

С. М. Шандаров
Н. И. Буримов
А. С. Акрестина

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

С. М. Шандаров
Н. И. Буримов
А. С. Акрестина

ВВЕДЕНИЕ
В ОПТИЧЕСКУЮ
ФИЗИКУ



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

С. М. Шандаров, Н. И. Буримов,
А. С. Акрестина

Введение в оптическую физику

Учебное пособие

Томск
Издательство ТУСУРа
2023

УДК 535:53(075.8)

ББК 22.34я73

Ш201

Рецензенты:

Тихомиров А. А., д-р техн. наук;

Гейко П. П., д-р физ.-мат. наук

Печатается по решению научно-методического совета

ТУСУРа (протокол № 5 от 01.06.23)

Шандаров, Станислав Михайлович

Ш201 Введение в оптическую физику: учеб. пособие / С. М. Шандаров, Н. И. Буримов А. С. Акрестина. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2023. – 252 с.

ISBN 978-5-86889-998-0

Изложены основы оптической физики – шкала электромагнитных колебаний, основы теории колебаний, описание электромагнитного излучения оптического диапазона, отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела диэлектрических сред, интерференция монохроматического излучения, оптика анизотропных сред, теория дисперсии.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям «Фотоника и оптоинформатика», «Электроника и наноэлектроника», «Физика и астрономия», «Фотоника, приборостроение, оптические и биотехнические системы и технологии» и другим физическим и техническим направлениям подготовки.

УДК 535:53(075.8)

ББК 22.34я73

ISBN 978-5-86889-998-0

© Шандаров С. М., Буримов Н. И.
Акрестина А. С., 2023

© Томск. гос. ун-т систем упр.
и радиоэлектроники, 2023

Введение

Свет является важнейшим носителем информации для многих живых существ с момента рождения. Использование света человеком в своих целях началось, по-видимому, с незапамятных времен. Интерес к природе света и расширению возможностей его использования растет и сейчас, когда знаний об этом накоплено достаточно много. Что же из этих знаний является предметом нашего изучения? Начнем с рассмотрения терминологии, принятой в настоящее время.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, законы ее движения. Физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений. Слово «физика» происходит от греческого *physis* – природа.

Оптика – раздел науки и техники, в котором изучаются оптическое излучение (свет), процессы его распространения и явления, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества. Слово «оптика» – от греческого *opto's* – видимый, зримый. Оптику принято подразделять на геометрическую, физическую и физиологическую. **Геометрическая оптика** использует представление о распространяющихся независимо друг от друга световых лучах, преломляющихся и отражающихся на границах сред с различными оптическими свойствами и прямолинейных в оптически однородной среде. **Физиологическая оптика** изучает закономерности восприятия света (видимого диапазона) человеческим глазом. После обнаружения терапевтического воздействия узкополосного светового излучения на организмы живых существ закономерности распространения света в тканях и его воздействия на биологические объекты также стали предметом изучения физиологической оптики. **Физическая оптика** рассматривает проблемы, связанные с природой света и световых явлений.

Оптическая физика объединяет вопросы геометрической, физиологической и физической оптики, связанные с общими закономерностями оптических явлений в природе, науке и технике и с их количественным описанием.

1 ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Оптическое излучение является результатом колебательных и волновых процессов, происходящих в материальных средах и при взаимодействии материальных частиц, причем его распространение происходит и в вакууме, когда материальная среда предполагается отсутствующей. Простейшей математической моделью колебательного процесса является *гармоническое колебание*

$$x(t) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right), \quad (1.1)$$

где функция $x(t)$ описывает временную зависимость отклонения колебательной системы от положения равновесия. Гармоническое колебание характеризуется *амплитудой* a_m и *фазой* $\omega t + \varphi_0$, показывающей состояние колебательного процесса в данный момент времени. *Угловая (круговая) частота* ω гармонического колебания измеряется в радианах в секунду (рад/с), а φ_0 определяет его начальную фазу. Период $T = 2\pi/\omega$ гармонического колебания (рисунок 1.1) связан с *частотой* f , измеряемой в герцах (Гц): $T = 1/f$.

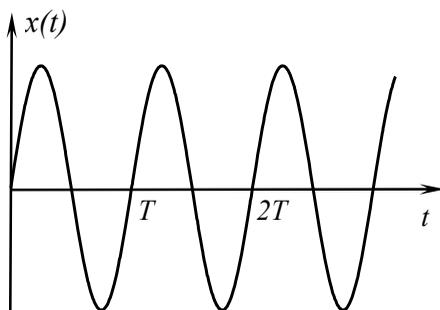


Рисунок 1.1 – Гармоническое колебание
для $\varphi_0 = -\pi/2$

Частота гармонических колебаний зависит от параметров колебательной системы. Например, для качелей она может составлять доли герца, для колебательных контуров радиоприемников – килогерцы и сотни мегагерц. Колебания атомов в молекулах могут происходить с частотами, превышающими терагерцы, а для электронных оболочек атомов вполне доступны частоты колебаний в 10^{15} Гц.

Колебания электрически заряженных частиц приводят к колебаниям электрического поля и возникновению переменного тока, который порождает переменное магнитное поле. Таким образом возникают **электромагнитные колебания**. Переменное во времени электромагнитное поле вызывает распространение в окружающем пространстве электромагнитных волн, во-первых, переносящих энергию, во-вторых, часто играющих роль носителей информации. В вакууме электромагнитные волны распространяются со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Для волны, порождаемой гармоническим колебанием, электромагнитное поле является периодическим с пространственным периодом $\lambda = cT = c/f$, называемым длиной волны.

Шкалу электромагнитных колебаний, т. е. область возможных значений их частот f (длин волн λ), разделяют на несколько диапазонов, перекрывающихся между собой. Часть этой шкалы, примыкающей к оптическому диапазону, показана на рисунке 1.2.

Диапазон радиоволн охватывает частоты от 3 кГц до 3 ТГц (длина волн от 100 км до 0,1 мм) и включает:

сверхдлинные волны	3–30 кГц, 100–10 км;
длинные волны	30–300 кГц, 10–1 км;
средние волны	0,3–3 МГц, 1000–100 м;
короткие	3–30 МГц, 100–10 м;
ультракороткие волны	30 МГц – 1 ТГц, 10 м – 0,3 мм.

Ультракороткие волны подразделяются на поддиапазоны метровых (30–300 МГц, 10–1 м), дециметровых (0,3–3 ГГц, 10–1 дм), сантиметровых (3–30 ГГц, 10–1 см), миллиметровых

(30–300 ГГц, 10–1 мм) и субмиллиметровых (0,3–3 ТГц, 1–0,1 мм) волн.

К оптическому диапазону относят излучение с длинами волн от 1 мм до 1 нм ($3 \cdot 10^{11}$ – $3 \cdot 10^{17}$ Гц); он подразделяется на инфракрасную (ИК), видимую и ультрафиолетовую (УФЛ) области (см. рисунок 1.2).

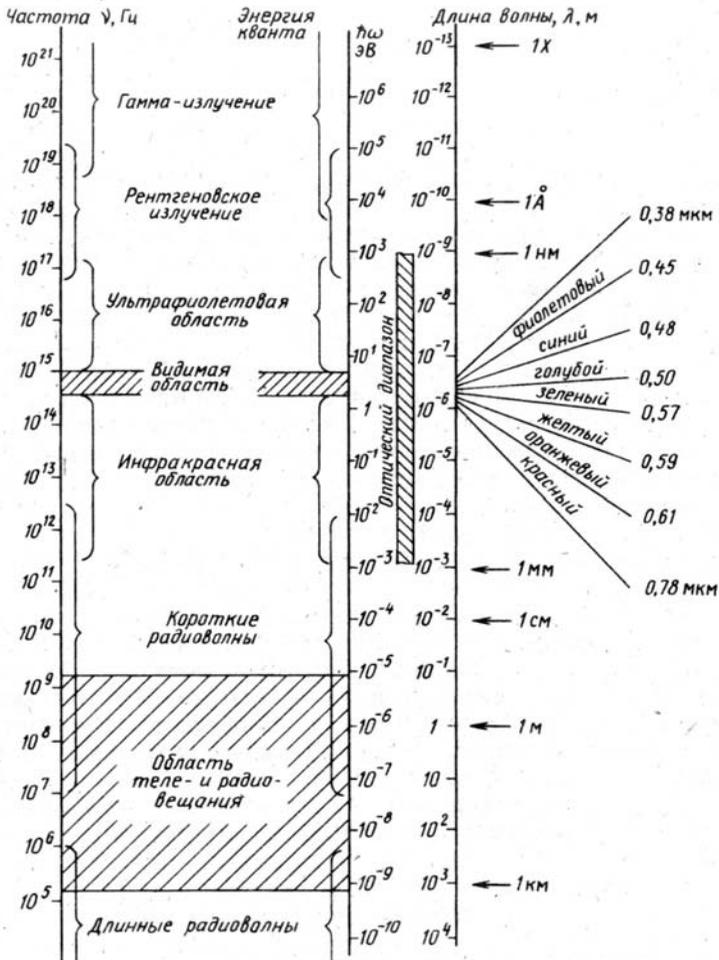


Рисунок 1.2 – Шкала электромагнитных колебаний

Видимому свету соответствует область длин волн от 0,78 до 0,38 мкм. Следует отметить, что в устройствах фотоники наряду с излучением оптического диапазона (носитель информации – фотоны) используется и более низкочастотное излучение. В частности, чтобы передать информацию в оптическом диапазоне, свет нужно промодулировать, т. е. наложить на него полезный сигнал, который, как правило, является электрическим. Пример – кодовые последовательности импульсов в компьютерных сетях, использующие не только фотоны, но и электроны, называемые оптоэлектронными. Другой пример – устройства хранения информации на оптических дисках. Считывание и запись информации осуществляется излучением полупроводникового лазера: в нем электрическая энергия, носителем которой являются электроны, преобразуется в оптическое излучение.

В связи с этим нас интересуют и электромагнитные колебания, и волны в целом, а не только относящиеся к оптическому диапазону. Кроме того, колебательные и волновые процессы различной природы имеют много общего и для их описания можно использовать универсальные математические модели.

2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

С колебательными и волновыми процессами мы встречаемся повсеместно. Колебания совершаются различными механическими маятниковыми системами; в природе наблюдаются смена дня и ночи, изменения численности хищных и травоядных животных в регионе и другие периодические процессы; в некоторых химических реакциях происходят колебания цвета реактивов. Особенно важную роль колебания играют в электронике и фотонике. Колебания совершаются в колебательном контуре, СВЧ-резонаторе, активном веществе лазера, кварцевом резонаторе часов. В газоразрядной и твердотельной плазме существуют плазменные колебания.

С колебаниями тесно связаны волновые процессы. Когда размеры колебательной системы d существенно превышают длину волны λ , колебания начинают происходить не только во времени, но и в пространстве. Мы переходим в этом случае от *сосредоточенных* колебательных систем к *распределенным* (от $\lambda \gg d$ к $\lambda \ll d$). Волны на воде, в воздухе, твердом теле – акустические, в плазме – плазменные. Особое место занимают *электромагнитные волны*, которые могут распространяться и в вакууме.

Нет необходимости изучать различные типы колебаний и волн в отдельности. Данный курс основан на том, что основные законы колебательных и волновых процессов, встречающихся в природе, физике, электронике и технике, одинаковы. Наша задача состоит в изучении колебательных и волновых процессов *с единой точки зрения*, принимающей во внимание наличие общих закономерностей данных процессов и общих методов их описания. Изучение конкретных видов колебаний и волн предусмотрено в последующих курсах.

2.1 Линейные колебания в системах с одной степенью свободы

2.1.1 Линейный осциллятор

Число независимых переменных величин, необходимых для полного описания процессов в системе, есть **число степеней свободы**. Рассмотрим малые колебания, которые консервативная механическая система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. В одномерном случае потенциальная энергия $U(x)$ вблизи положения равновесия x_0 представляет «**потенциальную яму**» (рисунок 2.1), в которую образно можно положить шарик (его моделью является **материальная точка**) и наблюдать за его колебаниями.

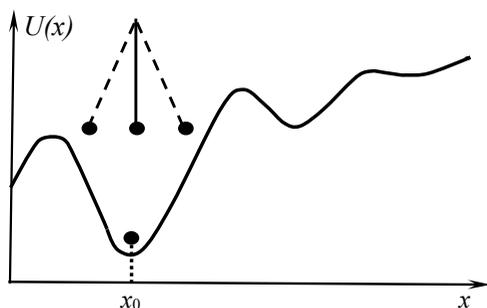


Рисунок 2.1 – Одномерное распределение потенциальной энергии в механической системе

Естественно, что любая механическая система может быть описана следующим образом: математический маятник, физический маятник, крутильный маятник; шарик от пинг-понга, отскакивающий от горизонтальной поверхности; двухатомная молекула и т. д.

Отклонение системы от положения равновесия с минимальной потенциальной энергией $U(x_0)$ приводит к возникновению возвращающей силы (рисунок 2.2):

$$F_v = -\frac{dU}{dx} x^0 = -\frac{dU}{dx} = -F_v x^0. \quad (2.1)$$

При малых отклонениях системы от положения равновесия можно разложить разность $U(x) - U(x_0)$ по степеням $x - x_0$ с помощью формулы Тейлора и сохранить в разложении первый не исчезающий член.

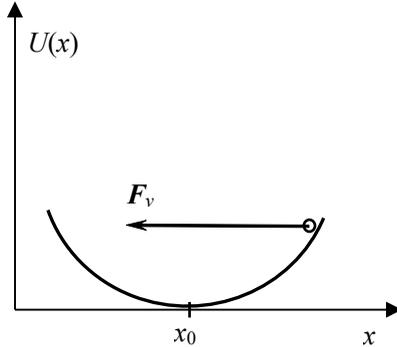


Рисунок 2.2 – Возвращающая сила F_v , действующая на материальную точку в потенциальной яме

Поскольку $dU/dx = 0$ при $x = x_0$, таковым является член второго порядка

$$U(x) - U(x_0) \cong \frac{k}{2}(x - x_0)^2, \quad (2.2)$$

где $k = U''(x_0)$ – положительный коэффициент, определяемый второй производной от функции $U(x)$ по x в точке $x = x_0$. В дальнейшем для простоты полагаем $U(x_0) = 0$ и $x_0 = 0$. В этом случае

$$U(x) = k \frac{x^2}{2}. \quad (2.3)$$

Кинетическая энергия такой системы с одной степенью свободы имеет вид

$$T(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (2.4)$$

где m – масса колеблющегося «шарика»; \dot{x} – первая производная по x .

Заметим, что колебательную систему, в которой потенциальная энергия описывается соотношением (2.3), называют **линейным** (или **гармоническим**) **осциллятором**.

Как найти уравнение движения линейного осциллятора? Можно воспользоваться вторым законом Ньютона

$$ma = F_v. \quad (2.5)$$

Учитывая, что ускорение при одномерном движении вдоль оси x составляет $a = x^0 \ddot{x}$ и используя соотношения (2.1) и (2.3), можно записать

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.6)$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Получаем, что одномерный линейный осциллятор описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения хорошо известно:

$$x(t) = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t), \quad (2.8)$$

где $p_{1,2} = \pm i\omega_0$ – корни характеристического уравнения

$$p^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (2.9)$$

Другой вид решения уравнения (2.7) позволяет описать колебательный процесс с помощью тригонометрических функций

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.10)$$

где $a_m = \sqrt{a^2 + b^2}$ – амплитуда колебаний; $\varphi_0 = -\arctg(b/a)$ – начальная фаза колебаний; аргумент косинуса $\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний; ω_0 – частота колебаний.

Как нам уже известно, такие колебания называются гармоническими.

Чем определяются параметры колебания ω_0 , A и B или ω_0 , a_m и φ_0 ? Согласно выражению $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ частота колебаний определяется только свойствами механической системы. Напротив, произвольные постоянные A и B , a_m и φ_0 определяются начальными условиями $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_2) = x_2$. Отметим, что независимость частоты ω_0 от начальных условий связана с малостью колебаний и называется *изохронностью*. При переходе к более высоким приближениям (большим амплитудам) колебания могут стать неизохронными, что будет показано в дальнейшем.

2.1.2 Затухающие колебания

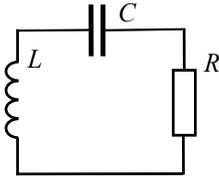


Рисунок 2.3 –
Последовательный
колебательный контур

Другой подход к описанию колебаний рассмотрим на примере электрических колебаний в последовательном колебательном контуре (рисунок 2.3).

Просуммируем напряжения на элементах контура, выражая их через заряд q :

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= 0, \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Преобразуем уравнение (2.11):

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.12)$$

где $\gamma = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

Обратим внимание, что при $R = 0$ получаем из выражения (2.12) уравнение свободных колебаний линейного осциллятора

(2.7). В этом случае колебания заряда в контуре (заряда емкости C) совершенно аналогичны механическим колебаниям малой амплитуды в консервативной системе. При $R \neq 0$ в системе возникают омические потери и она перестает быть консервативной.

Снова имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами – **уравнение свободных колебаний** (2.12). Его решение определяется выражением (2.8) при характеристическом уравнении

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (2.13)$$

Его корни

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.14)$$

являются комплексно-сопряженными при $\omega_0 > \gamma$ (рисунок 2.4):

$$p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.15)$$

В этом случае решение уравнения (2.12) имеет вид

$$q(t) = a_m \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.16)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Для $q(0) = 0$ решение $q(t)$ имеет вид, изображенный на рисунке 2.5.

Это затухающие колебания, близкие к гармоническим. Поэтому часто их называют **гармоническими затухающими колебаниями**. Это не совсем точно – такие колебания не являются в строгом смысле гармоническими. Они даже не являются периодическими, когда

$$q(t + nT) = q(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.17)$$

где T – период колебаний (рисунок 2.6).

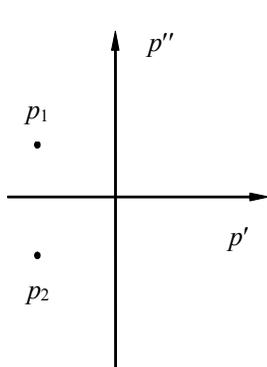


Рисунок 2.4 – Корни характеристического уравнения

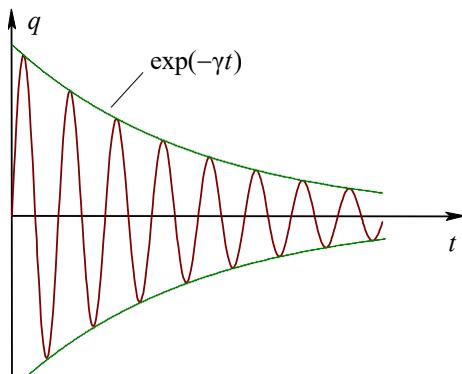


Рисунок 2.5 – Затухающие колебания электрического заряда

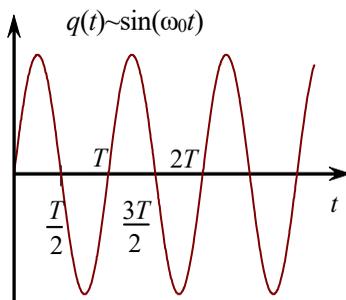


Рисунок 2.6 – Периодические гармонические колебания

Для гармонических колебаний вида (2.10), как отмечалось выше,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}, \quad (2.18)$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ – частота колебаний.

Как описать затухающие колебания в механической системе? Очевидно, также с помощью уравнения вида (2.12). Как можно ввести затухание? Обратимся к равенству (2.5), выражающему второй закон Ньютона. Какую силу нужно ввести

в уравнение (2.5), чтобы учесть потери? Обычно ее называют силой трения, и она пропорциональна скорости в первом неисчезающем члене разложения (на неподвижное тело сила трения не действует):

$$F_{\text{тр}} = -\alpha\dot{x}. \quad (2.19)$$

Итак, вводя силу трения в уравнение (2.5), получаем выражение для свободных колебаний

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.20)$$

где $\gamma = \alpha/2m$.

2.1.3 Вынужденные колебания

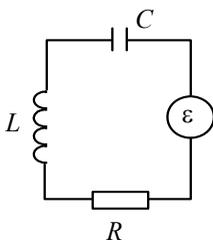


Рисунок 2.7 –
Последовательный
колебательный
контур с внешним
источником э.д.с.

Вынужденные колебания происходят в системе под действием внешней силы, которую также можно ввести в уравнение (2.20):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_i(t). \quad (2.21)$$

Это уравнение вынужденных колебаний является уже неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. В последовательном колебательном контуре вынуждающая сила $F_i(t) = \varepsilon(t)/L$ может быть учтена введением внешнего источника э.д.с. (рисунок 2.7).

2.1.4 Заключительные замечания

Заметим, что линейные колебательные системы с n степенями свободы описываются линейными дифференциальными уравнениями порядка $2n$.

В электронике большую роль играют нелинейные колебательные системы, которые содержат нелинейные элементы и описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В частности, все устройства, генерирующие электрические колебания, содержат нелинейные элементы наряду с колебательными системами.

В рассмотренном выше колебательном контуре (см. рисунок 2.7) собственная частота ω_0 является действительной величиной $\omega_0^2 > 0$, а $\gamma > 0$, т. е. положительна. Естественно предположить, что в общем случае собственные частоты могут быть и мнимыми, тогда $\omega_0^2 < 0$. Если вместо омических потерь в контур будет вноситься э.д.с., пропорциональная току контура, то мы получим «отрицательное сопротивление» R , что означает $\gamma < 0$. Поэтому не будем накладывать ограничений на ω_0 и γ в общем рассмотрении.

2.2 Изображение колебательных процессов в фазовом пространстве

Решение уравнения (2.20) хорошо известно и может быть легко получено как в общем случае, так и при отсутствии вынуждающей силы (свободные колебания) $F(t) = 0$; при отсутствии потерь, когда $\gamma = 0$. Однако большинство реальных колебательных систем описывается более сложными уравнениями. В этом случае аналитического решения уравнений колебаний можно и не получить. Мощным средством исследования нелинейных систем является анализ движений колебательной системы в фазовом пространстве. Для систем с одной степенью свободы оно вырождается в фазовую плоскость. Познакомимся подробнее с этим методом на примере *свободных колебаний в линейной системе*. Уравнение свободных колебаний найдем из (2.21):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.22)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t), \quad (2.23)$$

где p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0. \quad (2.24)$$

Отсюда находим

$$p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (2.25)$$

Единственное решение уравнения (2.22) определяется из начальных условий для $x(t_0)$ – координаты и $\dot{x}(t_0)$ – скорости.

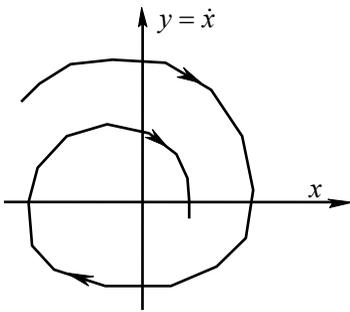


Рисунок 2.8 –
Фазовая траектория
на фазовой плоскости

В этом случае получаются два уравнения для двух произвольных постоянных A и B . Таким образом, динамическое состояние системы однозначно определено двумя переменными: координатой и скоростью. Представим себе декартову плоскость (x, y) , где по оси абсцисс откладывается координата x , а по оси ординат соответствующая x скорость – $\dot{x} = y$ (рисунок 2.8).

Точка с координатами $x(t)$, $y(t)$ называется **изображающей точкой**. Из уравнения колебаний (например, из (2.20)) можно получить уравнение, связывающее непосредственно x и y , – уравнение кривой, которую называют **фазовой траекторией**, или **интегральной кривой** на фазовой плоскости.

В частности, для уравнения (2.20) второго порядка запишем два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -(2\gamma y + \omega_0^2 x). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Перейдем отсюда к уравнению, не содержащему времени, разделив второе уравнение на первое:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\gamma y + \omega_0^2 x}{y}. \quad (2.27)$$

Решение этого уравнения $y = f(x, C)$, где C – константа, дает семейство фазовых траекторий. Такое семейство представляет все возможные процессы в данной системе.

В общем случае для любой системы с одной степенью свободы можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y = Q(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d^2x}{dt^2} = P(x, y), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где P и Q – известные функции от x и y .

Уравнение фазовых траекторий найдем из системы (2.28):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (2.29)$$

Если функция P/Q ограничена и однозначна в некоторой области плоскости (x, y) , то по теореме Коши при данных x и y есть только одно-единственное решение уравнения (2.29):

через такую точку проходит только одна фазовая траектория. В точках, где эти условия не выполняются, фазовые траектории могут пересекаться.

Состояния равновесия соответствуют нулевым значениям скорости $\dot{x} = y = 0$ и ускорения $\dot{y} = 0$. Из выражений (2.28) следует, что равновесие имеет место в точках x_0 и y_0 , где выполняются условия

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0. \quad (2.30)$$

В этих точках функция P/Q имеет неопределенное значение, поэтому они являются **особыми точками** дифференци-

ального уравнения фазовых траекторий (2.29). Отсюда следует: *состояния равновесия соответствуют особым точкам дифференциального уравнения фазовых траекторий.*

Состояние равновесия системы, описываемой уравнениями (2.28), имеет место при $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, т. е. в начале координат на фазовой плоскости. Точка $x_0 = 0, y_0 = 0$ является особой точкой и через нее может проходить несколько фазовых траекторий.

Отметим особенности движения изображающей точки по фазовой траектории во времени, облегчающие анализ картины кривых:

1) в верхней полуплоскости при $y > 0$ изображающая точка движется всегда вправо ($dx/dt > 0$);

2) в нижней полуплоскости ($y < 0$) точка всегда движется влево ($dx/dt < 0$);

3) фазовая траектория пересекает ось абсцисс $y = 0$ всегда под прямым углом ($dy/dx = \infty = \operatorname{tg} \alpha$), и эта точка пересечения не может быть точкой перегиба.

Рассмотрим ниже конкретные примеры фазовых траекторий.

2.2.1 Фазовый портрет гармонических колебаний

Для получения уравнения гармонического осциллятора нужно в равенстве (2.22) принять $\gamma = 0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня на комплексной плоскости (рисунок 2.9): $p = p' + ip''$, $p = \pm i\omega_0$. Решение этого уравнения вам хорошо известно как гармоническое колебание: $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Для $x(0) = 0$ временная зависимость $x(t)$ представлена на рисунке 2.10.

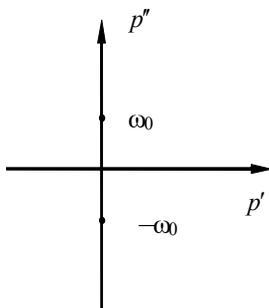


Рисунок 2.9 – Корни характеристического уравнения

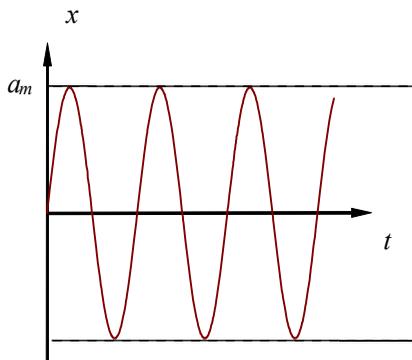


Рисунок 2.10 – Гармонические колебания

Уравнение фазовых траекторий при $\gamma = 0$ находим из формулы (2.27):

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (2.31)$$

Интегрируя (2.31), получаем:

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 = C. \quad (2.32)$$

Видим, что фазовый портрет гармонических колебаний есть семейство эллипсов с центром в начале координат – *особой точке* (рисунок 2.11). Легко заметить, что константа C имеет смысл квадрата скорости v^2 в точке $x = 0$:

$$\frac{y^2}{v^2} + \frac{x^2}{v^2/\omega_0^2} = 1. \quad (2.33)$$

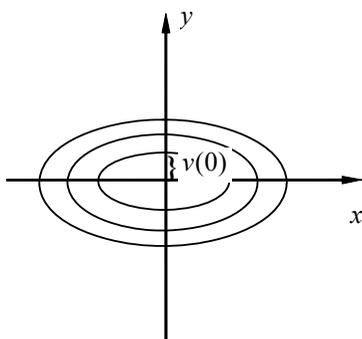


Рисунок 2.11 – Фазовый портрет гармонических колебаний

Время, за которое изображающая точка обходит эллипс, равно периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ и одинаково для всех эллипсов. Состояние равновесия имеет место при $x_0 = 0$,

$y_0 = 0$; соответствующая ему особая точка называется **центром**.

2.2.2 Фазовый портрет системы с мнимыми собственными частотами ($\omega_0^2 < 0$)

Если возвращающая сила имеет то же направление, что и сила инерции, то уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{x} - |\omega_0^2| x = 0. \quad (2.34)$$

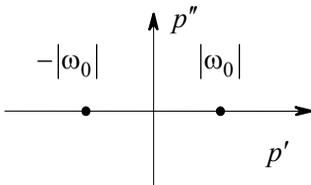


Рисунок 2.12 – Корни характеристического уравнения

Характеристическое уравнение имеет корни $p_{1,2} = \pm |\omega_0|$ (рисунок 2.12). Для начального условия $x(0) = 0$ решение (2.34) имеет вид

$$x = a \operatorname{sh}(\omega_0 t) \quad (2.35)$$

и является неустойчивым, экспоненциально нарастая при $t \rightarrow \infty$.

Из выражения (2.34) находим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = |\omega_0^2| \frac{x}{y}. \quad (2.36)$$

Интегрирование выражения (2.36) дает уравнение фазовых траекторий

$$y^2 - |\omega_0|^2 x^2 = C. \quad (2.37)$$

Отсюда при $C = 0$ следуют уравнения двух прямых

$$y = \pm |\omega_0| x, \quad (2.38)$$

называемых **сепаратрисами**. Остальные фазовые траектории около особой точки будут гиперболами (рисунок 2.13). Кривые E_1 соответствуют движениям, не доходящим до состояния равновесия. Кривые E_3 и E_4 соответствуют движениям, когда

система проходит положение равновесия и далее продолжает движение в том же направлении. Кривая E_3 разделяет эти две области с различным характером движения (сепарирует). Особая точка, соответствующая неустойчивому положению равновесия в этом случае, называется *седлом*.

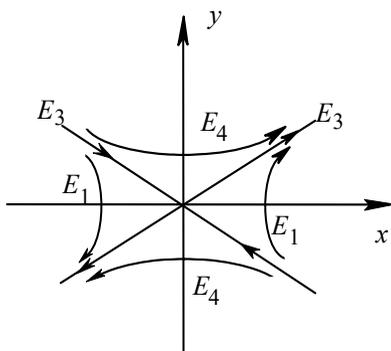


Рисунок 2.13 – Фазовый портрет системы с мнимыми собственными частотами

2.2.3 Фазовые траектории затухающих и нарастающих колебаний

При наличии потерь $\gamma > 0$ и характеристическое уравнение имеет два корня в левой полуплоскости (рисунок 2.14). Однако характер колебаний будет зависеть от соотношения между ω_0 и γ . Для $\omega_0 > \gamma$ решение уравнения (2.22) имеет вид *затухающих гармонических колебаний*:

$$x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.39)$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Для $x(0) = 0$ функция $x(t)$ представлена на рисунке 2.15.

Уравнение фазовых траекторий имеет вид (2.27). Очевидно, что при малом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, фазовый портрет

здесь должен быть близок к таковому для гармонического колебания.

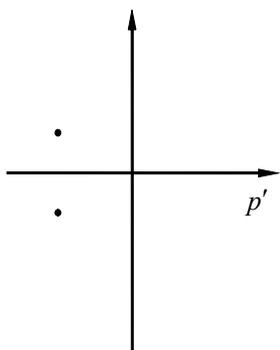


Рисунок 2.14 – Корни характеристического уравнения

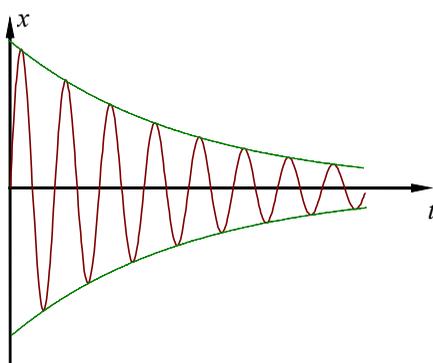


Рисунок 2.15 – Затухающие гармонические колебания

Однако система должна стремиться к состоянию равновесия: $x = 0$, $y = 0$. Поэтому фазовый портрет представляет для затухающего колебания скручивающуюся спираль почти эллиптической формы (рисунок 2.16).

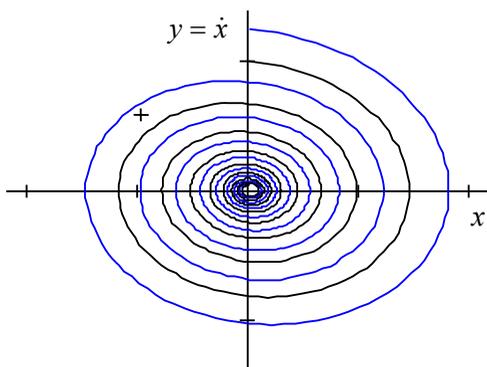


Рисунок 2.16 – Фазовый портрет затухающих колебаний

При пересечении оси ординат ($x = 0$) из выражения (2.27) находим, что наклон всех траекторий одинаков, т. е. $dy/dx = -2\gamma$. Как уже отмечалось выше, ось абсцисс при $y = 0$ пересекается фазовыми траекториями под прямым углом. Из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается к состоянию равновесия. Если начертим на фазовой плоскости одну спираль, то все остальные, не пересекаясь, будут вливаться в нее. Особая точка такого типа называется **устойчивым фокусом**.

Если потери велики ($\gamma > \omega_0$), характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня в левой полуплоскости. Решение для $x(t)$ будет аperiodическим:

$$x(t) = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t).$$

Система здесь может не более одного раза пройти через состояние равновесия, далее возвращаясь к нему. Характерные зависимости $x(t)$ для этого случая представлены на рисунке 2.17. Фазовый портрет такого аperiodического процесса имеет вид, показанный на рисунке 2.18. Особая точка в начале координат в этом случае носит название **устойчивого узла**.

Линейная колебательная система характеризуется только двумя параметрами: ω_0 и γ . При увеличении γ от нуля происходит следующая трансформация фазовой картины и особых точек: $\gamma = 0$ – центр; $0 < \gamma < \omega_0$ – устойчивый фокус; $\gamma > \omega_0$ – устойчивый узел.

Мы рассмотрели здесь колебания в системе с потерями. Если же потери будут отрицательными, как изменится картина колебаний и ее фазовый портрет?

Для малого отрицательного $|\gamma| \ll \omega_0$:

– корни характеристического уравнения будут расположены в правой полуплоскости (рисунок 2.19);

– колебания будут нарастающими гармоническими (рисунок 2.20);

– изображающая точка будет двигаться от равновесного положения по спиральной траектории (рисунок 2.21).

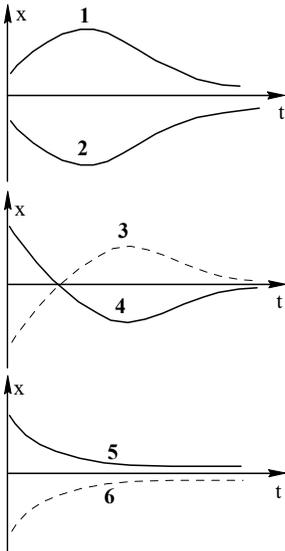


Рисунок 2.17 – Эволюция отклонения от положения равновесия в системе с большими потерями при различных начальных условиях

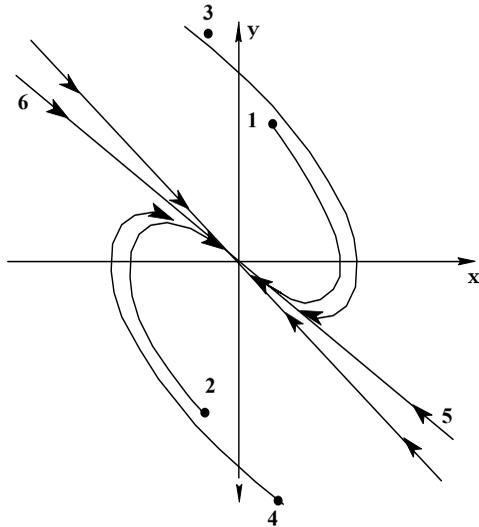


Рисунок 2.18 – Фазовый портрет аperiodического процесса

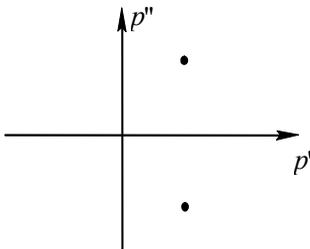


Рисунок 2.19 – Корни характеристического уравнения при отрицательных потерях

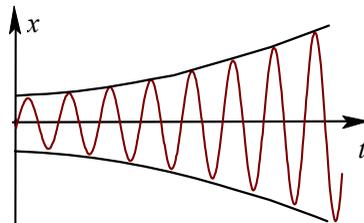


Рисунок 2.20 – Нарастающие колебания, близкие к гармоническим

Особая точка в этом случае называется **неустойчивым фокусом**. При большом отрицательном затухании $|\gamma| > \omega_0$ движение будет происходить из **неустойчивого узла** (рисунок 2.22), а корни характеристического уравнения будут расположены на положительной части действительной оси (рисунок 2.23).

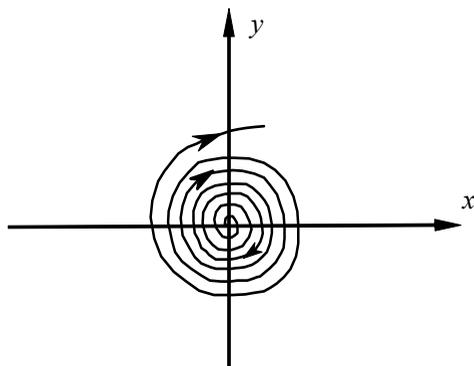


Рисунок 2.21 – Фазовый портрет при малом отрицательном затухании

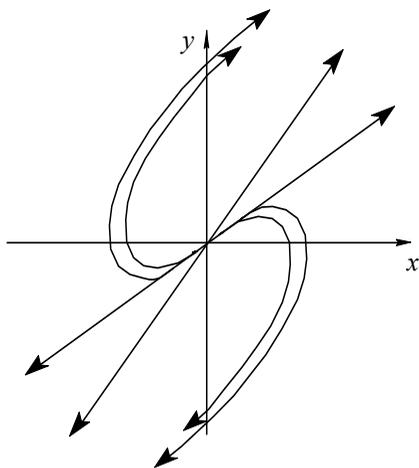


Рисунок 2.22 – Фазовый портрет при большом отрицательном затухании

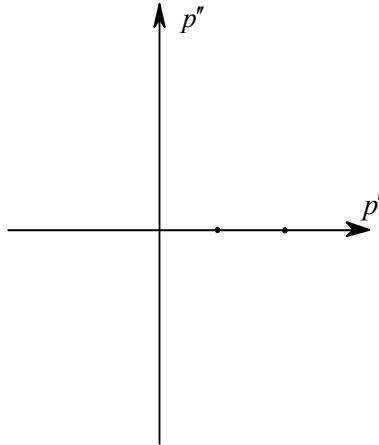


Рисунок 2.23 – Корни характеристического уравнения при большом отрицательном затухании

Таким образом, мы рассмотрели все возможные варианты решения уравнения свободных колебаний в системе с одной степенью свободы. Эти результаты наглядно представлены на рисунке 2.24.

Отметим, что устойчивые колебания имеют место только в первом квадранте, где корни характеристического уравнения имеют только отрицательную действительную часть. В более общем случае линейных систем с n степенями свободы это правило также остается справедливым:

т. е. линейная колебательная система является устойчивой, если корни ее характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть.

Важность этого правила состоит в том, что исследования колебательной системы на устойчивость можно осуществить и без решения соответствующего ей дифференциального уравнения.

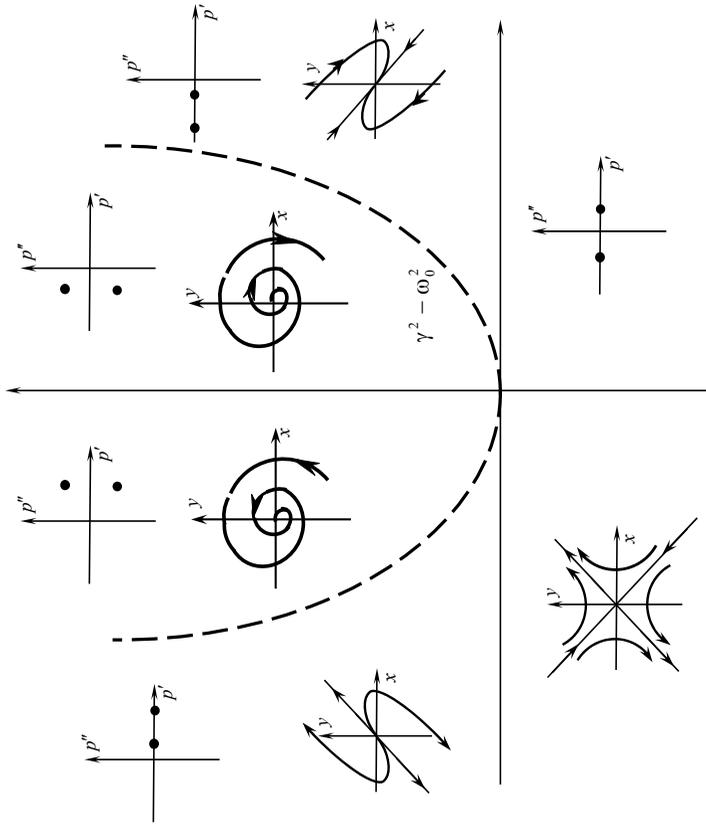


Рисунок 2.24 – Возможные виды решений общего уравнения свободных колебаний в колебательных системах с одной степенью свободы в зависимости от ее параметров 2γ и ω_0^2

2.2.4 Собственные колебания нелинейной консервативной системы

До сих пор мы анализировали поведение линейных колебательных систем. Для нелинейных систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, этот анализ представляет большие сложности. Обычно в каждом частном «нелинейном» случае приходится применять специальный прием.

Рассмотрим консервативную колебательную систему с нелинейной зависимостью возвращающей силы от смещения, но не зависящей от скорости. Общий вид уравнения в этом случае легко может быть получен в виде

$$m\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (2.40)$$

В качестве примера можно привести движение электрона в периодическом поле:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kx, \quad (2.41)$$

где $k = 2\pi/\Lambda$; Λ – период изменения поля. Такой вид имеет, например, поле голографической решетки при диффузионном механизме ее записи в фоторефрактивных кристаллах.

Другой пример – поле в движущейся системе координат, связанной с электроном и замедленной электромагнитной волной (ускорители и лампы бегущей волны).

Возвращающая сила, действующая на электрон, является кулоновской силой:

$$F_x = -eE_x = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 k \sin kx, \quad (2.42)$$

откуда следует уравнение колебаний

$$m\ddot{x} + e\varphi_0 k \sin kx = 0. \quad (2.43)$$

Заметим, что при малых по сравнению с периодом поля Λ отклонениях x , когда $\sin kx \cong kx$, уравнение (2.43) описывает

линейные колебания электрона $m\ddot{x} + e\varphi_0 k^2 x = 0$, совершаемые с частотой $\omega_0 = (2\pi/\Lambda)\sqrt{e\varphi_0/m}$.

Вернемся к уравнению (2.40). В консервативной системе энергия остается постоянной, поэтому удобно вести рассмотрение с помощью фазовой плоскости.

Так как каждая фазовая траектория соответствует определенной величине энергии системы, то из закона сохранения энергии можно получить уравнение фазовой траектории. Действительно, умножая выражение (2.40) на \dot{x} и интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(x)dx = E_0, \quad (2.44)$$

где E_0 – начальный запас кинетической энергии при $x = x_0$.

Потенциальная энергия системы в выражении (2.44) определяется интегралом

$$U(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + U(x_0). \quad (2.45)$$

Вводя величину $E = E_0 + U(x_0)$ – начальный запас полной энергии системы, уравнение (2.44) перепишем в виде

$$y = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}. \quad (2.46)$$

Выражения (2.44) и (2.46) являются уравнением траектории системы на фазовой плоскости, поскольку дают зависимость y от x .

Если для зависимости $U(x)$ данной системы известно аналитическое выражение или она дана графически, то траекторию на фазовой плоскости можно легко построить. Например, для $f(x) = e\varphi_0 k \sin kx$ имеем

$$U(x) = -e\varphi_0 \cos kx = \int_{x_0}^x e\varphi_0 k \sin kx dx + U(x_0); \quad (2.47)$$

$$y^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2e\varphi_0 \cos kx}{m}.$$

В нашем случае

$$E = E_0 + U(x_0) = -e\varphi_0 + E_0;$$

$$y^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{2e\varphi_0}{m}(1 - \cos kx),$$

а функция $U(x)$ в интервале $x = [-\Lambda/2, \Lambda/2]$ имеет вид, иллюстрируемый рисунком 2.25.

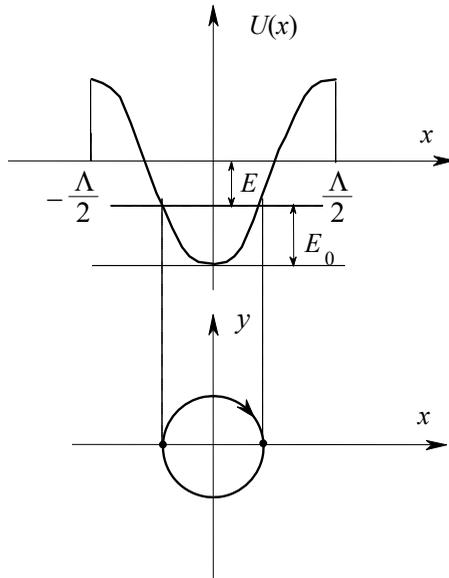


Рисунок 2.25 – Вид потенциальной энергии системы (вверху) и фазовой траектории (внизу)

Придавая E_0 определенные значения, из рисунка 2.25 легко найти положения изображающей точки, при которых $E = U(x)$

и $y = 0$. Если изобразить графики $U(x)/m$ в масштабе с y , то по рисунку 2.25 можно построить фазовую траекторию графическим методом.

Уравнение (2.46) позволяет определить и период колебаний в такой консервативной системе. Перепишем его в виде

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}. \quad (2.48)$$

Половина периода колебаний $T/2$ может быть найдена путем интегрирования (2.48), с учетом того что он определяется временем прохода системы от одного крайнего положения x_1 до другого крайнего положения x_2 :

$$\frac{1}{2}T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}. \quad (2.49)$$

Величины x_1 и x_2 получаются из условия $y(E) = 0$. В частности, для рассматриваемого конкретного примера из соотношений (2.47) находим:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{k} \operatorname{Arccos} \left[1 - \frac{E_0}{e\varphi_0} \right] = \pm \frac{1}{k} \operatorname{Arccos} \left(-\frac{E}{e\varphi_0} \right),$$

$$\frac{1}{2}T = \int_{-\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{E_0}{e\varphi_0} \right)}^{\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{Arccos} \left(1 - \frac{E_0}{e\varphi_0} \right)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E_0 - e\varphi_0 (1 - \cos kx)]}}. \quad (2.50)$$

Из формул (2.49) и (2.50) видно, что в общем случае период колебаний (и частота ω_0) зависит от начальной энергии (т. е. от амплитуды колебаний). Поэтому в нелинейной системе в общем случае понятие собственной частоты колебаний теряет смысл.

Зависимость частоты колебаний нелинейной консервативной системы от начальных условий называется *неизохронностью собственных колебаний системы*.

3 ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА

Электромагнитные поля и волны – важнейший физический объект как для фотоники и оптоинформатики, так и для квантовой и оптической электроники. В данном разделе представлены методы описания таких полей и волн в неограниченных диэлектрических средах.

3.1 Основные уравнения для классических электромагнитных полей

В данном подразделе рассмотрены уравнения, которые описывают распространение электромагнитного излучения в среде и на границах раздела двух или нескольких сред, а также приведены соотношения, учитывающие взаимодействие электромагнитного поля с веществом.

3.1 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнениями Максвелла в дифференциальной форме являются:

– следствие закона Ампера, *закона полного тока*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_{\text{compl}}; \quad (3.1)$$

– обобщение *закона электромагнитной индукции Фарадея*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3.2)$$

– заключение об электрическом поле, которое может иметь стоки и истоки, являющиеся электрическими зарядами с объемной плотностью ρ :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (3.3)$$

– заключение о непрерывности векторных линий магнитного поля, которое не имеет стоков и истоков, т. е. магнитные заряды в природе отсутствуют:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.4)$$

В рамках классической электродинамики эти уравнения для векторов напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей и векторов электрической \vec{D} и магнитной \vec{B} индукций являются строгими.

3.1.2 Материальные уравнения

Материальные уравнения учитывают влияние материальной среды на связь между векторами поля. В обычных случаях используют идеализированные модели среды. В линейном приближении для изотропных сред, если можно пренебречь дисперсией, имеем:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.6)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Ф/м; $\mu = \mu_r \mu_0$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды ε и μ здесь являются скалярными величинами, а векторы \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} параллельны друг другу. Кроме того, такая связь между векторами является *локальной*, т. е. значение вектора \vec{D} в данный момент времени t' в данной точке пространства \vec{r}' определяется значениями \vec{E} для тех же t' и \vec{r}' .

Как известно, полный ток состоит из четырех составляющих:

$$\vec{\delta}_{\text{compl}} = \vec{\delta}_{\text{cond}} + \vec{\delta}_{\text{disp}} + \vec{\delta}_{\text{transf}} + \vec{\delta}_{\text{extr}}, \quad (3.7)$$

где плотности токов определяются следующими выражениями:

1) для тока проводимости (закон Ома в дифференциальной форме)

$$\vec{\delta}_{\text{cond}} = \sigma \vec{E}; \quad (3.8)$$

2) для тока смещения

$$\vec{\delta}_{\text{disp}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (3.9)$$

3) для тока переноса

$$\vec{\delta}_{\text{transf}} = \rho \vec{v}, \quad (3.10)$$

где σ – проводимость среды; $\vec{\delta}_{\text{cond}}$ – плотность тока проводимости; \vec{v} – скорость движения свободных зарядов.

Сторонний ток с плотностью $\vec{\delta}_{\text{extr}}$ задается внешними источниками. Его роль может играть, например, диффузионный ток, созданный вследствие неоднородности распределения объемного заряда ρ . Такое распределение может быть получено при фотовозбуждении носителей заряда световым пучком в зону проводимости или при бомбардировке электронным пучком поверхности диэлектрика.

3.1.3 Граничные условия

Уравнения Максвелла пригодны в представленном виде для областей пространства, в пределах которых физические свойства среды (ϵ , μ и др.) непрерывны.

На границах раздела сред I и II с различающимися материальными параметрами имеют место граничные условия:

$$E_{\tau}^I - E_{\tau}^{II} = 0; \quad (3.11)$$

$$D_n^I - D_n^{II} = \xi; \quad (3.12)$$

$$B_n^I - B_n^{II} = 0; \quad (3.13)$$

$$H_{\tau}^I - H_{\tau}^{II} = \eta. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.11) и (3.13) свидетельствуют о том, что тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля E_{τ} и нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n при переходе через границу раздела меняются непрерывно.

Из выражения (3.12) следует, что в данном случае нормальная составляющая вектора электрической индукции D_n изменится на величину поверхностной плотности заряда ξ .

В соответствии с разностью (3.14) тангенциальная компонента вектора магнитной напряженности испытывает скачок на величину поверхностной плотности тока η . Необходимо учитывать, что векторы \vec{H}_{τ}^I и \vec{H}_{τ}^{II} ортогональны к направлению тока, текущего по границе раздела.

Уравнения (3.12) и (3.13) выводятся на основании теоремы Гаусса, (3.11) и (3.14) – на основе применения теоремы Стокса к уравнениям Максвелла. Доказательства этих соотношений можно выполнить самостоятельно или найти в литературе (например, в [1]).

3.2 Волновое уравнение. Плоские монохроматические волны

Определенное преобразование уравнений Максвелла, представляющих собой систему дифференциальных уравнений в частных производных и рассмотренных выше в подразд. 3.1, позволяет получить дифференциальные уравнения для электромагнитного поля. Решение этих уравнений, как будет показано ниже, может быть представлено в виде плоских волн.

3.2.1 Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды

Рассмотрим немагнитную однородную среду, являющуюся непроводящей, в которой также отсутствуют сторонние токи и заряды. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (3.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.18)$$

Первые два уравнения в данном случае образуют замкнутую систему, причем одну из величин, характеризующих поле, можно отсюда исключить. Как это сделать? Применим к уравнению (3.16) операцию rot и используем уравнение (3.15):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \quad (3.19)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Используя далее соотношение $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ и уравнение (3.17), получаем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.20)$$

Аналогично можно найти уравнение и для \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.21)$$

Данные уравнения называются волновыми, как и уравнение (3.19), которое является более общим, чем уравнения (3.20) и

(3.21), и справедливым также для анизотропной среды, где условие $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ выполняется не всегда.

3.2.2 Одномерное волновое уравнение

Рассмотрим среду, в которой поле зависит только от координаты z . Из соотношения (3.20) получаем одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$

Отметим, что в данном случае из равенства (3.17) получается уравнение $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, откуда следует $E_z = \text{const}$. Такие решения нас не интересуют, и можно положить $E_z = 0$, т. е. вектор \vec{E} колеблется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и может быть представлен в виде

$$\vec{E} = \vec{e} \cdot E_t, \quad (3.23)$$

где \vec{e} – единичный вектор в плоскости xy , $E_t = |\vec{E}|$.

Перепишем уравнение (3.22) с учетом (3.23) в виде скалярного одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0. \quad (3.24)$$

3.2.3 Плоские скалярные волны

Общее решение уравнения (3.24) представляет плоскую скалярную волну вида

$$E_t(z, t) = E_{t1} \left(t - \frac{z}{v} \right) + E_{t2} \left(t + \frac{z}{v} \right), \quad (3.25)$$

где $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ – скорость распространения волны вдоль оси z . Как представить себе такую волну? Предположим, что при

$z = 0$ имеем источник поля, напряженность которого изменяется по закону $E_1(t)$, в общем случае произвольному. Тогда в области $z > 0$ имеем

$$E_t(z, t) = E_t\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad (3.26)$$

поскольку граничное условие (3.15) требует непрерывности тангенциальных компонент вектора \vec{E} . Это формальная сторона. А физическая сторона? Мы имеем при $z > 0$ распространение сигнала вдоль оси z . Скорость распространения определяется соотношением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c}{n}, \quad (3.27)$$

где $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды.

3.2.4 Гармонические волны

Рассмотрим сигнал, заданный при $z = 0$, в виде

$$\begin{aligned} E(t) &= E_m \cos(\omega t + \psi) = \\ &= \frac{E_m}{2} \left\{ \exp[i(\omega t + \psi)] + \exp[-i(\omega t + \psi)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ему будут соответствовать гармонические плоские волны

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}z + \psi\right), \quad z \geq 0, \\ E(z, t) &= E_m \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}z + \psi\right), \quad z \leq 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

распространяющиеся вдоль направлений $+z$ и $-z$.

Мгновенное значение $E(z, t)$ электрического поля в каждый момент времени и в каждой точке пространства определяется **амплитудой** E_m плоской волны и **фазой**

$$\varphi(z, t) = \omega t \mp kz + \psi. \quad (3.30)$$

Если амплитуда E_m не зависит от координат x, y , то волна будет *однородной*. Здесь через $k = \frac{\omega}{v}$ обозначаем **волновое число**

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}. \quad (3.31)$$

Геометрическое место точек, в которых фаза волны остается постоянной

$$\varphi = \omega t \mp kz + \psi = \text{const}, \quad (3.32)$$

называют **фазовым** или **волновым фронтом**. Для некоторого момента времени t' фазовый фронт рассматриваемой нами волны является плоскостью, перпендикулярной оси z . При изменении времени на Δt фазовый фронт волны сдвигается в

пространстве на расстояние Δz . Отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v$ определяет **фазовую скорость волны** – скорость движения фазового

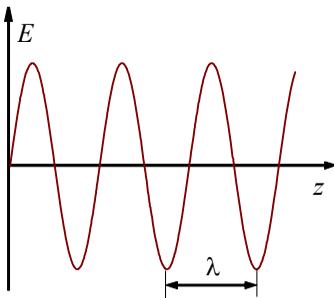


Рисунок 3.1 – Поле гармонической волны

фронта в пространстве, в данном случае вдоль оси z . Как изменяется поле плоской гармонической волны в фиксированный момент времени в пространстве? Очевидно, по косинусоидальному закону (рисунок 3.1).

Периодичность изменения поля в пространстве задается волновым числом k . Изменение фазы волны в пространстве на 2π соответствует прохождению волной расстояния λ : $\Delta\varphi = 2\pi = k\lambda$. Отсюда получаем соотношения:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.33)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{fn}, \quad (3.34)$$

где f – частота волны, Гц.

3.2.5 Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Мы рассматривали выше волну, распространяющуюся вдоль оси z . Для волны в произвольном направлении необходимо использование более общего волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Запишем сразу гармоническую плоскую волну, которая удовлетворяет данному уравнению:

$$E_t(\vec{r}, t) = E_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (3.36)$$

Здесь для простоты считаем начальную фазу колебаний равной нулю ($\psi_0 = 0$) и вводим волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{n} \frac{\omega}{v} = \vec{n} \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} (\vec{i}n_x + \vec{j}n_y + \vec{k}^0 n_z), \quad (3.37)$$

где \vec{n} – единичный вектор волновой нормали.

Подставим выражение для $E_t(\vec{r}, t)$ в систему (3.35):

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) E_t - \mu\varepsilon \omega^2 E_t &= 0, \\ \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \mu\varepsilon \omega^2 \right) E_t = 0; \quad (k^2 - \mu\varepsilon \omega^2) E_t &= 0; \\ \left(\frac{1}{v^2} - \mu\varepsilon \right) E_t &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из уравнений (3.38) следует, что для $E_t \neq 0$ должно выполняться условие

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega^2. \quad (3.39)$$

Зависимость $k(\omega)$ называется дисперсионной зависимостью, а уравнение

$$k(\omega) = 0 - \quad (3.40)$$

дисперсионным уравнением:

В данном случае монохроматических волн имеем:

$$k^2 - \mu \varepsilon \omega^2 = 0; \quad k^2 - \mu_r \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (3.41)$$

$$k = n \frac{\omega}{c}.$$

В общем случае показатель преломления зависит от частоты (явление дисперсии), что необходимо учесть в соотношении для волнового числа:

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (3.42)$$

3.2.6 Электромагнитные плоские волны

В общем случае решение для плоской монохроматической однородной волны имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) = \frac{\vec{E}_m}{2} \left\{ \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right] + \right. \\ \left. + \exp\left[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right] \right\} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] + c.c., \quad (3.43) \end{aligned}$$

где $\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m \exp(i\psi_0)$; *c.c.* – комплексно-сопряженная функция к первому слагаемому.

Нетрудно заметить, что функции $\exp\left[\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi_0) \right]$ также являются решениями волнового уравнения. Величина

$\dot{\vec{E}}_m$ – комплексная векторная амплитуда волны. Поскольку работать с экспонентами очень удобно, то принято пользоваться понятием комплексной формы записи для гармонических плоских волн

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right], \quad (3.44)$$

опуская множитель $1/2$ и комплексно-сопряженное слагаемое.

Нужно понимать, что *это выражение справедливо только формально*. Истинное значение электрического поля будет определяться выражением

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]\right\}. \quad (3.45)$$

Во многих случаях, когда мы имеем дело с линейными функциями от \vec{E} , этот подход дает одинаковые результаты с подходом, при котором используются тригонометрические функции. Исключение составляют случаи, когда необходимо вычислить произведения или степени (например, при расчетах интенсивности или вектора Пойнтинга).

В чем же достоинство комплексного метода? Найдем производную по времени от напряженности поля плоской гармонической волны:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]\right\} = i\omega \dot{\vec{E}}_m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right].$$

Таким образом, операции дифференцирования по t соответствует умножение на $i\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega. \quad (3.46)$$

Нетрудно показать, что действие оператором ∇ на $\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ аналогично действию на нее оператором $-i\vec{k}$:

$$\nabla \cdot \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \dot{\vec{E}} = \text{div} \dot{\vec{E}}; \quad (3.47)$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \times \dot{\vec{E}} = \text{rot} \dot{\vec{E}}. \quad (3.48)$$

С учетом записанных соотношений представим уравнения Максвелла, которые применялись при описании волновых процессов в изотропной непроводящей среде в отсутствие сторонних токов и зарядов, в новой форме:

$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{\delta}_{\text{compl}}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{D} &= \rho, \\ \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \rightarrow \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\vec{k} \times \vec{H} &= \omega \vec{D}, \\ +\vec{k} \times \vec{E} &= +\omega \vec{B}, \\ \rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{D} &= 0, \\ -i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$
<p>Общий вариант уравнений Максвелла</p>	<p>Уравнения Максвелла в операторной форме для $\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{\text{extr}} = 0$</p>	<p>Уравнения Максвелла для плоских гармонических волн ($\sigma = 0$, $\rho = 0$, $\vec{\delta}_{\text{extr}} = 0$)</p>

С учетом материальных уравнений (3.5) и (3.6) – $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ – из последней системы получаем

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \vec{E}, \quad (3.49)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}, \quad (3.50)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.51)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0. \quad (3.52)$$

Отсюда следуют важные **выводы о структуре полей в плоской электромагнитной волне.**

1. Из первого уравнения – $\vec{E} \perp \vec{k}$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$.
2. Из второго уравнения – $\vec{H} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{E}$, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую систему координат.
3. Третье и четвертое уравнения также свидетельствуют о поперечности полей \vec{E} и \vec{H} .

$$4. \quad |\vec{k} \times \vec{H}| = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} H_m = \omega \varepsilon E_m \left(|\vec{k} \times \vec{H}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{H}| \sin(\vec{k} \wedge \vec{H}) \right),$$

$$H_m = \frac{E_m}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{E_m}{W}. \quad (3.53)$$

Величина $W = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ имеет размерность [Ом] и называется волновым сопротивлением среды. Напомним, что размерность H – А/м; E – В/м. Для вакуума получаем:

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}. \quad (3.54)$$

Итак, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} в плоской волне можно изобразить следующим образом для фиксированного момента времени t (рисунок 3.2). В общем случае в зависимости от вида поляризации (линейная, круговая, эллиптическая) векторы \vec{E} и \vec{H} могут синхронно изменять свое положение.

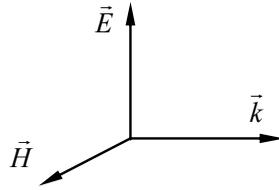


Рисунок 3.2 – Ориентация векторов в плоской электромагнитной волне

3.3 Поляризация плоских электромагнитных волн

Поле с векторами \vec{E} и \vec{H} , направление которых может быть определено в любой момент времени, называют **поляризованным**. При случайных направлениях \vec{E} и \vec{H} в пространстве поле является **неполяризованным** (солнечный свет и т. д.).

Плоскость поляризации проходит через вектор \vec{E} и направление распространения волны. Различают **линейную**, **эллиптическую** и **круговую** (правую и левую) поляризации в зависимости от фигуры, которую описывает конец вектора \vec{E} при распространении волны. Математически волну с произ-

вольным видом поляризации представляют в виде двух составляющих:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \vec{i}E_{1m} \cos(\omega t - kz), \\ \vec{E}_y &= \vec{j}E_{2m} \cos(\omega t - kz - \varphi),\end{aligned}\quad (3.55)$$

сдвинутых по фазе и имеющих различные амплитуды в общем случае. Для плоскости $z = 0$ имеем

$$\frac{E_x}{E_{1m}} = \cos \omega t, \quad \frac{E_y}{E_{2m}} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi, \quad (3.56)$$

откуда получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (3.57)$$

Если учесть, что $E_x \sim x$, $E_y \sim y$, то выражение (3.57) представляет уравнение эллипса. Поскольку $E_x \sim \cos \omega t$, конец вектора $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y$, $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ (рисунок 3.3) будет описывать эллиптическую траекторию за время $T = 2\pi/\omega$.

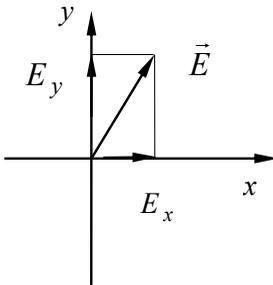


Рисунок 3.3 – Ориентация вектора поляризации в плоской электромагнитной волне

Рассмотрим характерные виды поляризации.

$$1. \quad \varphi = 0, \quad \frac{E_x}{E_{1m}} - \frac{E_y}{E_{2m}} = 0,$$

$$E_y = \frac{E_{2m}}{E_{1m}} E_x.$$

Это уравнение прямой, наклон которой к оси Ox определяется отношением E_{2m}/E_{1m} . Действительно, при синфазном изменении E_x

и $E_y \sim \cos \omega t$ синхронно изменяется и результирующий вектор \vec{E} . Легко видеть, что такая же по типу *линейная* поляризация имеет место и при $\varphi = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$2. \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с большой и малой полуосями, ориентированными точно по осям x и y . Направление вращения вектора \vec{E} определяется знаком φ . Вращение для $\varphi = -\pi/2$ – левое.

3. При $\varphi = \pm \pi/2$, $E_{1m} = E_{2m}$ имеем круговую поляризацию.

3.4 Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Как известно, в объеме V сосредоточен запас энергии электромагнитного поля

$$W = \int_V \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV. \quad (3.58)$$

Рассмотрим изменение энергии W во времени. Для этого перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta}_{\text{cond}} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

считая токи переноса и сторонние токи отсутствующими.

Умножим первое уравнение на \vec{E} , а второе – на \vec{H} скалярно и вычтем полученные результаты:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\delta}_{\text{cond}} \cdot \vec{E}. \quad (3.59)$$

Учитывая соотношения

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2),$$

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (H^2),$$

$$\vec{E} \cdot \text{rot } H - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

и интегрируя выражение (3.59) по объему, имеем

$$\begin{aligned} & \int_V (\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}]) dV = \\ & = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV - \int_V (\vec{\delta}_{\text{cond}} \cdot \vec{E}) dV. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Используя теорему Остроградского – Гаусса $\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ и вводя вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (3.61)$$

получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \int_V (\vec{\delta}_{\text{cond}} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.62)$$

Уравнение (3.62) выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Левая часть – полное изменение электромагнитной энергии в объеме V во времени. Первый член в правой части – поток вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую объем V ($\vec{\Pi}$ – плотность потока энергии через поверхность S в единицу времени). Второй член в правой части (3.62) – количество тепла, выделяющегося в проводящих частях объема V в единицу времени.

3.5 Усреднение по времени энергетических характеристик поля

Измерительные приборы, так же как и человеческий глаз, не могут воспринимать происходящие с большой частотой колебания электрического и магнитного полей световых волн. Все

средства производят измерения с помощью *операций усреднения* по конечному интервалу времени Δt и по конечному объему пространства ΔV . Будем полагать, что в пределах данного объема ΔV измеряемая величина $\vec{A}(\vec{r}, t)$ изменяется незначительно, и достаточно проводить усреднение только по времени, равному периоду колебаний T . В этом случае среднее за период колебания значение физической величины в точке с координатами $\vec{r} = \vec{r}_0$ определяется как

$$\langle \vec{A}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{A}(\vec{r}_0, t) dt. \quad (3.63)$$

Легко показать, что *для периодических* (в том числе и гармонических) *колебаний напряженности электрического поля*, определяемых, например, соотношением (3.43), *среднее значение равно нулю*: $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = 0$.

Однако измерительные приборы реагируют не на само поле, а на его энергетические характеристики: при каждом акте измерения должно поглощаться дискретное количество фотонов, каждый из которых имеет энергию $\hbar\omega$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Найдем среднее значение плотности электрической энергии в электромагнитном поле в случае его изменения во времени по гармоническому закону ($\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m(\vec{r}) \cos(\omega t + \psi)$):

$$\begin{aligned} \langle W_E \rangle &= \left\langle \varepsilon \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{\varepsilon}{2T} \int_0^T (\vec{E}_m \cdot \vec{E}_m) \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} t + \psi \right) dt = \frac{\varepsilon E_m^2}{4}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где $E_m = |\vec{E}_m|$.

Аналогично можно получить среднее значение плотности магнитной энергии в таком гармоническом во времени электромагнитном поле:

$$\langle W_M \rangle = \frac{\mu H_m^2}{4}, \quad (3.65)$$

где $H_m = |\vec{H}_m|$.

Отметим, что с помощью соотношения (3.53), связывающего амплитуды электрического и магнитного полей через волновое сопротивление среды, можно получить **равенство плотности электрической и магнитной энергии в плоской гармонической волне**:

$$\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle. \quad (3.66)$$

С учетом соотношения $\dot{A}_m \cdot \dot{A}_m^* = |\dot{A}_m|^2 = A_m^2$ плотности электрической и магнитной энергии могут выражаться через комплексные амплитуды полей $\dot{E}_m = \vec{E}_m \exp(i\psi_E)$ и $\dot{H}_m = \vec{H}_m \exp(i\psi_M)$ в следующем виде:

$$\langle W_E \rangle = \frac{\varepsilon (\dot{E}_m \cdot \dot{E}_m^*)}{4}, \quad (3.67)$$

$$\langle W_M \rangle = \frac{\mu (\dot{H}_m \cdot \dot{H}_m^*)}{4}. \quad (3.68)$$

Выразим через комплексные амплитуды электрического поля и магнитного поля, фазы которых ψ_E и ψ_M в точке \vec{r} в общем случае могут не совпадать, среднее значение вектора Пойнтинга для гармонических полей:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E} \times \vec{H}] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}_m \times \vec{H}_m] \cos(\omega t + \psi_E) \cos(\omega t + \psi_M) dt = \\ &= \frac{1}{2T} [\vec{E}_m \times \vec{H}_m] \cos(\psi_E - \psi_M), \end{aligned}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m^* \right]. \quad (3.69)$$

Таким образом, *среднее значение вектора Пойнтинга* в гармоническом электромагнитном поле равно вещественной части комплексного вектора

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right], \quad (3.70)$$

который носит название *комплексного вектора Пойнтинга*.

Для плоской электромагнитной волны вида (3.44) вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ совпадает по направлению с единичным вектором волновой нормали \vec{n} . Его среднее значение, модуль которого называется *интенсивностью* I , определяет мощность, переносимую электромагнитной волной через единичную площадку в направлении вектора $\vec{\Pi}$, и с учетом соотношения (3.53) может быть выражено через амплитудные значения напряженности электрического или магнитного поля в виде

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = I \vec{n} = \frac{\vec{n}}{2\sqrt{\mu/\varepsilon}} E_m^2 = \frac{\vec{n}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_m^2. \quad (3.71)$$

Следует отметить, что в научной литературе часто пользуются упрощенным определением интенсивности света

$$I = |\vec{E}|^2 = \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{E}}^*, \quad (3.72)$$

в котором постоянный коэффициент $1/(2\sqrt{\mu/\varepsilon})$ опущен.

3.6 Сферические электромагнитные волны

Наряду с плоскими волнами в оптике широко пользуются понятием *сферических волн*, для которых фазовый (волновой) фронт является сферой. Для изотропных сферических волн поле от источника, расположенного в начале координат, необходимо искать в виде $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$.

В этом случае удобно воспользоваться сферической системой координат (r, θ, φ) , в которой действие оператора Лапласа на функцию A определяется выражением

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}. \quad (3.73)$$

Поскольку отыскиваемое решение не зависит от угловых координат, волновое уравнение (3.20) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{E}) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\bar{E}) = 0. \quad (3.74)$$

Уравнение (3.17) в сферической системе координат можно преобразовать к виду $\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0$.

Отсюда следует, что в волновом решении поле является поперечным, то есть E_r можно положить равным нулю и представить поле сферической волны как

$$\vec{E}(r, t) = \vec{e}E(r, t), \quad (3.75)$$

где введен единичный вектор \vec{e} , расположенный в плоскости, ортогональной радиусу-вектору \vec{r} в данной точке. В этом случае скалярная функция $E(r, t)$, удовлетворяющая волновому уравнению (3.74), может быть получена в виде

$$E(r, t) = \frac{1}{kr} E_1 \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{kr} E_2 \left(t + \frac{r}{v} \right). \quad (3.76)$$

В данном выражении первое слагаемое представляет собой *расходящуюся сферическую волну*. Второе слагаемое соответствует волновому фронту, движущемуся к центру, – *сходящейся сферической волне*. Характерно, что амплитуда расходящейся сферической волны уменьшается как $1/r$, а ее энергетические характеристики, пропорциональные квадрату амплитуды, – как $1/r^2$.

4 ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

Отражение и преломление света – явления, которые издавна используются в обыденной жизни, науке, технике и оптическом приборостроении. В квантовой и оптической электронике, фотонике и оптоинформатике этим явлениям зачастую принадлежит ведущая роль, позволяющая реализовать преимущества света как носителя информации. В качестве примера можно упомянуть волоконно-оптические и интегрально-оптические системы, основанные на явлении полного внутреннего отражения света.

Рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической волны с линейной поляризацией для произвольного угла падения на границу раздела полубезграничных сред 1 и 2 с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Будем считать, что в них отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$) и они являются непроводящими ($\sigma = 0$) и немагнитными ($\mu = \mu_0$). Определим *плоскость падения волны* как плоскость, проходящую через нормаль \vec{m} к границе раздела и направление распространения падающей волны, задаваемое волновым вектором \vec{k}_i .

Анализ обычно проводят для двух частных случаев, когда волны поляризованы нормально к плоскости падения и когда вектор поляризации лежит в плоскости падения. Общий случай произвольной ориентации вектора \vec{E} можно рассмотреть как суперпозицию этих частных случаев. Остановимся подробно на случае поляризации волн перпендикулярно плоскости падения.

4.1 Поляризация волн, нормальная к плоскости падения

На рисунке 4.1 представлены направления осей координат и векторов \vec{E} и \vec{H} падающей, отраженной и преломленной волн. Векторы электрического поля всех волн направлены перпендикулярно плоскости падения, то есть совпадают с осью x . Запишем волновые векторы для падающей (i), отраженной (r) и преломленной (t) волн:

$$\vec{k}_i = k_0 n_1 (-\vec{j} \cos \theta_i + \vec{k}^0 \sin \theta_i), \quad (4.1)$$

$$\vec{k}_r = k_0 n_1 (\vec{j} \cos \theta_r + \vec{k}^0 \sin \theta_r), \quad (4.2)$$

$$\vec{k}_t = k_0 n_2 (-\vec{j} \cos \theta_t + \vec{k}^0 \sin \theta_t), \quad (4.3)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число для вакуума; $n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{r1,r2}}$ – коэффициенты преломления для волн, распространяющихся в первой и во второй средах соответственно.

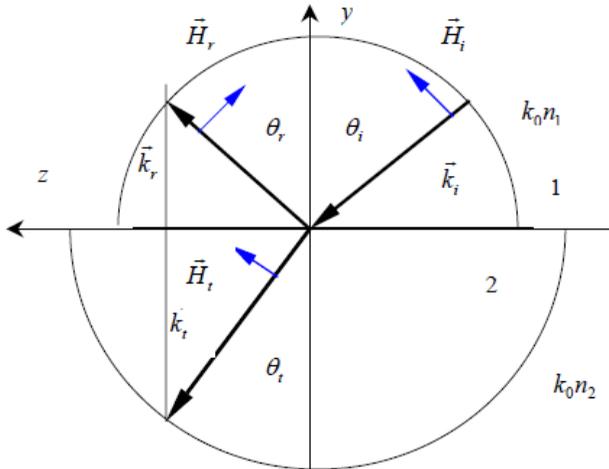


Рисунок 4.1 – Изображение падающей, отраженной
и преломленной волн в системе координат

В соответствии с соотношениями (3.44) и (4.1)–(4.3), опуская множитель $\exp(i\omega t)$, напряженности электрического поля волн представим в виде

$$\dot{\vec{E}}_i = \vec{i}\dot{E}_{im} \exp[ik_0 n_1 (y \cos \theta_i - z \sin \theta_i)], \quad (4.4)$$

$$\dot{\vec{E}}_r = \vec{i}\dot{E}_{rm} \exp[-ik_0 n_1 (y \cos \theta_r + z \sin \theta_r)], \quad (4.5)$$

$$\dot{\vec{E}}_t = \vec{i}\dot{E}_{tm} \exp[ik_0 n_2 (y \cos \theta_t - z \sin \theta_t)]. \quad (4.6)$$

Используя далее уравнение (3.50), найдем тангенциальные составляющие векторов магнитного поля волн:

$$\dot{H}_{iz} = \frac{n_1 \cos \theta_i}{W_0} \dot{E}_{im} \exp[ik_0 n_1 (y \cos \theta_i - z \sin \theta_i)], \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_{rz} = -\frac{n_1 \cos \theta_r}{W_0} \dot{E}_{rm} \exp[-ik_0 n_1 (y \cos \theta_r + z \sin \theta_r)], \quad (4.8)$$

$$\dot{H}_{tz} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{W_0} \dot{E}_{tm} \exp[ik_0 n_2 (y \cos \theta_t - z \sin \theta_t)]. \quad (4.9)$$

На границе раздела при $y = 0$ тангенциальные составляющие полей, электрического \dot{E}_x и магнитного \dot{H}_z , должны быть равны между собой в первой и второй средах в соответствии с граничными условиями (3.11) и (3.14) (поскольку $\eta = 0$ – поверхностный ток отсутствует).

Для составляющих электрического поля получаем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{im} \exp(-ik_0 n_1 z \sin \theta_i) + \dot{E}_{rm} \exp(-ik_0 n_1 z \sin \theta_r) = \\ = \dot{E}_{tm} \exp(-ik_0 n_2 z \sin \theta_t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) должно быть справедливо при любом z . Это возможно, если выполняется условие

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad (4.11)$$

означающее, что угол падения равен углу отражения, а также закон Снеллиуса

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i. \quad (4.12)$$

Из уравнения (4.10) с учетом полученных соотношений следует, что

$$\dot{E}_{im} + \dot{E}_{rm} = \dot{E}_{tm}, \quad (4.13)$$

а условие равенства в средах 1 и 2 тангенциальных компонент магнитного поля позволяет получить с использованием выражений (4.7)–(4.9) другое необходимое уравнение:

$$(\dot{E}_{im} - \dot{E}_{rm}) \cos \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \dot{E}_{tm} \cos \theta_t. \quad (4.14)$$

Решая уравнения (4.13) и (4.14), получаем:

$$\dot{E}_{rm} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \dot{E}_{im}, \quad (4.15)$$

$$\dot{E}_{tm} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \dot{E}_{im}. \quad (4.16)$$

Вводя коэффициент отражения света $R_{\perp} = \dot{E}_{rm} / \dot{E}_{im}$ и коэффициент прохождения $T_{\perp} = \dot{E}_{tm} / \dot{E}_{im}$ для поляризации, нормальной к плоскости падения, можно получить соотношения

$$R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (4.17)$$

$$T_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (4.18)$$

называемые **формулами Френеля**.

Используя закон Снеллиуса (4.12), связывающий угол преломления θ_t с углом падения θ_i , формулы Френеля для коэффициентов отражения и прохождения можно представить в виде

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (4.19)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}. \quad (4.20)$$

В случае нормального падения волны, когда $\theta_i = 0$, а следовательно, $\theta_r = \theta_t = 0$, получаем

$$R_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (4.21)$$

4.2 Поляризация волн в плоскости падения

Взаимная ориентация волновых векторов для падающей, отраженной и преломленной волн в этом случае будет такой же, как и на рисунке 4.1. Однако векторы магнитного поля волн будут направлены вдоль оси x , а векторы электрического поля волн должны иметь ориентацию, которая изображена на рисунке 4.1 для векторов магнитного поля.

Анализ эффектов отражения и преломления для волн, поляризованных в плоскости падения, приводит к тем же соотношениям (4.11) и (4.12) для углов отражения и преломления, что и в предыдущем случае.

Опуская вычисления, методика которых аналогична рассмотренной, запишем **формулы Френеля для волн, поляризованных в плоскости падения**:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \\ &= \frac{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2(n_2/n_1) \cos \theta_i}{(n_2/n_1)^2 \cos \theta_i + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (4.23)$$

Для нормального падения получаем:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad T_{\parallel} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (4.24)$$

Отметим, что знаки для R_{\perp} и R_{\parallel} в формулах (4.21) и (4.24) противоположны. Это связано с противоположной ориентацией векторов $\dot{\vec{E}}_i$ и $\dot{\vec{E}}_r$, принятой для падающей и отраженной волн в случае, когда они лежат в плоскости падения (см. рисунок 4.1 с учетом замены векторов $\dot{\vec{H}}_i$ и $\dot{\vec{H}}_r$ на $\dot{\vec{E}}_i$ и $\dot{\vec{E}}_r$), в то время как для волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, они по направлению совпадают.

4.3 Анализ формул Френеля

4.3.1 Отражение света при падении из менее плотной среды на более плотную. Угол Брюстера

Рассмотрим случай падения света на границу раздела из оптически менее плотной среды и его преломления в оптически более плотную среду, когда $n_1 < n_2$. При отражении света изменяются его амплитуда и фаза, поэтому удобно коэффициент отражения представить в виде

$$R_{\perp, \parallel} = |R_{\perp, \parallel}| \exp(-i\varphi_{\perp, \parallel}), \quad (4.25)$$

где модуль коэффициента отражения $|R_{\perp}| < 1$ характеризует уменьшение амплитуды отраженной волны относительно па-

дающей, а его фаза φ описывает приобретаемый отраженной волной фазовый сдвиг. Из формулы (4.19) нетрудно видеть, что для волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, $\varphi_{\perp} = \pi$, то есть отраженная волна в этом случае всегда является противофазной к падающей волне. Модуль коэффициента отражения $|R_{\perp}|$ монотонно увеличивается с углом падения (пунктирная кривая на рисунке 4.2), а при скольльзящем падении ($\theta_i \rightarrow 90^\circ$) свет испытывает полное отражение.

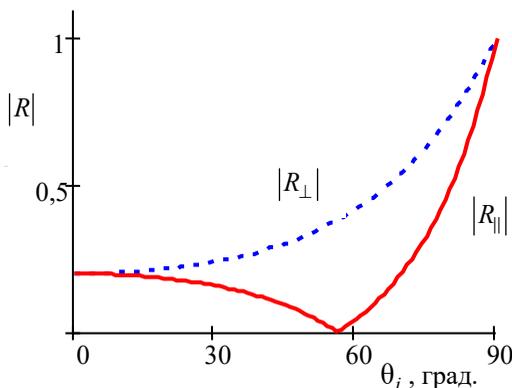


Рисунок 4.2 – Зависимости коэффициентов отражения от угла падения для отношения коэффициентов преломления сред $n_2/n_1 = 1,5$

Поведение коэффициента отражения для волн, поляризованных в плоскости падения, определяемого соотношением (4.22), является более сложным. При условии $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ модуль коэффициента отражения $|R_{\perp}|$ обращается в нуль, то есть отраженная волна отсутствует (сплошная кривая на рисунке 4.2). Угол θ_i в этом случае

$$\theta_{iB} = \operatorname{arctg} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (4.26)$$

и называется *углом Брюстера*, или *углом полной поляризации*. Второе название связано с тем, что при падении произвольно поляризованной волны на границу под углом θ_{iB} отраженная волна оказывается поляризованной перпендикулярно плоскости падения, поскольку компонента светового поля, поляризованная в плоскости падения, в этом случае не отражается, а полностью преломляется.

При углах падения $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iB}$ величина $|R_{\parallel}|$ убывает от значения, определяемого формулой (4.24) при нормальном падении, до нуля. Для области $\theta_{iB} \leq \theta_i \leq \pi/2$ модуль коэффициента отражения $|R_{\parallel}|$ возрастает от 0 до 1. Фаза коэффициента отражения $\varphi_{\parallel} = 0$ при $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iB}$, а при $\theta_{iB} \leq \theta_i \leq \pi/2$ она имеет значение $\varphi_{\parallel} = \pi$, т. е. изменяется скачком при переходе θ_i через значение θ_{iB} .

4.3.2 Отражение света при падении из более плотной среды на менее плотную. Полное внутреннее отражение

При падении световой волны из оптически более плотной среды на менее плотную имеем $n_1 > n_2$. Из закона Снеллиуса (4.12) следует, что в этом случае угол преломления $\theta_t = \arcsin(n_1 \sin \theta_i / n_2)$ больше угла падения, то есть $\theta_t > \theta_i$ (рисунок 4.3). Поэтому при увеличении угла падения до некоторого критического значения θ_{ic} , при котором $\sin \theta_{ic} = n_2 / n_1$, угол преломления становится равным 90° , т. е. преломленная волна распространяется точно вдоль границы раздела. ***Преломленная волна в оптически менее плотной среде отсутствует***, если угол падения превышает критический угол полного внутреннего отражения θ_{ic} .

При выполнении условия полного внутреннего отражения числитель и знаменатель в формулах (4.19) и (4.20) для R_{\perp} и R_{\parallel} становятся комплексно-сопряженными величинами, откуда следует, что $|R_{\perp}| = 1$ и $|R_{\parallel}| = 1$. Фазы этих коэффициентов различны и являются следующими функциями угла падения:

$$\varphi_{\perp} = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right], \quad (4.27)$$

$$\varphi_{\parallel} = 2 \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_i} \right]. \quad (4.28)$$

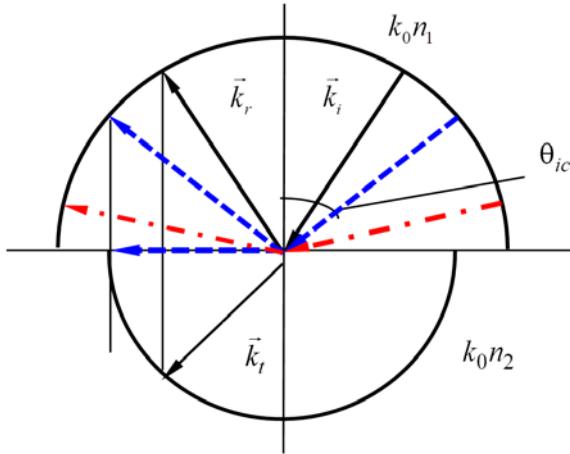


Рисунок 4.3 – Волновые векторы падающих и отраженных волн в оптически более плотной среде и волновой вектор преломленной волны в оптически менее плотной среде для различных углов падения

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным для поляризации в плоскости падения, и ортогонально ей. Если полное отражение испыты-

вает волна, плоскость поляризации которой наклонена к плоскости падения под некоторым углом, то отраженная волна будет иметь эллиптическую поляризацию.

Зададимся вопросом: «Если преломленная волна при полном внутреннем отражении в оптически менее плотной среде отсутствует, будет ли в ней присутствовать какое-либо электромагнитное поле?». В случае волн, поляризованных ортогонально плоскости падения, напряженности электрического и магнитного полей в среде 2 определяются выражениями (4.6) и (4.9) соответственно. Однако проекции волнового вектора \vec{k}_t на оси координат в этих формулах выражаются через угол θ_i , не имеющий физического смысла, поскольку при полном внутреннем отражении $\sin\theta_i > 1$. Для нахождения проекции волнового вектора \vec{k}_t на ось z воспользуемся условием (4.10), в соответствии с которым она должна быть такой же, как для падающей и отраженной волн:

$$k_{tz} = k_0 n_1 \sin \theta_i. \quad (4.29)$$

Также учтем, что согласно формулам (3.38) электромагнитное поле в среде отлично от нуля только тогда, когда волновое число (длина волнового вектора) удовлетворяет дисперсионному уравнению (3.41), которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде $|\vec{k}_t| = n_2 k_0$.

Используя равенство (4.29), получаем, что проекция вектора \vec{k}_t на ось y в условиях полного внутреннего отражения является чисто мнимой величиной:

$$k_{ty} = \sqrt{|\vec{k}_t|^2 - k_{tz}^2} = ik_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}. \quad (4.30)$$

Таким образом, при полном внутреннем отражении волн, поляризованных перпендикулярно плоскости падения, распределение электрического поля в среде II имеет вид

$$\dot{\vec{E}}_t(y, z, t) = \vec{i}\dot{E}_{tm} \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{tz} z)], \quad (4.31)$$

где $\gamma_2 = k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}$ – постоянная затухания, характеризующая скорость уменьшения амплитуды электрического поля с удалением от границы раздела.

Выражение (4.31) описывает распространяющуюся вдоль оси z (вдоль границы раздела сред) плоскую волну с фазовым фронтом, ортогональным данной оси (рисунок 4.4). Такие волны, амплитуда которых в пределах фазового фронта зависит от поперечных координат, называются **неоднородными плоскими волнами**. Расстояние от границы, на котором поле в неоднородной плоской волне существенно уменьшается по амплитуде, характеризует глубину проникновения света в менее плотную среду и сравнимо с длиной волны λ .

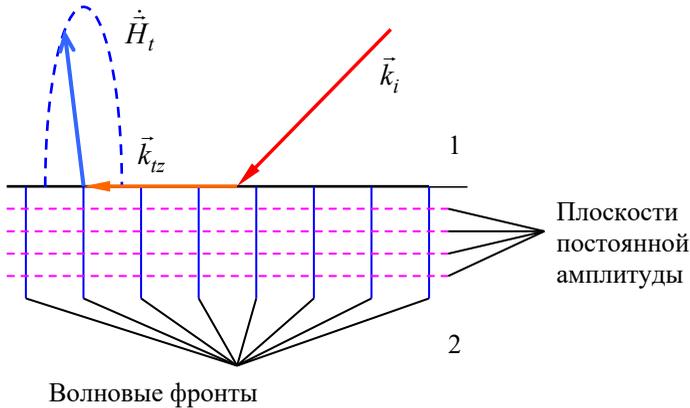


Рисунок 4.4 – Структура неоднородной плоской ТЕ-волны, существующей при полном внутреннем отражении, в оптически менее плотной среде II

Составляющие магнитного поля неоднородной плоской волны могут быть найдены из уравнения (3.50) в следующем виде:

$$\dot{H}_{ty} = \frac{n_1 \sin \theta_i}{W_0} \dot{E}_{tm} \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{tz} z)], \quad (4.32)$$

$$\dot{H}_{tz} = -i \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{W_0} \dot{E}_{tm} \exp(\gamma_2 y) \exp[i(\omega t - k_{tz} z)]. \quad (4.33)$$

Как следует из соотношений (4.31)–(4.33), рассматриваемая неоднородная плоская волна не является поперечной. Она содержит продольную (параллельную нормали к фазовому фронту) составляющую магнитного поля \dot{H}_{tz} . Волны, у которых составляющие электрического поля ортогональны волновой нормали, называют *поперечно-электрическими*, или **ТЕ-волнами**. Характерно, что продольная составляющая магнитного поля сдвинута по фазе относительно поперечных составляющих электрического поля на $-\pi/2$. Поэтому конец результирующего вектора магнитного поля в рассматриваемой неоднородной плоской ТЕ-волне описывает эллиптическую траекторию, причем плоскость данного эллипса лежит в плоскости падения (рисунок 4.4).

Аналогичным образом можно рассмотреть электромагнитное поле, существующее в оптически менее плотной среде при полном внутреннем отражении волны, поляризованной в плоскости падения. Это поле будет представлять *неоднородную плоскую поперечно-магнитную волну*, т. е. **ТМ-волну**.

Отметим, что явление проникновения светового поля в среду, от которой происходит полное внутреннее отражение, широко используется в научных исследованиях и в оптической технике.

5 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференцией называют явление, при котором суперпозиция волновых процессов приводит к изменению средней плотности потока энергии. Интерференция реализуется для волн любой природы – электромагнитных, акустических, плазменных и др. В оптике, где среднее значение потока электромагнитной энергии принято характеризовать интенсивностью (см. формулы (3.71) и (3.72)), под интерференцией света понимают широкий круг явлений, в которых при наложении пучков света результирующая интенсивность в данной точке пространства не равна сумме интенсивностей отдельных пучков.

Используя *принцип суперпозиции*, справедливый для линейных оптических систем, световое поле нескольких световых пучков в точке наблюдения представим в виде векторной суммы

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{E}}_i(\vec{r}, t). \quad (5.1)$$

Интенсивность данного светового поля, которое в общем случае не является монохроматическим, найдем с помощью усреднения квадрата модуля $\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ по времени, существенно превышающему периоды колебаний:

$$I(\vec{r}) = \left\langle \left| \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 + \dots + \dot{\vec{E}}_n \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left(\dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_1^* + \dots + \dot{\vec{E}}_n \cdot \dot{\vec{E}}_n^* \right) + \left(\dot{\vec{E}}_1 \cdot \dot{\vec{E}}_2^* + \dot{\vec{E}}_2 \cdot \dot{\vec{E}}_1^* + \dots \right) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Таким образом, выражение для интенсивности разбивается на *аддитивный член*, являющийся простой суммой интенсивностей всех n пучков, и *интерференционный член*, содержащий перекрестные скалярные произведения напряженностей полей от различных источников. Если интерференционный член в результате усреднения обращается в ноль, то световые

пучки являются *некогерентными*. Отличие интерференционного члена от нуля говорит о полной или частичной когерентности пучков. В этом случае в некоторых точках пространства интенсивность света больше арифметической суммы интенсивности пучков (аддитивного члена), а в других – меньше его. В результате в пространстве возникает чередование максимумов и минимумов интенсивности света – *интерференционная картина*.

Интерференция света широко используется для построения различных измерительных систем и устройств и является одним из главных этапов записи оптических голограмм.

5.1 Интерференция монохроматического излучения

5.1.1 Интерференция двух плоских монохроматических волн

Рассмотрим интерференцию двух плоских монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, световое поле которых имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = & \vec{e}_1 \dot{E}_{1m} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}\right)\right] + \\ & + \vec{e}_2 \dot{E}_{2m} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}\right)\right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

с различными волновыми векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , комплексными векторными амплитудами

$$\dot{\vec{E}}_{1m} = \vec{e}_1 E_{1m} \exp(-i\psi_{01}), \quad \dot{\vec{E}}_{2m} = \vec{e}_2 E_{2m} \exp(-i\psi_{02})$$

и начальными фазами ψ_{01} и ψ_{02} .

Использование формулы (5.2) (или (3.72), справедливой для монохроматических волн) позволяет получить распределение интенсивности света в интерференционной картине в следующем виде

$$I(\vec{r}) = I_0 \left[1 + m \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21}) \right], \quad (5.4)$$

где $I_0 = I_1 + I_2 = \left| \dot{\vec{E}}_{1m} \right|^2 + \left| \dot{\vec{E}}_{2m} \right|^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2$ – средняя интенсивность света в интерференционной картине, равная суммарной интенсивности пучков; $m = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha / I_0$ – контраст интерференционной картины; α – угол между векторами поляризации интерферирующих волн; $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ – волновой вектор интерференционной картины, называемый также вектором решетки интенсивности; $\Delta\psi_{21} = \psi_{02} - \psi_{01}$ – разность начальных фаз.

В качестве примера рассмотрим интерференцию световых волн, поляризованных вдоль оси y , имеющих одинаковые начальные фазы и распространяющихся в плоскости xz в среде с показателем преломления n .

Будем полагать, что волны распространяются почти навстречу друг другу и их волновые векторы составляют углы θ и $180^\circ - \theta$ с осью $+z$ (рисунок 5.1).

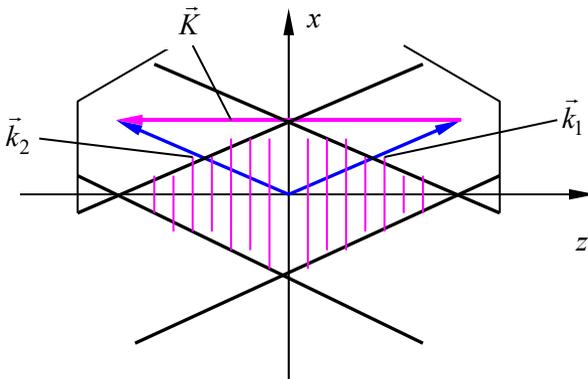


Рисунок 5.1 – Интерференция встречных световых волн

Волновой вектор интерференционной картины в этом случае имеет проекцию только на ось z , $\vec{K} = 2k_0 n \cos \theta \vec{k}^0$, а распределение света в интерференционной картине может быть получено из выражения (5.4):

$$I(z) = I_0 \left[1 + m \cos(Kz) \right] = I_0 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right), \quad (5.5)$$

где $K = |\vec{K}|$ и $\Lambda = 2\pi/K = \lambda/(2n \cos \theta)$ – пространственный период интерференционной картины.

Распределение интенсивности света при интерференции световых волн с интенсивностями $I_1 = 0,9$ и $I_2 = 0,1$ Вт/м², образующими картину с контрастом $m = 0,6$, показано на рисунке 5.2.

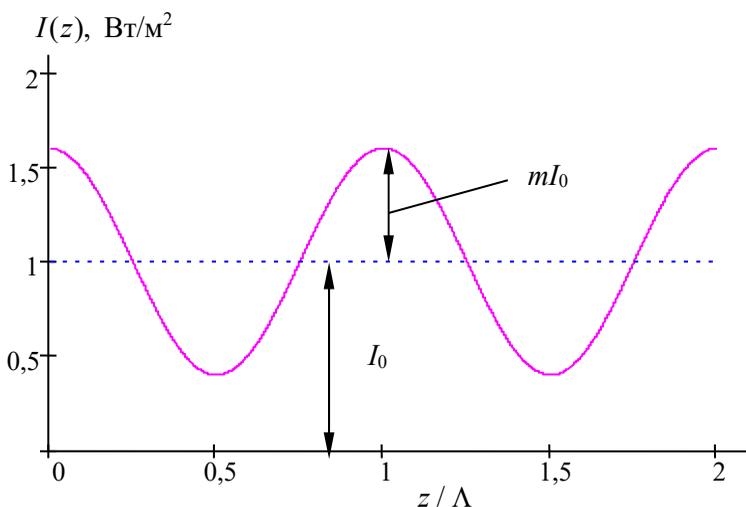


Рисунок 5.2 – Распределение интенсивности света в интерференционной картине

Таким образом, суперпозиция монохроматических плоских волн приводит к интерференционной картине, представляющей периодическое чередование плоскостей, соответствующих

максимумам и минимумам светового поля. В максимуме световые поля являются синфазными, то есть имеют фазовый сдвиг $\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21} = 2\pi p$, где p – целое число.

Противофазность световых волн в областях пространства, где фазовый сдвиг принимает значение $\vec{K} \cdot \vec{r} - \Delta\psi_{21} = (2p + 1)\pi$, приводит к тому, что волны гасят друг друга.

При одинаковых интенсивностях ($I_1 = I_2$) интерференционная картина имеет контраст $m = 1$ и гашение светового поля в минимуме является полным. Минимальный пространственный период интерференционной картины $\Lambda_{\min} = \lambda/(2n)$ наблюдается, когда волны распространяются точно навстречу друг другу (при $\theta = 0$, см. рисунок 5.1).

5.1.2 Интерференция двух сферических монохроматических волн

Используя формулу (3.76), поле двух сферических монохроматических (гармонических) световых волн одинаковой частоты в точке наблюдения представим в виде суперпозиции:

$$\begin{aligned} \dot{E}(r_1, r_2, t) = & \frac{\dot{E}_{1m}}{kr_1} \exp\left[i(\omega t - kr_1 + \psi_{01})\right] + \\ & + \frac{\dot{E}_{2m}}{kr_2} \exp\left[i(\omega t - kr_2 + \psi_{02})\right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где r_1 и r_2 – расстояния до источников сферических волн; $k = k_0 n = 2\pi n/\lambda$. Здесь мы пренебрегаем векторным характером светового поля, то есть пользуемся так называемым *скалярным приближением*.

Интерференция такого рода наблюдалась впервые Томасом Юнгом в 1801 г. Схема опыта Юнга представлена на рисунке 5.3.

Источниками сферических волн здесь являются два одинаковых отверстия в непрозрачном экране, освещаемом однород-

ным световым пучком. В этом случае можно положить $\dot{E}_{1m} = \dot{E}_{2m}$ и $\psi_{01} = \psi_{02}$.

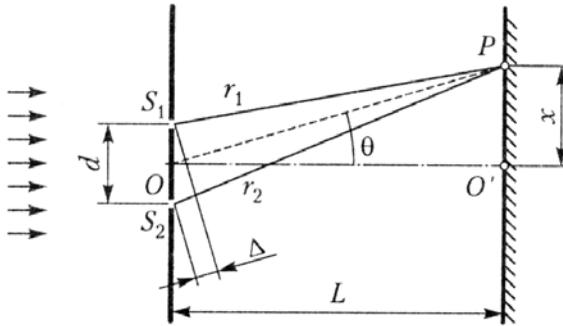


Рисунок 5.3 – Схема интерференции Юнга

Воспользуемся также парааксиальным приближением, считая малым угол $\theta \sim x/L$, что позволяет пренебречь изменением расстояний r_1 и r_2 в амплитудных множителях $1/(kr_1)$ и $1/(kr_2)$ и считать их постоянными величинами.

С использованием таких приближений распределение интенсивности света в интерференционной картине может быть представлено в виде

$$I(P) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta r \right) \right], \quad (5.7)$$

где учтено, что $n = 1$, интенсивности источников $I_1 = I_2 = I_0/2$, разность хода лучей обозначена как $\Delta r = r_2 - r_1$.

Таким образом, в зависимости от разности хода от источников до точки наблюдения интенсивность в картине интерференции Юнга меняется от 0 в тех точках, для которых $\Delta = (2p + 1)\lambda/2$ и куда волны приходят в противофазе, до $2I_0$ в точках, для которых $\Delta = p\lambda$ (здесь волны синфазны). Отношение разности хода к длине волны, в данном случае равно p , называют **порядком интерференции**. В центре картины, оче-

видно, наблюдается светлая интерференционная полоса нулевого порядка.

Если рассматривать двумерную картину, то интерференционные полосы на экране представляют собой семейство гипербол, отвечающих постоянству оптической разности хода (рисунок 5.4).

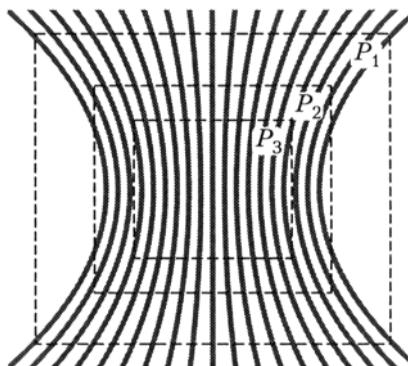


Рисунок 5.4 – Интерференционные полосы от двух точечных источников

По мере удаления экрана от плоскости источников в доступной для наблюдения области остается практически прямая система полос (область P_3 на рисунке 5.4).

5.2 Когерентность световых волн

Когерентность называют согласованное протекание во времени нескольких волновых процессов или свойство, отражающее стабильность фазы одной или нескольких электромагнитных волн.

Именно когерентность характеризует способность электромагнитных волн интерферировать друг с другом. Легче всего получить интерференцию монохроматических волн. Однако реальные источники излучения не являются монохроматиче-

скими и характеризуются некоторой *степенью монохроматичности*, определяемой как отношение ширины спектра частот, генерируемых источником, к центральной частоте, т. е. $\delta f / f_0$. Со степенью монохроматичности связана временная когерентность оптического излучения.

5.2.1 Временная когерентность

Монохроматическое световое излучение, интерференция которого рассмотрена в подразд. 5.1, является математической идеализацией, поскольку существует только на бесконечных интервалах во времени и пространстве, и не может быть реализовано на практике. Все реальные сигналы, в том числе и световые, ограничены во времени. В качестве простейшей реалистичной модели рассмотрим в некоторой точке пространства напряженность светового поля, изменяющуюся во времени по закону

$$E(t) = E_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.8)$$

где $E_m(t)$ – функция, называемая огибающей сигнала, медленно изменяющаяся во времени по сравнению с гармонической несущей сигнала и отличная от нуля на конечном интервале времени, значительно превышающем период $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

В качестве примера на рисунке 5.5 приведен сигнал с огибающей в виде функции Гаусса $E_m(t) = \exp[-(t-t_0)^2/\tau^2]$ для $\tau = 3T_0$ и $\varphi_0 = 0$, представляющий собой световой импульс.

Отметим, что основная энергия сигнала сосредоточена в его центральной части, где $|t-t_0| \leq \tau$. Поэтому можно считать, что длительность импульса τ_p равна ширине его огибающей по уровню $1/e$, то есть $\tau_p = 2\tau$.

Как известно, непериодическую функцию времени можно представить в виде интеграла Фурье

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (5.9)$$

то есть в виде линейной суперпозиции гармонических составляющих, имеющих частоты $-\infty < \omega < \infty$ и амплитуды $F(\omega)$, в общем случае комплексные. Величина $F(\omega)$ называется **спектром сигнала** $E(t)$ и определяется выражением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (5.10)$$

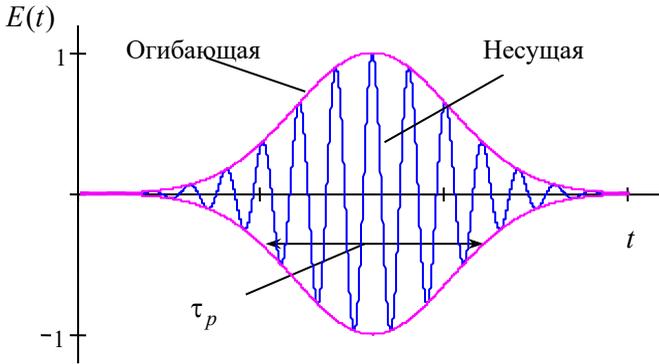


Рисунок 5.5 – Сигнал с гармонической несущей и огибающей в виде функции Гаусса

Для представленного на рисунке 5.5 сигнала $E(t)$ с гармонической несущей и огибающей в виде функции Гаусса использование преобразования Фурье (5.10) дает спектр, амплитуда которого также изменяется по закону Гаусса:

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}\tau}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{4/\tau^2} \right] \exp [i(\omega_0 - \omega)t_0] + \exp \left[-\frac{(\omega_0 + \omega)^2}{4/\tau^2} \right] \exp [i(\omega_0 + \omega)t_0] \right\}.$$

Этот спектр является *сплошным* и отличается от нуля как в положительной, так и в отрицательной области частот, с максимумами при $\omega = \pm\omega_0$. Ширина спектра (в рад/с) по уровню $1/e$ составляет

$$\delta\omega = \frac{4}{\tau} = \frac{8}{\tau_p}. \quad (5.11)$$

Найдем связь длительности импульса огибающей τ_p с шириной спектра в герцах:

$$\delta f = \frac{\delta\omega}{2\pi} = \frac{4}{\pi\tau_p} \approx \frac{1}{\tau_p}. \quad (5.12)$$

Получено, что длительность импульсного сигнала и ширина спектра частот, где содержится его основная энергия, связаны обратно пропорциональной зависимостью. Для монохроматического (гармонического) сигнала, бесконечного во времени, ширина спектра стремится к нулю, и он представлен единственной спектральной составляющей, имеющей частоту ω_0 . Чем короче длительность огибающей импульсного сигнала, тем шире его спектр.

Рассмотрим интерференцию двух волн, не являющихся монохроматическими, и осуществляемую, например, с помощью интерферометра Юнга (см. рисунок 5.3). Наблюдаемые в интерференционной картине максимумы (при $k\Delta r = k(r_2 - r_1) = 2\pi p$ для каждой спектральной составляющей) чередуются с минимумами (при $k\Delta r = k(r_2 - r_1) = \pi(2p + 1)$). Для монохроматического света контраст интерференционной картины определяется только соотношением интенсивностей интерферирующих волн и углом α между векторами поляризации $m = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \alpha / (I_1 + I_2)$ (см. подразд. 5.1). Однако контрастность интерференционной картины m , введенная для монохроматических волн, может быть найдена через значения интенсивности света I_{\max} и I_{\min} в максимумах и минимумах:

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (5.13)$$

Такое определение контрастности картины можно использовать как характеристику интерференции и для света, не являющегося монохроматическим. Контрастность интерференционной картины определяет ее *видность* (рисунок 5.6).

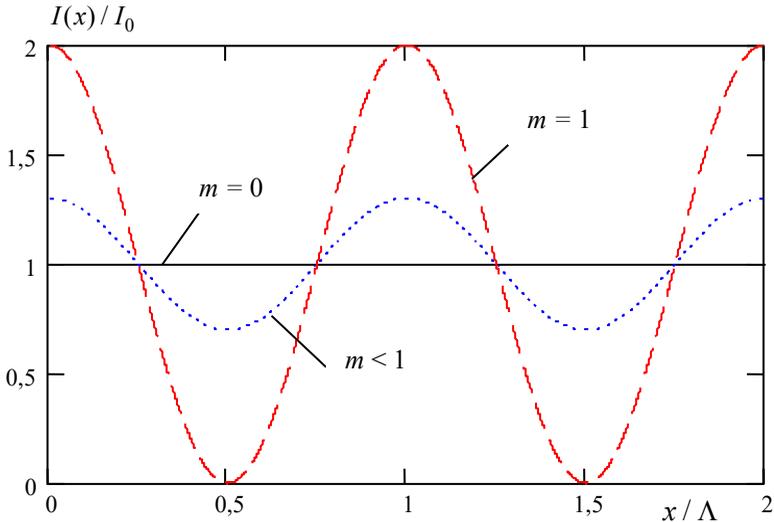


Рис. 5.6. Распределение интенсивности света в интерференционной картине при ее различных контрастах

При $m = 1$ излучение полностью когерентно и интерференционная картина хорошо видна. При $m = 0$ картина интерференции не видна, то есть излучение является полностью некогерентным и интерференционный член в формуле (5.2) равен нулю. Для всех реальных источников света $m < 1$, что связано с двумя причинами:

- 1) излучение нестрого монохроматично;
- 2) источник излучения имеет конечные размеры, причем фазы волн, испускаемых из разных точек источника, отличаются друг от друга.

Действительно, при ширине спектра излучения $\delta f \neq 0$ условие $k\Delta r = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = (\omega/c)(r_2 - r_1) = (2\pi f/c)\Delta r = 2\pi r$ выполняется в некоторой области значений Δr – положение максимумов и минимумов на оси x (см. рисунок 5.6) различно для разных частот, картина интерференции замывается. Для количественной оценки учтем, что частицы вещества излучают не непрерывно, а в течение некоторых интервалов времени, расстояния между которыми случайны (рисунок 5.7).

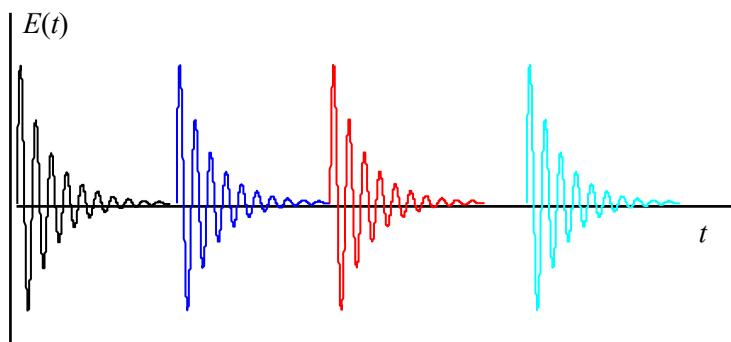


Рисунок 5.7 – Цуги излучения нескольких микрочастиц

Часть сигнала, в течение которой его фаза меняется непрерывно, называется **цугом** (за это время **когерентность сохраняется**). Длина цуга τ_c , как следует из формулы (5.12), обратно пропорциональна ширине спектра излучения δf , т. е.

$$\tau_c = \frac{1}{\delta f}, \quad (5.14)$$

и связана со степенью его монохроматичности.

Время τ_c называют **временем когерентности**, а длину цуга в пространстве $l_c = c\tau_c = c/\delta f = \lambda_0^2/\delta\lambda$ – **длиной когерентности**. Очевидно, что контрастная интерференционная картина получается в том случае, когда изменение разности фаз

$d(k\Delta r) = (2\pi/\lambda_0^2)\delta\lambda\Delta r$, связанное с конечной шириной спектра $\delta\lambda$, будет много меньше, чем 2π . Отсюда получаем

$$\Delta r \ll \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}; \Delta r \ll l_c. \quad (5.15)$$

Таким образом, для получения контрастной интерференционной картины разность хода волн должна быть много меньше длины когерентности.

Длина когерентности различных источников света:

– для белого света при $\delta f \sim 10^{14}$ Гц время $\tau_c \sim 10^{-14}$ с, $l_c \sim 1$ мкм;

– для многомодового гелий-неонового лазера $\lambda_0 = 633$ нм при $\delta f \sim 5 \cdot 10^8$ Гц – $\tau_c \sim 2 \cdot 10^{-9}$ с, $l_c \sim 60$ см;

– для одночастотного лазера при $\delta f \sim 15$ Гц – $\tau_c \sim 6,7 \cdot 10^{-2}$ с и $l_c \sim 2 \cdot 10^7$ м.

Данное свойство **временной когерентности** очень важно для голографии. Схема записи голограммы Лейта и Упатниекса представлена на рисунке 5.8.

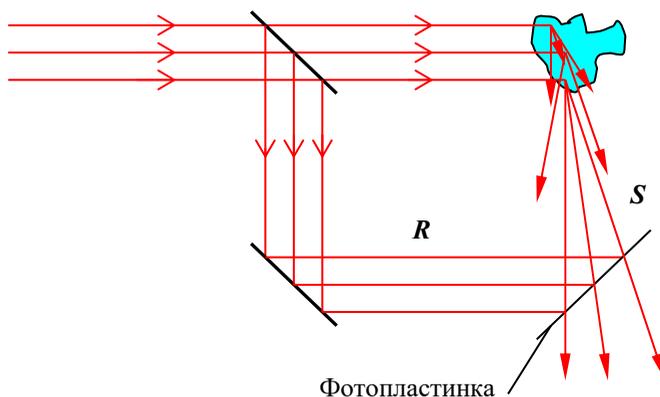


Рисунок 5.8 – Схема записи голограмм по методу Лейта и Упатниекса

На фотопластинку падает как опорная волна R , так и предметная волна S от объекта. Интерференционная картина этих волн фиксируется на фотоэмульсии в виде функции пропускания. После экспонирования, проявления, закрепления, промывки и просушки она играет роль дифракционной решетки, на которой при дифракции опорной волны создаются рассеянные волны в том же направлении, что и сигнальные волны, «пронизывающие» фотопластинку.

У наблюдателя создается иллюзия, что за пластинкой находится объект, имеющий объем, который присутствовал в данном месте при записи голограммы. Естественно, здесь Δl должно быть существенно меньше l_c . Чем больше длина когерентности лазера, тем больше глубина сцены, которую можно запечатлеть на голограмме.

5.2.2 Пространственная когерентность

Пространственная когерентность связана со стабильностью фазы излучения в плоскости поперечного сечения пучка. Если для реализации интерференции Юнга (см. рисунок 5.3) используется излучение стандартного лазера, например гелий-неонового, то фазовый фронт пучка близок к плоскому. В этом случае фаза является постоянной по всему сечению пучка, разность начальных фаз источников сферических волн $\Delta\psi_{12} = \psi_{01} - \psi_{02} = \text{const} = 0$ в интерферометре Юнга не зависит от времени и на экране наблюдается стационарная интерференционная картина. Излучение таких лазерных источников обладает высокой пространственной когерентностью.

Точно так же эта разность фаз будет оставаться постоянной, если экран с двумя отверстиями в интерферометре Юнга будет освещаться точечным монохроматическим источником. Если этот источник расположен на *оптической оси* системы, обозначенной как ось z на рисунке 5.9, то $\Delta\psi_{12} = 0$ и в центре

экрана в точке O' будет наблюдаться максимум интерференционной картины.

При смещении источника в точку с координатой $x' = w/2$ разность хода лучей до нижнего и верхнего отверстий в непрозрачном экране станет отличной от нуля:

$$r'_2 - r'_1 = \sqrt{(R')^2 + (d+w)^2/4} - \sqrt{(R')^2 + (d-w)^2/4}, \quad (5.16)$$

а максимум интерференционной картины сместится из точки O' вдоль оси x на некоторое расстояние Δx .

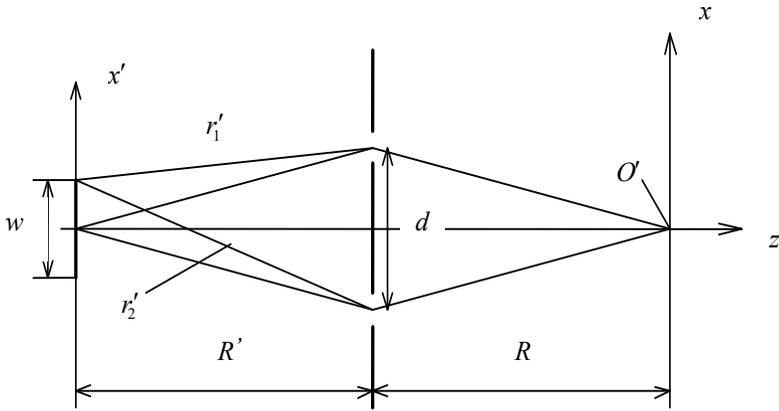


Рисунок 5.9 – Интерференция Юнга от протяженного источника излучения

Рассмотрим интерференцию для протяженного источника излучения с поперечным размером w , каждая точка которого излучает сферические волны с начальной фазой, не связанной с фазами во всех других точках. Угловой размер такого источника $\varphi = w/R'$, видимый из центра непрозрачного экрана, будем считать малым: $\varphi \ll 1$. В этом случае, используя разложение в ряд Тейлора и учитывая в нем только два первые члена, из соотношения (5.16) получаем разность хода для крайних точек, расположенных при $x' = \pm w/2$:

$$\Delta r'_{\max} = |r'_2 - r'_1| \approx R' \left[1 + \frac{(d+w)^2}{8(R')^2} - 1 - \frac{(d-w)^2}{8(R')^2} \right] = \frac{\varphi d}{2}. \quad (5.17)$$

Для разности хода $\Delta r'_{\max} = \lambda/2$ в точке O' будет наблюдаться минимум интерференционной картины, образуемой наложением световых полей, пришедших в нее от крайних точек протяженного излучателя. Очевидно, что в этом случае интерференционная картина будет сильно замыта и её контраст m будет близок к нулю. Интерференция на экране будет видна при условии $\Delta r'_{\max} < \lambda/2$, то есть когда угловой размер протяженного источника излучения удовлетворяет неравенству

$$\varphi < \frac{\lambda}{d}. \quad (5.18)$$

Это означает, что излучение такого источника *пространственно когерентно* в конусе с углом при вершине

$$\theta_c = d/R' \leq \lambda/(R'\varphi),$$

называемым *апертурой интерференции*. Поперечный *размер области когерентности* может быть определен как $d = \lambda / \varphi$.

Если выделить из спектра Солнца, угловой размер которого составляет $\sim 10^{-2}$ рад, излучение с длиной волны 500 нм, то оно будет когерентно освещать пятно с диаметром ~ 50 мкм.

5.3 Методы наблюдения интерференционных картин

Два независимых источника света всегда некогерентны. Поэтому для наблюдения интерференции света используется один источник, излучение которого делится на два или большее количество пучков. Интерференционные схемы, в которых присутствуют два таких источника света, называются *двухлучевыми*. Двухлучевые интерференционные схемы делятся на два класса:

- 1) построенные по методу *деления амплитуды волны*;
- 2) использующие методы *деления волнового фронта*.

5.3.1 Метод деления амплитуды

Амплитудное деление осуществляется с помощью полупрозрачных зеркал, границ раздела, пленок и др. *всего волнового фронта* падающей волны как *единого целого*. В плоскости наблюдения обе разделенные волны перекрываются и создают, при достаточной степени когерентности, различные интерференционные эффекты, часть из которых обсуждается ниже.

Полосы равной толщины

При интерференции параллельного пучка света в тонком зазоре максимумы и минимумы интенсивности имеют одинаковые условия наблюдения при одинаковых толщинах зазора – картина полос «отслеживает» вариации толщины.

Такая интерференция приводит к появлению *полос равной толщины*, каждая из которых соответствует геометрическому месту точек с одинаковой толщиной зазора или пленки. Для идеального плоского клина эти полосы эквидистантны и параллельны ребру клина (рисунок 5.10). На рисунке для наглядности углы отклонения лучей от нормали сильно преувеличены.

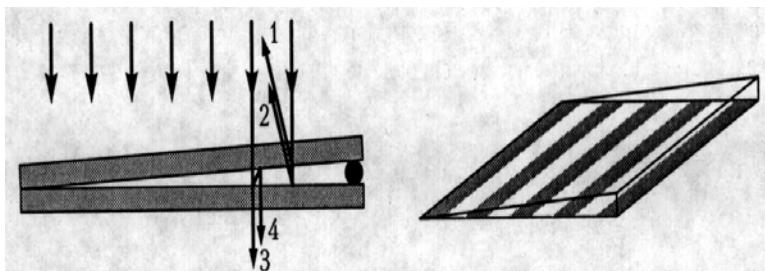


Рисунок 5.10 – Полосы равной толщины в воздушном клине

Полосы могут наблюдаться как в отраженном, так и в прошедшем свете, однако в последнем случае видность интерференционной картины существенно ниже. Это связано с тем, что лучи 1 и 2 примерно равны по интенсивности и могут сильно гасить друг друга в минимумах, в то время как луч 4, испытывающий двукратное отражение, значительно слабее луча 3 (коэффициент отражения по интенсивности, если клин сделан из стекла, составляет примерно 4 %).

Разность хода между интерферирующими лучами очень близка к удвоенной толщине зазора d . Для зазора, заполненного средой с показателем преломления n , $\Delta r = 2dn$.

При расчете положения максимумов и минимумов необходимо учитывать, что при отражении от более плотной среды происходит сдвиг по фазе на π (см. разд. 4).

Кольца Ньютона

Классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона, образующиеся в зазоре между сферической линзой и плоской поверхностью (рисунок 5.11).

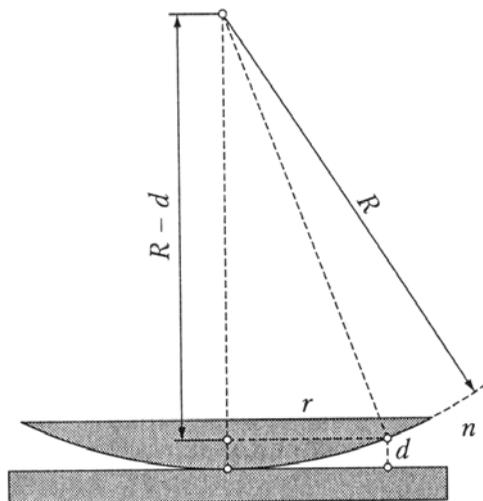


Рисунок 5.11 – Получение колец Ньютона

Лучше всего, как уже отмечалось выше, это интерференционное явление наблюдается в отраженном свете. В этом случае в центре картины за счет фазового сдвига луча 2 при отражении от плоской поверхности он будет в противофазе относительно пучка 1 и их наложение приводит к образованию темного пятна.

Между радиусом кривизны линзы R , толщиной зазора d и радиусом ньютоновского кольца r существует следующее геометрическое соотношение:

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 \approx R^2 - 2Rd + r^2, \quad (5.19)$$

где приближенное равенство хорошо выполняется при $d \ll R$.

Из формулы (5.19) получаем величину зазора:

$$d = \frac{r^2}{2R}. \quad (5.20)$$

Если разность хода ($\Delta r = 2dn$) равна четному числу полуволн, то с учетом дополнительного фазового сдвига в интерференционной картине наблюдается темное кольцо, если нечетному – то светлое. Отсюда находим радиусы темных колец

$$r_d = \sqrt{R\lambda m} \quad (5.21)$$

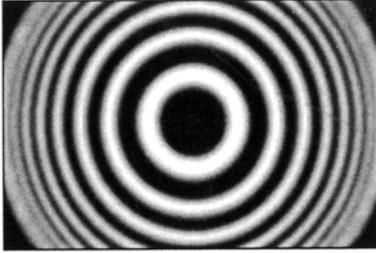
и светлых колец

$$r_l = \sqrt{R\lambda(m + 1/2)}, \quad (5.22)$$

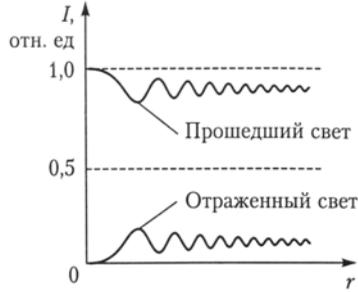
где $m = 0, 1, 2, \dots$

Так как толщина зазора d меняется по квадратичному закону (при её малых значениях), то система колец постепенно сгущается от центра к периферии (рисунок 5.12).

Три-четыре первых ньютоновских кольца можно наблюдать при освещении белым светом, при этом ярко выражена их хроматичность (окрашенность), усиливающаяся к краям. Ширина колец увеличивается с ростом длины волны освещающего излучения, а их контрастность возрастает при сужении спектра излучения, например, с помощью светофильтров.



a



б

Рисунок 5.12 – Кольца Ньютона: *a* – вид в отраженном свете; *б* – радиальное распределение интенсивности для квазимонохроматического источника

С ростом порядка интерференции (с увеличением номера кольца) для излучения с небольшой степенью монохроматичности контрастность ньютоновских колец падает. В случае источника с шириной спектра $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ интерференционная картина пропадает, если максимум порядка m для λ_1 совпадает с минимумом $(m+1)$ -го порядка для λ_2 : $2d = m\lambda_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$.

Отсюда находим число видимых колец

$$m = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{l_c}{\lambda_0}, \quad (5.23)$$

где $\lambda_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – средняя (центральная) длина волны.

Таким образом, длину когерентности l_c , определенную в п. 5.2.1, можно оценить из числа видимых колец Ньютона.

Следует отметить, что при отсутствии поглощения в линзе и плоской пластине (см. рисунок 5.11) картины колец в отраженном и прошедшем свете являются *дополнительными*, то есть в любой точке зазора сумма их интенсивностей постоянна и равна интенсивности падающей плоской волны (см. рисунок 5.12,б).

Полосы равного наклона

Методом деления амплитуды можно получить еще один тип интерференционной картины – полосы равного наклона. Они наблюдаются при освещении пленок или плоскопараллельных пластинок расходящимся пучком. Отражения от передней и задней поверхностей пластины формируют два мнимых изображения S' и S'' источника S (рисунок 5.13).

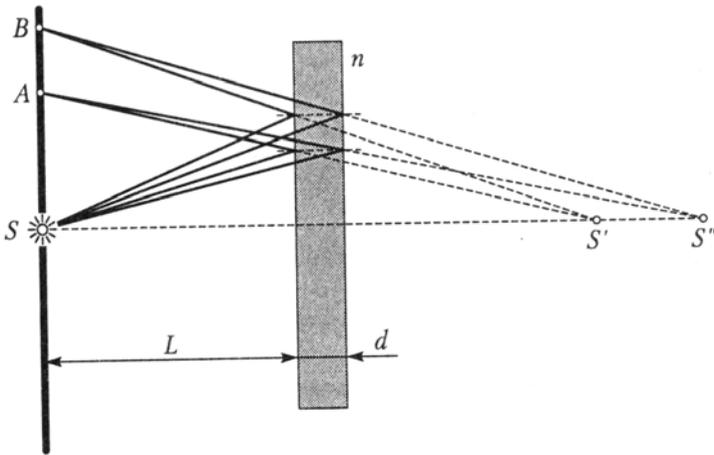


Рисунок 5.13 – Получение полос равного наклона

Сферические волны от этих мнимых источников, накладываясь в плоскости экрана, создают систему интерференционных колец, каждое из которых отвечает определенному углу наклона. Осью этих колец является перпендикуляр, опущенный из центра источника на поверхность пластины.

Рассмотрим ситуацию, при которой оба отраженных луча образуются из одного и того же падающего (рисунок 5.14).

Разность хода между отраженными лучами при произвольном угле падения для случая тонкой пленки, находящейся в воздухе, определяется выражением

$$\Delta r = (AB + BC)n - AD + \frac{\lambda}{2} = 2nd \cos \beta + \frac{\lambda}{2}. \quad (5.24)$$

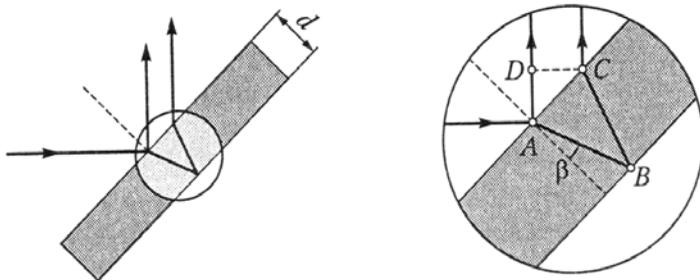


Рисунок 5.14 – Интерференция лучей, отраженных тонкой пленкой

Таким образом, для всех волн, падающих на пленку под одним и тем же углом, разность хода одинакова. Отраженные лучи при этом параллельны, вследствие чего интерференционная картина локализована в бесконечности и может наблюдаться на экране, помещенном в фокальную плоскость положительной линзы.

Из формулы (5.24) следует, что при увеличении угла падения света оптическая разность хода между отраженными лучами уменьшается. Следовательно, номера колец равного наклона (порядки интерференции m) будут *убывать* по мере перехода от центра к периферии. Для источника S с не очень хорошей временной когерентностью это приведет к тому, что внешние кольца будут иметь большую видность, чем внутренние. В этом состоит качественное отличие полос равного наклона от полос равной толщины.

При применении в качестве светоделителей плоскопараллельных стеклянных пластин толщиной в единицы и десятки миллиметров требуются лазерные источники света, иначе длина когерентности может оказаться меньше оптической разности хода. Порядки полос в этом случае могут составлять десятки тысяч (для оси системы колец имеем $m = 2dn/\lambda$).

При использовании реальных протяженных источников полосы равной толщины оказываются локализованными на по-

верхности пленок или зазоров, а полосы равного наклона – на бесконечности. Для случая точечных источников это различие теряется: оба типа полос делокализованы, то есть они наблюдаются в любой точке области перекрытия интерферирующих пучков.

Просветление оптических элементов

Рассмотрим тонкую пленку, нанесенную на поверхность оптического элемента, причем показатели преломления воздуха, пленки и материала, из которого изготовлен элемент, удовлетворяют соотношению $n_0 < n_1 < n_2$. Поскольку фазовый сдвиг на 180° возникает при отражении от оптически более плотной среды, оба интерферирующих луча, отраженных от пленки и оптического элемента, претерпевают одинаковый скачок фазы и взаимной расфазировки не происходит.

Можно показать, что при толщине пленки $d = \lambda/4n_1$ коэффициент отражения по интенсивности $R = I_r/I_i$ минимален и определяется выражением

$$R = \left(\frac{n_0 n_2 - n_1^2}{n_0 n_2 + n_1^2} \right)^2. \quad (5.25)$$

Нетрудно заметить, что $R = 0$ при выполнении условия

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}. \quad (5.26)$$

Это условие имеет простое физическое объяснение. Коэффициент отражения на границе двух сред при нормальном падении зависит только от *отношения* показателей преломления (см. формулы (4.21) и (4.24)). На границе раздела «воздух – пленка» это отношение равно n_1/n_0 , на границе «пленка – оптический элемент» – n_2/n_1 . Приравнявая эти выражения, получаем условие (5.26).

Эффект уменьшения отражения нанесением такой пленки называется *просветлением оптики*, он широко применяется для уменьшения потерь света в оптических приборах. Однако

полное просветление может быть достигнуто лишь для одной длины волны, где выполняется соотношение $\lambda = 4dn_1$.

5.3.2 Метод деления волнового фронта

Применение этого метода предполагает формирование вторичных источников из единого волнового фронта путем выделения различных его частей. Все основные интерференционные схемы, основанные на методе деления волнового фронта, тем или иным образом *сводятся к схеме Юнга* (см. рисунок 5.3). Здесь необходимо сформировать вместо одного источника излучения два, желательно *на минимальном расстоянии* друг от друга, с целью получения полос *максимальной ширины* в области перекрытия пучков.

Бипризма Френеля (рисунок 5.15) представляет собой две клиновидные призмы, соединенные основаниями, и для точечного излучателя S формирует два мнимых источника S_1 и S_2 . Преломляющий угол α , одинаковый для обеих половин, будем считать малым, составляющим единицы минут.

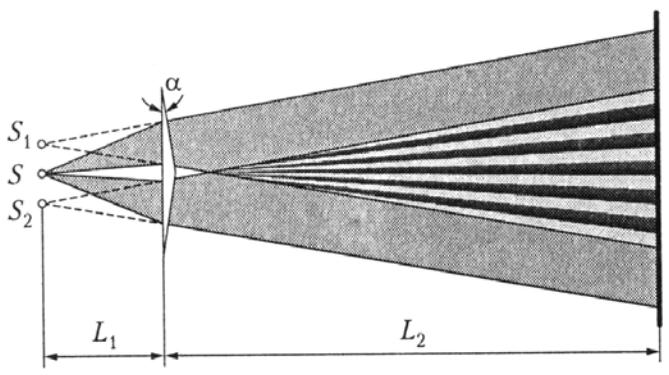


Рисунок 5.15 – Бипризма Френеля

Для параксиальных лучей, распространяющихся под малым углом к оптической оси, каждый клин отклоняет их к своему

основанию на угол $\theta \approx (n-1)\alpha$. Это приводит к смещению изображения источника на величину $SS_1 = L_1 \operatorname{tg} \theta \approx L_1 \theta$.

Определим ширину интерференционной полосы на экране наблюдения как расстояние между соседними минимумами Δx в его центре. Из условия минимума

$$\Delta r = \lambda/2 = \sqrt{(L_1 + L_2)^2 + (d + \Delta x)^2/4} - \sqrt{(L_1 + L_2)^2 + (d - \Delta x)^2/4},$$

где $d = S_1 S_2 \approx 2L_1(n-1)\alpha$ – расстояние между мнимыми источниками (по сути дела, расстояние между отверстиями в интерферометре Юнга), получаем

$$\Delta x \approx \frac{L_1 + L_2}{d} \lambda \approx \frac{L_1 + L_2}{2L_1(n-1)\alpha} \lambda. \quad (5.27)$$

Таким образом, ширина интерференционной полосы обратно пропорциональна преломляющему углу α .

Бизеркала Френеля (рисунок 5.16) составляют плоский угол, близкий к 180° , и позволяют за счет отражения сформировать два мнимых источника S_1 и S_2 .

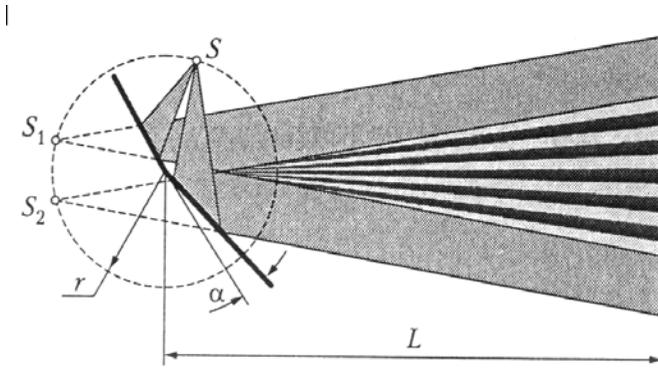


Рисунок 5.16 – Бизеркала Френеля

Как и в любой системе плоских зеркал, все три источника находятся на одинаковом расстоянии от ребра плоского угла (на окружности с центром в ребре). Хотя при отражении от

зеркала происходит фазовый сдвиг, дополнительной разности фаз не возникает, поскольку сдвигаются фазы обоих пучков. При повороте зеркала на угол α отраженный луч поворачивается на 2α , поэтому $S_1S_2 = r \operatorname{tg}(2\alpha)$. В силу малости угла α расстояние между источниками $d = S_1S_2 \approx 2r\alpha$ и ширина интерференционной полосы определяется из выражения

$$\Delta x = \frac{L+r}{d} \lambda = \frac{L+r}{2r\alpha} \lambda. \quad (5.28)$$

Билинза Бийе (рисунок 5.17) изготавливается из единой линзы с фокусным расстоянием f путем ее разрезания по диаметру и раздвигания половин на расстояние h поперек оптической оси. Другой вариант – вырезание вдоль диаметра тонкого пояса и склеивание оставшихся половин.

В обоих случаях формируются два действительных источника S_1 и S_2 с расстоянием между ними

$$d = \frac{hf}{a-f}, \quad (5.29)$$

поскольку $h/a = d/b$ и $1/a + 1/b = 1/f$.

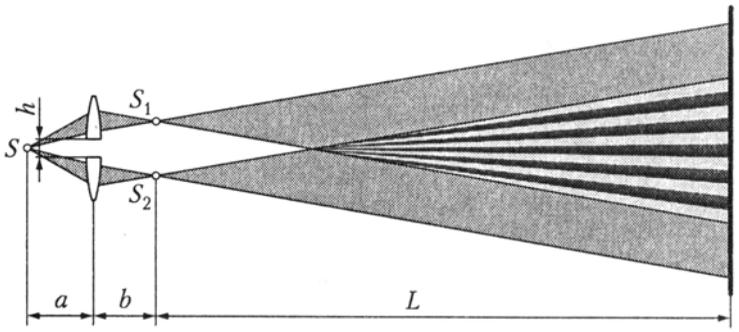


Рисунок 5.17 – Билинза Бийе

Ширина интерференционной полосы определяется как

$$\Delta x \approx \frac{L\lambda}{d} = \frac{L(a-f)}{ahf} \lambda. \quad (5.30)$$

Зеркало Ллойда (рисунок 5.18) позволяет получить интерференцию от самого источника S и его мнимого изображения S_1 в плоском зеркале M , размещенном как можно ближе к источнику. Поскольку отраженный пучок испытывает фазовый сдвиг, то **положения максимумов и минимумов интерференции меняются местами.**

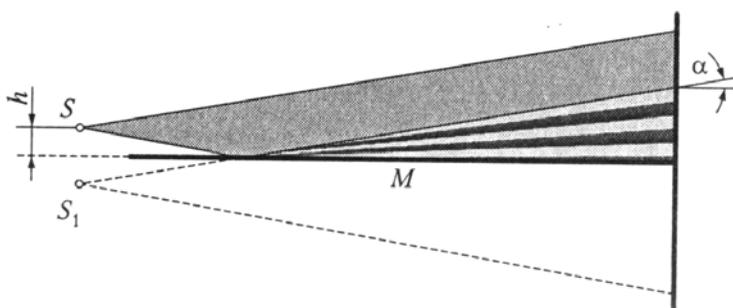


Рисунок 5.18 – Зеркало Ллойда

Ширина интерференционной полосы зависит не только от высоты источника над зеркалом h ($S_1 S_2 = 2h$), но и от угла скольжения α , так как разность хода составляет величину $\Delta r = S_1 S_2 \operatorname{tg} \alpha - \lambda/2 \approx 2h\alpha - \lambda/2$.

5.3.3 Двухлучевые интерферометры

Большинство двухлучевых интерферометров построено по схеме деления амплитуды. Наиболее известным из них является **интерферометр Майкельсона** (рисунок 5.19) с одним 50-процентным светоделителем и двумя зеркалами M_1 и M_2 . Разность хода в нем равна удвоенной разности расстояний OM_1 и OM_2 , называемых **плечами интерферометра**. Сьюстированный равноплечий интерферометр дает равномерную засветку поля зрения в плоскости наблюдения P (бесконечная полоса нулевого порядка). В случае наклона или отклонения от идеальной плоскостности одного из зеркал в поле зрения появля-

ются полосы, ширина которых обратно пропорциональна углу наклона зеркала и прямо пропорциональна фокусному расстоянию объектива L_2 .

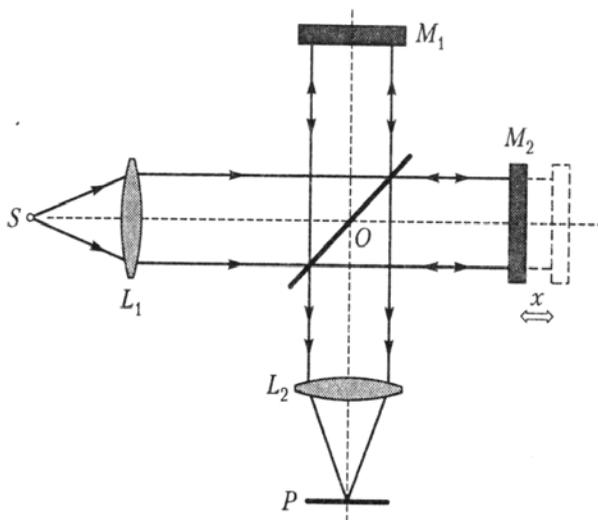


Рисунок 5.19 – Интерферометр Майкельсона

Отличительной особенностью интерферометра Майкельсона является возможность изменения разности хода в очень широких пределах. Например, с его использованием становится возможным прямое измерение длины когерентности источника излучения как расстояния x между зеркалами, при котором интерференционная картина пропадает.

Для контроля качества оптических элементов используется **интерферометр Тваймана – Грина**, схема которого (рисунок 5.20,а) является модификацией схемы интерферометра Майкельсона. В его измерительное плечо помещается проверяемый элемент. В случае проверки призмы второе плечо просто разворачивается, а отражающее зеркало оставляется плоским. Для контроля линз или многолинзовых объективов зеркало M_2 делают сферическим.

Интерферометр Маха – Цендера (рисунок 5.20,б) предназначен в первую очередь для измерения показателей преломления газов.

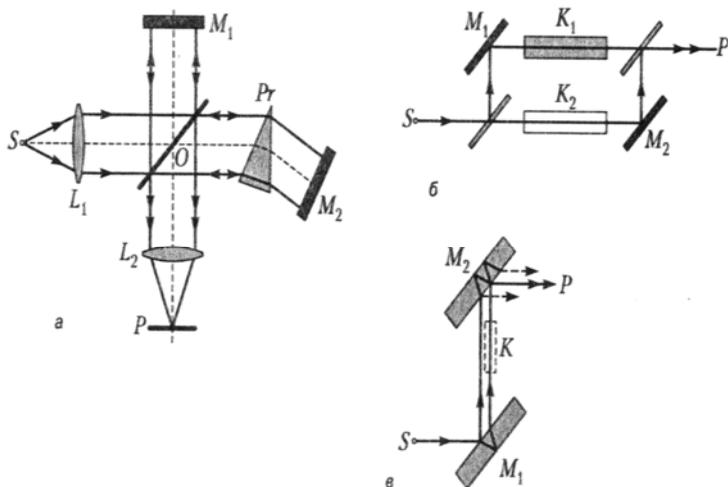


Рисунок 5.20 – Оптические схемы интерферометров:
 а – Тваймана – Грина; б – Маха – Цендера; в – Жамена

В плечи интерферометра помещаются кюветы K_1 и K_2 , одна из которых заполняется исследуемым веществом, а другая служит для компенсации разности хода, обусловленной окнами кюветы. При прохождении света через кюветы появляется добавочная разность хода $\Delta r = (n_2 - n_1)L$, где L – длина кюветы; n_1 и n_2 – показатели преломления веществ, заполняющих кюветы. Такие устройства для прецизионного измерения показателя преломления называют **интерференционными рефрактометрами**.

Такие рефрактометры обладают предельно высокой чувствительностью, определяемой отношением длины световой волны λ к длине кюветы L . Действительно, визуально можно заметить сдвиг интерференционной картины с точностью до $1/40$ порядка, что при $L = 10$ см позволяет обнаружить разность показателей преломления порядка 10^{-7} .

Интерферометр Жамена (рисунок 5.20,в), состоящий из двух толстых плоскопараллельных пластин, наиболее прост в настройке и регулировке (в оптической технологии это называется *юстировкой*). Он также может использоваться для измерения показателей преломления жидкостей и газов. Его недостаток – слишком близкое расположение обоих световых лучей, которые называются *объектным и реперным пучками*, не позволяющее размещать в нем кюветы большого диаметра.

5.3.4 Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр

Как известно из п. 5.2.2, в случае протяженного источника расфазированность колебаний, приходящих от различных его точек, приводит к уменьшению видности интерференционных полос (контраста интерференционной картины m). Для таких источников, характеризующихся *конечной пространственной когерентностью*, можно определить угловой размер удаленного источника по исчезновению видности интерференционной картины при увеличении расстояния между отверстиями в интерферометре Юнга (см. формулу (5.12)). Измеряя контраст в низких порядках интерференции, можно оценить угловой размер астрономических объектов (звезд). Следует отметить, что обычными оптическими методами получить изображения звезд в виде дисков не удается.

В звездном интерферометре Майкельсона (рисунок 5.21), собранном на базе телескопа-рефрактора, перед объективом L установлена маска с двумя щелями S_1 и S_2 . Свет на эти щели направляется системой зеркал, причем расстояние d_m между зеркалами M_1 и M_2 может изменяться. За счет этого удается охватить гораздо больший угловой размер, в котором излучение протяженного источника имеет конечную пространственную когерентность, т. е. можно увеличить возможную для изучения *апертуру интерференции* (см. п. 5.2.2). Вторая пара

неподвижных зеркал M_3 и M_4 , разнесенных на фиксированное расстояние d_s , обеспечивает постоянство ширины интерференционных полос, определяемой в данном случае как $\Delta x = f\lambda/d_s$. Таким образом, при изменении расстояния d_m интерференционная картина сохраняет свою периодичность, что существенно повышает точность измерения её контраста.

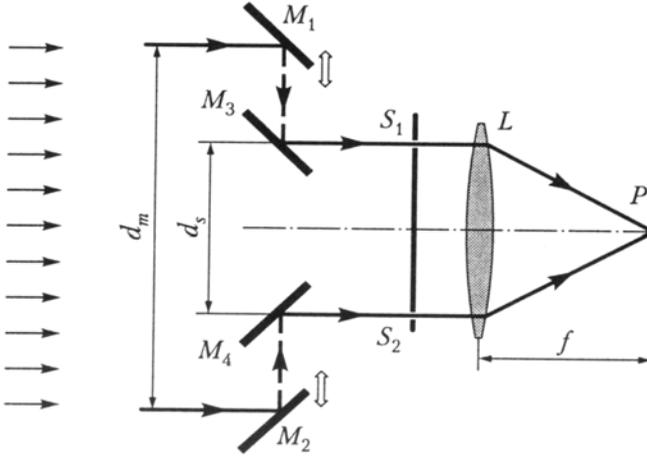


Рисунок 5.21 – Звездный интерферометр

При увеличении расстояния d_m видность полос в плоскости P падает. Определив значение d_m , при котором $m(d_m) \rightarrow 0$, можно оценить угловой размер источника φ . Можно показать, что в предположении о равномерном распределении интенсивности на источнике контраст интерференционной картины определяется как

$$m = \left(\frac{\sin(\pi d_m \varphi / \lambda)}{\pi d_m \varphi / \lambda} \right)^2. \quad (5.31)$$

Эта функция обращается в ноль при $d_m = \lambda/\varphi$. Несмотря на высокие требования, предъявляемые к конструкции интерферометра, которая допускает перемещение зеркал M_1 и M_2

с сохранением их ориентации с точностью до долей длины волны, Майкельсону удалось обеспечить размер d_m , достигающий 6 м, что соответствует угловому разрешению 0,02 угловых секунды.

6 ОПТИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

6.1 Эффекты взаимодействия оптического излучения с веществом и их классификация

Распространение оптического излучения в веществе (материальной среде) сопровождается их взаимодействием. Именно благодаря взаимодействию света (электромагнитного излучения) с веществом можно его обнаруживать, усиливать, генерировать, преобразовывать и т. д. Схему взаимодействия излучения с веществом можно условно представить в виде, приведенном на рисунке 6.1. Входное излучение может являться как монохроматической плоской волной, так и полем, представляющим суперпозицию плоских волн с различными направлениями распространения и частотами.

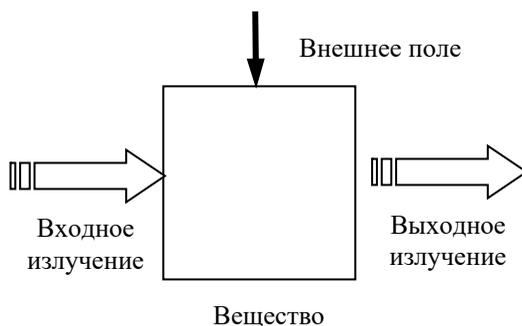


Рисунок 6.1 – Схема взаимодействия излучения с веществом

Иногда это может быть излучение, локализованное во времени (например, импульс) или (и) в пространстве (например, гауссов пучок). Полагаем, что на вещество могут действовать и некоторые низкочастотные внешние поля – электрические, магнитные, акустические, температурные и др. В основе

многих устройств управления излучением лежит именно этот подход.

Дадим некоторую классификацию эффектов взаимодействия.

1. **Воздействие вещества на излучение:** некоторые характеристики излучения на выходе отличаются от входных. Такие эффекты известны людям давно: отражение света от водной поверхности; преломление света (изображение рыбы в воде не соответствует её действительному положению) и др. Ньютон с помощью призмы разложил белый свет в спектр, Эразм Бартолин в 1669 г. наблюдал двулучепреломление света в кристалле исландского шпата. Эти примеры можно продолжать бесконечно, поскольку вещество всегда действует на излучение каким-либо образом.

2. **Воздействие излучения на вещество:** параметры вещества, характеристики, форма, состояние и другое меняются при его облучении. Простой пример – одежда хорошо высыхает на солнце. Она также выцветает на нём со временем. Сфокусированное солнечное излучение может прожечь бумагу, зажечь костер и т. д. Однако наибольшее развитие эффекты воздействия излучения на вещество, их исследования и приложения получили после появления лазеров. Достижимые здесь плотности энергии позволяют вызвать в веществе как обратимые, так и необратимые изменения. Примеры – динамические голограммы в фотохромных и фоторефрактивных материалах (обратимые); резка, сварка, сверление отверстий лазерным лучом (необратимые).

3. **Эффекты самовоздействия:** излучение действует на вещество, а изменение его свойств приводит к изменению параметров излучения (например, самофокусировка и самодефокусировка световых пучков, распространения солитонов и т. д.).

Описание эффектов взаимодействия излучения с веществом требует соединения знаний о веществе и поле. В некоторых

случаях проявляется квантовая природа вещества – поле индуцирует переходы между энергетическими уровнями частиц, из которых состоит вещество. Обычно это имеет место при совпадении частоты излучения с частотой перехода: $\hbar\omega_{mn} = E_m - E_n$ (постулат Бора).

Такие же эффекты происходят при межзонном поглощении в полупроводниках и диэлектриках, когда рождаются электронно-дырочные пары, или при примесном поглощении, когда рождается электрон в зоне проводимости или дырка в валентной зоне. В этом случае зачастую приходится прибегать к квантово-механическому описанию: заменить физические величины соответствующими операторами (проквантовать состояние вещества), применить аппарат статической физики.

Если квантовая природа вещества не проявляется, то его проще рассматривать на основе классического описания, используя макроскопические характеристики, такие как диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость и т. д.

Поле можно рассматривать с позиций квантовой электродинамики, вводя операторы рождения и уничтожения фотонов и используя другой формализм описания. Классическое описание поля предполагает использование уравнений Максвелла, хорошо вам знакомых.

Когда речь идет о взаимодействии излучения с веществом, часто используют полуклассическое описание: вещество рассматривается как квантовая система и соответствующие физические величины заменяются операторами, а поле рассматривается классически на основе уравнений Максвелла.

Многие эффекты воздействия вещества на свет можно рассматривать с позиций линейной электродинамики (линейной оптики), когда воздействием света на вещество пренебрегают. Однако при больших интенсивностях света отклик вещества становится нелинейным, то есть зависящими от поля становятся характеристики вещества. Такие эффекты рассматривает нелинейная оптика.

В настоящем разделе рассмотрим распространение световых волн в материальных средах в линейном приближении с позиций классической электродинамики. При описании будем исходить из уравнений Максвелла для сред, в которых отсутствуют свободные заряды и сторонние токи:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_{\text{cond}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.4)$$

6.2 Материальные уравнения для анизотропных сред

Анизотропия – зависимость физических свойств вещества от направления. **Естественная анизотропия** – особенность кристаллов, характеризующихся упорядоченным периодическим расположением элементарных ячеек. Различные направления в элементарной ячейке, даже состоящей из одинаковых атомов, неравноправны.

Приложение к среде, даже изначально изотропной, внешних полей (см. рисунок 6.1), приводит к **наведенной анизотропии**.

В анизотропной среде связь между векторами, являющимися тензорами первого ранга, дается тензорами второго ранга: вместо диэлектрической проницаемости ϵ вводится тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, вместо магнитной проницаемости μ – тензор магнитной проницаемости $\hat{\mu}$, вместо проводимости σ – тензор проводимости $\hat{\sigma}$.

В краткой записи материальные уравнения, характеризующие линейную зависимость одного вектора от другого и соот-

ветствующие сплошным средам, не обладающим дисперсией, представляются следующим образом:

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{E}, \quad (6.5)$$

$$\vec{B} = \hat{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (6.6)$$

$$\vec{\delta}_{\text{cond}} = \hat{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (6.7)$$

Развернутая форма этих уравнений может быть легко записана с учетом того, что векторам (тензорам первого ранга) соответствуют матрицы-столбцы

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{H} = \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{D} = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{\delta}_{\text{cond}} = \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{vmatrix} \quad (6.8)$$

с элементами, равными проекциям векторов на оси $x \leftrightarrow 1$, $y \leftrightarrow 2$ и $z \leftrightarrow 3$.

Материальные тензоры второго ранга выражаются квадратными матрицами:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}; \quad \hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}; \quad \hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Например, материальное уравнение (6.5) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3, \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3, \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3, \end{aligned} \quad (6.10)$$

выражающем линейную зависимость каждой компоненты вектора \vec{D} от каждой из компонент вектора \vec{E} .

Запишем уравнения (6.10) в более компактном виде:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.11)$$

Опуская далее знак суммирования, воспользуемся **правилом Эйнштейна**: если в одном и том же члене индекс суммирова-

ния повторяется дважды, то автоматически подразумевается суммирование по этому индексу от 1 до 3.

Таким образом, вместо равенства (6.11) будем пользоваться его кратким вариантом записи:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j. \quad (6.12)$$

Отметим, что рассматриваемые нами тензоры второго ранга $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ симметричны, то есть для их недиагональных компонент выполняются соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (6.13)$$

6.3 Симметричные тензоры второго ранга в различных средах

Симметричные тензоры второго ранга имеют в общем случае шесть независимых компонент – 3 диагональных и 3 недиагональных. Однако когда среда обладает симметрией, число независимых компонент уменьшается.

К *оптически изотропным средам* относятся аморфные материалы (стекла, жидкости, полимеры и др.) и кристаллы кубической системы (Si, Ge, GaAs, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ и др.), характеризующиеся наличием четырех осей симметрии третьего порядка. В таких средах существует только одна независимая компонента тензора второго ранга и он имеет одинаковый вид при любом выборе координатных осей. Например, для тензора диэлектрической проницаемости получаем

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.14)$$

то есть

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}, \quad (6.15)$$

где ε – скалярная диэлектрическая проницаемость среды; δ_{ij} – единичный симметричный тензор второго ранга.

Нетрудно видеть, что в оптически изотропной среде можно пользоваться обычными материальными уравнениями ($\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и др.).

К **одноосным** относятся кристаллы тригональной (имеют одну основную ось симметрии третьего порядка), тетрагональной (имеют одну основную ось симметрии четвертого порядка) и гексагональной (имеют одну основную ось симметрии шестого порядка) систем. В этих кристаллах принято ось z декартовой кристаллофизической системы координат совмещать с указанными осями симметрии и называть ее **оптической осью**. Тензор диэлектрической проницаемости в этом случае не зависит от выбора осей x и y и имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (6.16)$$

где ϵ_{\perp} и ϵ_{\parallel} имеют смысл диэлектрических проницаемостей для компонент поля, направленных перпендикулярно и параллельно оптической оси соответственно.

Кристаллы ромбической, моноклинной и триклинной систем относятся к **группе двuosных**, то есть имеющих две оптические оси. У кристаллов ромбической системы есть более одной оси второго порядка или более одной плоскости симметрии. Все оси кристаллофизической системы координат кристаллов ромбической системы направлены по осям симметрии второго порядка или по нормальям к плоскостям симметрии.

Тензор диэлектрической проницаемости здесь является диагональным:

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}, \quad (6.17)$$

он характеризуется тремя независимыми компонентами. Кристаллы моноклинной системы имеют лишь одну ось симметрии второго порядка, или одну плоскость симметрии, или и ось,

и плоскость. В кристаллографической системе координат с осью u , направленной по оси второго порядка или по нормали к плоскости симметрии, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & 0 & \epsilon_{31} \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ \epsilon_{31} & 0 & \epsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad (6.18)$$

требуя для описания диэлектрических свойств знания четырех независимых компонент.

У кристаллов триклинной системы нет ни осей, ни плоскостей симметрии, и симметричные тензоры второго ранга, характеризующие их физические свойства, имеют все шесть независимых компонент.

Ограничимся далее анализом распространения световых волн в *немагнитных средах*, для которых тензор магнитной проницаемости имеет вид $\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$.

6.4 Тензор диэлектрической восприимчивости

Как известно, вектор электрической индукции диэлектрической среды определяется выражением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (6.19)$$

где вектор электрической поляризации \vec{P} , равный сумме дипольных моментов, приходящихся на единицу объема диэлектрика, линейно связан с вектором напряженности приложенного поля:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \hat{\chi} \cdot \vec{E}. \quad (6.20)$$

Компоненты тензора диэлектрической восприимчивости среды $\hat{\chi}$, как можно видеть из формул (6.5), (6.19) и (6.20), связаны с компонентами тензора диэлектрической проницаемости соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}). \quad (6.21)$$

Отметим, что в общем случае векторы $\varepsilon_0 \vec{E}$ и \vec{P} по направлению не совпадают (рисунок 6.2).

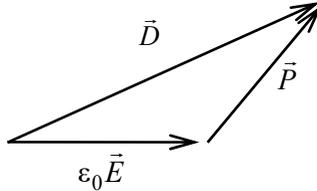


Рисунок 6.2 – Связь вектора индукции с вектором напряженности электрического поля и электрической поляризации

Линейная связь векторов индукции с соответствующими векторами напряженности, а также векторов плотности тока проводимости и электрической поляризации с напряженностью электрического поля, определяемая соотношениями (6.5)–(6.7) и (6.20), является частным случаем, относящимся к линейной электродинамике и средам без дисперсии.

Однако тензоры $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ могут быть функциями координат и времени благодаря низкочастотным полям, приложенным к веществу. Обычно предполагается, что возмущения компонент тензоров, вызванные внешними полями, существенно меньше значений компонент этих тензоров, отличных от нуля в невозмущенной среде.

Например, для компонент тензора диэлектрической проницаемости в оптически изотропных средах, одноосных кристаллах и двуосных кристаллах ромбической системы должны выполняться неравенства $\Delta\varepsilon_{ij} \ll \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$. Эти возмущения являются медленными во времени, так что выполняется условие $\Omega \ll \omega$ (Ω – частота внешнего поля; ω – частота световой волны), и в пространстве, когда $\Lambda \gg \lambda$ (Λ – простран-

ственный период вариаций $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$; λ – длина световой волны).

6.5 Материальные уравнения с учетом временной дисперсии диэлектрической проницаемости

Будем полагать $\sigma = 0$ и $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\delta}$, то есть рассмотрим диэлектрическую немагнитную среду. При высоких частотах внешнего излучения, действующего на вещество, поляризация вещества \vec{P} не успевает мгновенно отслеживать изменение поля. Здесь нарушается однозначная связь векторов электрической \vec{D} и магнитной \vec{B} индукции со значениями векторов электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в тот же момент времени. Можно утверждать, что в общем случае значения \vec{D} и \vec{B} в данный момент времени зависят от значений функций $\vec{E}(t)$ и $\vec{H}(t)$ во все предыдущие моменты времени. В линейном приближении наиболее общий вид зависимости между $\vec{D}(t)$ и $\vec{E}(t)$ может быть записан в виде интегрального соотношения

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau, \quad (6.22)$$

где $f(\tau)$ – функция времени, зависящая от свойств среды.

Всякое переменное поле может быть сведено к совокупности монохроматических компонент, в которых зависимость от времени дается как $\exp(i\omega t)$, и связь между \vec{D} и \vec{E} приобретает вид

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}, \quad (6.23)$$

где функция $\varepsilon(\omega)$ определяется как

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right). \quad (6.24)$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие диэлектрической проницаемости как коэффициента пропорциональности между \vec{D} и \vec{E} , причем коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О зависимости ε от частоты говорят как о законе её *дисперсии* (частотной дисперсии). Соотношение (6.24) можно обобщить и на анизотропные среды:

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + \int_0^{\infty} f_{ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right), \quad (6.25)$$

где $f_{ij}(\tau)$ – компоненты тензора 2-го ранга. Функция $\varepsilon(\omega)$ является комплексной:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \hat{\varepsilon}'(\omega) + i\hat{\varepsilon}''(\omega). \quad (6.26)$$

Из выражения (6.25) следует соотношение

$$\hat{\varepsilon}(-\omega) = \hat{\varepsilon}^*(\omega), \quad (6.27)$$

или

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega); \quad \hat{\varepsilon}''(-\omega) = -\hat{\varepsilon}''(\omega). \quad (6.28)$$

Таким образом, вещественная часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а мнимая часть $\varepsilon''(\omega)$ – нечетной функцией частоты. В пределе $\omega \rightarrow 0$ величина ε' стремится к статической диэлектрической проницаемости, а ε'' пропорциональна ω . Физически комплексная часть диэлектрической проницаемости соответствует потерям в среде, т. е. затуханию волн при их распространении.

При использовании комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ отпадает необходимость во введении проводимости $\hat{\sigma}$ на частоте световой волны. Можно, однако, пользоваться и тензором $\hat{\sigma}$ вместо $\hat{\varepsilon}''$:

$$\varepsilon_{ij}'' = \sigma_{ij}(\omega)/\omega, \quad (6.29)$$

сохраняя в уравнении Максвелла (6.1) $\hat{\sigma} \neq 0$.

Для изотропной среды $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$ связаны соотношения Крамерса – Кронига

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right), \quad (6.30)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right), \quad (6.31)$$

где интеграл от полюсного выражения понимается в смысле его главного значения.

6.6 Пространственная дисперсия

Наряду с частотной дисперсией в диэлектриках может проявляться и *пространственная дисперсия*: значение электрической индукции $\vec{D}(\vec{r})$ зависит от значений электрической напряженности не только в данной точке \vec{r} , но и от её значений в некоторой области пространства вокруг этой точки – $\vec{E}(\vec{r}')$. Такая связь \vec{D} и \vec{E} называется *нелокальной* и в общем случае может быть представлена в виде

$$D_i(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[E_i(\vec{r}) + \int f_{ik}(\vec{r} - \vec{r}') E_k(\vec{r}') dV' \right]. \quad (6.32)$$

Применяя разложение по плоским монохроматическим волнам, в общем случае *пространственной* и *временной дисперсии* можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) &= \\ &= \varepsilon_0 \left(\delta_{ik} + \int_0^{\infty} \int_V f_{ik}(\omega, \vec{r} - \vec{r}') \exp\{i[\omega\tau - \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \} d\tau dV' \right), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) E_k, \quad (6.34)$$

$$f_{ik}(\omega, \vec{r} - \vec{r}') = f_{ki}(\omega, \vec{r}' - \vec{r}).$$

Свойства симметрии для компонент тензора ε_{ik} выражаются соотношениями

$$\varepsilon_{ik}(-\omega, -\vec{k}) = \varepsilon_{ki}^*(\omega, \vec{k}); \quad \varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ki}(\omega, -\vec{k}). \quad (6.35)$$

Если пространственная дисперсия является слабой, то тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k})$ можно разложить по степеням \vec{k} и ограничиться членами первого порядка малости:

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ik}^{(0)}(\omega) - i\gamma_{ikl}k_l, \quad (6.36)$$

где $\varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$; γ_{ikl} – некоторый тензор третьего ранга, зависящий от частоты.

Для обычных диэлектрических сред это есть разложение по степеням a/λ , где a – атомные размеры (для кристаллов – размер элементарной ячейки), поэтому оно справедливо при $a/\lambda \ll 1$. Отвечающая проницаемости (6.36) связь между \vec{D} и \vec{E} в монохроматическом поле имеет вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \quad (6.37)$$

Из второго условия симметрии в выражении (6.35) получаем

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \quad (6.38)$$

Как известно, в отсутствие поглощения тензор $\hat{\varepsilon}$ должен быть эрмитовым, т. е. $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*$. Отсюда

$$\gamma_{ikl} = -\gamma_{kil}^*. \quad (6.39)$$

Объединяя равенства (6.38) и (6.39), получаем, что тензор γ_{ikl} должен быть вещественным антисимметричным:

$$\gamma_{ikl} = \varepsilon_0(c/\omega)\delta_{ikm}g_{ml}, \quad (6.40)$$

где g_{ml} – псевдотензор второго ранга; δ_{ikm} – единичный антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивита). Компонент этого тензора $\delta_{123} = 1$, а компоненты, получаемые перестановкой индексов нечетное число раз, равны минус единице: $\delta_{213} = \delta_{321} = \delta_{132} = -1$. При четном количестве перестановок имеем $\delta_{231} = \delta_{312} = \delta_{123} = 1$.

Физический смысл материального уравнения для среды с пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости (6.37) состоит в том, что $D_i(\vec{r})$ определяется как полем $E_k(\vec{r})$ в данной точке, так и полем вблизи этой точки (то есть его градиентом при слабом изменении).

Второй член в правой части формулы (6.37) характеризует вклад *нелокальной* составляющей вектора поляризации в вектор электрической индукции среды, в то время как первый член описывает локальную часть – электрическую индукцию в данной точке пространства, определяемую напряженностью поля в той же самой точке.

6.7 Световые волны в прозрачных немагнитных кристаллах

6.7.1 Волновое уравнение

Рассмотрим распространение плоских монохроматических электромагнитных волн с векторами поля

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]; \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \vec{D}^m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]; \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}^m \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right]\end{aligned}\quad (6.41)$$

в немагнитной ($\mu_{ij} = \mu_0 \delta_{ij}$) и непроводящей ($\sigma_{ij} = 0$) среде.

Волновой вектор плоской волны представим в виде

$$\vec{k} = k_0 n \vec{m} = \frac{2\pi}{\lambda} n \vec{m} = \frac{\omega}{c} n \vec{m}, \quad (6.42)$$

где n – показатель преломления волны в данной среде, характеризующий замедление фазовой скорости v относительно скорости света в вакууме ($n = c/v$); \vec{m} – единичный вектор волновой нормали.

В рассматриваемом случае уравнения Максвелла (6.1)–(6.4) могут быть представлены в следующей форме:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}, \quad (6.43)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_0 \vec{H}, \quad (6.44)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0, \quad (6.45)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0. \quad (6.46)$$

Из уравнений (6.43) и (6.44) получаем волновое уравнение для анизотропной среды:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \vec{D} = 0. \quad (6.47)$$

Далее воспользуемся материальным уравнением вида (6.5) с использованием тензора относительной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}^r$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E}. \quad (6.48)$$

В этом случае с учетом соотношения (6.42) для волнового вектора волновое уравнение (6.47) может быть переписано в виде

$$n^2 \vec{m} \times \vec{m} \times \vec{E} + \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E} = 0. \quad (6.49)$$

Используя известное соотношение $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, перепишем волновое уравнение (6.49):

$$n^2 [\vec{E} - \vec{m}(\vec{m} \cdot \vec{E})] - \hat{\epsilon}^r \cdot \vec{E} = 0. \quad (6.50)$$

Выражая компоненты вектора напряженности электрического поля в среде, определяемого системой (6.41), через амплитуду волны E^m и ее единичный вектор поляризации \vec{e}

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E^m \vec{e} \exp\left[i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right], \quad (6.51)$$

из формулы (6.50) получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений для компонент этого вектора e_j :

$$\left[n^2 \left(\delta_{ij} - m_i m_j\right) - \varepsilon_{ij}^r\right] e_j = 0. \quad (6.52)$$

Отметим, что для среды с конечной проводимостью $\sigma_{ij} \neq 0$ и с учетом пространственной дисперсии компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости с использованием соотношений (6.26), (6.29), (6.36) и (6.40) могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{ij}^r = \frac{\varepsilon_{ij}^{(0)}}{\varepsilon_0} - i \frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_0 \omega} - i \delta_{ijk} g_{kl} m_l. \quad (6.53)$$

Система уравнений (6.52) позволяет найти показатели преломления и векторы поляризации световых волн, которые могут распространяться в среде с данной диэлектрической проницаемостью. Рассмотрим далее волны в важнейших типах прозрачных сред.

6.7.2 Световые волны в оптически неактивных изотропных средах

В оптически неактивных изотропных средах (кубических кристаллах и аморфных материалах) тензоры $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ являются диагональными и имеют по одной независимой компоненте

$$\varepsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}, \quad (6.54)$$

а $g_{kl} = 0$. В этом случае из системы (6.52) получаем

$$\left[n^2 \left(\delta_{ij} - m_i m_j\right) - \varepsilon \delta_{ij}\right] e_j = 0, \quad (6.55)$$

где $\dot{\epsilon} = n_0^2 - i\sigma/(\omega\epsilon_0)$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Из уравнений (6.45) и (6.48) с учетом выражений (6.51) и (6.54) легко показать, что в оптически изотропной среде вектор поляризации световой волны \vec{e} ортогонален вектору волновой нормали \vec{m} :

$$m_j e_j = 0. \quad (6.56)$$

С учетом соотношения (6.56) уравнение (6.55) упрощается:

$$(n^2 - \dot{\epsilon})e_i = 0. \quad (6.57)$$

Полагая среду слабо поглощающей ($\sigma/(\omega\epsilon_0) \ll n_0^2$), находим отсюда комплексный показатель преломления световой волны:

$$n = n' - in'' = \sqrt{\dot{\epsilon}}; \quad n' = n_0; \quad n'' = \frac{\sigma}{2\omega n_0 \epsilon_0}. \quad (6.58)$$

Уравнение (6.57) не накладывает ограничений на вектор поляризации световой волны \vec{e} , поэтому он может быть ориентирован произвольно в плоскости, перпендикулярной вектору волновой нормали \vec{m} .

Пользуясь определением (3.70) для комплексного вектора Пойнтинга $\dot{\vec{\Pi}}$ и выражая вектор $\dot{\vec{H}}^*$ из уравнения (6.44) с учетом соотношений (6.42), (6.51), (6.54) и (6.58), представим вектор Пойнтинга для плоской световой волны в непроводящей среде (вектор в данном случае будет вещественным):

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* = n_0 \frac{|E^m|^2}{2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \vec{e} \times \vec{m} \times \vec{e} = \\ &= n_0 \frac{|E^m|^2}{2W_0} [\vec{m} - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{m})]. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Выражение (6.59) будет справедливо и для анизотропных немагнитных сред. Учитывая условие (6.56), для оптически изотропных сред из формулы (6.59) получаем:

$$\vec{\Pi} = n_0 \frac{|E^m|^2}{2W_0} \vec{m}. \quad (6.60)$$

Отсюда следует условие коллинеарности векторов \vec{m} и $\vec{\Pi}$ в изотропной среде.

6.7.3 Световые волны в изотропных непоглощающих средах с естественной оптической активностью

При прохождении линейно поляризованного света через оптически изотропную среду, обладающую естественной оптической активностью (гиротропией), плоскость, в которой колеблется ее вектор поляризации, поворачивается на некоторый угол α . Естественная оптическая активность является проявлением пространственной дисперсии, которая количественно характеризуется псевдотензором второго ранга g_{ml} , введенным ранее в подразд. 6.6.

Далее рассмотрим распространение световых волн в кубических кристаллах и аморфных средах, обладающих естественной оптической активностью и называемых поэтому гиротропными. В отсутствие поглощения в таких средах тензор проводимости $\hat{\sigma} = 0$, а тензор $\hat{\epsilon}^r$ и псевдотензор \hat{g} являются диагональными и имеют по одной независимой компоненте:

$$\epsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij}; \quad g_{ij} = g_0 \delta_{ij}, \quad (6.61)$$

где n_0 – показатель преломления среды; g_0 – параметр гиротропии.

Отметим, что угол поворота плоскости поляризации α за счет естественной оптической активности в оптически изо-

тропных средах пропорционален параметру гиротропии g_0 . Таким образом, компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости для рассматриваемых сред могут быть получены из выражения (6.53):

$$\varepsilon_{ij}^r = n_0^2 \delta_{ij} - ig_0 \delta_{ijk} m_k. \quad (6.62)$$

Для плоских волн вида (6.51) из выражений (6.45), (6.48) и (6.62) нетрудно показать, что и в этом случае вектор поляризации \vec{e} ортогонален волновой нормали, то есть удовлетворяет соотношению (6.56). С учетом равенств (6.62) и (6.56) из (6.52) получаем

$$\left[(n^2 - n_0^2) \delta_{ij} + ig_0 \delta_{ijk} m_k \right] e_j = 0. \quad (6.63)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением распространения волн вдоль оси z и учтем, что в изотропной среде физические свойства от направления не зависят. Таким образом, полученные ниже результаты будут справедливы для любого направления распространения света. В нашем частном случае имеем $m_1 = m_2 = 0$ и $m_3 = 1$. В результате система уравнений (6.63) принимает вид

$$\begin{cases} (n^2 - n_0^2) e_1 + ig_0 e_2 = 0, \\ -ig_0 e_1 + (n^2 - n_0^2) e_2 = 0, \\ (n^2 - n_0^2) e_3 = 0 \end{cases} \quad (6.64)$$

и распадается на систему уравнений

$$\begin{cases} (n^2 - n_0^2) e_1 + ig_0 e_2 = 0, \\ -ig_0 e_1 + (n^2 - n_0^2) e_2 = 0 \end{cases} \quad (6.65)$$

и уравнение

$$(n^2 - n_0^2) e_3 = 0. \quad (6.66)$$

Последнее уравнение удовлетворяется автоматически, поскольку $\vec{e} \perp \vec{m}$, то есть $m_k e_k = 0$ и $e_3 = 0$. Чтобы система уравнений (6.65) имела нетривиальное решение, её определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (n^2 - n_0^2) & ig_0 \\ -ig_0 & (n^2 - n_0^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.67)$$

Отсюда получаем следующее биквадратное уравнение:

$$n^4 - 2n_0^2 n^2 + (n_0^4 - g_0^2) = 0. \quad (6.68)$$

Решение уравнения (6.68) для неизвестного показателя преломления световой волны имеет вид

$$n_{1,2}^2 = n_0^2 \pm g_0. \quad (6.69)$$

Учитывая, что показатели преломления должны быть положительными, а пространственная дисперсия является слабым эффектом, так что $g_0 \ll n_0$, и отбрасывая члены второго порядка малости, из решения (6.69) находим показатели преломления для так называемых *собственных волн*:

$$n_1 = n_0 + \frac{g_0}{2n_0}; \quad n_2 = n_0 - \frac{g_0}{2n_0}. \quad (6.70)$$

Чтобы определить векторы поляризации собственных волн, найдем из любого уравнения системы (6.65) связь его составляющих e_1 и e_2 :

$$e_2 = i \frac{n^2 - n_0^2}{g_0} e_1, \quad \text{или} \quad e_2 = i \frac{g_0}{n^2 - n_0^2} e_1. \quad (6.71)$$

Подставляя в любое из этих уравнений n_1^2 и n_2^2 , получаем

$$e_2^{(1)} = ie_1^{(1)}; \quad e_2^{(2)} = -ie_1^{(2)}, \quad (6.72)$$

где индексы (1) и (2) относятся к первой и второй собственным волнам с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно.

Векторы поляризации являются единичными:

$$\left| e_1^{(1)} \right|^2 + \left| e_2^{(1)} \right|^2 = 1 \quad \text{и} \quad \left| e_1^{(2)} \right|^2 + \left| e_2^{(2)} \right|^2 = 1.$$

С учетом этого из соотношений (6.72) находим:

$$\vec{e}_1 = \frac{\bar{x}^0 + i\bar{y}^0}{\sqrt{2}}; \quad \vec{e}_2 = \frac{\bar{x}^0 - i\bar{y}^0}{\sqrt{2}}, \quad (6.73)$$

где введены орты \bar{x}^0 и \bar{y}^0 вместо \vec{i} и \vec{j} соответственно.

Таким образом, в оптически изотропной среде с естественной оптической активностью могут распространяться две собственные волны с круговой поляризацией:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E^{(m1)} \vec{e}_1 \exp[i(\omega t - k_0 n_1 z)] = \\ &= E^{(m1)} \frac{\bar{x}^0 + i\bar{y}^0}{\sqrt{2}} \exp\{i[\omega t - k_0(n_0 + \rho/k_0)z]\}, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= E^{(m2)} \vec{e}_2 \exp[i(\omega t - k_0 n_2 z)] = \\ &= E^{(m2)} \frac{\bar{x}^0 - i\bar{y}^0}{\sqrt{2}} \exp\{i[\omega t - k_0(n_0 - \rho/k_0)z]\}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

где параметр гиротропии выражен через удельное оптическое вращение ρ :

$$g_0 = \frac{2n_0\rho}{k_0}. \quad (6.76)$$

Действительно, для каждой из собственных волн \vec{E}_1 и \vec{E}_2 модули проекций векторных амплитуд на оси x и y одинаковы, а по фазе проекция на ось y сдвинута на угол $\varphi_1 = -\pi/2$ относительно проекции на ось x для первой волны и на угол $\varphi_2 = \pi/2$ – для второй. Согласно подразд. 3.3 первая собственная волна имеет правую круговую поляризацию, а вторая – левую.

Решения волновых уравнений в виде совокупности собственных (или нормальных) волн обладают следующими основными свойствами:

1) каждая собственная волна является свободным (без стороннего воздействия) движением системы и может быть возбуждена независимо от других собственных волн специальным выбором начальных и граничных условий;

2) произвольный волновой процесс в системе без источников можно представить в виде суперпозиции собственных волн;

3) в случае монохроматических процессов средний по периоду поток энергии равен сумме потоков энергии отдельных собственных волн.

Проанализируем распространение линейно поляризованного света через оптически изотропный слой, обладающий гиротропными свойствами. Предположим, что такая волна имеет плоскость поляризации, проходящую через ось x при $z = 0$, где расположена входная грань образца (рисунок 6.3), и распространяется при $z < 0$ точно вдоль оси z :

$$\vec{E}_0 = E^{(m0)} \vec{x}^0 \exp[i(\omega t - k_0 z)].$$

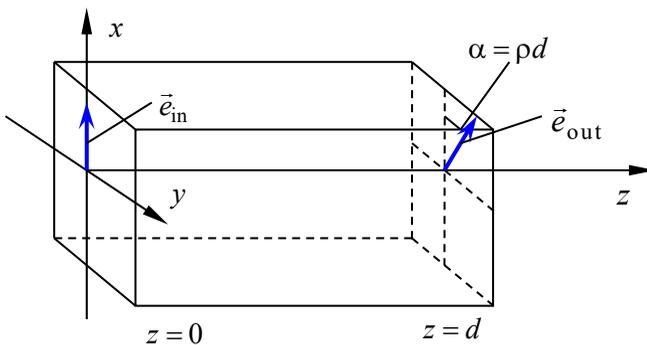


Рисунок 6.3 – Распространение линейно поляризованного света через оптически изотропный слой, обладающий гиротропными свойствами

Эта волна возбуждает в образце линейную суперпозицию собственных волн \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Амплитуды этих волн могут быть найдены из условия непрерывности тангенциальных составляющих вектора \vec{E} .

Пренебрегая для простоты отраженной волной (просветленная входная грань), получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{(m1)} + E^{(m2)}) = E^{(m0)}, \\ i\frac{E^{(m1)}}{\sqrt{2}} - i\frac{E^{(m2)}}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \quad (6.77)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E^{(m1)} = E^{(m2)} &= \frac{E^{(m0)}}{\sqrt{2}}; \\ \vec{E}(z, t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \frac{E^{(m0)}}{2} \exp[i(\omega t - k_0 n_0 z)] \times \\ &\times \left\{ \vec{x}^0 [\exp(-ipz) + \exp(ipz)] + i\vec{y}^0 [\exp(-ipz) - \exp(ipz)] \right\} = \\ &= E^{(m0)} \exp[i(\omega t - k_0 n_0 z)] \left[\vec{x}^0 \cos(pz) + \vec{y}^0 \sin(pz) \right]. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Найдем далее отношение проекций вектора напряженности светового поля на оси y и x , которое, как видно из (6.78), является линейно поляризованным в любой точке рассматриваемой гиротропной среды:

$$\frac{E_y^{(m)}}{E_x^{(m)}} = \operatorname{tg}(pz) = \operatorname{tg}(\alpha), \quad (6.79)$$

где $\alpha = pz$ определяет угол поворота плоскости поляризации светового поля в среде по отношению к входной поляризации.

Таким образом, удельное оптическое вращение ρ характеризует угол поворота плоскости поляризации при прохождении волной единичного расстояния.

Удельное вращение для кубических кристаллов класса силенитов имеет сильную зависимость от длины волны и достигает десятков угловых градусов на миллиметр. Для кристалла $\text{V}_{12}\text{SiO}_{20}$ на длине волны 633 нм $\rho = 22^\circ / \text{мм}$, а для $\text{V}_{12}\text{TiO}_{20}$ оно равно $6,5^\circ / \text{мм}$.

Отсюда легко оценить значения параметра гиротропии, определяемого соотношением (6.76) как $g_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4}$. Показатель преломления для этих кристаллов $n_0 \sim 2,5 - 2,6$. Поэтому используемое выше неравенство $g_0 \ll n_0$ выполняется с большим запасом.

Световые волны с круговой поляризацией часто называют **циркулярно поляризованными**. Как было рассмотрено выше, в гиротропных оптически изотропных средах, где параметр гиротропии $g_0 \neq 0$ (удельное оптическое вращение $\rho \neq 0$), могут распространяться две собственные волны с различными показателями преломления.

Оптические среды, в которых показатели преломления собственных волн отличаются друг от друга, называют **двулучепреломляющими** – свет с различной поляризацией здесь преломляется по-разному, так как $n_1 \neq n_2$:

$$n_1 = n_0 + \frac{\rho}{k_0}; \quad n_2 = n_0 - \frac{\rho}{k_0}. \quad (6.80)$$

Первая собственная волна будет **правоциркулярно поляризованной**, вторая – **левоциркулярно поляризованной**.

Поэтому оптически изотропные среды с естественной оптической активностью (гиротропией) называют **средами с циркулярным двулучепреломлением**.

Величину двулучепреломления характеризуют разностью $\Delta n = n_1 - n_2$.

В рассмотренных выше оптически изотропных средах с естественной оптической активностью $\Delta n = 2\rho/k_0$, причем двулучепреломление является очень слабым. Для кристалла

$\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ на длине волны 633 нм оно достигает величины $\Delta n = 7,74 \cdot 10^{-5}$.

6.7.4 Световые волны в средах с линейным двулучепреломлением

К средам с *линейным двулучепреломлением*, строго говоря, относятся только те одноосные и двуосные кристаллы, в которых псевдотензор $\hat{g} = 0$. В этих кристаллах собственные световые волны имеют линейную поляризацию. Однако в одноосных и двуосных гиротропных кристаллах, где $\hat{g} \neq 0$, собственные волны имеют поляризацию, очень близкую к линейной, за исключением случаев их распространения вдоль оптических осей. Это обусловлено тем, что линейное двулучепреломление на порядок превышает циркулярное. Например, для кристалла кварца, обладающего естественной оптической активностью, линейное двулучепреломление составляет величину $\Delta n = 0,009$ на длине волны 589 нм при распространении света ортогонально оптической оси.

Рассмотрим распространение света в среде с чисто линейным двулучепреломлением, полагая, что $\hat{g} = 0$, а тензор $\hat{\epsilon}^r$ может иметь наряду с диагональными и недиагональные компоненты. Векторы поляризации собственных волн в этом случае определяются уравнением (6.52), которое может быть переписано в виде

$$A_{ij}e_j = 0; \quad A_{ij} = \left[n^2 (\delta_{ij} - m_i m_j) - \epsilon_{ij}^r \right]. \quad (6.81)$$

Приравнивая определитель данной однородной системы алгебраических уравнений к нулю, найдем дисперсионное уравнение:

$$n^4 \left(\epsilon_{mk}^r m_m m_k \right) - n^2 \left[\left(\epsilon_{mk}^r m_m m_k \right) \epsilon_{ll}^r - \epsilon_{ml}^r \epsilon_{lk}^r m_m m_k \right] + \left\| \epsilon_{mk}^r \right\| = 0, \quad (6.82)$$

биквадратное относительно показателя преломления собственных волн и называется *уравнением Френеля*.

Нетрудно показать, что в оптически анизотропной среде, за исключением случаев, когда свет распространяется вдоль оптических осей, векторы поляризации собственных волн могут быть найдены в виде

$$e_j^{(\alpha)} = \frac{a_{kj}^{(\alpha)}}{\sqrt{|a_{k1}^{(\alpha)}|^2 + |a_{k2}^{(\alpha)}|^2 + |a_{k3}^{(\alpha)}|^2}}, \quad (6.83)$$

где $a_{kj}^{(\alpha)}$ – алгебраическое дополнение элемента $A_{kj}^{(\alpha)}$ в определителе системы уравнений (6.81). Индекс α означает, что величины a_{kj} и A_{kj} вычисляются для собственных волн с показателем преломления n_α ($\alpha = 1, 2$).

Компоненты вектора Пойнтинга для световых волн, распространяющихся в среде с линейным двулучепреломлением, определяются из полученного ранее соотношения (6.59):

$$\Pi_k^{(\alpha)} = n_\alpha \frac{|E^{m\alpha}|^2}{2W_0} (\delta_{kj} - e_k^{(\alpha)} e_j^{(\alpha)}) m_j. \quad (6.84)$$

Поскольку условие ортогональности векторов поляризации $\vec{e}^{(\alpha)}$ и волновой нормали \vec{m} в общем случае не выполняется, т. е. не всегда $e_j^{(\alpha)} m_j = 0$, то в такой среде векторы \vec{m} и $\vec{\Pi}$ могут быть неколлинеарными (рисунок 6.4), причем угол γ между ними тот же самый, что и между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Вектору потока энергии (вектору Пойнтинга) соответствует единичный вектор этого направления \vec{s} , называемый *лучевым вектором*. Если на пути световой волны в кристалле поместить экран с узкой диафрагмой, то направление прошедшего через диафрагму луча будет определяться именно вектором \vec{s} (рисунок 6.5).

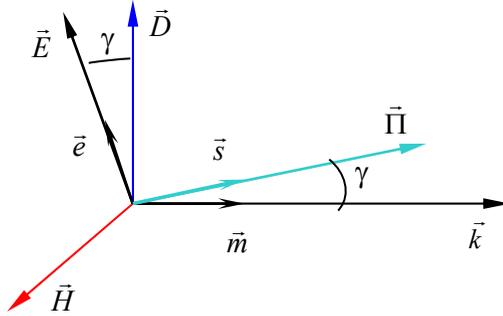


Рисунок 6.4 – Вектор Пойнтинга для световых волн в среде с линейным двулучепреломлением

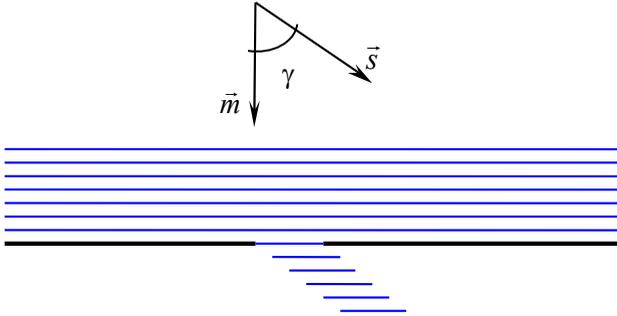


Рисунок 6.5 – Волна и луч в анизотропной среде

Наиболее простой вид выражения (6.81)–(6.83) принимают в одноосных кристаллах, когда отличны от нуля только диагональные компоненты тензора $\hat{\epsilon}^r$:

$$\epsilon_{11}^r = \epsilon_{22}^r = n_o^2 - i \frac{\sigma_1}{\omega \epsilon_0} = \dot{\epsilon}_1; \quad \epsilon_{33}^r = n_e^2 - i \frac{\sigma_3}{\omega \epsilon_0} = \dot{\epsilon}_3, \quad (6.85)$$

где n_o и n_e – *обыкновенный* и *необыкновенный показатели преломления кристалла* соответственно.

В этом случае из уравнения Френеля (6.82) находим простые соотношения для комплексных показателей преломления *обыкновенной* и *необыкновенной волн*:

$$n_{ord}^2 = \dot{\epsilon}_1, \quad (6.86)$$

$$n_{eord}^2 = \frac{\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 (m_1^2 + m_2^2) + \dot{\epsilon}_3 m_3^2}. \quad (6.87)$$

Единичные векторы поляризации обыкновенных световых волн могут быть получены из формулы (6.83) в виде

$$\begin{aligned} e_1^{ord} &= -\frac{m_2}{\sqrt{1-m_3^2}}; \\ e_2^{ord} &= \frac{m_1}{\sqrt{1-m_3^2}}; \\ e_3^{ord} &= 0. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Таким образом, показатель преломления обыкновенной волны, являющейся одной из двух собственных волн в одноосном кристалле, не зависит от ее направления распространения, а соответствующий вектор поляризации лежит в плоскости xu и ортогонален единичному вектору волновой нормали. Лучевой вектор \vec{s} для обыкновенной волны совпадает с вектором \vec{m} . В одноосном кристалле без потерь при $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ из соотношения (6.86) получаем

$$n_{ord} = n_o. \quad (6.89)$$

Для необыкновенных световых волн ограничимся анализом их распространения в среде без потерь ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$). Выражая компоненты вектора \vec{m} через углы сферической системы координат $m_1 = \sin \theta \cos \alpha$, $m_2 = \sin \theta \sin \alpha$ и $m_3 = \cos \theta$, из соотношения (6.87) получаем

$$n_{eord} = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}. \quad (6.90)$$

Компоненты вектора поляризации необыкновенной волны найдем из выражения (6.83):

$$\begin{aligned}
e_1^{eord} &= -\frac{n_e^2 \cos \theta \cos \alpha}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}, \\
e_2^{eord} &= -\frac{n_e^2 \cos \theta \sin \alpha}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}, \\
e_3^{eord} &= \frac{n_o^2 \sin \theta}{\sqrt{n_e^4 \cos^2 \theta + n_o^4 \sin^2 \theta}}.
\end{aligned} \tag{6.91}$$

Если от начала координат отложить во всех направлениях \vec{m} отрезки длиной $n(\vec{m})$, получится двухполостная поверхность, соответствующая двум решениям уравнения Френеля (6.82) $n_1(\vec{m})$ и $n_2(\vec{m})$, называемая **поверхностью показателей преломления**. Для одноосных кристаллов она определяется в сферических координатах уравнениями (6.89), (6.90) и представляет сферу и эллипсоид вращения, касающиеся друг друга в точках, которые определяют направление оптической оси. Таким образом, оптическая ось соответствует направлению волновой нормали, для которого фазовые скорости собственных волн (обыкновенной и необыкновенной) совпадают. Отметим, что оптическая ось в одноосных кристаллах является единственной и совпадает с единственной осью симметрии 3-го, 4-го или 6-го порядка.

Если из одной точки отложить для всех направлений волновые векторы распространяющихся в кристалле волн одной частоты, то их концы образуют **поверхность волновых векторов**. От поверхности показателей преломления она отличается только масштабом: отрезки, отложенные из начала координат, имеют длину $(2\pi/\lambda)n(\vec{m})$.

Сечения поверхностей волновых векторов плоскостями xz и xy для оптически положительных ($n_e > n_o$) и оптически отрицательных ($n_o > n_e$) одноосных кристаллов показаны на рисунке 6.6.

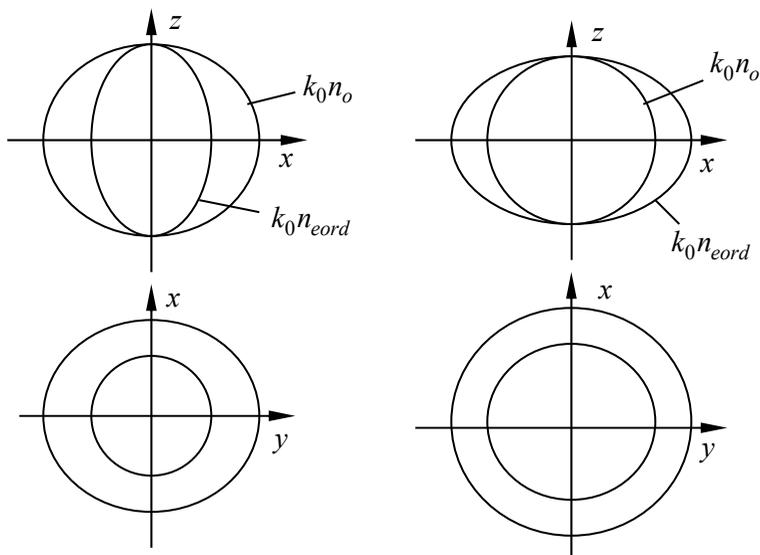


Рисунок 6.6 – Сечения поверхностей волновых векторов плоскостями xz и xy для одноосных кристаллов

6.8 Искусственная анизотропия

В результате воздействия на вещество упругими (акустическими), электрическими и магнитными полями, имеющими частоту $\Omega \ll \omega$, низкую по сравнению с частотой света, происходят изменения его структуры, но очень незначительные. Однако малая длина световой волны и значительная длина оптического пути в веществе позволяют эффективно использовать эти слабые наведенные возмущения диэлектрической и магнитной проницаемости среды $|\Delta \epsilon_{ij}| \ll \epsilon_{mm}$, $|\mu_{ij}| \ll \mu_{mm}$ для управления параметрами света.

Ниже мы ограничимся анализом влияния на распространение света в веществе наведенной анизотропии диэлектрических свойств среды, полагая $\mu = \mu_0$.

6.8.1 Электрооптическая модуляция оптического излучения

Тензорное описание электрооптического эффекта

Перепишем материальное уравнение (6.5) в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \hat{b} \cdot \vec{D}, \quad (6.92)$$

где $\hat{b} = (\hat{\varepsilon}^r)^{-1}$ – тензор диэлектрической непроницаемости среды.

Исторически сложилось, что действие внешних электрических полей на вещество принято рассматривать как наведение изменений тензора диэлектрической непроницаемости среды для светового поля. Представим компоненты тензора \hat{b} в следующем виде:

$$b_{ij} = b_{ij}^0 + \Delta b_{ij}(\vec{E}^0), \quad (6.93)$$

где \vec{E}^0 – напряженность «низкочастотного» (по сравнению со световым) электрического поля, прикладываемого к веществу. Если это поле далеко от порога разрушения или пробоя, оно приводит к небольшим изменениям оптических свойств среды, так что выполняются соотношения

$$\Delta b_{ij} \ll b_{mm}^0, \quad (6.94)$$

где b_{mm}^0 – диагональные компоненты тензора диэлектрической непроницаемости для невозмущенной среды. Для случая диагонального тензора $\hat{\varepsilon}^0$ тензор \hat{b}^0 также является диагональным:

$$b_{ij}^0 = \frac{1}{\varepsilon_{ij}^r} \delta_{ij}; \quad \hat{b}^0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{11}^r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_{22}^r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_{33}^r} \end{vmatrix}, \quad (6.95)$$

поэтому может быть найден по обычным правилам отыскания обратной матрицы.

Тензор Δb_{ij} , описывающий изменение диэлектрических свойств среды для светового излучения под действием «низкочастотного» электрического поля, можно представить в виде разложения по степеням \vec{E}^0 . Опыт показывает, что достаточно ограничиться линейными и квадратичными членами разложения:

$$\Delta b_{ij} = r_{ijk} E_k^0 + R_{ijkl} E_k^0 E_l^0. \quad (6.96)$$

Здесь первый член описывает линейный электрооптический эффект Поккельса, а второй – квадратичный электрооптический эффект Керра. Коэффициенты в разложении являются тензорами 3-го (r_{ijk}) и 4-го (R_{ijkl}) рангов, а их компоненты называются соответственно электрооптическими и квадратичными электрооптическими постоянными.

Волновое уравнение, которое описывает распространение света в возмущенной среде, оперирует тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}^r$. Можно показать, что в пренебрежении малыми квадратичными членами по Δb_{ij} , выполняется соотношение

$$\Delta \varepsilon_{ij}^r = -\varepsilon_{ik}^{0r} \varepsilon_{jl}^{0r} \Delta b_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{ij}^{0r} + \Delta \varepsilon_{ij}^r \right). \quad (6.97)$$

Линейный электрооптический эффект

В случае кристаллов без центра симметрии тензор 3-го ранга r_{ijk} отличен от нуля и линейный электрооптический эффект (эффект Поккельса) является определяющим. В этом случае можно пренебречь в формуле (6.96) квадратичным членом

$$\Delta b_{ij} = r_{ijk} E_k^0. \quad (6.98)$$

Тензор 3-го ранга r_{ijk} имеет в общем случае 27 компонент. Поскольку тензор ε_{ij} является симметричным, т. е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$,

в этом случае и тензор r_{ijk} симметричен по перестановке первых двух индексов:

$$r_{ijk} = r_{jik}. \quad (6.99)$$

Это дает возможность перейти от тензорных обозначений к матричным, заменив комбинацию индексов ij на один индекс (например, m) по правилам

$$11 \leftrightarrow 1; 22 \leftrightarrow 2; 33 \leftrightarrow 3; 23, 32 \leftrightarrow 4; 13, 31 \leftrightarrow 5; 12, 21 \leftrightarrow 6. \quad (6.100)$$

Эти правила легко запомнить для случая тензора 2-го ранга:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 \searrow & 6 & \leftarrow 5 \\ \circ & 2 \searrow & 4 \uparrow \\ \circ & \circ & 3 \uparrow \end{array} \right| \leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ \circ & 22 & 23 \\ \circ & \circ & 33 \end{array} \right|. \quad (6.101)$$

В общем случае матрица электрооптических коэффициентов может быть представлена в виде таблицы 6×3 . Симметрия кристалла накладывает ограничения на электрооптические коэффициенты. Многие из них оказываются равными нулю, а некоторые коэффициенты связаны друг с другом определенными соотношениями. Рассмотрим конкретный вид матрицы r_{mk} для некоторых кристаллов.

Кубические нецентросимметричные кристаллы классов симметрии 23 и $\bar{4}3m$

Имеют один независимый электрооптический коэффициент $r_{123} = r_{213} = r_{231} = r_{312} = r_{321} = r_{132}$. Таким образом, $r_{41} = r_{52} = r_{63}$, а электрооптическому тензору соответствует следующая матрица:

$$r_{mk} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{vmatrix}. \quad (6.102)$$

К кубическим электрооптическим кристаллам относятся GaAs, $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{GeiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и др.

Для кристаллов $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ коэффициент $r_{41} \cong 5 \cdot 10^{-12}$ м/В.

Для других кристаллов кубической сингонии электрооптические коэффициенты имеют меньшие значения.

Кристаллы симметрии $4mm$

Кристаллы симметрии $4mm$ являются одноосными и характеризуются тремя независимыми электрооптическими коэффициентами: $r_{113} = r_{223}$ ($r_{13} = r_{23}$), $r_{333} = r_{33}$, $r_{232} = r_{322} = r_{131} = r_{311}$ ($r_{42} = r_{51}$). Электрооптический тензор изображается матрицей коэффициентов

$$r_{mk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.103)$$

К данному классу симметрии относятся сегнетоэлектрические кристаллы BaTiO_3 , стронций-бариевый ниобат ($\text{Sr}_x\text{Ba}_{1-x}\text{Nb}_2\text{O}_6$) – кратко SBN, и другие. Для BaTiO_3 $r_{42} = 730 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{43} = 46 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{13} = 10,2 \cdot 10^{-12}$ м/В, то есть имеется большая анизотропия электрооптического эффекта. «Недиагональный» коэффициент r_{42} в этом кристалле более чем на 2 порядка превосходит электрооптический коэффициент кубических кристаллов.

Для SBN при $x = 0,75$ максимален электрооптический коэффициент $r_{33} = 237 \cdot 10^{-12}$ м/В. Отметим, что эти коэффициенты зависят и от длины световой волны, то есть имеет место дисперсия электрооптических постоянных.

Кристаллы симметрии $3m$

Данные кристаллы имеют одну ось симметрии третьего порядка, то есть являются одноосными. Наиболее широкое применение в различных областях оптики, оптоэлектроники, интегральной оптики имеют монокристаллы этой симметрии – ниобат лития LiNbO_3 и танталат лития LiTaO_3 . Электрооптическому тензору для кристаллов симметрии $3m$ соответствует матрица коэффициентов

$$r_{mk} = \begin{vmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.104)$$

Для кристалла LiNbO_3 на длине волны $\lambda = 633$ нм электрооптические коэффициенты принимают значения: $r_{22} = 3,4 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{13} = 8,6 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{33} = 30,8 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{51} = 28 \cdot 10^{-12}$ м/В.

Распространение световых волн в среде с линейным двулучепреломлением при однородном внешнем поле

Как и в подразд. 6.7, ограничимся анализом распространения плоских монохроматических волн с волновым вектором $\vec{k} = k_0 n \vec{m}$ и векторной амплитудой $\vec{E}^m = E^m \vec{e}$, где единичные векторы волновой нормали \vec{m} и поляризации \vec{e} имеют компоненты m_m и e_k ($m, k = 1, 2, 3$) соответственно. В этом случае для среды без потерь и в отсутствие гиротропии волновое уравнение сводится (сравните с уравнениями (6.55) и (6.81)) к следующей системе алгебраических уравнений для собственных волн:

$$\left[n^2 (\delta_{mk} - m_m m_k) - \epsilon_{mk}^r \right] e_k = 0, \quad (6.105)$$

где в соответствии с соотношениями (6.97) компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\varepsilon_{mk}^r = \varepsilon_{mk}^{0r} - \varepsilon_{mi}^{0r} \varepsilon_{kj}^{0r} r_{ijk} E_k^0. \quad (6.106)$$

Здесь мы считаем поле E_k^0 заданным и однородным и пренебрегаем квадратичным электрооптическим эффектом.

Рассмотрим распространение волн вдоль оси x в кристалле ниобата лития, к которому внешнее поле приложено вдоль оси z (рисунок 6.7).

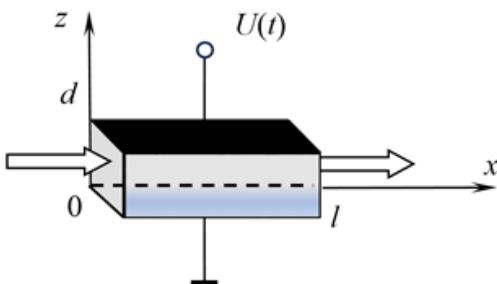


Рисунок 6.7 – Кристалл ниобата лития с приложенным внешним полем

В этом случае в соответствии с формулами (6.97), (6.98) и видом электрооптического тензора (6.104) тензор возмущений относительной диэлектрической проницаемости внешним электрическим полем $\Delta \hat{\varepsilon}$ будет диагональным:

$$\Delta \varepsilon_{11}^r = -n_o^4 r_{13} E_3^0; \quad \Delta \varepsilon_{22}^r = -n_o^4 r_{13} E_3^0; \quad \Delta \varepsilon_{33}^r = -n_e^4 r_{33} E_3^0; \quad (6.107)$$

$$\varepsilon_{11}^{0r} = \varepsilon_{22}^{0r} = n_o^2; \quad \varepsilon_{33}^{0r} = n_e^2, \quad (6.108)$$

где n_o и n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла.

Поскольку вектор \vec{m} имеет компоненты $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 0$, уравнение (6.105) принимает вид

$$\begin{cases} -\varepsilon_{11}^r e_1 = 0, \\ (n^2 - \varepsilon_{22}^r) e_2 = 0, \\ (n^2 - \varepsilon_{33}^r) e_3 = 0. \end{cases} \quad (6.109)$$

Отсюда находим, учитывая соотношения (6.107) и (6.108):

$$\begin{cases} e_1 = 0, \\ n_1^2 = \varepsilon_{22}^r = n_o^2 - n_o^4 r_{13} E_3^0, \quad e_2^{(1)} = 1; \\ n_2^2 = \varepsilon_{33}^r = n_e^2 - n_e^4 r_{33} E_3^0, \quad e_3^{(2)} = 1. \end{cases} \quad (6.110)$$

Таким образом, одна собственная волна имеет обыкновенную поляризацию (вектор $\vec{e}^{(1)}$ направлен вдоль оси y) и показатель преломления n_1 определяется как

$$n_1 = n_o + \Delta n_o, \quad \Delta n_o \approx -\frac{n_o^3 r_{13}}{2} E_3^0 = -\frac{n_o^3 r_{13}}{2} \frac{U}{d}. \quad (6.111)$$

Вторая собственная волна имеет необыкновенную поляризацию (вектор $\vec{e}^{(2)}$ направлен вдоль оси z), показатель преломления n_2 при этом:

$$n_2 = n_e + \Delta n_e, \quad \Delta n_e \approx -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} E_3^0 = -\frac{n_e^3 r_{33}}{2} \frac{U}{d}. \quad (6.112)$$

В случае входной световой волны с произвольной поляризацией поле в кристалле будет представлять линейную суперпозицию двух собственных волн – обыкновенной и необыкновенной.

Фазовый электрооптический модулятор поперечного типа

Конструкция фазового модулятора поперечного типа имеет вид, изображенный на рисунке 6.7. В случае распространения необыкновенно поляризованной волны имеем

$$\begin{aligned} \bar{E}(l, t) &= E_{3m} \bar{z}^0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e l \right) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(t) l \right] = \\ &= E_{3m} \bar{z}^0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_e l \right) \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_e^3 r_{33}}{2} U(t) \frac{l}{d} \right]. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Таким образом, световая волна на выходе модулятора приобретает фазовую модуляцию с величиной фазового сдвига

$$\psi(t) = -\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(t) l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_e^3 r_{33}}{2} U(t) \frac{l}{d}. \quad (6.114)$$

Качество материала модулятора, определяемое его физическими свойствами, характеризуется величиной $n_e^3 r_{33}$. Для ниобата лития рассмотренная ориентация внешнего поля и поляризация света являются оптимальными, поскольку r_{33} имеет самую большую величину.

При поляризации света вдоль оси y качество материала будет определяться параметром $n_o^3 r_{13}$, примерно в три раза меньшим, чем $n_e^3 r_{33}$.

Величина l/d определяется размерами кристалла и светового пучка и для объемного модулятора может составлять $\sim 10-30$ при апертуре пучка ~ 1 мм и длине кристалла $\sim 10-30$ мм. Для электрооптических модуляторов на полосковых волноводах величина l/d как минимум на порядок больше.

Часто в качестве характеристики фазового модулятора используют **полуволновое напряжение** $U_{\lambda/2}$ – напряжение, при котором дополнительный фазовый сдвиг ψ в модуляторе равен π . Обычно это напряжение составляет сотни вольт.

Амплитудный электрооптический модулятор

Рассмотрим световую волну на входе устройства (см. рисунок 6.8) при ее поляризации под углом 45° к осям z и y . В этом

случае поле на выходе кристалла будет иметь две составляющие

$$E_z(l, t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(i\omega t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} n_e l\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_e l\right), \quad (6.115)$$

$$E_y(l, t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(i\omega t) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} n_o l\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_o l\right), \quad (6.116)$$

равные по амплитуде и имеющие как постоянный фазовый сдвиг

$$\Gamma_{oe} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) l, \quad (6.117)$$

так и зависящий от приложенного напряжения:

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta n_o(t) - \Delta n_e(t)] l = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}) \frac{U(t)}{2d} l. \quad (6.118)$$

Для нормальной работы амплитудного модулятора постоянный фазовый сдвиг Γ_{oe} нужно довести до значения πp , где p – целое число. Это можно сделать с помощью четверть-волновой пластинки, представляющей x - или y -срез одноосного кристалла толщиной $t = \lambda / [4(n_o - n_e)]$ и осуществляющей фазовую задержку в $\Gamma_m = \pi/2$ между обыкновенной и необыкновенной волнами. При этом чаще всего используют тонкие пластины слюды, толщину которых можно подобрать их расщеплением. Поворачивая такую пластину на некоторый угол, можно изменять вносимый ею фазовый сдвиг от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Тогда на выходе системы (см. рисунок 6.8) будет иметь место линейная поляризация светового поля, которую можно подавить анализатором А.

Таким образом, при $U = 0$ интенсивность выходного излучения будет равна нулю, при $U = U_{\lambda/2}$ она станет максимальной, а амплитудная характеристика пропускания модулятора примет вид

$$T(t) = \frac{I_{\text{ВЫХ}}(t)}{I_{\text{ВХ}}} = \sin^2 \frac{\Gamma(t)}{2} = \sin^2 \left\{ \frac{\pi U(t)}{2 U_{\lambda/2}} \right\}, \quad (6.119)$$

где $U_{\lambda/2} = \lambda d / \left[(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}) l \right]$.

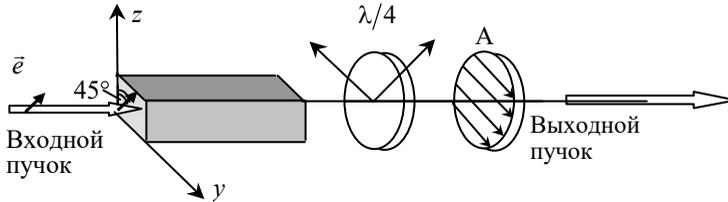


Рисунок 6.8 – Амплитудный электрооптический модулятор

Амплитудная характеристика модулятора изображена на рисунке 6.9, где для обеспечения линейности к модулятору приложено постоянное смещающее напряжение $U_{\lambda/4}$.

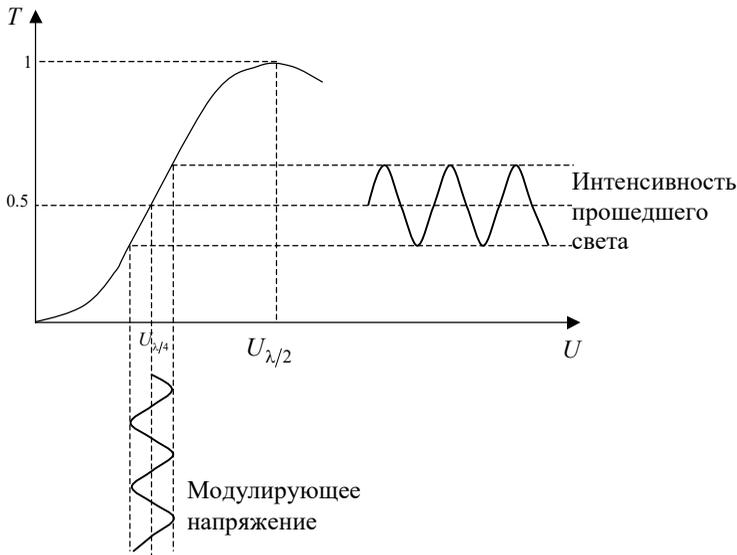


Рисунок 6.9 – Амплитудная характеристика электрооптического модулятора

6.8.2 Квадратичный электрооптический эффект

Когда линейный электрооптический эффект отсутствует (в кристаллах с центром симметрии и в изотропной среде), вклад в изменение оптических свойств среды под действием внешнего поля дает квадратичный электрооптический эффект (см. формулу (6.96)):

$$\Delta b_{ij} = R_{ijkl} E_k^0 E_l^0. \quad (6.120)$$

Тензор 4-го ранга R_{ijkl} , описывающий квадратичный электрооптический эффект Керра, имеет в общем случае 81 элемент и отличен от нуля для любых сред. Его элементы удовлетворяют свойствам симметрии $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk} = R_{jilk}$ по перестановке первых двух и последних двух индексов, что связано с симметрией тензора $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ и тензора-диады $(\mathbf{E}\mathbf{E})_{kl} = (\mathbf{E}\mathbf{E})_{lk}$. Это позволяет заменить две пары индексов ij и kl на два индекса (например, m и n), изменяющихся от 1 до 6 в соответствии со следующим правилом:

$$R_{mn} = \begin{cases} R_{ijkl} & (ij \leftrightarrow m = 1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n = 1, 2, 3), \\ 2R_{ijkl} & (ij \leftrightarrow m = 1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n = 4, 5, 6). \end{cases} \quad (6.121)$$

В результате приходим к матричной форме записи тензора квадратичных электрооптических коэффициентов, количество которых может достигать 36.

Количество независимых коэффициентов этого тензора в изотропной среде равно двум:

$$R_{nm} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11}-R_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11}-R_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(R_{11}-R_{12}) \end{vmatrix}. \quad (6.122)$$

В кристаллах триклинной системы все 36 квадратичных электрооптических коэффициентов являются независимыми и могут быть отличны от нуля.

Легко показать, что приложение внешнего электрического поля вдоль любого направления к изотропной среде наводит в ней линейное двулучепреломление. В результате среда становится оптически одноосной с оптической осью вдоль направления приложения поля. Действительно, если это направление совместить с осью x , из соотношений (6.97) и (6.121) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta b_{11} &= R_{1111} (E_1^0)^2, \quad \Delta b_{22} = \Delta b_{33} = R_{2211} (E_1^0)^2, \\ \Delta b_{12} &= \Delta b_{21} = \Delta b_{13} = \Delta b_{31} = \Delta b_{23} = \Delta b_{32} = 0; \\ \varepsilon_{11}^r &= n_a^2 - n_a^4 R_{11} (E_1^0)^2, \quad \varepsilon_{22}^r = \varepsilon_{33}^r = n_a^2 - n_a^4 R_{12} (E_1^0)^2; \quad (6.123) \\ \varepsilon_{12}^r &= \varepsilon_{21}^r = \varepsilon_{13}^r = \varepsilon_{31}^r = \varepsilon_{23}^r = \varepsilon_{32}^r; \\ n_o &= \sqrt{\varepsilon_{22}^r} \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} R_{12} (E_1^0), \quad n_e = \sqrt{\varepsilon_{11}^r} \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} R_{11} (E_1^0), \end{aligned}$$

где n_a – показатель преломления невозмущенной среды; n_o и n_e – показатели преломления для света, поляризованного перпендикулярно и параллельно направлению приложенного поля.

Величина наведенного двулучепреломления $n_e - n_o$ дается выражениями

$$n_e - n_o = \frac{n_a^3}{2} (R_{12} - R_{11}) (E_1^0)^2; \quad (6.124)$$

$$n_e - n_o = -n_a^3 R_{44} (E_1^0)^2,$$

в последнем из которых учтено, что в изотропной среде (см. матрицу коэффициентов (6.122))

$$R_{44} = (R_{11} - R_{12})/2.$$

Формулы (6.124) нередко записывают в виде

$$n_e - n_o = K\lambda (E_1^0)^2, \quad (6.125)$$

где K – постоянная Керра, связанная с квадратичными электрооптическими коэффициентами для изотропной среды соотношением

$$R_{44} = -K \frac{\lambda}{n_a^3}. \quad (6.126)$$

Для нитробензола на длине волны 589 нм постоянная Керра $K = 2,44 \cdot 10^{-12}$ м/В², для воды $K = 5,1 \cdot 10^{-14}$ м/В².

6.8.3 Фотоупругий эффект

Приложение к среде механических воздействий (упругих деформаций) изменяет ее оптические свойства, что и составляет суть фотоупругого эффекта.

Традиционно фотоупругий эффект принято описывать как

$$\Delta b_{ij} = p_{ijkl} S_{kl}^0, \quad (6.127)$$

где коэффициенты p_{ijkl} образуют тензор фотоупругости 4-го ранга, а S_{kl}^0 является симметричным тензором упругих деформаций 2-го ранга, имеющим компоненты

$$S_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right), \quad (6.128)$$

определяемые компонентами вектора упругого смещения \vec{U} частиц среды.

Тензор p_{ijkl} имеет ту же симметрию и может быть описан такой же матрицей коэффициентов p_{mn} , как и тензор R_{mn} . Однако для фотоупругих коэффициентов замена двух пар индексов ij и kl на два индекса m и n , изменяющихся от 1 до 6, производится в соответствии с другим правилом:

$$p_{mn} = p_{ijkl} \quad (ij \leftrightarrow m=1, \dots, 6; \quad kl \leftrightarrow n=1, \dots, 6), \quad (6.129)$$

как и для тензора упругих деформаций:

$$S_n^0 = S_{kl}^0 \quad (kl \leftrightarrow n=1, \dots, 6). \quad (6.130)$$

Для изотропной среды фотоупругий тензор имеет вид, определяемый матрицей (6.122), и характеризуется только двумя независимыми фотоупругими коэффициентами p_{11} и p_{12} . Отсюда следует, что продольные деформации изотропной среды наводят в ней линейное двулучепреломление.

Пусть они приложены вдоль оси x , тогда отлична от нуля компонента тензора деформации $S_{11}^0 = S_1^0$.

В этом случае изменяются только диагональные компоненты тензора ε_{ij}^r :

$$\varepsilon_1^r = n_a^2 - n_a^4 p_{11} S_1^0, \quad \varepsilon_2^r = \varepsilon_3^r = n_a^2 - n_a^4 p_{12} S_1^0. \quad (6.131)$$

Таким образом, среда становится анизотропной, причем одноосной, с оптической осью вдоль направления приложения продольных деформаций.

Обыкновенный и необыкновенный показатели преломления определяются соотношениями

$$n_o \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} p_{12} S_1^0, \quad n_e \approx n_a - \frac{n_a^3}{2} p_{11} S_1^0, \quad (6.132)$$

а наведенное двулучепреломление

$$n_e - n_o = \frac{n_a^3}{2} (p_{12} - p_{11}) S_1^0. \quad (6.133)$$

Отметим, что фотоупругие постоянные являются безразмерными величинами.

Для плавленого кварца на длине волны 633 нм $p_{11} = 0,121$ и $p_{12} = 0,270$.

6.8.4 Эффект Фарадея

Эффект Фарадея наблюдается в прозрачных веществах, помещенных в магнитное поле \vec{H}_0 , и заключается во вращении плоскости поляризации электромагнитных волн при их распространении. Величина вращения пропорциональна составляющей магнитного поля вдоль направления распространения света. Этот эффект был открыт М. Фарадеем в 1846 г. и обусловлен действием постоянного магнитного поля на движение электронов в оболочках атомов.

Электрическая компонента электромагнитного (светового) поля приводит к смещению электронов относительно их положения равновесия. Воздействие на это движение статического магнитного поля обусловлено силой Лоренца $\vec{F}_L \sim \vec{v} \times \vec{B}$, вызывающей движение электронов в поперечном направлении. В результате возникает индуцированный дипольный момент (электрическая поляризация), пропорциональный $\vec{B} \times \vec{E}$, и материальное уравнение может быть записано в виде

$$D_i = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{ij}^r + i \delta_{ijk} f_{km} H_m^0 \right) E_j, \quad (6.134)$$

где f_{km} – компоненты тензора 2-го ранга коэффициентов Фарадея.

Для оптически изотропных сред $f_{km} = F \delta_{km}$ и фарадеево вращение плоскости поляризации после прохождения волной расстояния z выражается через **постоянную Верде** V :

$$\alpha(z) = V H_z^0 z = k_0 \frac{n_a^3}{2} F H_z^0 z, \quad (6.135)$$

определяемую соотношением $V = \pi n_a^3 F / \lambda$.

У немагнитных веществ постоянная Верде невелика. Например, для кристалла $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ ее величина составляет $V = 0,31$ угл. мин/А. В магнитных материалах эффект Фарадея значительно сильнее: в этом случае он пропорционален не напряженности магнитного поля, а намагниченности материала.

В среде с естественной оптической активностью направление вращения вектора поляризации относительно заданной системы координат однозначно зависит от направления распространения света. Поэтому *после отражения пучка света*, например, от выходной грани образца или от зеркальной поверхности вне его, *и распространения в обратном направлении полный поворот плоскости поляризации равен нулю*. Однако в эффекте Фарадея направление вращения однозначно задается магнитным полем \vec{H}_0 , так что *отражение пучка с распространением в обратном направлении приводит к удвоению вращения*.

7 ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ

Реакция поляризации вещества $\vec{P}(t)$ на внешнее поле $\vec{E}(t)$ всегда запаздывает. Для монохроматического сигнала связь поляризации и поля (см. подразд. 6.5) дается простым выражением

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \cdot \vec{E}(\omega), \quad (7.1)$$

учитывающим связанную с запаздыванием *временную (частотную) дисперсию*. Реальная световая волна представляет собой суперпозицию колебаний с различными частотами, имеющими вследствие дисперсии различные фазовые скорости. Рассмотрим влияние дисперсии на распространение реальных оптических сигналов и основные сведения из классической теории дисперсии света.

7.1 Распространение волновых пакетов. Групповая скорость

Гармоническая плоская волна является, строго говоря, неограниченной как в пространстве, так и во времени. Как только мы ограничим размеры волнового фронта, то в результате дифракции сразу получим волны с другими направлениями распространения (рисунок 7.1). Точно так же, если мы ограничим сигнал во времени (рисунок 7.2), то должны представить его в виде интеграла Фурье, т. е. в виде суперпозиции колебаний с различными частотами.

Ограниченная длительность электромагнитного сигнала, таким образом, приводит к существованию некоторой конечной полосы частот $\Delta\omega$ вблизи некоторой центральной частоты ω_0 . В силу линейности уравнений Максвелла распространение импульсного электромагнитного сигнала в линейной среде можно представить в виде линейной комбинации плоских волн с различными частотами и волновыми числами:

$$E(x,t) = \sum_{\ell} \dot{E}_m(k_{\ell}) \cdot \exp[i(\omega_{\ell}t - k_{\ell}x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp\{i[\omega(k)t - kx]\} dk. \quad (7.2)$$

Эти сумма и интеграл удовлетворяют уравнениям Максвелла, поскольку суммируются (интегрируются) плоские волны, являющиеся решением тех же уравнений.

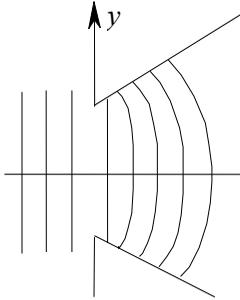


Рисунок 7.1 – Дифракция плоской волны на отверстии в непрозрачном экране

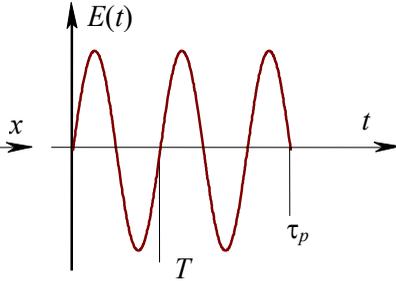


Рисунок 7.2 – Электромагнитный импульс

Если $\dot{E}_m(k)$ отличаются заметно от нуля лишь в небольшом промежутке $\Delta k \ll k$, то поле $E(x,t)$ описывает **волновой пакет**, или **волновую группу**. В этом случае $\Delta\omega \ll \omega_0$, и поле будет почти монохроматическим (квазимонохроматическим). Вспомним теперь дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между ω и k для плоской волны: $k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}$. Перепишем его в виде

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)} k. \quad (7.3)$$

В изотропной среде дисперсионные свойства не зависят от направления векторов \vec{k} и \vec{E} , поэтому $\omega(-k) = \omega(k)$.

Рассмотрим эволюцию волнового пакета $E(x, t)$ во времени, для чего разложим $\omega(k)$ в ряд Тейлора вблизи центрального волнового числа $k_0 = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) + \dots \quad (7.4)$$

Ограничимся первыми двумя членами разложения, так как

$$\Delta k = (k - k_0) \ll k_0, \quad \Delta \omega \ll \omega_0.$$

Подставим это разложение в интеграл для $E(x, t)$:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\omega_0 t + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) t - kx + k_0 x - k_0 x \right] \right\} = \\ &= \exp \left[i(\omega_0 t - k_0 x) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - x \right] (k - k_0) \right\} dk. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Интеграл в конечном выражении зависит только от комбинации переменных $\left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$ и называется *огibaющей* $E \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$ *волнового пакета*. Первый же сомножитель представляет некоторую *несущую* (заполнение) этого пакета и соответствует гармонической (монохроматической) плоской волне (рисунок 7.3).

Таким образом,

$$E(x, t) = E \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \exp \left[i(\omega_0 t - k_0 x) \right]. \quad (7.6)$$

Отсюда следует, что волновой пакет распространяется с сохранением своей формы со скоростью

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0, \quad (7.7)$$

которая называется *групповой скоростью* волны. Приведенное соотношение справедливо для волн любой природы: электромагнитных, акустических и т. д.

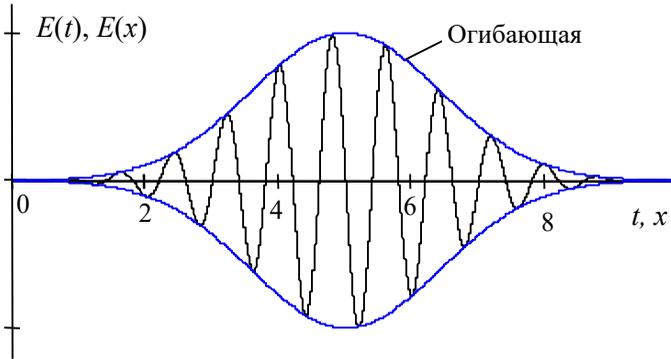


Рисунок 7.3 – Волновой пакет

Для дисперсионной зависимости в изотропной среде

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn}{d\omega_0}} = \frac{c}{n + \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0}}. \quad (7.8)$$

Из соотношения (7.7) можно также получить **формулу Рэлея**:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (7.9)$$

Возможны три варианта частотной дисперсии:

1) $dv/d\lambda = dn/d\lambda = 0$ – дисперсия отсутствует; эта ситуация реализуется только в вакууме. Иногда дисперсия настолько мала (например, при распространении в воздухе), что ею можно пренебречь;

2) $dv/d\lambda > 0$, $dn/d\lambda < 0$ ($dn/d\omega > 0$) – показатель преломления убывает с длиной волны. Такую дисперсию называют **нормальной**, и в этом случае групповая скорость меньше фазовой. Данный тип дисперсии типичен для прозрачных сред;

3) $dv/d\lambda < 0$, $dn/d\lambda > 0$ ($dn/d\omega < 0$) – показатель преломления растёт с длиной волны. Этот вид зависимости параметров среды от длины волны (частоты) называют **аномальной дисперсией**. Для областей спектра, где вещество обладает аномальной дисперсией, характерно превышение групповой скорости над фазовой и сильное поглощение света.

Отметим, что и в случае аномальной дисперсии, когда $v_g > v$, выполняется условие $v_g < c$ – **скорость переноса энергии не превышает скорости света в вакууме**. Действительно, при выводе формул (7.8) и (7.9) использовано разложение (7.4), в котором были отброшены члены второго и высшего порядков малости. Если членом второго порядка $(d^2\omega/dk^2)_0 (k - k_0)^2 / 2$ пренебречь нельзя, то ширина импульса электромагнитного излучения будет изменяться в процессе распространения (уширяться), а форма его огибающей испытывать деформацию.

В этом случае само понятие групповой скорости как скорости перемещения волнового пакета нуждается в уточнении. Анализ показывает, что при нормальной дисперсии максимум огибающей импульса отстаёт от переднего фронта, в то время как для аномальной дисперсии этот максимум смещается к переднему фронту.

7.2 Поглощение света. Закон Бугера

Как отмечалось в подразд. 6.5, временная дисперсия электрических свойств среды, связанная с запаздыванием электрической поляризации относительно изменений наводящего её электрического поля, обуславливает комплексный характер диэлектрической проницаемости вещества (см. формулу (6.26)). В этом случае и показатель преломления волны, распространяющейся в среде, является комплексной величиной

$$\hat{n}(\omega) = n'(\omega) - in''(\omega) = n(\omega)[1 - ik(\omega)], \quad (7.10)$$

где вещественный параметр $\kappa(\omega)$ называют **показателем затухания**, или **коэффициентом экстинкции**. Используя соотношения, приведенные в п. 6.7.1, запишем выражение для светового поля волны с таким комплексным показателем преломления, распространяющейся вдоль оси z :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \vec{E}_{m0} \exp[i(\omega t - \dot{n}k_0 z)] = \\ &= \vec{E}_{m0} \exp(-\kappa k_0 z) \exp[i(\omega t - n k_0 z)],\end{aligned}\quad (7.11)$$

из которого видно, что в среде с $\kappa \neq 0$ амплитуда поля убывает по мере распространения волны, то есть происходит его поглощение.

Переходя к интенсивности рассматриваемой волны, определяемой соотношениями (3.71) или (3.72), получаем:

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha z),\quad (7.12)$$

где коэффициент поглощения $\alpha = 2\kappa k_0 = 4\pi\kappa/\lambda$.

Соотношение (7.12) носит название закона Бугера – Ламберта – Бэра. Таким образом, действительная часть $n(\omega)$ комплексного показателя преломления определяет **преломляющие (рефракционные) свойства среды** для рассматриваемой волны. Мнимая часть $n(\omega)\kappa(\omega)$ описывает её **поглощение (абсорбционные свойства** среды для данной волны).

7.3 Нормальная и аномальная дисперсии

В классической теории широко применяется квазиупругая модель, в которой атом рассматривается в виде совокупности положительно заряженного атомного остатка и отрицательно заряженного электрона. Эти заряды находятся на некотором равновесном расстоянии d_0 между ними. При смещении электрона из положения равновесия на расстояние $\vec{x} = \vec{x}^0 x$ атом, во-первых, приобретает наведенный дипольный момент $\vec{p} = -e\vec{x}$, где e – элементарный электрический заряд; во-

вторых, на него начинает действовать возвращающая квазиупругая сила, пропорциональная отклонению x от положения равновесия. Такая система в отсутствие потерь является аналогом рассмотренного в п. 2.1.1 гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 , определяемой параметрами атома. С учетом потерь движение электрона в поле световой волны, изменяющемся во времени по гармоническому закону $\vec{E}(t) = \vec{x}^0 E_0 \exp(i\omega t)$, описывается уравнением вынужденных колебаний (2.21) с кулоновской вынуждающей силой:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E_0 \exp(i\omega t), \quad (7.13)$$

где m_e – масса электрона.

Стационарное по амплитуде (только «вынужденное», без учета переходных процессов) решение этого уравнения имеет вид

$$x_{st}(t) = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} E_0 \exp(i\omega t). \quad (7.14)$$

Таким образом, в поле световой волны атом приобретает дипольный момент, изменяющийся во времени по гармоническому закону с её частотой ω . Если среда является достаточно разреженной, когда взаимовлиянием поляризованных атомов друг на друга можно пренебречь, то электрическая поляризация среды (суммарный дипольный момент единицы объема) пропорциональна их концентрации N : $\vec{P} = N\vec{p}$. С использованием приведенных в подразд. 6.4 соотношений из формулы (7.14) можно найти, что восприимчивость рассматриваемой среды

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}, \quad (7.15)$$

где $\omega_p = Ne^2/(\epsilon_0 m_e)$ – **плазменная частота**, физический смысл которой подробно обсуждается в следующем подразделе.

Таким образом, вещественная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости данной среды, описывающие дисперсию и поглощение света, определяются соотношениями

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \quad (7.16)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = \omega_p^2 \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (7.17)$$

Выражения (7.16) и (7.17) упрощаются, если показатель преломления среды близок к единице, коэффициент поглощения мал, а частота света ω близка к собственной частоте осциллятора ω_0 , так что в этом случае $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$. Тогда

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}, \quad (7.18)$$

$$k(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (7.19)$$

Пример дисперсионных зависимостей $k(\omega)$ и $n(\omega) - 1$ представлен на рисунке 7.4, где использовано обозначение $C = \omega_p^2 / (2\gamma\omega_0)$. Как видно, если частота света достаточно далека от ω_0 , показатель преломления растет с частотой, то есть имеет место нормальная дисперсия. Аномальная дисперсия наблюдается только вблизи ω_0 , но в этой области существует сильное поглощение.

Экспериментально дисперсионную зависимость можно наблюдать, например, методом скрещенных призм (рисунок 7.5).

Первая призма (с вертикальным ребром) – стеклянная – разлагает проходящий через нее белый свет в спектральную полосу. Вторая призма (с горизонтальным ребром) – изготовленная

из исследуемого материала – смещает каждую точку спектра по вертикали, причем величина смещения зависит от показателя преломления на данной частоте.

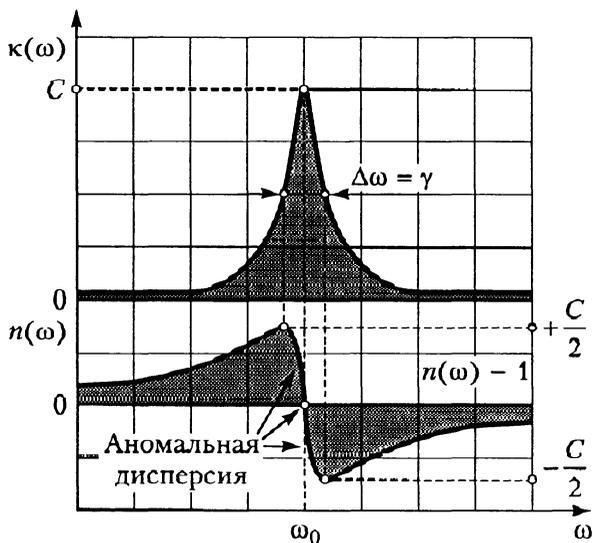


Рисунок 7.4 – Дисперсионные зависимости для $\kappa(\omega)$ и $n(\omega)-1$

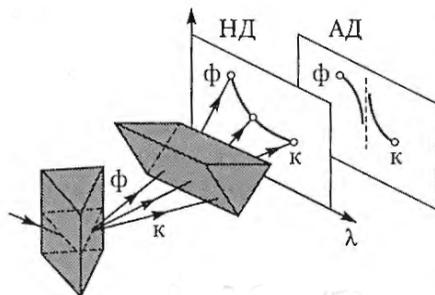


Рисунок 7.5 – Наблюдение дисперсии методом скрещенных призм

Таким образом, форма спектральной полосы на экране отражает зависимость показателя преломления от длины волны.

Примерный вид спектра для случаев нормальной (НД) и аномальной (АД) дисперсии показан на рисунке 7.4.

Для более точного определения изменения показателя преломления в области аномальной дисперсии, где велико поглощение, Д. С. Рождественским был разработан метод «крюков», основанный на внесении дополнительной разности хода между опорным и измерительным пучками в двухлучевом интерферометре (рисунок 7.6).

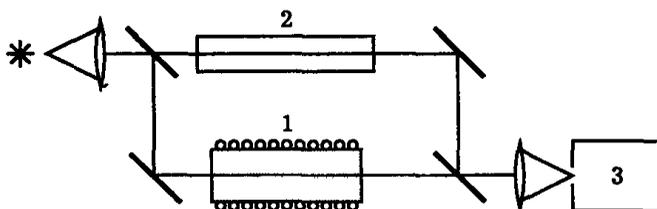


Рисунок 7.6 – Схема установки для измерения дисперсии атомных паров: 1 – кювета с парами; 2 – компенсационная кювета; 3 – спектрограф

В результате интерференционные полосы оказываются наклоненными, что позволяет количественно оценить параметры аномальной дисперсии. Картина, отображающая *дисперсию в парах натрия в области желтой дублетной линии*, изображена на рисунке 7.7.

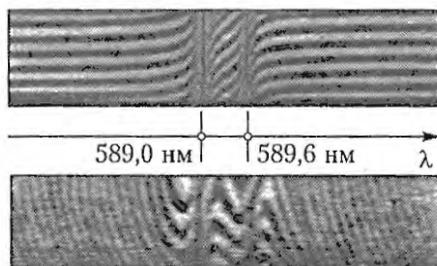


Рисунок 7.7 – Фотографии дисперсионных кривых в методе «крюков»

7.4 Дисперсия вдали от линий поглощения

Рассмотрим более подробно поведение показателя преломления прозрачных сред. При выполнении неравенства $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ дисперсионная зависимость (7.16) может быть представлена в виде

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.20)$$

Как следует из выражения (7.20), при любых частотах в области прозрачности имеет место нормальная дисперсия (рисунок 7.8). В реальных случаях собственные частоты ω_0 , как правило, лежат в ультрафиолетовом диапазоне. Поэтому для относительно низких частот ($\omega < \omega_0$, видимая область) показатель преломления превышает единицу. Напротив, в высокочастотной области ($\omega > \omega_0$, рентгеновский диапазон) $n < 1$ и, следовательно, фазовая скорость волны больше скорости света в вакууме: $v > c$.

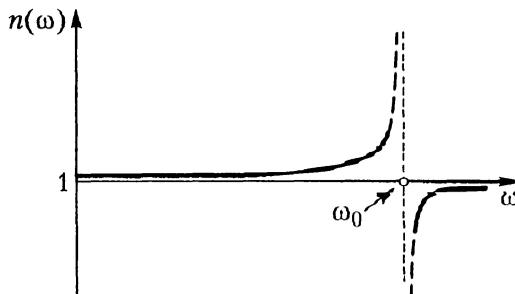


Рисунок 7.8. Дисперсионная зависимость в прозрачной среде

Однако групповая скорость волнового пакета, характеризующая скорость переноса энергии, как отмечалось в подразд. 7.1, и в данном случае не превосходит скорость света.

В спектральной области, где выполняется неравенство $\omega \ll \omega_0$, дисперсионную зависимость (7.20) можно разложить по степеням малого параметра ω/ω_0 . В этом случае

$$n^2(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right). \quad (7.21)$$

Переходя от частоты к длине волны, получаем **дисперсионную формулу Коши**:

$$n^2(\lambda) \approx 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad (7.22)$$

где $A = \omega_p^2/\omega_0^2$ – коэффициент рефракции; $B = 4\pi^2 c^2/\omega_0^2$ – коэффициент дисперсии.

Другой важный случай соответствует дисперсии в высокочастотной области, когда $\omega \gg \omega_0$. Он реализуется, в частности, при распространении электромагнитных волн в плазме, а именно в среде, содержащей большое количество свободных зарядов, для которых отсутствует квазиупругая возвращающая сила, то есть $\omega_0 = 0$. Из формулы (7.20) в этом случае находим

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.23)$$

Отсюда следует, что при распространении волн в плазме показатель преломления $n < 1$ для частотной области $\omega > \omega_p$, а при $\omega < \omega_p$ он становится мнимым. Последнее означает, что при частотах излучения, меньших ω_p , от границы раздела обычной среды с плазмой наблюдается полное отражение ($|R|=1$) при любых углах падения. Граничная частота $\omega_p = \sqrt{Ne^2/(\epsilon_0 m_e)}$ называется **плазменной** или **лэнгмюровской частотой**.

Описываемое явление проявляется, например, в отражении радиоволн длинноволнового, средневолнового и коротковолнового диапазонов с $\lambda > \lambda_p$ от различных слоев ионосферы, обеспечивающем дальнюю радиосвязь. Более высокочастотные ультракороткие волны проходят через ионосферу и широко используются на линиях радиосвязи «земля – космос – земля».

Аналогично объясняется зеркальный блеск металлов, обусловленный твердотельной плазмой свободных электронов. В этом случае из-за высокой концентрации зарядов плазменная частота лежит в УФ-области.

Вблизи лэнгмюровской частоты наблюдается **плазменный минимум отражения** R_{\min} , возникающий при переходе показателя преломления через единицу.

Физический смысл плазменной частоты заключается в том, что она соответствует собственной частоте колебаний электронов в плазме, состоящей из N частиц с зарядом $\pm e$. Такие колебания возникают при смещении электронов из положения равновесия. Затем под действием кулоновских сил они будут ускоренно двигаться навстречу положительно заряженным ионам, проскочат по инерции положение равновесия, далее начнут двигаться в противоположном направлении и т.д., совершая затухающие колебания с частотой ω_p .

Учтем теперь, что вклад в дисперсию дают колебания не только электронов, но и ионов. Поскольку масса ионов намного больше, чем электронов, соответствующие собственные частоты оказываются существенно меньшими. Ионные линии поглощения для веществ, прозрачных в видимой области, попадают в ИК-диапазон. Дисперсионная зависимость с их учетом может быть записана в виде

$$n^2 = 1 + \frac{C_1}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{C_2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}. \quad (7.24)$$

Формулы (7.21) и (7.24) были получены в предположении, что среда является достаточно разреженной и взаимовлиянием

поляризованных частиц можно пренебречь. В конденсированных средах (жидкости, твердые тела) локальное поле, действующее на атом, обусловлено не только полем световой волны, но и соседними атомами. Лоренц Г. и Лоренц Л. показали, что в этом случае справедливо соотношение (*формула Лоренца – Лоренца*)

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_p^2}{3(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (7.25)$$

Если показатель преломления близок к единице, то $n^2 + 2 \approx 3$ и выражение (7.25) переходит в (7.20). В правой части формулы (7.25) величина ω_p^2 пропорциональна концентрации атомов N , а следовательно, и плотности вещества ρ . Поэтому во многих случаях справедлив **закон постоянной удельной рефракции**

$$r = \frac{1}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const}. \quad (7.26)$$

Например, для воздуха при увеличении давления в 200 раз удельная рефракция r изменяется на доли процента.

Классическая теория дисперсии в определенных случаях требует уточнения с учетом квантовой природы вещества. Тем не менее её основные качественные (а во многих случаях и количественные) результаты остаются справедливыми. Так, дисперсионную зависимость (7.21) следует заменить **уравнением Зельмейера**

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{\omega_p^2 f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}, \quad (7.27)$$

где ω_{0k} – частота, соответствующая одному из переходов между квантованными уровнями энергии атома; f_k – *сила осциллятора*, коэффициент, зависящий от квантовых чисел уровней.

8 ФУРЬЕ-ОПТИКА

Фурье-оптика изучает оптические системы, в которых используются прямое и обратное преобразования Фурье. Основное приложение таких систем – оптическая обработка информации. В них подлежащая обработке информация записывается на оптический транспарант в виде функции пропускания или изменения показателя преломления, а затем зондируется пучком света. Анализ светового изображения, полученного после транспаранта и преобразованного оптической системой, дает параметры исследуемого сообщения.

8.1 Достоинства оптических методов обработки информации

1. Большая информационная емкость

Оптическое изображение имеет две или три независимых пространственных переменных x , y и z и время t , а электрический сигнал только одну – время t . Поэтому информационная емкость оптического сигнала, передаваемого за время Δt , значительно больше объема информации, передаваемого за то же время с помощью электрического сигнала. Пример: телевизионный кадр передается за время $T_k = 40$ мкс. За то же время, быстро сменяя изображения, можно передать много таких кадров. Для времени смены кадра 10 мкс, что вполне реально, выигрыш составит $4 \cdot 10^3$.

2. Многоканальность

Одна из пространственных переменных может служить в качестве параметра, определяющего номер канала. В этом случае обработка информации ведется параллельно по многим каналам. Например, если ширина фотокадра составляет 36 мм, а ширина дорожки одного канала, в котором записана информация, – 100 мкм, то число параллельно обрабатываемых каналов равно 360.

3. Высокое быстродействие

Оно определяется скоростью смены кадров (ввода информации в оптическую систему) и временем распространения света в оптической системе. Для системы длиной 30 см это время равно 1 нс. Оценки показывают, что оптические вычисления производятся в некоторых случаях быстрее, чем в цифровых системах. Выигрыш в быстродействии может достигать 10^3 раз.

4. Многофункциональность

В оптических системах достаточно просто выполняются операции умножения, интегрирования, преобразования Фурье, Френеля, Гильберта; они могут использоваться для вычисления функций корреляции, свертки и т. д.

Оптические устройства обработки информации делятся на *когерентные* и *некогерентные*. В некогерентных системах, работа которых основана на принципах геометрической оптики, используются некогерентные источники света (например, полупроводниковые светодиоды). В когерентных системах используются волновые свойства света и когерентные источники – лазеры. Мы в дальнейшем будем рассматривать в основном когерентные методы обработки информации.

Отметим, что оптические методы позволяют решать целый ряд задач лучше, чем это позволяют сделать традиционные электронные устройства. В дальнейшем мы рассмотрим акустооптические устройства анализа спектра радиосигналов, которые как по массе, так и по габаритам превосходят традиционные варианты таких спектроанализаторов.

Еще один пример – система наведения на цель крылатых ракет. Она состоит из трех подсистем: а) инерциальной навигации (гироскоп); б) высотомерной по рельефу местности, снятому с искусственных спутников Земли; в) оптического коррелятора. Подсистема «б» способна вывести крылатую ракету на цель с точностью до размеров футбольного поля, а «в» – с точностью до размеров вратарской площадки.

8.2 Преобразование Фурье в когерентной оптической системе

8.2.1 Когерентная оптическая система

Рассмотрим оптическую систему (рисунок 8.1). Предположим, что система не имеет aberrаций и в ней не происходит поглощения и отражения электромагнитной энергии. В передней фокальной плоскости P_1 ($z = 0$) положительной линзы Л с фокусным расстоянием F расположен носитель обрабатываемой информации – **транспарант**.

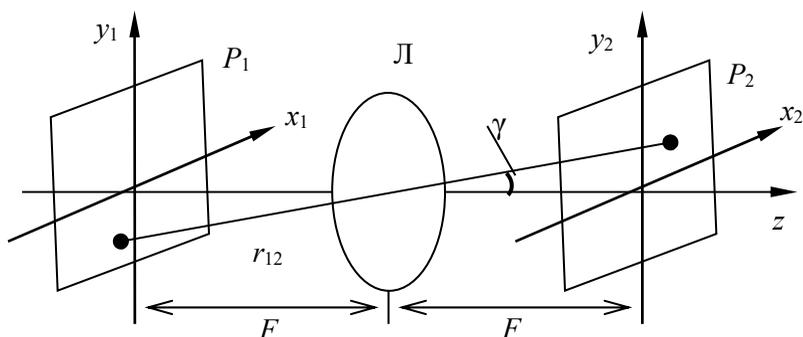


Рисунок 8.1 – Оптическая схема, реализующая прямое преобразование Фурье

Простейшим примером транспаранта является фотоленка, пропускание которой зависит от координат. Такой транспарант будем называть **амплитудным**. Другим примером транспаранта является акустооптический модулятор света (АОМ), в котором показатель преломления света меняется во времени и в пространстве под действием распространяющейся акустической волны. Такой транспарант является **фазовым**. В общем случае коэффициент пропускания транспаранта может быть комплексным:

$$\dot{T}(x_1, y_1) = S(x_1, y_1) \exp[i\theta(x_1, y_1)]. \quad (8.1)$$

Выходной плоскостью системы, в которой происходит наблюдение светового поля, является плоскость P_2 ($z = 2F$), расположенная в задней фокальной плоскости линзы.

Если плоская световая волна $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$ с частотой ω и волновым числом k распространяется в оптической системе вдоль оси z , то на выходе транспаранта световое поле можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(x_1, y_1, t) &= \vec{E}(0, t) \dot{T}(x_1, y_1) = \\ &= \vec{E}_0 S(x_1, y_1) \exp\{i[\omega t + \theta(x_1, y_1)]\}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Как видно, выражение (8.2) описывает операцию умножения постоянной величины $\vec{E}_0(0, t) = \text{const}$ (по пространству x_1, y_1) на функцию $\dot{T}(x_1, y_1)$. Если вплотную к первому транспаранту поместить другой, с функцией пропускания $\dot{Q}(x_1, y_1)$, то на выходе получим результат их перемножения в виде

$$\vec{E}_1(x_1, y_1) = \vec{E}(0, t) \dot{T}(x_1, y_1) \dot{Q}(x_1, y_1).$$

Этот простой пример иллюстрирует легкость, с которой оптические системы производят операции перемножения любых сложных двумерных функций, записанных на транспарантах.

Найдем распределение комплексной амплитуды поля на выходе рассматриваемой оптической системы. Для этого воспользуемся принципом Гюйгенса – Френеля, согласно которому каждая точка волнового фронта светового поля излучает сферическую волну. Суммируя излучение этих вторичных волн, испускаемых всеми точками плоскости P_1 , в точке с координатами x_2, y_2 плоскости P_2 получим напряженность светового поля в этой точке.

В параксиальном приближении, то есть для небольших углов $\gamma \ll 1$ между оптической осью z системы и направлением лучей, можно использовать скалярную модель поля и получить выражение

и любой точкой на плоскости T является постоянной величиной ρ .

Найдем величину ρ как сумму двух отрезков KM и MP'_2 :

$$\rho = KM + MP'_2 = \sqrt{F^2 - x_1^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{F^2 + x_2^2}.$$

Если $x_1, x_2 \ll F$, то

$$\rho \approx F \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x_1^2 \cos^2 \theta}{F^2} + \dots \right) + F \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{F^2} + \dots \right).$$

Поскольку треугольники $0x_1M$ и MP'_2N равны, то $x_1 = x_2$. Если еще $\theta \ll 1$, то $\rho \approx 2F$ и не зависит ни от x_1 , ни от x_2 . Расстояние r_{12} отличается от ρ на величину отрезка P'_1K , которая зависит от положения точки на плоскости P_1 : $P'_1K = -x_1 \sin \theta$, где знак минус учитывает направление оси x , а $\sin \theta = x_2/F$. В этом случае r_{12} можно привести к виду

$$r_{12} = \rho + P'_1K = 2F - \frac{x_1 x_2}{F}, \quad (8.5)$$

$$E_2(x_2) = \frac{A}{r_{12}} \exp\left(-i \frac{4\pi F}{\lambda}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \frac{2\pi x_2 x_1}{\lambda F}\right) E_1(x_1) dx_1. \quad (8.6)$$

Введем обозначения:

$$B = \frac{A}{r_{12}} \exp\left(-i \frac{4\pi F}{\lambda}\right); \quad \omega_{x_2} = \frac{2\pi}{\lambda F} x_2. \quad (8.7)$$

Тогда

$$E_2(x_2) = B \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1) \exp(i\omega_{x_2} x_1) dx_1. \quad (8.8)$$

Прежде чем анализировать выражение (8.8), вспомним соотношения прямого и обратного преобразования Фурье для сигнала $f(t)$ и его спектра $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (8.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (8.10)$$

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), нетрудно заметить их полную аналогию. Таким образом, $E_2(x_2)$ является прямым преобразованием Фурье от функции $E_1(x_1)$, причем роль времени играет координата x_1 , а роль временной частоты ω – величина ω_{x_2} , которую называют *пространственной частотой*, так как она является функцией координаты x_2 плоскости наблюдения P_2 . Аналогичное выражение можно записать и для двумерного случая, когда $E_1 = E_1(x_1, y_1)$, полагая здесь и везде в дальнейшем $B = 1$:

$$E_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(\omega_{x_2} x_1 + \omega_{y_2} y_1)\right] E_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (8.11)$$

Рассмотрим физический смысл преобразования (8.11). При падении плоской однородной волны на транспарант с пропусканием $E_1(x_1, y_1)$ происходит дифракция света на этом транспаранте. Дифрагированное поле представляет собой суперпозицию плоских волн, распространяющихся во всех возможных направлениях, причем интенсивность плоской волны в каждом направлении определяется видом функции $E_1(x_1, y_1)$. Таким образом, в этом явлении уже заложены элементы прямого преобразования Фурье, причем роль временных частот играют направления распространения плоских волн.

Поскольку линза собирает все лучи, идущие в одном направлении $(x_2/F, y_2/F)$ в одну точку (x_2, y_2) , то она ставит в соответствие каждой плоской волне точку на плоскости P_2 . Теперь роль частоты спектра Фурье будет играть не направление распространения плоской волны, а координаты в фокальной плоскости линзы P_2 , и комплексная амплитуда поля в этой точке соответствует величине спектральной составляющей Фурье.

Сформулируем следующий важный вывод:

в когерентной оптической системе распределения напряженности светового поля в фокальных плоскостях линзы связаны двумерным преобразованием Фурье. Функция $E_2(x_2, y_2) = S(\omega_{x_2}, \omega_{y_2})$ называется **пространственным спектром сигнала** $E_1(x_1, y_1)$, а плоскость P_2 – спектральной плоскостью, в то время как плоскость P_1 называется сигнальной плоскостью.

Это свойство линзы составляет основу большинства операций оптической обработки информации, в том числе радиосигнальной информации. Действительно, если изменение какого-либо сигнала во времени представить в виде функции пропускания транспаранта по одной из координат x_1, y_1 , то, находя пространственный спектр изображения транспаранта, мы получим эквивалентный ему временной спектр сигнала. Таким образом, в данном случае линза выполняет операцию спектрального анализа.

8.2.2 Прямое и обратное преобразование Фурье в оптической системе

Рассмотрим оптическую систему (рисунок 8.3), состоящую из двух последовательно расположенных линз L_1 и L_2 , причем сигнальная плоскость второй линзы является спектральной плоскостью первой.

Найдем распределение напряженности светового поля $E_3(x_3, y_3)$ в спектральной плоскости P_3 линзы L_2 , рассматривая для простоты одномерный случай:

$$\begin{aligned} E_3(x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_2(x_2) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda F} x_3 x_2\right) dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda F} (x_1 + x_3) x_2\right] dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1) dx_1 \lim_{D \rightarrow \infty} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda F} (x_1 + x_3) x_2 \right] dx_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1) \delta(x_1 + x_3) dx_1 = E_1(-x_3),
\end{aligned}$$

где $\delta(x_1 + x_3)$ – дельта-функция; D – апертура второй линзы.

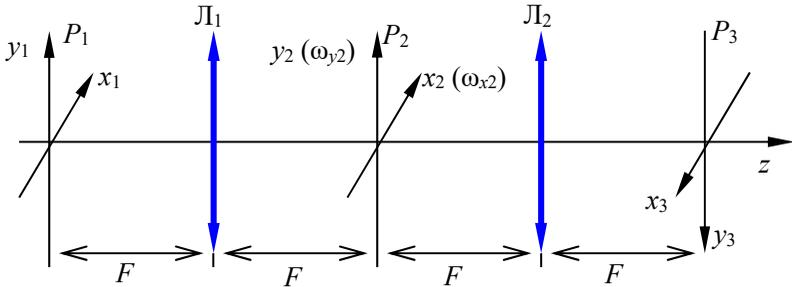


Рисунок 8.3 – Оптическая схема, реализующая прямое и обратное преобразование Фурье

Таким образом, мы получили

$$E_3(x_3) = E_1(-x_3), \quad (8.12)$$

т. е. в плоскости P_3 наблюдается перевернутое изображение сигнала $E_1(x_1, y_1)$. Это световое распределение можно считать обратным преобразованием Фурье от функции $E_2(\omega_{x2}, \omega_{y2})$, если в плоскости P_3 расположить оси координат так, как показано на рисунке 8.3.

8.3 Интегральные и спектральные преобразования в когерентных оптических системах

Замечательное свойство линзы выполнять прямое и обратное преобразования Фурье лежит в основе многих интегральных преобразований в оптике. Рассмотрим некоторые из них.

8.3.1 Интегрирование двумерных функций

Вычисление интеграла от распределения поля $E_1(x_1, y_1)$ в сигнальной плоскости происходит в точке спектральной плоскости с пространственными частотами $\omega_{x_2} = 0$, $\omega_{y_2} = 0$. Действительно,

$$E_2(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (8.13)$$

Таким образом, помещая в сигнальную плоскость транспарант, а в центр спектральной плоскости фотоприемник «точной» конструкции, можно фиксировать сигнал с данного фотоприемника и сравнивать сигналы от различных сигнальных транспарантов.

8.3.2 Пространственная оптическая фильтрация

Достаточно просто выполняется в оптике операция фильтрации спектральных составляющих. Для этого в спектральную плоскость устанавливают другой транспарант – пространственный фильтр с пропусканием $H(\omega_{x_2}, \omega_{y_2})$, на который проецируется спектр сигнала $S(\omega_{x_2}, \omega_{y_2})$. На выходе имеем напряженность электрического поля $E'_2(x_2, y_2) =$

$= S(\omega_{x2}, \omega_{y2}) H(\omega_{x2}, \omega_{y2})$, распределение которого по пространственным частотам изменено в соответствии с характеристикой фильтра.

Проще всего реализуются фильтры с прямоугольной амплитудной и постоянной фазовой характеристиками. Роль таких фильтров будут выполнять прямоугольные отверстия или непрозрачные экраны, помещенные в плоскость P_2 . Некоторые примеры таких фильтров приведены на рисунке 8.4.

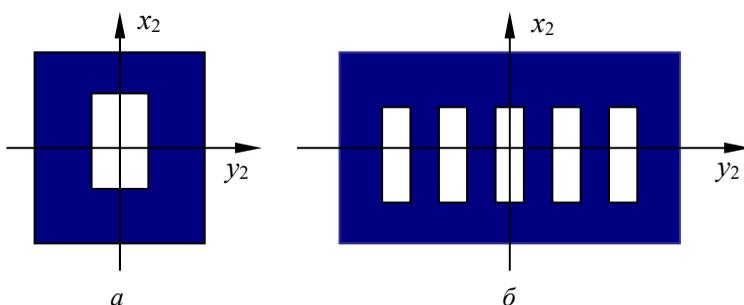


Рисунок 8.4 – Пространственные фильтры:
 a – фильтр нижних частот; b – гребенчатый фильтр

Фильтр с постоянной амплитудной и прямоугольной фазовой характеристиками выполняется в виде прозрачных диэлектрических пленок, нанесенных на прозрачные подложки. Тонкая линза, помещенная в спектральной плоскости, будет играть роль фильтра с постоянной амплитудной и квадратичной фазовой характеристиками. Труднее сформировать фильтры со сложными комплексными частотными характеристиками. Однако и здесь оптические, голографические и акустооптические методы позволяют создать фильтры практически с любыми необходимыми частотными характеристиками. Некоторые способы получения таких фильтров будут описаны далее.

Рассмотрим несколько простых примеров, иллюстрирующих применение методов пространственной оптической фильтрации.

Пример 1. Подавление постоянной составляющей

Для этой цели применяется непрозрачный экран, помещаемый в точке с координатами $\omega_{x2} = 0$, $\omega_{y2} = 0$. Такая задача часто встречается при обработке биполярных сигналов, записанных на фотопленке. Чтобы записать биполярный сигнал, сначала задается постоянное смещение, а потом на него накладывается сам сигнал. В процессе обработки при перемножении с другими сигналами постоянное оптическое смещение может дать ложные составляющие. Поэтому его необходимо отфильтровать пространственным фильтром.

Пример 2. Операция дифференцирования

Дифференцирование выражения для обратного преобразования Фурье дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} E(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_x) \exp(i\omega_x x) d\omega_x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} i\omega_x S(\omega_x) \exp(i\omega_x x) d\omega_x. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Как видно, операцию дифференцирования можно выполнить в спектральной плоскости, помещая в ней фильтр, частотная характеристика которого имеет вид, изображенный на рисунке 8.5,а:

$$H(\omega_x) = A(\omega_x) \exp[i\varphi(\omega_x)] = i\omega_x = \omega_x \exp(i\pi/2).$$

Так как постоянный фазовый сдвиг $\pi/2$ не существен, то он может быть отброшен и фильтр задается только амплитудной характеристикой.

На практике реализовать такой фильтр можно путем применения экрана, прозрачность которого увеличивается от центра к краям, а в области отрицательных частот расположена полуволновая фазовая пластинка (рисунок 8.5,б).

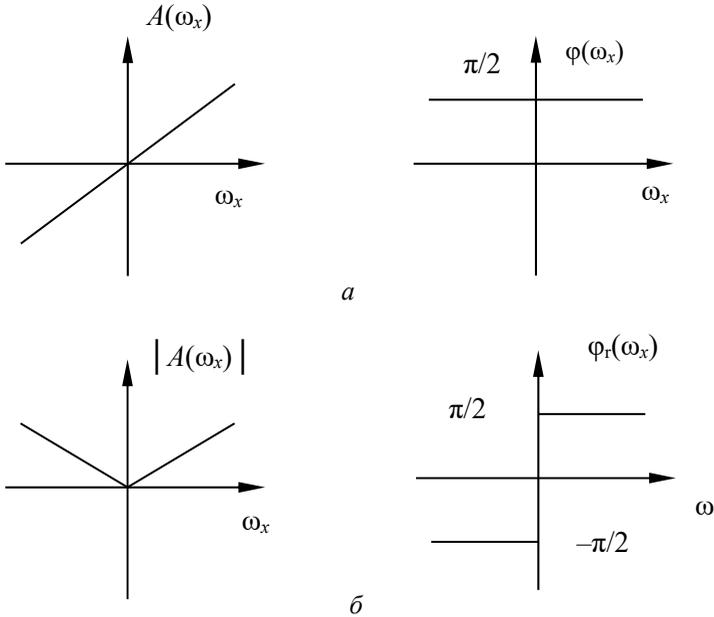


Рисунок 8.5 – Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики пространственных фильтров, реализующих операцию дифференцирования

8.3.3 Вычисление функций свертки и корреляции

Функцией свертки называется интеграл

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t) dt,$$

который может быть вычислен путем перемножения функции $f_1(t)$ на обращенную во времени и смещенную на величину τ (по аргументу) функцию $f_2(t)$.

Соответственно **функция корреляции** определяется интегралом $\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(\tau + t) dt$.

Для этих функций справедливы **прямая теорема свертки**

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = F_1(\omega)F_2(\omega), \quad (8.15)$$

и теорема

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = F_1(\omega)F_2^*(\omega), \quad (8.16)$$

которые позволяют провести вычисление функций свертки и корреляции, осуществляя операции над спектрами $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ исходных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Оптические системы позволяют вычислять указанные функции двумя способами.

1. Преобразование в спектральной плоскости

Рассмотрим оптическую систему (рисунок 8.6), выполняющую прямое и обратное преобразование Фурье. Пусть в плоскости P_1 помещен транспарант с записанным на него сигналом $E_1(x_1, y_1)$, а в плоскости P_2 – пространственный фильтр с функцией пропускания $H(\omega_{x2}, \omega_{y2})$.

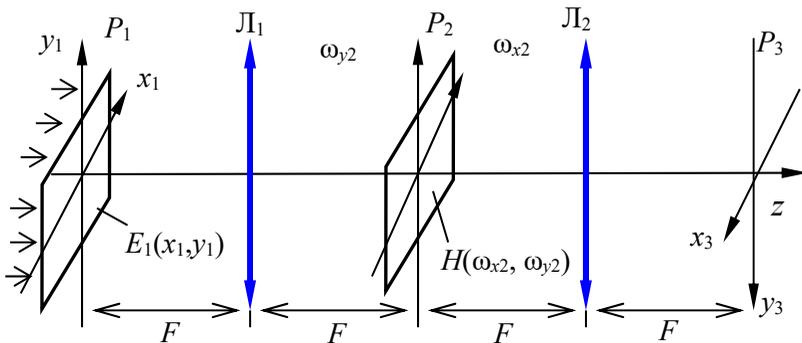


Рисунок 8.6 – Оптическая система, выполняющая прямое и обратное преобразования Фурье

Тогда при освещении транспаранта плоской волной в плоскости P_2 образуется пространственный спектр сигнала $S(\omega_{x2}, \omega_{y2})$, который перемножается с характеристикой фильтра:

$$E_2(x_2, y_2) = S(\omega_{x2}, \omega_{y2})H(\omega_{x2}, \omega_{y2}).$$

Линза L_2 выполняет обратное преобразование Фурье от произведения спектров

$$\begin{aligned} E_3(x_3, y_3) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_{x2}, \omega_{y2})H(\omega_{x2}, \omega_{y2}) \exp[i(\omega_{x2}x_1 + \omega_{y2}y_1)] d\omega_{x2} d\omega_{y2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Согласно теореме свертки преобразование Фурье от произведения спектров даст нам функцию свертки рассматриваемых сигналов $E_1(x_1, y_1)$ и $h_1(x_1, y_1)$, которому соответствует спектр $H_1(\omega_{x2}, \omega_{y2})$. Таким образом, получаем

$$E_3(x_3, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x_1, y_1) h(x_3 - x_1, y_3 - y_1) dx_1 dy_1 \quad (8.18)$$

и распределение светового поля в плоскости P_3 будет соответствовать двумерной свертке сигналов.

2. Преобразование в сигнальной плоскости

Чтобы перемножить сигналы, можно использовать схему, изображенную на рисунке 8.7, в которой линза L_1 переворачивает изображение, помещенное в плоскости P_1 , отстоящей от нее на расстоянии $2F$. Это перевернутое изображение сигнала $E'_1(x'_1, y'_1) = E_1(x_1, y_1)$ проецируется на изображение $h_1(x_1, y_1)$, находящееся в плоскости P'_1 . Если смещать транспарант P_1 во времени со скоростями v_x и v_y , то световое поле в плоскости P'_1 будет иметь вид произведения $E_1(-x_1, -y_1)h(x_1 + x_0, y_1 + y_0)$, где $x_0 = v_x t$ и $y_0 = v_y t$.

Линза \mathcal{L}_2 будет выполнять операцию интегрирования, если мы будем снимать сигнал с помощью точечного фотоприемника, помещенного в точку с координатами $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$:

$$E_2(0,0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(-x_1, -y_1) h(x_1 + x_0, y_1 + y_0) dx_1 dy_1. \quad (8.19)$$

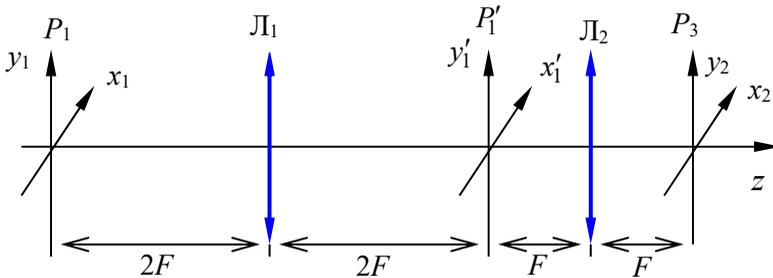


Рисунок 8.7 – Оптическая схема, реализующая операцию интегрирования

Этот сигнал будет представлять собой функцию времени t , по величине которой можно судить о степени совпадения сигналов $E_1(x_1, y_1)$ и $h_1(x_1, y_1)$.

8.3.4 Согласованная фильтрация

Одной из основных задач в радиоэлектронике является выделение слабого сигнала из помех. Известно, что этот процесс будет оптимальным, если смесь сигнала $S(t)$ и помехи $n(t)$ обработать с помощью корреляционного устройства, на которое также поступает сопряженный сигнал $S^*(t)$. В этом случае на выходе коррелятора будем иметь отклик

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S^*(t+\tau) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) S^*(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S^*(t+\tau) dt, \end{aligned} \quad (8.20)$$

соответствующий функции автокорреляции сигнала, поскольку сигнал и шум не коррелированы и их функция взаимной корреляции $\int_{-\infty}^{\infty} n(t)S^*(t + \tau)dt = 0$.

Такой способ выделения сигнала из шумов носит название корреляционной обработки или согласованной (оптимальной) фильтрации. Он позволяет выделять сигналы из шумов при отношении сигнал/шум меньше единицы.

Рассмотрим вопрос о создании с помощью пространственных фильтров системы согласованной фильтрации. Пусть мы имеем известный полезный сигнал $S(x)$ и шум $n(x)$. В этом случае сигнал на входном транспаранте представляется в виде суммы

$$f(x_1) = S(x_1) + n(x_1). \quad (8.21)$$

В спектральной плоскости спектр функции $f(x_1)$ будет состоять из спектров сигнала и шума:

$$F(\omega_{x_2}) = S(\omega_{x_2}) + N(\omega_{x_2}). \quad (8.22)$$

Если в спектральной плоскости поставить пространственный фильтр с характеристикой пропускания $H(\omega_{x_2}) = S^*(\omega_{x_2})$, оптимальной для случая белого шума, то суммарный сигнал на выходе фильтра будет иметь вид $S(\omega_{x_2})S^*(\omega_{x_2}) + N(\omega_{x_2})S^*(\omega_{x_2})$.

Если теперь подвергнуть этот спектр обратному преобразованию Фурье, то в фокальной плоскости второй линзы получится автокорреляционная функция сигнала и корреляционная функция сигнала и шума

$$E_3(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1)S^*(x_1 + x_3)dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1)S^*(x_1 + x_3)dx_1. \quad (8.23)$$

Поскольку сигнал и шум не коррелированы, то второе слагаемое будет пренебрежимо мало по сравнению с первым и сигнал будет выделен из шума.

Основной задачей разработки систем согласованной фильтрации является создание комплексного оптимального филь-

тра, что для традиционной радиоэлектроники является достаточно сложной задачей. Оптические методы позволяют изготовить такой фильтр достаточно просто.

Рассмотрим один из способов получения такого фильтра для произвольного вида сигнала, основанный на принципах голографии (рисунок 8.8), для одномерного случая.

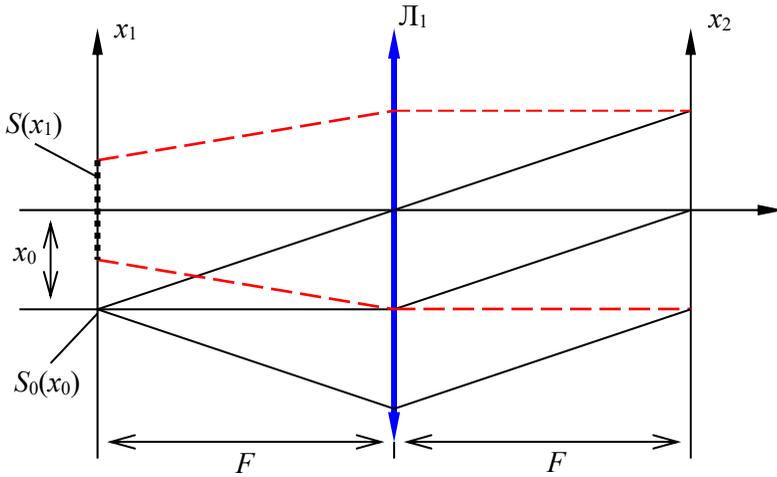


Рисунок 8.8 – Оптическая система согласованной фильтрации

Здесь в сигнальной плоскости, кроме изображения сигнала $S(x_1)$, помещен точечный когерентный источник опорной волны

$$S(x_1) = \delta(x_1 + x_0). \quad (8.24)$$

Этот источник создает после линзы L_1 наклонный параллельный световой пучок. В фокальной плоскости линзы, кроме спектра $S(\omega_{x_2})$, имеем еще спектр этого источника

$$E_2^0(\omega_{x_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_{x_2}x_1) \delta(x_1 + x_0) dx_1 = \exp(-i\omega_{x_2}x_0), \quad (8.25)$$

что соответствует равномерной засветке всех пространственных частот. Коэффициент x_0 в показателе экспоненты определяет величину и направление отклонения опорной волны от оптической оси системы.

В спектральной плоскости помещается фотоэмульсия (фотопластинка), которая засвечивается суммарным значением световых полей, соответствующих спектрам сигнала и опорной волны. Вследствие квадратичности характеристики фотоэмульсии сигнал, записанный на ней, можно записать как

$$I(\omega_{x2}) = |S(\omega_{x2}) + \exp(-i\omega_{x2}x_0)|^2 = \left[1 + |S(\omega_{x2})|^2 \right] + S(\omega_{x2}) \exp(i\omega_{x2}x_0) + S^*(\omega_{x2}) \exp(-i\omega_{x2}x_0). \quad (8.26)$$

Проекционная фотоэмульсия таким образом и проявленная фотоэмульсия будет представлять собой голограмму спектра сигнала $S(x)$. При определенном режиме проявления и коэффициенте контрастности фотоэмульсии ее пропускание по напряженности светового поля будет пропорционально выражению (8.26). Это выражение в последнем члене содержит необходимую величину $S^*(\omega_{x2})$, с дополнительным множителем $\exp(-i\omega_{x2}x_0)$.

Кроме того, в формуле (8.26) присутствуют еще два члена, которые могут оказаться помехой в выполнении операции согласованной фильтрации.

Для того чтобы ответить на вопрос, будет ли голограмма, описываемая выражением (8.26), играть роль согласованного фильтра, поместим ее в спектральную плоскость линзы L_1 (рис. 8.9), а в сигнальной плоскости P_1 – изображение сигнала $f(x_1) = S(x_1) + n(x_1)$.

При освещении входного транспаранта когерентным светом в плоскости P_2 будем иметь произведение

$$R(\omega_{x2}) = F(\omega_{x2})I(\omega_{x2}) = F \left[1 + |S|^2 \right] + FS^* \exp(-i\omega_{x2}x_0) + FS \exp(i\omega_{x2}x_0). \quad (8.27)$$

Как видно, сигнал на выходе фильтра расщепляется на три световых пучка, идущих в разных направлениях.

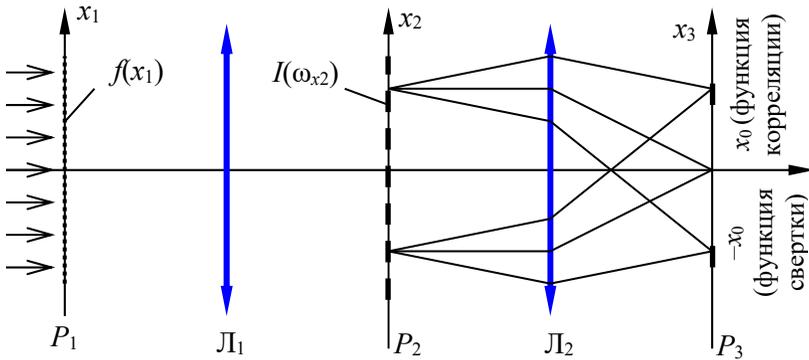


Рисунок 8.9 – Оптическая схема, реализующая функцию корреляции сигнала и функцию свертки сигнала и шума

Пучок, описываемый первым членом $F[1 + |S|^2]$, распространяется в направлении оптической оси и его координатная зависимость близка к Фурье-образу сигнала $f(x)$.

Второй пучок, описываемый членом $FS^* \exp(-i\omega_{x_2}x_0)$, идет в том же направлении, в каком шел опорный пучок на стадии записи голограммы. Третий член $FS \exp(i\omega_{x_2}x_0)$ описывает световой пучок, отклоняющийся относительно оптической оси в противоположном направлении.

Если теперь эти пучки пропустить через линзу L_2 , то в ее фокальной плоскости в результате обратного преобразования Фурье получаем

$$Q(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_{x_2}) \left[1 + |S(\omega_{x_2})|^2 \right] \exp(i\omega_{x_2}x_3) d\omega_{x_2} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_{x_2}) S^*(\omega_{x_2}) \exp[i\omega_{x_2}(x_3 - x_0)] d\omega_{x_2} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_{x2})S(\omega_{x2})\exp[i\omega_{x2}(x_3 + x_0)]d\omega_{x2}.$$

Так как спектральная плотность шума $|N(\omega_{x2})|^2$ – величина практически постоянная, то получаем

$$Q(x_3) \sim \left[1 + |S(\omega)|^2\right] f(x) + \varphi(x_3 - x_0) + r(x_3 + x_0),$$

где $\varphi(x_3 - x_0)$ – функция корреляции сигналов $S(x)$ и $f(x)$, смещенная по оси x_3 на величину x_0 ; $r(x_3 + x_0)$ – функция свертки этих же сигналов, смещенная в противоположную сторону также на x_0 . В окрестности точки $x_3 = 0$ будет наблюдаться перевернутое изображение $f(x)$, умноженное на $1 + |S(\omega_x)|^2$.

Таким образом, сигнал $FS^* = (S + N)S^*$ дает функцию автокорреляции сигнала и функцию корреляции сигнала и шума, сигнал $FS = (S + N)S$ – функцию автосвертки сигнала и функцию свертки сигнала и шума. Поскольку сигналы для спектров FS^* и FS будут пространственно разделены, то можно утверждать, что голограмма, описываемая выражением (8.26), станет играть роль согласованного фильтра, если наблюдение функции корреляции сигналов $S(x)$ и $f(x)$ вести в области $x_3 \sim x_0$.

9 ОПТИЧЕСКИЕ ТРАНСПАРАНТЫ

9.1 Фото пленки

В оптических системах обработки информации фото пленки и фото пластинки широко используются как для изготовления сигнальных транспарантов, помещаемых в сигнальной плоскости, так и для создания всевозможных пространственных фильтров. В связи с этим к фото пленкам предъявляются очень серьезные требования по их амплитудным, фазовым и пространственно-частотным характеристикам.

Модуляционная характеристика фото пленки определяется как отношение комплексных амплитуд света до и после пленки:

$$\begin{aligned} \dot{T}_E(x, y, t) &= \frac{\dot{E}(x, y, t)}{E_0(x, y, t)} = \\ &= \frac{E_m(x, y, t)}{E_{m0}(x, y, t)} \exp\{i[\varphi(x, y, t) - \varphi_0(x, y, t)]\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

и содержит как амплитудную, так и фазовую составляющую.

Амплитудную характеристику пленки в силу квадратичности фото приемных устройств зафиксировать трудно, поэтому, как правило, для описания свойств экспонированной фото пленки применяют коэффициент пропускания по интенсивности

$$T = \frac{I}{I_0} = \frac{|E|^2}{|E_0|^2} \quad (9.2)$$

или плотность почернения фото пленки

$$D = \lg \frac{1}{T}. \quad (9.3)$$

Последняя величина имеет прямой физический смысл – она пропорциональна массе серебра на единицу площади проявленного негатива.

Обычно светочувствительные свойства фотопленки описывают «*кривой почернения*», выражающей зависимость D от логарифма экспозиции $E = It$ (t – время засветки).

На рисунке 9.1 приведена типичная кривая почернения. Следует отметить на ней линейный участок, на котором обычно рекомендуется работать.

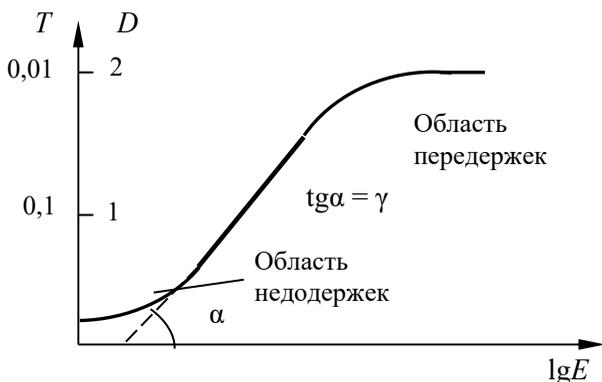


Рисунок 9.1 – Кривая почернения фотопленки

Наклон этого участка характеризует коэффициент контрастности фотопленки γ . На этом линейном участке

$$D = \gamma \lg E - D_0. \quad (9.4)$$

Найдем зависимость амплитудного пропускания пленки от E , подставляя выражение (9.4) в (9.3):

$$|T_E| = \sqrt{T} = kE^{-\gamma/2} \text{ – для негативной пленки,}$$

$$|T_E| = \sqrt{T} = kE^{\gamma/2} \text{ – для позитивной пленки.}$$

Таким образом, для получения линейной зависимости пропускания пленки T_E от экспозиции (а значит, и от интенсивности засвечивающего сигнала) необходимо выбирать позитивную пленку с коэффициентом контрастности $\gamma = 2$.

Фазовая характеристика пленки определяется величиной фазового сдвига световой волны при прохождении пленки. При нормальном падении

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} d(x, y) [n(x, y) - 1], \quad (9.5)$$

где d – толщина пленки; n – коэффициент преломления материала пленки. Толщина пленки зависит от способа ее изготовления и является случайной величиной $d(x, y)$.

Кроме того, может изменяться и толщина эмульсионного слоя, которая зависит от концентрации частиц серебра, а следовательно, и от экспозиции. Фазовые изменения $\varphi(x, y)$ можно устранить применением жидкостного компенсатора (рисунок 9.2), уменьшающего флуктуации фазы при прохождении света через транспарант.



Рисунок 9.2 – Жидкостный компенсатор

Пространственно-частотная характеристика пленки определяет точность воспроизведения формы сигнала при записи. Этот процесс можно охарактеризовать импульсной передаточной функцией $h_p(x, y)$ или частотной характеристикой пленки $H_p(\omega_x, \omega_y)$. В этом случае выходной сигнал, записанный на пленке, можно представить в виде свертки

$$T_E(x, y) = \iint_S S(x, y) h[(x - x_1), (y - y_1)] dx_1 dy_1$$

передаточной функции и входного сигнала.

С физической точки зрения процесс искажения формы сигнала при записи определяется зернистостью фотоэмульсии, на зернах которой происходит рассеяние света. Чем меньше зерна, тем меньше искажения сигнала. Количественно про-

странственно-частотная характеристика фотоматериала оценивается по разрешающей способности – числу раздельно передаваемых параллельных линий, приходящихся на 1 мм изображения. Лучшие фотопленки обеспечивают разрешение до 6000 лин./мм.

Чувствительность фотоматериала для оптических транспарантов удобно характеризовать экспозицией на единицу площади, требуемой для обеспечения работы на линейном участке кривой почернения. Высокоразрешающие фотопленки имеют чувствительность от 10^{-3} до 10^{-4} нДж/мкм².

9.2 Несеребряные материалы

Необходимость химических процессов проявления и закрепления является большим недостатком фотопленок, исключая работу в реальном масштабе времени. Сегодня используются и другие фотоматериалы как для однократной записи, так и для многократного повторения циклов записи-стирание.

Фотополимеры могут быть использованы для изготовления трехмерных фазовых голограмм. Запись информации в них происходит за счет изменения показателя преломления при полимеризации под действием света исходных мономеров. Фотополимеры имеют разрешающую способность до 4000 лин./мм, чувствительность от 10^{-2} до 10^{-3} нДж/мкм², но допускают только однократную запись.

В фотохромных материалах при облучении светом с определенной длиной волны λ_w меняется спектр поглощения. Считывание информации осуществляется светом с другой длиной волны λ_r , стирание – светом с $\lambda_{er} > \lambda_w$. Типичными фотохромными материалами являются щелочно-галоидные кристаллы (КСl, КBr), флюорид кальция CaF₂.

В фотохромных средах записываются объемные амплитудные голограммы в реальном масштабе времени с разре-

шением до 3000 лин./мм. Чувствительность их невелика ($\sim 10^{-1}$ нДж/мкм²), а число циклов перезаписи может достигать 10^{10} .

В фоторефрактивных средах на основе электрооптических кристаллов ($\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$, $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$, $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ и др.) под действием света происходит фотовозбуждение носителей заряда с дефектных центров (электронов в зону проводимости или дырок в валентную зону). Вследствие дрейфа носителей за счет диффузии, фотогальванического эффекта или в приложенном внешнем поле происходит их захват на ловушки в менее освещенных областях кристалла. В результате происходит формирование объемного заряда, электрическое поле которого за счет электрооптического эффекта изменяет оптические свойства среды в соответствии с распределением интенсивности записывающего света.

Фоторефрактивные кристаллы имеют высокую разрешающую способность (10^4 лин./мм и более), чувствительность к записи от 1 до 10^{-3} нДж/мкм². Стирание объемных голограмм осуществляется нагреванием кристалла до температуры ~ 170 °С или при равномерной засветке кристалла. Голограммы могут многократно перезаписываться и храниться в течение нескольких лет.

Фототермопластики допускают перезапись, а по чувствительности и разрешающей способности конкурируют с фотопленками. Фототермопластик (рисунок 9.3) состоит из контактирующих слоев, термопластического и фотопроводящего, на последний из которых нанесен прозрачный электрод.

Эти слои расположены на подложке, которая на рисунке 9.3 не показана. С помощью коронного разряда внешняя поверхность термопластика равномерно заряжается. При освещении фотопроводящего слоя возникает распределение заряда на внутренней поверхности термопластического слоя. Распределение потенциала на внешней поверхности термопластика становится неравномерным, и дальнейшее накопление зарядов

при коронном разряде будет соответствовать распределению интенсивности экспонирующего света. Потом среда быстро нагревается до температуры размягчения термопластика и электростатические силы вызывают деформацию этого слоя, образуя рельефное изображение (фазовый транспарант).

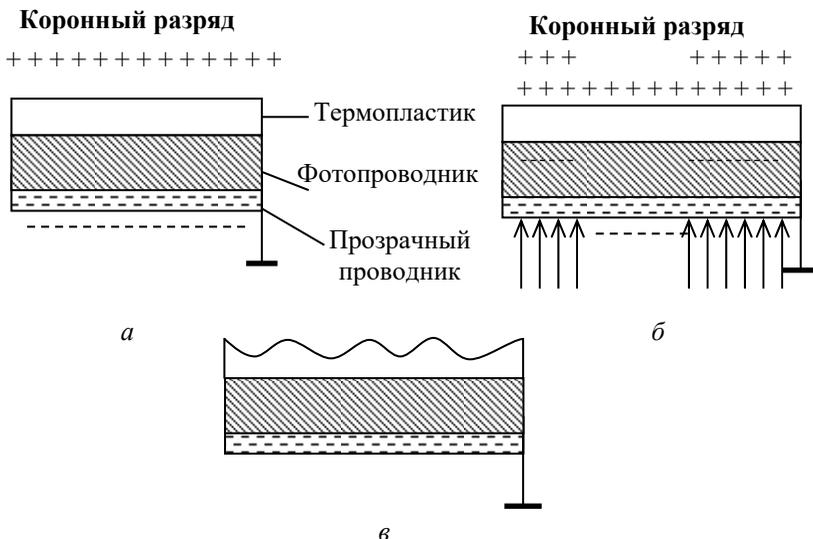


Рисунок 9.3 – Стадии записи информации на термопластик:
a – предварительная зарядка поверхности; *б* – освещение;
в – термообработка

Для стирания рельефа используется импульс нагрева. Чувствительность фототермопластиков к записи может достигать 10^{-5} нДж/мкм², разрешающая способность – 4000 лин./мм.

9.3 Акустооптические модуляторы

Для работы в реальном масштабе времени в качестве транспарантов используют различные быстродействующие пространственные модуляторы света. Широкое распространение получили акустооптические модуляторы (АОМ), принцип дей-

ствия которых основан на явлении дифракции света на ультразвуковых колебаниях. Модулятор света работает следующим образом (рисунок 9.4).

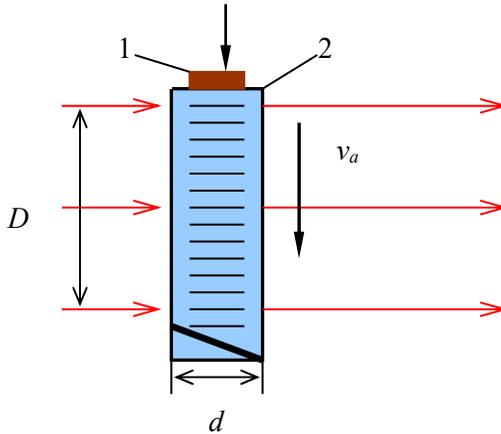


Рисунок 9.4 – Акустооптический модулятор света

Входной сигнал $S(t)$ с помощью пьезоэлектрического преобразователя 1 возбуждает в прозрачном для света образце 2 упругие колебания, распространяющиеся в нем со скоростью v_a .

В силу конечности скорости v_a колебания, возникающие у поверхности, на которой расположен преобразователь (при $x = 0$) в момент времени t достигнут точки с координатой x внутри образца с некоторым запаздыванием $t_0 = x/v_a$. Поэтому величина колебаний в различных точках образца для фиксированного момента времени будет пропорциональна $S(t - x/v_a)$.

Таким образом, зависимость амплитуды колебаний от координаты x будет повторять временную зависимость входного сигнала $S(t)$.

Возникновение упругих колебаний в образце приводит к изменению его показателя преломления. Для оптически изотропной среды имеем

$$n(x, t) = n_0 + \Delta n(x, t) = n_0 + \frac{n_0^3 p U(x, t)}{2}, \quad (9.6)$$

где p – эффективный фотоупругий коэффициент; U – величина упругой деформации среды.

Так как величина деформации изменяется от точки к точке, то показатель преломления образца также будет модулирован по закону изменения входного сигнала.

Поскольку скорость акустической волны, обычно изменяющаяся в пределах от 10^3 до 10^4 м/с, много меньше скорости света в среде, можно считать, что в каждый момент времени свет будет взаимодействовать с неподвижной средой, у которой коэффициент преломления меняется от точки к точке. Волновой фронт пучка, проходя через различные участки модулятора, испытывает различные фазовые сдвиги:

$$\psi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} n(x)d. \quad (9.7)$$

Таким образом, световая волна, выходящая из модулятора, представляет собой модулированную по фазе волну, отображающую форму входного сигнала.

Тогда амплитудную характеристику, или пропускание модулятора, можно записать следующим образом:

$$T_E(x) = P_D(x) \exp[i\psi(x)], \quad (9.8)$$

где апертурная функция модулятора выражается как

$$P_D(x) = \begin{cases} 1, & D \geq x \geq 0, \\ 0, & 0 > x > D. \end{cases}$$

В случае монохроматического входного сигнала

$$S(t) = S_m \cos(2\pi ft + \varphi_0) \quad (9.9)$$

в образце модулятора будет распространяться бегущая акустическая волна с пространственным периодом (длиной волны) $\Lambda = v_a/f$, а модулятор станет подобен синусоидальной фазовой дифракционной решетке с пропусканием

$$T_E(x,t) = P_D(x) \exp \left[i\psi_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} x + \varphi_0 \right) \right], \quad (9.10)$$

где $\psi_m = (2\pi/\lambda)(n_0^3 p U_m/2)d$.

10 ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

10.1 Качественный анализ дифракции света на акустических волнах

С точки зрения квантовой механики дифракцию света на акустических волнах можно рассматривать как процесс трех-частичного взаимодействия, когда фотон с энергией $\hbar\omega_n$ и квазиимпульсом $\hbar\vec{k}_n$ взаимодействует с фононом $(\hbar\Omega, \hbar\vec{K})$. В результате рождается фотон дифрагированной волны, энергия и квазиимпульс которого должны удовлетворять законам сохранения:

$$\hbar\omega_g = \hbar\omega_n \pm \hbar\Omega, \quad (10.1)$$

$$\hbar\vec{k}_g = \hbar\vec{k}_n \pm \hbar\vec{K}. \quad (10.2)$$

Первое из этих равенств всегда является точным и описывает с классической точки зрения доплеровский сдвиг в дифрагированной волне, обусловленный движением фазовой решетки (акустической волны). Второе равенство не всегда выполняется точно, может существовать вектор $\Delta\vec{k}$, выражающий рассогласования волновых векторов: $\Delta\vec{k} = \vec{k}_n \pm \vec{K} - \vec{k}_g$. Это связано в первую очередь с тем, что реальные оптические и акустические пучки являются ограниченными по апертуре и описываются набором волновых векторов вблизи центрального вектора \vec{k}_{g0} , \vec{k}_{n0} или \vec{K}_0 (рисунок 10.1).

Угол $\delta\theta$, в котором сосредоточена основная энергия волны, определяется угловой расходимостью вследствие дифракции:

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{a}, \quad (10.3)$$

где λ – длина волны; a – апертура пучка.

При точном синхронизме имеем одно скалярное и одно векторное условие трехчастичного взаимодействия (условия синхронизма):

$$\omega_g = \omega_n \pm \Omega, \quad (10.4)$$

$$\vec{k}_g = \vec{k}_n \pm \vec{K}. \quad (10.5)$$

Вид треугольника волновых векторов \vec{k}_g , \vec{k}_n и \vec{K} зависит от типа дифракции. Если длины волновых векторов световых волн не зависят от их направления, что возможно в изотропной среде или для обыкновенных волн в анизотропной среде, то треугольник является равнобедренным.

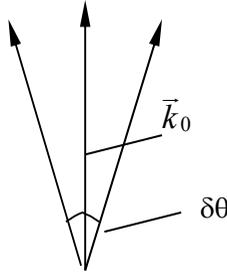


Рисунок 10.1 – Набор волновых векторов для ограниченных световых и акустических пучков

Действительно, неравенство $\Omega \ll \omega_g, \omega_n$ приводит к соотношению

$$\frac{\omega_n}{c} n_n = |\vec{k}_n| \approx |\vec{k}_g| = \frac{\omega_g}{c} n_g, \quad (10.6)$$

поскольку $n_n = n_g = n$ и не зависят от направления.

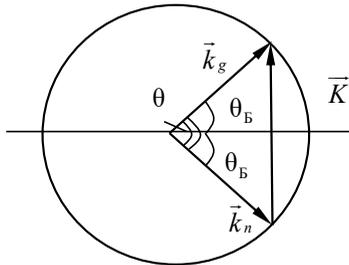
Векторная диаграмма для такой «изотропной» (обычной) дифракции изображена на рисунке 10.2.

Здесь сфера соответствует возможным положениям концов векторов \vec{k}_n и \vec{k}_g , отложенных из начала координат, и называется *поверхностью волновых векторов*.

Угол между волновым вектором падающей волны \vec{k}_n и фронтом акустической волны называется **углом Брэгга** и может быть легко найден из рисунка 10.2:

$$\sin \theta_B = \frac{|\vec{K}|}{2|\vec{k}_n|} = \frac{\lambda}{2\Lambda} = \frac{\lambda}{2v_a n} f. \quad (10.7)$$

Напомним, что подобное соотношение для дифракции рентгеновских лучей на атомных плоскостях в кристаллах встречалось в курсе «Физика» ($\Lambda \rightarrow d$, где d – межплоскостное расстояние).



$$\vec{k}_g = \vec{k}_n + \vec{K}$$

Рисунок 10.2 – Векторная диаграмма дифракции Брэгга в изотропной среде

На частотах до 3 ГГц угол θ_B мал и синус можно заменить аргументом. В этом случае для угла дифракции $\theta = 2\theta_B$ между \vec{k}_n и \vec{k}_g имеем

$$\theta \approx \frac{\lambda}{v_a n} f. \quad (10.8)$$

Отметим **важные следствия** из нашего качественного рассмотрения:

1) сдвиг частоты в дифрагированной волне на частоту акустической волны можно использовать для частотной модуляции световых пучков;

2) изменением амплитуды акустической волны можно модулировать амплитуду дифрагированного света;

3) изменением частоты акустической волны f можно сканировать по углу θ световым пучком (сценические эффекты, телевизионные изображения большой яркости, оптическая локация и т. д.);

4) при заданных λ , v_a и n измерением угла θ можно определить частоту неизвестных сигналов, проходящих на акустооптический модулятор (акустооптические анализаторы спектра и частотомеры);

5) при заданных n , v_a и f можно проводить спектральный анализ световых пучков и спектральную фильтрацию.

В анизотропной среде возможна так называемая **аномальная дифракция Брэгга**, когда падающая и дифрагированная волны имеют разные типы, т. е. одна из них является обыкновенной, а другая – необыкновенной (рисунок 10.3).

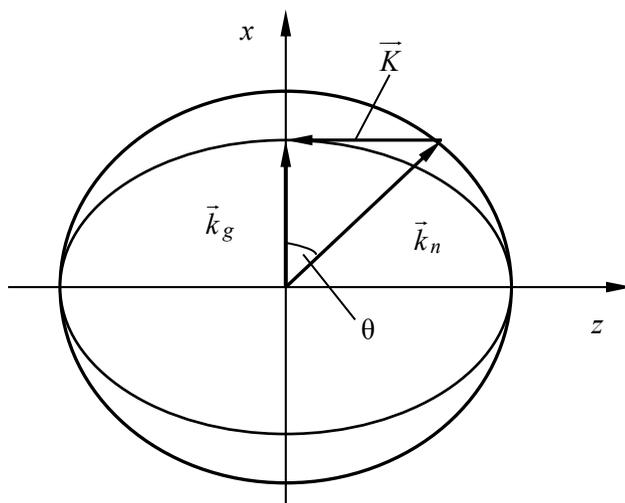


Рисунок 10.3 – Векторная диаграмма аномальной дифракции Брэгга

На приведенном рисунке падающая волна является обыкновенной ($n(\theta) = n_0$), а дифрагированная – необыкновенной с показателем преломления $n'(\theta) \neq \text{const}$. Обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одном направлении, имеют ортогональные векторы поляризации (собственные векторы). Поскольку угол θ мал, то в данном случае можно приближенно считать, что падающая и дифрагированная волны ортогонально поляризованы по отношению друг к другу.

Аномальную дифракцию называют еще и дифракцией света с поворотом плоскости поляризации, а также анизотропной дифракцией. Отметим, что треугольник волновых векторов здесь может существенно отличаться от равнобедренного.

Частным случаем аномальной дифракции является **коллинеарная дифракция**, когда волновые векторы всех взаимодействующих волн параллельны друг другу (рисунок 10.4).

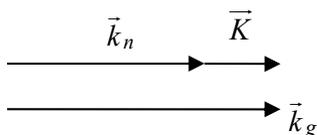


Рисунок 10.4 – Волновые векторы взаимодействующих волн при коллинеарной дифракции

Этот вид дифракции позволяет реализовать спектральные фильтры с шириной полосы пропускания $\Delta\lambda \sim 5 \text{ \AA}$ (рисунок 10.5), перестраиваемые при изменении частоты акустической волны:

$$\lambda_0 = \frac{v_a}{f}(n_0 - n'). \quad (10.9)$$

Количественный анализ эффектов дифракции света на акустических волнах рассмотрим ниже, используя несколько подходов. Начнем с подхода, в котором акустооптический модулятор является «тонким» фазовым транспарантом.

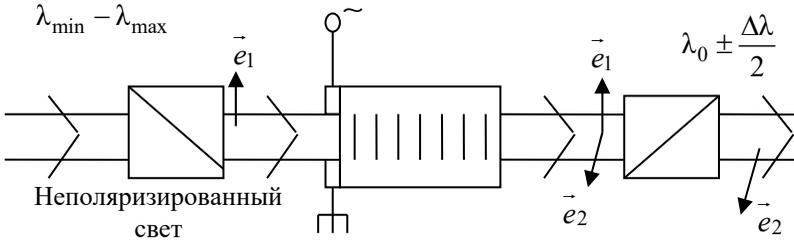


Рисунок 10.5 – Оптическая схема спектрального фильтра

В этом случае дифракционная картина содержит набор дифракционных максимумов и называется **дифракцией Рамана – Ната**.

10.2 Дифракция Рамана – Ната

При возбуждении АОМ монохроматическим сигналом его функция пропускания на низких частотах (< 100 МГц) может быть выражена в виде

$$T_E(x) = P_D(x) \exp \left[-i\psi_m \cos \left(\Omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} x + \varphi \right) \right], \quad (10.10)$$

где P_D – апертурная функция модулятора.

Если такой модулятор расположить в передней фокальной плоскости P_1 линзы Л и пропустить через него плоскую световую волну

$$E(z, t) = E_0 \exp [i(\omega_0 t - kz)], \quad (10.11)$$

то поле E_2 в задней фокальной плоскости P_2 будет выражаться интегралом Фурье:

$$\begin{aligned} E_2(x_2, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} T_E(x_1, t) E(z=d, t) \exp(i\omega_{x_2} x_1) dx_1 = \\ &= E_0 \exp [i(\omega_0 t - kdn_0)] \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{-D/2}^{D/2} \exp \left[-i\psi_m \cos \left(\Omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} x_1 + \varphi_1 \right) \right] \exp(i\omega_{x_2} x_1) dx_1, \quad (10.12)$$

где $\psi_m = (2\pi/\lambda)\Delta n_m d$, Δn_m – амплитуда изменения коэффициента преломления материала АОМ под действием акустической волны.

Разлагая в ряд по функциям Бесселя функцию $\exp(i\psi_m \cos \theta)$, после преобразований получаем поле E_2 в виде

$$E_2(x_2, t) = E_0 \exp(-ikn_0 d) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left((\omega_0 + m\Omega)t + m\varphi - m\frac{\pi}{2} \right) \right] \times \\ \times J_m(\psi_m) \frac{\sin \left[\left(\frac{2\pi}{\Lambda} m - \omega_{x_2} \right) \frac{D}{2} \right]}{\left(\frac{2\pi}{\Lambda} m - \omega_{x_2} \right) \frac{D}{2}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.13)$$

Таким образом, световое поле в фокальной плоскости линзы при дифракции Рамана – Ната представляет собой набор дифракционных максимумов, причем положение m -го максимума определяется формулой

$$x_{2m} = n_0 F \theta m = \frac{\lambda}{v_a} f F m. \quad (10.14)$$

Амплитуда световой волны в m -м дифракционном максимуме определяется функцией Бесселя m -го порядка от аргумента ψ_m , пропорционального амплитуде деформаций в акустической волне. Для $m = \pm 1$ при $\psi_m \ll 1$ имеем $J_{\pm 1} \sim \psi_m/2$, что дает линейную зависимость амплитуды дифрагированного света от амплитуды акустической волны. Отметим также сдвиг частоты в m -м максимуме на величину $m\Omega$ и наличие сдвига фазы $m\varphi$, определяемого начальной фазой сигнала, возбуждавшего акустическую волну.

Применение дифракции Рамана – Ната ограничено ввиду множества дифракционных максимумов. С точки зрения качественного подхода «тонкому» транспаранту соответствует большая расходимость акустических волн $\delta\theta = \Lambda/d = v_a/fd$, что позволяет дифрагированному в m -й порядок световому пучку, испытав дифракцию, дать вклад в $(m \pm 1)$ -й порядок (рисунок 10.6).

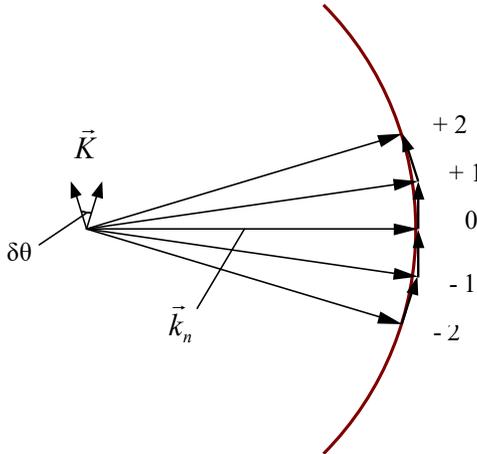


Рисунок 10.6 – Векторные диаграммы дифракции Рамана – Ната

10.3 Дифракция Брэгга в изотропной среде. Метод волнового уравнения

Рассмотрим изотропную среду, часть которой возмущена акустической волной (рисунок 10.7):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + \delta\varepsilon_m \cos(\Omega t - Kx + \varphi) \text{ при } 0 \leq z \leq d, \quad (10.15)$$

где ε_r^0 – диэлектрическая проницаемость невозмущенной среды; $\delta\varepsilon_m$ – амплитуда изменения диэлектрической проницаемости акустической волной; φ – начальная фаза акустической волны.

Пусть плоская монохроматическая световая волна с волновым вектором \vec{k}_n , лежащим в плоскости xz , и поляризованная

вдоль оси y , падает на акустический пучок. Очевидно, если угол θ_n близок к углу Брэгга, то за счет дифракции на неоднородностях возникает дифрагированная волна с волновым вектором \vec{k}_g .

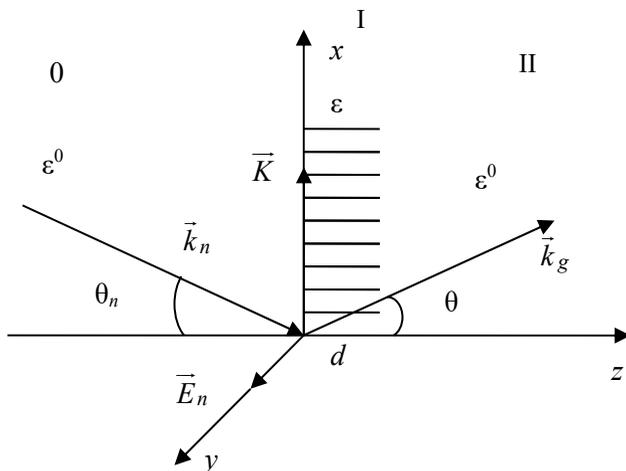


Рисунок 10.7 – Дифракция Брэгга

Отметим, что угол θ не обязательно может быть равен θ_B .

Количественное рассмотрение дифракции Брэгга может быть проведено на основе волнового уравнения.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_r \vec{E}) = 0, \quad (10.16)$$

где μ_0 и ϵ_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума. Для $z \leq 0$ решение волнового уравнения хорошо известно и в нашем случае может быть представлено в виде

$$\vec{E}_n^0 = \vec{y}_0 E_{nm}^0 \exp[i(\omega_n t - k_{nx} x - k_{nz} z)] + \text{к.с.}, \quad (10.17)$$

где $E_{nm}^0 = \text{const}$ – амплитуда волны; $k_{nx} = -(2\pi/\lambda)n_0 \sin \theta_n$, $k_{nz} = (2\pi/\lambda)n_0 \cos \theta_n$ – проекции волнового вектора \vec{k}_n на оси x

и z соответственно; $n_0 = \sqrt{\varepsilon_r^0}$ – коэффициент преломления невозмущенной среды; к.с. – комплексно сопряженная величина.

Из физических соображений ясно, что в пределах акустического пучка будет происходить изменение амплитуды падающей волны за счет передачи энергии дифрагированной волне. Поэтому целесообразно решение для падающей волны в возмущенной среде искать в виде

$$\bar{E}_n^{-1} = \bar{y}_0 E_{nm}(z) \exp[i(\omega_n t - k_{nx} x - k_{nz} z)] + \text{к.с.} \quad (10.18)$$

Считаем, что k_{nx} и k_{nz} такие же, как и для невозмущенной среды. По аналогии запишем решение для дифрагированной волны:

$$\bar{E}_g^{-1} = \bar{y}_0 E_{gm}(z) \exp[i(\omega_g t - k_{gx} x - k_{gz} z)] + \text{к.с.}, \quad (10.19)$$

где $k_{gx} = (2\pi/\lambda)n_0 \sin \theta$, $k_{gz} = (2\pi/\lambda)n_0 \cos \theta$.

Очевидно, что амплитуды волн $E_{nm}(z)$ и $E_{gm}(z)$ удовлетворяют граничным условиям

$$E_{nm}(z) = E_{nm}^0 \Big|_{z=0}, \quad (10.20)$$

$$E_{gm}(z) = 0 \Big|_{z=0}. \quad (10.21)$$

Частоты взаимодействующих волн будем считать удовлетворяющими условию синхронизма

$$\omega_g = \omega_n + \Omega. \quad (10.22)$$

Кроме того, будем предполагать выполнение условий векторного синхронизма для проекций векторов \bar{k}_n , \bar{K} и \bar{k}_g на ось x :

$$k_{gx} = k_{nx} + K, \quad (10.23)$$

а на проекции этих векторов на ось z пока никаких ограничений не накладываем.

Теперь можно подставить решение для поля $\vec{E} = \vec{E}_g^1 + \vec{E}_n^1$ в волновое уравнение (10.16) и учесть выражение для ε_r при $0 \leq z \leq d$ из (10.15), расписывая его через экспоненты по формуле Эйлера. В результате получаем, опуская \vec{y}_0 :

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(-k_{nx}^2 - k_{nz}^2 + \mu_0 \varepsilon_0 n_0^2 \omega_n^2 \right) E_{mn} - 2ik_{nz} \frac{dE_{nm}}{dz} + \frac{d^2 E_{mn}}{dz} \right] \times \\
 & \quad \times \exp[i(\omega_n t - k_{nx} x - k_{nz} z)] + \\
 & + \left[\left(-k_{gx}^2 - k_{gz}^2 + \mu_0 \varepsilon_0 n_0^2 \omega_g^2 \right) E_{gm} - 2ik_{gz} \frac{dE_{gm}}{dz} + \frac{d^2 E_{gm}}{dz} \right] \times \\
 & \quad \times \exp[i(\omega_g t - k_{gx} x - k_{gz} z)] = -\frac{\delta \varepsilon_m}{2} \left\{ \mu_0 \varepsilon_0 (\omega_n + \Omega)^2 E_{nm} \times \right. \\
 & \times \exp[i(\omega_n + \Omega)t - (k_{nx} + K)x - k_{nz} z + \varphi] + \mu_0 \varepsilon_0 (\omega_n - \Omega)^2 E_{nm} \times \\
 & \times \exp[i(\omega_n - \Omega)t - (k_{nx} - K)x - k_{nz} z - \varphi] + \mu_0 \varepsilon_0 (\omega_g + \Omega)^2 E_{gm} \times \\
 & \times \exp[i(\omega_g + \Omega)t - (k_{gx} + K)x - k_{gz} z + \varphi] + \mu_0 \varepsilon_0 (\omega_g - \Omega)^2 E_{gm} \times \\
 & \quad \left. \times \exp[i(\omega_g - \Omega)t - (k_{gx} - K)x - k_{gz} z - \varphi] \right\}. \quad (10.24)
 \end{aligned}$$

В этом выражении подчеркнем члены, которые находятся в резонансе друг с другом, с учетом условий (10.22) и (10.23); найдем, что удовлетворяются соотношения

$$k_{nx}^2 + k_{nz}^2 - \mu_0 \varepsilon_0 n_0^2 \omega_n^2 = 0, \quad k_{gx}^2 + k_{gz}^2 - \mu_0 \varepsilon_0 n_0^2 \omega_g^2 = 0,$$

а также будем считать малыми вторые производные от амплитуд волн:

$$\frac{\partial^2 E_{nm}}{dz^2} \ll k_{nz} \frac{\partial E_{nm}}{dz}, \quad \frac{\partial^2 E_{gm}}{dz^2} \ll k_{gz} \frac{\partial E_{gm}}{dz}.$$

Последние неравенства используются в *методе медленно меняющихся амплитуд* для получения *укороченных уравнений*, в которых ими пренебрегается:

$$\frac{dE_{mn}}{dz} = -i \frac{\delta \varepsilon_m k_0^2}{4k_{nz}} E_{gm} \exp(-i\Delta kz) \exp(-i\varphi), \quad (10.25)$$

$$\frac{dE_{mg}}{dz} = -i \frac{\delta \varepsilon_m k_0^2}{4k_{gz}} E_{nm} \exp(i\Delta kz) \exp(i\varphi), \quad (10.26)$$

где $\Delta k = k_{gz} - k_{nz}$.

Здесь мы приравняли члены в правой и левой частях (10.24), находящиеся в резонансе, и отбросили нерезонансные члены.

Уравнения (укороченные) (10.25) и (10.26) называют **уравнениями связанных волн**. Они показывают, что при дифракции света на акустических волнах изменение амплитуды волн в пространстве пропорционально амплитуде «связанной» волны и амплитуде акустической волны.

Для нахождения решений для амплитуд падающей и дифрагированной волн из уравнений связанных волн (10.25) и (10.26), являющихся обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, сведем систему к одному уравнению второго порядка. Для этого выразим из формулы (10.26) амплитуду падающей волны $E_{nm}(z)$:

$$E_{nm} = \frac{\exp(-i\Delta kz) \exp(-i\varphi)}{-i\delta \varepsilon_m k_0^2 / (4k_{gz})} \frac{dE_{gm}}{dz}. \quad (10.27)$$

Найдем производную этой функции:

$$\frac{dE_{nm}}{dz} = \frac{\exp(-i\varphi)}{-i\delta \varepsilon_m k_0^2 / (4k_{gz})} \left[-i\Delta k \frac{dE_{gm}}{dz} + \frac{d^2 E_{gm}}{dz^2} \right] \exp(-i\Delta kz),$$

подставим результаты в выражение (10.25). В результате получаем следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 E_{gm}}{dz^2} - i\Delta k \frac{dE_{gm}}{dz} + \frac{\delta \varepsilon_m^2 k_0^4}{16k_{gz}k_{nz}} E_{gm} = 0. \quad (10.28)$$

Его решение имеет вид

$$E_{gm}(z) = A \exp(p_1 z) + B \exp(p_2 z), \quad (10.29)$$

где p_1, p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 - i\Delta k p + \zeta^2 = 0, \quad (10.30)$$

в котором введено обозначение $\zeta^2 = \delta\varepsilon_m^2 k_0^4 / (16k_{gz} k_{nz})$. Выражая эти корни в виде

$$p_{1,2} = \frac{i}{2} \left[\Delta k \pm \sqrt{\Delta k^2 + 4\zeta^2} \right] \quad (10.31)$$

и используя граничное условие (10.21), из соотношения (10.29) получаем решение для амплитуды дифрагированной волны

$$E_{gm}(z) = A_0 \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\Delta k^2 - 4\zeta^2} z \right] \exp \left(i \frac{\Delta k}{2} z \right), \quad (10.32)$$

известное с точностью до постоянной A_0 .

Амплитуду падающей волны найдем, подставляя решение (10.32) в уравнение (10.27):

$$\begin{aligned} E_{nm}(z) = A_0 & \frac{\exp(-i\Delta k z/2) \exp(-i\varphi)}{-i\delta\varepsilon_m k_0^2 / (4k_{gz})} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\Delta k^2 + 4\zeta^2} \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\Delta k^2 + 4\zeta^2} z \right] + \right. \\ & \left. + i \frac{\Delta k}{2} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\Delta k^2 + 4\zeta^2} z \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Используя граничное условие (10.20), находим постоянную A_0 :

$$A_0 = -iE_{nm}^0 \left(\frac{\pi}{2\lambda \cos \theta} \frac{\delta\varepsilon_m}{n_0} \right) \frac{\exp(i\varphi)}{\sqrt{\Delta k^2 + 4\zeta^2}/2}. \quad (10.34)$$

В результате выражения для амплитуд $E_{gm}(z)$ и $E_{nm}(z)$ могут быть получены в виде

$$E_{gm}(z) = -iE_{nm}^0 \left(\frac{\pi\delta\varepsilon_m}{2\lambda \cos\theta n_0} z \right) \exp\left(i \frac{\Delta k}{2} z\right) \exp(i\varphi) \times \\ \times \frac{\sin \left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2 \right]}{\left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2 \right]}, \quad (10.35)$$

$$E_{nm}(z) = E_{nm}^0 \exp\left(-i \frac{\Delta k}{2} z\right) \left\{ \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{\Delta k^2 + \left(\frac{\pi\delta\varepsilon_m}{\lambda n_0 \cos\theta} \right)^2} z \right] + \right. \\ \left. + i \frac{\Delta k z}{2} \frac{\sin \left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2 \right]}{\left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2 \right]} \right\}, \quad (10.36)$$

где $4\zeta^2$ выразили в виде $4\zeta^2 = \frac{(\delta\varepsilon_m)^2 k_0^2}{4n_0^2 \cos\theta \cos\theta_n} \approx \left(\frac{\pi\delta\varepsilon_m}{\lambda n_0 \cos\theta} \right)^2$,

поскольку $\theta = \theta_n$.

Далее, учитывая соотношение $\Delta k = k_{gz} - k_{nz}$, перепишем выражение для Δk в виде

$$\Delta k = k_0 n_0 (\cos\theta - \cos\theta_n) = k_0 n_0 \left\{ \sqrt{1 - \sin^2\theta} - \cos\theta_n \right\} = \\ = k_0 n_0 \left\{ \sqrt{1 - \frac{(k_{nx} + K)^2}{k_0^2 n_0^2}} - \cos\theta_n \right\} = \\ = k_0 n_0 \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \sin\theta_n \right)^2} - \cos\theta_n \right\} = \\ = k_0 n_0 \left\{ \sqrt{\left(1 - \sin^2\theta_n\right) - \frac{\lambda^2}{n_0^2 \Lambda^2} + \frac{2\lambda}{n_0 \Lambda} \sin\theta_n} - \cos\theta_n \right\} \approx$$

$$\begin{aligned}
& \approx k_0 n_0 \left\{ \cos \theta_n \left[1 + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_n} \frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \left(2 \sin \theta_n - \frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \right) \right] - \cos \theta_n \right\} = \\
& = \frac{K}{\cos \theta_n} \left[\sin \theta_n - \frac{\lambda}{2 n_0 \Lambda} \right]. \quad (10.37)
\end{aligned}$$

При выводе формулы (10.37) использовалось неравенство

$$\frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \left(2 \sin \theta_n - \frac{\lambda}{n_0 \Lambda} \right) \ll \cos \theta_n.$$

Проведем анализ полученных выражений, которые справедливы также и для дифракции света на фазовых голографических решетках с периодом Λ .

1. Вектор $\vec{\Delta k}$ определяет фазовую расстройку треугольника векторов \vec{k}_n, \vec{K} и \vec{k}_g от условия синхронизма (рисунок 10.8):

$$\vec{\Delta k} = \vec{k}_g - \vec{k}_n - \vec{K}. \quad (10.38)$$

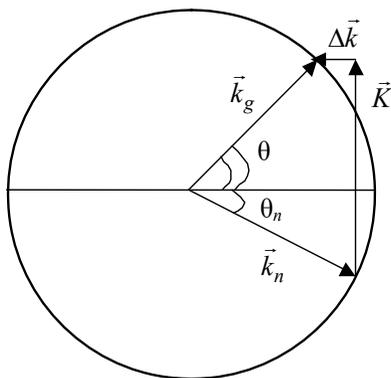


Рисунок 10.8 – Фазовая расстройка треугольника волновых векторов

Точный синхронизм наблюдается при выполнении условия Брэгга, $\Delta k = 0$ при $\sin \theta_n = \sin \theta_B = \lambda / (2 n_0 \Lambda)$. В этом случае решения для $E_{gm}(z)$ и $E_{nm}(z)$ имеют простой вид:

$$E_{gm}(z) = -iE_{nm}^0 \exp(i\varphi) \sin \left[\frac{\pi \delta \varepsilon_m z}{2\lambda \cos \theta n_0} \right], \quad (10.39)$$

$$E_{nm}(z) = E_{nm}^0 \cos \left[\frac{\pi \delta \varepsilon_m z}{2\lambda \cos \theta n_0} \right]. \quad (10.40)$$

Здесь происходит полный обмен энергией между падающей и дифрагированной волнами при толщине фазовой решетки $z = d_m$:

$$d_m = \frac{\lambda \cos \theta n_0}{\delta \varepsilon_m}. \quad (10.41)$$

2. Выбор направления $\vec{\Delta k}$ по нормам к границам слоя обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий для падающей и дифрагированной волн при $z = 0$.

3. В случае акустической волны её начальная фаза переносится на световую дифрагированную волну. Этот эффект можно использовать для фазовой модуляции света, для построения акустооптических фазометров и фазовых пеленгаторов источников радиоизлучения ($E_{gm}(z) \sim \exp(i\varphi)$).

10.4 Анализ соотношений для дифрагированного светового поля

В выражении (10.35) выделяется несколько сомножителей.

Первый сомножитель $-iE_{nm}^0 \left(\frac{\pi \delta \varepsilon_m}{2\lambda n_0 \cos \theta} z \right)$ характеризует амплитуду дифрагированной волны при

$$\sqrt{\Delta k^2 + (\pi \delta \varepsilon_m / (\lambda n_0 \cos \theta))^2} z / 2 \ll 1.$$

Она пропорциональна амплитуде падающей волны E_{nm}^0 при $z = 0$, амплитуде модуляции диэлектрической проницаемости

среды акустической волной $\delta\varepsilon_m$ и длине взаимодействия z . Множитель $-i$ показывает, что фаза дифрагированной волны сдвинута относительно падающей волны как минимум на $-\pi/2$ без учета других фазовых сдвигов.

Второй сомножитель

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{\Delta k}{2}z\right) &= \exp\left\{i\frac{Kz}{2\cos\theta_n}\left(\sin\theta_n - \frac{\lambda}{2n_0\Lambda}\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{i\frac{\pi fz}{v_a\cos\theta_n}\left(\sin\theta_n - \frac{\lambda f}{2v_a n_0}\right)\right\} \end{aligned} \quad (10.42)$$

характеризует фазочастотную характеристику брэгговского акустооптического взаимодействия. Для случая точного выполнения условия Брэгга $\sin\theta_n = \sin\theta_B = \lambda f / (2v_a n_0)$ фазочастотный множитель равен единице.

Третий сомножитель $\exp(i\varphi)$ показывает, что начальная фаза акустической волны переносится на дифрагированную световую волну.

Четвертый сомножитель

$$A(f) = \frac{\sin\left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2\right]}{\left[\sqrt{\Delta k^2 + (\pi\delta\varepsilon_m/(\lambda n_0 \cos\theta))^2} z/2\right]}$$

характеризует амплитудно-частотную характеристику брэгговского акустооптического взаимодействия. При условии «слабого» взаимодействия, когда выполняется условие

$$\Delta k \gg \frac{\pi\delta\varepsilon_m}{\lambda n_0 \cos\theta}, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned}
 A(f) &\approx \frac{\sin(\Delta kz/2)}{\Delta kz/2} = \frac{\sin \left[\frac{\pi z}{\Lambda \cos \theta_n} \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda}{2n_0 \Lambda} \right) \right]}{\left[\frac{\pi z}{\Lambda \cos \theta_n} \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda}{2n_0 \Lambda} \right) \right]} = \\
 &= \frac{\sin \left[\frac{\pi z}{v_a \cos \theta_n} f \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda f}{2v_a n_0} \right) \right]}{\left[\frac{\pi z}{v_a \cos \theta_n} f \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda f}{2v_a n_0} \right) \right]}. \quad (10.43)
 \end{aligned}$$

При точном выполнении условий Брэгга $A(f_0) = 1$. Условия Брэгга нарушаются в следующих случаях:

– при изменении частоты акустической волны (частотная селективность акустооптического брэгговского взаимодействия);

– при изменении угла падения θ_n (угловая селективность дифракции Брэгга);

– при изменении длины волны света (спектральная селективность дифракции Брэгга).

Подбором параметров Λ , z , v_a , f можно изменять каждый вид селективности, обеспечивая или широкополосную дифракцию (частотная селективность), или, например, высокую угловую селективность голограмм, дающую возможность записи большого числа голограмм в одном кристалле.

10.5 Эффективность дифракции Брэгга. Коэффициент акустооптического качества среды М2

Определим эффективность дифракции как отношение мощности дифрагированного света после взаимодействия к мощности падающего светового пучка до взаимодействия:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{|E_g(d)|^2}{(E_{nm}^0)^2} = \left(\frac{\pi \Delta n_m}{\lambda \cos \theta_n} d \right)^2 \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{(\Delta kd/2)^2} = \\
&= \left(\frac{\pi \Delta n_m}{\lambda \cos \theta_n} d \right)^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{\pi d}{\Lambda \cos \theta_n} \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda}{2n_0 \Lambda} \right) \right]}{\left[\frac{\pi d}{\Lambda \cos \theta_n} \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda}{2n_0 \Lambda} \right) \right]^2} = \\
&= \left(\frac{\pi \Delta n_m}{\lambda \cos \theta_n} d \right)^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{\pi d}{v_a \cos \theta_n} f \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda f}{2n_0 v_a} \right) \right]}{\left[\frac{\pi d}{v_a \cos \theta_n} f \left(\sin \theta_n - \frac{\lambda f}{2n_0 v_a} \right) \right]^2}. \quad (10.44)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\delta \varepsilon_m \approx 2n_0 \Delta n_m \left(\varepsilon^0 + \delta \varepsilon_m = (n_0 + \Delta n_m)^2, \quad \varepsilon^0 = n_0^2; \quad \Delta n_m^2 \ll 2n_0 \Delta n_m \right).$$

При выполнении условия Брэгга эффективность дифракции максимальна и определяется выражением

$$\eta(\theta_B) = \eta_m = \left(\frac{\pi \Delta n_m}{\lambda \cos \theta_n} d \right)^2. \quad (10.45)$$

Воспользуемся далее соотношениями из теории акустических волн в твердых телах:

$$\Delta n_m = -\frac{n_0^3}{2} p U^m, \quad U^m = \sqrt{\frac{2P_0}{\rho_0 v_a^3}} = \sqrt{\frac{2P_a}{\rho_0 v_a^3 h d}}, \quad (10.46)$$

где U^m – амплитуда деформаций в акустической волне; p – фотоупругая постоянная среды, в которой происходит акустооптическое взаимодействие; P_0 – плотность акустической мощности; ρ_0 – плотность среды; h – ширина пьезопреобразователя; P_a – полная акустическая мощность, излучаемая преобразователем (рисунок 10.9).

С учетом соотношений (10.46) из равенства (10.45) получаем

$$\eta_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \theta_n} \frac{n_0^6 P^2 d}{\rho_0 V_a^3} P_a. \quad (10.47)$$

В этой формуле можно выделить сомножитель, зависящий только от физических параметров акустооптического материала. Для общего случая анизотропной среды имеем

$$M_2 = \frac{n_{\text{эф}}^6 P_{\text{эф}}^2}{\rho_0 V_a^3}, \quad (10.48)$$

где $n_{\text{эф}}$ и $P_{\text{эф}}$ – эффективный показатель преломления и фотоупругая постоянная для выбранного среза кристалла и геометрии взаимодействия.

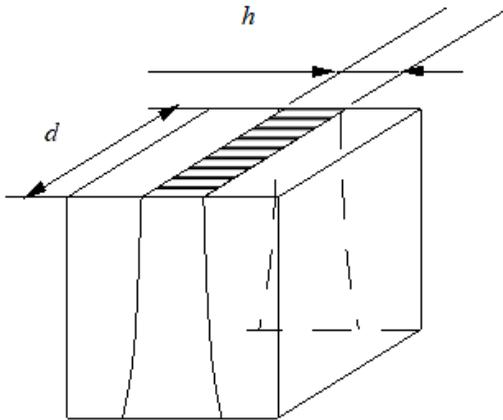


Рисунок 10.9 – Геометрия пьезоэлектрического преобразователя акустооптического модулятора

Коэффициент качества среды M_2 является важнейшей характеристикой акустооптического материала. Обычно он измеряется по отношению к M_2 плавленого кварца, найденному при дифракции света на продольной акустической волне, когда

световая волна поляризована в плоскости треугольника волновых векторов \vec{k}_n , \vec{k}_g и \vec{K} . Для плавленного кварца в этом случае коэффициент качества $M_2 = 1,56 \cdot 10^{-18} \text{ с}^3/\text{кг}$. С помощью относительного коэффициента качества, учитывая, что для большинства случаев $\cos\theta_n \approx 1$, выражение (10.47) можно привести к удобному для практических расчетов виду

$$\eta_m = \frac{1}{54} \left(\frac{0,63}{\lambda} \right)^2 M_{2r} P_a \frac{d}{h}, \quad (10.49)$$

где P_a измеряется в ваттах, λ – в микронах, M_{2r} – в относительных единицах. Заметим, что подобное выражение справедливо и для анизотропных сред, однако при этом M_{2r} сложным образом зависит от фотоупругих, упругих, электрооптических и других констант материала.

11 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОТОРЕФРАКТИВНОГО ЭФФЕКТА

Фоторефрактивный эффект заключается в изменении показателя преломления среды под действием света. В электрооптических кристаллах фоторефрактивный эффект обусловлен переносом и перераспределением пространственного заряда под действием света. Поле этого пространственного заряда благодаря линейному электрооптическому эффекту изменяет оптические свойства среды. Фоторефракция была экспериментально обнаружена в 1965 г. как вредный эффект, искажающий формы световых пучков при прохождении их через электрические модуляторы на кристаллах LiNbO_3 , LiTaO_3 , BaTiO_3 . Поэтому этот эффект первоначально был назван оптическим повреждением («optical damage»). Была показана и возможность устранения оптических неоднородностей кристалла при отжиге или однородной засветке.

В 1968 г. фоторефрактивный эффект в ниобате лития был использован для записи фазовой объемной голограммы. Таким образом, фоторефрактивные кристаллы могут использоваться для оптических транспарантов, причем динамических. Голограмма в этом случае перезаписывается при изменении сигнала пучка. Время записи динамических голограмм может составлять 10^{-9} с, а время хранения – до нескольких лет.

Динамические голограммы в фоторефрактивных кристаллах применяются для оптической памяти, усиления оптических изображений, обращения и самообращения волнового фронта световых пучков, создания «фильтров новизны», синхронизации излучения нескольких лазеров и т. д.

Изменение оптических свойств фоторефрактивной среды, имеющее место при распространении ограниченных световых пучков, приводит к эффектам самовоздействия: исходный пучок испытывает самофокусировку или самодефокусировку. Если эффект самофокусировки точно компенсирует дифракционную расходимость пучка, то в среде формируется светлый

пространственный солитон, то есть пучок, распространяющийся без изменения поперечного распределения амплитуды.

Взаимодействие двух или нескольких световых пучков на формируемых ими динамических голограммах также относится к эффектам самовоздействия. В этом случае, например, мощность одного пучка может увеличиваться за счет перекачки энергии из другого. Замечательно, что эффекты самовоздействия, относящиеся к явлениям нелинейной оптики, наблюдаются в фоторефрактивных электрооптических кристаллах уже при световой мощности в несколько микроватт.

11.1 Качественное описание основных эффектов динамической голографии

Рассмотрим фоторефрактивный кристалл (рисунок 11.1), в котором происходит интерференция двух плоских световых волн, опорной R и сигнальной S , с одинаковыми частотами ω и волновыми векторами \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_S :

$$\dot{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{E}}_R^m \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})], \quad (11.1)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_S(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{E}}_S^m \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_S \cdot \mathbf{r})], \quad (11.2)$$

где $\dot{\mathbf{E}}_S^m$, $\dot{\mathbf{E}}_R^m$ – комплексные амплитуды.

Изменение показателя преломления среды за счет фоторефрактивного эффекта определяется распределением интенсивности света в кристалле и представляет собой динамическую голограмму, которая в рассматриваемом случае называется *фоторефрактивной решеткой*.

Найдем распределение интенсивности света в кристалле:

$$\begin{aligned} I &= \left| \dot{\mathbf{E}}_R + \dot{\mathbf{E}}_S \right|^2 = \left| \dot{\mathbf{E}}_R^m \right|^2 + \left| \dot{\mathbf{E}}_S^m \right|^2 + \\ &+ \dot{\mathbf{E}}_R^{m*} \dot{\mathbf{E}}_S^m \exp[i(\mathbf{k}_R - \mathbf{k}_S) \cdot \mathbf{r}] + \dot{\mathbf{E}}_R^m \dot{\mathbf{E}}_S^{m*} \exp[-i(\mathbf{k}_R - \mathbf{k}_S) \cdot \mathbf{r}] = \\ &= I_R + I_S + 2\sqrt{I_R I_S} \cos \alpha \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{SR}), \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $I_{R,S} = |\dot{\mathbf{E}}_{R,S}^m|^2$ – интенсивности опорной и сигнальной волн; $\varphi_{SR} = \varphi_S - \varphi_R$; φ_S и φ_R – начальные фазы волн; α – угол между векторами поляризации волн; $\mathbf{K} = \mathbf{k}_R - \mathbf{k}_S$ – вектор фоторефрактивной решетки.

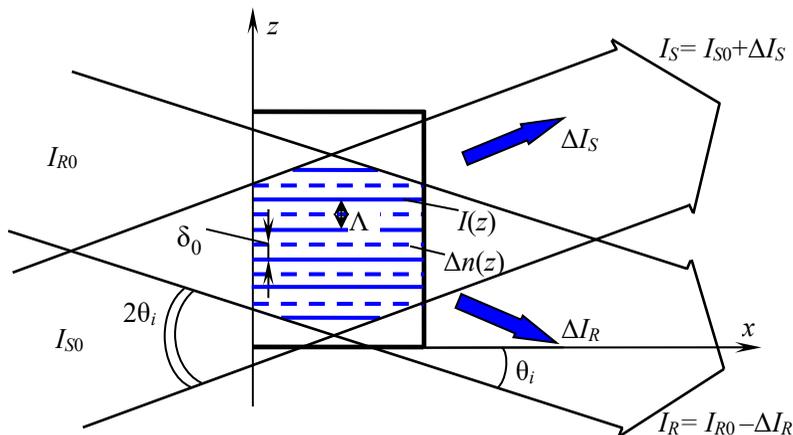


Рисунок 11.1 – Двухлучковое взаимодействие световых волн на пропускающей фоторефрактивной решетке

С квантовомеханической точки зрения образование интерференционной картины вида (11.3) можно представить как взаимодействие двух фотонов, при котором выполняются законы сохранения:

$$\Omega = \omega_R - \omega_S, \quad (11.4)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_R - \mathbf{k}_S, \quad (11.5)$$

где $\Omega \neq 0$ при разных частотах взаимодействующих волн.

Однако если нет среды взаимодействия или некоторого измерительного прибора (квадратичного фотоприемника, фотопленки и т. д.), то никакого воздействия друг на друга опорная и сигнальная волны не производят, а также не исчезают, рождая фотоэлектроны. Тем не менее данную интерференционную

картину мы будем рассматривать как физический объект с определенной скоростью движения $V = \Omega/|\mathbf{K}|$ и вектором решетки

$$\mathbf{K} = \mathbf{p}(\Omega/V) = \mathbf{p}(2\pi/\Lambda),$$

где Λ – ее пространственный период.

Наибольшая интенсивность интерференционной картины наблюдается при одинаковой поляризации волн:

$$\alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad \mathbf{E}_S^m \parallel \mathbf{E}_R^m.$$

Схема на рисунке 11.1 называется симметричной, поскольку пучки падают на границу кристалла под одинаковыми углами θ_i . Векторная диаграмма для этого случая при равных длинах k_R и k_S изображена на рисунке 11.2. Из рисунка видно, что

$$\mathbf{K} = -\bar{z}^0 \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{2k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2n \sin \theta}, \quad (11.6)$$

где $K = |\mathbf{K}|$ – волновое число решетки; n – показатель преломления среды; θ – угол в кристалле, $n \sin \theta = \sin \theta_i$.

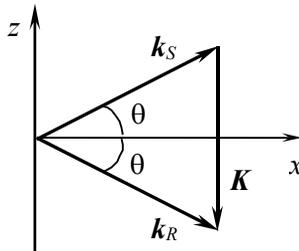


Рисунок 11.2 – Векторная диаграмма для двухволнового взаимодействия света на пропускающей фоторефрактивной решетке

С учетом сделанных обозначений находим

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_i}, \quad (11.7)$$

где период интерференционной картины определяется через угол θ_i между осью z и векторами \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_S в воздухе.

Если знаки проекций волновых векторов опорной и предметной волн \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_S на ось x являются одинаковыми, то формируемая ими фоторефрактивная решетка называется *пропускающей*, а взаимодействие волн на такой решетке – *попутное* (см. рисунки 11.1 и 11.2).

С учетом сделанных упрощений при $\varphi_{SR} = 0$ распределение света представим в виде

$$I(z) = I_0 [1 + m \cos(Kz)], \quad (11.8)$$

где $m = 2\sqrt{I_R I_S} / I_0$ – контраст интерференционной картины (глубина модуляции интенсивности), $I_0 = I_R + I_S$ – суммарная интенсивность пучков (рисунок 11.3).

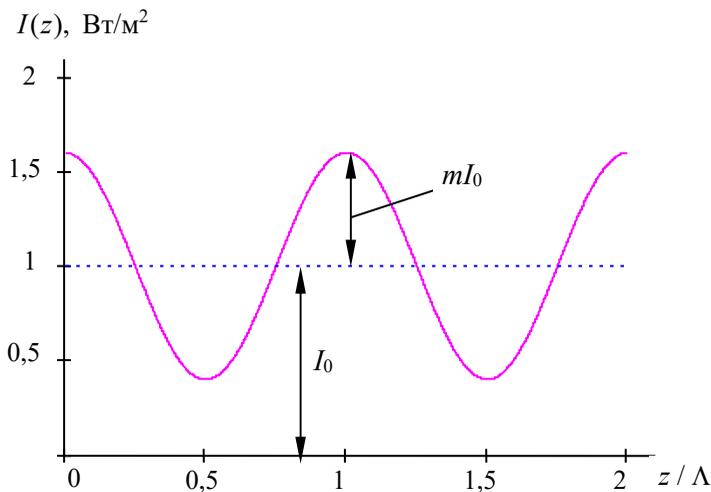


Рисунок 11.3 – Распределение интенсивности света в интерференционной картине при $I_1 = 0,9$ Вт/м² и $I_2 = 0,1$ Вт/м²

Формируемая благодаря фоторефрактивному эффекту в освещенном такой картиной кристалле решетка изменения показателя преломления имеет тот же самый период и вектор \mathbf{K} , что и интерференционная картина. Однако эта решетка может быть сдвинута в пространстве относительно интерференционной картины на величину δ_0 (см. рисунок 11.1), и в общем случае вносимые ею изменения в показатель преломления среды описываются выражением

$$\begin{aligned} \Delta n(z) &= \Delta n_0 + \Delta n_m \cos(Kz + \delta_0) = \\ &= \Delta n_0 + \Delta n_m \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z + \delta_0\right). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Дифракция света на этой решетке в процессе ее формирования приводит к тому, что опорная и сигнальная волны изменяют свои интенсивности I_R и I_S на ΔI_R и ΔI_S соответственно. Первая добавка вызвана дифракцией на решетке сигнальной волны, вторая – опорной. В зависимости от величины сдвига δ_0 изменяются фазы таких вкладов. При $\delta_0 = \Lambda/4$ волны с интенсивностями I_S и ΔI_S будут в фазе, а волны I_R и ΔI_R – в противофазе. В этом случае начнет происходить усиление сигнальной волны за счет перекачки в нее энергии опорной волны (накачки). При $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = \pi$ перекачки энергии не происходит, однако происходит перекачка фазы – то есть фаза сигнальной волны изменяется при «включении» опорной волны. Эти эффекты динамической голографии получили название «самодифракция».

Перечислим основные эффекты динамической голографии.

1. Оптическая память – время хранения от миллисекунд (10^{-3} с) для GaAs до нескольких лет в $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$. Количество голограмм в одном кристалле – 10000. Принцип кодирования и доступ к данной голограмме осуществляются за счет высокой угловой селективности объемных голограмм путем изменения положения опорного (считывающего) пучка. Количество циклов перезаписи неограниченно.

2. Оптические межсоединения в оптических нейрокompьютерах между излучателями и фотоприемниками. Величина каждой связи может изменяться в процессе «обучения» вследствие динамического характера фоторефрактивных голограмм.

3. Усиление оптических изображений, при котором реализуется коэффициент усиления по мощности в сотни и тысячи раз. Используется эффект перекачки мощности на сдвинутых решетках $\Delta n(z)$ относительно $I(z)$.

4. Обращение волнового фронта световых пучков. Схема обращения изображена на рисунке 11.4.

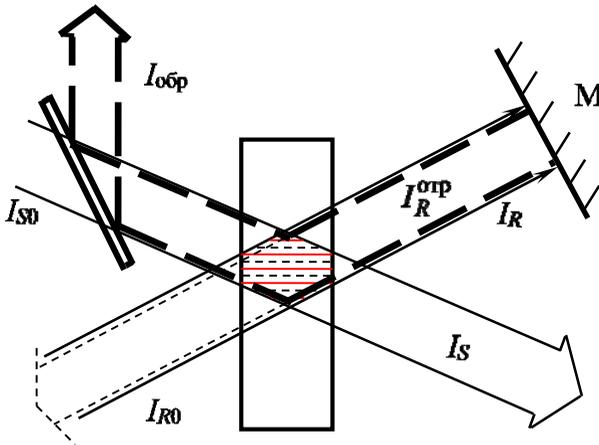


Рисунок 11.4 – Обращение сигнального светового пучка на пропускающей фоторефрактивной решетке при попутном четырехволновом взаимодействии

Здесь зеркало М отражает пучок накачки во встречном направлении. При дифракции на пропускающей фоторефрактивной решетке, формируемой при взаимодействии пучков с интенсивностями I_{S0} и I_{R0} , возникает дифрагированная волна с интенсивностью $I_{обp}$, распространяющаяся точно в обратном направлении по отношению к сигнальной. Такой эффект,

называемый еще *фазовым сопряжением* светового пучка, может происходить с увеличением мощности обращенной волны. В рассматриваемом случае предполагается формирование только пропускающей решетки, вклад в которое вносят попутно распространяющиеся пучки с интенсивностями I_{S0} и I_{R0} , и встречные им, но тоже попутно распространяющиеся пучки с интенсивностями $I_R^{\text{отр}}$ и $I_S^{\text{обп}}$. Таким образом, в формировании фоторефрактивной решетки принимают участие четыре волны, поэтому рассматриваемое взаимодействие называют четырехволновым.

5. Фотоиндуцированное рассеяние света. Рассеяние на оптических неоднородностях на входной грани кристалла опорного пучка и усиление рассеянных волн за счет эффекта перекачки мощности из него в рассеянные волны приводит с течением времени к образованию «шумовой» картины (рисунок 11.5.)

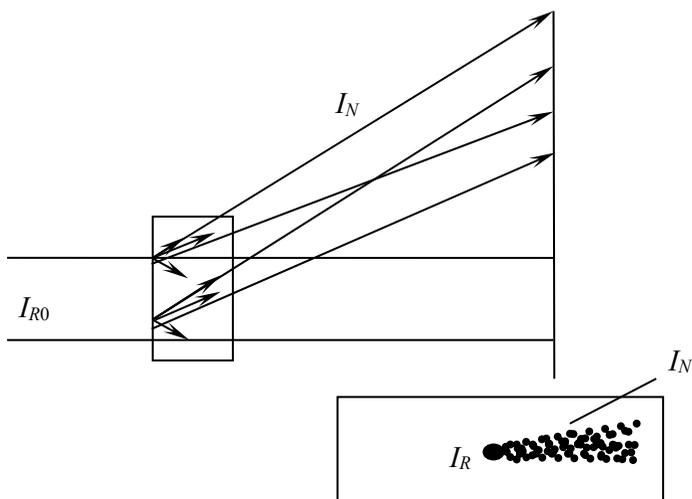


Рисунок 11.5 – Фотоиндуцированное рассеяние света в фоторефрактивных кристаллах

Каждое световое пятно на этой картине соответствует усиленной рассеянной волне. Картина распределения световых максимумов отражает случайный характер расположения рассеивающих центров и анизотропию усиления световых волн, формирующих фоторефрактивные решетки с различными направлениями волновых векторов \mathbf{K} относительно кристаллофизических осей. Это связано как с зависимостью эффективности переноса заряда от направления вектора решетки \mathbf{K} , так и с анизотропией электрооптического эффекта.

6. Самообращение волнового фронта световых пучков.

Одна из схем самообращения, использующая эффекты усиления, фотоиндуцированного рассеяния и обращение волнового фронта, называется *петлевым генератором* (рисунок 11.6).

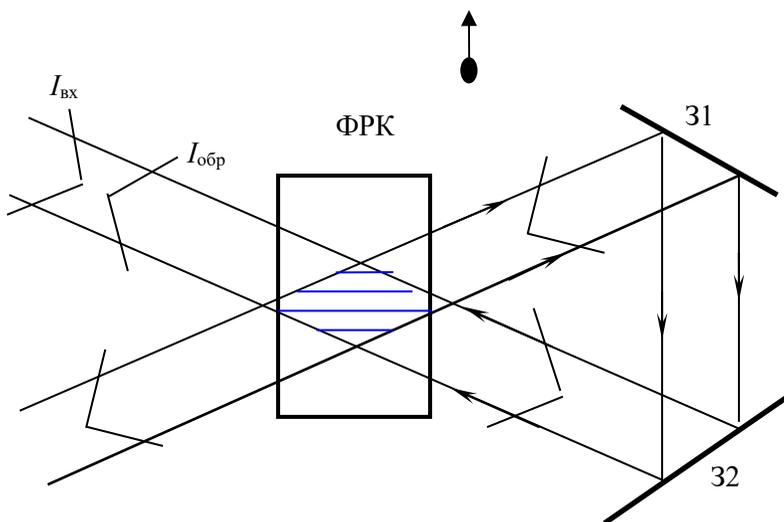


Рисунок 11.6 – Самообращение волнового фронта в схеме петлевого генератора на фоторефрактивном кристалле.

Стрелка в верхней части рисунка указывает направление перекачки мощности

Здесь пучок $I_{вх}$ испытывает фотоиндуцированное рассеяние на входной грани фоторефрактивного кристалла (ФРК) и,

отражаясь от зеркал 31 и 32, снова проходит через ФРК в обратном направлении. Часть фотоиндуцированного рассеяния, отражающаяся последовательно от зеркал 31 и 32, распространяется в направлении, противоположном входному пучку.

Этот рассеянный пучок имеет преимущественное усиление, а его волновой фронт является обращенным по отношению к $I_{\text{вх}}$. Коэффициент отражения $K_{\text{отр}} = I_{\text{обр}}/I_{\text{вх}}$ в этой схеме может составлять десятки процентов.

11.2 Модель зонного переноса

В настоящее время описание физических процессов, имеющих место при перераспределении носителей заряда в фоторефрактивных кристаллах, основано на моделях зонного переноса, первая из которых, называемая одноуровневой, была развита в работах Н. В. Кухтарева и др. В рамках одноуровневой модели зонного переноса предполагается, что кристалл имеет один тип примесных центров донорного типа. Доноры при фотовозбуждении поставляют неравновесные носители заряда в зону проводимости (электроны) или в валентную зону (дырки). Будем полагать, что перенос зарядов в фоторефрактивном кристалле осуществляется электронами в зоне проводимости. Упрощенно уровни энергии нейтральных доноров, ионизированных доноров и неактивных акцепторов, расположенные в запрещенной зоне кристалла, изображены на рисунке 11.7.

В темноте в кристалле существуют как ионизированные доноры с концентрацией N_{DT}^+ , так и неионизированные (нейтральные) доноры с концентрацией N_{DT} . Электронейтральность кристалла обеспечивается отрицательно заряженными акцепторами, на которые свет не действует. Очевидно, что в темноте в кристалле должно содержаться равное количество ионизированных доноров и акцепторов:

$$N_{DT}^+ = N_A. \quad (11.10)$$

При неоднородном освещении кристалла в освещенной области происходит фотоионизация ионизированных доноров, при этом в данной точке кристалла рождаются ионизированный донор и электрон в зоне проводимости.

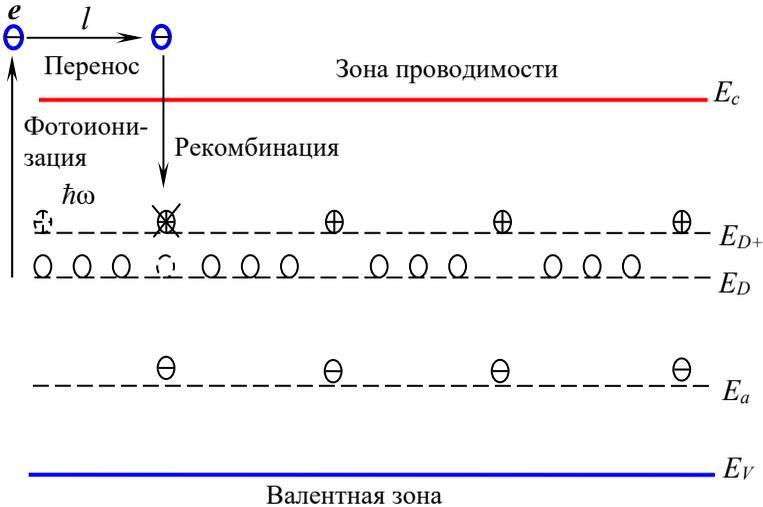


Рисунок 11.7 – Одноуровневая модель зонного переноса

Электрон за время своего существования в зоне проводимости переместится на расстояние l за счет эффектов диффузии и дрейфа во внешних и внутренних электрических полях. Далее он рекомбинирует, восстанавливая ионизированный донорный центр до неионизированного.

Как математически описать этот процесс? Процессы фотоионизации и рекомбинации можно описать скоростным уравнением

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = SI(N_D - N_D^+) - \gamma_R n N_D^+, \quad (11.11)$$

Здесь левая часть – скорость изменения концентрации ионизированных доноров. Она пропорциональна сечению фотоионизации S , интенсивности света I и числу неионизированных

доноров $N_D - N_D^+$, где N_D – полная концентрация доноров в кристалле (например, атомов Fe в LiNbO_3). Произведение SI равно вероятности фотовозбуждения одного донора в единицу времени, а $SI(N_D - N_D^+)$ представляет полное число фотоионизированных доноров в единицу времени.

Процесс рекомбинации уменьшает число ионизированных доноров, поэтому второй член в формуле (11.11) имеет отрицательный знак. Скорость рекомбинации характеризует γ_R – коэффициент двухчастичной рекомбинации, а полное изменение N_D^+ в единицу времени пропорционально произведению как концентрации электронов в зоне проводимости (которые и могут рекомбинировать), так и числу (концентрации) ионизированных доноров в данной точке кристалла N_D^+ . Если $n = 0$ или $N_D^+ = 0$, то рекомбинация в данной точке произойти не может.

Поскольку в кристалле образуется объемный заряд и электрическое поле (которое можно считать электростатическим), воспользуемся уравнением Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (11.12)$$

Чему равен объемный заряд? Очевидно,

$$\rho = e(N_D^+ - n - N_A). \quad (11.13)$$

Учтем, что интенсивность света у нас зависит только от координаты z (см. формулу (11.8)). В этом случае и все остальные величины тоже зависят от z , поэтому вместо выражения (11.12) получаем

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon} (N_D^+ - n - N_A). \quad (11.14)$$

Уравнений (11.11) и (11.14) для описания процессов переноса недостаточно: в них входят три неизвестных функции – $N_D^+(z, t)$, $n(z, t)$ и $E(z, t)$. Дополним их уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}(\bar{\delta}_{\text{пр}} + \bar{\delta}_{\text{стоп}}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (11.15)$$

Сторонними токами являются диффузионный ток и фотовольтаический ток:

$$\delta_{\text{диф}} = k_B T \mu \operatorname{grad} n; \quad (11.16)$$

$$\delta_{ph} = \beta : \mathbf{E} \mathbf{E}^*; \quad \delta_m^{ph} = \beta_{mkl} \tilde{E}_k \tilde{E}_l^*, \quad (11.17)$$

где β_{mkl} – компоненты фотовольтаического тензора 3-го ранга; \tilde{E}_k – составляющие вектора напряженности светового поля в кристалле.

Последний вид тока был обнаружен в 1974 г. в простейшем варианте $\delta_m^{ph} = \beta_{mnn} I$. Учитывая, что

$$\delta_{\text{пр}} = e \mu n \mathbf{E}, \quad (11.18)$$

где μ – подвижность электрона, с учетом выражений (11.13) из (11.15) получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial z} \left[e \mu n E + k_B T \mu \frac{\partial n}{\partial z} + \delta_3^{ph} \right]. \quad (11.19)$$

Система материальных уравнений (11.11), (11.14) и (11.19) является замкнутой и позволяет найти неизвестные функции $N_D^+(z, t)$, $n(z, t)$ и $E(z, t)$.

Выпишем ниже эти уравнения и формулу (11.8) для $I(z)$:

$$I(z) = I_0 + \frac{m I_0}{2} \exp(iKz) + \frac{m^* I_0}{2} \exp(-iKz); \quad (11.20)$$

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = S I (N_D - N_D^+) - \gamma_R n N_D^+; \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial z} (n E) + \frac{k_B T}{e} \mu \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial z} \delta_3^{ph}; \quad (11.22)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon} (N_D^+ - n - N_A). \quad (11.23)$$

Система уравнений (11.21)–(11.23) является нелинейной и не имеет аналитического решения в общем случае. Поэтому для анализа процессов переноса заряда используют различные приближения, а иногда и численные методы. Система (11.21)–(11.23) позволяет учесть и влияние внешних полей на перенос заряда, поскольку под E нужно понимать сумму внешнего поля, приложенного к кристаллу, и внутреннего поля пространственного заряда, образующегося при формировании динамической голограммы.

11.3 Приближение малых контрастов интерференционной картины

Для $|m| \ll 1$ можно линеаризовать систему уравнений (11.21)–(11.23), разлагая все функции в ряд Фурье:

$$n(z, t) = n_0(t) + \frac{n_1(t)}{2} \exp(iKz) + \frac{n_1^*(t)}{2} \exp(-iKz) + \dots; \quad (11.24)$$

$$N_D^+(z, t) = N_{D0}^+(t) + \frac{N_{D1}^+(t)}{2} \exp(iKz) + \frac{N_{D1}^{+*}(t)}{2} \exp(-iKz) + \dots; \quad (11.25)$$

$$E(z, t) = E_0(t) + \frac{E_1(t)}{2} \exp(iKz) + \frac{E_1^*(t)}{2} \exp(-iKz) + \dots \quad (11.26)$$

Для динамической голографии важна первая пространственная гармоника, что позволяет ограничиться анализом только представленных здесь членов разложения. Кроме того, для $|m| \ll 1$ должны выполняться условия $|n_1| \ll n_0$, $|N_{D1}^+| \ll N_{D0}^+$, $|E_1| \ll E_0$. (Последнее условие может иногда не выполняться при $E_0 = 0$ и диффузионном механизме записи.) Эти условия и позволяют линеаризовать систему уравнений

(11.21)–(11.23) путем отбрасывания членов второго порядка малости.

Для простоты пренебрежем фотовольтаическим током в уравнении (11.22) и будем считать внешнее поле заданным: $E_{\text{вн}} = E_0(t)$. Методика анализа состоит в подстановке $n(z, t)$, $N_D^+(z, t)$ и $E(z, t)$ из уравнений (11.24)–(11.26) в систему (11.21)–(11.23) и в приравнивании членов при одинаковых фазовых множителях. Для нулевой пространственной гармоники из формулы (11.23) находим

$$N_{D0}^+ - n_0 - N_A = 0, \quad N_{D0}^+ = N_A + n_0. \quad (11.27)$$

Подставляя N_{D0}^+ в уравнение для нулевой пространственной гармоники (11.21), получаем выражение, содержащее и члены второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \frac{dn_0}{dt} = & SI_0(N_D - N_A - n_0) - \frac{SI_0}{4}(mN_{D1}^{+*} + m^*N_{D1}^+) - \\ & - \gamma_R n_0(N_A + n_0) - \frac{\gamma_R}{4}(n_1 N_{D1}^{+*} + n_1^* N_{D1}^+). \end{aligned}$$

После их исключения уравнение для показателя преломления среды n_0 преобразуется к виду

$$\frac{dn_0}{dt} = SI_0(N_D - N_A - n_0) - \gamma_R n_0(N_A + n_0). \quad (11.28)$$

Хотя уравнение (11.28) имеет точное решение, приближение непрерывного низкоинтенсивного излучения позволяет существенно упростить конечный результат. Для низкой интенсивности ($I_0 \leq 10^3$ Вт/см² случае кристаллов типа $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$), что практически всегда имеет место, $n_0 \ll N_A$ и уравнение (11.28) упрощается:

$$\frac{dn_0}{dt} + \frac{n_0}{\tau_R} = SI_0(N_D - N_A), \quad (11.29)$$

где $\tau_R = 1/(\gamma_R N_A)$ – время жизни электрона в зоне проводимости (среднее время между процессами фотовозбуждения и рекомбинации).

В квазинепрерывном режиме для $t \gg \tau_R \sim 10^{-5}$ с можно считать $dn_0/dt \approx 0$ и из соотношения (11.29) получить выражение для n_0 в виде

$$n_0 = \frac{SI_0(N_D - N_A)}{\gamma_R N_A} = SI_0(N_D - N_A)\tau_R. \quad (11.30)$$

Далее следует приравнять в уравнениях (11.24)–(11.26) члены при фазовом множителе $\exp(iKz)$, отбросив величины второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{D1}^+}{dt} = mSI_0(N_D - N_A - n_0) - \\ - SI_0 N_{D1}^+ - \gamma_R n_0(N_{D1}^+ + n_1) - \gamma_R N_A n_1, \end{aligned} \quad (11.31)$$

$$\frac{dn_1}{dt} - \frac{dN_{D1}^+}{dt} = iK\mu(E_0 n_1 + E_1 n_0) - K^2 \frac{k_B T \mu}{e} n_1, \quad (11.32)$$

$$iKE_1 = \frac{e}{\varepsilon}(N_{D1}^+ - n_1). \quad (11.33)$$

Исключая из уравнений (11.31)–(11.33) N_{D1}^+ и n_1 , получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка для амплитуды первой пространственной гармоники поля пространственного заряда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_1}{dt^2} + \left[\frac{1}{\tau_+} + \frac{1}{\tau_{di}} + \frac{1}{\tau_D} - \frac{i}{\tau_R} \frac{E_0}{E_\mu} \right] \frac{dE_1}{dt} + \\ + \left[\frac{1}{\tau_{di}\tau_+} + \frac{1}{\tau_I\tau_D} - \frac{i}{\tau_R\tau_I} \frac{E_0}{E_\mu} \right] E_1 = \\ = -im \frac{(E_D - iE_0)}{\tau_{di}n_0} SI_0(N_D - N_A - n_0), \end{aligned} \quad (11.34)$$

где $\tau_+ = (SI_0 + 2\gamma_R n_0 + \gamma_R N_A)^{-1}$, $\tau_I = (SI_0 + \gamma_R n_0)^{-1}$,
 $\tau_{di} = \varepsilon / (e\mu n_0) = \varepsilon / \sigma$ – время диэлектрической релаксации;
 $\tau_D = (\mu K E_D)^{-1}$, $E_D = K(k_B T / e)$ – диффузионное поле;
 $E_\mu = (\mu K \tau_R)^{-1}$ – дрейфовое поле.

Оценки величин, входящих в (11.34), показывают, что при обычно используемой интенсивности света выполняются неравенства

$$SI_0 \ll \gamma_R n_0, \quad \gamma_R n_0 \ll \gamma_R N_A. \quad (11.35)$$

Кроме того, в квазинепрерывном приближении и для низкочастотного внешнего поля, когда его период удовлетворяет условию $T \gg \tau_R$, можно отбросить вторую производную в уравнении (11.34). В результате получаем уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды первой гармоники поля пространственного заряда

$$\frac{dE_1}{dt} + \Gamma_1 E_1 = -mF_1, \quad (11.36)$$

где введены обозначения:

$$\Gamma_1 = \frac{1 + E_D/E_q - iE_0/E_q}{\tau_{di} [1 + E_D/E_\mu - iE_0/E_\mu]}; \quad (11.37)$$

$$F_1 = \frac{E_0 + iE_D}{\tau_{di} [1 + E_D/E_\mu - iE_0/E_\mu]}; \quad (11.38)$$

$E_q = eN_A / (\varepsilon K)$ – так называемое поле насыщения ловушек.

Таким образом, в приближении малого контраста интерференционной картины $|m| \ll 1$ амплитуда первой пространственной гармоники поля пространственного заряда фоторефрактивной решетки описывается уравнением (11.36). Наиболее простой вид решение этого уравнения имеет при постоянном внешнем поле.

11.4 Диффузионный механизм записи фоторефрактивной решетки

Если внешнее поле к кристаллу не приложено, то решение уравнения (11.36) имеет вид

$$E_1(t) = -im \frac{E_D}{1 + E_D/E_q} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1 + E_D/E_q}{\tau_{di} (1 + E_D/E_\mu)} t \right] \right\}. \quad (11.39)$$

Скорость формирования решетки в этом случае определяется временем релаксации

$$1/\tau = \frac{1 + E_D/E_q}{\tau_{di} (1 + E_D/E_\mu)}, \quad \tau = \tau_{di} \frac{1 + E_D/E_\mu}{1 + E_D/E_q}, \quad (11.40)$$

которое зависит от пространственного периода решетки Λ . Зависимость $E_1(t)$ можно переписать в форме

$$E_1(t) = -imE_{sc} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right], \quad (11.41)$$

где $E_{sc} = \frac{E_D}{1 + E_D/E_q}$.

График данной зависимости представлен на рисунке 11.8.

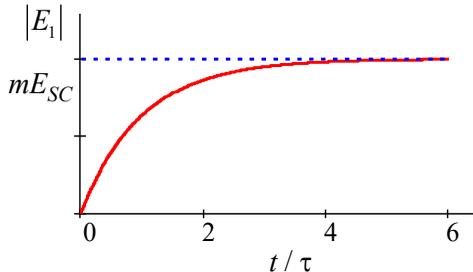


Рисунок 11.8 – Временная зависимость амплитуды первой гармоники поля пространственного заряда при диффузионном механизме формирования фоторефрактивной решетки

Проанализируем выражение (11.41).

1. Поле пространственного заряда имеет первую пространственную гармонику, сдвинутую по фазе на $-\pi/2$ относительно интерференционной картины.

2. Амплитуда первой пространственной гармоники E_1 увеличивается с ростом контраста интерференционной картины m .

3. Поскольку диффузионное поле $E_D \sim 1/\Lambda$, а поле насыщения ловушек $E_q \sim \Lambda$, то с изменением периода решетки амплитуда E_1 достигает максимума при $E_D/E_q = 1$ (рисунок 11.9).

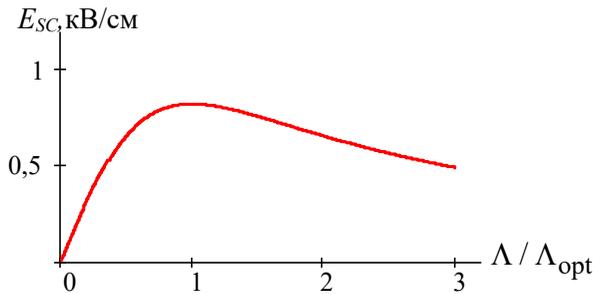


Рисунок 11.9 – Зависимость поля E_{SC} от пространственного периода фоторефрактивной решетки для $\Lambda_{\text{opt}} = 1$ мкм и температуры $T = 300$ К

В общем случае зависимость поля E_{SC} от пространственного периода решетки имеет следующий вид:

$$E_{SC} = \frac{(2\pi/\Lambda)k_B T/e}{1 + (2\pi/\Lambda)^2 k_B T \varepsilon / (e^2 N_A)}. \quad (11.42)$$

Оптимальный период решетки определяется соотношением

$$\Lambda_{\text{opt}} = \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{k_B T \varepsilon}{N_A}}. \quad (11.43)$$

Таким образом, определяя экспериментально Λ_{opt} , можно найти концентрацию компенсирующих акцепторных центров N_A для данного кристалла. Эти изменения лучше всего проводить в стационарном режиме при $t \gg \tau$.

4. Скорость роста E_1 на начальном участке $t \ll \tau$ определяется выражением

$$E_1(t) = -im \frac{E_D}{\tau_{di} (1 + E_D/E_\mu)} t, \quad (11.44)$$

использование которого также возможно для определения материальных констант кристалла.

11.5 Формирование фоторефрактивной решетки в постоянном внешнем поле

Для увеличения амплитуды фоторефрактивной решетки к кристаллу может быть приложено внешнее постоянное электрическое поле (рисунок 11.10).

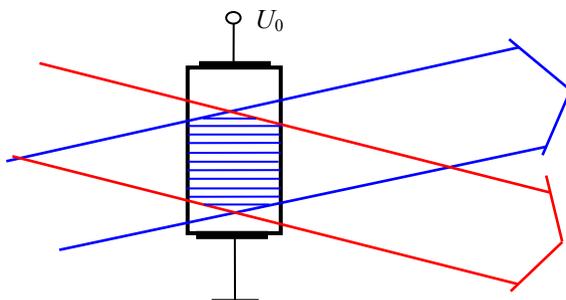


Рисунок 11.10 – Запись фоторефрактивной решетки в кристалле с приложенным постоянным электрическим полем

Следует отметить, что в этом случае необходимо обеспечить достаточно однородную засветку световыми пучками всего межэлектродного промежутка. В противном случае

экранировка внешнего поля полем пространственного заряда приведет к тому, что на затененных областях будет наблюдаться максимальное падение напряжения. Поэтому напряженность поля, приложенного к области локализации фоторефрактивной голограммы, будет существенно ниже, чем U_0/d , где d – межэлектродное расстояние.

Решение уравнения (11.36) для $E_0 = \text{const}$ может быть получено в виде

$$E_1(t) = -m \frac{F_1}{\Gamma_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (11.45)$$

где постоянная времени определяется следующим выражением:

$$\tau = \tau_{di} \frac{1 + E_D/E_\mu - i E_0/E_\mu}{1 + E_D/E_q - i E_0/E_q}. \quad (11.46)$$

Таким образом, постоянная времени оказывается комплексной и установление стационарного режима носит колебательный характер (рисунок 11.11).

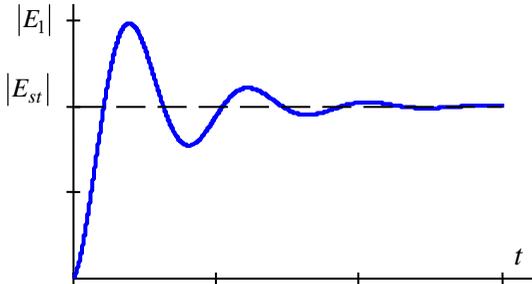


Рисунок 11.11 – Динамика поля пространственного заряда фоторефрактивной решетки, формирующейся в постоянном электрическом поле

Стационарное значение поля пространственного заряда имеет в общем случае вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned}
E_{st} &= -m \frac{F_1}{\Gamma_1} = -m \frac{E_0 + iE_D}{1 + \frac{E_D}{E_q} - i \frac{E_0}{E_q}} = \\
&= -mE_0 \frac{E_q^2}{(E_q + E_D)^2 + E_0^2} - imE_q \frac{E_0^2 + E_D(E_q + E_D)}{(E_q + E_D)^2 + E_0^2}. \quad (11.47)
\end{aligned}$$

Обычно постоянное поле используют для малых пространственных частот ($\Lambda > 10$ мкм), так что выполняется условие $E_q \gg E_0 \gg E_D$.

В этом случае мнимая составляющая, характеризующая сдвиг фоторефрактивной решетки относительно интерференционной картины и связанная с диффузией носителей заряда, очень мала и ею можно пренебречь. Тогда выражение для E_{st} упрощается и принимает вид

$$E_{st} \approx -mE_0, \quad (11.48)$$

так что в формирование решетки основной вклад вносит дрейфовый механизм переноса заряда. Поскольку поле, прилагаемое к кристаллу, способно достигать значений 30 кВ/см и более, фоторефрактивная решетка в постоянном внешнем поле может по амплитуде существенно превышать амплитуду решетки, формирующейся за счет диффузионного механизма.

Другое важное отличие заключается в том, что данная решетка синфазна или противофазна с интерференционной картиной, в то время как в случае диффузионного механизма они сдвинуты на четверть пространственного периода относительно друг друга.

Как отмечалось выше, недостатком постоянного внешнего поля является необходимость неоднородной засветки кристалла между электродами.

11.6 Фоторефрактивная решетка при знакопеременном внешнем поле

Когда к кристаллу приложено знакопеременное электрическое поле, преобладающую роль также играет дрейфовый механизм переноса заряда. Однако ток через кристалл носит емкостной характер, и экранировка внешнего поля не успевает произойти за время полупериода $T/2$. Этот период выбирается из условия $\tau_R \ll T \ll \tau_{di}$. Обычно частота внешнего поля находится в пределах $f_0 = 1/T = 50 \text{ Гц} - 5 \text{ кГц}$. Наиболее простым с точки зрения теоретического анализа и наиболее эффективным для практических целей оказывается знакопеременное поле меандровой формы. Запишем уравнение (11.36) для положительного и отрицательного полупериодов:

$$\frac{dE_1^+}{dt} + \Gamma_1^+ E_1^+ = -mF_1^+; \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \quad (11.49)$$

$$\frac{dE_1^-}{dt} + \Gamma_1^- E_1^- = -mF_1^-; \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T, \quad (11.50)$$

где коэффициенты Γ_1^+ и F_1^+ постоянны в течение своих полупериодов:

$$\Gamma_1^\pm = \frac{1 + E_D/E_q \mp i E_0/E_q}{\tau_{di} \left(1 + E_D/E_\mu \mp i E_0/E_\mu \right)}, \quad (11.51)$$

$$F_1^\pm = \frac{\pm E_0 + iE_D}{\tau_{di} \left[1 + E_D/E_\mu \mp i E_0/E_\mu \right]}. \quad (11.52)$$

Мы видим, что решение для E_1^+ и E_1^- может быть легко найдено в виде экспоненциальной функции и константы:

$$E_{1n}^\pm = C_{1n}^\pm \exp\left(-\Gamma_1^\pm t\right) - m \frac{F_1^\pm}{\Gamma_1^\pm}, \quad (11.53)$$

где n – номер периода, $n = 1, 2, 3, \dots$

Если рассматривать динамику роста фоторефрактивной решетки, то можно начать с момента времени $t=0$, когда $E_{11}^+(t) = 0$. Отсюда мы определим коэффициент C_{11}^+ .

При переключении полярности поля в момент времени $t = nT/2$ амплитуда решетки не может мгновенно измениться, поэтому воспользуемся условиями непрерывности, которые в общем виде формулируются как

$$E_1^+ [(2n-1)T/2] = E_1^- [(2n-1)T/2], \quad (11.54)$$

$$E_1^- \left[2n \frac{T}{2} \right] = E_1^+ \left[2n \frac{T}{2} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.55)$$

Используя данные условия, можно последовательно найти C_{11}^- , C_{12}^+ , C_{12}^- и т. д.

При малых периодах внешнего поля $T \ll \tau_{di}$ амплитуда решетки не успевает существенно измениться в течение каждого полупериода. Естественно, что при большом времени формирования решетки наступает режим стационарных колебаний – поле можно представить в виде стационарной части и колебательной составляющей:

$$E_1^\pm = \tilde{E}_1 \pm \Delta E(t), \quad (11.56)$$

причем $|\Delta E| \ll \tilde{E}_1$.

Найти \tilde{E}_1 можно из условия непрерывности при $t = T/2$ и условий периодичности

$$E_{1n}^+(T/2) = E_{1n}^-(T/2), \quad E_{1n}^-(T) = E_{1n}^+(0), \quad (11.57)$$

где используем замену $t = nT + \Delta t$, причем $nT \gg \tau_{di}$, а $0 \leq \Delta t \leq T$.

Другой подход заключается в использовании метода усреднения и соотношений:

$$\langle E_{1n}^+ \rangle = \int_0^{T/2} E_{1n}^+(t) dt = \int_{T/2}^T E_{1n}^-(t) dt = \langle E_{1n}^- \rangle = \tilde{E}_1, \quad (11.58)$$

$$\left\langle \frac{dE_{1n}^+}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dE_{1n}^-}{dt} \right\rangle. \quad (11.59)$$

Применим усреднение к уравнениям (11.49) и (11.50) для эволюции E_1^\pm и просуммируем результаты усреднения:

$$(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-) \tilde{E}_1 = -m(F_1^+ + F_1^-). \quad (11.60)$$

В результате получаем

$$\tilde{E}_1 = -m \frac{F_1^+ + F_1^-}{\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-} = -imE_q \frac{E_D(E_\mu + E_D) + E_0^2}{(E_\mu + E_D)(E_q + E_D) + E_0^2}. \quad (11.61)$$

Таким образом, при высокочастотном внешнем напряжении меандровой формы поле пространственного заряда имеет первую пространственную гармонику, сдвинутую по фазе на $-\pi/2$ относительно интерференционной картины, как при диффузионном механизме записи фоторефрактивной решетки. Однако амплитуда этой гармоники \tilde{E}_1 здесь может быть существенно выше, чем для диффузионного механизма, поскольку в формировании решетки путем разделения зарядов вносит вклад дрейф в знакопеременном внешнем поле. Зависимость $|\tilde{E}_1|$ от пространственного периода решетки Λ также имеет экстремум, как и для диффузионного механизма (см. рисунок 11.8), но сдвинутый в область больших Λ .

12 ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ

12.1 Самодифракция световых волн на фоторефрактивных голограммах. Уравнения связанных волн

Эффекты самодифракции проявляются в изменении амплитуд и фаз световых волн при взаимодействии на формируемой ими фоторефрактивной голограмме, которая имеет динамический характер. Ограничимся анализом симметричной геометрии взаимодействия плоских световых волн (см. рисунок 11.1), поля которых вне голограммы описываются соотношениями (11.1) и (11.2). Будем пренебрегать оптической анизотропией среды и полагать, что фоторефрактивный кристалл представляет плоский слой, расположенный при $0 \leq x \leq d$ (рисунок 12.1).

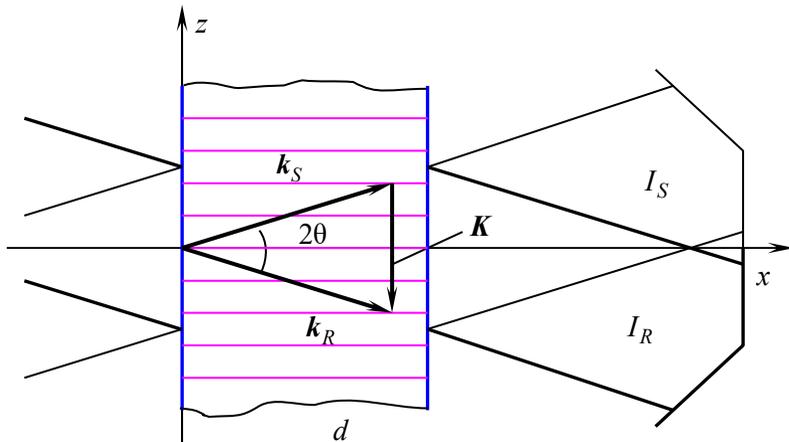


Рисунок 12.1 – Геометрия попутного взаимодействия двух плоских световых волн на пропускающей решетке в плоском слое фоторефрактивного кристалла

Входную ($x = 0$) и выходную ($x = d$) грани кристалла считаем оптически просветленными, так что отражение света от этих граней отсутствует.

Поля взаимодействующих волн в фоторефрактивном слое будем искать в виде собственных волн невозмущенного кристалла с комплексными амплитудами, зависящими от координаты x :

$$E_R(x, z, t) = e \frac{\dot{E}_R}{2}(x) \exp\{i[\omega t - k_0 n_0(x \cos \theta - z \sin \theta)]\} + \text{к.с.}, \quad (12.1)$$

$$E_S(x, z, t) = e \frac{\dot{E}_S}{2}(x) \exp\{i[\omega t - k_0 n_0(x \cos \theta + z \sin \theta)]\} + \text{к.с.}, \quad (12.2)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число для вакуума; n_0 – показатель преломления невозмущенного кристалла; к.с. – комплексно-сопряженные слагаемые.

Здесь мы для простоты полагаем, что взаимодействующие волны имеют одинаковые собственные векторы поляризации, считая малым угол 2θ между волновыми векторами \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_S .

Компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости фоторефрактивного слоя, в котором сформирована динамическая голографическая решетка, представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}(x, z, t) = \varepsilon_{mn}^0 + \frac{\Delta\varepsilon_{mn}(x, t)}{2} \exp(iKz) + \\ + \frac{\Delta\varepsilon_{mn}^*(x, z, t)}{2} \exp(-iKz), \end{aligned} \quad (12.3)$$

где волновое число в соответствии с векторной диаграммой на рисунке 12.1 и с законом сохранения (условием синхронизма) (11.5) может быть найдено как

$$K = 2k_0 n_0 \sin \theta. \quad (12.4)$$

Диэлектрическая проницаемость оптически изотропного невозмущенного кристалла выражается в формуле (12.3) через его показатель преломления как $\varepsilon_{mn}^0 = n_0^2 \delta_{mn}$, где δ_{mn} – еди-

ничный симметричный тензор второго ранга. Наведенные в кристалле полем пространственного заряда голограммы возмущения диэлектрической проницаемости обусловлены, во-первых, *линейным электрооптическим эффектом*. Во-вторых, вследствие *обратного пьезоэлектрического эффекта* электрическое поле голограммы создает пропорциональные ему упругие деформации кристалла. Эти деформации дают дополнительный вклад в возмущения диэлектрической проницаемости, определяемые *фотоупругим эффектом*. С учетом электрооптического и фотоупругого вкладов амплитуда возмущений диэлектрической проницаемости в формуле (12.3) определяется следующим выражением:

$$\Delta \varepsilon_{mn} = -\varepsilon_{mi}^0 \varepsilon_{nj}^0 \left(r_{ijp}^S + P_{ijkl}^E p_l \gamma_{kr} e_{prs} p_s \right) p_p E_1, \quad (12.5)$$

где p_p, p_l, p_s – направляющие косинусы вектора решетки \mathbf{K} в кристаллофизических координатах; r_{ijp}^S – компоненты электрооптического тензора механически зажатого кристалла; P_{ijkl}^E – компоненты фотоупругого тензора, измеренного при постоянном электрическом поле; γ_{kr} – компоненты тензора, обратного к $\Gamma_{rk}^E = C_{rskl}^E p_s p_l$; C_{rskl}^E и e_{prs} – компоненты тензоров модулей упругости и пьезоэлектрических констант.

Подставляя далее суперпозицию полей опорной и предметной волн, определяемых соотношениями (12.1) и (12.2), и диэлектрическую проницаемость в форме (12.3) в волновое уравнение, в котором пренебрегается оптической анизотропией невозмущенной среды,

$$\nabla^2 E_m + k_0^2 \varepsilon_{mn} E_n = 0, \quad (12.6)$$

используя стандартную процедуру метода медленно меняющихся амплитуд и условие синхронизма (12.4), приходим к следующей системе уравнений связанных волн:

$$\frac{d\dot{E}_R}{dx} = -i \frac{k_0 g}{4n_0 \cos \theta} \dot{E}_S; \quad (12.7)$$

$$\frac{d\dot{E}_S}{dx} = -i \frac{k_0 g^*}{4n_0 \cos \theta} \dot{E}_R. \quad (12.8)$$

Здесь тензорная свертка $g = \Delta \epsilon_{mn} e_m e_n$ характеризует величину и характер связи взаимодействующих на фоторефрактивной динамической голограмме волн сигнала и накачки (опорной и предметной). Мы считаем эти волны собственными и имеющими одинаковые векторы поляризации с направляющими косинусами $e_{m,n}$. В рассматриваемом случае оптически изотропной среды эта свертка с учетом соотношения (12.5) может быть выражена через амплитуду первой гармоники поля пространственного заряда:

$$g = -n_0^4 r_{\text{eff}}^4 E_1, \quad (12.9)$$

где эффективная электрооптическая постоянная определяется выражением

$$r_{\text{eff}} = \left(r_{mnp}^S + P_{mnkl}^E p_l \gamma_{kr} e_{prs} P_s \right) p_p e_m e_n. \quad (12.10)$$

В рассматриваемых далее частных случаях взаимодействия волн на фоторефрактивной решетке будем полагать угол θ малым, так что $\cos \theta \approx 1$. Используя также соотношение (12.9), перепишем уравнения связанных волн в следующем виде:

$$\frac{d\dot{E}_R}{dx} = i \left(\frac{\pi}{2\lambda} n_0^3 r_{\text{eff}}^3 E_1 \right) \dot{E}_S; \quad (12.11)$$

$$\frac{d\dot{E}_S}{dx} = i \left(\frac{\pi}{2\lambda} n_0^3 r_{\text{eff}}^3 E_1^* \right) \dot{E}_R. \quad (12.12)$$

12.2 Приближение неистощаемой накачки

Если при взаимодействии на фоторефрактивной решетке параметры волны накачки не претерпевают значительных изменений (это относится к амплитуде и фазе: $\dot{E}_R(x) = E_R(x) \exp[i\phi_R(x)]$, $E_R = |\dot{E}_R|$), то комплексную амплитуду \dot{E}_R можно полагать постоянной. В общем случае, как следует из предыдущего рассмотрения, амплитуда поля пространственного заряда фоторефрактивной решетки может быть представлена в виде

$$E_1 = m(E'_1 + iE''_1), \quad (12.13)$$

где E'_1 соответствует локальной, а E''_1 – нелокальной компоненте фоторефрактивного отклика. Учтем, что контраст интерференционной картины (см. подразд. 11.1) при взаимодействии волн, описываемых отношениями (12.1) и (12.2), определяется выражением

$$m(x) = \frac{2\dot{E}_R(x)\dot{E}_S^*(x)}{|\dot{E}_R(x)|^2 + |\dot{E}_S(x)|^2}, \quad (12.14)$$

а условие неистошимости накачки выполняется при неравенстве $|\dot{E}_R(x)|^2 \gg |\dot{E}_S(x)|^2$.

В таком *приближении неистощаемой накачки*, полагая в знаменателе $|\dot{E}_S|^2 = 0$ и учитывая соотношение (12.13), из уравнения (12.12) получаем:

$$\frac{d\dot{E}_S}{dx} = i\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{\text{eff}} (E'_1 - iE''_1) \dot{E}_S. \quad (12.15)$$

Таким образом, комплексная амплитуда сигнальной волны в приближении неистощаемой накачки изменяется по экспоненциальному закону

$$\dot{E}_S(x) = E_{S0} \exp\left(i \frac{\Gamma''}{2} x\right) \exp\left(\frac{\Gamma'}{2} x\right) \quad (12.16)$$

со скоростью, определяемой коэффициентами

$$\Gamma' = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 r_{\text{eff}}'' E_1'', \quad \Gamma'' = \frac{2\pi}{\lambda} n_0^3 r_{\text{eff}}' E_1'. \quad (12.17)$$

Первый из них (Γ') обозначают обычно как Γ и называют **экспоненциальным коэффициентом двухпучкового усиления**. Он определяет усиление слабого сигнального пучка по интенсивности

$$I_S(x) = \left| \dot{E}_S(x) \right|^2 = I_{S0} \exp(\Gamma x), \quad (12.18)$$

связанное с нелокальной компонентой фоторефрактивного отклика. Данный эффект называют **перекачкой мощности (интенсивности) пучка накачки в сигнальный пучок**.

Из выражения (12.16) видим, что локальная компонента фоторефрактивного отклика приводит к изменению фазы сигнальной волны при взаимодействии, что называется **перекачкой фазы**.

Очевидно, что данное приближение неистоощаемой накачки справедливо до тех пор, пока интенсивность сигнальной волны существенно меньше, чем у волны накачки.

12.3 Самодифракция световых волн на фоторефрактивной решетке при чисто нелокальном отклике

При диффузионном механизме переноса заряда, а также при формировании фоторефрактивной голограммы в знакопеременном внешнем электрическом поле достаточно высокой частоты, как следует из подразд. 11.4 и 11.5, локальная компонента отклика отсутствует ($E_1' = 0$, $\Gamma'' = 0$).

В этом случае уравнения связанных волн (12.11) и (12.12) с учетом выражений (12.13) и (12.14) принимают вид

$$\frac{d\dot{E}_R}{dx} = -\frac{\Gamma}{2} \frac{|\dot{E}_S|^2 \dot{E}_R}{|\dot{E}_R|^2 + |\dot{E}_S|^2}; \quad (12.19)$$

$$\frac{d\dot{E}_S}{dx} = \frac{\Gamma}{2} \frac{|\dot{E}_R|^2 \dot{E}_S}{|\dot{E}_R|^2 + |\dot{E}_S|^2}. \quad (12.20)$$

Умножим первое уравнение на \dot{E}_R^* , а второе – на \dot{E}_S^* . Складывая результаты, получаем так называемый первый интеграл системы уравнений (12.19) и (12.20):

$$\dot{E}_R^* \frac{d\dot{E}_R}{dx} + \dot{E}_S^* \frac{d\dot{E}_S}{dx} = 0. \quad (12.21)$$

Добавим сюда комплексно-сопряженное уравнение

$$\dot{E}_R \frac{d\dot{E}_R^*}{dx} + \dot{E}_S \frac{d\dot{E}_S^*}{dx} = 0 \quad (12.22)$$

и просуммируем полученные результаты. После несложных преобразований получаем соотношение, называемое интегралом сохранения:

$$\frac{d}{dx} \left(|\dot{E}_R(x)|^2 + |\dot{E}_S(x)|^2 \right) = 0, \quad (12.23)$$

или в другой форме

$$|\dot{E}_R(x)|^2 + |\dot{E}_S(x)|^2 = \text{const} = I_0. \quad (12.24)$$

Соотношения (12.23) и (12.24) выражают тот факт, что в системе без потерь мощность, теряемая накачкой, приобретает сигнал. С учетом выражения (12.24) уравнения (12.19) и (12.20) упрощаются:

$$\frac{d\dot{E}_R}{dx} = -\frac{\Gamma}{2I_0} |\dot{E}_S|^2 \dot{E}_R; \quad (12.25)$$

$$\frac{d\dot{E}_S}{dx} = \frac{\Gamma}{2I_0} |\dot{E}_R|^2 \dot{E}_S. \quad (12.26)$$

Чтобы преобразовать системы уравнений (12.25)–(12.26) для комплексных амплитуд в уравнения для интенсивностей взаимодействующих волн, умножим выражение (12.25) на \dot{E}_R^* и просуммируем полученный результат с комплексно-сопряженным к нему уравнением. Пропуская аналогичные операции также с уравнением (12.26), получаем:

$$\frac{dI_R}{dx} = -\Gamma \frac{I_R I_S}{I_0}; \quad (12.27)$$

$$\frac{dI_S}{dx} = \Gamma \frac{I_R I_S}{I_0}. \quad (12.28)$$

Решения, описывающие пространственную эволюцию интенсивностей волн сигнала и накачки при самодифракции на фоторефрактивной решетке в рассматриваемом случае нелокального отклика, могут быть получены из нелинейной системы уравнений (12.27) и (12.28) в аналитической форме.

Использование интеграла сохранения (12.24), переписанного в виде

$$I_R(x) + I_S(x) = I_{R0} + I_{S0} = I_0, \quad (12.29)$$

где $I_{R0, S0} = I_{R, S}(0)$, позволяет исключить из уравнения (12.28) неизвестную функцию $I_R(x)$. В результате нелинейное дифференциальное уравнение для $I_S(x)$ может быть представлено в виде

$$\frac{dI_S}{dx} = \Gamma I_S \left(1 - \frac{I_S}{I_0} \right). \quad (12.30)$$

Интегрирование данного уравнения приводит к следующей координатной зависимости интенсивности сигнальной волны:

$$I_S(x) = I_{S0} \frac{(1 + \beta) \exp(\Gamma x)}{\beta + \exp(\Gamma x)} = \frac{I_0}{1 + \beta \exp(-\Gamma x)}, \quad (12.31)$$

где параметр β характеризует отношение интенсивностей волн накачки и сигнала на входной грани кристалла:

$$\beta = \frac{I_{R0}}{I_{S0}}. \quad (12.32)$$

Аналогичным образом может быть получена координатная зависимость для интенсивности волны накачки:

$$I_R(x) = I_{R0} \frac{(1 + \beta) \exp(-\Gamma x)}{1 + \beta \exp(-\Gamma x)} = \frac{\beta I_0}{\beta + \exp(\Gamma x)}. \quad (12.33)$$

Из проведенного анализа следует, что в средах с нелокальным откликом возможно усиление слабых сигнальных волн за счет перекачки в них мощности от сильной волны накачки при взаимодействии на формируемых фоторефрактивных динамических голограммах.

Значения экспоненциального коэффициента двухпучкового усиления Γ определяются электрооптическими свойствами кристалла и стационарным значением амплитуды нелокальной составляющей поля пространственного заряда (см. формулу (12.17) для Γ').

В кристаллах BaTiO_3 с исключительно большими электрооптическими коэффициентами $r_{42} \approx 1200$ пм/В и $r_{33} \approx 123$ пм/В коэффициент усиления может достигать значений до 100 см^{-1} в попутной геометрии взаимодействия.

Для кристаллов $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$, имеющих электрооптический коэффициент $r_{41} \approx 5$ пм/В, во встречной геометрии взаимодействия на отражательных решетках, сформированных за счет диффузионного механизма переноса заряда, экспериментально получено значение коэффициента усиления $\Gamma = 6,8 \text{ см}^{-1}$.

Литература

1. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1987. – 468 с.
2. Стафеев, С. К. Основы оптики: учеб. пособие / С. К. Стафеев, К. К. Боярский, Г. Л. Башнина. – СПб.: Питер, 2006. – 336 с.
3. Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2005. – 651 с.
4. Калитеевский, Н. И. Волновая оптика: учеб. пособие / Н. И. Калитеевский. – СПб.: Лань, 2006. – 480 с.
5. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 855 с.
6. Ахманов, С. А. Физическая оптика: учеб. / С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ ; Наука, 2004. – 656 с.
7. Дубнищев, Ю. Н. Колебания и волны: учеб. пособие / Ю. Н. Дубнищев. – СПб.: Лань, 2011 [Электронный ресурс]: Электронная библиотечная система «Лань». – URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?p11_cid=25&p11_id=683 (дата обращения: 10.10.2020).
8. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
9. Матвеев, А. Н. Оптика: учеб. пособие / А. Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1985. – 351 с.
10. Введение в интегральную оптику / под ред. М. Барноски ; пер. с англ. под ред. Т. А. Шмаонова. – М.: Мир, 1977. – 367 с.
11. Пихтин, А. Н. Оптическая и квантовая электроника: учеб. для вузов / А. Н. Пихтин. – М.: Высшая школа, 2001. – 574 с.
12. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1992. – 454 с.
13. Петров, М. П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко. – СПб.: Наука, 1992. – 320 с.
14. Одулов, С. Г. Лазеры на динамических решетках: оптические генераторы на четырехволновом смещении / С. Г. Одулов, М. С. Соскин, А. И. Хижняк. – М.: Наука, 1990. – 272 с.

15. Стурман Б. И. Фотогальванический эффект в средах без центра симметрии и родственные явления / Б. И. Стурман, В. М. Фридкин. – М.: Наука, 1992. – 208 с.
16. Solymar, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solymar, D. J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford: Clarendon Press, 1996. – 495 p.
17. Бельдюгин, И. М. Теория и применение оптических приборов на основе четырехволнового взаимодействия в фоторефрактивных кристаллах / И. М. Бельдюгин, М. В. Золотарев, К. А. Свиридов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1990. – № 3. – С. 52–81 ; № 4. – С. 72–89.
18. Nonlinearity of a response in photorefractive crystals with a square-wave applied field / S. M. Shandarov, N. I. Nazhestkina, O. V. Kobozev [et al.] // Appl. Phys. B. – 1999. – Vol. 68, N 5. – P. 1007–1012.
19. Stepanov, S. I. Applications of photorefractive crystals / S. I. Stepanov // Repts. Progr. Phys. – 1994. – Vol. 57. – P. 39–116.
20. Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах / А. А. Изванов [и др.] // Автометрия. – 1982. – № 2. – С. 79–84.
21. Степанов, С. И. Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах / С. И. Степанов, С. М. Шандаров, Н. Д. Хатьков // Физика твердого тела. – 1987. – Т. 24, № 10. – С. 3054–3058.
22. Шандаров, С. М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных пьезоэлектрических кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С. М. Шандаров, В. В. Шепелевич, Н. Д. Хатьков // Оптика и спектроскопия. – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1044–1048.
23. Shandarov, S. M. Influence of piezoelectric effect on photorefractive gratings in electrooptic crystals / S. M. Shandarov // Appl. Physics A. – 1992. – Vol. 55. – P. 91–96.
24. Light-induced absorption in a $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal / O. V. Kobozev [et al.] // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 1999. – Vol. 1. – P. 442–447.
25. Плесовских, А. А. Динамика фоторефрактивного отклика в кристаллах силленитов с двукратно ионизируемыми донорными

центрами и мелкими ловушками / А. А. Плесовских, С. М. Шандаров, Е. Ю. Агеев // Физика твердого тела. – 2001. – Т. 43, вып. 2. – С. 242–245.

26. Плесовских, А. М. Влияние постоянного внешнего поля на динамику фоторефрактивного отклика в кристаллах с двукратно ионизируемыми донорными центрами и мелкими ловушками / А. А. Плесовских, С. М. Шандаров // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44, вып. 1. – С. 57–61.

27. Векторное взаимодействие волн в кубических фоторефрактивных кристаллах / Б. И. Стурман [и др.] // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2001. – Т. 119, вып. 1. – С. 125–142.

28. Литвинов, Р. В. Двухволновое взаимодействие на фоторефрактивной решетке в кубических гиротропных кристаллах при сильной связи / Р. В. Литвинов, С. М. Шандаров, С. Г. Чистяков // Физика твердого тела. – 2000. – Т. 42, вып. 8. – С. 1397–1403.

29. Красноперов, В. Ю. Неоднаправленное двухпучковое взаимодействие в фоторефрактивном силикате висмута, находящемся в знакопеременном электрическом поле / В. Ю. Красноперов, Р. В. Литвинов, С. М. Шандаров // Физика твердого тела. – 1999. – Т. 41, вып. 4. – С. 632–637.

30. Двухволновое взаимодействие на отражательной решетке в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / Е. Ю. Агеев [и др.] // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 4. – С. 343–345.

31. Плесовских, А. М. Векторное двухволновое взаимодействие на отражательных голографических решетках в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах / А. М. Плесовских // Квантовая электроника. – 2005. – Т. 35, № 2. – С. 163–168.

32. Adaptive correlation filter based on dynamic reflection hologram formed in photorefractive $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal / R. V. Romashko [et al.] // Optical Review. – 2005. – Vol. 12, N 1. – P. 58–60.

33. Адаптивный спекл-интерферометр на основе фоторефрактивной отражательной голограммы / Р. В. Ромашко [и др.] // Известия РАН. Сер. физическая. – 2005. – Т. 69, № 8. – С. 1139–1141.

34. Литвинов, Р. В. Самовозбуждение взаимно обращенных световых волн в кубическом гиротропном фоторефрактивном кри-

сталле с приложенным меандровым электрическим полем / Р. В. Литвинов, С. И. Полковников, С. М. Шандаров // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 2. – С. 167–172.

35. Векторное четырехволновое взаимодействие света на отражательных решетках в кристаллах титаната висмута / А. В. Гусельникова [и др.] // Оптический журнал. – 2006. – Т. 73, № 11. – С. 22–27.

36. Growth and characterization of doped $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ single crystals / Yu. F. Kargin [et al.] // J. of Crystal Growth. – 2005. – Vol. 275, N 1–2. – P. e779–e784.

37. Буримов, Н. И. Структура упругих и электрических полей, возникающих вблизи границы кристалла LiNbO_3 при фотогальваническом механизме записи фоторефрактивных решеток / Н. И. Буримов, С. М. Шандаров // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48, вып. 3. – С. 491–496.

Оглавление

Введение	3
1 ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ.....	5
2 ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ.....	9
2.1 Линейные колебания в системах с одной степенью свободы.....	10
2.1.1 Линейный осциллятор	10
2.1.2 Затухающие колебания.....	13
2.1.3 Вынужденные колебания	16
2.1.4 Заключительные замечания	16
2.2 Изображение колебательных процессов в фазовом пространстве.....	17
2.2.1 Фазовый портрет гармонических колебаний	20
2.2.2 Фазовый портрет системы с мнимыми собственными частотами ($\omega_0^2 < 0$).....	22
2.2.3 Фазовые траектории затухающих и нарастающих колебаний	23
2.2.4 Собственные колебания нелинейной консервативной системы.....	30
3 ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА	35
3.1 Основные уравнения для классических электромагнитных полей.....	35
3.1.1 Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	35
3.1.2 Материальные уравнения.....	36
3.1.3 Граничные условия	37
3.2 Волновое уравнение. Плоские монохроматические волны.....	38
3.2.1 Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды.....	39
3.2.2 Одномерное волновое уравнение	40
3.2.3 Плоские скалярные волны.....	40
3.2.4 Гармонические волны.....	41
3.2.5 Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении.....	43
3.2.6 Электромагнитные плоские волны.....	44
3.3 Поляризация плоских электромагнитных волн	47

3.4 Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.....	49
3.5 Усреднение по времени энергетических характеристик поля.....	50
3.6 Сферические электромагнитные волны.....	53
4 ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД	55
4.1 Поляризация волн, нормальная к плоскости падения	56
4.2 Поляризация волн в плоскости падения	59
4.3 Анализ формул Френеля	60
4.3.1 Отражение света при падении из менее плотной среды на более плотную. Угол Брюстера	60
4.3.2 Отражение света при падении из более плотной среды на менее плотную. Полное внутреннее отражение	62
5 ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА.....	67
5.1 Интерференция монохроматического излучения	68
5.1.1 Интерференция двух плоских монохроматических волн	68
5.1.2 Интерференция двух сферических монохроматических волн	71
5.2 Когерентность световых волн.....	73
5.2.1 Временная когерентность.....	74
5.2.2 Пространственная когерентность.....	80
5.3 Методы наблюдения интерференционных картин	82
5.3.1 Метод деления амплитуды.....	83
5.3.2 Метод деления волнового фронта	90
5.3.3 Двухлучевые интерферометры	93
5.3.4 Измерение угловых размеров источников. Звездный интерферометр	96
6 ОПТИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД	99
6.1 Эффекты взаимодействия оптического излучения с веществом и их классификация	99
6.2 Материальные уравнения для анизотропных сред	102
6.3 Симметричные тензоры второго ранга в различных средах	104
6.4 Тензор диэлектрической восприимчивости	106

6.5 Материальные уравнения с учетом временной дисперсии диэлектрической проницаемости	108
6.6 Пространственная дисперсия.....	110
6.7 Световые волны в прозрачных немагнитных кристаллах	112
6.7.1 Волновое уравнение.....	112
6.7.2 Световые волны в оптически неактивных изотропных средах.....	114
6.7.3 Световые волны в изотропных непоглощающих средах с естественной оптической активностью	116
6.7.4 Световые волны в средах с линейным двулучепреломлением	123
6.8 Искусственная анизотропия.....	128
6.8.1 Электрооптическая модуляция оптического излучения.....	129
6.8.2 Квадратичный электрооптический эффект.....	139
6.8.3 Фотоупругий эффект	141
6.8.4 Эффект Фарадея.....	143
7 ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ	145
7.1 Распространение волновых пакетов. Групповая скорость...	145
7.2 Поглощение света. Закон Бугера	149
7.3 Нормальная и аномальная дисперсии	150
7.4 Дисперсия вдали от линий поглощения.....	155
8 ФУРЬЕ-ОПТИКА	159
8.1 Достоинства оптических методов обработки информации	159
8.2 Преобразование Фурье в когерентной оптической системе	161
8.2.1 Когерентная оптическая система.....	161
8.2.2 Прямое и обратное преобразование Фурье в оптической системе.....	166
8.3 Интегральные и спектральные преобразования в когерентных оптических системах.....	168
8.3.1 Интегрирование двумерных функций.....	168
8.3.2 Пространственная оптическая фильтрация	168
8.3.3 Вычисление функций свертки и корреляции	171
8.3.4 Согласованная фильтрация	174
9 ОПТИЧЕСКИЕ ТРАНСПАРАНТЫ.....	180
9.1 Фото пленки	180

9.2 Несеребряные материалы.....	183
9.3 Акустооптические модуляторы	185
10 ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ	189
10.1 Качественный анализ дифракции света на акустических волнах.....	189
10.2 Дифракция Рамана – Ната	194
10.3 Дифракция Брэгга в изотропной среде. Метод волнового уравнения	196
10.4 Анализ соотношений для дифрагированного светового поля.....	204
10.5 Эффективность дифракции Брэгга. Коэффициент акустического качества среды M_2	206
11 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОТОРЕФРАКТИВНОГО ЭФФЕКТА	210
11.1 Качественное описание основных эффектов динамической голографии	211
11.2 Модель зонного переноса.....	219
11.3 Приближение малых контрастов интерференционной картины	223
11.4 Диффузионный механизм записи фоторефрактивной решетки	227
11.5 Формирование фоторефрактивной решетки в постоянном внешнем поле	229
11.6 Фоторефрактивная решетка при знакопеременном внешнем поле	232
12 ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ.....	235
12.1 Самодифракция световых волн на фоторефрактивных голограммах. Уравнения связанных волн	235
12.2 Приближение неистощаемой накачки	239
12.3 Самодифракция световых волн на фоторефрактивной решетке при чисто нелокальном отклике	240
Литература.....	244

Учебное издание

Шандаров Станислав Михайлович
Буримов Николай Иванович
Акрестина Анна Сергеевна

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

Учебное пособие

Подписано в печать 13.09.23. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 14,65. Тираж 100 экз. Заказ 192.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники»
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.