Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.С. Климов, Е.В. Палешева

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе по физике
для студентов всех специальностей

Томск
2025

УДК 53.088
ББК 22.3

Рецензент:
Бакеев И.Ю., доцент кафедры физики ТУСУР,
канд. техн. наук

Климов, Александр Сергеевич
К492 Оценка погрешностей измерений: методические указания к лабораторной работе по физике для студентов всех специальностей / А.С. Климов, Е.В. Палешева. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2025. – 39 с.

В настоящей работе приводятся основные правила и методы обработки экспериментальных данных и оценки погрешности измерений.

Методические указания предназначены для использования студентами всех специальностей при подготовке, выполнении и защите лабораторных работ по физике.

Одобрено на заседании каф. физики протокол № 118 от 04.02.2025

УДК 53.088
ББК 22.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Измерение различных физических величин является составной частью любого физического эксперимента, выполняемого в рамках лабораторной работы. Под измерением понимается процесс экспериментального получения одного или более значений, которые могут быть обоснованно приписаны величине [1]. Для этого применяются различные средства измерения, как простейшие (вольтметр, амперметр, линейка, штангенциркуль, микрометр и т.д.), так и более сложные, включая различные установки, позволяющие провести одновременные измерения нескольких физических величин.

При выборе средства измерения необходимо учитывать тип измеряемой величины. Несогласование средства измерения с измеряемой величиной влечет потери в точности измерений. Например, с помощью обычной школьной линейки со шкалой от 0 до 30 см можно измерять длины различных предметов. При измерении длины карандаша может быть получен результат с точностью до 0,5 мм. При измерении длины стола потребуется несколько раз перемещать линейку – это влечет потери в точности измерений. При измерении длины комнаты линейку придется переставлять большее число раз, очевидно, что таким образом вероятность отклонения полученного результата от верного значения увеличивается. Если попытаться измерить с помощью линейки толщину листа бумаги, то возможная ошибка в измерении (0,5 мм) будет в несколько раз больше самой измеряемой величины.

Получение высокоточных результатов измерений напрямую связано с достоверностью научных результатов. В настоящее время известны различные способы повышения точности измерений: анализ и совершенствование методики измерений, повышение точности измерительных приборов и проведение повторных измерений.

Применение различных методов способствовало развитию теории обработки результатов измерений. Одни ошибки носят систематический характер, а другие – вероятностный. Поэтому при обработке результатов измерений используются различные понятия из теории вероятностей. В данном методическом пособии не рассматривается подробно теория оценки погрешностей, а приводятся лишь основные сведения необходимые для обработки результатов измерений, полученных в ходе выполнения лабораторных работ. Более подробно теория оценки погрешностей измерений приводится в работах [2-5].

1. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения различаются по количеству измеряемой информации и способу ее получения.

При классификации по **количеству измеряемой** информации учитывается число выполненных измерений для одной и той же физической величины. В этом случае измерения делятся на **однократные** и **многократные**. Однократное измерение – это измерение, проведенное один раз. Многократное измерение – измерение одной и той же физической величины, результат которого получен из нескольких, следующих друг за другом, однократных измерений. При этом **многократные измерения** делятся, в свою очередь, на **равноточные** и **неравноточные**.

Равноточными измерениями называются многократные измерения, выполненные одними и теми же средствами измерения в одних и тех же условиях. Примером равноточных измерений может служить многократное измерение длины стола одной и той же линейкой несколько раз. В этом случае и стол, и линейка, и условия окружающей среды остаются теми же самыми при каждом измерении.

Неравноточными измерениями называются многократные измерения, выполненные разными по точности средствами измерения или в различных условиях. Измерение частоты сердечных сокращений в состоянии покоя и после 10 приседаний, не будут равноточными, поскольку изменились условия проведения эксперимента. Также к неравноточным измерениям относится серия измерений диаметра трубы, когда сначала этот диаметр измеряют штангенциркулем, а затем микрометром.

По **способу получения информации** следует выделить **прямые** и **косвенные** измерения.

Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину. Другими словами, это те измерения, которые напрямую снимаются с помощью установки и приборов. К примерам прямых измерений можно отнести: падение напряжения на сопротивлении, измеряемое вольтметром, длину стержня, измеряемую линейкой, время, измеряемое секундомером или таймером установки.

Косвенные измерения не производятся с помощью установки и приборов непосредственно. Значения этих измерений получаются после расчетов. Например, если имеется физическая величина, значение которой нельзя измерить имеющимися приборами, но есть формула, по которой ее можно вычислить, при этом величины, входящие в формулу можно измерить напрямую по приборам. Тогда измерения данной физической величины являются косвенными измерениями. Например, определение площади прямоугольника – косвенное измерение. Она находится по измерению длин сторон a и b по формуле $S = ab$. Электрическое сопротивление, которое находят по измерению силы тока и напряжения, также будет косвенным измерением. Если измеряемой величиной является время t, то значение t^2 тоже является примером косвенных измерений.

2. ВИДЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешность измерений характеризует насколько точно проведено измерение.

По **форме количественного выражения** погрешности можно разделить на **абсолютные** и **относительные**.

Абсолютная погрешность – погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины. Абсолютная погрешность $\sigma(x)$ показывает, насколько результат измерения $x_{изм}$ может отличаться от истинного значения $x_{ист}$ измеряемой величины.

Смысл абсолютной погрешности можно пояснить графически (рис. 2.1). Допустим, производится измерение некоторой величины x, возможные значения которой на рисунке 2.1 представим в виде горизонтальной оси $\boldsymbol{x}$. Результат измерения данной величины, полученный посредством измерительного прибора, обозначается в виде точки $x_{изм}$ на оси. Отложив в положительную и отрицательную сторону относительно $x_{изм}$ отрезки, равные по величине абсолютной погрешности $\sigma(x)$, получается **доверительный интервал.** Истинное значение $x_{ист}$ с высокой долей вероятности находится внутри данного доверительного интервала. Таким образом, абсолютная погрешность $\sigma(x)$ измеренного значения $x_{изм}$ характеризует доверительный интервал, в котором с высокой долей вероятностью находится истинное значение $x_{ист}$.

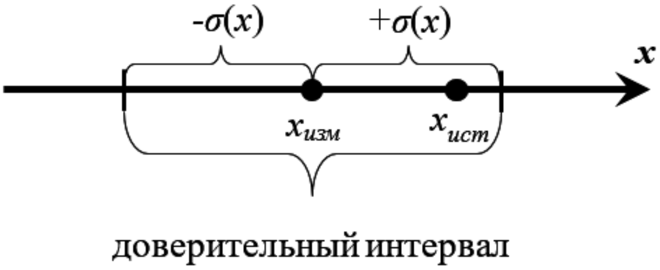


Рисунок 2.1 – Смысл абсолютной погрешности

Относительная погрешность – отношение абсолютной погрешности к самой величине:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{x}. \quad (2.1)$$

Относительная погрешность – безразмерная величина, может быть выражена в процентах.

Абсолютная погрешность ничего не говорит о качестве проводимых измерений. Качество измерения характеризует относительная погрешность. Например, одна и та же абсолютная погрешность $\sigma(x)$, равная 1 мм, при измерении длины комнаты не сыграет роли, при измерении длины стола может быть уже существенна, а при измерении диаметра болта или толщины картона совершенно недопустима. Вот именно это и характеризует относительная погрешность.

По **характеру измерения** погрешности можно разделить на **систематические** и **случайные**.

Систематическая погрешность – это погрешность, которая остается постоянной или изменяется по определенному закону при многократных равноточных измерениях (многократные измерения одной и той же величины в одних и тех же условиях).

Факторы, влияющие на систематические погрешности можно выделить в следующие группы.

Во-первых, погрешности, причина которых известна. Обычно эти погрешности связаны с методикой измерений, поэтому их можно «устранить» введением поправки. Например, при взвешивании не учитывается сила выталкивания воздуха.

Во-вторых, погрешности, также вызванные методикой измерений, но о том, что такие погрешности присутствуют, ничего не известно. Например, при измерении плотности металла определяли объем и массу. В случае наличия пустот в металле, о которых не известно, как раз и появляется такая систематическая ошибка измерения плотности.

В-третьих, погрешности, связанные с измеряемым объектом. Например, при измерении диаметра вала, имеющего неравномерный износ, однократное измерение приведет к появлению такой систематической погрешности, уменьшение которой возможно при нескольких измерениях диаметра в разных точках.

В-четвертых, погрешности измерительных приборов, связанные с их конструктивными особенностями. Например, неравномерно растянутая пружина, неравномерный шаг винта, слегка отличающиеся массы привесок и т. п.

Поскольку первые три погрешности могут быть устранены корректировкой методики измерений, то можно сказать, что в лабораторных работах фактически будут иметь место систематические ошибки 4-го типа.

Случайная погрешность – это погрешность, которая изменяется случайным образом при многократных равноточных измерениях (многократные измерения одной и той же величины в одних и тех же условиях).

Случайные погрешности меняют знак и величину в каждом измерении и не могут быть исключены введением поправок в методику измерений. Теория обработки таких погрешностей основана на теории статистической обработки полученной информации.

В дополнение к вышеописанным видам погрешностей следует добавить **грубые погрешности** измерений. Это такие погрешности, которые вызваны неаккуратностью проведенного эксперимента. Например, при измерении линейкой за начало отсчета могло быть выбрано начало линейки, а не деление с отметкой 0. При отпускании грузика могла дернуться рука. При многократных измерениях не выдерживается необходимый временной интервал, в случае, если этого требует методика измерений. При обнаружении грубых ошибок в проведении эксперимента соответствующие результаты должны быть отброшены.

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

При проведении измерений в первую очередь необходимо определить абсолютные систематические погрешности $\sigma_{\text{сист}}(x)$ всех непосредственно измеряемых величин (прямые измерения). Эти погрешности равны погрешностям приборов, применяемым для измерения соответствующих физических величин. Например, если в работе измеряется напряжение U по вольтметру, то $\sigma_{\text{сист}}(U)$ равна погрешности данного вольтметра. Рассмотрим методы определения погрешностей приборов.

3.1 Оценка погрешности измерительных приборов

Точность измерительных приборов устанавливается при производстве. Для одних эта информация содержится в паспорте прибора, для других указан класс точности γ (рис. 3.1), в некоторых случаях величина абсолютной погрешности отображена на самом приборе, а в отдельных случаях для регламентированных государственным стандартом (ГОСТ) измерительных приборов данная информация не указана (например, на линейке). Поэтому при определении погрешности измерительного прибора следует руководствоваться следующими правилами.

а) – аддитивный характер погрешности прибора; б) – прибор с существенно неравномерной шкалой; в) – прибор с мультипликативным характером погрешности

Рисунок 3.1 – Обозначения классов точностей измерительных приборов

1) Если прибор **цифровой** и на нем не содержится информация о величине абсолютной погрешности или классе точности и нет паспорта, то абсолютную погрешность такого прибора считать равной одной единице младшего разряда.

2) Если прибор **аналоговый** и на нем не содержится информация о величине абсолютной погрешности или классе точности и нет паспорта, то абсолютную погрешность такого прибора считать равной

половине цены наименьшего деления. (Например, абсолютная погрешность обычной линейки с миллиметровой шкалой составляет 0,5 мм.)

3) На секундомерах, штангенциркулях, микрометрах, нутромерах и некоторых других отмечена абсолютная погрешность, например, 0,2 с или 0,01 мм.

У приборов с аддитивным характером погрешности (рис 3.1, а), а также у приборов с существенно неравномерной шкалой (рис. 3.1, б) абсолютная погрешность определяется по формуле:

$$\sigma(x) = \frac{X_N \cdot \gamma}{100\%}, \tag{3.1}$$

где X_N — нормирующий множитель, а γ – класс точности, равный представленному числу.

На рисунке 3.1 представлено значение 1,0, следовательно, класс точности имеет значение $\gamma = \pm1\%$ (если бы было написано 0,2, то приняли бы величину $\gamma = \pm0{,}2\%$).

Нормирующий множитель выбирается с учетом типа шкалы прибора [4].

Для приборов с равномерной, практически равномерной и степенной шкалой соответствующее значение X_N можно определить по таблице 3.1.

Для приборов с существенно неравномерной шкалой (рис. 3.1, б) величину нормирующего значения принимают в соответствии с данными паспорта. Следует отметить, что такие приборы в лабораторном практикуме не используются.

При мультипликативном характере погрешности (рис. 3.1, в) абсолютная погрешность прибора определяется по формуле:

$$\sigma(x) = \frac{X \cdot \gamma}{100\%}, \tag{3.2}$$

где X — значение измеренной физической величины, а γ — класс точности, равный приведенному в кружочке числу.

Таблица 3.1 – Нормирующий множитель для приборов с равномерной, практически равномерной и степенной шкалой

Нулевое значение лежит на краю шкалы или вне ее	Нулевое значение лежит внутри диапазона измерений
X_N равно пределу измерений прибора	X_N равно большему из модулей нижнего и верхнего пределов измерений прибора
Пример	Пример
Пределы измерений шкалы прибора от 0 до 40, значит $X_N = 40$.	Пределы измерений шкалы прибора от минус 20 до 15, значит $X_N = 20$.

3.2 Оценка погрешности косвенных измерений

В тех случаях, когда производятся косвенные измерения некоторой физической величины (вычисляемой по формуле), также требуется определить как абсолютную, так и относительную погрешности таких измерений. Приведенные в этом разделе формулы справедливы как при вычислении систематической, так и случайной погрешностей.

Пусть требуется вычислить погрешность физической величины y, рассчитанной по формуле $y = y(x)$. При этом известно как значение самой величины x, так и определена ее абсолютная погрешность $\sigma(x)$. Тогда абсолютная погрешность $\sigma(y)$ величины y рассчитывается с помощью соотношения

$$\sigma^2(y) = (y'(x))^2\sigma^2(x), \quad (3.3)$$

где $y'(x)$ – производная функции y. Выполнив несложные преобразования выражения (3.3), получаем

$$\sigma(y) = |y'(x)|\,\sigma(x), \quad (3.4)$$

где $|y'(x)|$ – модуль производной функции y.

Таким образом, если измеряемая величина y зависит только от одной переменной x, то вычисление абсолютной погрешности $\sigma(y)$ выполняется по формуле (3.4). Относительная погрешность $\varepsilon(y)$ рассчитывается с учетом формулы (2.1) и равна

$$\varepsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{y}. \qquad (3.5)$$

Например, пусть требуется рассчитать абсолютную погрешность величины $y = t^2$, где t – время, измеряемое в секундах с погрешностью $\sigma(t) = 0{,}1$ с. Подставляя вместо x в формуле (3.4) переменную t, а вместо $y'(x)$ значение $y' = (t^2)' = 2t$, получим

$$\sigma(t^2) = 2t\sigma(t).$$

Как видно из полученного выражения, для расчета величины $\sigma(t^2)$ необходимо учитывать измеренное значение времени t. Если при измерении было получено значение $t = 0{,}8$ с, то

$$\sigma(t^2) = 2 \cdot 0{,}8 \cdot \sigma(t) = 0{,}16 \text{ с.}$$

Пусть теперь величина y зависит от двух физических величин x_1 и x_2, другими словами $y = y(x_1, x_2)$. Значения x_1 и x_2, а также их абсолютных погрешностей $\sigma(x_1)$ и $\sigma(x_2)$, предполагаются известными. Тогда абсолютная погрешность $\sigma(y)$ величины y рассчитывается с помощью выражения

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2), \qquad (3.6)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ являются частными производными функции $y(x_1, x_2)$. Извлекая квадратный корень в выражении (3.6), получим

$$\sigma(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2)}\,. \qquad (3.7)$$

Относительная погрешность $\varepsilon(y)$ вычисляется по формуле (3.5).

Для функции многих переменных $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получаем следующую формулу для вычисления абсолютной погрешности

$$\sigma(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma^2(x_n)}\,. \quad (3.8)$$

Относительная погрешность $\varepsilon(y)$ также в этом случае вычисляется по формуле (3.5).

Рассмотрим пример. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = ab$. Измерены значения $a = 0{,}25$ м и $b = 0{,}4$ м, при этом $\sigma(a) = \sigma(b) = 0{,}0005$ м.

Вычисляя площадь, получаем $S = 0{,}1$ м^2. Выведем формулу для расчета $\sigma(S)$. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = a.$$

Подставляя полученные значения частных производных в формулу (3.7), находим

$$\sigma(S) = \sqrt{b^2\sigma^2(a) + a^2\sigma^2(b)}\,. \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.9) полученные при измерении значения a, b и их абсолютных погрешностей, окончательно получаем

$$\sigma(S) = \sqrt{0{,}4^2 \cdot 0{,}0005^2 + 0{,}25^2 \cdot 0{,}0005^2} \approx 0{,}00024 \text{ м}^2.$$

Используя формулу (3.5), вычисляем относительную погрешность $\varepsilon(S) = \sigma(S)/S$. Получаем $\varepsilon(S) = 0{,}0024$, данный результат также можно записать в процентах от исходного значения S, имеем $\varepsilon(S) = 0{,}24\%$.

Для того, чтобы каждый раз не использовать формулы (3.7) или (3.8), в таблице 3.2 представлены уже рассчитанные значения абсолютных и относительных погрешностей для некоторых основных элементарных функций y.

При этом следует учитывать, что в представленных в таблице формулах можно заменять абсолютные погрешности на относительные, а относительные на абсолютные с учетом соотношений (2.1) и (3.5).

Таблица 3.2 – Формулы для нахождения погрешностей косвенных измерений для некоторых элементарных функций.

Функция	Абсолютная погрешность, $\sigma(y)$	Относительная погрешность, $\varepsilon(y)$
$y = x_1 \pm x_2$	$\sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2)}$	$\sigma(y)/y$
$y = x_1 x_2$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$\sqrt{\varepsilon^2(x_1) + \varepsilon^2(x_2)}$
$y = x_1/x_2$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$\sqrt{\varepsilon^2(x_1) + \varepsilon^2(x_2)}$
$y = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2(x_k)}$
$y = \frac{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_m}$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^2(z_i)}$
$y = x^n$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$n \cdot \varepsilon(x)$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y \cdot \varepsilon(y)$	$\varepsilon(x)/n$
$y = \ln x$	$\varepsilon(x)$	$\sigma(y)/y$
$y = \mathrm{e}^x$	$\mathrm{e}^x \cdot \sigma(x)$	$\sigma(x)$

3.3 Оценка систематической погрешности

Систематическая погрешность по способу получения информации подразделяется на систематическую погрешность прямых измерений и систематическую погрешность косвенных измерений.

Как уже было сказано, абсолютная систематическая погрешность $\sigma_{\text{сист}}(x)$ прямых измерений равна абсолютной погрешности прибора, с помощью которого проводились измерения (раздел 3.1).

Тогда относительная систематическая погрешность $\varepsilon_{\text{сист}}(x)$ прямых измерений, с учетом формулы (2.1), равна

$$\varepsilon_{\text{сист}}(x) = \frac{\sigma_{\text{сист}}(x)}{x}, \tag{3.10}$$

где x – измеренное значение физической величины.

Зная абсолютную систематическую погрешность **прямых** измерений, можно рассчитать абсолютную систематическую погрешность **косвенных** измерений, используя формулы раздела 3.2.

3.4 Оценка случайной погрешности

Пусть при многократных измерениях некоторой физической величины x получено n значений: $x_1, x_2, \dots, x_n$. В качестве значения величины x принимают ее среднее:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{3.11}$$

Абсолютная погрешность случайной величины x определяется по формуле

$$\sigma_{\text{сл}}(x) = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \langle x \rangle)^2}\,, \tag{3.12}$$

где $\langle x \rangle$ – среднее значение величины x, вычисляемое по формуле (3.11), а $t_{\alpha,n}$ – коэффициент Стьюдента, с доверительной вероятностью α и n измерениями, представленный в таблице 3.3.

Для определения значения коэффициента Стьюдента можно принимать $\alpha = 0{,}95$.

Например, если принять $\alpha = 0{,}95$ и выполнить 7 измерений, то из таблицы 3.3 получаем $t_{\alpha,n} = 2{,}45$. В случае $\alpha = 0{,}98$ при тех же семи измерениях получим $t_{\alpha,n} = 3{,}14$.

Для определения относительной погрешности случайной величины x примем во внимание формулы (2.1) и (3.12). Получаем:

$$\varepsilon_{\text{сл}}(x) = \frac{\sigma_{\text{сл}}(x)}{\langle x \rangle}\,. \tag{3.13}$$

Здесь $\langle x \rangle$ вычисляется по формуле (3.11), а $\sigma_{\text{сл}}(x)$ – с помощью выражения (3.12).

Таблица 3.3 – Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$ с доверительной вероятностью α и n измерениями.

n	Доверительная вероятность α								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,0	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	0,82	1,06	1,39	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	0,77	0,98	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	0,74	0,94	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	0,73	0,92	1,16	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	6,87
7	0,72	0,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	0,71	0,90	1,12	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	0,71	0,89	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	0,70	0,88	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
15	0,69	0,87	1,08	1,35	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
20	0,69	0,86	1,07	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
25	0,69	0,86	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
30	0,68	0,85	1,06	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
40	0,68	0,85	1,05	1,30	1,69	2,02	2,43	2,71	3,56
60	0,68	0,85	1,05	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	0,68	0,85	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37

Рассмотрим пример. Пусть проведено 5 измерений времени t и получены следующие результаты: $t_1 = 1{,}2$ с, $t_2 = 1{,}3$ с, $t_3 = 1{,}2$ с, $t_4 = 1{,}5$ с и $t_5 = 1{,}1$ с. Тогда по формуле (3.11) находим

$$\langle t \rangle = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} t_k = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5} = 1{,}26 \text{ с.}$$

Таким образом, $\langle t \rangle = 1{,}26$ с.

Вычислим значение $\sigma_{\text{сл}}(t)$, используя формулу (3.12). Имеем

$$\sigma_{сл}(t) = t_{\alpha,n} \cdot \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{k=1}^{5} (t_k - \langle t \rangle)^2} \,. \qquad (3.14)$$

Вычисляя значение, стоящее под знаком корня в выражении (3.14), получаем

$$\frac{(t_1 - \langle t \rangle)^2 + (t_2 - \langle t \rangle)^2 + (t_3 - \langle t \rangle)^2 + (t_4 - \langle t \rangle)^2 + (t_5 - \langle t \rangle)^2}{20} =$$

$$= \frac{(-0{,}06)^2 + 0{,}04^2 + (-0{,}06)^2 + 0{,}24^2 + (-0{,}16)^2}{20} = 0{,}0046.$$

Подставим этот результат в соотношение (3.14), учитывая, что для 5 измерений и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ коэффициент Стьюдента равен $t_{\alpha,n} = 2{,}78$ (см. таблицу 3.3). Получим

$$\sigma_{сл}(t) = 2{,}78 \cdot \sqrt{0{,}0046} \approx 0{,}19 \text{ с}.$$

С помощью формулы (3.13) вычислим относительную случайную погрешность измерения времени:

$$\varepsilon_{сл}(t) = \frac{\sigma_{сл}(t)}{\langle t \rangle} = \frac{0{,}19}{1{,}26} \approx 0{,}15 = 15 \,\% \,. \qquad (3.15)$$

3.5 Оценка суммарной погрешности

Поскольку при измерении физической величины присутствуют как систематические, так и случайные ошибки, необходимо определять суммарную погрешность измерения, учитывающую оба вида ошибок. Так необходимо делать во всех случаях многократных измерений, выполненных при одинаковых условиях. В случае однократных измерений невозможно рассчитать случайную погрешность, поэтому в таких ситуациях фактически рассчитывают только систематическую погрешность.

Пусть $\sigma_{сист}(x)$ – абсолютная систематическая погрешность измерения физической величины x, $\sigma_{сл}(x)$ – ее абсолютная случайная погрешность измерения, вычисленная с помощью формулы (3.12).

Тогда суммарная (общая) абсолютная погрешность измерения величины x определяется по формуле

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2(x) + \sigma_{\text{сл}}^2(x)}\,. \tag{3.16}$$

Следует отметить, если одно из слагаемых в формуле (3.16) на несколько порядков меньше другого, то им можно пренебречь для упрощения расчетов. Это связано с тем, что вклад меньшего слагаемого будет устранен после округления итогового результата. Например, пусть для некоторой физической величины x в результате пяти измерений получено $\sigma_{\text{сист}}(x) = 0{,}01$ м, $\sigma_{\text{сл}}(x) = 0{,}0028$ м. Тогда по формуле (3.16) находим

$$\sigma(x) = \sqrt{10^{-4} + 7{,}84 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}01 \text{ м}.$$

При вычислении этой погрешности можно было пойти другим путем, отбросив слагаемое со случайной погрешностью в соотношении (3.16). Это допустимо, так как $0{,}0028^2 \ll 0{,}01^2$. В результате такого подхода получается, что $\sigma(x) \approx \sigma_{\text{сл}}(x) = 0{,}01$ м. Получен тот же самый результат, но вычисления существенно упрощаются.

Общую относительную погрешность определяем в соответствии с формулой (3.5), имеем

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{\langle x \rangle}, \tag{3.17}$$

где $\sigma(x)$ – общая абсолютная погрешность, а $\langle x \rangle$ – среднее значение величины x.

3.6 Приближенная запись результата измерений

В процессе обработки экспериментальных данных приходится сталкиваться с округлением результата вычислений. Так как данная операция непременно добавляет определенную погрешность, приняты основные правила приближенной записи промежуточных и итоговых результатов измерений и вычислений. Рассмотрим эти правила.

1) При проведение прямых измерений **не допускается** никаких округлений полученных результатов.
2) Значащими цифрами числа являются все цифры от единицы до девяти, а нуль считается значащей цифрой, только если он рас-

положен в середине или в конце числа. **Все нули, стоящие в начале числа, не являются значащими.** Например, в числе 0,00405 три значащих цифры и первой значащей цифрой является 4. В числе 20,12 – четыре значащих цифры, первой из них является 2. В числе 1,030 – четыре значащих цифры.

3) Все вычисления, проводимые в результате обработки экспериментальных данных, необходимо проводить таким образом, чтобы количество значащих цифр вычисляемого значения было на порядок больше исходных чисел. Например, при проведении измерений получены значения 2,31, 2,45 и 2,27. Среднее арифметическое этого результата следует округлить до 4-й значащей цифры (на одну значащую цифру больше):

$$\frac{2{,}31 + 2{,}45 + 2{,}27}{3} = 2{,}34(3) \approx 2{,}343\,.$$

4) Другой пример, $\sqrt{2{,}43} \approx 1{,}559$ – **верная запись**, а такие записи, как $\sqrt{2{,}43} \approx 1{,}56$ и $\sqrt{2{,}43} \approx 1{,}5588$, не являются верными.
5) Абсолютная суммарная погрешность округляется по правилу: **если первая значащая цифра меньше четырех (1, 2 или 3), то в числе оставляют две значащих цифры, иначе оставляют одну значащую цифру**. Например, получено значение абсолютной погрешности $\sigma(I) = 0{,}0204$ А. В этом случае необходимо записать $\sigma(I) \approx 0{,}020$ А. Если $\sigma(I) = 0{,}00504$ А, тогда полагаем $\sigma(I) \approx 0{,}005$ А. В том случае, когда $\sigma(I) = 0{,}0375$ А, положим $\sigma(I) \approx 0{,}038$ А.
6) **Порядок округления результата вычислений некоторой величины равен порядку округления ее абсолютной погрешности.** Например, рассчитано значение напряжения $U = 14{,}25$ В и погрешности $\sigma(U) \approx 0{,}5$ В. Тогда необходимо округлить напряжение $U \approx 14{,}3$ В.

3.7 Примеры оценки погрешности измерений.

Рассмотрим примеры расчета суммарной погрешности измерений.

Пример 1. Проведено 4 измерения времени, за которое маятник совершает один оборот, получены следующие значения: $t_1 = 1{,}8$ с, $t_2 = 1{,}83$ с, $t_3 = 1{,}82$ с, $t_4 = 1{,}79$ с. Измерения проводились по цифровому прибору, единица младшего разряда равна 0,01 с. Рассчитать абсолютную и случайную погрешности времени, за которое маятник совершил один оборот.

По показаниям прибора определяем систематическую погрешность измерения. Так как для измерения использовался цифровой прибор, то $\sigma_{\text{сист}}(t) = 0{,}01$ с.

Рассчитаем случайную погрешность по формуле (3.12). Для этого, сначала вычислим среднее значение времени по формуле (3.11):

$$\langle t \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} t_k = \frac{1{,}8 + 1{,}83 + 1{,}82 + 1{,}79}{4} = 1{,}81 \text{ с.}$$

Учитывая, что для 4 измерений и доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$ коэффициент Стъюдента, определенный по таблице 3.3, принимает значение $t_{\alpha,n} = 3{,}18$, по формуле (3.12) получаем

$$\sigma_{\text{сл}}(t) = 3{,}18 \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 3}\sum_{k=1}^{4}(t_k - \langle t \rangle)^2} =$$

$$= 3{,}18 \cdot \sqrt{\frac{(t_1 - \langle t \rangle)^2 + (t_2 - \langle t \rangle)^2 + (t_3 - \langle t \rangle)^2 + (t_4 - \langle t \rangle)^2}{12}} =$$

$$= 3{,}18 \cdot \sqrt{\frac{(-0{,}01)^2 + (0{,}02)^2 + (0{,}01)^2 + (-0{,}02)^2}{12}} \approx 0{,}029 \text{ с.}$$

Общая погрешность рассчитывается по формуле (3.16):

$$\sigma(t) = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}029^2} \approx 0{,}031 \text{ с}.$$

Теперь рассчитаем общую относительную погрешность времени. По формуле (3.17) находим

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\langle t \rangle} = \frac{0{,}031}{1{,}81} \approx 0{,}017.$$

В процентах получаем $\varepsilon(t) \approx 0{,}017 \cdot 100 = 1{,}7\%$.

Пример 2. Проведено 6 измерений времени, за которое маятник совершает один оборот, получены следующие значения: $t_1 = 1{,}8$ с, $t_2 = 1{,}83$ с, $t_3 = 1{,}82$ с, $t_4 = 1{,}79$ с, $t_5 = 1{,}81$ с, $t_6 = 1{,}83$ с. По показаниям прибора получена абсолютная систематическая погрешность измерения времени $\sigma_{\text{сист}}(t) = 0{,}01$ с. Рассчитать общую погрешность величины $\langle t\rangle^2$, где $\langle t\rangle$ – среднее время, за которое маятник совершает один оборот.

Величина $\langle t\rangle^2$ не измерялась напрямую с приборов, поэтому в данном случае имеем дело с косвенными измерениями. В таком случае необходимо получить формулу для вычисления абсолютной погрешности, используя правила определения погрешностей косвенных измерений (раздел 3.2, с. 11-13).

Так как производная функции $y = \langle t\rangle^2$ по переменной $\langle t\rangle$ определяется соотношением

$$y' = \frac{d(\langle t\rangle^2)}{d\langle t\rangle} = 2\langle t\rangle,$$

то по формуле (3.4) находим

$$\sigma(\langle t\rangle^2) = 2\langle t\rangle \cdot \sigma(t). \tag{3.18}$$

Рассчитаем среднее значение времени по формуле (3.11), получаем $\langle t\rangle \approx 1{,}81$ с.

Далее, используя соотношение (3.12) и учитывая, что коэффициент Стьюдента при $n = 6$ и $\alpha = 0{,}95$ равен 2,57, получим общую абсолютную погрешность измерения времени $\sigma(t) = 0{,}018$ с.

В итоге, подставляя полученные значение в соотношение (3.18), получим

$$\sigma(\langle t\rangle^2) = 2\langle t\rangle \cdot \sigma(t) = 2 \cdot 1{,}81 \cdot 0{,}018 \approx 0{,}07 \text{ с}^2.$$

Относительную погрешность $\varepsilon(\langle t\rangle^2)$ найдем по формуле (3.5), имеем

$$\varepsilon(\langle t\rangle^2) = \frac{\sigma(\langle t\rangle^2)}{\langle t\rangle^2} = \frac{0{,}07}{1{,}81^2} \approx 0{,}021 = 2{,}1\%.$$

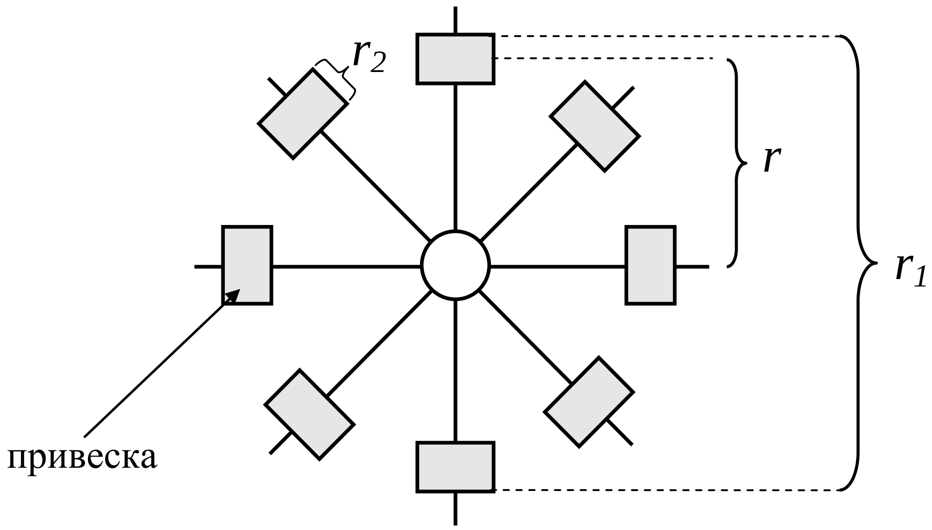
Пример 3. Получено расстояние $r = 12{,}2$ см от центра оси маятника до центра привески (см. рис. 3.1) как половина разности расстояний r_1 и r_2:

$$r = \frac{r_1 - r_2}{2},$$

где $r_1 = 26{,}2$ см, а $r_2 = 1{,}8$ см. Измерение проводилось по линейке. Привески расположены на одинаковом расстоянии от оси маятника и их массы равны 50 г. По формуле

$$I = 8mr^2 \quad (3.19)$$

рассчитан момент инерции привесок $I = 59{,}536$ кг $\cdot$ см^2, где m – масса одной привески. Определить погрешность измерения момента инерции привесок.



r – расстояние от оси маятника до центра привески, r_1 – первое измеряемое расстояние, r_2 – толщина привески.

Рисунок 3.1 – Маятник с восьмью привесками, расположенными на одинаковом расстоянии от оси и имеющими одинаковую массу.

Заметим, что вычисления как момента инерции привесок, так и расстояния от центра оси маятника до центра привески являются косвенными измерениями. Поскольку расстояние измерялось однократно, то в данном случае будет отсутствовать расчет случайной погрешности. Так как производная величины I, заданной соотношением (3.19), по аргументу r определяется выражением

$$\frac{dI}{dr} = 8m \cdot 2r = 16mr,$$

то, в соответствии с формулой (3.4), имеем

$$\sigma(I) = 16mr \cdot \sigma(r). \qquad (3.20)$$

Для вычисления абсолютной погрешности $\sigma(r)$ найдем производные функции

$$r(r_1, r_2) = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

по аргументам r_1 и r_2. Для того, чтобы найти производную функции $r(r_1, r_2)$ по переменной r_1 необходимо r_2 рассматривать как константу, тогда получаем

$$\frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{1}{2}. \qquad (3.21)$$

При нахождении производной $r(r_1, r_2)$ по переменной r_2 принимаем r_1 за константу, имеем

$$\frac{\partial r}{\partial r_2} = -\frac{1}{2}. \qquad (3.22)$$

Тогда по формуле (3.7) находим

$$\sigma(r) = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial r_1}\right)^2 \sigma^2(r_1) + \left(\frac{\partial r}{\partial r_2}\right)^2 \sigma^2(r_2)}\,. \qquad (3.23)$$

Подставляя (3.21) и (3.22) в соотношение (3.23), получаем

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2(r_1) + \frac{1}{4}\sigma^2(r_2)} = \sqrt{\frac{2\sigma^2(\bar{r})}{4}} = \frac{\sigma(\bar{r})}{\sqrt{2}}, \qquad (3.23)$$

где $\sigma(\bar{r})$ – обозначение для погрешности линейки, с помощью которой были измерены r_1 и r_2.

Поскольку линейка не является цифровым прибором и не имеет класса точности, ее погрешность равна половине цены наименьшего деления. Значит $\sigma(\bar{r}) = 0{,}05$ см. Подставляя данный результат в (3.23), найдем абсолютную погрешность $\sigma(r) \approx 0{,}04$ см.

Таким образом, по формуле (3.20) найдем абсолютную погрешность момента инерции привесок:

$$\sigma(I) = 16mr \cdot \sigma(r) = 16 \cdot 0{,}05 \cdot 12{,}2 \cdot 0{,}04 \approx 0{,}39 \text{ кг} \cdot \text{см}^2. \qquad (3.20)$$

Округление результата проведено в соответствии с правилами записи приближенных результатов вычислений (см. раздел 3.6).

Поскольку погрешность $\sigma(I)$ записана с точностью до сотых, то и значение момента инерции привесок также необходимо округлить до сотых. Таким образом, получаем

$$I = 59{,}54 \pm 0{,}39 \text{ кг} \cdot \text{см}^2. \qquad (3.20)$$

Относительную погрешность находим по формуле (3.5):

$$\varepsilon(I) = \frac{\sigma(I)}{I} = \frac{0{,}39}{59{,}54} \approx 0{,}007 = 0{,}7\%.$$

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

В процессе обработки результатов измерений возникает необходимость графического отображения полученных данных. Визуализация функциональной зависимости измеренных величин позволяет оценить согласие или расхождение имеющихся результатов с изучаемыми физическими законами. Построение графической картины, характеризующей экспериментальные данные, проводится в соответствии с представленными положениями.

4.1 Основные правила построение графиков функций.

Перед началом построения экспериментальной зависимости, например $y = f(x)$, **необходимо оценить пределы изменения величин** y и x для правильного выбора масштаба графика на каждой оси.

Пусть для построения траектории движения некоторого объекта проведено измерение зависимости его перемещения S от времени t. Полученные значения величины t лежат в интервале от 4 до 9 секунд, а величины S в промежутке от 30 до 80 метров. Предельные значения координатных осей выбраны правильно при построении экспериментальной зависимости, представленной на рисунке 4.1.

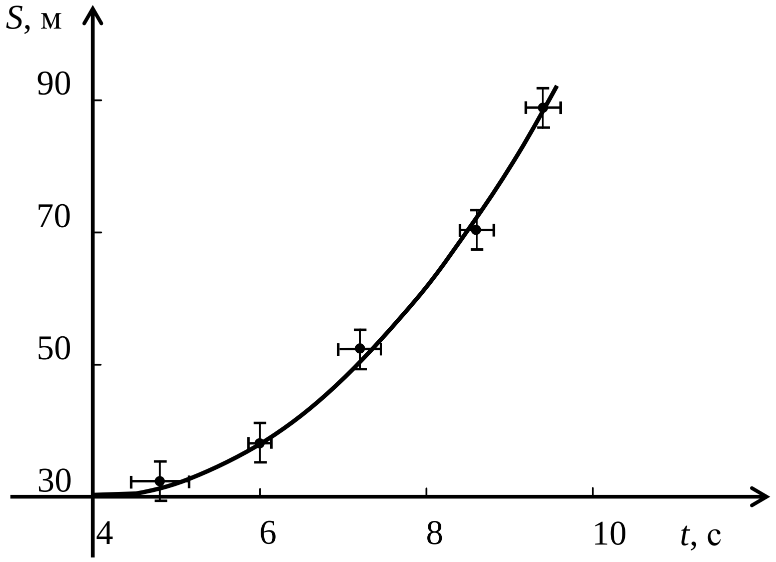


Рисунок 4.1 – Правильно построенный график зависимости $S = f(t)$.

На рисунке 4.2 представлен некорректный выбор масштаба такого же графика.

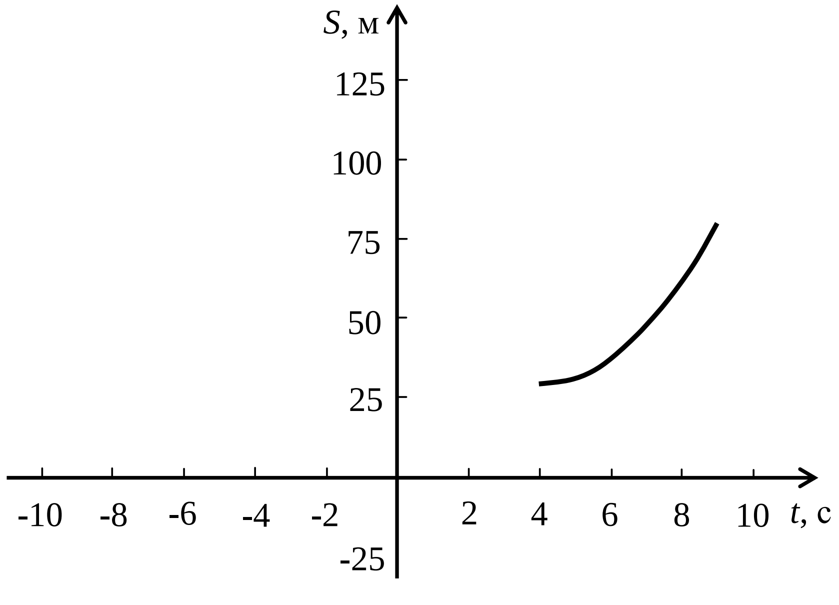


Рисунок 4.2 – Функция $S = f(t)$, масштаб осей выбран неправильно.

На следующем шаге **отмечаем на осях отрезки равной длины**. На рисунке 4.1 по оси абсцисс это точки 4, 6, 8 и 10, а по оси ординат

– 30, 50, 70 и 90. Обратите внимание, что **масштаб оси ординат может не совпадать с масштабом оси абсцисс**.

Далее **делаем подписи к осям с обязательным указанием размерностей отмечаемых величин**, например: $S,$ м и $t,$ с (рис. 4.1) или φ, рад и $t,$ с (рис. 4.3).

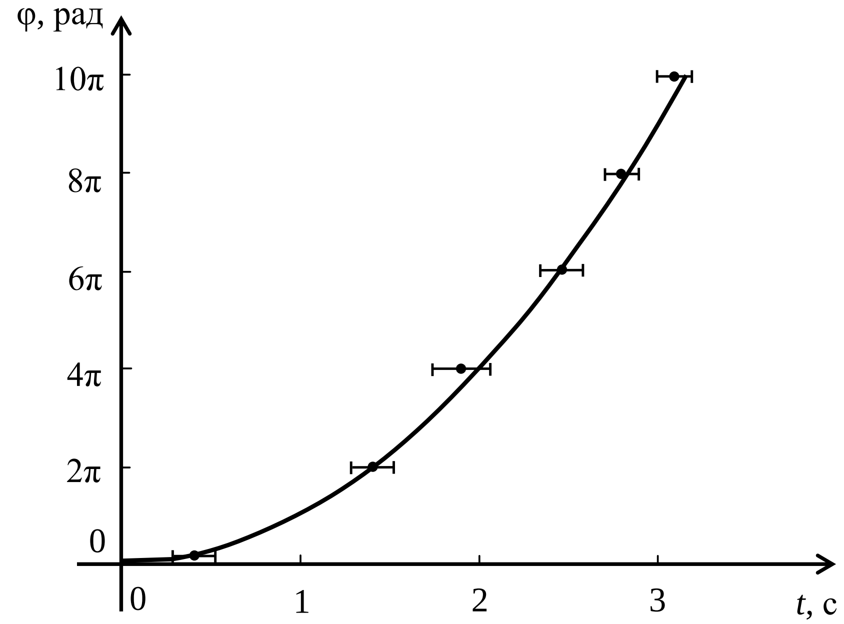


Рисунок 4.3 – Зависимость угла поворота маятника от времени. Доверительные интервалы отмечены только по переменной t, так как $\sigma(\varphi)$ слишком мала в масштабах графика.

На следующем этапе **отмечаем экспериментальные точки**.

После этого **строим доверительные интервалы**. При построении доверительного интервала по оси x необходимо отступить влево и вправо от точки на величину, равную абсолютной погрешности $\sigma(x)$, которая рассчитана для данного значения. Получим интервал длинной $2\sigma(x)$. При построении доверительного интервала по оси y отступите вверх и вниз от точки на величину, равную абсолютной погрешности $\sigma(y)$. Будет отмечен интервал длинной $2\sigma(y)$. Доверительные интервалы должны быть отмечены для каждой экспериментальной точки, рис. 4.1. В том случае, когда рассчитанная погрешность слишком мала в масштабах графика (длина интервала сравнима с точкой), она не отображается. На рисунке 4.1 доверительные интервалы отмечены у каждой точки, как по оси абсцисс, так и по оси ординат. На рисунке 4.3 доверительные интервалы отмечены только по оси ординат.

Теперь можно **проводить экспериментальную кривую**, которая должна пройти максимально близко к точкам через все доверительные интервалы (рис. 4.1 и 4.3). На рисунке 4.3 кривая проходит через начало координат, подчеркивая параболический характер изменения угла поворота маятника, который в начальный момент равен нулю.

4.2 Метод линеаризации

В результате обработки данных проведенного эксперимента кроме оценки погрешностей измерений и визуализации функциональной зависимости должен быть получен ответ на вопрос о согласии полученных эмпирических данных с проверяемым физическим законом. В тех случаях, когда полученная зависимость отличается от линейной (см. рис. 4.1, 4.3), достаточно сложно сделать вывод о характере взаимодействия. Графики, представленные на рисунках 4.1 и 4.3, могут являться как частью параболы, так и частью какой-либо другой кривой, например, кубической параболы, гиперболы, синусоиды. Данная проблема решается достаточно просто, если использовать **метод линеаризации** проверяемой функциональной зависимости. Рассмотрим этот метод на примере.

Пусть исследуется зависимость угла поворота маятника φ от времени t. Теоретическая зависимость представлена формулой

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2} t^2, \tag{4.1}$$

где ε – угловое ускорение маятника. Выполним линеаризацию этого соотношения. Положим $y = \varphi$ и $x = t^2$. Поскольку для линейной зависимости справедливо

$$y = ax + b, \tag{4.2}$$

где a – угловой коэффициент, а b – свободный член прямой, то сравнивая выражения (4.1) и (4.2) можно определить, что

$$a = \frac{\varepsilon}{2}, \quad b = 0. \tag{4.3}$$

Таким образом, при построении экспериментальной зависимости в координатах φ и t^2 (φ откладывается по оси ординат, а t^2 – по оси абсцисс) должна получиться прямая, угловой коэффициент и свободный член которой связаны соотношением (4.3) с остальными параметрами проверяемой теоретической зависимости (4.1). Данная прямая строится по общим правилам построения графиков функций, представленных в разделе 4.1. Для этого сначала отмечаются точки и их доверительные интервалы (рис. 4.4), а затем через все доверительные интервалы максимально близко к точкам с помощью линейки проводится прямая линия (рис. 4.5).

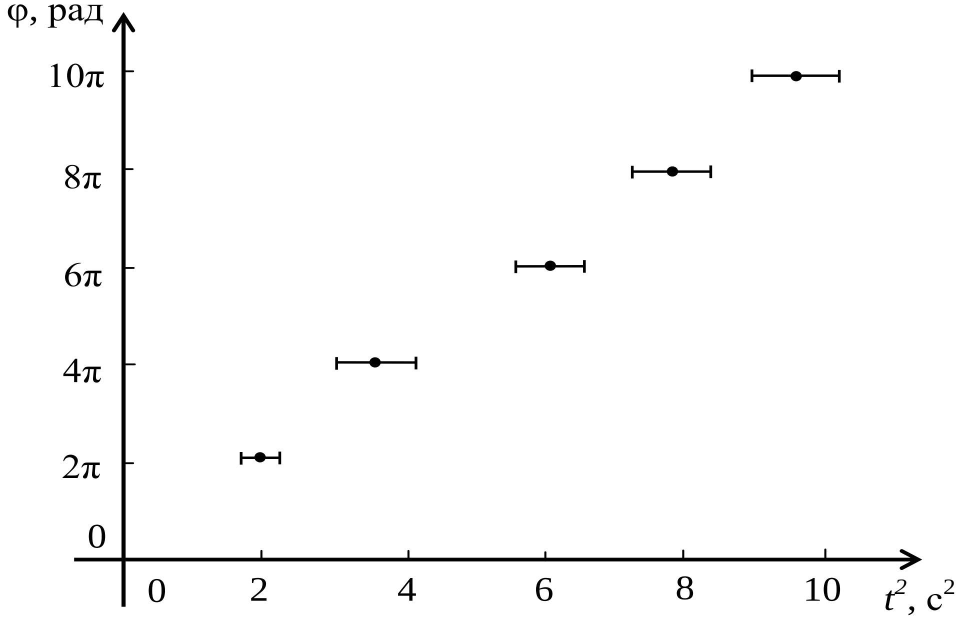


Рисунок 4.4 – Экспериментальные точки зависимости числа оборотов маятника от квадрата времени.

В тех случаях, когда можно провести прямую через все доверительные интервалы, делается вывод о согласии экспериментальных данных с проверяемым законом (4.1). Если это сделать не удалось, то либо в ходе эксперимента была допущена ошибка, либо проверяемый закон не подтверждается.

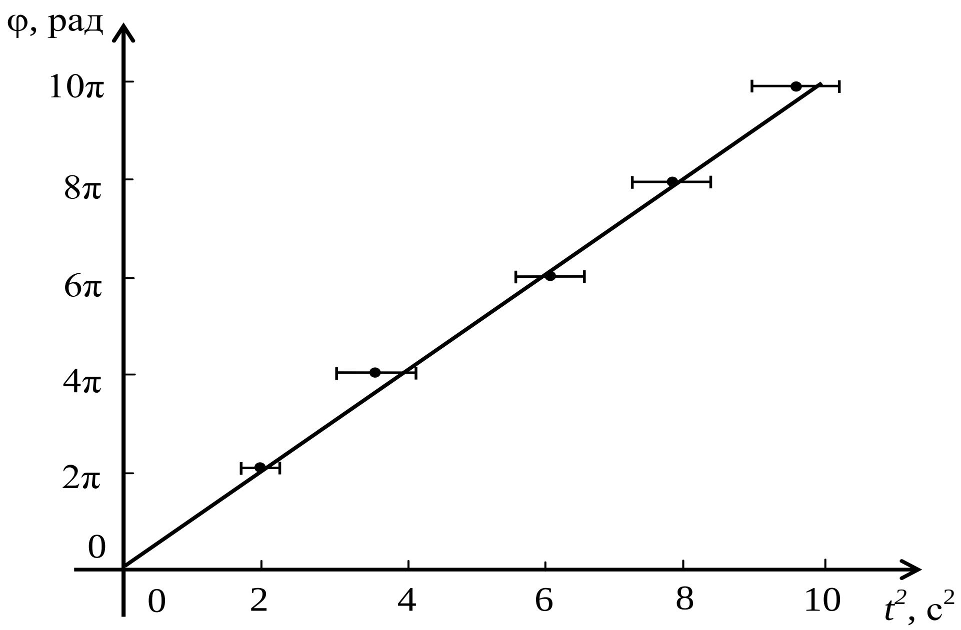


Рисунок 4.5 – Линеаризованный график зависимости числа оборотов маятника от квадрата времени.

Заметим, что в соответствии с формулами (4.1) – (4.3) можно рассчитать угловое ускорение маятника, если определить угловой коэффициент построенной прямой. Для этого ***на прямой*** выбирают две точки A и B таким образом, чтобы их координаты могли быть точно определены. Лучше всего выбирать такие точки в узлах координатной сетки или на середине между узлами, так как погрешность определения координаты любой точки будет равна половине цены деления. Например, на рисунке 4.6 точка A имеет координаты (2; 2π), а точка B – (6; 6π). После того, как выбраны точки A и B, отмечают точку C так, чтобы получился прямоугольный треугольник ABC. Угловой коэффициент прямой $y = ax + b$ равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси ординат, а значит $a = \mathrm{tg}\,\alpha$, где $\alpha = \angle BAC$ треугольника ABC. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению его катетов, поэтому

$$a = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{6\pi - 2\pi}{6 - 2} = \pi \approx 3{,}14 \text{ рад/с}^2.$$

После этого с помощью формулы (4.1) можно найти угловое ускорение $\varepsilon = 2a \approx 2 \cdot 3{,}14 \approx 6{,}28\,\text{рад/с}^2$.

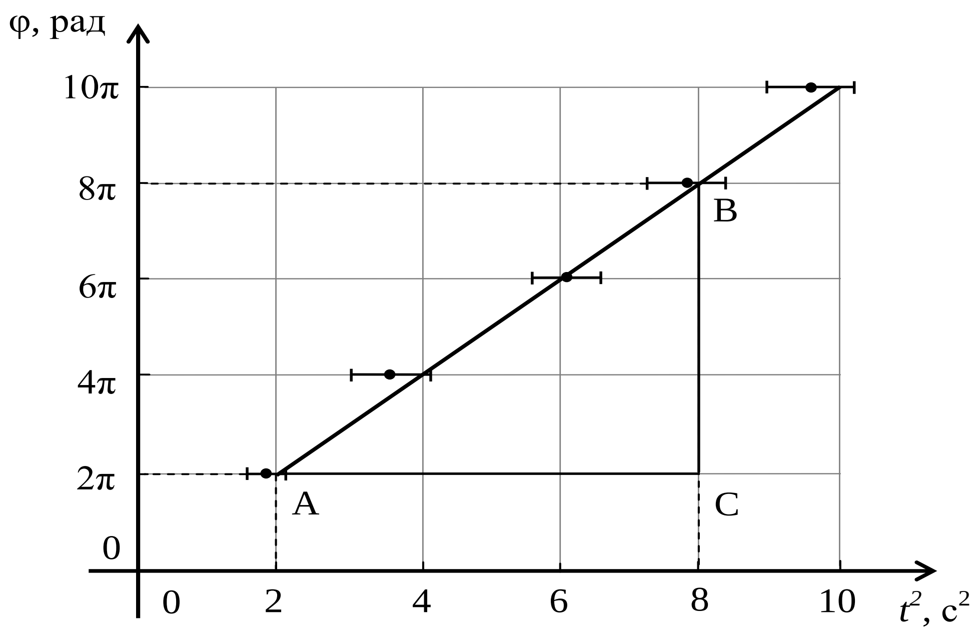


Рисунок 4.6 – Определение углового коэффициента прямой.

Заметим, что определение углового коэффициента прямой указанным способом приводит к большой погрешности $\sigma(a)$, так как погрешность измерения координат точек A и B равна половине цены деления осей абсцисс и ординат, соответственно. В данном примере погрешность определения координаты по оси абсцисс равна 1 с^2, а по оси ординат π радиан. При выборе другой цены деления на графике такая погрешность может быть уменьшена.

В приведенном примере линеаризации соотношения (4.1) выбор величин $y = \varphi$ и $x = t^2$ был достаточно очевиден. Иногда требуется предварительно выполнить ряд преобразований над линеаризуемым соотношением, прежде чем выбрать величины, откладываемые по осям координат. Рассмотрим еще один пример линеаризации.

Пусть исследуется зависимость тока I диода в вакууме от задерживающего напряжения U между катодом и анодом. Данный процесс описывается уравнением

$$I = I_0 e^{-\frac{eU}{kT}}, \tag{4.4}$$

где I_0 соответствует значению тока при отсутствии задерживающего напряжения, e – модуль заряда электрона, k – постоянная Больцмана, а T – абсолютная температура. Линеаризуем соотношение (4.4). Имеем

$$\frac{I_0}{I} = e^{\frac{eU}{kT}} .$$

Прологарифмировав данное выражение, находим

$$\ln\frac{I_0}{I} = \frac{eU}{kT} . \tag{4.5}$$

Воспользовавшись свойством логарифмов, окончательно получим

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{e}{kT} \cdot U . \tag{4.6}$$

Далее, используя замену переменных $y = \ln I$ и $x = U$, получим линеаризованное уравнение $y = ax + b$, в котором

$$a = -\frac{e}{kT}, \quad b = \ln I_0 . \tag{4.7}$$

4.3 Метод наименьших квадратов

В некоторых случаях при построении прямой, проходящей через доверительные интервалы экспериментальных точек, возникает ситуация, когда можно провести несколько таких прямых (см. рис. 4.7). Возникает вопрос: какую из этих прямых брать. Для этих целей существует метод наименьших квадратов, с помощью которого можно построить оптимальную прямую, проходящую через все экспериментальные точки.

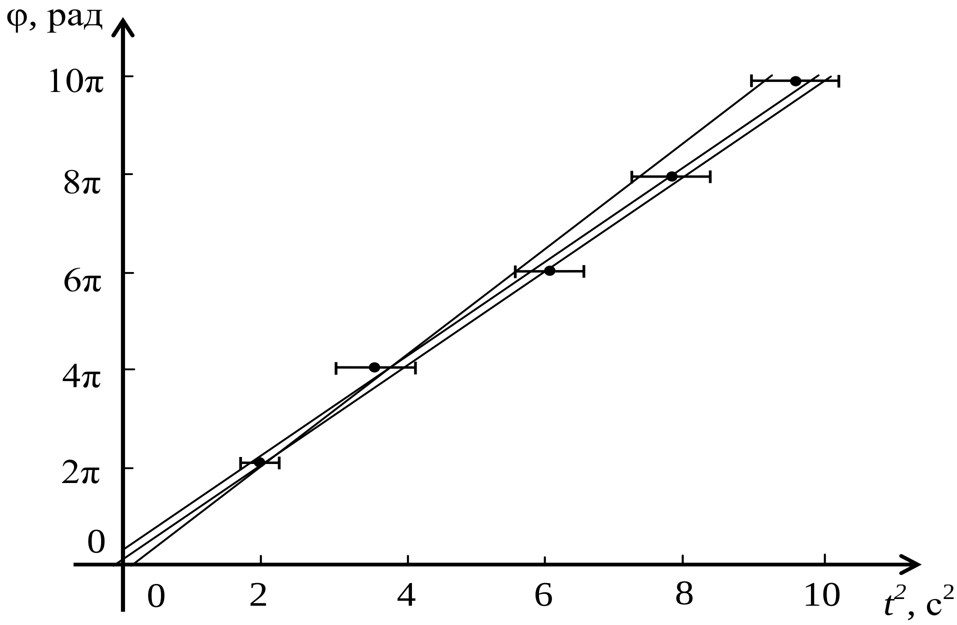


Рисунок 4.7 – Линеаризованный график функции $\varphi(t^2)$. Через доверительные интервалы проходит несколько прямых.

Такой оптимальной прямой будет график функции $y = ax + b$, наиболее подходящим образом проходящий через все доверительные интервалы максимально близко к точкам. Угловой коэффициент a и свободный член b рассчитываются на основе таблицы экспериментальных данных по формулам:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right), \quad (4.8)$$

где x_i и y_i – полученные экспериментальные значения, а n – число измерений. При этом абсолютные погрешности углового коэффициента и свободного члена находятся с помощью следующих соотношений:

$$\sigma^2(a) = \frac{\dfrac{n}{n-2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2}{n \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{4.9}$$

$$\sigma^2(b) = \frac{\dfrac{1}{n-2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}{n \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{4.10}$$

Пусть измерялось время, за которое маятник совершает некоторое количество оборотов. Результаты измерений и расчетов представлены в таблице 4.1. Здесь φ – угол поворота, а N – число оборотов маятника, t – время.

В соответствии с формулами (4.1) – (4.3) линеаризованное соотношение зависимости угла поворота φ маятника от квадрата времени имеет вид:

$$\varphi = at^2 + b. \tag{4.11}$$

Таблица 4.1 – Результаты измерений и расчетов зависимости угла поворота маятника от времени.

N, об	φ, рад	t, с	$\sigma(t)$, с	t^2, с^2	$\sigma(t^2)$, с^2
1	2π	1,8	0,1	3,24	0,36
2	4π	2,8	0,1	7,84	0,56
3	6π	3,3	0,1	10,89	0,66
4	8π	3,9	0,1	15,21	0,78
5	10π	4,4	0,1	19,36	0,88

Построим прямую $\varphi(t^2)$ методом наименьших квадратов. Для этого, с помощью соотношения (4.8) необходимо рассчитать угловой коэффициент a и свободный член b:

$$a \approx 0{,}5034\pi \ \text{рад/ с}^2 \approx 1{,}58 \ \text{рад/ с}^2,$$
$$b \approx 0{,}1535\pi \,\text{рад} \approx 0{,}96 \ \text{рад}. \tag{4.12}$$

Заметим, что размерность величин a и b определяется в соответствии с выражением (4.11), в котором φ измеряется в радианах, а t^2 – в секундах квадратных. Так как суммировать можно только величины, имеющие одинаковые единицы измерения, то φ, at^2 и b измеряются в радианах. Учитывая единицы измерения квадрата времени, получаем, что единицей измерения величины a является рад/с^2.

Далее, по формулам (4.9) и (4.10) рассчитываются абсолютные погрешности измерений величин a и b:

$$\sigma(a) \approx 0{,}06 \,\text{рад/с}^2, \qquad \sigma(b) \approx 0{,}63 \ \text{рад}. \tag{4.13}$$

Расчет параметров прямой $y = ax + b$ методом наименьших квадратов можно выполнить с помощью различных приложений.

Можно воспользоваться программой Excel или LibreOffice Calc: либо рассчитав значения с помощью соотношений (4.8), либо построив линию тренда на графике, отображающем экспериментальные значения.

	A	B	C	D
1	x	y		
2	3,24	1		
3	7,84	2		
4	10,89	3		
5	15,21	4		
6	19,36	5		
7				
8				
9				

Рисунок 4.8 – Задание значений y_i и x_i в программе Microsoft Excel для построения графика функции $y = y(x)$.

Следует отметить, что если величина y измеряется в радианах, то расчеты лучше выполнить в оборотах, а затем результат перевести в радианы, учитывая, что 1 оборот равен 2π радиан. Данное правило рекомендуется применять во всех случаях расчета в программе, в которой вместо числа π приходится применять его приближенное значение.

В случае построения линии тренда необходимо отметить точки y_i и x_i на координатной прямой. Для этого в левом столбце задаем значения x_i, а в правом – y_i (рис. 4.8). После этого выделяем значения и выбираем «Вставка», далее находим «Вставить точечную диаграмму» (рис. 4.9).

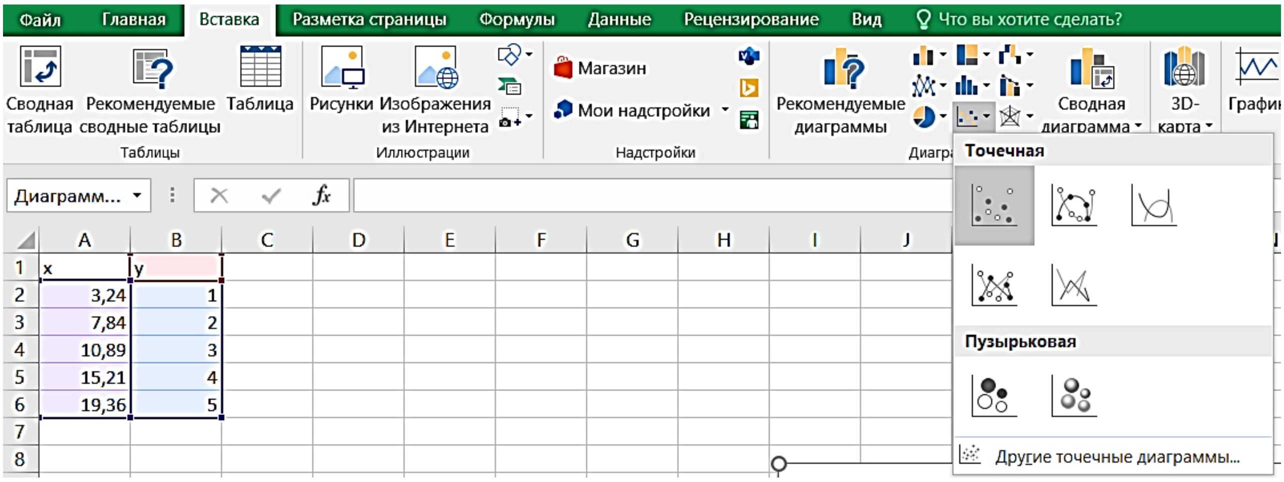


Рисунок 4.9 – Вставка точечной диаграммы в программе Microsoft Excel

Из предложенных вариантов выбираем диаграмму «Точечная»: на данном графике отображаются только точки. Результатом работы программы будет график, представленный на рисунке 4.10.

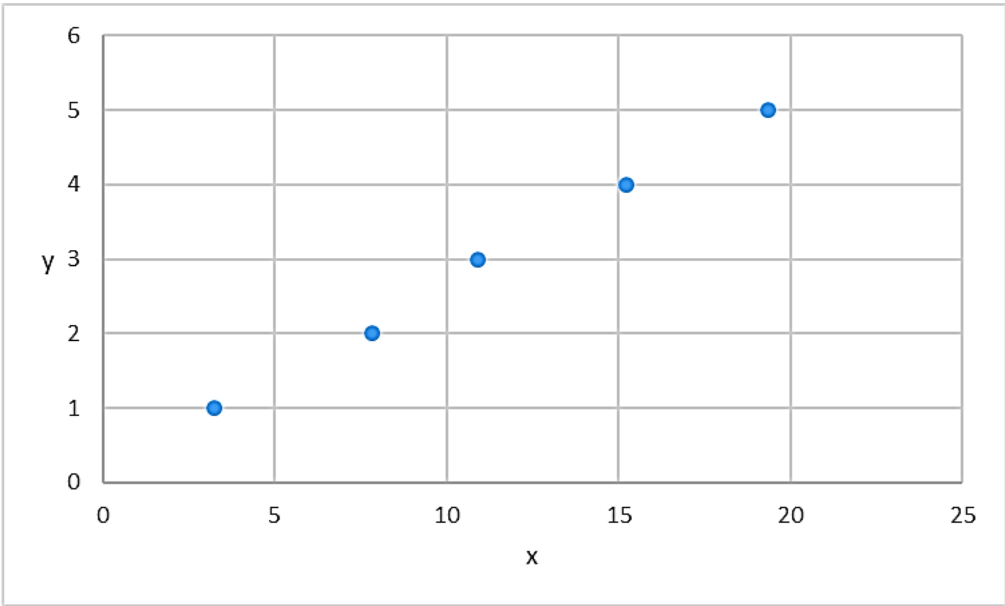


Рисунок 4.10 – Точечная диаграмма $y = y(x)$ в программе Microsoft Excel.

После этого наводим курсор на диаграмму и нажимаем левую кнопку мыши – выполнится выделение области диаграммы. Нажимаем на правую кнопку мыши при выборе любой из точек диаграммы и во всплывающем окне отмечаем «Добавить линию тренда» (рис. 4.11).

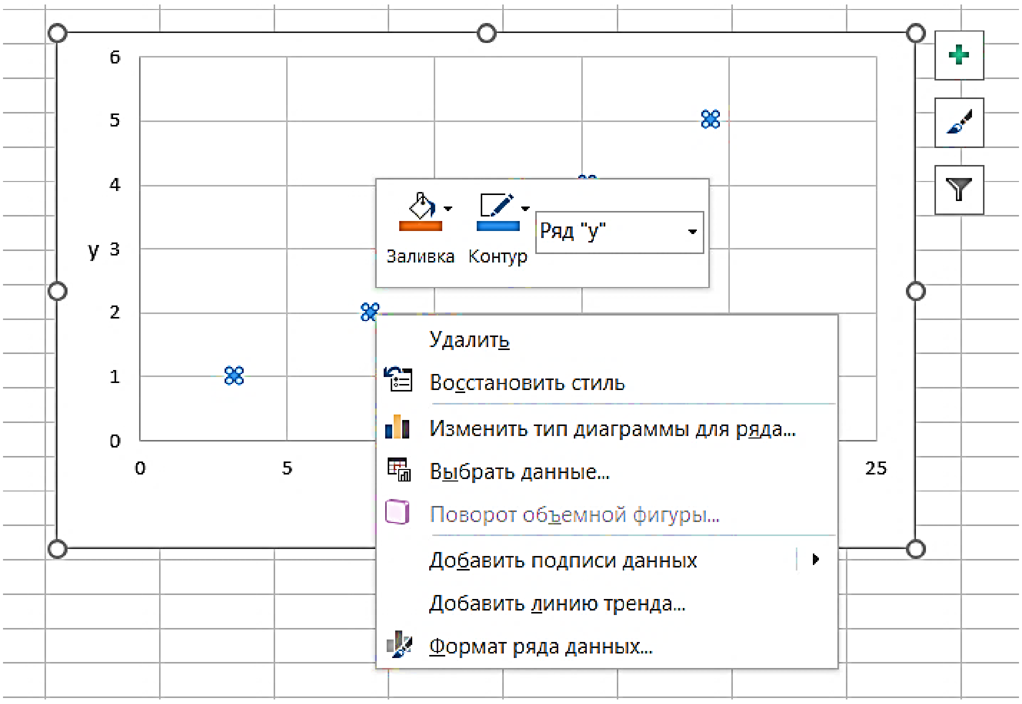


Рисунок 4.11 – Добавление линии тренда на точечную диаграмму в программе Microsoft Excel

При выборе формата линии тренда следует руководствоваться следующими параметрами: «линейная» и «показать уравнение на диаграмме». В итоге будет построена прямая $y = y(x)$, а ее уравнение отобразится на графике. Результат построения прямой представлен на рисунке 4.12.

Получаем значения углового коэффициента $a \approx 0{,}2517\ \text{об}/\text{с}^2$ и свободного члена прямой $b \approx 0{,}1535\ \text{об}$. Преобразуя единицы измерения в $\text{рад}/\text{с}^2$ и в радианы, соответственно, придем к результату (4.12), с учетом округления.

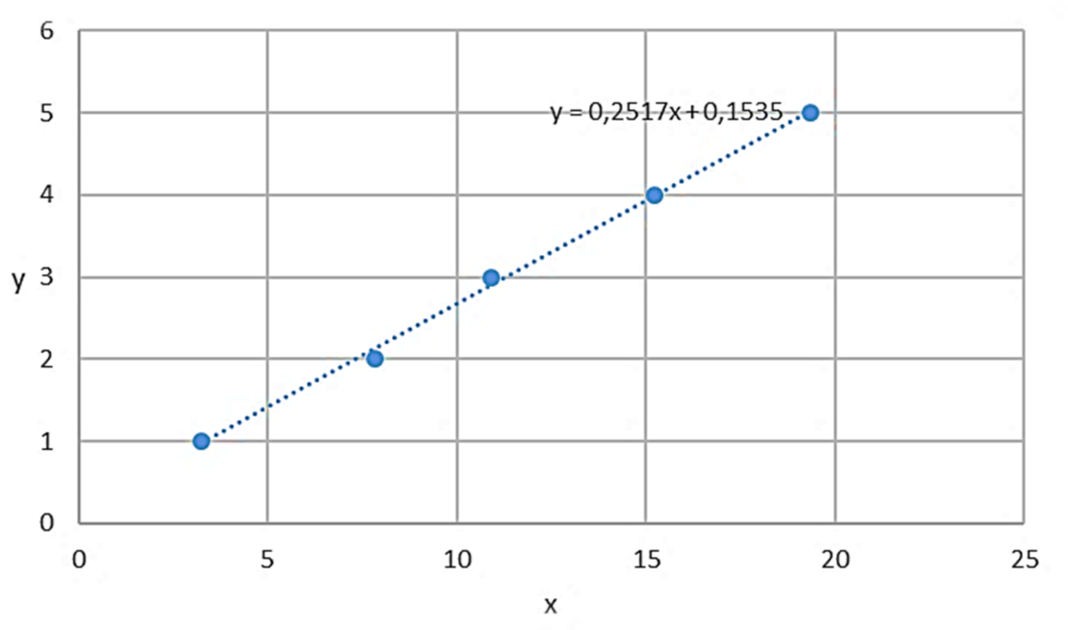


Рисунок 4.12 – Прямая, построенная методом наименьших квадратов в программе Microsoft Excel

Построение линии тренда для линеаризованной зависимости с помощью программ Microsoft Excel и LibreOffice Calc позволяет вычислить только угловой коэффициент и свободный член прямой, погрешности соответствующих величин при этом не рассчитываются. Поэтому рекомендуется либо проводить вычисления с помощью формул (4.8) – (4.10), либо использовать специализированные онлайн-сервисы, реализующие метод наименьших квадратов [6]. При использовании онлайн-сервисов следует учитывать возможные различия в обозначениях углового коэффициента. Применяйте правило: множитель перед переменной x является угловым коэффициентом.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. РМГ 29–2013. Рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ. Метрология. Основные термины и определения (взамен РМГ 29–99). – Введ. 2015-01-01. – М.: Стандартинформ, 2014. – 55 с.
2. Жуков, В. К. Метрология. Теория измерений: учебник для вузов / В. К. Жуков. – Москва: Издательство Юрайт, 2025. – 414 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03865-1. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/561364 (дата обращения: 29.03.2025).
3. Косинов, А. Д. Методы физического эксперимента: учебник для вузов / А. Д. Косинов, А. Г. Костюрина, О. А. Брагин. – Москва: Издательство Юрайт, 2025. – 86 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07207-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/564810 (дата обращения: 29.03.2025).
4. Степанова, Е. А. Метрология и измерительная техника: основы обработки результатов измерений: учебник для вузов / Е. А. Степанова, Н. А. Скулкина, А. С. Волегов ; под общей редакцией Е. А. Степановой. – Москва: Издательство Юрайт, 2025. – 95 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-18065-7. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/562871 (дата обращения: 29.03.2025).
5. Третьяк, Л. Н. Обработка экспериментальных данных: основы теории и практики: учебник для вузов / Л. Н. Третьяк, А. Л. Воробьев; под общей редакцией Л. Н. Третьяк. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2025. – 212 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-08623-2. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/563557 (дата обращения: 29.03.2025).
6. Метод наименьших квадратов для линейной зависимости $y = f(x)$. [Электронный ресурс] / Режим доступа: URL: https://метод-наименьших-квадратов.рф (дата обращения: 29.03.2025).