

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Д.Н. Черепанов
Н.А. Ярушкина

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Сборник задач к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов всех форм
обучения технических направлений подготовки

Томск
2024

УДК 517
ББК 22.143
Ч-46

Рецензент:

Иванова О.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТГАСУ

Черепанов, Дмитрий Николаевич

Ч-46 Определенный интеграл. Несобственный интеграл: сборник задач к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов всех форм обучения технических направлений подготовки / Д.Н. Черепанов, Н.А. Ярушкина – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2024. – 39 с.

Настоящий сборник задач по дисциплине «Математика», раздел «Определенный интеграл. Несобственный интеграл», составлен с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, основных профессиональных образовательных программ технических направлений подготовки.

Сборник содержит задачи для самостоятельного решения обучающимися на практических занятиях и внеаудиторно.

Одобрено на заседании кафедры промышленной электроники, протокол № 25 от 16.02.2024.

УДК 517
ББК 22.143

© Черепанов Д.Н., Ярушкина Н.А.,
2024

© Томск. гос. ун-т систем упр. и
радиоэлектроники, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Определенный интеграл	6
2. Приложения определенного интеграла.....	18
3. Несобственный интеграл.....	31
Список рекомендуемой литературы.....	38
Приложение А	39

ВВЕДЕНИЕ

Приступая к выполнению заданий, обучающийся должен освоить теоретические материалы по данному разделу, в соответствии со следующим перечнем экзаменационных вопросов:

1. Определенный интеграл

1. Понятие интегральной суммы Римана.
2. Понятие определённого интеграла.
3. Понятие сумм Дарбу и условие существования определённого интеграла.
4. Основные классы интегрируемых функций.
5. Геометрический смысл определённого интеграла.
6. Формула Ньютона-Лейбница.
7. Замена переменной в определённом интеграле.
8. Сравнение модуля определённого интеграла с интегралом от модуля подынтегральной функции.
9. Интегрирование по частям для определённого интеграла.
10. Интегралы от чётных и нечётных функций в случае симметричного отрезка интегрирования.
11. Оценка определённого интеграла от непрерывной функции.
12. Теоремы о среднем.

2. Приложения определённого интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком положительной функции и осью абсцисс.
2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции положительной или отрицательной на некоторых интервалах и осью абсцисс.
3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками двух функций.
4. Вычисление площади криволинейной трапеции, ограниченной линией, заданной параметрически.
5. Вычисление площади криволинейного сектора.
6. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной как график непрерывной функции одной переменной.
7. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной параметрически.
8. Вычисление длины дуги плоской кривой, заданной уравнением в полярных координатах.
9. Вычисление объёма тела вращения вокруг координатной оси (абсцисс и ординат).

3. Несобственный интеграл

1. Понятие несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.
2. Понятие сходимости несобственного интеграла.
3. Признак сравнения интегралов от неотрицательных функций.
4. Признак сравнения несобственных интегралов в предельной форме.
5. Понятие абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла.
6. Понятие несобственных интегралов от неограниченных функций.

Для освоения теоретического материала рекомендуется использовать литературу, приведенную в данном сборнике, презентации лекций по разделам и методические указания, размещенные в электронном курсе. Допускается использование дополнительных источников информации.

Студенты, использующие данный сборник задач, приобретут ряд следующих навыков:

1. Навыки решения задач на вычисление определенных и несобственных интегралов: студенты научатся использовать различные методы интегрирования.

2. Навыки работы с геометрическими задачами: многие задачи в сборнике связаны с решением геометрических задач с использованием определенных интегралов, что поможет студентам понять геометрический смысл интеграла.

3. Навыки аналитического мышления: решение задач по определенному и несобственному интегралам требует анализа условий задачи, выбора подходящих методов решения и последовательного проведения вычислений.

4. Навыки самостоятельной работы: сборник задач предоставляет студентам возможность самостоятельно разбираться с материалом, искать решения задач и углублять свои знания в данной теме.

Таким образом, использование сборника задач по определенному и несобственному интегралам поможет студентам не только улучшить свои знания в этой области математики, но и развить ценные навыки, которые пригодятся им в дальнейшем обучении и профессиональной деятельности.

1 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вариант 1

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$$

$$2) \int_{-1}^3 \ln(2x^2 + 3) dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2+2}};$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx;$$

$$6) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \cos^3 x, \quad [0; \pi/4];$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}, \quad [-3/4; 0].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};$$

$$2) \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}.$$

Вариант 2

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt[3]{1+x^2} dx;$$

$$2) \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$$

$$5) \int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx;$$

$$6) \int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9+6x-9x^2}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x}{\sin^2 x}, \quad [\pi/4; \pi/2];$$

$$2) y = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad [0; \pi/4].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-3}^7 \frac{(x+3)dx}{x^2+7};$$

$$2) \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \arcsin x^2 dx.$$

Вариант 3

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}};$$

$$2) \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}};$$

$$3) \int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$4) \int_3^4 \frac{dx}{x^2-6x+10};$$

$$5) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2};$$

$$6) \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = (x-2)\sqrt{3x-1}, \quad [1/3; 5/3];$$

$$2) y = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}, \quad [0; \pi].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} dx;$$

$$2) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Вариант 4

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^6};$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x dx;$$

$$3) \int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3) dx;$$

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)};$$

$$6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = e^{\sqrt{1-x}}, \quad [-3; 0];$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}, \quad [1; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$2) \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt[3]{(x^2-8)^2} dx.$$

Вариант 5

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{3x+25}};$$

$$2) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}};$$

$$3) \int_{-2}^0 x^2 e^{-x/2} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx;$$

$$5) \int_8^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x};$$

$$6) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \operatorname{arctg} x, \quad [0; \sqrt{3}];$$

$$2) y = \frac{x}{x^2+3x-1}, \quad [1; 3].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7-2\cos x};$$

$$2) \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)^3}.$$

Вариант 6

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^e \frac{(1+\ln x)dx}{x};$$

$$2) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$3) \int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x dx;$$

$$4) \int_3^4 \frac{dx}{(x+1)(x-2)};$$

$$5) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1};$$

$$6) \int_0^{\pi/8} \sin x \cdot \sin 3x dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \ln(x+1), \quad [0; 1];$$

$$2) y = \cos^5 x \cdot \sin x, \quad [0; \pi/2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x};$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^6 dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Вариант 7

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1};$$

$$2) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx;$$

$$3) \int_1^e x \ln^2 x dx;$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1};$$

$$6) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = x \sin 2x, \quad [0; \pi/4];$$

$$2) y = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad [0; 1].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx;$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}.$$

Вариант 8

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}};$$

$$2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx;$$

$$3) \int_2^3 x \ln(x-1) dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x};$$

$$5) \int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx;$$

$$6) \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{3\sin x + \cos x}, \quad [0; \pi/4];$$

$$2) y = e^x + e^{-x}, \quad [\ln 2; \ln 3].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+4x^4} dx;$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+0,5\sin^2 x} dx.$$

Вариант 9

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}};$$

$$2) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx;$$

$$3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}};$$

$$4) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx;$$

$$5) \int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)};$$

$$6) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}, \quad [0; 9];$$

$$2) y = x \cos x, \quad [0; \pi/2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx;$$

$$2) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x} dx.$$

Вариант 10

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^3 x dx;$$

$$2) \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}};$$

$$3) \int_{-1}^0 (x+3)e^{-2x} dx;$$

$$4) \int_0^{32} (32 \cos^2 4x - 16) dx;$$

$$5) \int_{-1}^0 \frac{x}{x^3-1} dx;$$

$$6) \int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \operatorname{ctg} x, \quad [\pi/6; \pi/2];$$

$$2) y = \frac{1}{3x^2-x+1}, \quad [1/6; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+0,5 \sin^2 x} dx;$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt[3]{1+x^8}} dx.$$

Вариант 11

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$2) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^6}};$$

$$3) \int_1^2 \ln(3x+2) dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/4} 2 \cos x \cdot \sin 3x dx;$$

$$5) \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)};$$

$$6) \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot e^{-x}, \quad [0; \ln 5];$$

$$2) y = \frac{x^{-1/2}}{1+x^{-1/3}}, \quad [1/2; 1].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$2) \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx.$$

Вариант 12

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})};$$

$$2) \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x};$$

$$5) \int_2^3 \frac{dx}{x^3-1};$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{e^x-2}, \quad [\ln 3; \ln 5];$$

$$2) y = \sin^2 x \cdot \cos x, \quad [0; \pi/2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x};$$

$$2) \int_1^3 \sqrt{3+x^3} dx.$$

Вариант 13

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

$$2) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2+1}};$$

$$3) \int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi} \cos 5x \cdot \sin 3x dx;$$

$$5) \int_{1/3}^{1/2} \frac{x dx}{(x-1)^3};$$

$$6) \int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \sqrt{1-2x}, \quad [0; 1/2];$$

$$2) y = \sin^3 x, \quad [0; 2\pi].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-6}^8 \sqrt{100-x^2} dx;$$

$$2) \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x+1} dx.$$

Вариант 14

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x}{\cos^2 x^2} dx;$$

$$2) \int_0^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$3) \int_0^1 \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2-1)} dx;$$

$$6) \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{1+\sqrt{3x-2}}, \quad [1; 6];$$

$$2) y = x \cos x, \quad [0; \pi/2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx;$$

$$2) \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Вариант 15

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x \, dx;$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1} \, dx}{x};$$

$$3) \int_0^{\pi/4} x \sin 2x \, dx;$$

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{2 + \sin x};$$

$$5) \int_{1/8}^{1/2} \frac{dx}{x - x^2};$$

$$6) \int_1^3 \frac{x \, dx}{x^2 + 3x - 1}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2}, \quad [1; 4];$$

$$2) y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad [1; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} \, dx;$$

$$2) \int_{1/2}^2 \frac{4^x}{x} \, dx.$$

Вариант 16

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^2 x^2 \sqrt[3]{5x^3 - 1} \, dx;$$

$$2) \int_1^e \frac{\ln x \, dx}{(1+x)^2};$$

$$3) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx;$$

$$4) \int_{-1}^0 x(x+1)^{10} \, dx;$$

$$5) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x};$$

$$6) \int_0^{\ln 3} \frac{(1-e^x) \, dx}{1+e^x}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{2 \cos 2x + 3}, \quad [0; \pi/4];$$

$$2) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad [1; \sqrt{3}].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_1^2 2^{x^2} \, dx;$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{x+1}} \, dx.$$

Вариант 17

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$$

$$2) \int_1^2 \frac{(x-2) dx}{x^2-2x+2};$$

$$3) \int_4^5 \frac{x dx}{x^4-x^2+3};$$

$$4) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x};$$

$$5) \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x};$$

$$6) \int_0^{\sqrt{2.5}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}, \quad [1/3; 1/8];$$

$$2) y = \frac{1}{(11+5x)^3}, \quad [-2; -1].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_1^e \frac{dx}{\ln x + 2};$$

$$2) \int_1^3 \frac{1}{(x^2-4x+8)^2} dx.$$

Вариант 18

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_2^3 \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln^2 x}};$$

$$2) \int_2^{e^2} \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$3) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$$

$$4) \int_1^2 \frac{dx}{1+x^3};$$

$$5) \int_0^{\pi/4} \sin 3x \cdot \cos 5x dx;$$

$$6) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = x \cdot \operatorname{tg}^2 x, \quad [0; \pi/4];$$

$$2) y = \frac{1}{x^2+4x+3}, \quad [0; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10} x dx;$$

$$2) \int_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2}.$$

Вариант 19

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx;$$

$$2) \int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{(x^2+3x)}{(x+1)(x^2+1)} dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x};$$

$$5) \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$6) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-5}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{x^2+x}, \quad [1; 1,5];$$

$$2) y = \frac{e^x}{e^x-1}, \quad [1; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-2}^1 \sqrt[3]{2x+1} dx;$$

$$2) \int_{1/4}^e x^2 e^{1/x} dx.$$

Вариант 20

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx;$$

$$2) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx;$$

$$3) \int_{-2}^2 \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x};$$

$$5) \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{x-x^2};$$

$$6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \cos^3 x, \quad [0; \pi];$$

$$2) y = \frac{1}{e^x+1}, \quad [0; 2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_0^3 \sqrt[3]{(x^2-2x)^2} dx;$$

$$2) \int_{1/e}^1 x^2 \ln x dx.$$

Вариант 21

1. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx;$

2) $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$

3) $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{9 + 4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$

;

4) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}};$

5) $\int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21};$

6) $\int_1^{1.5} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

1) $y = \frac{1}{4x^2 - 9}, [-1; 0];$

2) $y = (x+3) \sin x, [0; \pi/2].$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int_0^4 x^3 e^{-x} dx;$

2) $\int_{-1}^3 \frac{4-x^2}{4+x^2} dx.$

Вариант 22

1. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx;$

2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx;$

3) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx;$

4) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx;$

5) $\int_1^2 \frac{dx}{x + x^3};$

6) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

1) $y = \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}, [2; 4];$

2) $y = \cos^5 x, [0; \pi/2].$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int_0^2 e^{2x-x^2} dx;$

2) $\int_{-3}^2 \frac{x-3}{x^2+7} dx.$

Вариант 23

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx;$$

$$2) \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$3) \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx;$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx;$$

$$5) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2};$$

$$6) \int_1^{0,5\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = x \sin x \cos x, \quad [-\pi; \pi];$$

$$2) y = \sqrt{x+1}, \quad [3; 8].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-2}^2 x^3 \sqrt{(x-1)^2} dx;$$

$$2) \int_{-2}^2 x^{2/3} e^{-x^{2/3}} dx.$$

Вариант 24

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{x^2};$$

$$3) \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x};$$

$$5) \int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)};$$

$$6) \int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{2+3x}}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{x}{\sin^2 x}, \quad [\pi/3; \pi/2];$$

$$2) y = \frac{x}{x^2+3x-1}, \quad [1; 3].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-1}^2 (x^2 + 2^{-x^2}) dx;$$

$$2) \int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1-x^6}) dx.$$

Вариант 25

1. Вычислить определенные интегралы

$$1) \int_1^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 4}};$$

$$2) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\sin x};$$

$$4) \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x) dx;$$

$$5) \int_3^4 \frac{dx}{x^4 - 4x^2};$$

$$6) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1} dx}{e^x + 3}.$$

2. Найти среднее значение функции в указанных интервалах

$$1) y = \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}}, \quad [0; 1];$$

$$2) y = x \cos x, \quad [0; \pi/2].$$

3. Оценить значения интегралов

$$1) \int_{-1}^2 e^{3x-x^2} dx;$$

$$2) \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

2 ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = \cos \varphi, \\ \rho = 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 9(t - \sin t), \\ y = 9(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} x = \sqrt[3]{y-2}, \\ y = 1, \quad x = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = 1 - \ln(\cos x), \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} y = 2(\cos t + t \sin t), \\ x = 2(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 3x - 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = \cos \varphi, \\ \rho = \sin \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} x = (y-1)^2, \\ y = 2, \quad x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \ln x, \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15} \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = \sin^3(\varphi/3), \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 1 + 3x^2/4. \end{cases} \quad 2) \rho = 3 \cos 2\varphi. \quad 3) \begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t, \\ y = 3/2, \quad (y \geq 3/2). \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = x(4-x), \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = x^2/4 - \ln x/2, \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} y = 4 \sin^3 t, \\ x = 4 \cos^3 t. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 2/x, \\ y = -x/2 - 5/2. \end{cases} \quad 2) |\rho = 2(1 - \cos \varphi). \quad 3) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t + 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

$$1) \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x = \sqrt{y - 2}, \quad x = 0, \quad x = 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \quad x = \pi/2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \\ 0 \leq x \leq 7/9. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} y = 5 \sin^2 t, \\ x = 5 \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 5\pi/6. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 6x^2 - x^4, \\ y = 1, \quad (x > 0). \end{cases} \quad 2) |\rho = \sqrt{2 \sin 2\varphi}. \quad 3) \begin{cases} x = 2 \sin 2t, \\ y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2}, \\ x = y, \quad y = 0, \\ (x > 0, \quad y > 0). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y^2 + x - 4 = 0, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = -\ln(\cos x), \\ 0 \leq x \leq \pi/6. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} y = 5 \sin^2 t, \\ x = 5 \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases} \quad 2) \rho = 2(1 + \cos \varphi). \quad 3) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ y = 1. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

$$1) \begin{cases} y^2 = x - 2, \\ y = x^3, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2y = x^2, \\ 2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \ln(5/2x), \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} y = t - t^3, \\ x = \sqrt{3}t^2, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = \sin(\pi x/2), \\ y = x^2. \end{cases} \quad 2) \rho = 2 \sin^2 \varphi. \quad 3) \begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t, \\ y = (\pi x)/2. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{x-1}, \\ x = 1/2, \quad y = 0, \quad y = 1. \end{cases} \quad 2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \ln(x^2 - 1), \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = 3e^{\varphi/3}, \\ -1/2 \leq \varphi \leq 1/2. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $\begin{cases} y = x^2 - x, \\ y = 3x. \end{cases}$

2) $|\rho = 2 + \cos \varphi.$

3) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}. \end{cases}$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

1) $\begin{cases} y = x^3, \\ x = y^3, \quad (x \geq 0). \end{cases}$

2) $(x-4)^2 + y^2 = 16.$

3. Вычислить длины дуг линий

1) $L: \begin{cases} y = e^x - e, \\ \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \end{cases}$

2) $L: \begin{cases} y = 6 \sin t - 8 \cos t, \\ x = 8 \sin t + 6 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$

Вариант 9

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $\begin{cases} y^2 + 8x = 16, \\ y^2 - 24x = 48. \end{cases}$

2) $|\rho = 4 \sin^2 \varphi.$

3) $\begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = 5t - t^2, \\ y = 0. \end{cases}$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси ОХ; 2) вокруг оси ОУ

1) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 1, \\ y^2 = 3x/2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x, \quad x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$

3. Вычислить длины дуг линий

1) $L: \begin{cases} y = e^x + 6, \\ \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \end{cases}$

2) $L: \begin{cases} \rho = 5\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 12/5. \end{cases}$

Вариант 10

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - x^2. \end{cases}$

2) $|\rho = 3 \sin 4\varphi.$

3) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

1) $\begin{cases} y = \arcsin x, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

2) $x^2 + (y - 2)^2 = 1.$

3. Вычислить длины дуг линий

1) $L: \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \\ 0 \leq x \leq 8/9. \end{cases}$

2) $L: \begin{cases} y = e^t (\cos t - \sin t), \\ x = e^t (\cos t + \sin t), \quad -\pi/6 \leq t \leq \pi/6. \end{cases}$

Вариант 11

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $\begin{cases} y = 3/x, \\ y = 4 - x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \rho = 4 \cos^2 \varphi, \\ \rho = 2 \quad (\rho \geq 2). \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = t, \\ y = t(3 - t), \quad y = 0. \end{cases}$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

1) $\begin{cases} y = \sin x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 1/2, \quad x = -1, \quad x = 1. \end{cases}$

3. Вычислить длины дуг линий

1) $L: \begin{cases} y = 1 - \ln(\sin x), \\ \pi/6 \leq x \leq \pi/3. \end{cases}$

2) $L: \begin{cases} \rho = 3(1 - \cos \varphi), \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$

Вариант 12

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2\sqrt{2x}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \\ \rho = \sin \varphi. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - t^3, \quad y = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) x^2 + (y-3)^2 = 1.$$

$$2) \begin{cases} y = 2 - x^2/2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = 2 + \operatorname{ch} x, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} y = e^t \cos t, \\ x = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \ln \pi. \end{cases}$$

Вариант 13

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt[3]{x}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = 6 \sin 3\varphi, \\ \rho = 3 \quad (\rho \geq 3). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = \ln(1+t), \\ y = t(2-t), \quad y = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} x^3 = (y-1)^2, \\ y = 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

$$2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, \\ 1/9 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3/3 - t, \\ 0 \leq t \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Вариант 14

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 2(1-x), \\ y = 1-x^2, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4). \quad 3) \begin{cases} x = t^2 - 4, \\ y = t(t^2 - 4). \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = x - x^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = \sqrt{3} \cos t. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \ln(\sin x), \\ \pi/3 \leq x \leq \pi/2. \end{cases} \quad 2) L: \rho = 6(\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Вариант 15

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y^2 = x + 1, \\ y^2 = 9 - x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \rho = 2 \sin \varphi, \\ \rho = 4 \sin \varphi. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = t^2, & x = 0, \\ y = e^{t^2}, & y = e. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = e^{-2x} - 1, \\ y = e^{-x} + 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 3 \cdot \ln t, \\ x = 3 \cdot t^2, \\ x = 0, & y = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$2) L: \begin{cases} y = (e^{2x} + e^{-2x} + 3)/4, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} x = t^3/3, \\ y = 4 - t^2/2, & 0 \leq t \leq \sqrt{8}. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 4(x-2), \\ y = (1-x)^2, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi. \quad 3) \begin{cases} x = 2 \cos t (1 + \cos t), \\ y = 2 \sin t (1 + \cos t), \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y^2 = (x+4)^3, \\ x = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ 8x = y^2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = (e^x + e^{-x})/2 + 3, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = 2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$

Вариант 17

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \\ y = 0. \end{cases} \quad 2) \rho = \sin \varphi + \cos \varphi. \quad 3) \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - t^3. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = 8 - x^2, \\ y = x^2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 5 \sin t. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = 1 - \arccos x + \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \leq x \leq 9/16. \end{cases} \quad 2) L: \begin{cases} \rho = \varphi^2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Вариант 18

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 4 - 2x, \\ y = 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

$$2) \rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$3) \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y \cdot x = 4, \\ 2x + y = 6. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 4 \sin^2 t, \\ x = 3 \cos^2 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = (1 - e^x - e^{-x})/2, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} x = t^6/6, \quad x = 0 \\ y = 2 - t^4/4, \quad y = 0. \end{cases}$$

Вариант 19

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = 1 - x, \\ y = 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = 3 \sin \varphi, \\ \rho = 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \frac{x^2}{16} + y^2 = 1.$$

$$2) \begin{cases} 2y = x^2 + 4x + 4, \\ y = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y^2 = (x+1)^3, \\ 1 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} \rho = 4\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 3/4. \end{cases}$$

Вариант 20

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = e^{-x}, \\ y = e^x, \\ y = e. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = 4 \cos \varphi, \\ \rho = 6 \cos \varphi. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t \cdot \cos^2 t, \\ 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y^2 = 4x/3, \\ x = 3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = x, \\ y = x + \sin^2 x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: |y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$2) L: \begin{cases} y = e^t (\cos t - \sin t), \\ x = e^t (\cos t + \sin t), \end{cases} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/4.$$

Вариант 21

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 4/x^2, \\ x = 1, \quad x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = 4 \sin \varphi, \\ \rho = 2, \quad (\rho \leq 2). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = t, \\ y = 4t - t^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = e^x, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y^2 = 4 - x, \\ x = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y^2 = x^3, \\ 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} \rho = 8 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/4. \end{cases}$$

Вариант 22

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = x^2 + 2, \\ x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

$$2) \rho = 2 \cos 3\varphi.$$

$$3) \begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = \ln 2t, \\ y = 0, \quad x = e - 1. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x^2 = 4y. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2t^2, \\ y = 2 \ln t, \\ x = 0, \quad y = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} 9y^2 = 4(3-x)^3, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} y = 2(1 - \cos t), \\ x = 2(t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

Вариант 23

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 1/x, \\ y = 0, \\ x = 1, \quad x = 2. \end{cases}$$

$$2) \rho = 0,5 + \sin \varphi.$$

$$3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 2e^t - e^{2t}, \\ y = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y = \sqrt{3x/2}, \\ x = \sqrt{1-y^2}, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin 2t, \\ y = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} x^2 = 4 - y, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} \rho = 6(1 + \sin \varphi), \\ -\pi/2 \leq \varphi \leq 0. \end{cases}$$

Вариант 24

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 5/x, \\ y + x = 6, \\ x = 6. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4), \\ \rho = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4). \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t}, & y = 0, \\ x = 1/2, & x = 2. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} y^2 = (x-1)^3, \\ x = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = e^x, & y = 0, \\ x = 0, & x = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y = \frac{2}{5}x^4\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$2) L: \begin{cases} y = 4\sin^3 t, \\ x = 4\cos^3 t, & \pi/6 \leq t \leq \pi/4. \end{cases}$$

Вариант 25

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$1) \begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 2, \\ x = 0, & x = -2. \end{cases}$$

$$2) |\rho = 4 \cos 4\varphi.$$

$$3) \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^4 - t^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

2. Найти объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями: 1) вокруг оси OX; 2) вокруг оси OY

$$1) \begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ y = -2, & y = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ y = -2, & y = 2. \end{cases}$$

3. Вычислить длины дуг линий

$$1) L: \begin{cases} y^2 = (x+1)^3, \\ x = 4. \end{cases}$$

$$2) L: |\rho = 3 \sin 2\varphi$$

3 НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вариант 1

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll} 2) \int_0^{\infty} x \sin x dx; & 2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^6 + 3x^2 + 5}}; \\ 3) \int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{(1 - \sin 3x)^5}}; & 4) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}. \end{array}$$

Вариант 2

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}; & 2) \int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx; \\ 3) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x}}; & 4) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}}. \end{array}$$

Вариант 3

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx; & 2) \int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}; \\ 3) \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sqrt{1 - x^2}}; & 4) \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}. \end{array}$$

Вариант 4

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\begin{array}{ll} 1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 4x}; & 2) \int_1^{\infty} \frac{\sin(1/\sqrt[4]{x^3})}{\sqrt{x}} dx; \\ 3) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}; & 4) \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}. \end{array}$$

Вариант 5

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$$

$$2) \int_2^{\infty} \frac{x^4 dx}{(3x^5 + x^4 + 3)^8};$$

$$3) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\operatorname{arctg}^3 x};$$

$$4) \int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

Вариант 6

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x};$$

$$3) \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}};$$

$$4) \int_0^{1/2} \frac{\ln(1 + \sqrt[4]{x}) dx}{e^{\operatorname{tg} x} - 1}.$$

Вариант 7

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + \sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

Вариант 8

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln 3(x^2 + 2x)};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^5 + x^{10}}};$$

$$3) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} dx}{\sqrt[3]{9 - x^2}};$$

$$4) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos(3x^3)}}.$$

Вариант 9

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 5x}}{25x^2 + 1} dx;$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx;$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4x - x^2 - 4}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x - \sin x}}.$$

Вариант 10

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{4 dx}{x(1 + \ln^2 x)};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1 + x\sqrt{x}} dx;$$

$$3) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}};$$

$$4) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^3)^5}}.$$

Вариант 11

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln 3(x^2 + 2x)};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}};$$

$$3) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}};$$

$$4) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos(3x^3)}}.$$

Вариант 12

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 5x}}{25x^2 + 1} dx;$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} dx;$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4x - x^2 - 4}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x - \sin x}}.$$

Вариант 13

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x \, dx}{\pi(1+4x^2)};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{(x-1)}{x\sqrt{x^5+x^2+1}} \, dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{x \, dx}{1-x^4};$$

$$4) \int_0^1 \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Вариант 14

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)};$$

$$2) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$3) \int_0^{2/3} \frac{\sqrt{\ln(2-3x)} \, dx}{2-3x};$$

$$4) \int_0^1 \frac{\sin x \, dx}{1-x^2}.$$

Вариант 15

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_4^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}} \, dx;$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(1/x)}{3+x} \, dx;$$

$$3) \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 \, dx}{(1-x)\ln^2(1-x)};$$

$$4) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Вариант 16

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x(2+\ln x)^2};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/4\sqrt{x})}{\sqrt{5x-1}} \, dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{2x \sin x \, dx}{\sqrt[4]{(1-\cos x)^5}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx.$$

Вариант 17

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(8+x^3)^4}};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{2x\sqrt{x} dx}{\sin(1/x)};$$

$$3) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}};$$

$$4) \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$$

Вариант 18

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}} dx;$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{5x^4+3x^2+2};$$

$$3) \int_0^{1/3} \frac{e^{3+1/x}}{x^2} dx;$$

$$4) \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x}) dx}{e^{-x^2}-1}.$$

Вариант 19

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+7}};$$

$$2) \int_3^{\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[5]{x}} dx;$$

$$3) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}};$$

$$4) \int_0^{0,3} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\cos 5x)}.$$

Вариант 20

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4+1};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+3)(x+6)}};$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(2-4x)^3}};$$

$$4) \int_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[7]{x^5})}{e^{\sin 2x}-1} dx.$$

Вариант 21

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\pi dx}{(9x^2 + 1) \operatorname{arctg}^2 3x};$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$3) \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}};$$

$$4) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{x}}.$$

Вариант 22

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x};$$

$$2) \int_2^{\infty} \frac{3 + \arcsin(1/x)}{1+x^2} dx;$$

$$3) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{\ln^2(1+\sqrt{x})}.$$

Вариант 23

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_0^{\infty} x \cdot e^x dx;$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}};$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}};$$

$$4) \int_0^1 \frac{(e^{3x^2}-1) dx}{\sqrt{\sin^5 x}}.$$

Вариант 24

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-\infty}^0 x \cdot \sin(x^2) dx;$$

$$2) \int_1^{\infty} x^3 \cdot \operatorname{arctg}^5 \frac{\pi}{x} dx;$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-e^x};$$

$$4) \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^4-81)^5}}.$$

Вариант 25

Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$1) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 10};$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[5]{(1+x^3)^2}};$$

$$2) \int_2^{\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - \sin x}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ельцов, А.А. Интегральное исчисление: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова. – Томск: ТУСУР, 2013. – 138 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/6063> (дата обращения: 10.05.2023).
2. Ельцов, А.А. Практикум по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям: Учебное пособие [Электронный ресурс] / А.А. Ельцов, Т.А. Ельцова – Томск: ТУСУР, 2005. – 204 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/39> (дата обращения: 06.05.2023).
3. Потапов, А.П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Часть 2. Учебник и практикум для вузов / А.П. Потапов. – М. : Юрайт, 2023. – 268 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04679-3. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – Режим доступа: <https://urait.ru/bcode/515214> (дата обращения: 16.05.2023).
4. Ярушкина, Н.А. Определенный интеграл: Методические указания и задания к практическим занятиям и лабораторным работам студентов очной формы обучения по техническим направлениям подготовки бакалавриата [Электронный ресурс] / Н.А. Ярушкина, Д.Н. Черепанов. – Томск: ТУСУР, 2024. – 34 с. – Режим доступа: <https://edu.tusur.ru/publications/10871> (дата обращения: 20.06.2024).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 0$	12. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$	14. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-x}{a+x} \right + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	17. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	19. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	20. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$