left(1 - \frac{ t - 0,5 \cdot \tau_n }{0,5 \cdot \tau_n}\right), t \in [0, \tau_n] \\ 0, t \notin [0, \tau_n] \end{cases}$
19	$\omega_0 = 10$	12	$\begin{cases} A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), t \in [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \\ 0, t \notin [0; 15 \cdot (2 \cdot \pi / \omega_0)] \end{cases}$
20	$\alpha = 15$	12	$A \cdot e^{-\frac{(t-4\alpha)^2}{2\alpha^2}}, t \in [0; 4 \cdot \alpha]$

4. Задан гауссовский некоррелированный шум с равномерным спектром и мощностью P_n и постоянной составляющей A . Частоту дискретизации выбрать равной f_d МГц. Написать скрипт (программу), которая:

- формирует две отдельные реализации дискретного некоррелированного шума на интервале времени N/f_d и строит график этих реализаций с подписями осей и сеткой;

- вычисляет среднюю полную и флуктуационную мощность отдельно для каждой реализации дискретного шума;

- вычисляет и строит график автокорреляционной функции для каждой реализации дискретного шума с подписями осей и сеткой;

- вычисляет и строит график автоковариационной функции для каждой реализации дискретного шума с подписями осей и сеткой;

- вычисляет и строит график взаимной ковариационной функции между реализациями дискретного шума с подписями осей и сеткой;

- вычисляет и строит график взаимной корреляционной функции между реализациями дискретного шума с подписями осей и сеткой.

Параметры для формирования шума заданы в таблице 2.12.

Программу реализовать с помощью формул из теоретического материала и с помощью встроенных функций.

Запустить программу. Доказать правильность работы программы, сравнив результаты работы программы с ожидаемыми.

Таблица 2.12 – Параметры для формирования шума

№	$P_{ш}$, Вт	f_d , МГц	N	A
1	11	3,25	697	7
2	12	2,24	655	52
3	17	4,28	274	79
4	10	2,58	225	25
5	3	3,88	533	86
6	16	0,85	792	46
7	8	2,24	615	15
8	1	1,32	817	65
9	10	4,6	950	16
10	16	1,83	282	28
11	13	2,65	795	39
12	16	1,59	511	92
13	10	1,33	787	58
14	10	3,57	889	79
15	8	3,59	657	41
16	20	2,57	247	45
17	4	3,32	559	17
18	10	2,62	260	28
19	9	0,17	999	41
20	19	3,11	374	18

5. Аналоговый прямоугольный видеоимпульс $s(t)$ амплитудой напряжения $A = 5$ В длительностью τ_n дискретизирован 16 дельта-импульсами. Определить спектр дискретного сигнала.

6. Аналоговый прямоугольный видеоимпульс $s(t)$ амплитудой напряжения $A = 15$ В длительностью τ_n дискретизирован 18 треугольными импульсами длительностью $\tau_n/80$. Определить спектральную плотность дискретного сигнала.

2.4 Тема «Дискретное преобразование Фурье для спектрального анализа дискретных сигналов»

Цель: изучить основы спектрального анализа дискретных сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье.

Вопросы для изучения:

1. Дискретное преобразование Фурье. Дискретная свёртка.
2. Быстрое преобразование Фурье. Утечка спектра.

2.4.1 Некоторые теоретические сведения

Существуют два традиционных подхода к представлению сигналов: во временной области и в частотной области.

Сигнал $s(t)$ во временной области представляется в виде зависимости его физических параметров от времени. Графическое изображение выполняется в декартовой системе координат, где ось абсцисс является осью времени, а вдоль оси ординат откладываются мгновенные значения – напряжение, ток или мощность сигнала в каждый момент времени. Представление сигнала во временной области показывает, как изменяются мгновенные значения сигнала с течением времени. Представление сигналов во временной области имеет место в индикаторах осциллографов.

Представление сигнала в частотной области показывает зависимость его физических параметров (амплитуда, фаза) от частоты гармонического колебания. Такое представление показывает распределение энергии сигнала по частотам, входящим в спектр сигнала. Представление сигнала в частотной области соответствует изображению на экране анализатора спектра.

Переход из временной области представления сигнала в частотную и обратно для **непериодических аналоговых сигналов** выполняется с помощью преобразования Фурье:

преобразование Фурье (FT – Fourier Transform)

$$\dot{S}_f(f) = \Phi^+ [s(t)] = FT[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad (2.24)$$

обратное преобразование Фурье (IFT – Inverse Fourier Transform)

$$s(t) = \Phi^- [\dot{S}_f(f)] = IFT[\dot{S}_f(f)] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_f(f) \cdot e^{j2\pi \cdot f \cdot t} df \quad (2.25)$$

Интегралы (2.24) и (2.25) должны быть сходящимися. Это выполнимо для сигналов с конечной энергией на бесконечном интервале времени: такие сигналы достаточно быстро убывают до нуля с увеличением времени t .

В радиотехнических системах дискретные сигналы $s(k)$ обычно всегда ограничены во времени. Если перейти в (2.24) и (2.25) к дискретному сигналу с N отсчётами, заменить интегралы на суммы, то получим формулы **дискретного преобразования Фурье**:

дискретное преобразование Фурье (DFT – Discrete Fourier Transform) с учётом нормировки

$$\dot{S}_f(n) = \Phi^+ [s_{\text{д}}(k)] = DFT[s_{\text{д}}(k)] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} s_{\text{д}}(k) \cdot \underbrace{e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}}_{W_N^{k \cdot n}}, \quad (2.26)$$

дискретное обратное преобразование Фурье (IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform)

$$s_{\text{д}}(n) = \Phi^- [\dot{S}_f(k)] = IDFT[\dot{S}_f(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} \dot{S}_f(k) \cdot \underbrace{e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}}_{W_N^{-k \cdot n}}, \quad (2.27)$$

где

$n = 0, 1, \dots, N - 1$ – номера отсчётов дискретного преобразования Фурье,

$k = 0, 1, \dots, N - 1$ – номера отсчётов дискретного сигнала,

$W_N^{k \cdot n} = e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot k \cdot n}$ – поворотный коэффициент дискретного преобразования

Фурье.

Отсчёты амплитудного спектра дискретного сигнала можно получить как модуль спектра дискретного преобразования Фурье:

$$A_f(n) = |\dot{S}_f(n)| = \sqrt{\operatorname{Re}[\dot{S}_f(n)]^2 + \operatorname{Im}[\dot{S}_f(n)]^2}, \quad (2.28)$$

а фазовый спектр как аргумент спектра дискретного преобразования Фурье:

$$\varphi_f(n) = \arg\{\dot{S}_f(n)\} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}[\dot{S}_f(n)]}{\operatorname{Re}[\dot{S}_f(n)]}\right). \quad (2.29)$$

Для вычисления спектра мощности дискретного сигнала отсчёты амплитудного спектра (2.28) следует возвести в квадрат.

Частота любого n -го отсчёта (бина) ДПФ рассчитывается как:

$$f_n = \frac{f_d}{N} \cdot n, \text{ Гц.} \quad (2.30)$$

При вычислении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) дискретный сигнал $s_d(k)$ на ограниченном интервале времени (рисунок 2.25, в) воспринимается как периодический (рисунок 2.25, а) дискретный сигнал.

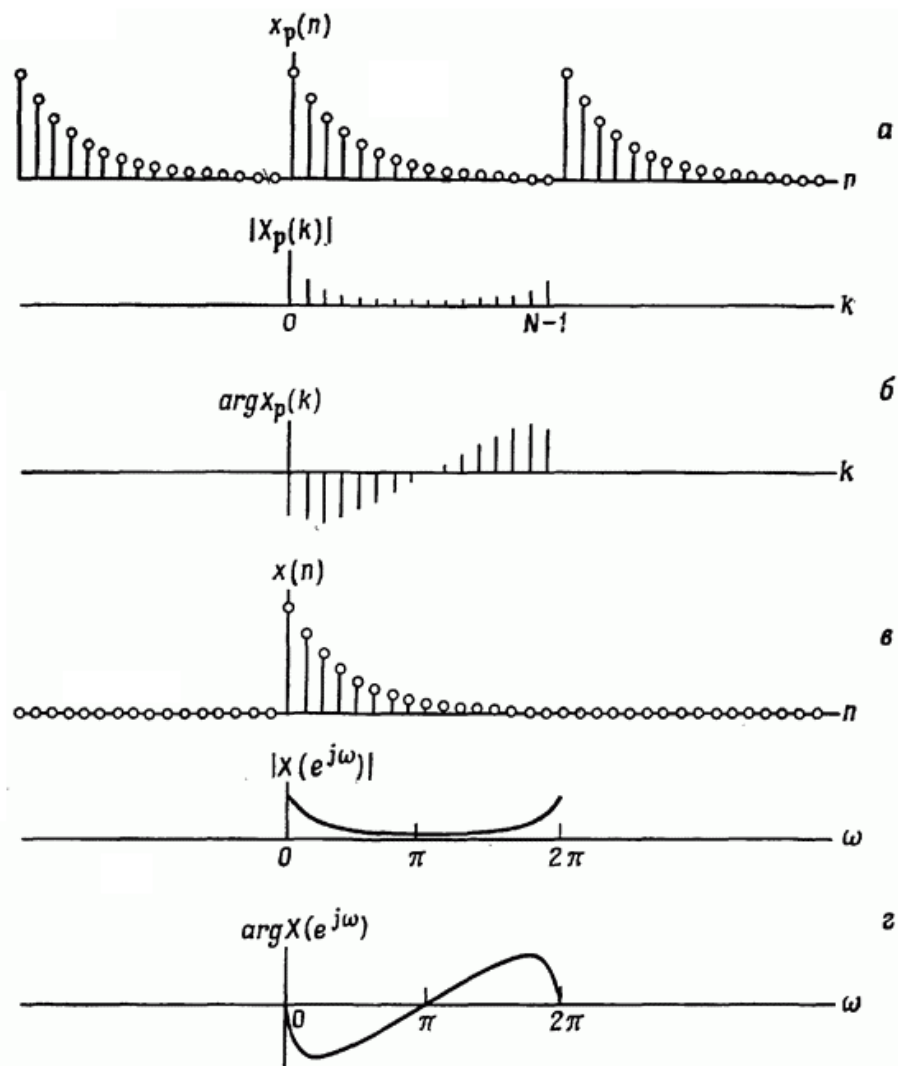


Рисунок 2.25 – Дискретное преобразование Фурье периодического (а) и ограниченного (в) дискретного сигнала совпадают

Иначе говоря, результат расчёта ДПФ для периодического дискретного сигнала (рисунок 2.25, в) и одного периода того же дискретного сигнала (рисунок 2.25, а) совпадают. Это можно видеть, сравнивая результат расчёта ДПФ на рисунке 2.25, б для периодического дискретного сигнала $x_p(n)$ и результат расчёта ДПФ на рисунке 2.25, г и для одного периода того же сигнала $x(n)$.

Последовательность $s_d(n)$, вычисленная по формуле (2.27) обратного ДПФ (ОДПФ) в действительности является периодической с периодом, равным ее длине N . Однако результат ОБПФ интерпретируется как один период последовательности $s_d(n)$, полагая, что за пределами периода $s_d(n) \equiv 0$.

Дискретное преобразование Фурье является линейным преобразованием над отсчётами дискретного сигнала $s_d(k)$ и может быть выражена в матричном виде:

$$\dot{\mathbf{S}}_f = \mathbf{DFT} \cdot \vec{s}_d, \quad (2.31)$$

где

$$\dot{\mathbf{S}}_f = [\dot{S}_f(0) \quad \dot{S}_f(1) \quad \dots \quad \dot{S}_f(N-1)], \quad \vec{s}_d = \begin{bmatrix} s_d(0) \\ s_d(1) \\ \dots \\ s_d(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{DFT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}} & e^{-j \frac{4\pi}{N}} & e^{-j \frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j \frac{4\pi}{N}} & e^{-j \frac{8\pi}{N}} & e^{-j \frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot 2(N-1)} \\ 1 & e^{-j \frac{6\pi}{N}} & e^{-j \frac{12\pi}{N}} & e^{-j \frac{18\pi}{N}} & \dots & e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot 3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot 2(N-1)} & e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot 3(N-1)} & \dots & e^{-j \frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Аналогично, в матричном виде может быть записано обратное дискретное преобразование Фурье.

Аналоговый сигнал $s(t)$ может быть **восстановлен** с помощью отсчётов ДПФ дискретного сигнала $\dot{S}_f(k)$:

$$s(t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \dot{S}_f(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot k \cdot \frac{t}{\Delta t}} \text{ при чётном } N, \quad (2.32)$$

$$s(t) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{S}_f(k) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot k \cdot \frac{t}{\Delta t}} \text{ при нечётном } N. \quad (2.33)$$

Дискретное преобразование Фурье $\dot{S}_f(n)$ определяет выборку из спектра $\dot{S}_d(\omega)$ дискретного сигнала $s_d(k)$ следующим соотношением:

$$\dot{S}_f(n) = \dot{S}_d\left(\frac{2 \cdot \pi}{\Delta t} \cdot \frac{n}{N}\right) = \dot{S}_d\left(\omega_d \cdot \frac{n}{N}\right), \quad (2.34)$$

где

$\dot{S}_d(\omega)$ – спектр (2.10) дискретного сигнала $s_d(k)$.

Таким образом, ДПФ применяется для определения (выборки) отсчётов из спектра дискретного сигнала $s_d(k)$.

Основные свойства дискретного преобразования Фурье

- 1) *Линейность*. Если для дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$ с количеством отсчётов N получены с помощью ДПФ спектры $\dot{X}_f(n)$ и $\dot{Y}_f(n)$, то взвешенной сумме дискретных сигналов

$$s(k) = a \cdot x(k) + b \cdot y(k)$$

соответствует взвешенная сумма их спектров

$$\dot{S}_f(n) = a \cdot \dot{X}_f(n) + b \cdot \dot{Y}_f(n).$$

- 2) *Задержка*. Если дискретный сигнал $x(k)$ с количеством отсчётов N и спектром $\dot{X}_f(n)$ задержать во времени на z отсчётов, то это приведёт

к умножению каждого отсчёта спектра $\dot{X}_f(n)$ на поворотный коэффициент $W_N^{-z \cdot n} = e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot z \cdot n}$:

$$\dot{X}'_f(n) = e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot z \cdot n} \cdot \dot{X}_f(n).$$

3) *Симметрия.* Спектр дискретного сигнала $s_d(k)$ является «сопряжённым-симметричным» относительно отсчёта спектра с номером $N/2$ для чётного N и $(N-1)/2$ для нечётного N :

$$\dot{S}_f(N-n) = \dot{S}_f(-n) = \dot{S}_f^*(n),$$

т.е. вторая половина отсчётов спектра ДПФ является комплексно-сопряжённой копией относительно первой половины отсчётов (см. рисунок 2.26).

Отсюда же видно, что вещественным является отсчёт спектра:

$$\dot{S}_f\left(\frac{N}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s_d(k) \cdot (-1)^k \quad \text{– в случае чётного } N;$$

$$\dot{S}_f(0) = \sum_{k=0}^{N-1} s_d(k) \quad \text{– в случае нечётного } N.$$

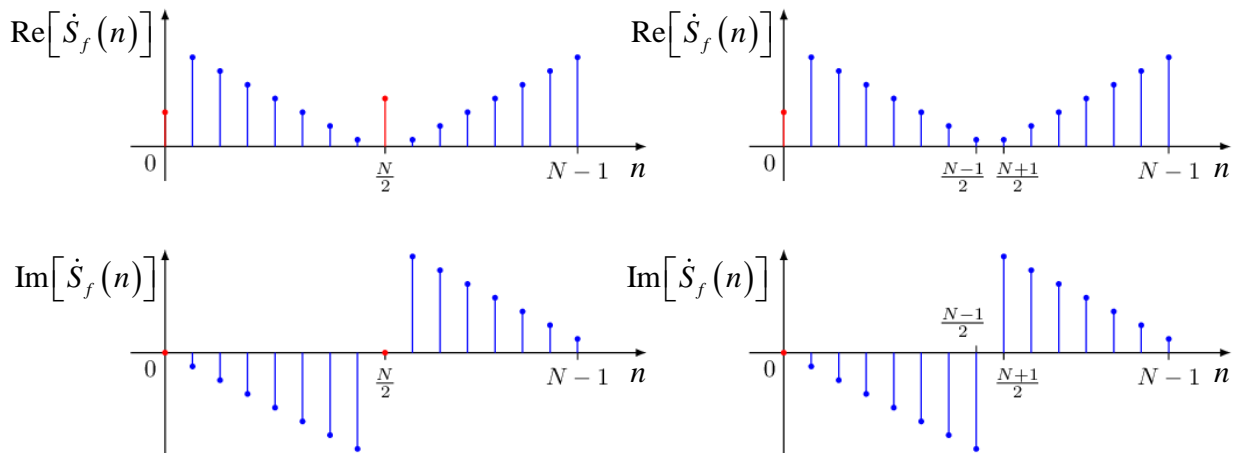


Рисунок 2.26 – Свойство симметрии прямого ДПФ (слева, для N – чётного, справа, для N – нечётного)

4) *Частотная инверсия.* В некоторых задачах при цифровой обработке необходимо выполнить частотную инверсию спектра дискретного сигнала.

Для частотной инверсии спектра дискретного вещественного сигнала с чётным количеством отсчётов N необходимо каждый второй отсчет умножить на минус 1.

Если умножить каждый второй отсчёт спектра дискретного сигнала, начиная с первого, то получится инверсный спектр с отрицательным знаком.

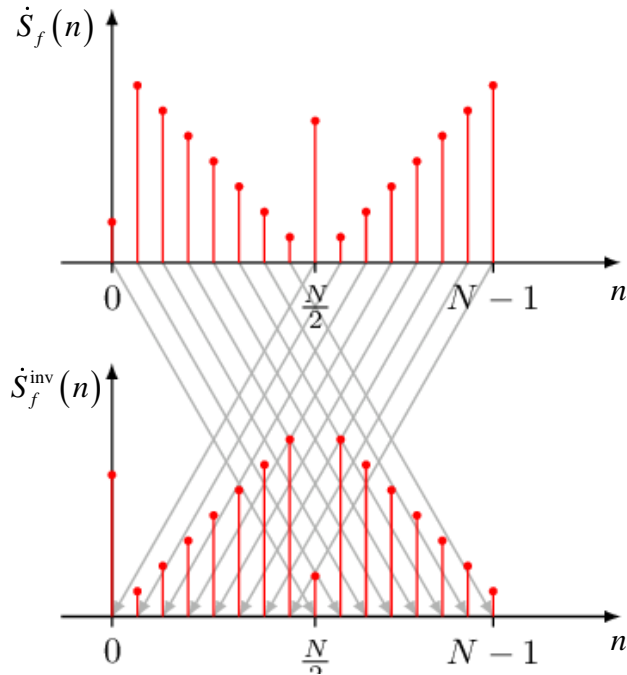


Рисунок 2.27 – Частотная инверсия спектра дискретного сигнала

5) *ДПФ циклической свёртки сигналов.* ДПФ циклической свертки дискретных сигналов равен произведению ДПФ этих дискретных сигналов.

Например, если дискретный сигнал $s_d(k)$ получен путём циклической свёртки дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$ с количеством отсчётов N

$$s_d(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot \text{mod}[y(k-i), N],$$

то ДПФ такого дискретного сигнала равно

$$\dot{S}_f(n) = \dot{X}_f(n) \cdot \dot{Y}_f(n).$$

б) *ДПФ произведения дискретных сигналов.* ДПФ произведения двух дискретных сигналов равен циклической свёртке ДПФ этих дискретных сигналов.

Например, если дискретный сигнал $s_d(k)$ получен в результате произведения дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$ с количеством отсчётов N

$$s_d(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot y(i),$$

то ДПФ такого дискретного сигнала равно

$$\dot{S}_f(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_f(k) \cdot \text{mod}[\dot{Y}_f(n-k), N].$$

7) *Частотно-временная дуальность.* Свойства ДПФ применимы как для временного, так и для частотного представления сигнала.

Например, ДПФ от спектра дискретного сигнала даёт зеркально отражённый во времени дискретный сигнал с точностью до масштабного множителя N :

$$DFT[\dot{S}_f(n)] = s'_d(k) = N \cdot s_d(-k).$$

Если отсчёты дискретного сигнала имеют следующий вид $s_d(k) = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$, то ДПФ от спектра даёт $DFT[\dot{S}_f(n)] = 6 \cdot [1, 6, 5, 4, 3, 2] = [6, 36, 30, 24, 18, 12]$.

Ускорение вычисления ДПФ

Количество отсчётов N дискретного сигнала $s_d(k)$ является основанием ДПФ. Так, если дискретный сигнал состоит $N = 10$ отсчётов, то ДПФ будет 10-ти точечным, т.е. по основанию 10.

Для вычисления ДПФ от дискретного сигнала $s_d(k)$ из N отсчётов потребуется N^2 операций комплексного умножения и сложения.

Для ускорения вычисления ДПФ дискретный сигнал прореживают по времени или по частоте. Поэтому N -точечное ДПФ сводится чаще всего к 2-х точечному (алгоритм RADIX-2) и реже к 4-х точечному ДПФ (алгоритм RADIX-4):

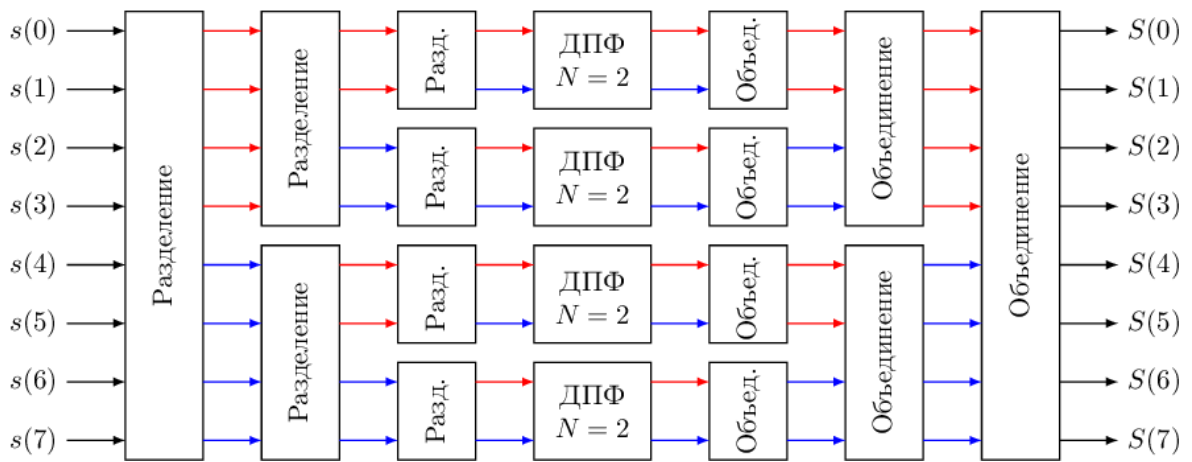


Рисунок 2.28 – Ускорение расчёта ДПФ для $N = 8$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – метод ускоренного расчёта дискретного преобразования Фурье за счёт сведения N -точечного ДПФ к совокупности 2-х или 4-х точечных ДПФ.

Если БПФ определяется через 2-х точечное ДПФ, то количество отсчётов дискретного сигнала $s_d(k)$ должно быть равно степени двойки, т.е. $N = 2^L$, где L – целое положительное число.

При вычислении обратного БПФ: отсчёты ДПФ $\dot{S}_f(n)$ дискретного сигнала $s_d(k)$ сначала преобразуется к комплексно-сопряжённому $\dot{S}_f(n) \rightarrow \dot{S}_f^*(n)$, затем выполняется прямое ДПФ и полученный результат снова подвергается комплексному сопряжению с последующим умножением на $1/N$.

Если частота f_0 синусоидального дискретного сигнала не равна частоте отсчёта ДПФ (2.30), то наблюдается эффект утечки спектра ДПФ: вместо одного отсчёта ДПФ возникает множество отсчётов спектра (рисунок 2.29). Это вызвано тем, что дискретное преобразование Фурье $\dot{S}_f(n)$ определяет выборку из спектра $\dot{S}_d(\omega)$ дискретного сигнала $s_d(k)$ согласно (2.34).

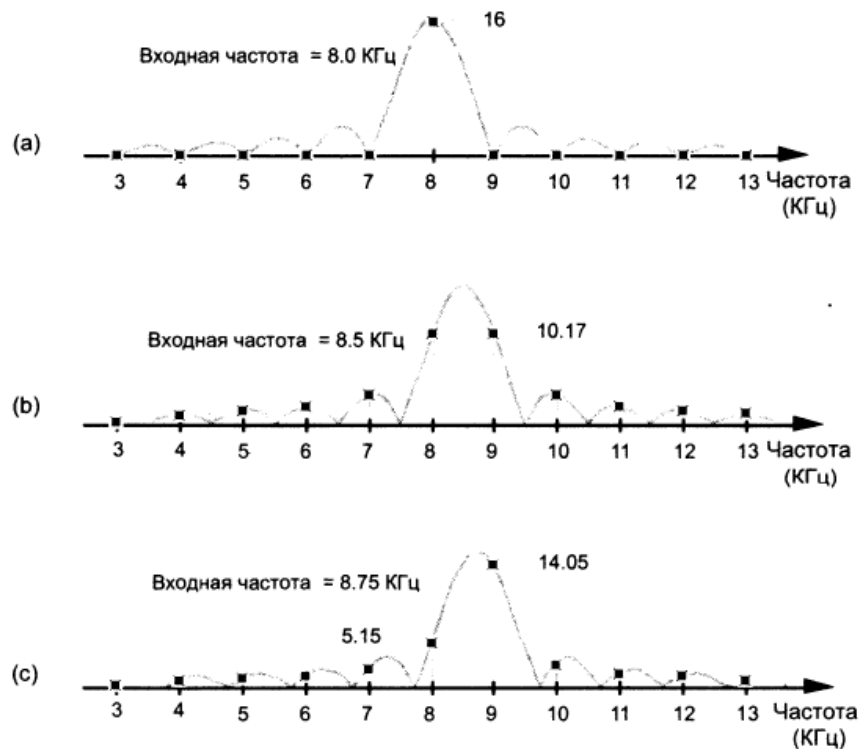


Рисунок 2.29 – Эффект утечки спектра ДПФ

2.4.2 Примеры решения задач

1. Дискретный косинусоидальный сигнал амплитудой $A = 1$ В длительностью $\tau_{\text{и}} = 1$ мс, центральной частотой $f_0 = 10$ кГц и начальной фазой $\varphi_0 = 0,7$ рад. дискретизирован на интервале времени $t \in [0; 5 \cdot (1/f_0)]$ с частотой $f_{\text{д}} = 0,1$ МГц. Составить скрипт (программу), которая:
 - формирует и отображает график дискретного сигнала во временной области;
 - формирует и отображает графики амплитудного спектра ДПФ дискретного сигнала и непрерывный амплитудный спектр косинусоидального сигнала (если бы не было дискретизации);
 - формирует и отображает графики спектра мощности ДПФ в Ваттах и дБВт, а также непрерывный амплитудный спектр косинусоидального сигнала (если бы не было дискретизации);
 - формирует фазовый спектр ДПФ дискретного сигнала.

Решение:

Скрипт (программа) для формирования и построения графика заданного дискретного сигнала на указанном интервале времени следующий:

```
clc;
```

```
clear;
```

```
close;
```

```
% Программа (скрипт) формирования косинусоидального сигнала
```

```
% Параметры сигнала
```

```
A = 1;          % Амплитуда радиосигнала, В
```

```
f0 = 10e3;     % Центральная частота радиосигнала, Гц
```

```
fi0 = 0.7;     % Начальная фаза радиосигнала, радианы
```

```
Tn = 5*(1/f0); % Интервал времени для формирования сигнала, с
```

```
% Параметры АЦП
```

```
fd = 1e5;      % Частота дискретизации радиосигнала, Гц
```

```
dt = 1/fd;     % Интервал временной дискретизации, с
```

```
% Начало программы
```

```
t = [0:dt:Tn-dt]; % Шкала времени
```

```
N = length(t);   % Количество отсчётов дискретного сигнала
```

```
df = fd/N;       % Шаг по частоте ДПФ, Гц
```

```
% Формируем дискретные отсчёты косинусоидального сигнала
```

```
S0 = A*cos(2*pi*f0*t + fi0);
```

```
% Преобразуем дискретный сигнал для центрирования спектра  
относительно нулевой частоты (частотная инверсия спектра)
```

```
Temp = (-1).^[1:N]; % Вспомогательный массив для преобразования  
дискретного сигнала
```

```

S = S0.*Temp;

% Определяем прямое БПФ дискретного сигнала
tic
FFT_S = fft(S);
t_end_fft = toc; % Время выполнения БПФ, секунды
% Нормируем результат прямого БПФ
FFT_S = FFT_S/N;
% Определяем амплитудный спектр от БПФ дискретного сигнала
A_FFT_S = abs(FFT_S);
% Определяем спектр мощности от БПФ дискретного сигнала
% --- в Ваттах
P_FFT_S = A_FFT_S.^2;
% --- в децибел к Ватту
P_FFT_SdB = 10*log10(P_FFT_S);
% Определяем фазовый спектр от БПФ дискретного сигнала
Ph_FFT_S = angle(FFT_S)*(180/pi);
% Определяем подпись оси частот
f = -fd/2:df:fd/2-df;
% Определяем непрерывный амплитудный спектр косинусоидального
сигнала (если бы не было дискретизации)
k0 = 16;
[S_SF, w] = freqz(S, 1, [], k0, 'whole');
f2 = (w*fd/k0) - 0.5*max(w*fd/k0); % Подпись частот для спектра
дискретного сигнала
A_SF = abs(S_SF)/N; % Амплитудный спектр
P_SF = A_SF.^2; % Спектр мощности

% Строим график
% ---- Дискретного сигнала во времени

```

```

figure;
hold on
plot(t, S0,'--','color','k');
stem(t, S0,'color','b');
hold off
grid on;
xlabel('Время, с');
ylabel('Напряжение U(t), В');
close;
% ---- Амплитудного спектра дискретного сигнала, Вольты
figure;
hold on
plot(f2, A_SF,'--','color','r')
stem(f, A_FFT_S,'color','k');
hold off
grid on;
xlabel('Частота, Гц');
ylabel('Напряжение U(f), В');
xlim([-0.2*1e5, 0.2*1e5]);
close;
% ---- Спектра мощности дискретного сигнала, Ватты
figure;
hold on
plot(f2, P_SF,'--','color','r')
stem(f, P_FFT_S,'color','k');
hold off
grid on;
xlabel('Частота, Гц');
ylabel('Мощность P(f), Вт');
close;

```

```

% ---- Спектра мощности дискретного сигнала, дБВт
figure;
plot(f, P_FFT_SdB,'color','k');
grid on;
grid on;
xlabel('Частота, Гц');
ylabel('Мощность P(f), дБВт');
close;
xlabel('Частота, Гц');
ylabel('Мощность P(f), дБВт');
close;

```

2.4.3 Упражнение

Задано N отсчётов:

- Дискретного косинусоидального сигнала $s_1(k)$ амплитудой A_1 Вольт с центральной частотой f_{01} кГц и начальной фазой φ_{01} рад.;
- Дискретного синусоидального сигнала $s_2(k)$ амплитудой A_2 Вольт с центральной частотой $f_{02} = 2 \cdot f_{01}$ кГц и начальной фазой φ_{02} рад.
- Суммы указанных дискретных сигналов $s_3(k) = s_1(k) + s_2(k)$;
- Произведения указанных дискретных сигналов $s_4(k) = s_1(k) \cdot s_2(k)$.

Параметры сигналов указаны в таблице 2.13.

Для указанных сигналов $s_1(k)$, $s_2(k)$, $s_3(k)$ и $s_4(k)$:

- а) Выбрать частоту f_d дискретизации для построения каждого из указанных дискретных сигналов так, чтобы отсутствовал эффект утечки спектра.
- б) Составить скрипт (программу), которая:
 - формирует и отображает график каждого дискретного сигнала во временной области с подписей осей и сетки.

– формирует и отображает графики амплитудного спектра ДПФ, БПФ и ожидаемого спектра каждого дискретного сигнала с подписей осей и сетки. Кроме этого, построить непрерывный амплитудный спектр сигналов $s_1(k)$, $s_2(k)$ (если бы не было дискретизации).

* Здесь и далее:

- Прямое ДПФ реализовать в двух вариантах с помощью формул из теории.
- При реализации ДПФ и БПФ оценить и сравнить время расчёта ДПФ и БПФ с помощью функций tic, toc. Во сколько раз БПФ быстрее ДПФ?

– формирует и отображает графики спектра мощности ДПФ, БПФ в Ваттах и дБВт, а также ожидаемого спектра мощности каждого дискретного сигнала с подписей осей и сетки;

– формирует и строит график фазового спектра ДПФ, БПФ каждого дискретного сигнала с подписей осей и сетки. Показать, что фазы дискретных сигналов $s_1(k)$, $s_2(k)$, $s_3(k)$ и $s_4(k)$ совпадают со значениями в фазовом спектре.

– восстанавливает форму аналогового сигнала по отсчётам БПФ каждого дискретного сигнала $s_1(k)$, $s_2(k)$, $s_3(k)$ и $s_4(k)$.

– формирует и отображает графики периодического продолжения сигналов $s_1(k)$, $s_2(k)$, $s_3(k)$ и $s_4(k)$: каждый сигнал повторить три раза – получится три периода каждого сигнала. Периодическое продолжение указанных сигналов обозначить как новые сигналы $sp_1(k)$, $sp_2(k)$, $sp_3(k)$ и $sp_4(k)$.

- Сформировать и отобразить графики амплитудного спектра БПФ дискретных сигналов $sp_1(k)$, $sp_2(k)$, $sp_3(k)$ и $sp_4(k)$ с подписей осей и сетки.
- Сравнить амплитудные спектры сигналов $s_1(k)$, $s_2(k)$, $s_3(k)$ и $s_4(k)$ из п. б) и амплитудные спектры периодического

продолжения соответствующих сигналов $sp_1(k)$, $sp_2(k)$, $sp_3(k)$ и $sp_4(k)$. Есть ли различия? Почему?

Запустить программу. Доказать правильность работы программы, сравнив результаты работы программы с ожидаемыми.

в) Продемонстрировать свойства симметрии, задержки и линейности ДПФ с помощью составленной программы (скрипта). При проверке свойства задержки каждый из сигналов задержать на произвольное количество отсчётов, не больше округлённого числа $(N/4)$.

г) Изменить частоту f_d дискретизации так, чтобы присутствовал эффект утечки спектра. Повторить пункт б). Объяснить полученные графики амплитудного спектра ДПФ дискретных сигналов: есть ли изменения в амплитудном спектре? Опишите найденные изменения. Объясните причины, приводящие к этим изменениям.

д) Дополнить сформированный в п. б) дискретный сигнал с частотой дискретизации из п. а) нулевыми отсчётами. Количество нулевых отсчётов равно $0,5 \cdot N$. Повторить пункт б), а затем пункт г). Для каждого выполненного пункта объяснить полученные графики амплитудного спектра ДПФ дискретных сигналов: есть ли изменения в амплитудном спектре? Опишите найденные изменения. Объясните причины, приводящие к этим изменениям.

Таблица 2.13 – Параметры сигнала

№	A_1 , В	f_{01} , кГц	φ_{01} , рад	A_2 , В	φ_{01} , рад	N
1	2	2330	2,57	52	6,2	1600
2	26	1570	1,05	54	2,27	1300
3	5	2320	6,09	24	0,85	2000
4	27	1740	6,1	24	2,11	400

5	35	1460	1,25	48	3,84	800
6	14	990	5,67	40	6,15	900
7	13	2150	4,47	100	0,3	1000
8	36	1340	2,08	24	0,68	2100
9	9	1120	3,74	65	1,85	700
10	26	2190	0,82	25	5,83	1800
11	44	2280	1,41	2	3,83	200
12	12	570	6,18	80	3,92	1500
13	8	550	6,15	40	5,51	1900
14	35	2240	0,53	36	1,29	1400
15	16	2250	6,05	7	0,32	500
16	31	730	0,23	32	1,42	1200
17	25	1120	5,78	14	4,76	1100
18	21	1710	2,75	60	2,57	600
19	13	2160	5,45	63	1,62	300
20	47	1520	1,02	11	4,34	1700

2.5 Тема «Линейная фильтрация дискретных сигналов»

Вопросы для изучения:

1. Дискретный трансверсальный и рекурсивный линейный фильтр. Разностное уравнение. Импульсная характеристика, системная функция, частотный коэффициент передачи, структурная схема дискретного фильтра.
2. Устойчивость дискретного фильтра.

2.5.1 Некоторые теоретические сведения

Основные определения

Система обработки сигналов (далее система) – объект, преобразующий входной сигнал в выходной с заданными характеристиками. Физически система обработки сигналов представляет собой аналоговое или цифровое устройство.

Воздействие – входной сигнал системы обработки.

Отклик (реакция) – выходной сигнал системы обработки.

Прямой способ описания системы даётся математическим преобразованием (оператором) $F[x(t)]$ над входным сигналом $x(t)$. В результате преобразования входного сигнала образуется отклик $y(t) = F[x(t)]$.

Система линейная, если обладает следующими свойствами:

– отклик на сумму воздействий $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$, равна сумме откликов на каждое воздействие (свойство аддитивности или суперпозиции):

$$F[x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_m(t)] = F[x_1(t)] + F[x_2(t)] + \dots + F[x_m(t)];$$

– умножение воздействия на вещественный коэффициент приводит к умножению на тот же коэффициент отклика (свойство однородности):

$$F[k \cdot x(t)] = k \cdot F[x(t)] = k \cdot y(t);$$

Для системы с указанными свойствами уравнение, связывающее воздействие и отклик, является линейным.

Система дискретная, если преобразуется входной дискретный сигнал $x(k)$ в выходной дискретный сигнал $y(k)$ с заданными характеристиками.

Система казуальная (физически реализуемая), если отклик не зависит от воздействия в последующие моменты времени. Иначе – *неказуальная*.

Дискретная система стационарная, если отклик $y(k)$ не зависит от времени подачи (задержки) входного сигнала $x(k)$: $y(k) = y(k - n)$ для $x(k - n)$.

Дискретная система физически реализуема, если отклик равен нулю при нулевом входном воздействии и зависит только от входного воздействия в настоящий и предыдущий момент времени (а от будущих, ещё не наступивших воздействий – отклик не зависит).

Дискретная система может быть предварительно возбуждена свободными (собственными) колебаниями (автоколебаниями). Это означает, что в отсутствии входного воздействия ($x(k) = 0$) выходной сигнал дискретной системы не равен нулю, т.е. $y(k) \neq 0$ и начальные условия дискретной системы ненулевые.

Описание линейных дискретных систем

- во временной области импульсной характеристикой $h(k)$ – отклик линейной дискретной системы на единичный отсчёт входного воздействия $\{1;0;0;0;0;\dots\}$ при нулевых начальных условиях.
- в z -области передаточной (системной) функцией, равной отношению Z -преобразования отклика $Y(z)$ к Z -преобразованию воздействия $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cdot z^{-k}}, \quad N \leq M, \quad (2.35)$$

или, равной Z -преобразованию импульсной реакции;

$$H(z) = Z\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k}. \quad (2.36)$$

Порядок передаточной (системной) функции равен $\max\{M - 1, N - 1\}$. Например, если $M = 2, N = 3$, то порядок равен $\max\{2 - 1, 3 - 1\} = 2$.

Нули передаточной (системной) функции – такие значения z при которых передаточная (системная) функция $H(z)$ обращается в нуль.

Полюсы передаточной (системной) функции – такие значения z при которых **знаменатель** передаточной (системной) функции $H(z)$ обращается в нуль.

- в частотной области комплексной частотной характеристикой (частотной характеристикой), равной отношению спектра отклика к спектру воздействия

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \quad (2.37)$$

Модуль частотной характеристики

$$A(j\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{K(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{K(j\omega)\}^2} \quad (2.38)$$

называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а аргумент частотной характеристики называют фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)

$$\Phi(j\omega) = \arg[K(j\omega)] = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}\{K(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{K(j\omega)\}} \right). \quad (2.39)$$

Частотная характеристика дискретной системы связана:

- с импульсной характеристикой $h(k)$ через прямое преобразование Фурье

$$K(j\omega) = DFT\{h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-k \cdot \omega \cdot \Delta t} \quad (2.40)$$

- с передаточной (системной) функцией $H(z)$ через замену $z = e^{j \cdot \omega \cdot \Delta t}$

$$K(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j \cdot \omega \cdot \Delta t}}. \quad (2.41)$$

Связь выходного и входного сигнала дискретной системы даётся

- *с помощью импульсной характеристики через формулу свёртки (см. рисунок 2.30)*

$$y(k) = x(i) \times h(i) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot h(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(k-i), \quad (2.42)$$

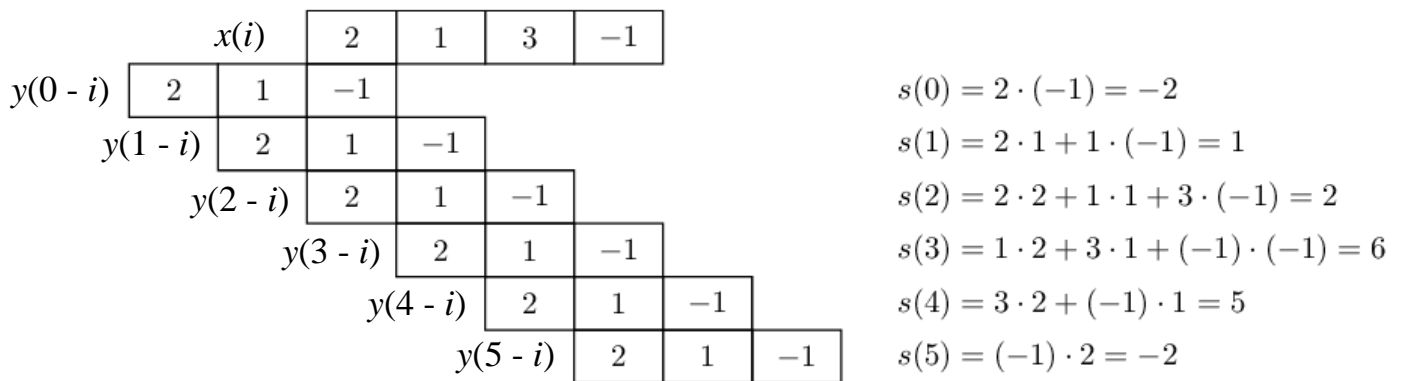


Рисунок 2.30 – Пример вычисления свёртки дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$ длиной N

Свёртка дискретных сигналов $x(k)$ и $y(k)$ одинаковой длины N может быть определена через ДПФ следующим образом:

$$s_d(k) = x(i) \otimes y(i) = \text{IDFT} \left\{ \text{DFT} [x(k)] \cdot \text{DFT} [y(k)] \right\}, \quad (2.43)$$

где

$\text{DFT} [x(k)]$ – дискретное преобразование Фурье дискретного сигнала $x(k)$;

$\text{DFT} [y(k)]$ – дискретное преобразование Фурье дискретного сигнала $y(k)$;

$\text{IDFT} \{ . \}$ – оператор дискретного преобразования Фурье.

- разностным уравнением через внутренние параметры дискретной системы

$$y(k) + \sum_{j=0}^{M-1} b_j \cdot y(k-j) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x(k-i); \quad (2.44)$$

где

a_j, b_i – коэффициенты линейной дискретной системы (вещественные);

M, N – количество соответствующих коэффициентов линейной дискретной системы;

i, j – значения задержек отсчётов входного дискретного сигнала и отклика, соответственно;

$x(k), y(k)$ – входной и выходной дискретный сигнал, соответственно.

a_j, b_i – коэффициенты, которые являются внутренними параметрами линейной дискретной системы, причём:

a_i – коэффициенты прямой связи;

b_j – коэффициенты обратной связи, которые влияют на собственные частоты линейной дискретной системы.

- алгоритмом дискретной фильтрации через внутренние параметры дискретной системы

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x(k-i) - \sum_{j=0}^{M-1} b_j \cdot y(k-j); \quad (2.45)$$

Для реализации алгоритма фильтрации в Matlab может быть использована функция «filter» со следующим синтаксисом:

$$y = \text{filter}(b, a, x), \quad (2.46)$$

где

x – массив (вектор) дискретного входного сигнала;

b – массив (вектор) коэффициентов прямой связи;

a – массив (вектор) коэффициентов обратной связи.

Внимание! Обратите внимание, что в иностранной (в частности, в справке к Matlab) и отечественной литературе (в частности, в данном пособии) обозначения коэффициентов « a » и « b » имеют противоположный смысл.

Рекурсивная линейная дискретная система – линейная дискретная система, для которой хотя бы один коэффициент b_j не равен нулю. Порядок такой дискретной системы равен $\max\{M - 1, N - 1\}$. Например, если $M = 2$, $N = 3$, то порядок равен $\max\{2 - 1, 3 - 1\} = 2$.

Для рекурсивной линейной дискретной системы выходное значение сигнала $y(k)$ определяется:

– текущим значением входного сигнала $x(k)$;

– предысторией значений входного сигнала $x(k - 1), x(k - 2), \dots$;

– предысторией значений выходного сигнала $y(k - 1), y(k - 2), \dots$.

Отсюда следует, что рекурсивная линейная дискретная система обладает памятью по входному и выходному сигналу. Глубина памяти определяется порядком фильтра.

Импульсная характеристика рекурсивной линейной дискретной системы имеет бесконечную длину. Линейные дискретные системы с бесконечной импульсной характеристикой называют БИХ-системами. В частности, если в качестве линейной системы рассматривается фильтр, то такой фильтр называют БИХ-фильтром.

Для БИХ-фильтра:

– алгоритм дискретной фильтрации записывается как

$$y(k) = \sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot x(k-g) - \sum_{p=1}^{N-1} b_p \cdot y(k-p); \quad (2.47)$$

– передаточная (системная) функция $H(z)$ записывается как

$$H(z) = \frac{\sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot z^{-g}}{1 + \sum_{p=0}^{N-1} b_p \cdot z^{-p}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{M-1} \cdot z^{-(M-1)}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_{N-1} \cdot z^{-(N-1)}}; \quad (2.48)$$

– комплексная частотная характеристика $K(j\omega)$ записывается как

$$K(j\omega) = \frac{\sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot e^{-j\omega \cdot g \cdot \Delta t}}{1 + \sum_{p=0}^{N-1} b_p \cdot e^{-j\omega \cdot p \cdot \Delta t}}; \quad (2.49)$$

В Matlab комплексная частотная характеристика определяется с помощью функции $freqz(b, a)$.

– амплитудно-частотная характеристика фильтра $A(\omega)$ записывается как:

$$A(\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}; \quad (2.50)$$

– фазо-частотная характеристика $\Phi(\omega)$ записывается как:

$$\Phi(\omega) = \arg[K(j\omega)] = -\arctg \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right); \quad (2.51)$$

– групповое время запаздывания $\tau(\omega)$ записывается как:

$$\tau(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}. \quad (2.52)$$

Групповое время запаздывания отражает задержку огибающей сигнала в дискретном фильтре. Предпочтительны дискретные системы с приблизительно постоянной характеристикой группового времени запаздывания в полосе (или полосах) пропускания фильтра: неравномерность группового времени запаздывания в полосе пропускания должна быть как можно меньше. В Matlab групповое время запаздывание определяется с помощью функции $grpdelay(b, a)$.

Нерекурсивная линейная дискретная система – линейная дискретная система, для которой все коэффициенты b_j равны нулю. Порядок такой дискретной системы равен N .

Для нерекурсивной линейной дискретной системы выходное значение сигнала $y(k)$ определяется:

- текущим значением входного сигнала $x(k)$;
- предысторией значений входного сигнала $x(k - 1), x(k - 2), \dots$

Отсюда следует, что рекурсивная линейная дискретная система обладает памятью только по входному сигналу. Глубина памяти определяется порядком фильтра.

Импульсная характеристика нерекурсивной линейной дискретной системы имеет конечную длину. Линейные дискретные системы с конечной импульсной характеристикой называют КИХ-системами. В частности, если в качестве линейной системы рассматривается фильтр, то такой фильтр называют КИХ-фильтром (другое название – трансверсальный фильтр).

Для КИХ-фильтра:

- алгоритм дискретной фильтрации записывается как

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(k-i); \quad (2.53)$$

- передаточная (системная) функция $H(z)$ записывается как

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot z^{-i} = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot z^{-i}; \quad (2.54)$$

- комплексная частотная характеристика $K(j\omega)$ записывается как

$$K(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{-j\omega k \Delta t} = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot e^{-j\omega k \Delta t}; \quad (2.55)$$

В Matlab комплексная частотная характеристика определяется с помощью функции $freqz(b, a)$.

- амплитудно-частотная характеристика фильтра $A(\omega)$ записывается как:

$$A(\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left\{ \sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}{\left\{ \sum_{p=1}^{N-1} b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{p=1}^{N-1} b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}}; \quad (2.56)$$

- фазо-частотная характеристика $\Phi(\omega)$ записывается как:

$$\Phi(\omega) = \arg[K(j\omega)] = -\arctg \left(\frac{\sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{g=0}^{M-1} a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) - \arctg \left(\frac{\sum_{p=1}^{N-1} b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t)}{1 - \sum_{p=1}^{N-1} b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right); \quad (2.57)$$

- групповое время запаздывания $\tau(\omega)$ записывается как:

$$\tau(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = - \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) \right\}'_{\omega}. \quad (2.58)$$

В Matlab групповое время запаздывание определяется с помощью функции $\text{grpdelay}(b, a)$.

Основные сравнительные признаки нерекурсивных и рекурсивных линейных дискретных систем приведены в таблице 2.14.

Таблица 2.14 – Нерекурсивные и рекурсивные линейные дискретные системы

Признак	Нерекурсивный фильтр	Рекурсивный фильтр
ФЧХ	Может быть линейной	Сложно управляется
Устойчивость	Всегда устойчивы	Могут быть неустойчивыми
Автоколебания	Отсутствуют	Могут быть
Порядок фильтра	Больше	Меньше
Аналоговый прототип	Отсутствует	Имеется

Устойчивость линейных дискретных систем

Линейная дискретная система устойчива, если при ограниченном входном и конечном воздействии

$$\max_k \{|x(k)|\} \leq R_x \neq \infty$$

отклик линейной дискретной системы будет также ограниченным и конечным $\max_k \{|y(k)|\} \leq R_y \neq \infty$.

Нерекурсивные линейные дискретные системы являются принципиально устойчивыми.

Критерии устойчивости рекурсивных линейных дискретных систем

- 1) Сумма модулей отсчётов импульсной характеристики конечен

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty, \quad (2.59)$$

причём важно, чтобы коэффициенты разложения A_j импульсной реакции в ряд

$$h(k) = A_0 \cdot x(k) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot \alpha_j^k \quad (2.60)$$

были не равны нулю.

2) Все полюсы передаточной функции находились внутри круга единичного радиуса.

3) Дискретный фильтр вида

$$y(k) = b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) + \dots + b_{n-1} \cdot y(k-n+1) \quad (2.61)$$

устойчив, если все корни характеристического уравнения

$$\gamma^{n-1} - b_1 \cdot \gamma^{n-2} - b_2 \cdot \gamma^{n-3} - \dots - b_{n-1} = 0, \quad (2.62)$$

по модулю меньше единицы, т.е. располагаются внутри единичного круга с центром в точке нуль.

4) Дискретный фильтр устойчив по критерию Гурвица, если для характеристического уравнения

$$d_n \cdot \omega^n + d_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + d_{n-2} \cdot \omega^{n-2} + \dots + d_2 \cdot \omega^2 + d_1 \cdot \omega + d_0 = 0$$

выполнены три условия:

- 1) Все коэффициенты $d_n > 0$;
- 2) Все определители матрицы Гурвица должны быть больше нуля.

Формы структурных схем линейных дискретных систем

Структурная схема линейной дискретной системы изображает алгоритм вычисления отклика по входному воздействию согласно разностному уравнению.

Разностное уравнение содержит следующие математические операции:

- задержка, кратная периоду дискретизации;
- умножение на коэффициент;
- алгебраическое сложение.

В соответствие с этими операциями на структурной схеме изображают три вида элементов:

- элемент задержки на один отсчёт:

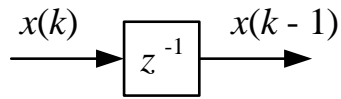


Рисунок 2.31 – Элемент «задержка» на один отсчёт

– умножитель:

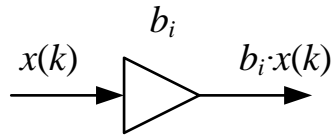


Рисунок 2.32 – Элемент «множитель» на коэффициент b_i

– сумматор:

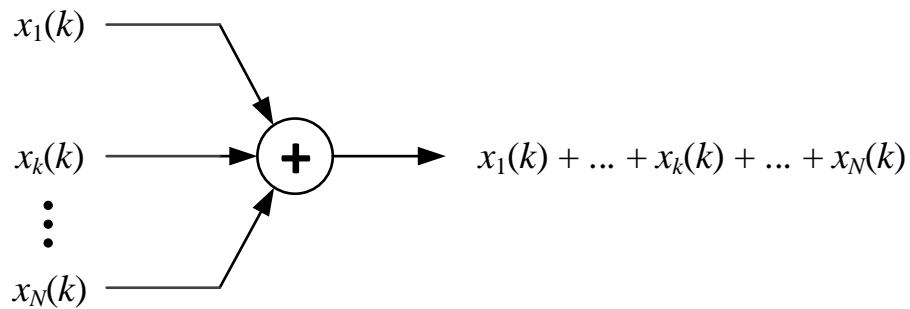


Рисунок 2.33 – Элемент «сумматор» для N входных сигналов

Существуют три формы представления структурных схем:

- прямая (direct-form-I), определяется по передаточной (системной) функции линейной дискретной системы:

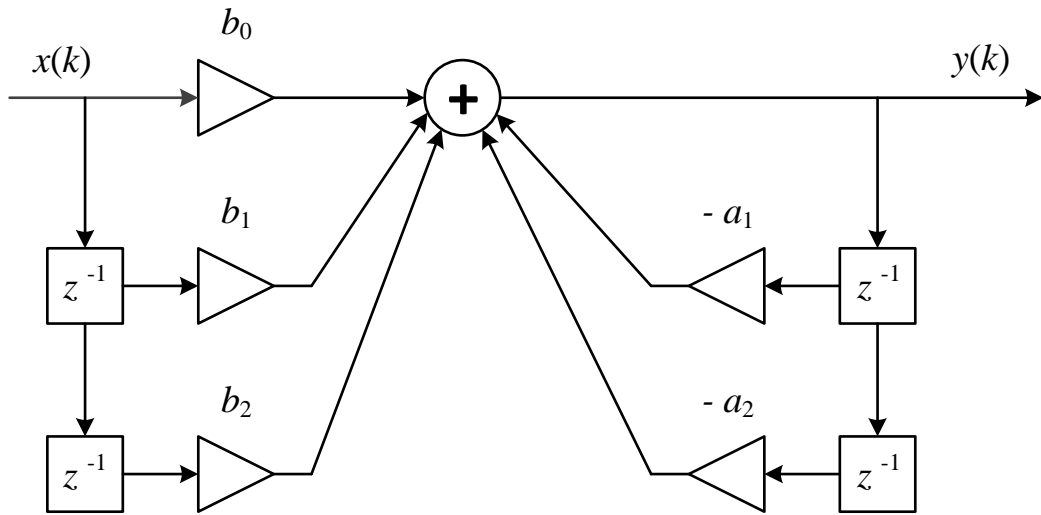


Рисунок 2.34 – Прямая форма структурной схемы (direct-form-I)

При реализации прямой формы алгоритма дискретной системы требуется достаточно большое число линий задержки, а сумматоры должны обладать большой разрядностью, так как амплитуда дискретных сигналов в сумматоре может быть значительно больше входного сигнала. Разрядность представления числа в линии задержки сопоставима с разрядностью входного сигнала.

- каноническая:

Прямая форма может быть преобразована в каноническую форму (direct-form-II) так, что число элементов задержки в полученной структурной схеме окажется минимальным и равным порядку передаточной функции:

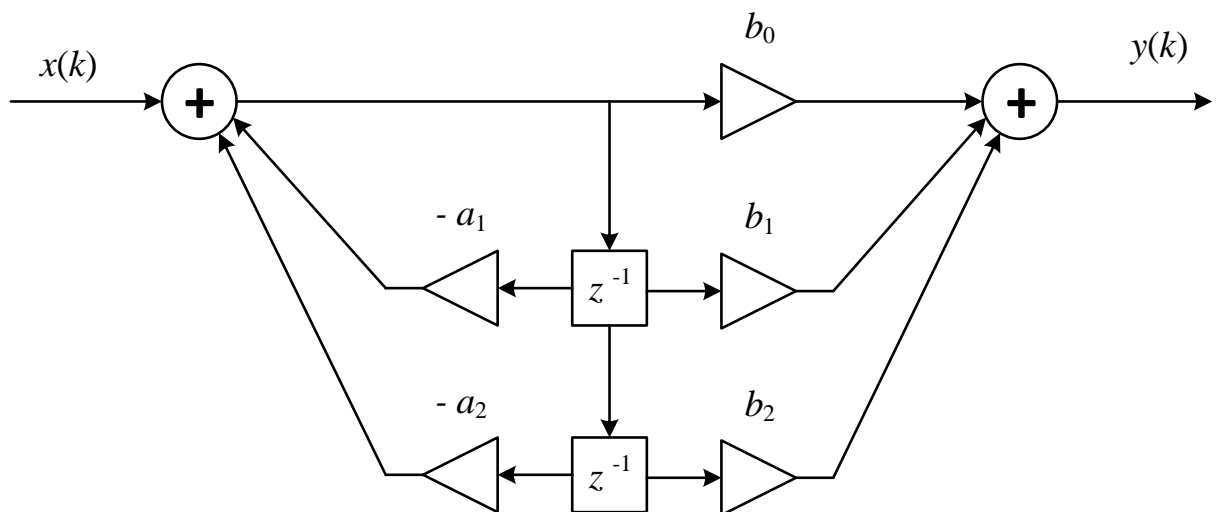


Рисунок 2.35 – Каноническая форма структурной схемы (direct-form-II)

При реализации канонической формы алгоритма дискретной системы требуется минимальное число линий задержки. Однако разрядность представления чисел в линии задержки и в сумматорах должна значительно превышать разрядность входного дискретного сигнала, так как амплитуда дискретных сигналов в указанных элементах может оказаться больше входного и выходного сигналов.

- транспонированная:

Транспонированная форма образуется из прямой формы в результате изменения последовательности выполнения операций умножения и задержки и добавления у сумматора дополнительных входов (direct-transposed-form-II):

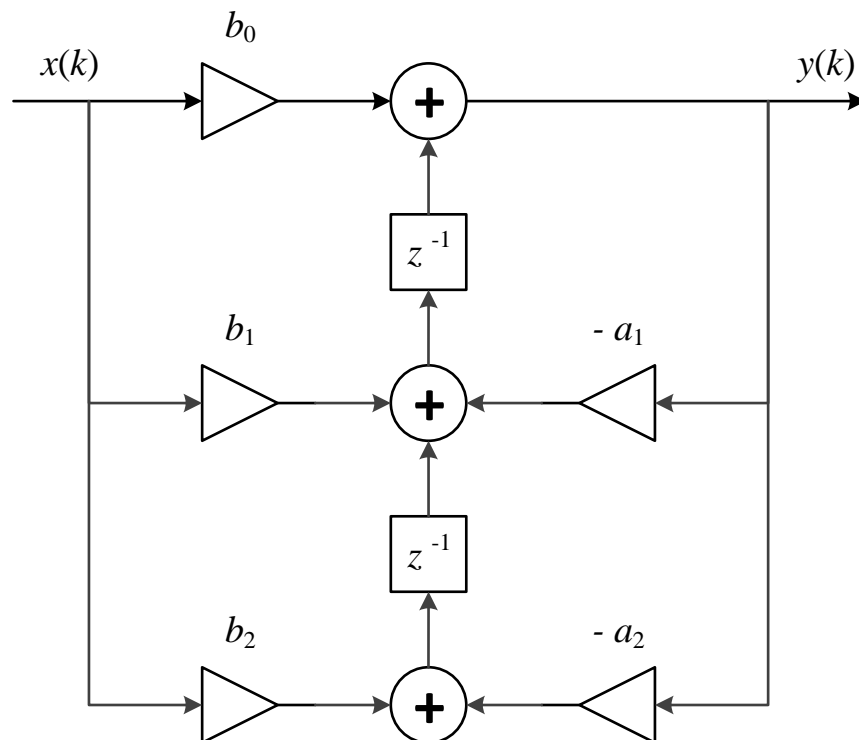


Рисунок 2.36 – Транспонированная форма представления структурной схемы

Транспонированная форма применяется для реализации параллельных вычислений: в вычислителях можно одновременно реализовать все операции умножения и сложения.

- каскадная:

Каскадная форма образуется из прямой формы путём разложения числителя и знаменателя системной (передаточной) функции $H(z)$ дискретной системы на **произведение** простых сомножителей (дробей). Каждый сомножитель образует каскад, который реализован в виде простой системы первого или второго порядка. Например, передаточная функция может быть представлена произведением трёх простых сомножителей $H_1(z)$, $H_2(z)$ и $H_3(z)$.

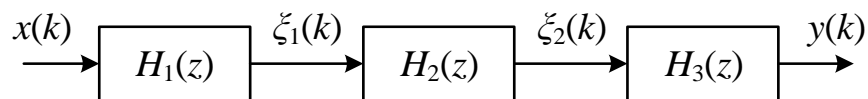


Рисунок 2.37 – Каскадная форма представления структурной схемы

Преимущество каскадной формы в том, что при её реализации становятся менее существенными нежелательные эффекты округления коэффициентов.

- параллельная:

Параллельная форма образуется из прямой формы путём разложения числителя и знаменателя системной (передаточной) функции $H(z)$ дискретной системы на **сумму** простых слагаемых (дробей). Каждое слагаемое образует звено, которое реализовано в виде простой системы первого или второго порядка. Например, передаточная функция может быть представлена суммой трёх простых слагаемых $H_1(z)$, $H_2(z)$ и $H_3(z)$.

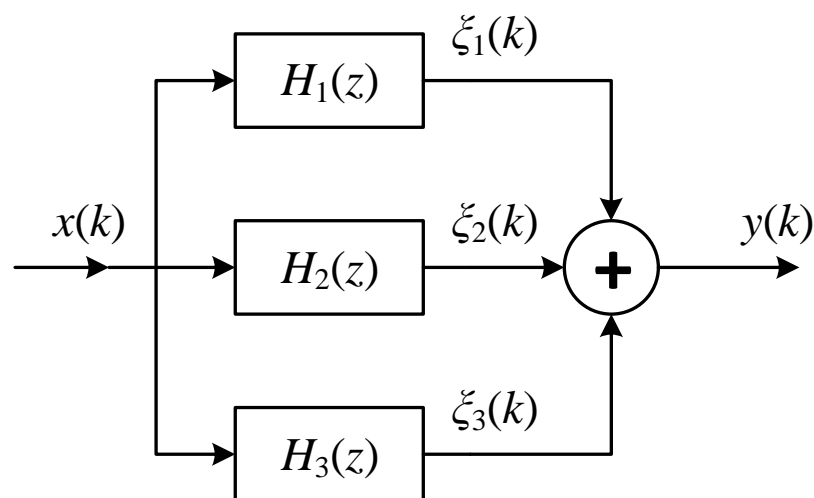


Рисунок 2.38 – Каскадная форма представления структурной схемы

Преимущество параллельной формы в том, что при её реализации становятся менее существенными нежелательные эффекты округления коэффициентов.

Простейшие линейные рекурсивные дискретные системы первого порядка

Рассмотрим пример дискретной линейной системы в виде фильтра первого порядка. Разностное уравнение рекурсивного дискретного фильтра первого порядка записывается следующим образом:

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) + a_1 \cdot x(k-1) - b_1 \cdot y(k-1), \quad (2.63)$$

передаточная (системная) функция

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 + b_1 \cdot z^{-1}}, \quad (2.64)$$

а комплексная частотная характеристика

$$K(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\omega\Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\omega\Delta t}}. \quad (2.65)$$

На нулевой частоте коэффициент передачи равен

$$K(0) = \frac{a_0 + a_1}{1 + b_1}, \quad (2.66)$$

а на верхней частоте коэффициент передачи равен

$$\begin{aligned} K\left(j\frac{\omega_d}{2}\right) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\frac{\omega_d}{2}\Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\frac{\omega_d}{2}\Delta t}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot f_d}{2}\Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\frac{2\pi \cdot f_d}{2}\Delta t}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\pi \cdot f_d \cdot \Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\pi \cdot f_d \cdot \Delta t}} = \\ &= \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\pi \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\pi \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\pi}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\pi}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot (-1)}{1 + b_1 \cdot (-1)} = \frac{a_0 - a_1}{1 - b_1} \\ K\left(j\frac{\omega_d}{2}\right) &= \frac{a_0 - a_1}{1 - b_1}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

В данном рекурсивном дискретном фильтре один полюс: $z_1 = -b_1$. Для устойчивого рекурсивного фильтра $|b_1| < 1$.

На основе выражений (2.63) – (2.67) рассмотрим частные случаи фильтров.

- Фильтр низких частот.

Граничные условия для комплексного коэффициента передачи $K(\cdot)$ фильтра низких частот должны быть следующими:

$$K(0) = \frac{a_0 + a_1}{1 + b_1} = 1 \text{ – низкие частоты пропускаются без искажений;}$$

$$K\left(j\frac{\omega_d}{2}\right) = \frac{a_0 - a_1}{1 - b_1} = 0 \text{ – верхние частоты полностью подавлены.}$$

Коэффициенты системной (передаточной) функции рекурсивного фильтра низких частот первого порядка должны удовлетворять соотношению:

$$a_0 = a_1 = \frac{1 + b_1}{2}.$$

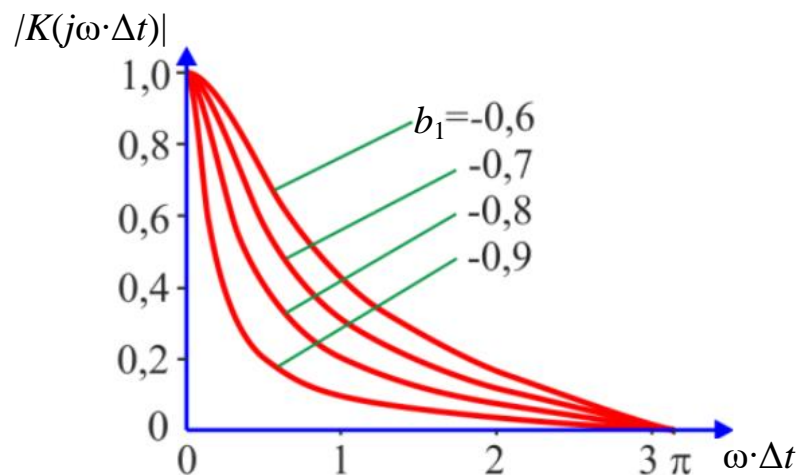


Рисунок 2.39 – АЧХ дискретного фильтра низких частот первого порядка

- Фильтр высоких частот.

Граничные условия для комплексного коэффициента передачи $K(\cdot)$ фильтра высоких частот должны быть следующими:

$$K(0) = \frac{a_0 + a_1}{1 + b_1} = 1 \text{ – низкие частоты полностью подавлены;}$$

$$K\left(j\frac{\omega_d}{2}\right) = \frac{a_0 - a_1}{1 - b_1} = 0 \text{ – верхние частоты пропускаются без искажений.}$$

Коэффициенты системной (передаточной) функции рекурсивного фильтра высоких частот первого порядка должны удовлетворять соотношению:

$$a_0 = -a_1 = \frac{1-b_1}{2}.$$

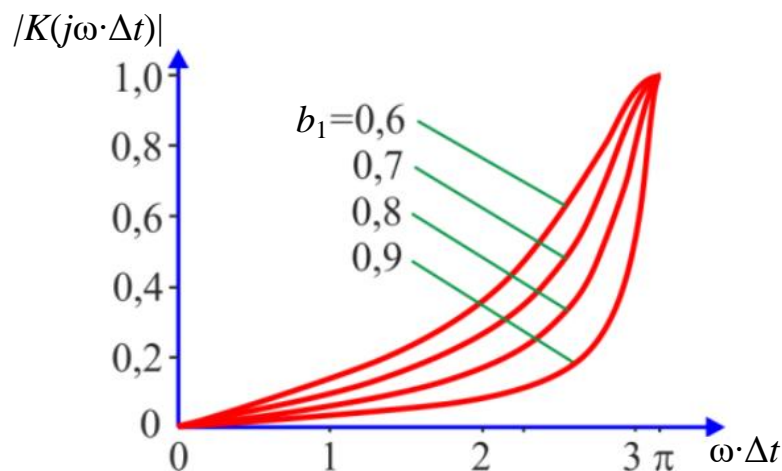


Рисунок 2.40 – АЧХ дискретного фильтра высоких частот первого порядка

Отметим, что рекурсивные фильтры первого порядка имеют низкую избирательность, поэтому чаще всего включаются несколькими каскадами.

2.5.2 Примеры решения задач

1. Трансверсальный дискретный фильтр второго порядка описывается следующим разностным уравнением:

$$y(k) = 4 \cdot x(k) - 2,5 \cdot x(k-1) + 0,8 \cdot x(k-2).$$

Для заданного дискретного фильтра:

- изобразите структурную схему;
- определите импульсную характеристику $h(k)$, системную функцию $H(z)$, частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$, а также амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики.

Решение:

Разностное уравнение произвольного трансверсального (нерекурсивного) дискретного фильтра записывается следующим образом:

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) + a_1 \cdot x(k-1) + a_2 \cdot x(k-2) + \dots + a_{m-1} \cdot x(k-m+1) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \cdot x(k-n),$$

где

a_0, a_1, \dots, a_{m-1} – коэффициенты фильтра для дискретных сигналов, задержанных в фильтре на 0 отсчётов, 1 отсчёт, ..., $m-1$ отсчётов.

Структурная схема трансверсального фильтра в общем виде изображается следующим образом:

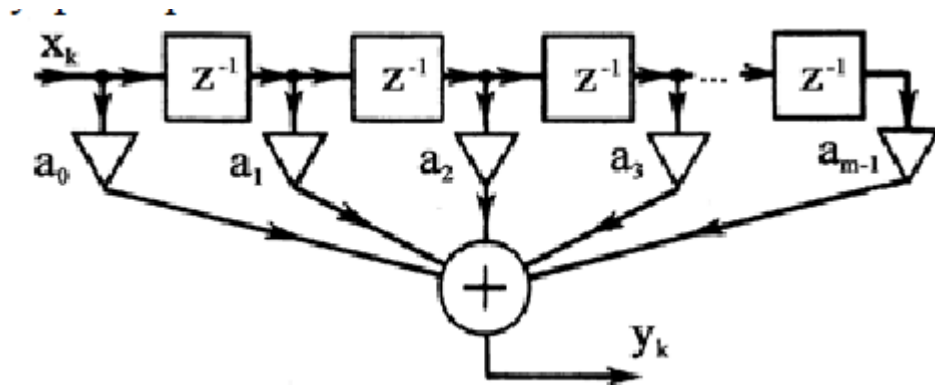


Рисунок 2.41 – Обобщённый вид структурной схемы трансверсального фильтра

Сопоставляя заданное разностное уравнение дискретного фильтра и общее выражение разностного уравнения, получаем, что коэффициенты заданного фильтра равны: $a_0 = 4$, $a_1 = -2,5$ и $a_2 = 0,8$.

Учитывая, что нижний индекс у коэффициента показывает задержку дискретного сигнала в отсчётах (тактах), структурную схему дискретного фильтра изобразим следующим образом:

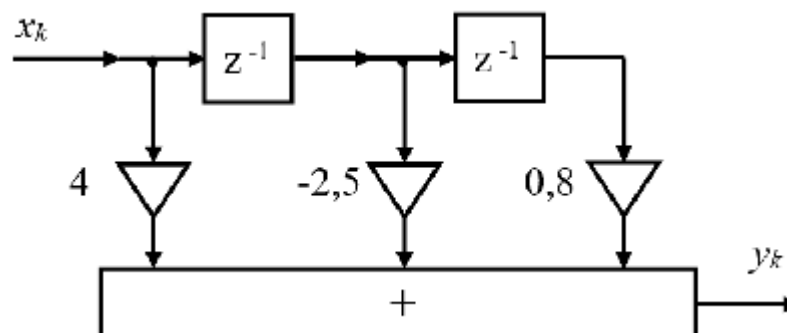


Рисунок 2.42 – Структурная схема заданного дискретного фильтра

Импульсная характеристика $h(k)$ дискретного трансверсального фильтра определяется коэффициентами фильтра:

$$h(k) = \{a_0; a_1; a_2; \dots; a_{m-1}\}.$$

Поэтому в нашем случае импульсная характеристика $h(k)$ дискретного фильтра запишется следующим образом:

$$h(k) = \{4; -2,5; 0,8\}.$$

Системная функция произвольного трансверсального дискретного фильтра записывается в общем виде следующим образом:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{m-1} h(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot z^{-k} = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_{m-1} \cdot z^{-(m-1)}.$$

Для заданного трансверсального дискретного фильтра системная функция записывается следующим образом:

$$H(z) = \sum_{k=0}^2 a_k \cdot z^{-k} = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} = 4 - 2,5 \cdot z^{-1} + 0,8 \cdot z^{-2}.$$

Частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ произвольного трансверсального дискретного фильтра связан с системной функцией $H(z)$ и записывается в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= H(e^{j\omega \cdot \Delta t}) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} = \\ &= a_0 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + \dots + a_{m-1} \cdot e^{-j \cdot (m-1) \cdot \omega \cdot \Delta t}. \end{aligned}$$

Для заданного трансверсального дискретного фильтра частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \sum_{k=0}^2 a_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega \cdot \Delta t} = a_0 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \Delta t} = \\ &= 4 - 2,5 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t} + 0,8 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \Delta t} = \\ &= \{4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)\} - j \cdot \{-2,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)\}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика заданного трансверсального дискретного фильтра $A(\omega)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |K(j\omega)| = \sqrt{\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2} = \\ &= \sqrt{\left\{ \sum_{k=0}^2 a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^2 a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2} = \\ &= \sqrt{\{4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)\}^2 + \{-2,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)\}^2}. \end{aligned}$$

Фазо-частотная характеристика заданного трансверсального дискретного фильтра $\Phi(\omega)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \arg [K(j\omega)] = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) = \\ &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{k=0}^2 a_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{k=0}^2 a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{-2,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)}{4 - 2,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) + 0,8 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right). \end{aligned}$$

2. Системная функция $H(z)$ рекурсивного дискретного фильтра первого порядка имеет вид

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}}.$$

Для заданного дискретного фильтра:

- изобразите структурную схему;
- определите разностное уравнение, частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$, амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, а также импульсную характеристику $h(k)$.

Решение:

Для произвольного рекурсивного дискретного фильтра системная функция $H(z)$ имеет следующий вид:

$$H(z) = \frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot z^{-g}}{1 + \sum_{p=0}^{n-1} b_p \cdot z^{-p}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{m-1} \cdot z^{-(m-1)}}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_{n-1} \cdot z^{-(n-1)}}.$$

Сопоставляя заданную системную функцию дискретного фильтра и общее выражение системной функции произвольного рекурсивного фильтра, получаем, что коэффициенты заданного фильтра равны:

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ и } b_1 = -0,5.$$

Учитывая, что нижний индекс у коэффициента показывает задержку дискретного сигнала в отсчётах (тактах), структурную схему дискретного фильтра изобразим следующим образом:

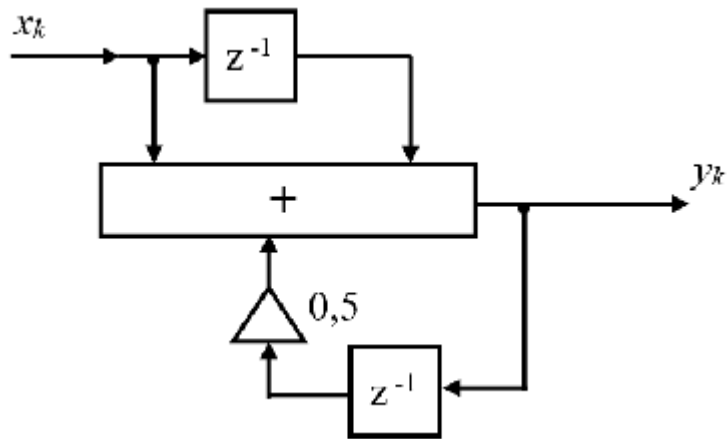


Рисунок 2.43 – Структурная схема заданного дискретного фильтра

Разностное уравнение рекурсивного дискретного фильтра в общем виде записывается следующим образом:

$$y(k) + \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cdot y(k-p) = \sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot x(k-g),$$

где

$x(k)$ – дискретный сигнал на входе дискретного фильтра;

$y(k)$ – дискретный сигнал на выходе дискретного фильтра;

или

$$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) + \dots + b_{n-1} \cdot y(k-n+1) = a_0 \cdot x(k) + a_1 \cdot x(k-1) + \dots + a_{m-1} \cdot x(k-m+1).$$

В нашем случае разностное уравнение записывается следующим образом:

$$y(k) - 0,5 \cdot y(k-1) = x(k) + x(k-1).$$

При этом алгоритм фильтрации дискретного сигнала записывается следующим образом:

$$y(k) = x(k) + x(k-1) + 0,5 \cdot y(k-1).$$

Частотный коэффициент передачи произвольного рекурсивного дискретного фильтра связан с системной функцией $H(z)$ и в общем виде записывается следующим образом:

$$K(j\omega) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot e^{-j \cdot g \cdot \omega \cdot \Delta t}}{1 + \sum_{p=0}^{n-1} b_p \cdot e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot \Delta t}} =$$

$$= \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + \dots + a_{m-1} \cdot e^{-j \cdot (m-1) \cdot \omega \cdot \Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t} + b_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + \dots + b_{n-1} \cdot e^{-j \cdot (n-1) \cdot \omega \cdot \Delta t}}.$$

Для заданного рекурсивного дискретного фильтра частотный коэффициент передачи $K(j\omega)$ записывается следующим образом:

$$K(j\omega) = \frac{\sum_{g=0}^1 a_g \cdot e^{-j \cdot g \cdot \omega \cdot \Delta t}}{1 - \sum_{p=0}^1 b_p \cdot e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot \Delta t}} = \frac{1 + e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t}}{1 - 0,5 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \Delta t}} =$$

$$= \frac{1 + \cos(\omega \cdot \Delta t) - j \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t)}{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t) - j \cdot \{-0,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t)\}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика заданного рекурсивного дискретного фильтра $A(\omega)$ записывается следующим образом:

$$A(\omega) = |K(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left\{ \sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}{\left\{ \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left\{ \sum_{g=0}^1 a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{g=0}^1 a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}{\left\{ \sum_{p=1}^1 b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2 + \left\{ \sum_{p=1}^1 b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t) \right\}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\{1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)\}^2 + \{\sin(\omega \cdot \Delta t)\}^2}{\{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t)\}^2 + \{0,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t)\}^2}}.$$

Фазо-частотная характеристика заданного рекурсивного дискретного фильтра $\Phi(\omega)$ записывается следующим образом:

$$\Phi(\omega) = \arg[K(j\omega)] = -\arctg \left(\frac{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{g=0}^{m-1} a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) - \arctg \left(\frac{\sum_{p=1}^{n-1} b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t)}{1 - \sum_{p=1}^{n-1} b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) =$$

$$= -\arctg \left(\frac{\sum_{g=0}^1 a_g \cdot \sin(g \cdot \omega \cdot \Delta t)}{\sum_{g=0}^1 a_g \cdot \cos(g \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) - \arctg \left(\frac{\sum_{p=1}^1 b_p \cdot \sin(p \cdot \omega \cdot \Delta t)}{1 + \sum_{p=1}^1 b_p \cdot \cos(p \cdot \omega \cdot \Delta t)} \right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\omega \cdot \Delta t)}{1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{0,5 \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t)}{1 - 0,5 \cdot \cos(\omega \cdot \Delta t)}\right).$$

Импульсная характеристика $h(k)$ рекурсивного дискретного фильтра определяют через обратное z -преобразование от системной функции $H(z)$:

$$h(k) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L H(z) \cdot z^{k-1} dz.$$

В нашем случае, для заданной системной функции рекурсивного дискретного фильтра импульсная характеристика записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z + 1}{z - 0,5} \cdot z^{k-1} dz = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z^k}{z - 0,5} dz + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z^{k-1}}{z - 0,5} dz. \end{aligned}$$

Для вычисления полученных интегралов рассматривают два частных случая:

а) случай $k = 0$:

$$h(0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{1}{z - 0,5} dz + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z^{-1}}{z - 0,5} dz.$$

Для вычисления полученных контурных интегралов, охватывающих все особые точки в комплексной плоскости, воспользуемся вычетами. В рассматриваемом случае полюсы первого порядка. Поэтому:

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{1}{z - 0,5} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0} \left[\frac{z^{-1}}{z - 0,5} \right] \right\} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{z^{-1}}{z - 0,5} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{z - 0,5} \cdot (z - 0,5) \Big|_{z=0,5} + \frac{z^{-1}}{z - 0,5} \cdot z \Big|_{z=0} + \frac{z^{-1}}{z - 0,5} \cdot (z - 0,5) \Big|_{z=0,5} = \\ &= 1 + \frac{1}{z - 0,5} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=0,5} = 1 - 2 + 2 = 1. \end{aligned}$$

б) случай $k \geq 1$:

$$h(k) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z^k}{z - 0,5} dz + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \oint_L \frac{z^{k-1}}{z - 0,5} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{z^k}{z-0,5} \right] \right\} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{z^{k-1}}{z-0,5} \right] \right\} = \\
&= \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{z^k}{z-0,5} \right] + \operatorname{Res}_{z=0,5} \left[\frac{z^{k-1}}{z-0,5} \right] = \frac{z^k}{z-0,5} \cdot (z-0,5) \Big|_{z=0,5} + \frac{z^{k-1}}{z-0,5} \cdot (z-0,5) \Big|_{z=0,5} = \\
&= z^k \Big|_{z=0,5} + z^{k-1} \Big|_{z=0,5} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k} + \frac{2}{2^k} = \frac{3}{2^k}.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные решения, получим импульсную характеристику заданного рекурсивного дискретного фильтра:

$$h(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{3}{2^k}, & k \geq 1 \end{cases} = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \dots \right).$$

3. Собственные колебания в рекурсивном дискретном фильтре второго порядка описываются разностным уравнением следующего вида $y(k) = y(k-1) - 0,5 \cdot y(k-2)$.

Является ли заданный рекурсивный дискретный фильтр устойчивым?

Решение:

Рассмотрим два способа определения устойчивости. Первый способ предназначен для дискретных фильтров первого или второго порядка. Второй способ – для дискретных фильтров порядка выше 2-х.

Способ 1.

Рекурсивный дискретный фильтр вида $y(k) = b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) + \dots + b_{n-1} \cdot y(k-n+1)$ является устойчивым, если все корни характеристического уравнения

$$\gamma^{n-1} - b_1 \cdot \gamma^{n-2} - b_2 \cdot \gamma^{n-3} - \dots - b_{n-1} = 0,$$

по модулю меньше единицы, т.е. располагаются внутри единичного круга с центром в точке нуль.

Обозначим $y(k) = \gamma^k$, коэффициенты для заданного фильтра равны $b_1 = 1, b_2 = -1$, поэтому характеристическое уравнение рекурсивного дискретного фильтра запишем следующим образом:

$$\gamma^k = \gamma^{k-1} - 0,5 \cdot \gamma^{k-2} \Rightarrow \gamma^k - \gamma^{k-1} + 0,5 \cdot \gamma^{k-2} = 0 \Rightarrow \gamma^2 - \gamma + 0,5 = 0.$$

Получили квадратное уравнение с корнями:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm j).$$

Корни уравнения оказались комплексными. Найдем модули этих комплексных корней:

$$\gamma_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707, \quad \gamma_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707.$$

Модули найденных корней меньше единицы, $|\gamma_{1,2}| < 1$, поэтому заданный рекурсивный фильтр является устойчивым.

Способ 2. Дискретный рекурсивный фильтр устойчив по критерию Гурвица, если для характеристического уравнения

$d_n \cdot \omega^n + d_{n-1} \cdot \omega^{n-1} + d_{n-2} \cdot \omega^{n-2} + \dots + d_2 \cdot \omega^2 + d_1 \cdot \omega + d_0 = 0$ выполнены три условия:

- 3) Все коэффициенты $d_n > 0$;
- 4) Все определители матрицы Гурвица должны быть больше нуля.

Матрица Гурвица записывается следующим образом. По главной диагонали матрицы Гурвица записывают коэффициенты от d_{n-1} до d_0 . Далее каждую строчку матрицы Гурвица заполняют остальными коэффициентами характеристического полинома по следующему правилу: вправо – по возрастанию индексов коэффициентов, влево – по убыванию индексов коэффициентов. Если индекс оказывается отрицательным или превышает максимальную степень полинома – записывают нули:

$$\begin{bmatrix} d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{n-3} & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n & \dots & 0 & 0 \\ d_{n-5} & d_{n-4} & d_{n-3} & d_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_0 \end{bmatrix}.$$

Для устойчивого дискретного фильтра определители матрицы Гурвица должны быть больше нуля:

$$\Delta_1 = d_{n-1} > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} d_{n-1} & d_n \\ d_{n-3} & d_{n-2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} d_{n-1} & d_n & 0 \\ d_{n-3} & d_{n-2} & d_{n-1} \\ d_{n-5} & d_{n-4} & d_{n-3} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д.}$$

Для применения критерия Гурвица сначала запишем характеристическое уравнение. Для этого, нужно приравнять к нулю знаменатель системной функции $H(z)$:

$$z^{n-1} + b_1 \cdot z^{n-2} + b_2 \cdot z^{n-3} + \dots + b_{n-1} = 0 \text{ и выполнить замену переменной}$$

$$z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}.$$

В нашем случае, для алгоритма дискретной фильтрации

$$y(k) = y(k-1) - 0,5 \cdot y(k-2),$$

учитывая общий вид записи алгоритма дискретной фильтрации

$$y(k) = b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) + \dots + b_{n-1} \cdot y(k-c+1),$$

получим $c = 3$, поэтому знаменатель системной функции $H(z)$ запишется следующим образом:

$$z^2 + (-1) \cdot z + 0,5 = 0 \text{ с коэффициентами } b_1 = -1, b_2 = 0,5.$$

Выполним замену переменной:

$$\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^2 - \left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right) + 0,5 = 0,$$

или,

$$(\omega+1)^2 - (\omega+1) \cdot (\omega-1) + 0,5 \cdot (\omega-1)^2 = 0,$$

или,

$$\omega^2 + 2 \cdot \omega + 1 - (\omega^2 - 1) + 0,5 \cdot (\omega^2 - 2 \cdot \omega + 1) = 0,$$

или,

$$0,5 \cdot \omega^2 + \omega + 2,5 = 0,$$

или,

$$\omega^2 + 2 \cdot \omega + 5 = 0.$$

Получили характеристическое уравнение с максимальной степенью $n = 2$ и коэффициентами $d_2 = 1$, $d_1 = 2$ и $d_0 = 5$.

Отсюда видно, что первое условие критерия Гурвица выполнено, так как все коэффициенты положительны.

Матрица Гурвица запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для устойчивого дискретного фильтра определители матрицы Гурвица должны быть больше нуля:

$$\Delta_1 = d_1 = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0.$$

Отсюда следует, что по критерию Гурвица заданный дискретный фильтр устойчив.

4. Дискретный фильтр описывается разностным уравнением следующего вида

$$y(k) = 0,3 \cdot x(k) + 0,6 \cdot x(k-1) + 0,3 \cdot x(k-2) - 0,9 \cdot y(k-2).$$

Определить средствами Matlab импульсную характеристику дискретного фильтра.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
N = 64;  
x = [1 zeros(1,N-1)]; % дельта-импульс  
b = [0.3 0.6 0.3];  
a = [1 0 0.9];  
y = filter(b,a,x);
```

Результаты работы программы представлены на рисунке.

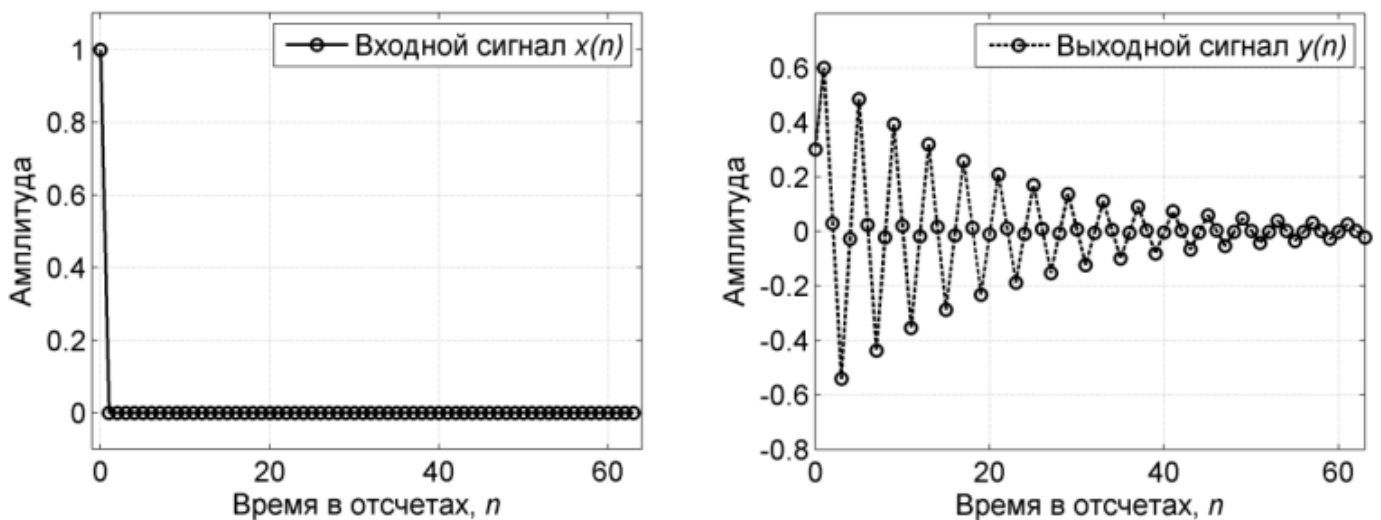


Рисунок 2.44 – Импульсная характеристика заданного дискретного фильтра

2.5.3 Упражнения

1. Импульсная характеристика дискретного фильтра задана следующей последовательностью

$$h(k) = \{1; 0; 1; 1; 0\}.$$

Определить:

- разностное уравнение и алгоритм дискретной фильтрации дискретного фильтра;
- структурную схему дискретного фильтра;
- системную функцию дискретного фильтра;
- частотный коэффициент передачи дискретного фильтра.

2. Дискретный фильтр описывается разностным уравнением:

$$y(k) - 0,5 \cdot y(k-1) + 0,06 \cdot y(k-2) = x(k) \text{ со значениями}$$

$$y(-1) = 0, y(-2) = 0.$$

Определить:

- отклик дискретного фильтра, если дискретный сигнал на входе описывается выражением $x(k) = (-1)^k, k = 0, 1, 2, \dots$;
- системную функцию;
- изобразить структурную схему дискретного фильтра;
- импульсную характеристику.

3. Дискретный фильтр описывается разностным уравнением:

$$y(k) + 0,6 \cdot y(k-1) + 0,25 \cdot y(k-2) = x(k) + 0,04 \cdot x(k-2) \text{ со значениями}$$

$$y(-1) = 0, y(-2) = 0,4.$$

- отклик дискретного фильтра, если дискретный сигнал на входе описывается выражением $x(k) = (-1)^k, k = 0, 1, 2, \dots$;
- системную функцию;
- импульсную характеристику.

4. Трансверсальный дискретный фильтр определён следующим разностным уравнением

$$y(k) = 4 \cdot x(k) - 2,5 \cdot x(k-1) + 0,8 \cdot x(k-2).$$

Для заданного дискретного фильтра:

- определить порядок;
- изобразить структурную схему;
- изобразить импульсную характеристику;
- системную функцию;
- частотный коэффициент передачи, а также АЧХ и ФЧХ.

5. Дискретный фильтр задан следующей системной функцией

$$H(z) = \frac{0,8 + 0,3 \cdot z^{-1} - 0,5 \cdot z^{-2}}{1 + 0,6 \cdot z^{-1} - 0,4 \cdot z^{-2} + 0,3 \cdot z^{-3}}.$$

Для заданного дискретного фильтра:

- определить тип и порядок фильтра;
- изобразить структурную схему;
- найти частотный коэффициент передачи, а также АЧХ и ФЧХ;
- импульсную характеристику;
- разностное уравнение и алгоритм дискретной фильтрации.

6. Собственные колебания в рекурсивном дискретном фильтре второго порядка описываются разностным уравнением следующего вида

$$y(k) = -1,5 \cdot y(k-1) - 0,9 \cdot y(k-2) - 0,2 \cdot y(k-3).$$

Является ли заданный рекурсивный дискретный фильтр устойчивым?

7. Дискретный фильтр задан следующей системной функцией

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}}.$$

Является ли заданный дискретный фильтр устойчивым?

8. Дискретный фильтр задан следующей системной функцией

$$H(z) = \frac{2}{1 + 2 \cdot z^{-1}}.$$

Является ли заданный дискретный фильтр устойчивым?

9. Импульсная характеристика дискретного фильтра задана выражением

$$h(k) = 2 \cdot \exp\left(-\frac{k}{3}\right).$$

Найти:

- системную функцию дискретного фильтра;
- разностное уравнение и алгоритм дискретной фильтрации в рекурсивной и не рекурсивной форме*.

* – Использовать формулу прогрессии $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1.$

10. Дискретный фильтр задан следующим алгоритмом дискретной фильтрации:

$$y(k) = x(k) + 0,1 \cdot y(k-1) - 0,8 \cdot y(k-2)$$

Определить тип, импульсную и частотную характеристику дискретного фильтра. Является ли дискретный фильтр устойчивым?

11. Дискретный фильтр задан следующим алгоритмом дискретной фильтрации:

$$y(k) = x(k) - 2 \cdot x(k-1) + x(k-2)$$

Определить тип, импульсную и частотную характеристику дискретного фильтра. Является ли дискретный фильтр устойчивым?

12. Для структурной схемы дискретного фильтра (см. рисунок 2.45) определить системную функции импульсную характеристику и алгоритм фильтрации.

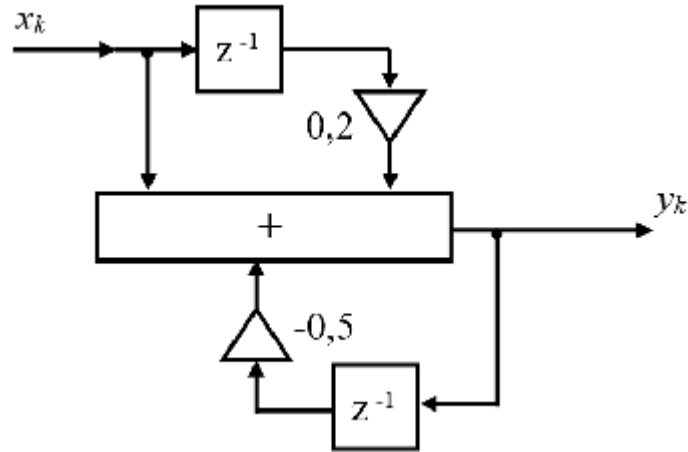


Рисунок 2.45 – Структурная схема дискретного фильтра к задаче

13. Найдите коэффициенты a_i и b_j дискретной системы с передаточной (системной) функцией следующего вида:

$$H(z) = k \cdot \frac{(z - z_1) \cdot (z - z_2)}{(z - p_1) \cdot (z - p_2)}$$

с параметрами из следующей таблицы

№	k	z_1	z_2	p_1	p_2
1	0,09316	-0,99868 +0,05141j	-0,99868 - 0,05141j	+0,51743 +0,40197j	+0,51743 - 0,40197 j
2	0,44405	-0,99992 +0,01297j	-0,99992 - 0,01297j	-0,28370 +0,48321j	-0,28370 - 0,48321 j
3	0,17534	-0,99946 +0,03280j	-0,99946 - 0,03280j	+0,28602 +0,48265j	+0,28602 - 0,48265j

а) Определить:

- разностное уравнение дискретной системы;
- импульсную характеристику дискретной системы;
- комплексную частотную характеристику, АЧХ и ФХЧ дискретной системы.

- б) Средствами Matlab найти:
- импульсную характеристику дискретной системы;
 - АЧХ и ФЧХ дискретной системы с помощью функции *freqz* и изобразить их на графиках с подписями осей;
 - групповое время задержки;
 - отклик фильтра на воздействие в виде единичного скачка и ступеньки (функции Хевисайда).

К какому значению сходится отклик? Сколько отсчётов занимает переходный процесс для отклика на ступеньку?

Сравнить импульсную характеристику, АЧХ и ФЧХ из Matlab из пунктах б) с полученными характеристиками из пункта а).

в) Найти отклик дискретной системы на сигнал из следующей таблицы:

№	Описание сигнала
1	Периодический прямоугольный сигнал с частотой 10 Гц и сигнал такой же формы с частотой 20 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 80 Гц.
2	Периодический треугольный сигнал с частотой 15 Гц и сигнал такой же формы с частотой 80 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 320 Гц.
3	Периодический пилообразный сигнал с частотой 20 Гц и сигнал такой же формы с частотой 110 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 440 Гц.
4	Периодический трапецевидный сигнал с частотой 18 Гц и сигнал такой же формы с частотой 130 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 520 Гц.

Описать различие между входным и выходным дискретным сигналом. К какому типу фильтра можно отнести рассматриваемую дискретную систему (ФНЧ, ФВЧ, полосовой или режекторный)?

14. Дискретная система задана в виде структурной схемы следующего вида

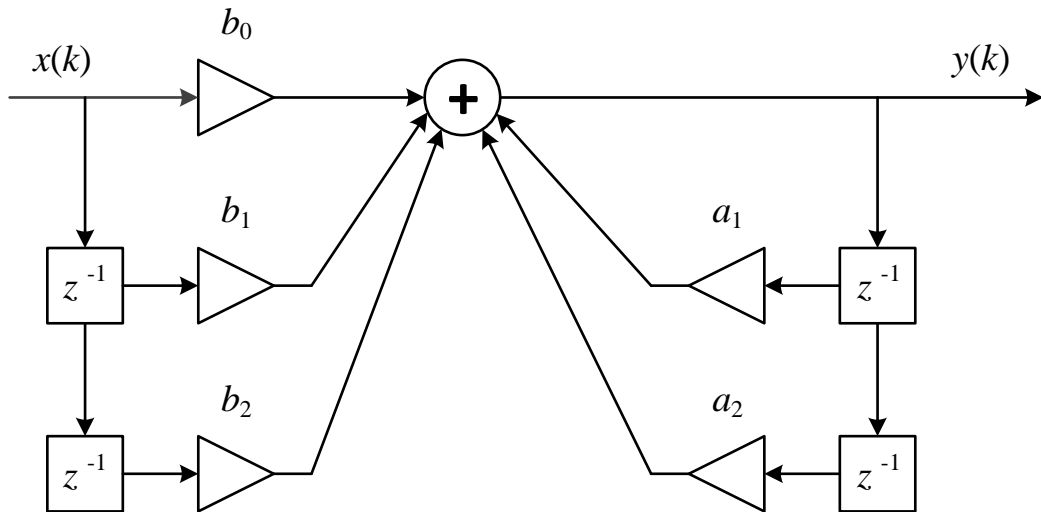


Рисунок 2.46 – Структурная схема дискретной системы к задаче

Коэффициенты из структурной схемы заданы в следующей таблице

№	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	0,22888	2,06144	0,86232	0,19501	1,73566
2	0,06797	1,53449	0,67549	0,05196	1,35097
3	0,09241	1,63060	0,70587	0,07190	1,41295

а) Определить:

- передаточную (системную) функцию дискретной системы;
- нули и полюса дискретной системы;
- разностное уравнение дискретной системы;
- импульсную характеристику дискретной системы;
- комплексную частотную характеристику, АЧХ и ФЧХ дискретной системы.

б) Средствами Matlab найти:

- импульсную характеристику дискретной системы;
- АЧХ и ФЧХ дискретной системы с помощью функции *freqz* и изобразить их на графиках с подписями осей;
- групповое время задержки;
- отклик фильтра на воздействие в виде единичного скачка и ступеньки (функции Хевисайда).

К какому значению сходится отклик? Сколько отсчётов занимает переходный процесс для отклика на ступеньку?

Сравнить импульсную характеристику, АХЧ и ФЧХ из Matlab из пунктах б) с полученными характеристиками из пункта а).

в) Найти отклик дискретной системы на сигнал из следующей таблицы:

№	Описание сигнала
1	Периодический прямоугольный сигнал с частотой 20 Гц и сигнал такой же формы с частотой 40 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 160 Гц.
2	Периодический треугольный сигнал с частотой 30 Гц и сигнал такой же формы с частотой 160 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 640 Гц.
3	Периодический пилообразный сигнал с частотой 40 Гц и сигнал такой же формы с частотой 220 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 880 Гц.
4	Периодический трапециевидный сигнал с частотой 36 Гц и сигнал такой же формы с частотой 260 Гц. Частота дискретизации дискретного сигнала составляет 1040 Гц.

2.6 Тема «Синтез дискретных систем»

Вопросы для изучения:

1. Понятие синтеза дискретных систем.
2. Методы синтеза нерекурсивных и рекурсивных дискретных систем.
3. Автоматизация синтеза дискретных систем (фильтров).

2.6.1 Некоторые теоретические сведения

Основные определения

Синтез дискретной системы – выбор или расчёт коэффициентов фильтров, при которых характеристики цифрового фильтра удовлетворяют заданным требованиям.

Для синтеза дискретной системы (фильтра) разработаны различные методы проектирования.

По типу получаемого фильтра методы синтеза можно классифицировать на методы синтеза:

- рекурсивных фильтров;
- нерекурсивных фильтров.

По наличию аналогового прототипа методы синтеза можно классифицировать на методы синтеза:

- с использованием аналогового прототипа;
- прямые (т.е. без использования аналогового прототипа).

При реализации «прямых методов» исходными данными для синтеза служат параметры фильтра (например, амплитудно-частотная, фазо-частотная характеристика и т.д.).

Синтез дискретной системы состоит из следующих основных этапов:

- определение требуемых характеристик дискретной системы;
- реализация дискретной системы по заданным требованиям.

При синтезе цифрового фильтра (как частного случая дискретной системы) дополнительно учитывают ограниченную точность (разрядность)

представления коэффициентов фильтра и вычислителей (сумматоров, регистров сдвига и т.д.).

Методы синтеза дискретных систем (фильтров)

Метод инвариантной импульсной характеристики применяется для синтеза импульсной характеристики $h(k)$ рекурсивной дискретной системы путём дискретизации с шагом Δt импульсной характеристики аналогового фильтра-прототипа $h_a(\tau)$:

$$h(k) = h_a(k \cdot \Delta t). \quad (2.68)$$

Метод инвариантной импульсной характеристики применяется только для фильтров, существенно ограниченных по полосе. Например, метод не пригоден для синтеза фильтра высоких частот.

В Matlab метод реализуется с помощью функции *impinvar*.

Если аналоговый фильтр-прототип устойчив, то и синтезируемый цифровой фильтр также будет устойчивым.

В результате дискретизации аналоговой импульсной характеристики системная (передаточная) $H(z)$ и частотная характеристика $K(j\omega)$ дискретного фильтра окажутся периодическими продолжениями соответствующих аналоговых характеристик:

$$H(z) \Big|_{z=e^{p \cdot \Delta t}} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_a \left(p + j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\Delta t} \right) - \text{системная функция,}$$

где

$$K_a(p) = \frac{Y_a(p)}{X_a(p)} - \text{передаточная функция аналоговой системы (фильтра);}$$

$X_a(p)$, $Y_a(p)$ – преобразование Лапласа от входного и выходного аналогового сигнала системы (фильтра);

$$K(j\omega) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_a \left(j \cdot \omega + j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\Delta t} \right) - \text{комплексная частотная характеристика (см. рисунок 2.47).}$$

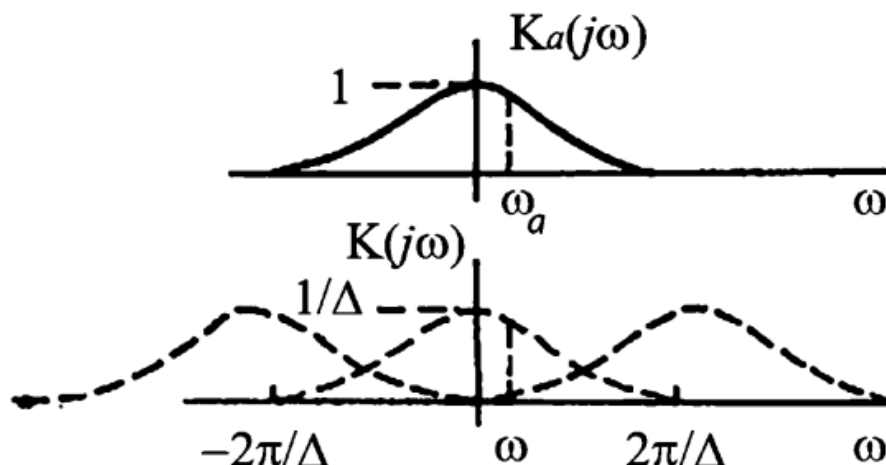


Рисунок 2.47 – Частотная характеристика аналогового фильтра-прототипа $K_a(j\omega)$ и частотная характеристика дискретной системы $K(j\omega)$

Как видно из рисунка 2.47, в результате дискретизации импульсной характеристика аналогового фильтра прототипа возникает явление наложения. Поэтому частотная характеристика дискретной системы не будет строго идентична частотной характеристике аналогового фильтра-прототипа.

Из выражения комплексной частотной характеристики видно, что при высокой частоте дискретизации (малом Δt) коэффициент усиления дискретной системы может оказаться очень большим, что может привести к сложностям практической реализации на цифровых системах с арифметикой малой разрядности.

Метод билинейного преобразования применяется для синтеза системной (передаточной) функции $H(z)$ рекурсивной дискретной системы по частотной характеристике аналогового фильтра-прототипа $K_a(j\omega)$ путём замены переменной p соответствующей передаточной функции $K(p)$:

$$p = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (2.69)$$

Если аналоговый фильтр-прототип устойчив, то и синтезируемый цифровой фильтр также будет устойчивым.

Частотные характеристики аналогового $K_a(j\omega)$ и дискретного фильтров $K(j\omega)$ связаны между собой преобразованием частотной оси:

$$K(j\omega) = K_a \left\{ \frac{2}{\Delta t} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \right) \right\}$$

$$K_a(j\omega) = K \left\{ \frac{2}{\Delta t} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2} \right) \right\}.$$

На низких частотах частотные характеристики аналогового и дискретного фильтров практически совпадают, поскольку при малых ω множитель $\operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2}\right) \approx \omega$. С увеличением частоты ω частотная характеристика дискретного фильтра сильнее сжимается по горизонтали. На частоте Найквиста частотная характеристика дискретного фильтра имеет такое значение, какое имеет частотная характеристика аналогового фильтра на бесконечной частоте.

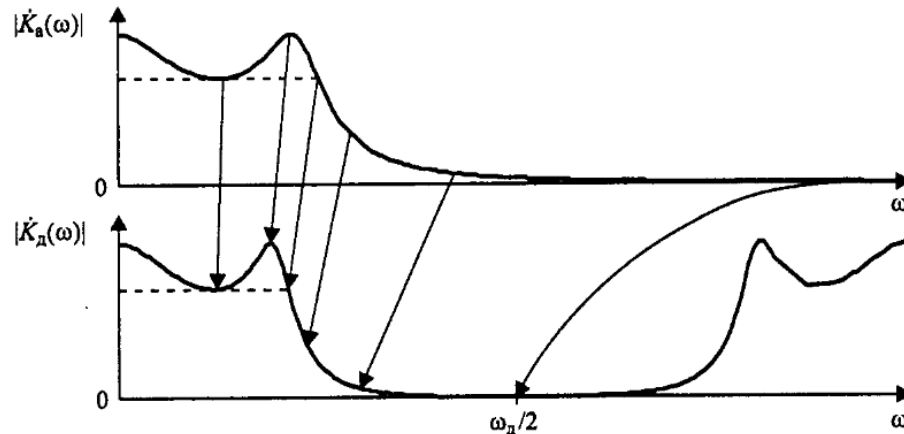


Рисунок 2.48 – Преобразование частотной оси при билинейном преобразовании

При билинейном преобразовании отсутствует эффект наложения, свойственный методу инвариантной импульсной характеристики. Однако имеется искажение частотной оси, которое должно быть скомпенсировано.

Например, при синтезе дискретного ФНЧ с частотой среза $\omega_{сд}$, аналоговый фильтр-прототип должен иметь частоту среза $\omega_{сда}$, которая связана с частотой $\omega_{сд}$ следующим соотношением:

$$\omega_{са} = \frac{2}{\Delta t} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{сд} \cdot \Delta t}{2}\right).$$

Метод взвешивания импульсной характеристики применяется для синтеза импульсной характеристики КИХ-фильтра $h(k)$ путём отбрасывания отсчётов бесконечной импульсной характеристики $h_{\sigma}(k)$ с последующим взвешиванием (умножением) на весовую последовательность конечной длины $w(k)$ – оконную функцию (или просто окно). Метод синтеза не является оптимальным. Взвешивание применяют для снижения влияния эффекта Гиббса, которое возникает после отбрасывания отсчётов бесконечной

импульсной характеристики. В результате частотная характеристика фильтра от полосы пропускания к полосе подавления становится более плавной, однако в полосе пропускания образуются пульсации частотной характеристики (неравномерность), вызванные боковыми лепестками частотной характеристики оконной функции.

Оконная функция выбирается такой, чтобы ширина главного лепестка частотной характеристики оконной функции содержала как можно больше энергии (площади) от суммарной энергии (площади) главного и остальных лепестков, а в боковые лепестки частотной характеристики должны быстро уменьшаться по мере приближения к частоте Найквиста.

Для сравнения эффектов от применения оконных функций рассмотрим прямоугольное окно, при котором отсутствует взвешивание отсчётов импульсной характеристики:

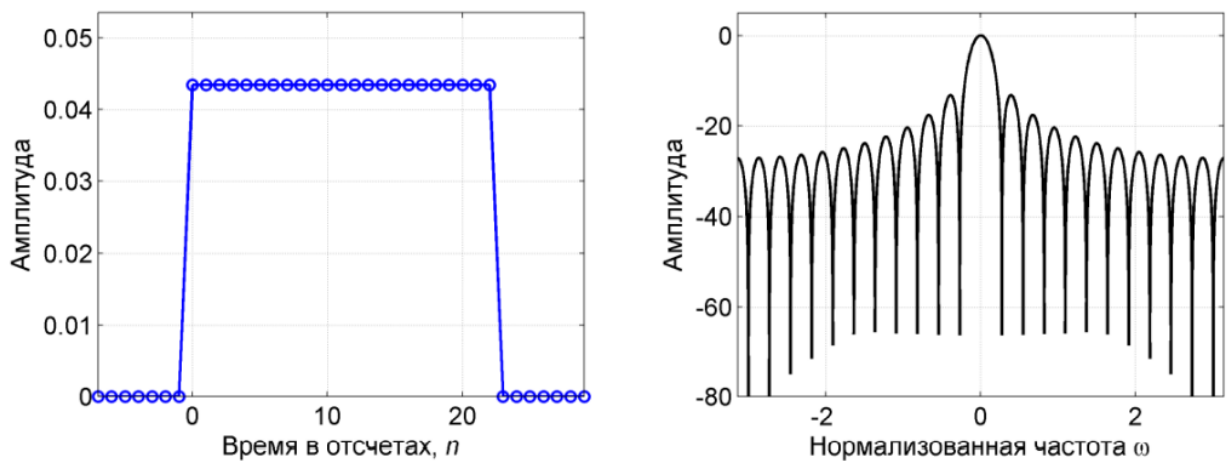


Рисунок 2.49 – Окно прямоугольное:
во временной (слева) и частотной областях (справа)

На практике нашли применение следующие оконные функции.

– **окно Бартлетта (почти треугольное):**

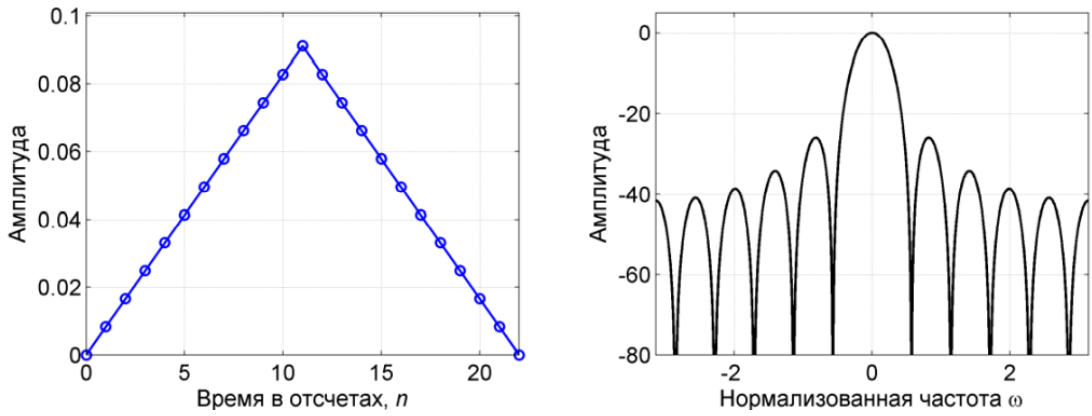


Рисунок 2.50 – Окно Бартлетта:

во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab отсчёты окна Бартлетта длиной N возвращаются функцией *bartlett(N)*.

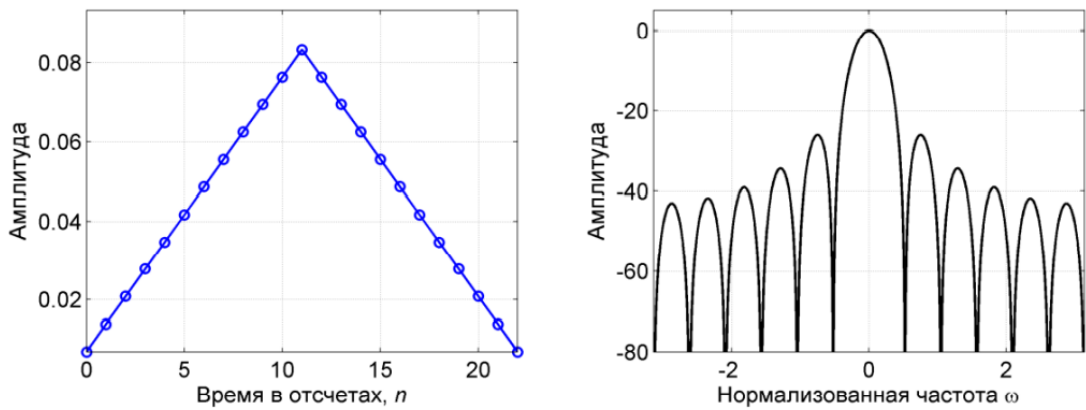


Рисунок 2.51 – Окно треугольное:

во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab отсчёты треугольного окна длиной N возвращаются функцией *triang(N)*.

Отличие окна Бартлетта от треугольного в том, что значение окна Бартлетта равно нулю для $k = 1$ и $k = N$.

– **окно Хэмминга:**

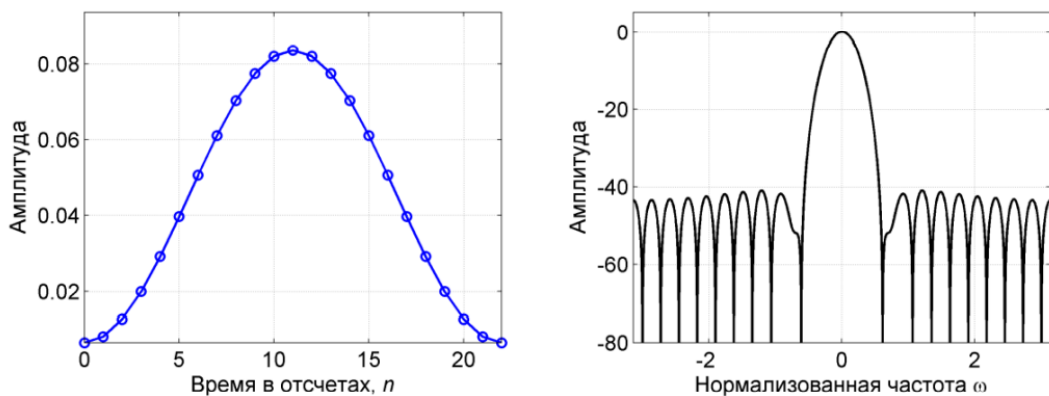


Рисунок 2.52 – Окно Хэмминга:

во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab окно Хэмминга длиной N возвращается функцией $hamming(N)$.

– **окно Ханна:**

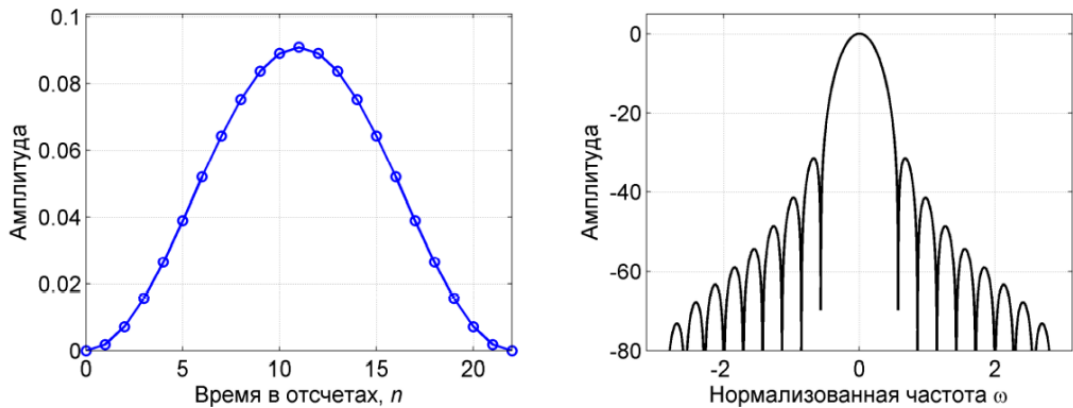


Рисунок 2.53 – Окно Ханна:

во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab окно Хэмминга длиной N возвращается функцией $hann(N)$.

– **окно Блэкмана:**

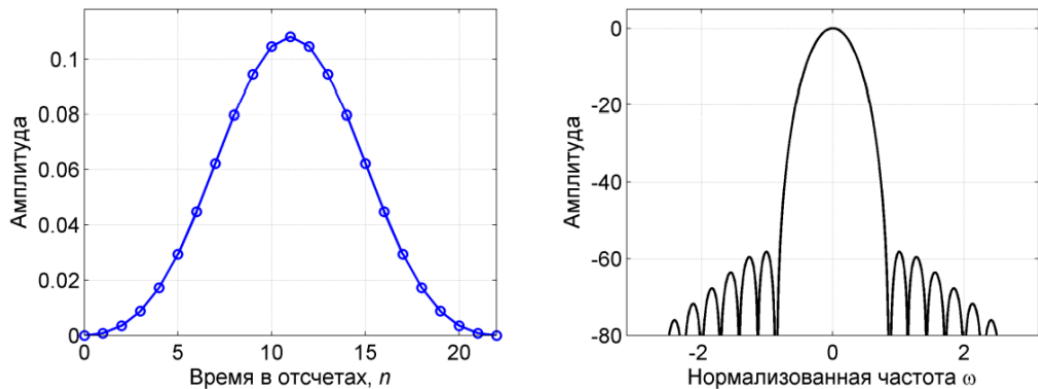


Рисунок 2.54 – Окно Блэкмана:

во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab окно Блэкмана длиной N возвращается функцией $blackman(N)$.

– **параметрическое окно Кайзера:**

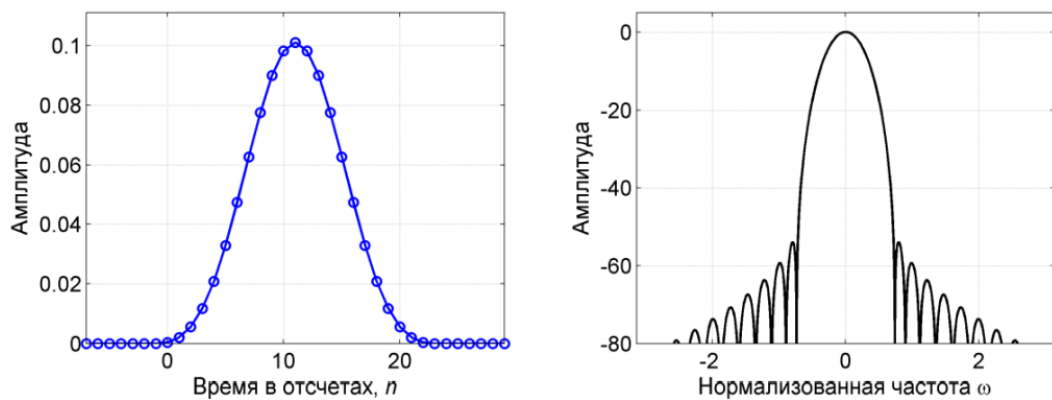


Рисунок 2.55 – Окно Кайзера (параметр $\beta = 7,5$):
во временной (слева) и частотной областях (справа)

В Matlab окно Кайзера с параметром β длиной N возвращается функцией $kaiser(N, \beta)$.

Для обеспечения линейности фазовой характеристики фильтра необходима симметрия отсчётов импульсной характеристики следующего вида

$$h(k) = h(N - k - 1),$$

а преобразование Фурье от импульсной характеристики должно удовлетворять следующему условию:

$$\sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k} = \pm |H(e^{j \cdot \omega})| \cdot e^{-j \cdot \alpha \cdot \omega} \text{ при } \alpha = \frac{N-1}{2}.$$

Этапы синтеза КИХ-фильтра методом взвешивания:

– определяют конечное число отсчётов N предварительной импульсной характеристики $h'(k)$ по известной формуле для бесконечной импульсной характеристики $h_\delta(k)$, т.е. $h'(k) = h_\delta(k)$, где k целое число в диапазоне значений от $-(N-1)/2$ до $(N-1)/2$;

– определяют отсчёты заданной оконной функции $w(k)$;

– перемножении каждого отсчёта промежуточной импульсной характеристики $h'(k)$ на соответствующий отсчёт оконной функции $w(k)$, т.е. $h''(k) = h'(k) \cdot w(k)$;

– смещении отсчётов импульсной характеристики $h''(k)$ на $(N-1)/2$ для обеспечения физической реализуемости, т.е. $h(k) = h''(k - (N-1)/2)$.

Формулы импульсных характеристик бесконечной длины для различных типов фильтров представлены в таблице 2.15.

Таблица 2.15 – Формулы бесконечных импульсных характеристик различных типов

Фильтр	Формулы для нечётного N	Формулы для чётного N
ФНЧ	$h(0) = 2 \cdot f_c$	$h(k) = \frac{\sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_c]}{\pi \cdot (k - 0,5)}$

	$h(k) = \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_c)}{\pi \cdot k}$	
ФВЧ	$h(0) = 1 - 2 \cdot f_c$ $h(k) = -\frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_c)}{\pi \cdot k}$	$h(k) = \frac{1}{\pi \cdot (k - 0,5)} \times$ $\times \left\{ \begin{array}{l} \sin[\pi \cdot (k - 0,5)] - \\ -\sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_c] \end{array} \right\}$
Полосовой	$h(0) = 2 \cdot (f_2 - f_1)$ $h(k) = \frac{1}{\pi \cdot k} \times$ $\times \left\{ \begin{array}{l} \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_2) - \\ -\sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1) \end{array} \right\}$	$h(k) = \frac{1}{\pi \cdot (k - 0,5)} \times$ $\times \left\{ \begin{array}{l} \sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_2] - \\ -\sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_1] \end{array} \right\}$
Режекторный	$h(0) = 1 - 2 \cdot (f_2 - f_1)$ $h(k) = \frac{1}{\pi \cdot k} \times$ $\times \left\{ \begin{array}{l} \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_1) - \\ -\sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_2) \end{array} \right\}$	$h(k) = \frac{1}{\pi \cdot (k - 0,5)} \times$ $\times \left\{ \begin{array}{l} \sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_1] - \\ -\sin[2 \cdot \pi \cdot (k - 0,5) \cdot f_2] \end{array} \right\}$

Прямые методы применяются чаще всего для синтеза *нерекурсивной* дискретной системы по заданной АЧХ. Здесь можно отметить группу оптимальных методов: метод чебышевской аппроксимации с применением алгоритма Ремеза, метод обратного преобразования Фурье, метод минимизации среднеквадратического отклонения синтезируемой и желаемой АЧХ, минимизация пикового отклонения АЧХ от желаемой АЧХ и т.д.. Для синтеза *рекурсивных* фильтров пользуются субоптимальными методами: метод Юла-Уолкера, метод идентификации частотной характеристики, метод аппроксимации заданной импульсной характеристики экспоненциальным оцениванием Прони и т.д.

Функции синтеза БИХ-фильтров в Matlab

Для синтеза БИХ-фильтров низких частот Баттерворта n -го порядка с частотой среза, выраженной ω_c в долях от частоты Найквиста, применяется функция:

$$[b, a] = butter(n, \omega_c), \quad (2.70)$$

где

$0 < \omega_c < 1$ (где 1 – соответствует частоте Найквиста).

Для синтеза БИХ-фильтров высоких частот Баттерворта n -го порядка с частотой среза, выраженной ω_c в долях от частоты Найквиста, применяется функция:

$$[b, a] = butter(n, \omega_c, type), \quad (2.71)$$

где

$type = 'high'$;

$0 < \omega_c < 1$ (где 1 – соответствует частоте Найквиста).

С помощью функции *butter* могут быть синтезированы полосовые и режекторные фильтры Баттерворта. В этом случае ω_c это двухэлементный вектор частот среза (нижняя и верхняя частоты). Для синтеза полосового фильтра используется синтез по выражению (2.70). Для синтеза режекторного фильтра используется синтез по выражению (2.71) с параметром $type = 'stop'$.

Для синтеза фильтров Баттерворта по граничным частотам полосы пропускания W_p и полосы подавления W_s с учётом допустимого отклонения в полосе пропускания R_p (в дБ) и подавления в полосе подавления R_s (в дБ) может быть использована следующая функция:

$$[n, \omega_c] = butterord(W_p, W_s, R_p, R_s). \quad (2.72)$$

Результаты применения этой функции, т.е. $[n, \omega_c]$, используются в качестве входных данных функции *butter*. В частности, для фильтра высоких частот $W_p = 0,2$ и $W_s = 0,1$, а для полосового фильтра $W_p = [0,1 \ 0,8]$ и $W_s = [0,2 \ 0,7]$.

Для синтеза БИХ-фильтров Чебышева I-го или II-го типов n -го порядка с частотой среза, выраженной ω_c в долях от частоты Найквиста, применяется функция:

$$[b, a] = cheby1(n, R, \omega_c), \quad (2.73)$$

где

R – уровень допустимого отклонения в полосе пропускания (в дБ);

$$[b, a] = cheby2(n, R, \omega_c), \quad (2.74)$$

где

R – уровень допустимого отклонения в полосе пропускания (в дБ).

Для определения порядка и частоты срезы дискретных фильтров Чебышева I-го или II-го типов может быть использованы функции *cheby1ord* и *cheby2ord*, аналогичные функции *butterord*.

Для синтеза эллиптических БИХ-фильтров n -го порядка (фильтров Золотарева -Кауэра) с частотой среза, выраженной ω_c в долях от частоты Найквиста, применяется функция:

$$[b, a] = \text{ellip}(n, R_p, R_s, \omega_c), \quad (2.75)$$

с параметрами, аналогичными выше.

Для определения порядка и частоты срезы дискретных эллиптических фильтров может быть использована функция *ellipord*, аналогичная функции *butterord*.

Прямой метод обратного преобразования Фурье с учётом весовой функции (окна) для ослабления пульсаций в полосе пропускания (эффект Гиббса) реализуется функциями *fir1* и *fir2* для получения коэффициентов нерекурсивного фильтра n -го порядка и частотой среза ω_c :

$$[b, a] = \text{fir1}(n, \omega_c, \text{'type'}, \text{window}), \quad (2.76)$$

где

$0 < \omega_c < 1$ (где 1 – соответствует частоте Найквиста);

'type' = 'low' – для синтеза ФНЧ;

'type' = 'high' – для синтеза ФВЧ;

window – вектор коэффициентов весового окна.

Прямой метод, минимизирующий среднеквадратическое отклонение синтезируемой АЧХ от желаемой АЧХ, реализуется функциями *firls*, *fircls* и *fircls1*. Прямой метод минимизации пикового отклонения синтезируемой АЧХ от желаемой АЧХ реализуются функциями *remez*, *cremez*.

Прямой метод синтеза рекурсивных фильтров методом Юла-Уолкера реализуется функцией *yulewalk*, а метод частотной характеристики реализуется функцией *invfreqz*.

Интерактивный метод синтеза фильтров вызывается из командной строки командой *fdatool*. После выполнения команды появляется окно с интерфейсом для выбора типа синтезируемого фильтра, его параметров и средств визуализации характеристик дискретных фильтров (рисунок 2.56).

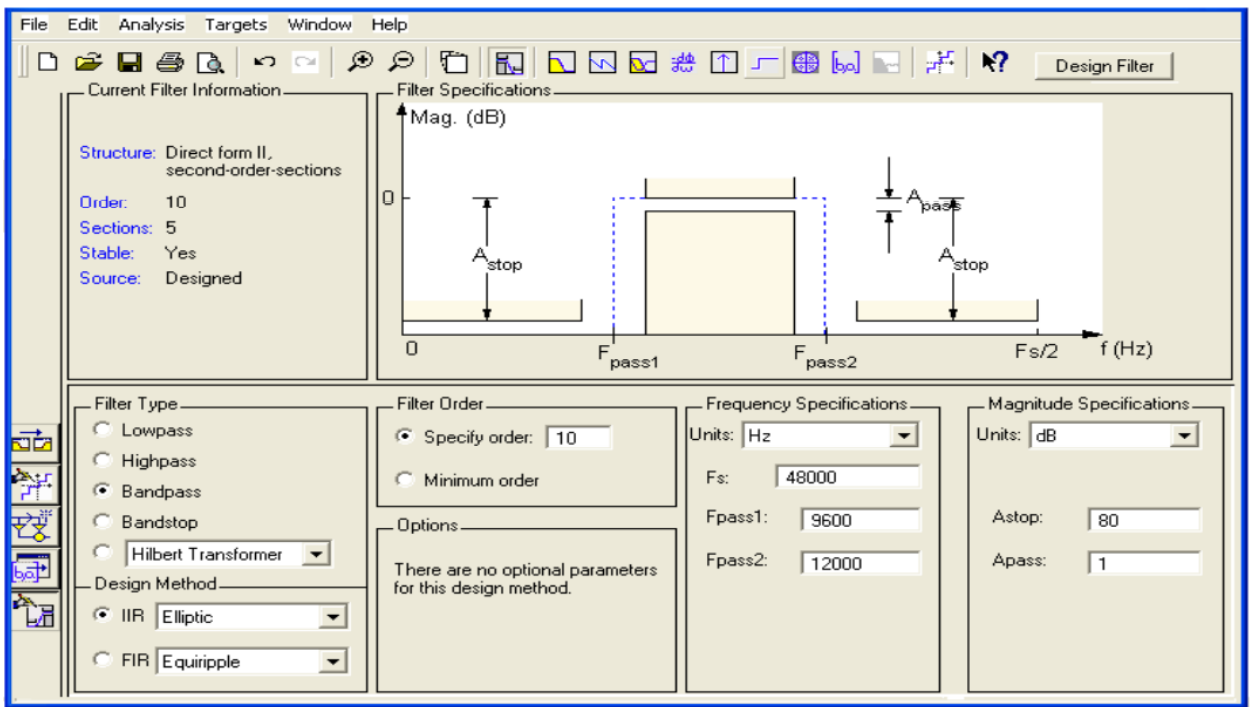


Рисунок 2.56 – Графический интерфейс окна для синтеза фильтра, вызываемый командой *fdatool*

2.6.2 Примеры решения задач

1. Синтезировать дискретный фильтр методом инвариантности импульсной характеристики для аналогового фильтра-прототипа в виде интегрирующей RC -цепочки с импульсной характеристикой следующего вида:

$$h_a(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \text{ с постоянной времени } T = R \cdot C.$$

Для найденного дискретного фильтра определить системную функцию, частотный коэффициент передачи и алгоритм цифровой фильтрации.

Решение:

Согласно методу инвариантной импульсной характеристики, для дискретного фильтра отсчёты импульсной характеристики определяются путём дискретизации с равномерным шагом Δt импульсной характеристики аналогового фильтра:

$$h(k) = h_a(\tau_k) = h_a(k \cdot \Delta t), k = 0, 1, 2, \dots$$

В нашем случае, дискретный фильтр имеет следующую импульсную характеристику

$$h(k) = \frac{1}{T} \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot \Delta t}{T}\right).$$

Поскольку количество отсчётов импульсной реакции бесконечно велико (т.е. при бесконечном увеличении k получаем ненулевое сколь угодно малое значение отсчёта импульсной реакции), то получили дискретный фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (т.е. БИХ-фильтр).

Найдем системную функцию $H(z)$ дискретного фильтра. По определению:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot \Delta t}{T}\right) \right\} \cdot z^{-k} = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{k \cdot \Delta t}{T}\right) \cdot z^{-k} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\underbrace{\exp\left(-\frac{\Delta t}{T}\right) \cdot z^{-1}}_q \right]^k = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} q^k. \end{aligned}$$

Упростим это выражение, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей $|q| < 1$ геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \text{ В результате, получим следующее выражение:}$$

$$H(z) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{T}\right) \cdot z^{-1}}.$$

Частотный коэффициент передачи рекурсивного дискретного фильтра связан с системной функцией $H(z)$ и записывается следующим образом:

$$K(j\omega) = H\left(e^{j\omega \Delta t}\right) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \cdot e^{-j\omega \Delta t}}.$$

Алгоритм дискретной фильтрации определим с помощью системной функции $H(z)$ следующим образом:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1/T}{1 - e^{-\frac{\Delta t}{T}} \cdot z^{-1}} = \frac{a_0}{1 + b_1 \cdot z^{-1}}, \text{ где } a_0 = 1/T, b_1 = -e^{-\frac{\Delta t}{T}}.$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \rightarrow \\ \rightarrow Y(z) &= \frac{a_0}{1 + b_1 \cdot z^{-1}} \cdot X(z). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$Y(z) \cdot \{1 + b_1 \cdot z^{-1}\} = a_0 \cdot X(z),$$

или,

$$Y(z) + b_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = a_0 \cdot X(z),$$

или

$$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) = a_0 \cdot x(k),$$

или

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) - b_1 \cdot y(k-1).$$

Алгоритм дискретной фильтрации для заданной системной функции, после подстановки коэффициентов a_0 и b_1 , запишется следующим образом:

$$y(k) = \frac{1}{T} \cdot x(k) + e^{-\frac{\Delta t}{T}} \cdot y(k-1).$$

2. Синтезировать дискретный фильтр методом билинейного преобразования для аналогового фильтра с передаточной функцией следующего вида:

$$K_a(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 \cdot p}}.$$

Решение:

Метод билинейного преобразования сводится к замене переменной в заданной передаточной функции следующего вида:

$$p = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \text{ для получения системной функции } H(z).$$

В нашем случае, для заданной передаточной функции

$$K_a(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 \cdot p}},$$

выполним замену переменной:

$$H(z) = K_a(p) \Big|_{p = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 \cdot \left\{ \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right\}}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right)}{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 + \frac{\Delta t \cdot (z+1)}{6 \cdot (z-1)}} = \frac{6 \cdot (z-1)}{6 \cdot (z-1) + \Delta t \cdot (z+1)} = \frac{6 \cdot z - 6}{(6 + \Delta t) \cdot z - (6 - \Delta t)} = \\
&= \frac{\frac{6}{6 + \Delta t} + \left(\frac{-6}{6 + \Delta t} \right) \cdot \frac{1}{z}}{1 - \left(\frac{6 - \Delta t}{6 + \Delta t} \right) \cdot \frac{1}{z}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 + b_1 \cdot z^{-1}} = H(z) \text{ с коэффициентами } a_0 = \frac{6}{6 + \Delta t}, \\
a_1 &= \frac{-6}{6 + \Delta t} \text{ и } b_1 = -\frac{6 - \Delta t}{6 + \Delta t}.
\end{aligned}$$

Частотный коэффициент передачи рекурсивного дискретного фильтра связан с системной функцией $H(z)$ и записывается следующим образом:

$$K(j\omega) = H(e^{j\omega\Delta t}) = \frac{a_0 + a_1 \cdot e^{-j\omega\Delta t}}{1 + b_1 \cdot e^{-j\omega\Delta t}}.$$

Алгоритм дискретной фильтрации определим с помощью системной функции $H(z)$ следующим образом:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}}.$$

Перепишем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \rightarrow \\
\rightarrow Y(z) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1}} \cdot X(z).
\end{aligned}$$

Отсюда:

$$Y(z) \cdot \{1 + b_1 \cdot z^{-1}\} = \{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}\} \cdot X(z),$$

или,

$$Y(z) + b_1 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = a_0 \cdot X(z) + X(z) \cdot z^{-1},$$

или

$$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) = a_0 \cdot x(k) + a_1 \cdot x(k-1),$$

или

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) + a_1 \cdot x(k-1) - b_1 \cdot y(k-1).$$

3. На вход рекурсивного дискретного фильтра поступают отсчёты оцифрованного шума мощностью $P_{ш_вх} = 2$ мкВт. Рекурсивный дискретный фильтр задан алгоритмом фильтрации следующего вида:

$$y(k) = x(k) + 0,9 \cdot y(k-1).$$

Определить мощность шума $P_{ш_вых}$ на выходе дискретного рекурсивного фильтра.

Решение:

Мощность шума на выходе дискретного фильтра $P_{ш_вых}$ может быть определена по мощности шума на входе фильтра $P_{ш_вх}$ и отсчётов импульсной реакции физически реализуемого дискретного фильтра $h(k)$ следующим образом:

$$P_{ш_вых} = P_{ш_вх} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|^2.$$

Найдем отсчёты импульсной реакции рекурсивного дискретного фильтра с помощью обратного z-преобразования от системной функции $H(z)$.

Системная функция рекурсивного дискретного фильтра может быть найдена по алгоритму дискретной фильтрации следующим образом:

$$y(k) = x(k) + 0,9 \cdot y(k-1) = a_0 \cdot x(k) - b_1 \cdot y(k-1), \text{ или}$$

$$\underset{=1}{a_0} \quad \underset{=-0,9}{b_1}$$

$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) = a_0 \cdot x(k)$, взяв z-преобразование от левой и правой части, получим:

$$Y(z) \cdot (1 + b_1 \cdot z^{-1}) = a_0 \cdot X(z),$$

тогда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 \cdot z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0,9 \cdot z^{-1}}.$$

Отсюда, импульсная характеристика дискретного рекурсивного фильтра:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_L H(z) \cdot z^{k-1} dz = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_L \frac{1}{1 - 0,9 \cdot z^{-1}} \cdot z^{k-1} dz = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_L \frac{z^k}{z - 0,9} dz. \end{aligned}$$

Контурный интеграл определим с помощью вычетов для полюса первого порядка:

$$h(k) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \left\{ 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \operatorname{Res}_{z=0,9} \left[\frac{z^k}{z - 0,9} \right] \right\} = \frac{z^k}{z - 0,9} \cdot (z - 0,9) \Big|_{z=0,9} = z^k \Big|_{z=0,9} = 0,9^k.$$

Отсюда, мощность шума на выходе заданного дискретного фильтра:

$$P_{u_вых} = P_{u_вх} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|^2 = P_{u_вх} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |0,9^k|^2 = P_{u_вх} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |0,9^2|^k = P_{u_вх} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k .$$

Упростим это выражение, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей $|q| < 1$ геометрической прогрессии

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$. В результате, получим следующее выражение:

$$P_{u_вых} = P_{u_вх} \cdot \frac{1}{1-|0,9|^2} = P_{u_вх} \cdot \frac{1}{1-0,81} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1-0,81} \approx 5,82 \text{ мкВт.}$$

4. Синтезировать эллиптический дискретный фильтр четвёртого порядка с частотой среза 3 кГц, допустимыми пульсациями АЧХ в полосе пропускания 1 дБ и подавлением сигнала в полосе подавления 20 дБ. Частоту дискретизации задать равной 12 кГц. Построить АЧХ и ФЧХ дискретного фильтра.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
Fs = 12000; % частота дискретизации
F0 = 3000; % частота среза
[b, a] = ellip(4, 1, 20, F0/Fs*2); % Вычисление коэффициентов
freqz(b, a, Fs);
```

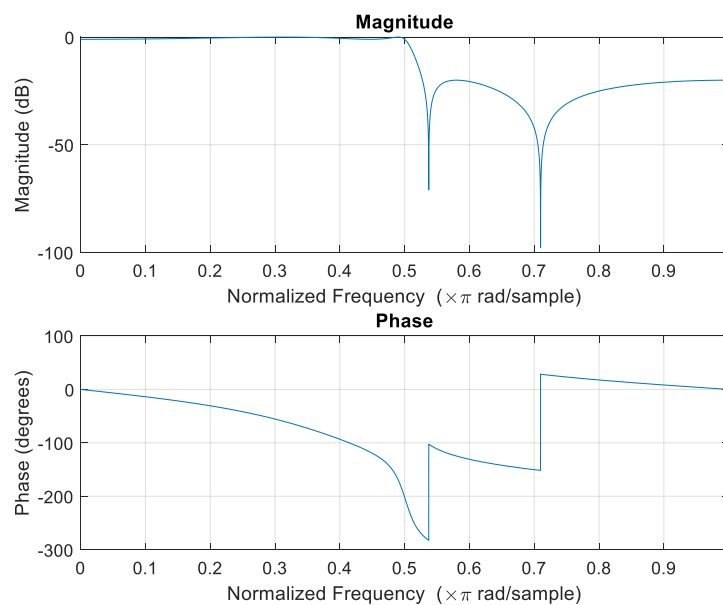


Рисунок 2.57 – АЧХ и ФЧХ синтезированного дискретного фильтра

5. Синтезировать методом Ремеза дискретный нерекурсивный фильтр 32-го порядка с частотой среза 3 кГц. Начало полосы задерживания установить равным 3,5 кГц. Частоту дискретизации задать равной 12 кГц. Построить импульсную характеристику и АЧХ дискретного фильтра.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```

Fs = 12000; % частота дискретизации
F0 = 3000; % частота среза
F1 = 3500; % начало полосы задерживания
b = remez(32, [0 F0/Fs*2 F1/Fs*2 1], [1 1 0 0]);
impz(b) % график импульсной характеристики
[h, f] = freqz(b, 1, [], Fs); % комплексный коэффициент передачи
figure
plot(f, abs(h)) % график АЧХ
grid on;

```

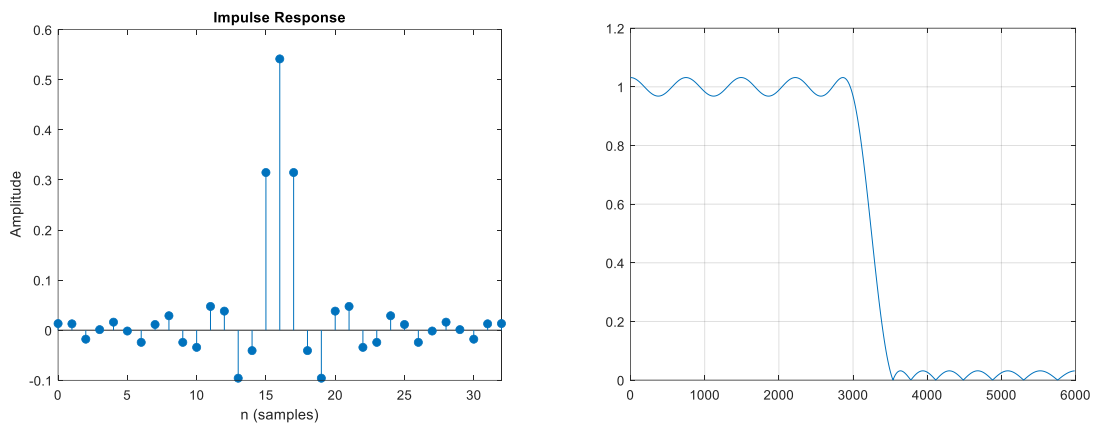


Рисунок 2.58 – Импульсная характеристика (слева) и АЧХ (справа) синтезированного дискретного фильтра

6. Синтезировать методом взвешивания дискретный нерекурсивный фильтр нижних частот с длиной импульсной характеристики 23 отсчёта и нормированной частотой среза 0,3. Вычислить и отобразить идеальную и полученную нормированную АЧХ и АЧХ в логарифмическом масштабе, импульсную характеристику и расположение нулей.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
Fs = 12000; % частота дискретизации
F0 = 3000; % частота среза
F1 = 3500; % начало полосы задерживания
b = remez(32, [0 F0/Fs*2 F1/Fs*2 1], [1 1 0 0]);
impz(b) % график импульсной характеристики
[h, f] = freqz(b, 1, [], Fs); % комплексный коэффициент передачи
figure
plot(f, abs(h)) % график АЧХ
grid on;
```

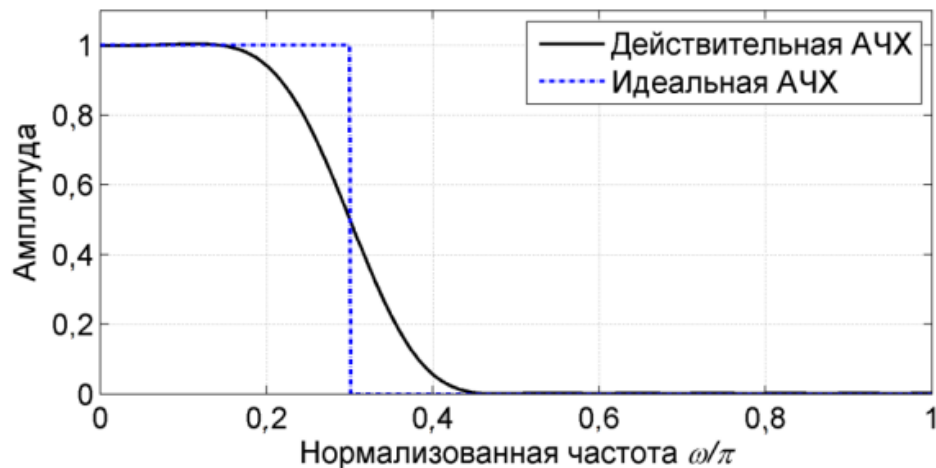


Рисунок 2.59 – АЧХ идеального и синтезированного дискретного фильтра

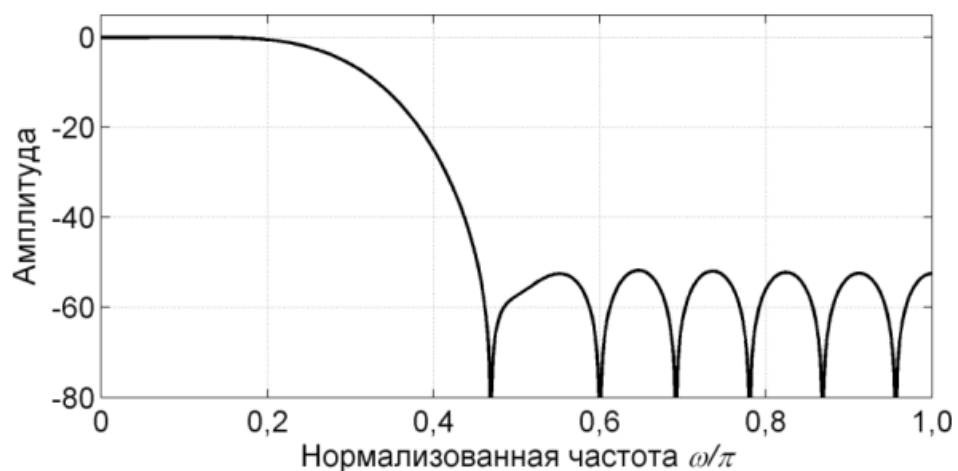


Рисунок 2.60 – АЧХ синтезированного дискретного фильтра в лог. масштабе

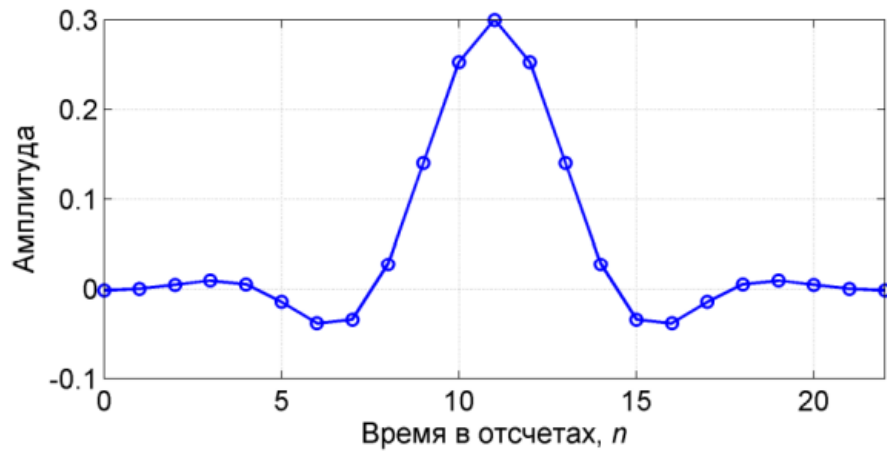


Рисунок 2.61 – Импульсная характеристика синтезированного дискретного фильтра

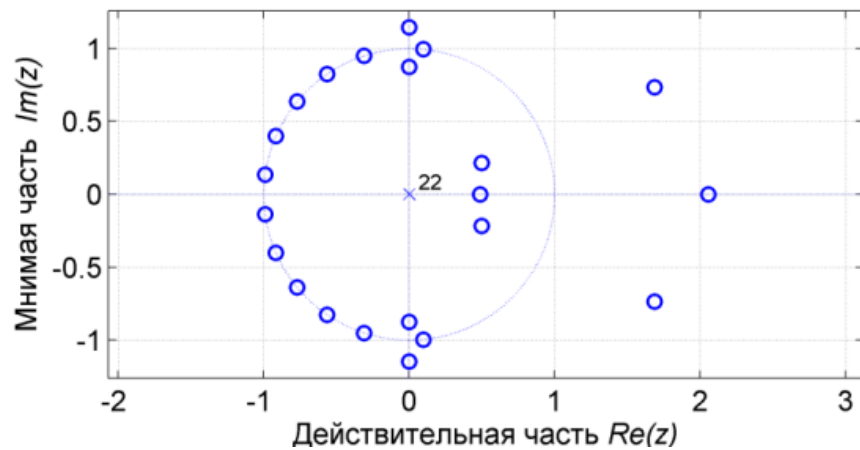


Рисунок 2.62 – Диаграмма нулей синтезированного дискретного фильтра

2.6.3 Упражнения

1. Синтезировать дискретный фильтр методом инвариантности импульсной характеристики для аналогового фильтра-прототипа с импульсной характеристикой следующего вида:

$$h_a(\tau) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \cdot [e^{-0,38 \cdot \alpha \cdot \tau} - e^{-2,62 \cdot \alpha \cdot \tau}], & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}.$$

Для найденного дискретного фильтра определить системную функцию, частотный коэффициент передачи и алгоритм цифровой фильтрации.

2. Аналоговый фильтр Баттерворта первого порядка с единичной частотой среда описывается передаточной функцией вида

$$K_a(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Синтезируйте методом билинейного преобразования дискретный фильтр. Интервал дискретизации принять равным $\Delta t = 1$.

3. Аналоговый фильтр Баттерворта первого порядка с единичной частотой среда описывается передаточной функцией вида

$$K_a(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2} \cdot p + 1}.$$

Синтезируйте методом билинейного преобразования дискретный фильтр. Интервал дискретизации принять равным $\Delta t = 1$.

4. На вход дискретного фильтра поступают отсчёты оцифрованного шума. Мощность дискретного шума на выходе дискретного фильтра равна $P_{ш_вых} = 5$ мкВт. Дискретный фильтр задан алгоритмом фильтрации следующего вида:

$$y(k) = 2 \cdot x(k) - 0,2 \cdot y(k-1).$$

Найти мощность дискретного шума на входе дискретного фильтра.

5. Синтезировать дискретный ФНЧ Баттерворта с параметрами из таблицы 2.16. Построить АЧХ, ФЧХ, значимую часть импульсной характеристики, диаграмму нулей и полюсов с помощью функции $zplane(b, a)$.
6. Синтезировать дискретный ФНЧ Чебышева I-го или II-го типов с параметрами из таблицы 2.16. Допустимое отклонение АЧХ в полосе пропускания задать равным 0,5 дБ. Построить АЧХ, ФЧХ, значимую часть импульсной характеристики, диаграмму нулей и полюсов с помощью функции $zplane(b, a)$.
7. Синтезировать дискретный эллиптический ФНЧ с параметрами из таблицы 2.16. Минимальное ослабление АЧХ в полосе подавления задать равным 30 дБ. Построить АЧХ, ФЧХ, значимую часть импульсной характеристики, диаграмму нулей и полюсов с помощью функции $zplane(b, a)$.

Таблица 2.16 – Параметры дискретного фильтра

№ варианта	1	2	3	4	5	6
Порядок фильтра	7	6	5	8	9	5
Частота дискретизации, Гц	200	2000	16000	8000	10000	20
Частота среза, Гц	60	400	5000	1900	2000	5

8. Синтезировать дискретный ФВЧ с параметрами из таблицы 2.17. Какой порядок окажется у фильтра Баттерворта, Чебышева I-го типа и II-го типа, у эллиптического ?

Таблица 2.17 – Параметры дискретного фильтра

№ варианта	1	2	3	4	5	6
Граничная частота подавления	0,64	0,28	0,4	0,1	0,86	0,72
Граничная частота пропускания	0,7	0,32	0,6	0,15	0,9	0,73
Допустимая неравномерность в полосе пропускания, дБ	0,02	0,1	0,0001	0,15	0,11	1
Минимальное ослабление в полосе подавления, дБ	40	30	100	85	57	30

9. Синтезировать дискретный фильтр с параметрами из таблицы 2.18 с использованием:
- функций Matlab. Построить АЧХ, ФЧХ, значимую часть импульсной характеристики, диаграмму нулей и полюсов.
 - программы FDATool. Построить с помощью программы АЧХ, ФЧХ, импульсную и переходную характеристики, групповое время запаздывания, диаграмму нулей и полюсов.

Таблица 2.18 – Параметры дискретного фильтра

№	1	2	3	4	5	6	7
–	<i>R</i>	<i>N</i>	<i>R</i>	<i>N</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>R</i>
–	<i>E</i>	<i>O</i>	<i>B</i>	<i>Re</i>	<i>Ch1</i>	<i>Ch2</i>	<i>B</i>
Тип	ФВЧ	ФНЧ	П	ФВЧ	ФНЧ	ФНЧ	Р
<i>n</i>	10	20	10	24	8	6	10
<i>R_p</i>	1	-	-	-	1	-	-
<i>R_s</i>	60	-	-	-	-	60	-
<i>f₀</i>	4000	4500	300, 3400	1000	800	800	300, 3400
<i>f₁</i>	-	-	-	1500	-	-	-
<i>f_s</i>	12000	12000	8000	8000	8000	8000	8000

В таблице 2.18 использованы следующие сокращения:

R – рекурсивный фильтр;

N – нерекурсивный фильтр;

E – метод синтеза эллиптических фильтров;

O – метод синтеза фильтров на основе обратного БПФ с оконной функцией Чебышева при $R = 60$ дБ;

B – метод синтеза фильтров Баттерворта;

Re – метод синтеза фильтров по Ремезу;

Ch1, *Ch2* – метод синтеза фильтров Чебышева I-го и II-го типа.

10. Синтезировать методом взвешивания дискретный нерекурсивный фильтр нижних частот с параметрами из таблицы 2.19 для прямоугольного окна.

Таблица 2.19 – Параметры дискретного фильтра

№	1	2	3	4	5	6
Длина импульсной характеристики	23	25	27	29	31	27
Нормированная частота среза	0,3	0,7	0,5	0,4	0,6	0,4

а) Вычислить и отобразить:

- идеальную и полученную нормированную АЧХ и ФЧХ в логарифмическом масштабе;
- фазочастотную характеристику;
- импульсную характеристику;
- расположение нулей.

Почему отклоняются АЧХ и ФЧХ синтезированного дискретного фильтра от идеальных ?

б) Увеличить количество отсчётов импульсной характеристики на единицу по сравнению с заданным в таблице. Как изменилась импульсная характеристика и АЧХ дискретного фильтра? С чем связаны эти изменения?

в) С помощью функций Matlab вычислить отсчёты и АЧХ следующих оконных функций: треугольное, Хэмминга и Блэкмана.

г) Учесть окна из пункта в) при синтезировании методом взвешивания дискретный нерекурсивный фильтр низких частот. Должны получиться три различных дискретных фильтра низких частот (каждый фильтр – каждое окно). Сравнить АЧХ синтезированных фильтров? Какой из синтезированных фильтров обеспечивает минимальную среднеквадратическую погрешность аппроксимации АЧХ?

д) Синтезировать методом взвешивания дискретный нерекурсивный фильтр нижних частот с параметрами из таблицы для окна Кайзера. Определить такой

параметр β , при котором обеспечивается минимальная среднеквадратическая погрешность АЧХ.

2.7 Тема «Изменение частоты дискретизации сигналов в многоскоростных системах»

Вопросы для изучения:

1. Понятие многоскоростной системы.
2. Прореживание (децимация), интерполяция и передискретизация.
3. Автоматизация изменения частоты дискретизации.

2.7.1 Некоторые теоретические сведения

Многоскоростная дискретная система – дискретная система, в которой различные этапы обработки дискретных сигналов выполняются на разных частотах дискретизации.

Различие частот дискретизации вызвано:

– использованием дискретных сигналов с разных цифровых каналов (например, частота дискретизации аудиозаписей составляет 44,1 кГц для компакт-дисков, 48 кГц для DVD, 96 кГц для DVD-Audio, 2,8224 МГц для технологии SACD и 5,6448 МГц для технологии аудиозаписи DSD);

– вынужденное использование в одном устройстве преобразователей и вычислителей с разной тактовой частотой (например, аналого-цифровой преобразователь формирует сигнал на частоте 100 МГц, а вычислитель обеспечивает обработку сигналов на частоте 10 МГц);

– необходимостью снизить требования к вычислителям (ПЛИС, сигнальным процессорам, микроконтроллерам и т.д.), когда фактический поток имеющихся отсчётов дискретных сигналов избыточно велик для обработки (например, измерение датчиком температуры с частотой 10 МГц избыточно и физически не целесообразно).

Отсюда возникает задача согласования частот дискретизации при создании эффективных в смысле вычислительных затрат многоскоростных вычислителей и блоков обработки сигналов. Эта задача решается алгоритмами преобразования частоты дискретизации, которые являются средством сопряжения различных систем дискретной обработки информации с разными частотами дискретизации.

Коэффициент преобразования частоты дискретизации – отношение частоты дискретизации выходного дискретного сигнала к частоте дискретизации входного дискретного сигнала алгоритма преобразования частоты.

Прореживание (decimation) – процесс преобразования дискретного сигнала от высокой частоты дискретизации к низкой частоте дискретизации в целое число раз.

Понижение частоты дискретизации в r раз выполняется путём выборки (извлечения) из дискретного сигнала каждого r -го отсчёта: по сути, это процесс дискретизации уже дискретного сигнала (см. рисунок 2.63).

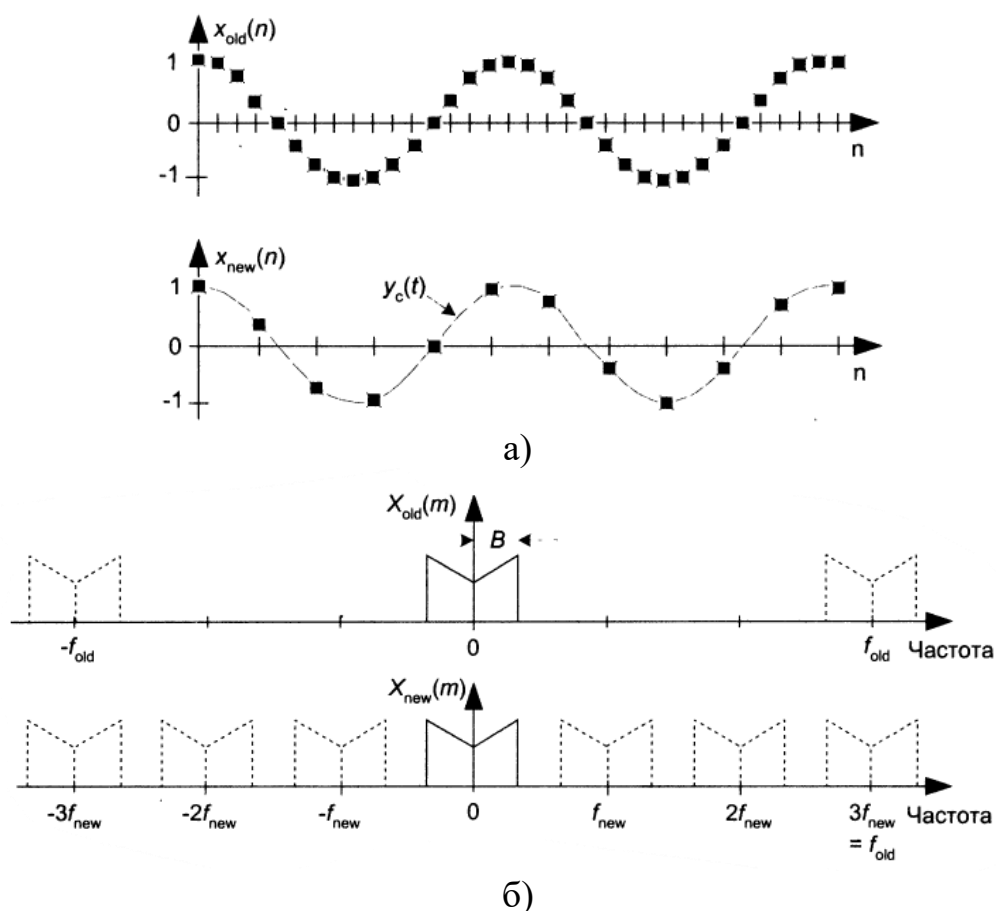


Рисунок 2.63 – Понижение частоты дискретизации дискретного сигнала в $r = 3$ раза: а) – во временной области; б) – в частотной области

Однако чрезмерное понижение частоты дискретизации может привести к появлению ложных частот в результате алиасинга, когда в спектре прореживаемого сигнала имеются частоты, превышающие половину **новой** частоты дискретизации (новую частоту Найквиста). Для устранения этого эффекта перед прореживанием необходимо дискретный сигнал сначала пропустить через фильтр низких частот, у которого частота среза равна новой

частоте Найквиста. В этом случае предпочтительны нерекурсивные КИХ-фильтры низких частот с линейной ФЧХ.

В Matlab прореживание с предварительной фильтрацией дискретного сигнала $x(k)$ выполняется с помощью функции *decimate* со следующим синтаксисом:

$$y = \text{decimate}(x, r, n, 'fir'), \quad (2.77)$$

где

y – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала после прореживания;

x – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала до прореживания;

r – коэффициент преобразования частоты дискретизации (целое число);

'fir' – параметр, указывающий на применение КИХ-фильтра 30-го порядка;

n – порядок КИХ-фильтра Чебышева,

или синтаксисом

$$y = \text{decimate}(x, r, n), \quad (2.78)$$

при использовании фильтра Чебышева (по умолчанию) порядка n ($n < 13$);

или синтаксисом

$$y = \text{decimate}(x, r), \quad (2.79)$$

при использовании по умолчанию фильтра Чебышева 8-го порядка.

Интерполяция (interpolation) – процесс преобразования дискретного сигнала от низкой частоты дискретизации к высокой частоте дискретизации в целое число раз (см. рисунок 2.64).

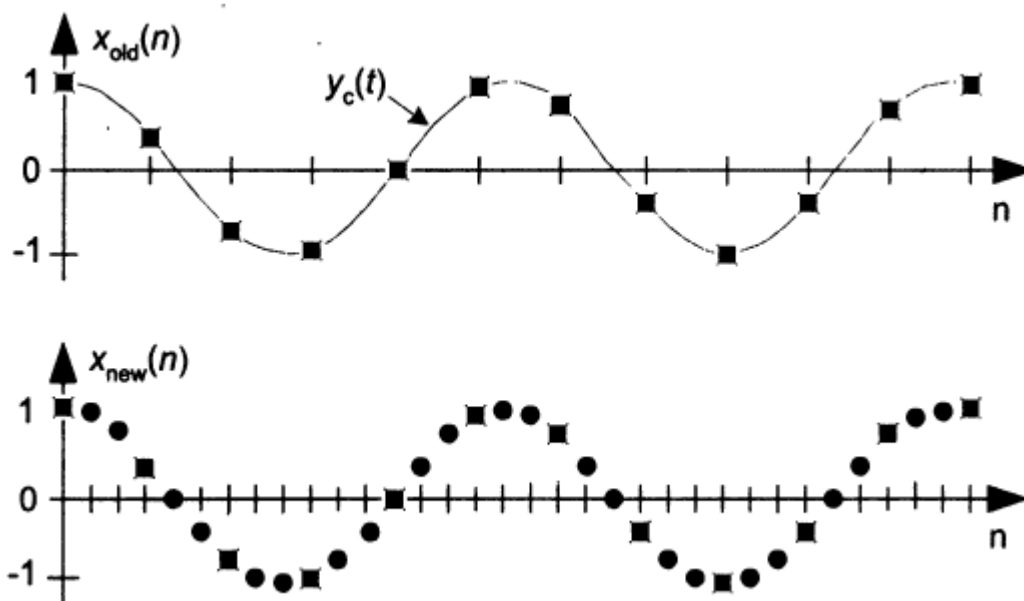
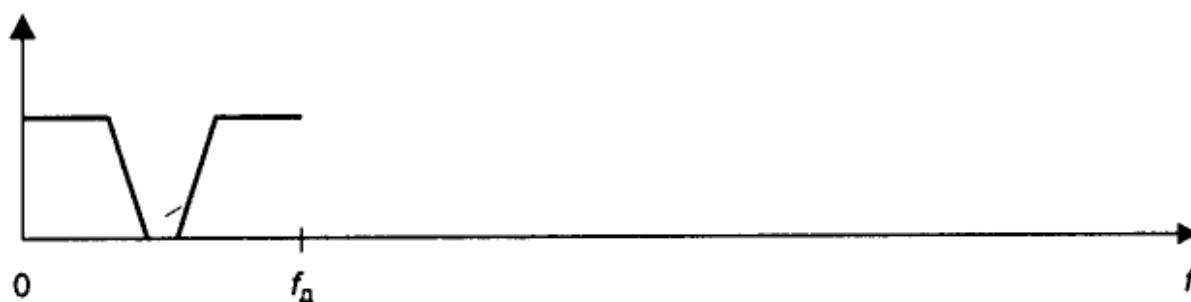


Рисунок 2.64 – Повышение частоты дискретизации дискретного сигнала в $r = 3$ раза во временной области

Концептуально интерполяция состоит в создании непрерывной функции $y(t)$, проходящей через дискретные отсчёты исходного сигнала $y(k \cdot \Delta t)$, с последующей дискретизации этой непрерывной функции с новой частотой дискретизации.

Для повышения частоты дискретизации в r раз, дискретный сигнал должен быть «растянут» во времени, а образовавшиеся между отсчётами промежутки должны быть заполнены $r - 1$ нулями.

Спектр исходного дискретного сигнала периодический, который повторяется с частотой дискретизации f_d . После добавления между отсчётами исходного дискретного сигнала $r - 1$ нулей частота дискретизации возрастает в $r \cdot f_d$ раз. Однако периодичность повторения спектра дополненного нулями дискретного сигнала останется прежней и равной f_d : между нулевой частотой и частотой $r \cdot f_d$ имеется избыточное периодическое повторение спектра исходного дискретного сигнала (см. рисунок 2.65). Чтобы избавиться от такого избыточного повторения спектров необходимо пропустить дискретный сигнал с нулями через фильтр низких частот с частотой среза $f_d/2$. После фильтрации получим интерполированный дискретный сигнал с частотой дискретизации $r \cdot f_d$ и прежним спектром от нуля до $f_d/2$ (см. рисунок 2.66).



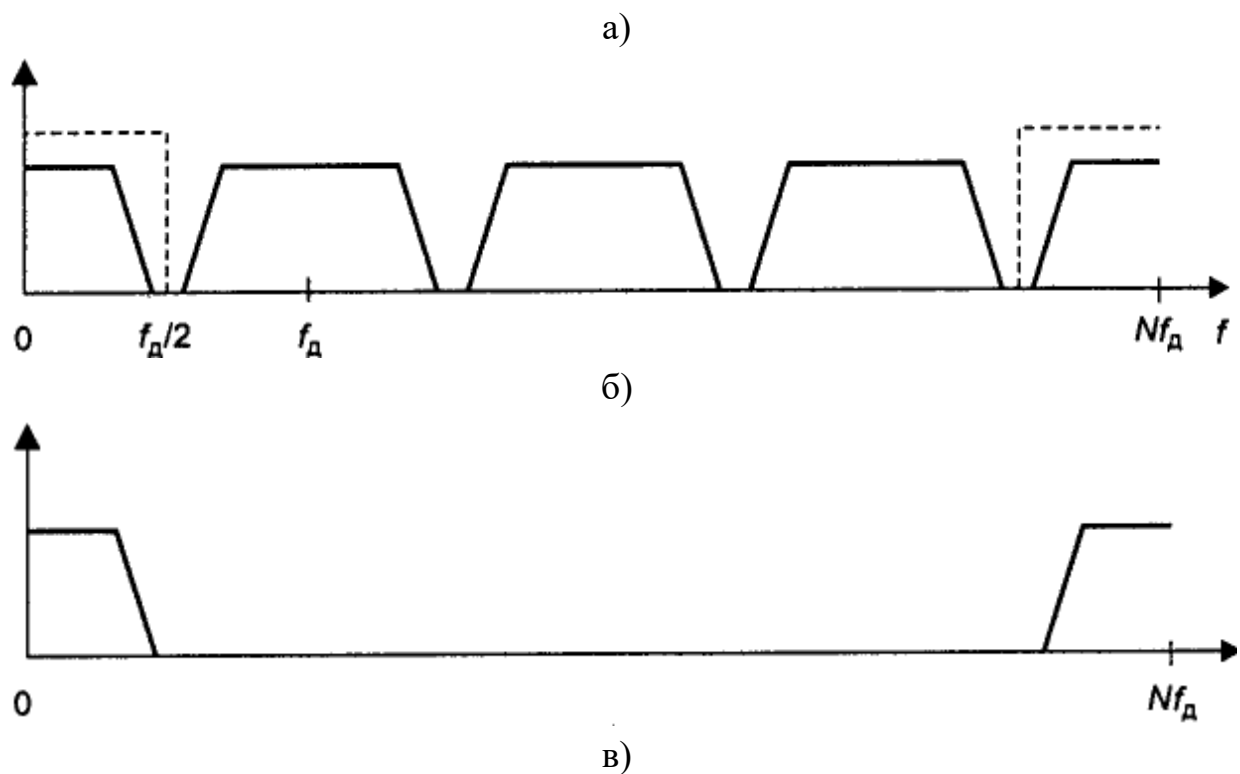


Рисунок 2.65 – Преобразование спектра дискретного сигнала в процессе целочисленного повышения частоты дискретизации

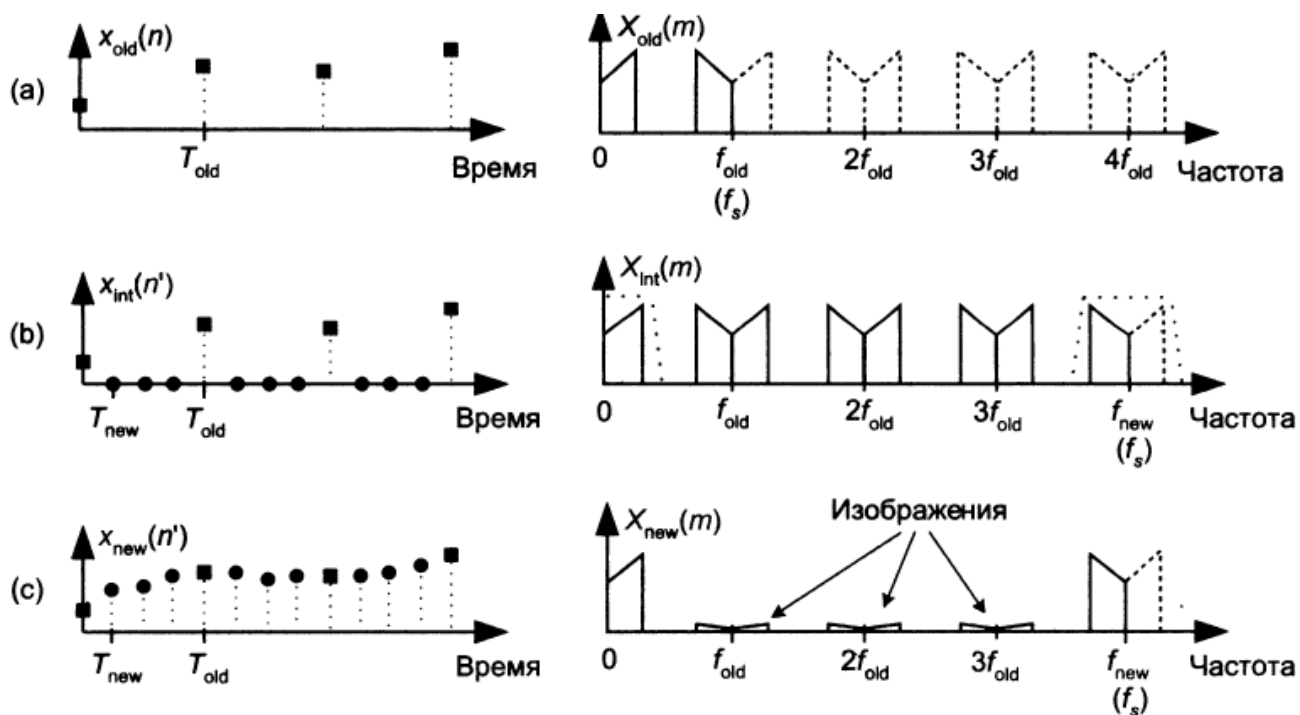


Рисунок 2.66 – Иллюстрация процесса интерполяции в четыре раза: а) исходный дискретный сигнал; б) дискретный сигнал после добавления нулей; в) дискретный сигнал после интерполяции

Для фильтрации дискретного сигнала с дополненными нулями рекомендуется использовать КИХ-фильтр с линейной ФЧХ для сохранения фазовых соотношений в дискретном сигнале после интерполяции.

В Matlab интерполяция с предварительной фильтрацией дискретного сигнала $x(k)$ выполняется с помощью функции *interp* со следующим синтаксисом:

$$y = \text{interp}(x, r, l, \alpha), \quad (2.80)$$

где

y – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала после прореживания;

x – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала до прореживания;

r – коэффициент преобразования частоты дискретизации (целое число);

l – параметр, который определяет половину количества отсчётов для интерполяции (фильтр длиной $2 \cdot r \cdot l + 1$);

α – нормированная частота среза фильтра ($\alpha = 1$ соответствует частоте Найквиста),

или синтаксисом

$$y = \text{interp}(x, r). \quad (2.81)$$

При интерполяции по умолчанию используется нерекурсивный КИХ-фильтр $8 \cdot r$ -го порядка с линейной ФЧХ и частотой среза, равной половине исходной частоты Найквиста (полоса частот входного сигнала считается ограниченной *половиной* частоты Найквиста).

Передискретизация (resampling) – процесс преобразования частоты дискретизации дискретного сигнала в дробное (p/q) число раз.

Передискретизация представляет собой последовательное выполнение интерполяции и прореживания дискретного сигнала.

Для изменения частоты дискретизации в дробное (p/q) раз, дискретный сигнал сначала интерполируют с коэффициентом p , а затем прореживают с коэффициентом q .

Основные этапы передискретизации в дробное (p/q) раз:

– Между отсчётами исходного дискретного сигнала вставляют $(p - 1)$ нулей;

– Дискретный сигнал с дополненными нулями пропускают через фильтр низких частот с частотой среза $f_d/2$;

– Отфильтрованный дискретный сигнал снова пропускают через фильтр низких частот с частотой среза $((p/q) \cdot f_d)/2$;

– В полученном дискретном сигнале выбирается каждый q -й отсчёт.

Второй и третий этапы фильтрации объединяют: дискретный сигнал пропускают через фильтр низких частот с меньшей частотой среза (см. рисунок).

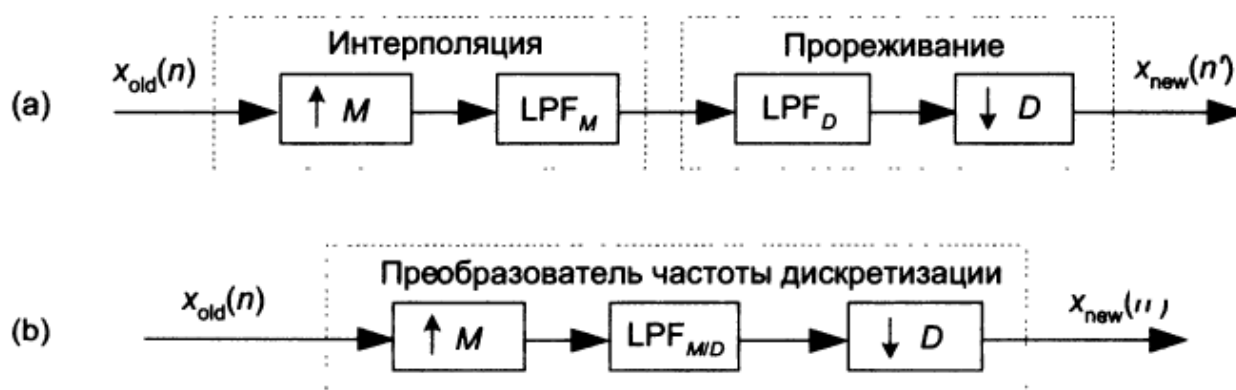


Рисунок 2.67 – Передискретизация дискретного сигнала в M/D раз:

а) комбинация процедур интерполяции и прореживания;

б) Передискретизация с единственным фильтром с меньшей частотой дискретизации

В Matlab передискретизация в дробное (p/q) раз с предварительной фильтрацией дискретного сигнала $x(k)$ выполняется с помощью функции *resample* со следующим синтаксисом:

$$y = \text{resample}(x, p, q), \quad (2.82)$$

где

y – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала после прореживания;

x – массив (вектор) отсчётов дискретного сигнала до прореживания;

p – числитель дробного коэффициента изменения частоты (целое число);

q – знаменатель дробного коэффициента изменения частоты (целое число).

В качестве фильтра при передискретизации используется не рекурсивный фильтр низких частот с окном Кайзера.

2.7.2 Примеры решения задач

1. Сформировать сигнал с изменяющейся частотой в диапазоне от нуля до 200 Гц. Закон изменения частоты – гармонический. Период изменения частоты составляет 1 секунду. Амплитуда сигнала составляет 1 В. Частота дискретизации 1 кГц.

а) Сформировать дискретный сигнал и построить график сигнала.

б) Выполнить прореживание дискретного сигнала в 2 раза путём выборки каждого второго отсчёта и построить график дискретного сигнала после прореживания.

в) Выполнить прореживание дискретного сигнала в 2 раза с помощью функции *decimate* и построить график дискретного сигнала после прореживания.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
s = cos(2*pi*t*fs/10-fs/10*sin(2*pi*t));
figure;
stem(t, s);
% Исходный дискретный сигнал
grid on;
xlim([0. 0.2]);
ylabel('Напряжение, В');
xlabel('Время, с');
r = 2;
y = s(1:r:end);
y2 = decimate(s, r);
% Дискретные сигналы после децимации
figure;
hold on
stem((0:length(y)-1)*(1/(fs/r)), y, 'r');
stem((0:length(y)-1)*(1/(fs/r)), y2, 'g');
hold off
grid on;
xlim([0. 0.2]);
```

```
ylabel('Напряжение, В');  
xlabel('Время, с');
```

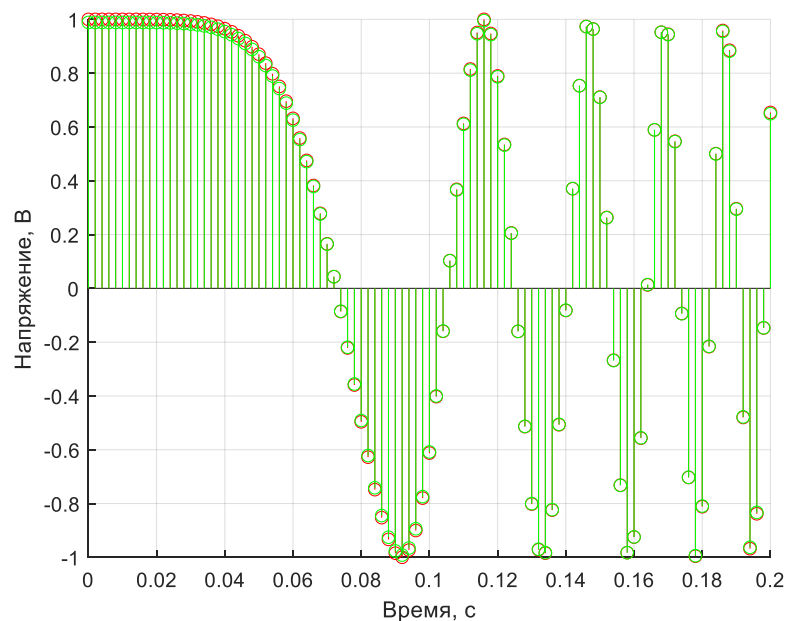
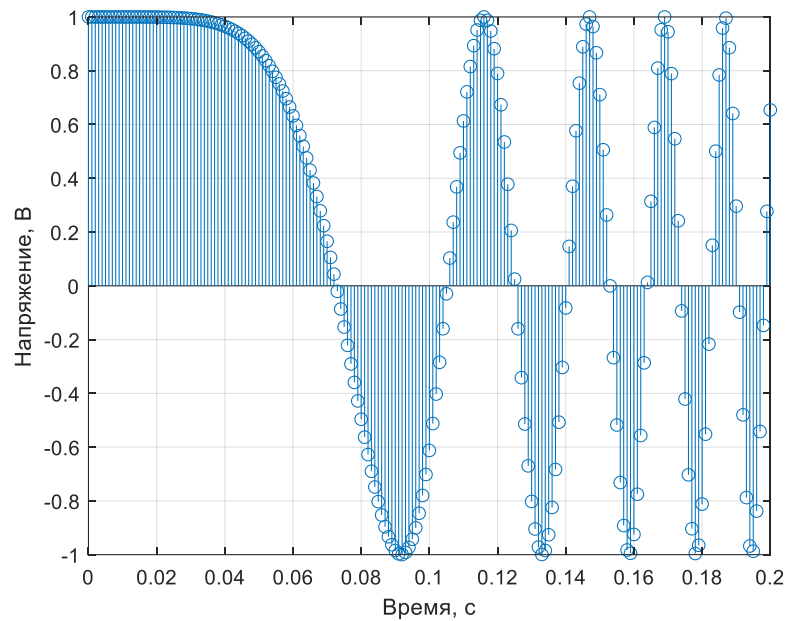


Рисунок 2.68 – Исходный дискретный сигнал (сверху) и после прореживания в два раза (снизу)

2. Сформировать сигнал с изменяющейся частотой в диапазоне от нуля до 200 Гц. Закон изменения частоты – гармонический. Период изменения частоты составляет 1 секунду. Амплитуда сигнала составляет 1 В. Частота дискретизации 1 кГц.

а) Сформировать дискретный сигнал и построить график сигнала.

б) Выполнить интерполяцию дискретного сигнала в 2 раза с помощью функции *interp* и построить график дискретного сигнала после интерполяции.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
clear;
close;
clc;

fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
s = cos(2*pi*t*fs/10-fs/10*sin(2*pi*t));
figure;
stem(t, s);
% Исходный дискретный сигнал
grid on;
xlim([0. 0.2]);
ylabel('Напряжение, В');
xlabel('Время, с');
r = 2;
y = interp(s, r);
% Дискретный сигналы после интерполяции
figure;
hold on
stem((0:length(y)-1)*(1/(fs*r)), y);
hold off
grid on;
xlim([0. 0.2]);
ylabel('Напряжение, В');
xlabel('Время, с');
```

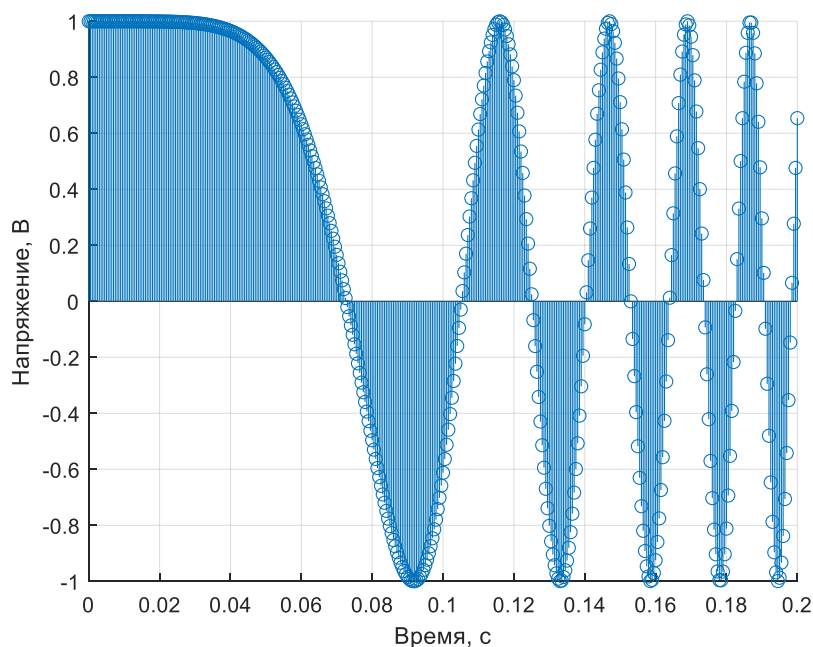
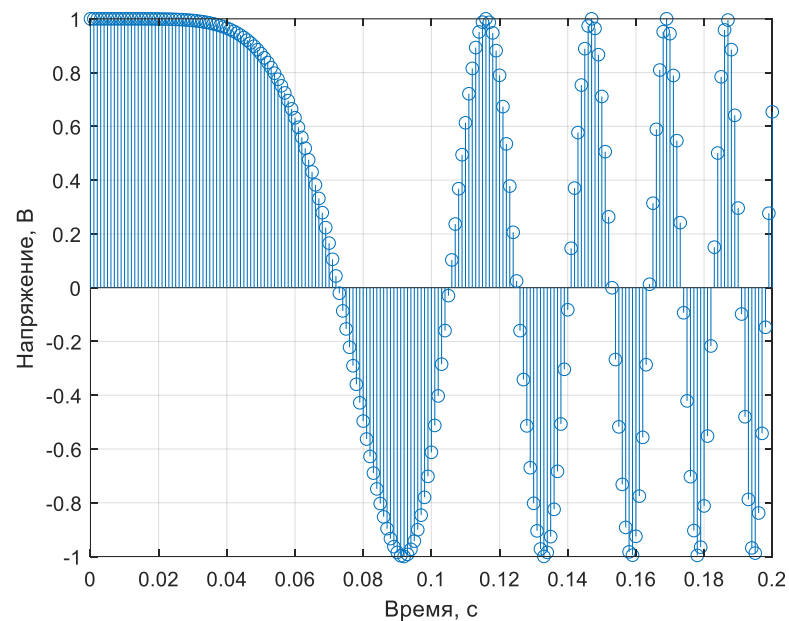



Рисунок 2.69 – Исходный дискретный сигнал (сверху) и после интерполяции в два раза (снизу)

3. Сформировать сигнал с изменяющейся частотой в диапазоне от нуля до 200 Гц. Закон изменения частоты – гармонический. Период изменения частоты составляет 1 секунду. Амплитуда сигнала составляет 1 В. Частота дискретизации 1 кГц.

а) Сформировать дискретный сигнал и построить график сигнала.

б) Выполнить передискретизацию дискретного сигнала в $3/4$ раза с помощью функции *resample* и построить график дискретного сигнала после передискретизации.

Решение:

Листинг программы (скрипта) представлен ниже:

```
clear;
close;
clc;

fs = 1000;
t = 0:1/fs:1;
s = cos(2*pi*t*fs/10-fs/10*sin(2*pi*t));
figure;
stem(t, s);
% Исходный дискретный сигнал
grid on;
xlim([0. 0.2]);
ylabel('Напряжение, В');
xlabel('Время, с');
p = 3;
q = 4;
y = resample (s, p, q);
% Дискретный сигналы после передискретизации в 3/4 раза
figure;
hold on
stem((0:length(y)-1)*(1/(fs*(p/q))), y);
hold off
grid on;
xlim([0. 0.2]);
ylim([-1 1]);
ylabel('Напряжение, В');
xlabel('Время, с');
```

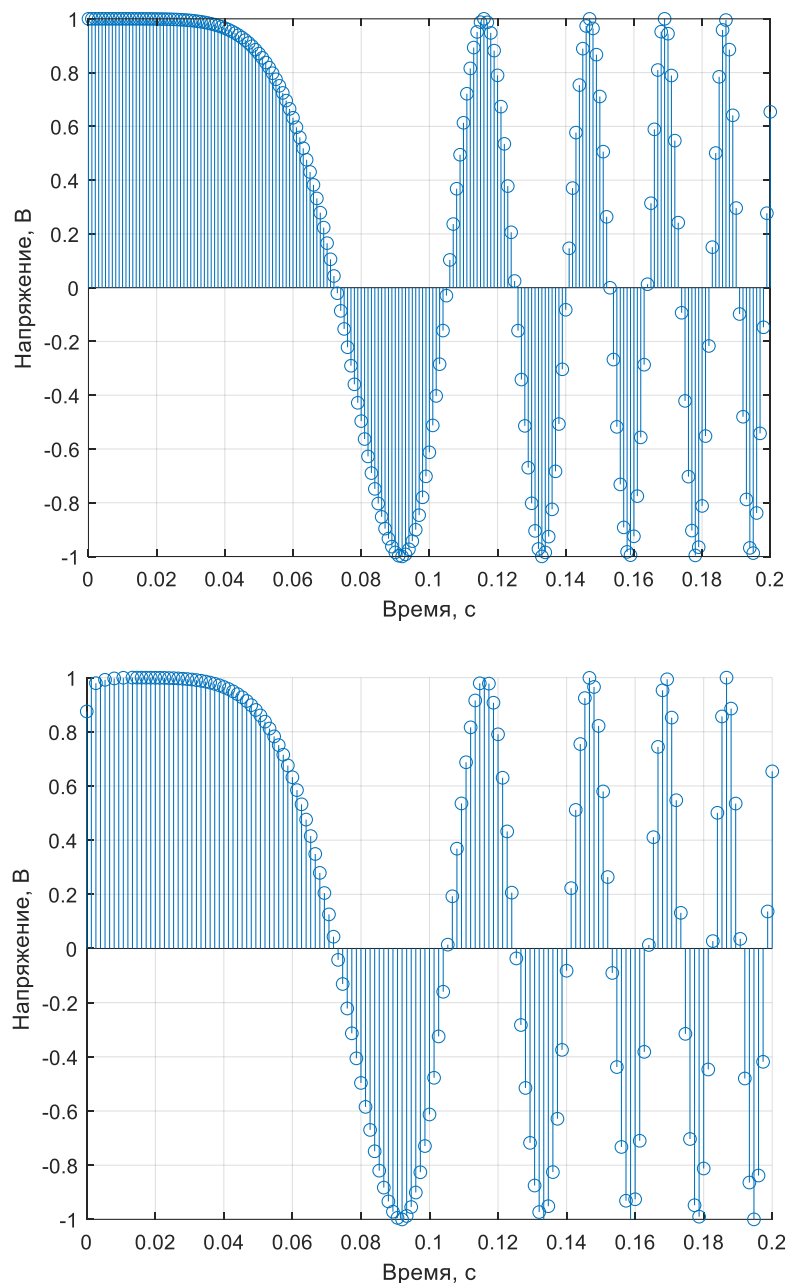


Рисунок 2.70 – Исходный дискретный сигнал (сверху) и после интерполяции в два раза (снизу)

2.7.3 Упражнения

1. Задан дискретный сигнал и параметры изменения частоты дискретизации согласно таблице.
 - а) Сформировать заданный дискретный сигнал и построить график дискретного сигнала во временной области с подписью осей координат.
 - б) Выполнить прореживание заданного дискретного сигнала путем выборки каждого r -го отсчета (согласно таблице). Построить график дискретного

сигнала после прореживания во временной области с подписью осей координат.

в) Построить спектрограммы исходного дискретного сигнала и дискретного сигнала после прореживания с помощью функции Matlab `spectrogram(s, 512, f_s, kaiser(256, 5), 220)`,

где

s – вектор дискретного сигнала, f_s – частота дискретизации.

г) Выполнить анализ полученных результатов. Имеются ли после прореживания ложные частоты в спектре дискретного сигнала? Если ложные частоты в спектре дискретного сигнала обнаружены, то следует уменьшить коэффициент понижения частоты r и повторить пункты б) и в). При отсутствии ложных частот в спектре дискретного сигнала увеличить максимальную частоту исходного дискретного сигнала так, чтобы после прореживания появились ложные частоты.

д) Выполнить пункты б), в) и г) с помощью функции `decimate` для прореживания дискретного сигнала.

е) Выполнить интерполяцию исходного дискретного сигнала с коэффициентом p и передискретизацию с коэффициентом (p/q) с помощью встроенных функций Matlab `interp` и `resample`, соответственно.

ж) Построить графики дискретных сигналов во временной области и их спектрограммы после интерполяции и передискретизации.

з) Выполнить интерполяцию и передискретизацию исходного дискретного сигнала без использования встроенных функций Matlab. Повторить пункт ж).

№	Модель дискретного сигнала	Параметры изменения частоты дискретизации
1	Косинусоидальный сигнал с частотной модуляцией по пилообразному закону: $f_s = 2000;$ $t = 0:1/f_s:2;$ $s = \text{vco}(\text{sawtooth}(2*\pi*t, 0.75), [0.1\ 0.4]*1000, f_s);$	$r = 2$ $p = 3$ $q = 4$
2	Сигнал с линейным законом изменения мгновенной частоты: $f_s = 8000;$ $t = 0:1/f_s:2;$ $f_0 = 1000;$ $t_1 = 1;$ $f_1 = 1500;$ $s = \text{chirp}(t, f_0, t_1, f_1, \text{'linear'});$	$r = 2$ $p = 4$ $q = 5$

3	<p>Косинусоидальный сигнал с частотной модуляцией по закону функции Дирихле:</p> <pre>fs = 2000; t = 0:1/fs:2; s = vco(diric(2*pi*t, 4), [0.1 0.4]*1000, fs);</pre>	<p>r = 2 p = 5 q = 3</p>
4	<p>Сигнал с квадратичным законом изменения мгновенной частоты:</p> <pre>fs = 8000; t = 0:1/fs:2; f0 = 1000; t1 = 1; f1 = 1500; s = chirp(t, f0, t1, f1, 'quadratic');</pre>	<p>r = 2 p = 3 q = 5</p>
5	<p>Косинусоидальный сигнал с частотной модуляцией по пилообразному закону:</p> <pre>fs = 8000; t = 0:1/fs:2; s = vco(sawtooth(2*pi*t, 0.75), [0.1 0.9]*1000, fs);</pre>	<p>r = 4 p = 4 q = 5</p>
6	<p>Сигнал с экспоненциальным законом изменения мгновенной частоты:</p> <pre>fs = 8000; t = 0:1/fs:1; f0 = 1000; t1 = 1; f1 = 1500; s = chirp(t, f0, t1, f1, 'logarithmic');</pre>	<p>r = 2 p = 7 q = 5</p>
7	<p>Косинусоидальный сигнал с частотной модуляцией по закону функции Дирихле:</p> <pre>fs = 4000; t = 0:1/fs:2; s = vco(diric(2*pi*t, 3), [0.1 0.4]*1000, fs);</pre>	<p>r = 4 p = 2 q = 3</p>

2.8 Тема «Эффекты квантования при обработке дискретных сигналов»

Вопросы для изучения:

1. Цифровой сигнал.
2. Цифровой фильтр.
3. Мощность шумов квантования. Отношение сигнал/шум.

2.8.1 Некоторые теоретические сведения

Отсчёты цифрового сигнала хранятся в ячейках памяти вычислителя. При записи в память число записывается с определённой разрядностью. Это ограничивает точность представления чисел, в частности, весовых коэффициентов дискретных фильтров. С другой стороны, при аналого-цифровом преобразовании аналоговый сигнал преобразуется в дискретный по времени и уровню. Количество дискретных уровней связано с разрядностью аналого-цифрового преобразователя.

Конечная разрядность представления чисел приводит к следующим эффектам:

- шум квантования в результате аналого-цифрового преобразования аналогового сигнала;
- искажения частотных характеристик дискретных фильтров в результате квантования (ограничения точности) весовых коэффициентов;
- переполнение разрядной сетки при вычислениях;
- округление промежуточных результатов вычислений при математических преобразованиях.

Квантование – округление значений дискретного сигнала к ближайшему уровню (см. рисунок 2.71).

Цифровой сигнал – дискретный сигнал, квантованный по уровню.

Цифровой фильтр – дискретная система с квантованными (округлёнными) весовыми коэффициентами.

Рассмотрим квантование дискретного сигнала.

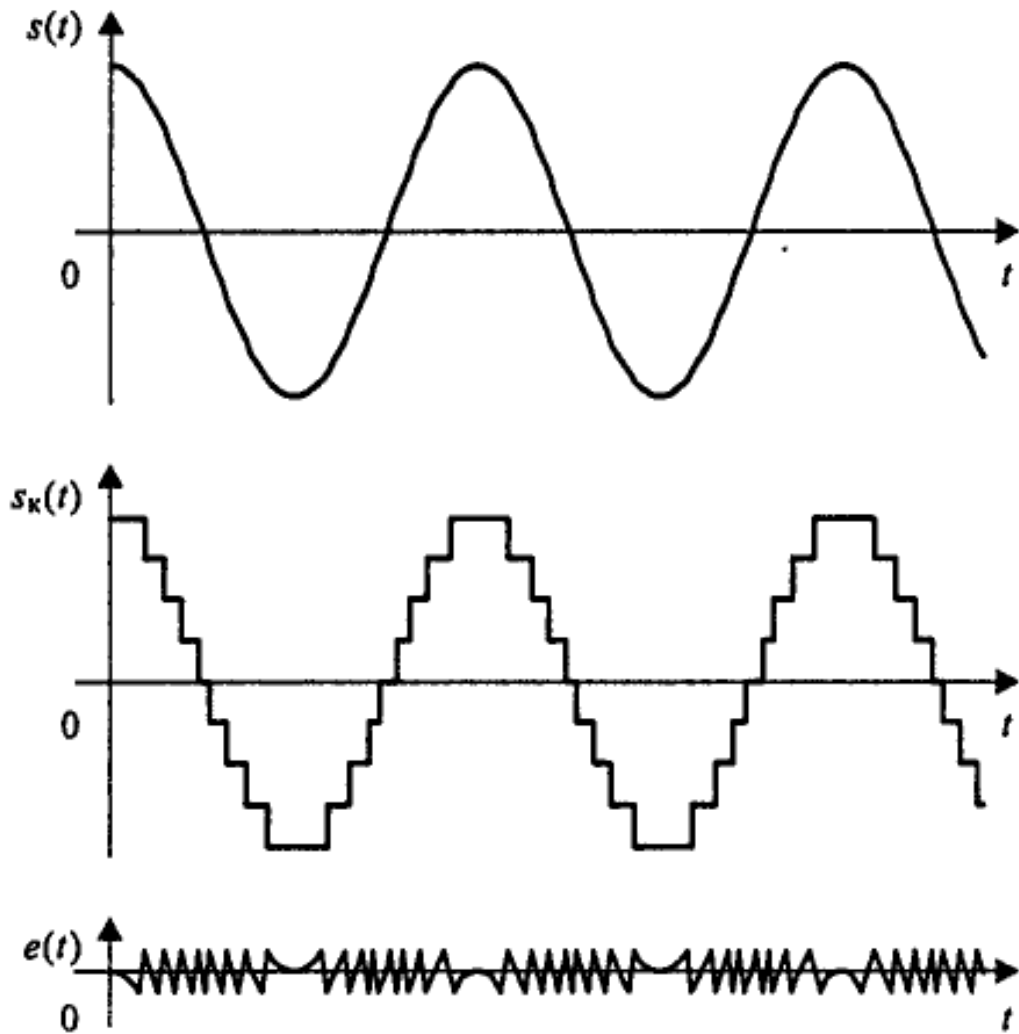


Рисунок 2.71 – Квантование гармонического сигнала

Квантование **положительного** дискретного сигнала $x(k)$ с шагом Δh можно описать следующим выражением

$$x_q(k) = \left(\left\lfloor \frac{x(k)}{\Delta h} \right\rfloor + 0,5 \right) \cdot \Delta h, \quad (2.83)$$

где

$x_q(k)$ – квантованный дискретный сигнал (цифровой сигнал);

$\lfloor \cdot \rfloor$ – операция округления до ближайшего меньшего целого.

Квантование **разнополярного** дискретного сигнала $x(k)$ с шагом Δh можно описать следующим выражением

$$x_q(k) = \left\lfloor \frac{x(k)}{\Delta h} + 0,5 \right\rfloor \cdot \Delta h. \quad (2.84).$$

Шаг квантования Δh дискретного разнополярного сигнала амплитудой A определяется весом младшего числового (значащего) разряда (МЗР), т.е. разрядностью B аналого-цифрового преобразователя следующим образом:

$$\Delta h = \frac{2 \cdot A}{2^B}. \quad (2.85)$$

Средняя мощность шума квантования дискретного разнополярного сигнала амплитудой A определяется следующим выражением:

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta h^2}{12}. \quad (2.86)$$

Для снижения мощности шума квантования в спектре дискретного сигнала дискретизацию аналогового сигнала делают с запасом по частоте, который определяется коэффициентом перевыборки k_p .

Коэффициент перевыборки определяется как отношение частоты дискретизации f_d аналогового сигнала к удвоенной верхней частоте в спектре сигнала f_v следующим образом:

$$k_p = \frac{f_d}{2 \cdot f_v}. \quad (2.87)$$

Отношение средней мощности синусоидального сигнала к средней мощности шума квантования дискретного определяется следующим выражением:

$$SNR = 6,02 \cdot B + 1,76 \text{ дБ}, \quad (2.88)$$

или

$$SNR = 10^{\frac{6,02 \cdot B + 1,76}{10}} \text{ Вт}. \quad (2.89)$$

Динамический диапазон аналого-цифрового преобразователя – отношение максимального уровня сигнала к минимальному, при котором обеспечивается заданное отношение сигнал/шум. Динамический диапазон АЦП определяется как

$$D = 20 \cdot \lg(2^B) \text{ дБ}. \quad (2.90)$$

2.8.2 Пример решения задачи

1. Определить среднюю мощность шума квантования АЦП с количеством разрядов 7, если входной сигнал имеет размах от минус 1 В до 1 В. Определить динамический диапазон входных сигналов АЦП.

Решение:

$$P_{ш.кв.} = \sigma_e^2 = \frac{\Delta h^2}{12} = \frac{\left(\frac{s_{\max} - s_{\min}}{2^B}\right)^2}{12} = \frac{\left(\frac{1 - (-1)}{2^7}\right)^2}{12} = \frac{\left(\frac{1}{64}\right)^2}{12} \approx 20,35 \text{ мкВт.}$$

$$D = 20 \cdot \lg(2^B) = 20 \cdot \lg(2^7) \approx 42 \text{ дБ.}$$

2.8.3 Упражнения

1. Дисперсия шума квантования равномерно распределённого дискретного сигнала равна 100 мВ^2 . Аналого-цифровой преобразователь с такой дисперсией шума имеет 10 разрядов. Определить максимальное значение входного сигнала.
2. Определить число возможных уровней квантования гауссовского случайного процесса, если требуемое отношение сигнал/шум составляет 40 дБ. Сколько разрядов следует добавить к уже найденному, если отношение сигнал/шум возрастёт на 3 дБ?
3. Найти число разрядов АЦП, чтобы обеспечить отношение сигнал/шум не менее 40 дБ, при условии, что квантуется сигнал со средней мощностью 1 мВ^2 .
4. Определить отношение сигнал/шум, которое обеспечивает АЦП с числом разрядов 5 при квантовании сигнала со средней мощностью 1 В^2 .
5. Сформировать гармонический дискретный сигнал. Параметры гармонического сигнала выбрать случайными. Выполнить квантование дискретного сигнала с различной разрядностью, определить шум и мощность шума квантования. Построить зависимость мощности шума квантования от соотношения шага квантования и амплитуды гармонического дискретного сигнала.

3 ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Виды самостоятельной работы студентов и соответствующая форма контроля представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Виды самостоятельной работы и форма контроля

№ п/п	Наименование работы	Форма контроля
1	Проработка лекционного материала	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях
2	Подготовка к практическим занятиям	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях, тест
3	Подготовка к лабораторной работе	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях
4	Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе	Отчёт по лабораторной работе, опрос на занятиях
5	Подготовка к экзамену (зачёту)	Сдача экзамена (зачёта)

Виды самостоятельной работы студентов описаны ниже.

3.1 Проработка лекционного материала

Материалы лекций и рекомендуемая литература являются основой для изучения и освоения дисциплины. Самостоятельная работа в части проработки лекционного материала состоит в непосредственном конспектировании материалов лекций с последующим изучением этих материалов с использованием рекомендуемой литературы.

Схема составления конспекта:

- Определить тему материала и цель составления конспекта.
- Разделить лекционный материал на смысловые части, выделив основные тезисы и выводы.
- Сформулировать положения лекционного материала.
- Выделить основные термины, определения и формулы.
- Сформулировать вопросы к конспекту лекций.

3.2 Подготовка к опросам на занятиях

Для самоподготовки к опросам на занятиях ниже представлены вопросы на самоподготовку:

1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами.
2. дискретными сигналами.

3. Спектры аналоговых и дискретных сигналов, нормированные частоты.
4. Теорема Котельникова. Разложение сигналов в базис Котельникова. Восстановление
5. непрерывного сигнала по набору дискретных отсчетов.
6. Корреляционные функции случайных процессов. Некоррелированность и
7. статистическая независимость.
8. Спектр дискретного сигнала.
9. Ряд Фурье. Разложение сигналов в ряд Фурье.
10. Интегральное преобразование Фурье.
11. Дискретное и быстрое преобразование Фурье.
12. Дискретное преобразование Фурье конечной и периодической последовательностей.
13. Свойства преобразования Фурье.
14. Свертка дискретных сигналов.
15. Основные структуры цифровых фильтров. Рекурсивные и нерекурсивные фильтры.
16. Стационарность и линейность дискретной системы.
17. Характеристики БИХ и КИХ фильтров.
18. Способы описания цифровых фильтров: передаточная функция,
19. разностное уравнение.
20. Формы реализации дискретных фильтров. Соединения фильтров.
21. Устойчивость и реализуемость дискретных фильтров.
22. Основные методы проектирования цифровых фильтров.
23. Общие сведения и основные понятия децимации, интерполяции и передискретизации сигналов.

Необходимо, также, подготовиться к контрольным вопросам для каждой темы практического занятия.

3.3 Подготовка к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям необходимо пользоваться настоящими методическими указаниями, а также рекомендованной литературой.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо:

1. Вспомнить примеры решения задач, которые были разобраны на предыдущем практическом занятии.
2. Выполнить домашнее задание. В случае пропуска практического занятия узнать домашнее задание у старосты группы или одноклассников.
3. Познакомиться с темой следующего практического занятия.

4. Повторить материалы лекций в соответствии с темой следующего практического занятия, а также рекомендованные разделы из списка литературы.

Примерные темы лабораторнопрактических занятий:

1. Знакомство с пакетом прикладных программ. Формирование дискретных сигналов
2. Дискретное представление сигналов
3. Дискретное преобразование Фурье для спектрального анализа дискретных сигналов
4. Линейная фильтрация дискретных сигналов
5. Синтез дискретных систем
6. Изменение частоты дискретизации сигналов в многоскоростных системах

Отчёт по лабораторно-практическому занятию выполняется на электронном носителе в виде электронного документа.

Отчёт должен содержать:

1. Тему работы.
2. Цель работы.
3. Исходные данные к выполнению домашнего задания или задач на самостоятельное решение.
4. Результаты решения к заданию с подробными пояснениями или расчётами.

3.4 Подготовка к тестированию

При подготовке к тестированию необходимо заблаговременно повторить лекционный материал, а также, при необходимости, соответствующий материал из рекомендованной литературы.

Вопросы к тестированию представлены в разделе 4.

3.5 Подготовка к лабораторной работе

При подготовке к лабораторной работе необходимо заблаговременно повторить лекционный материал по соответствующей теме, в том числе из методических указаний по проведению лабораторных работ по данной дисциплине.

В ходе подготовки к лабораторным работам необходимо:

1. Узнать тему предстоящей лабораторной работы.

2. Вспомнить основной теоретический материал по соответствующей теме.
3. Ответить на контрольные вопросы для допуска к выполнению лабораторной работы.
4. Ознакомиться с ходом выполнения работы.

3.6 Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе

При подготовке к защите по лабораторной работе необходимо заблаговременно подготовить и оформить отчёт с результатами выполнения лабораторной работы, повторить лекционный материал по соответствующей теме, а также пользоваться методическими указаниями по проведению лабораторных работ по данной дисциплине.

Перед защитой к лабораторной работе необходимо:

1. Проверить отчёт к лабораторной работе, в том числе, ещё раз прочитать выводы по результатам выполнения лабораторной работы.
2. Осмыслить и осознать сделанные выводы к лабораторной работе. Дать физическую интерпретацию и объяснение полученным результатам.
3. Вспомнить основной теоретический материал по соответствующей теме.
4. Ответить на контрольные вопросы для выполнения лабораторной работы.

3.7 Подготовка к экзамену (зачёту)

Самостоятельная подготовка к экзамену (зачёту) состоит в подготовке (изучении) ответов на вопросы к теоретическому минимуму и подготовке ответов на основные вопросы к экзамену.

Для самостоятельной подготовки к экзамену (зачёту) студенту необходимо подготовить ответы к следующим основным вопросам:

1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами.
2. Спектры аналоговых и дискретных сигналов, нормированные частоты.
3. Теорема Котельникова. Разложение сигналов в базис Котельникова. Восстановление непрерывного сигнала по набору дискретных отсчетов.

6. Корреляционные функции случайных процессов. Некоррелированность и
7. статистическая независимость.
8. Спектр дискретного сигнала.
9. Ряд Фурье. Разложение сигналов в ряд Фурье.
10. Интегральное преобразование Фурье.
11. Дискретное и быстрое преобразование Фурье.
12. Дискретное преобразование Фурье конечной и периодической последовательностей.
13. Свойства преобразования Фурье.
14. Свертка дискретных сигналов.
15. Основные структуры цифровых фильтров. Рекурсивные и нерекурсивные фильтры.
16. Стационарность и линейность дискретной системы.
17. Характеристики БИХ и КИХ фильтров.
18. Способы описания цифровых фильтров: передаточная функция,
19. разностное уравнение.
20. Формы реализации дискретных фильтров. Соединения фильтров.
21. Устойчивость и реализуемость дискретных фильтров.
22. Основные методы проектирования цифровых фильтров.
23. Общие сведения и основные понятия децимации, интерполяции и передискретизации сигналов.

3.8 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Во время самоподготовки рекомендуется обращаться к базам данных, информационно-справочным и поисковым системам, к которым у ТУСУРа открыт доступ:

- Библиотека ТУСУР: <https://lib.tusur.ru/>.
- Электронно-библиотечная система Издательства Лань: e.lanbook.com.
- Электронно-библиотечная система Юрайт: urait.ru.
- zbMATH: zbmath.org.
- Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы: <https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh>.

- Информационно-аналитическая система Science Index РИНЦ:
<https://elibrary.ru/defaultx.asp>.

4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сигналы, у которых время и мгновенные значения непрерывны, называются:
 - а) цифровыми;
 - б) аналоговыми;
 - в) дискретными;
 - г) квантованными.
2. Частота дискретизации низкочастотных сигналов определяется:
 - а) теоремой Котельникова;
 - б) полосой спектра сигнала;
 - в) верхней граничной частотой;
 - г) центральной частотой.
3. Явление, при котором непрерывные сигналы после дискретизации имеют одинаковую частоту называют:
 - а) растеканием спектра;
 - б) передискретизацией;
 - в) алиасингом;
 - г) гребешковым эффектом.
4. Для устранения наложения спектра после дискретизации аналогового сигнала применяют:
 - а) преобразование частоты;
 - б) уменьшение частоты дискретизации;
 - в) фильтрацию;
 - г) инверсию спектра.
5. Для аналогового гармонического сигнала частотой 10 кГц частота дискретизации должна быть не меньше:
 - а) 100 кГц;
 - б) 50 кГц;

- в) 10 кГц;
 - г) 20 кГц.
6. Для аналогового низкочастотного сигнала полосой 15 кГц частота дискретизации должна быть не меньше:
- а) 150 кГц;
 - б) 75 кГц;
 - в) 15 кГц;
 - г) 30 кГц.
7. Частота дискретизации, при которой «копии» спектров дискретных сигналов расположены в первой зоне Найквиста и не соприкасаются друг с другом, называется:
- а) граничной;
 - б) верхней;
 - в) оптимальной;
 - г) центральной.
8. Если аналоговый сигнал задержан во времени, то после дискретизации:
- а) амплитудный спектр становится инвертированным;
 - б) фазовый спектр становится инвертированным;
 - в) амплитудный спектр преобразуется путём добавления к исходному значения, зависящего от частоты;
 - г) фазовый спектр преобразуется путём добавления к исходному значения, зависящего от частоты.
9. Явление, при котором спектр аналогового сигнала с частотами, не кратными f_s / N , после дискретизации «растекается» по другим, ранее несуществующим частотам, называется:
- а) квантованием;
 - б) утечкой спектра;
 - в) инверсией спектра;
 - г) преобразованием по частоте спектра сигнала.

10. Если количество дискретных отсчётов сигнала возросло в 10 раз, то после дискретного преобразования Фурье отношение сигнал/шум изменилось на:

а) + 10 дБ;

б) - 10 дБ;

в) + 20 дБ;

г) - 20 дБ.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После успешного изучения практических основ цифровой обработки сигналов студенты радиотехнических специальностей обладают компетенциями в части обработки дискретных сигналов и помех в радиотехнических системах. Студенты знают подход к описанию дискретных сигналов, обладают навыками их спектрального анализа, в том числе, после прохождения через дискретные линейные системы. Кроме этого, студенты знакомы с вопросами синтеза дискретных линейных систем. Это составляет основу анализа, синтеза систем цифровой обработки сигналов в задаче совершенствования радиоэлектронных устройств.

Для углубленного изучения цифровой обработки сигналов в части теоретического освоения дисциплины рекомендуется литература [7 – 21], в части практического освоения дисциплины рекомендуется литература [1 – 6].

Элементы цифровой обработки сигналов, как и прежде, применяются для изучения цифровых сигнальных процессоров, программируемых логических интегральных схем, а также при разработке оптимальных дискретных систем обработки информации в радиотехнических системах.

6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Цифровая обработка сигналов : методические указания / составители А. Н. Голубинский [и др.]. — Воронеж : ВГТУ, 2023. — 42 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/383291> (дата обращения: 23.01.2023)
- 2 Елисеев, С. Н. Многоскоростная и многоканальная цифровая обработка сигналов (приложения в телекоммуникациях) : учебное пособие / С. Н. Елисеев. — Самара : ПГУТИ, 2018. — 81 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/182194> (дата обращения: 23.05.2024).
- 3 Петровский, А. А. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум: пособие/ А. А. Петровский, М. И. Вашкевич, И.С. Азаров. - Минск: БГУИР, 2016. - 87 с.
- 4 Голубинский А.Н. Лабораторный практикум по курсу «Теория цифровой обработки сигналов» / А. Н. Голубинский, С. В. Ролдугин, Б. А. Швырёв. - Воронеж : ВИ МДВ России, 2008. – 66 с.
- 5 Солонина, А.И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Matlab / А.И. Солонина, С.М. Арбузов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 816 с.
- 6 Титов Д. А., Василевский В. В., Косых А. В. Цифровая обработка сигналов. Методические указания к лабораторным работам. Омск. 2011 // Омский государственный технический университет URL: https://omgtu.ru/general_information/faculties/radio_engineering_department/department_quot_radio_devices_and_diagnostic_systems_quot/educational-materials/Digital_signal_processing/Methodical_instructions_to_laboratory_works.pdf (дата обращения: 23.04.2023).
- 7 Основы цифровой обработки сигналов : Курс лекций / А. И. Солонина. - 2-е изд. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 753 с.
- 8 Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Р. Лайонс. - 2-е изд. - М. : БИНОМ, 2007. - 652 с.
- 9 Айфичер, Э. С. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. 2-е изд. / Эммануил С. Айфичер, Барии У. Джервис. – М. : Вильямс, 2004. – 992 с.
- 10 Цифровая обработка сигналов : Пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер; пер. : С. А. Кулешов ; ред. пер. : А. С. Ненашев. - М. : Техносфера, 2006. – 855 с.

- 11 Цифровая обработка сигналов : Учебное пособие для вузов / А. Б. Сергиенко. - 2-е изд. - СПб. : Питер, 2007. - 750 с.
- 12 Голубинский, А. Н. Теория цифровой обработки сигналов: учебное пособие / А. Н. Голубинский, С. В. Ролдугин, И. В. Лазарев. – Воронеж : ВИ МВД России, 2010. – 155 с.
- 13 Купер Дж., Макгиллен К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М. : Мир, 1989. – 376 с.
- 14 Давенпорт Б. В. Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 464 с.
- 15 Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – " Юстиция", 2018. – С. 658.
- 16 Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Физматлит, 2002. – С. 496.
- 17 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: 4-е изд., стереотипное. – М. : Высшая школа, 1997. – 400 с.
- 18 Радиотехнические цепи и сигналы: руководство к решению задач : учебное пособие для вузов / С. И. Баскаков. - М. : Высшая школа, 1987. – 206 с.
- 19 Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Радио и связь, 1986. – 511 с.
- 20 Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие / Н. А. Каратаева; Министерство образования Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра радиоэлектроники и защиты информации. - Томск : ТМЦДО, Ч. 1 : Теория сигналов и линейные цепи. - Томск : ТМЦДО, 2001. - 260 с.
- 21 Жуков В. П., Карташёв В. Г., Николаев А. М. Задачник по курсу радиотехнические цепи и сигналы. – М. : Высшая школа, 1986. – 192 с.