Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

А.С. Аникин

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА

Учебно-методические указания по проведению практических занятий и самостоятельной работы студентов

Томск
2025

УДК 621.396(075.8)
ББК 32.84
С–31

Рецензент:

Тисленко В.И., профессор кафедры радиотехнических систем ТУСУР, доктор технических наук

Аникин, Алексей Сергеевич

С–31 Статистическая радиотехника : учебно-методические указания по проведению практических занятий и самостоятельной работы студентов технических направлений и специальностей / А. С. Аникин. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2025. – 145 с.

Настоящие учебно-методические указания по проведению практических занятий и самостоятельной работы для студентов составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО). Учебно-методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач, упражнения и контрольные вопросы по статистической радиотехнике. Предназначено для студентов технических направлений подготовки и специальностей.

Одобрено на заседании каф. РТС, протокол № 13 от 03.07.2025.

УДК 621.396(075.8)
ББК 32.84

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов по основным разделам дисциплины **«Статистическая радиотехника»**. Материал разбит на разделы. В каждом разделе приведены справочные теоретические сведения, приведены типовые задачи. Методика решения задач иллюстрируется на ряде разобранных примеров.

Издание предназначено для подготовки студентов технических направлений и специальностей.

Некоторые примеры решения и задачи заимствованы из литературных источников [1 – 8], хотя во многих из них внесены значительные изменения.

Теоретический и справочный материал, необходимый для решения задач, приведён в литературе [8 – 18]. В частности, для решения задач необходимы знания по теории вероятностей [14 – 16], радиотехническим цепям и сигналам [17 – 20].

Некоторые справочные материалы, в том числе из теории вероятностей, приведены в приложениях А – Г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
1 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ 7
1.1 Разделы дисциплины 7
1.2 Проведение практических занятий 8
1.3 Материально-техническое обеспечение практических занятий 9
2 СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ 11
2.1 Входной контроль 11
2.2 Тема № 1 «Вероятностное описание и характеристики случайного процесса» 13
2.2.1 Некоторые сведения из теории 13
2.2.2 Методические указания к решению задач 23
2.2.3 Контрольные вопросы 24
2.2.4 Примеры решения задач 25
2.2.5 Упражнения 27
2.3 Тема № 2 «Вероятностное описание совокупности случайных процессов» 31
2.3.1 Сведения из теории 31
2.3.2 Методические указания к решению задач 34
2.3.3 Контрольные работы 34
2.3.4 Примеры решения задач 35
2.3.5 Упражнения 38
2.4 Тема № 3 «Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса» 41
2.4.1 Сведения из теории 41
2.4.2 Методические рекомендации к решению задач 43
2.4.3 Контрольные вопросы 44
2.4.4 Примеры решения задач 45
2.4.5 Упражнения 49
2.5 Тема № 6 «Узкополосные гауссовские случайные процессы» 52
2.5.1 Сведения из теории 52

2.5.2 Методические указания к решению задач ... 58
2.5.3 Контрольные вопросы ... 58
2.5.4 Примеры решения задач ... 59
2.5.5 Упражнения ... 64
2.6 Тема № 4 «Анализ линейной системы в переходном режиме при стационарном воздействии» ... 66
2.6.1 Сведения из теории ... 66
2.6.2 Методические рекомендации к решению задач ... 70
2.6.3 Контрольные вопросы ... 70
2.6.4 Примеры решения задач ... 71
2.6.5 Упражнения ... 85
2.7 Тема № 5 «Анализ линейной системы в установившемся режиме при стационарном воздействии» ... 89
2.7.1 Сведения из теории ... 89
2.7.2 Методические указания решению задач ... 92
2.7.3 Контрольные вопросы ... 93
2.7.4 Примеры решения задач ... 94
2.7.5 Упражнения ... 98
2.8 Тема № 7 «Оптимальные линейные системы» ... 101
2.8.1 Сведения из теории ... 101
2.8.2 Методические указания к решению задач ... 108
2.8.3 Контрольные вопросы ... 108
2.8.4 Примеры решения задач ... 109
2.8.5 Упражнения ... 113
3 ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ... 118
3.1 Проработка лекционного материала ... 118
3.2 Подготовка к опросам на занятиях ... 118
3.3 Подготовка к практическим занятиям ... 119
3.4 Подготовка к тестированию ... 120
3.5 Подготовка к лабораторной работе ... 120
3.6 Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе ... 121

3.7 Подготовка к экзамену (зачёту) ... 121
3.8 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы ... 127
4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ... 128
5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 131
6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ... 132
Приложение А (рекомендуемое) ... 135
Приложение Б Таблица интегралов ... 141
Приложение В Таблица изображений по Лапласу и свойства операционного исчисления ... 143
Приложение Г Таблица значений интеграла вероятностей ... 144

ВВЕДЕНИЕ

Статистическая радиотехника является одной из фундаментальных дисциплин для подготовки специалистов радиотехнических специальностей. Сигналы в радиотехнических системах случайны из-за помех естественного и искусственного происхождения и тепловых шумов приёмной аппаратуры. Разработка и совершенствование радиоэлектронных устройств ведётся на основе математического аппарата для описания случайных сигналов и подходов к синтезу оптимальных систем их обработки.

Цель изучения дисциплины «Статистическая радиотехника» связана с освоением подходов и способов описания случайных сигналов, определения статистических характеристик этих сигналов, в том числе, после прохождения через линейные системы.

Практические занятия проводятся с целью получения студентами профессиональных практических навыков, а также закрепить материал лекционных занятий.

Практические задания, представленные в настоящем издании, выполняются учащимися в течение аудиторных занятий индивидуально под контролем преподавателя, либо в течение дистанционных занятий.

При изучении дисциплины «Статистическая радиотехника» у студентов формируются способности к выявлению естественнонаучной сущности проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности по разработке радиотехнических устройств, систем связи, радиолокации, радионавигации, а также при построении радиоэлектронных систем и комплексов.

1 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1 Разделы дисциплины

Дисциплина «Статистическая радиотехника» разделена на разделы. В разделах раскрываются сведения о математическом описании случайных процессов, о нахождении отклика линейных систем на воздействие случайных процессов, а также о способах оптимизации простейших линейных систем. По каждому разделу проводятся практические занятия и организуется самостоятельная работа студентов.

Наименование разделов и их содержание отражено в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Наименование и содержание разделов

№ п/п	Наименование разделов	Содержание разделов
1	Введение	Случайные и детерминированные сигналы в радиотехнических системах
2	Математическое описание случайных сигналов	Понятие случайного процесса. Вероятностное описание случайных процессов. Моментные функции случайного процесса. Стационарные случайные процессы. Эргодические случайные процессы. Временные средние. Описание совокупности двух случайных процессов. Свойства корреляционной и взаимно корреляционной функций. Белый шум. Спектральная плотность мощности. Свойства спектральной плотности мощности. Взаимная спектральная плотность мощности
3	Гауссовские случайные процессы	Понятие гауссовского случайного процесса и его свойства. Узкополосные гауссовские случайные процессы
4	Отклик линейных систем на воздействие случайных сигналов	Постановка задачи анализа линейных систем. Отклик линейной системы в переходном режиме при стационарном воздействии. Имитация случайного процесса с заданной спектральной плотностью. Формирующий фильтр. Отклик линейной системы в установившемся режиме. Воздействие белого шума на системы, ограниченные по полосе. Эквивалентная шумовая полоса. Взаимная корреляционная функция входного воздействия и отклика линейной системы

Продолжение таблицы 1.1

№ п/п	Наименование разделов	Содержание разделов
5	Оптимальные линейные системы	Понятие оптимальной системы. Критерий оптимальности. Оптимальные системы, максимизирующие отношение сигнал/шум. Оптимальные системы, минимизирующие средний квадрат ошибки

1.2 Проведение практических занятий

Практическое занятие начинается с определения темы. На одну тему может быть проведено несколько практических занятий, в зависимости от сложности задач и степени усвоения решения этих задач студентами.

На первом практическом занятии производится входной контроль и обсуждение его результатов. На остальных занятиях практическая работа направлена на усвоение различных примеров решения задач по статистической радиотехнике.

Преподаватель вместе со студентами повторяют необходимый для практических заданий материал из лекций. Затем преподаватель выдаёт студентам примеры решения задач. Студенты сначала самостоятельно разбирают примеры решения задач. При необходимости, преподаватель консультирует по вопросам, связанным с примерами решения задач в части статистической радиотехники. Затем преподаватель выдаёт студентам задачи для упражнения. Студенты выполняют упражнения самостоятельно. Во время самостоятельного решения задач студентам запрещается передавать друг другу результаты решения задач и выполнения упражнений. При затруднениях, преподаватель, по возможности, оказывает консультацию и указывает студентам подход к решению задачи или указывает раздел методической литературы с ответом на вопрос студента. В противном случае, преподаватель даёт устные пояснения или демонстрирует решение задачи.

Студент представляет преподавателю результаты выполнения практических заданий в бумажном (письменном) виде при проведении аудиторных занятий или в виде файлов при проведении занятий дистанционно. При необходимости, преподаватель требует у студента пояснений к результатам выполнения задания. Задание выполнено студентом, если решение верно и не содержит принципиальных ошибок (например, логических или, по существу решения задачи). В противном случае, студент дорабатывает задание.

За одно занятие студент должен, как правило, решить 1 – 2 задачи. Если студент не успевает решить все заданные задачи в течение занятия, оставшиеся задачи студент решает дома к следующему занятию.

Консультация студентов, а также выдача им примеров решения задач, упражнений и задач для самостоятельной (домашней) работы осуществляется только во время занятий в аудитории или дистанционно.

Преподаватель должен оценивать и добиваться правильного понимания студентом существа и подхода к решению задачи. Это можно сделать только в ходе личной беседы.

Для закрепления материала, студентам даётся 1 – 2 домашние задачи на самостоятельное решение.

Студент должен проявлять внимательность и аккуратность при выполнении заданий, исправлять ошибки и недочёты по указанию преподавателя, в том числе, грамматические ошибки, небрежное оформление решений задач, графиков, рисунков, неточности в описании решения задачи.

1.3 Материально-техническое обеспечение практических занятий

Учебная аудитория для проведения практических занятий практического типа: 634034, Томская область, г. Томск, Вершинина улица, д. 74, 432 ауд.

Описание имеющегося оборудования:

- Доска магнитно-маркерная BRAUBERG;
- LMC-100103 Экран с электроприводом Master Control Matte 203*203 см White FiberGlass, черная кайма по периметру;
- Проектор NEC «M361X»;
- Системный блок (16 шт.);
- Мониторы (16 шт.);
- Компьютер;
- Комплект специализированной учебной мебели;
- Рабочее место преподавателя.

Программное обеспечение:

- LibreOffice
- Microsoft Windows 7 Pro
- OpenOffice
- PTC Mathcad 13, 14
- Scilab.

Расположение рабочих мест в учебной аудитории и освещение должно удовлетворять действующим требованиям санитарных правил и норм (СанПиН).

Для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидами освоение материала осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения. Для лиц с нарушениями слуха предусмотрено использование мультимедийных средств и других технических средств приема/передачи учебной информации в доступных формах. Учебная аудитория, в которой занимаются обучающиеся с нарушением слуха, оборудована компьютерной техникой, аудиотехникой. Для лиц с нарушениями зрениями предусмотрено использование слайдов на экране.

2 СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Ниже приводятся примерные темы и содержание практических занятий. При проведении практического занятия даются необходимые сведения из теории, типовые задачи и примеры их решения, а также методические рекомендации.

2.1 Входной контроль

На первом занятии проводится входной контроль для проверки комплекса остаточных знаний, выявления пробелов в знаниях, получения сведений об уровне подготовки студентов. Это позволяет приблизительно оценить степень освоения минимальных знаний, необходимых для успешного освоения дисциплины.

При проведении входного контроля студентам выдаются списки с вопросами. Вопросы составлены таким образом, чтобы ответы на них показывали минимум знаний по уже пройденным дисциплинам необходимый для освоения дисциплины.

Студенты письменно отвечают на вопросы. Преподаватель проверяет ответы на вопросы студентов. На основе анализа ответов преподаватель в ходе чтения материалов лекций или при проведении практических занятий даёт студентам необходимые пояснения в вопросах, которые вызвали трудности при ответе на вопросы входного контроля. При необходимости, преподаватель разбирает со студентами те вопросы, которые вызвали у них трудности.

1. Что такое случайная величина?
2. Что такое математическое ожидание? Каков физический смысл математического ожидания?
3. Что такое дисперсия и среднеквадратическое отклонение? Каков физический смысл дисперсии?
4. Что такое ковариационный (корреляционный) момент двух случайных величин?
5. Что такое коэффициент корреляции? Каков смысл коэффициента корреляции?
6. Что такое плотность распределения непрерывной случайной величины? Что показывает плотность распределения непрерывной случайной величины?
7. Что такое преобразование Фурье? Для чего оно используется в радиотехнике?
8. Что такое мощность сигнала и как её можно вычислить?
9. Что такое узкополосная линейная цепь?

10. Что такое комплексная частотная характеристика цепи? Что показывает амплитудно-частотная характеристика цепи? Что показывает фазочастотная характеристика цепи?
11. Что показывает амплитудный спектр сигнала?
12. Что понимают под комплексной огибающей радиосигнала?
13. Что понимают под начальной фазой радиосигнала?
14. Что такое нелинейный элемент цепи?

2.2 Тема № 1 «Вероятностное описание и характеристики случайного процесса»

2.2.1 Некоторые сведения из теории

Случайная функция $\boldsymbol{X(t)}$ – это такая функция, которая в результате опыта принимает тот или иной конкретный вид, заранее неизвестно, какой именно.

Случайный процесс – это физический процесс, мгновенные значения которого в любые моменты времени являются случайными величинами. Примером случайного процесса в радиотехнике являются тепловые шумы аппаратуры.

Процесс называется *квазидетерминированным*, если знание его реализации в прошлом позволяет определить реализацию в будущем.

Квазидетерминированный случайный процесс можно представить с помощью известной функции времени с одним или несколькими случайными параметрами. Например, $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, A и ω_0 – постоянные, θ – случайная величина.

«Траектория» случайного процесса в конкретном опыте называется реализацией случайного процесса (рисунок 2.1).

Случайный процесс изобразить нельзя, можно изобразить только реализации случайного процесса, т. е. траектории, или их совокупность – ансамбль реализаций случайного процесса. На рисунке 2.1 для примера изображены 4 реализации случайного процесса $X(t)$. Реализации случайного процесса получают в результате многократных наблюдений и чаще всего представляют собой непрерывные функции времени.

Основные виды случайных процессов

Дискретная случайная последовательность – это случайный процесс $X(t)$, у которого время t пробегает ряд дискретных значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$, а случайная величина $X(t_i) = X_i$ может принимать лишь дискретное множество значений.

Случайная последовательность – это случайный процесс, у которого время дискретно, а значения в фиксированный момент времени образуют непрерывное множество.

Дискретный случайный процесс – это случайный процесс, у которого время разворачивается непрерывно, а в любой момент времени t_i он может принимать лишь дискретное множество значений $x^{(k)}(t_i)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Непрерывнозначный случайный процесс – это случайный процесс с непрерывным временем, значения которого в любой момент времени образуют непрерывную случайную величину. Однако реализации процесса могут иметь скачки или разрывы. Если подобные скачки отсутствуют, то такой процесс называется **непрерывным**.

Наиболее полно свойства наблюдаемого случайного процесса $X(t)$ будут описаны, если зафиксировать его в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Значения случайного процесса $X(t)$ в эти моменты времени будут давать совокупность n случайных величин $X(t_1) = X_1$, $X(t_2) = X_2, \ldots, X(t_n) = X_n$.

Плотность распределения вероятностей случайного процесса

Обозначим некоторый случайный процесс через $X(t)$. Случайный процесс $X(t)$ в некоторый момент времени t представляет собой случайную величину x и описывается **одномерной плотностью распределения вероятностей** $\boldsymbol{W}(x;t)$. С её помощью можно оценить частоту появления мгновенных значений случайного процесса $X(t)$. Например, на рисунке 2.1 в любой момент времени t от 1 до 10 секунд **мгновенные** значения случайного процесса чаще всего появляются около нуля.

В общем случае для разных моментов времени t_1 и t_2 одномерная плотность распределения вероятностей случайного процесса может отличаться, т. е. $\boldsymbol{W}(x_1;t_1) \neq \boldsymbol{W}(x_2;t_2)$.

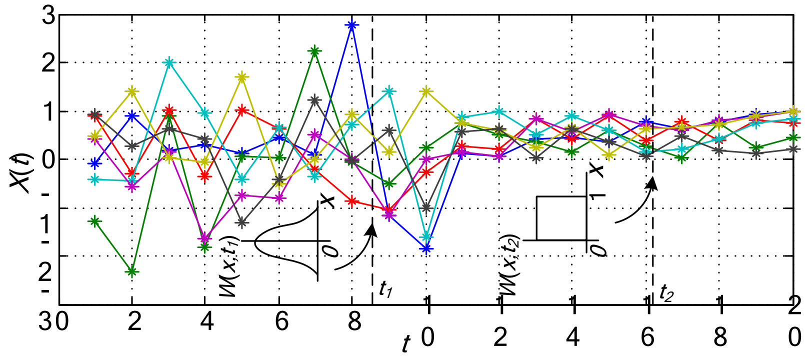


Рисунок 2.1 – Ансамбль реализаций случайного процесса $X(t)$, состоящий из нескольких траекторий

Это наглядно видно из рисунка 2.1, где частота появления мгновенных значений случайного процесса по оси ординат на интервалах времени от 1 до 10 секунд и от 10 секунд до 20 секунд различна. Поэтому следует описывать случайный процесс в несколько моментов времени.

Наиболее полно случайный процесс описывается **многомерной плотностью распределения вероятностей** $\boldsymbol{W}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$ путём фиксации случайного процесса в $\boldsymbol{n}$ моментов времени $t_1,t_2,\ldots,t_n$ на интервале наблюдения $\left[0,T\right]$, которые расположены через одинаковые промежутки времени $\boldsymbol{\Delta t}$.

При $\boldsymbol{\Delta t}\to 0$ и $\boldsymbol{n}\to\infty$ многомерная плотность распределения вероятностей (2.1) переходит в функционал распределения вероятностей $\boldsymbol{W}\left\{x\left(t\right)\right\}$ случайного процесса $x\left(t\right)$.

В общем случае, когда мгновенные значения случайного процесса $x_1,x_2,\ldots,x_n$ в моменты времени $t_1,t_2,\ldots,t_n$ **зависимы**, многомерную плотность распределения вероятностей записывают через **условную плотность распределения вероятностей** как:

$$\boldsymbol{W}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\right)=\boldsymbol{W}\left(x_1;t_1\right)\cdot\boldsymbol{W}\left(x_2/x_1;t_2\right)\cdot\boldsymbol{W}\left(x_3/x_2,x_1;t_3\right),\quad(2.1)$$

где $\boldsymbol{W}\left(x_2/x_1;t_2\right)$ – **условная** плотность вероятности случайного процесса в момент времени t_2 при фиксированном значении x_1;

$\boldsymbol{W}\left(x_3/x_2,x_1;t_3\right)$ – условная плотность вероятности случайного процесса в момент времени t_3 при фиксированных значениях x_2 и x_3 и т. п.

Условная плотность распределения случайного процесса зависит от предыдущих значений. Так, условная плотность распределения случайного процесса $\boldsymbol{W}\left(x_2/x_1;t_2\right)$ определяется только предыдущим значением случайного процесса x_1 (это предыдущее значение и есть условие, которое определяет условную плотность распределения вероятностей), а плотность распределения вероятности $\boldsymbol{W}\left(x_3/x_2,x_1;t_3\right)$ определяется одновременно значениями x_2 и x_3 в два предыдущих момента времени t_1 и t_2 и т. п. Иначе говоря, реализация случайного процесса «помнит» все предыдущие значения и это предопределяет последующие значения случайного процесса. Иначе говоря, все предыдущие значения реализации случайного процесса влияют на значение случайного процесса в некоторый момент времени. Например, вид и графическое изображение условной плотности распределения вероятности $\boldsymbol{W}\left(x_2/x_1;t_2\right)$ зависит от **конкретного значения реализации** x_1 в момент времени t_1 (см. рисунок 2.2).

В частном случае, когда условная плотность распределения вероятностей определяется **только предыдущим** значением реализации случайного процесса

$$\boldsymbol{W}\left(x_n/x_{n-1},x_{n-2},x_1;t_n\right)=\boldsymbol{W}\left(x_n/x_{n-1};t_n\right),\quad(2.2)$$

то такой случайный процесс называется процессом без последействия или простым Марковским процессом.

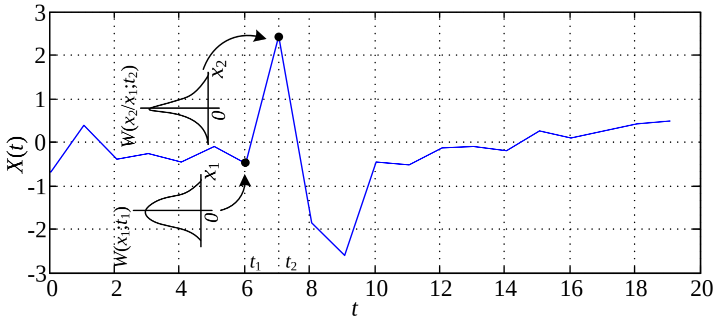


Рисунок 2.2 – Реализация случайного процесса $X(t)$ и плотности распределения вероятностей

Условную плотность распределения вероятностей $\boldsymbol{W}(x_i/x_{i-1};t_i)$ называют по-другому **плотностью вероятностей перехода**. Например, для случайного нормального процесса с фиксацией моментов времени t_1 и t_2 и зависимых случайных величинах x_i и x_{i-1} плотность вероятностей перехода записывают в виде

$$\boldsymbol{W}(x_i / x_{i-1};t_i)= \\ =\frac{1}{\sigma_{xi}\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{xi}^2(1-r^2)}\left[x_i-m_{xi}r\frac{\sigma_{xi}}{\sigma_{xi-1}}(x_{i-1}-m_{xi-1})\right]^2\right\} \tag{2.3}$$

Здесь σ_{xi}, m_{xi} и σ_{xi-1}, m_{xi-1} среднеквадратическое значение и математическое ожидание случайной величины x_i и x_{i-1} соответственно; r – коэффициент корреляции случайных величин x_i и x_{i-1}.

Когда мгновенные значения случайного процесса $x_1,x_2,\ldots,x_n$ в моменты времени $t_1,t_2,\ldots,t_n$ независимы, многомерную плотность распределения вероятностей записывают через одномерные плотности вероятности как:

$$\boldsymbol{W}(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=\boldsymbol{W}(x_1;t_1)\cdot\boldsymbol{W}(x_2;t_2)\cdot\boldsymbol{W}(x_3;t_3). \tag{2.4}$$

<u>Моментные функции</u>

Для приближенного описания свойств случайного процесса используются те же характеристики, что и для описания случайных величин, а именно моменты первого и второго порядков. Отличие в том, что для случайных величин моменты представляют собой некоторые неслучайные числа, а для случайных процессов моменты в общем случае представляют собой детерминированные функции времени. По этой причине моменты применительно к случайным процессам называются моментными функциями.

Математическим ожиданием или средним значением случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $\mathbf{M}_X(t)$, которая в каждый момент времени t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса:

$$\mathbf{M}_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xW[x;t]dx. \tag{2.5}$$

Математическое ожидание случайного процесса графически представляет собой в общем случае кривую, около которой расположены всевозможные реализации случайного процесса.

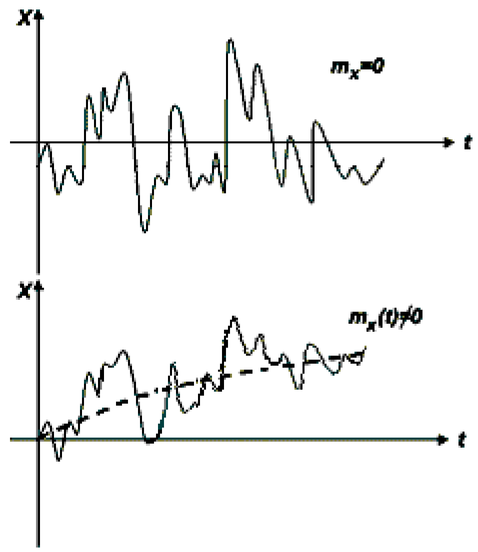


Рисунок 2.3 – Нулевое математическое ожидание (верхний рисунок) и ненулевое математическое ожидание (нижний рисунок) случайного процесса

Оператор математического ожидания — это оператор **M**[.] усреднения (расчёта среднего арифметического) значений всевозможных реализаций случайного процесса в рассматриваемый момент времени.

Рассмотрим некоторые примеры применения оператора математического ожидания M[.] к случайному процессу $X(t)$.

Пример 1. Пусть задан квазидетерминированный случайный процесс $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ со случайной амплитудой A. Частота ω_0 и начальная фаза θ – известны и постоянны. От предыдущего опыта к следующему опыту амплитуда случайно меняется. Поэтому в предыдущем опыте косинусоида отличается амплитудой от косинусоиды в следующем опыте. Вероятность появления амплитуды A с каждым новым опытом определяется плотностью вероятности амплитуды $W(A)$. Применение оператора усреднения M[.] к случайному процессу $X(t)$, по сути, означает:

– проведение бесконечного числа опытов и получение в каждом опыте случайной амплитуды. Это приводит к получению бесконечного числа реализаций случайного процесса, отличающихся амплитудами;

– расчёта среднего арифметического значений (знак интеграла) по бесконечному числу реализаций случайного процесса для любого момента времени t.

Графически расчёт среднего арифметического для трёх реализаций такого случайного процесса показан на рисунке

Рассмотрим теперь, как применять оператор математического ожидания M[.]. Поскольку реализации случайного процесса $X(t)$ случайны из-за амплитуды A, то в качестве плотности вероятности $W(x; t)$ следует использовать плотность вероятности амплитуды $W(A)$. Тогда применение оператора математического ожидания сводится к следующему выражению:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot W\left[x;t\right]dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot W\left[x;t\right]dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot W\left(A\right)dA.$$

Обратите внимание, что сменилась переменная интегрирования с «x» на пременную «A», т.е. с изменились дифференциалы «dx» на «dA».

Пусть плотность вероятности амплитуды задана равномерным распределением в интервале от 0 до 10 В:

$$W\left(A\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & A\in\left[0,10\right]\\ 0 & A\notin\left[0,10\right]\end{cases}.$$

Тогда оператор математического ожидания можно записать следующим образом:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\frac{1}{10}\int\limits_{0}^{10} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)dx.$$

Если бы вероятности появления амплитуд менялись во времени, то это бы означало изменение во времени плотности вероятности $W(A; t)$.

Пусть плотность вероятности амплитуды меняется во времени $W(A; t)$ и задана равномерным распределением следующего вида:

$$W\left(A;t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & A\in\left[t,t+10\right]\\ 0 & A\notin\left[t,t+10\right]\end{cases}.$$

Тогда оператор математического ожидания можно записать следующим образом:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\frac{1}{10}\int\limits_{t}^{t+10} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)dx.$$

Пример 2. Пусть задан квазидетерминированный случайный процесс $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$ со случайной амплитудой A и частотой ω_0. Начальная фаза θ – известна и постоянна. Вероятность появления амплитуды A и частоты ω_0 с каждым новым опытом даётся совместной плотностью вероятности амплитуды и частоты $W(A, \omega_0)$. От предыдущего опыта к следующему опыту амплитуда A и частота ω_0 случайно меняются. Поэтому в следующем опыте косинусоида отличается амплитудой и частотой от косинусоиды в предыдущем опыте. Применение оператора усреднения M[.] к случайному процессу $X(t)$, по сути, означает:

– проведение бесконечного числа опытов и получение в каждом опыте случайной амплитуды и частоты. Это приводит к получению бесконечного числа реализаций случайного процесса, отличающихся амплитудами и частотами;

– расчёта среднего арифметического значений (знак интеграла) по бесконечному числу реализаций случайного процесса для любого момента времени t.

Тогда применение оператора математического ожидания M[.] сводится к следующему выражению:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot W\left[x;t\right]dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot W\left[x;t\right]dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot W\left(A,\omega_0\right)dA\,d\omega_0 .$$

Обратите внимание, что количество интегралов равно количеству случайных величин, которые приводят к случайности реализаций рассматриваемого квазидетерминированного случайного процесса. В данном случае, две величины A и ω_0 случайны, поэтому оператор математического ожидания содержит два интеграла по указанным величинам и совместную плотность вероятности $W(A, \omega_0)$. Применение двойного интегрирования по A и ω_0 в данном случае позволяет перебрать всевозможные реализации случайного процесса, которые могут появиться в опытах, и усреднить эти реализации. Совместная плотность вероятности $W(A, \omega_0)$ определяет возможную зависимость случайных величин A и ω_0, а также вероятность совместного появления пар значений A и ω_0 в опыте. Если случайные величины A и ω_0 не зависимы, то из теории вероятностей известно, что совместная плотность вероятности распадается на сомножители:

$W(A, \omega_0) = W(A)\cdot W(\omega_0)$.

Поэтому оператор математического ожидания для случайного процесса $X(t)$ при независимых A и ω_0 записывается следующим образом:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t+\theta\right)\cdot W\left(A\right)W\left(\omega_0\right)dA\,d\omega_0=$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right) \cdot W\left(A\right) dA \right] W\left(\omega_0\right) d\omega_0 .$$

Отсюда видно, что двойной интеграл преобразовался в повторный: сначала интегрируются реализации случайного процесса по амплитуде (внутренний интеграл), а затем по частоте (внешний интеграл). Поскольку величины независимы, то допустимо интегрировать сначала по частоте, а затем по амплитуде.

Пример 3. Пусть задан квазидетерминированный случайный процесс $X\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right)$ со случайной амплитудой A, частотой ω_0, и начальной фазой θ. Если случайные амплитуда A, частота ω_0 и начальная фаза θ зависимы, то описание этих трёх величин даётся совместной плотностью вероятности $W(A, \omega_0, \theta)$. Тогда применение оператора математического ожидания сводится к следующему выражению:

$$\mathrm{M}\left[X\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot W\left[x;t\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right) \cdot W\left[x;t\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right) \cdot W\left(A, \omega_0, \theta\right) dA d\omega_0 d\theta .$$

Если независимы случайные амплитуда A, частота ω_0 и начальная фаза θ зависимы, то совместная плотность вероятности $W(A, \omega_0, \theta)$ распадается на произведение отдельных плотностей вероятности:

$W(A, \omega_0, \theta) = W(A) \cdot W(\omega_0) \cdot W(\theta)$.

Тогда применение оператора математического ожидания сводится к следующему выражению:

$$\mathrm{M}\left[X\left(t\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right) \cdot W\left(A\right) \cdot W\left(\omega_0\right) \cdot W\left(\theta\right) dA d\omega_0 d\theta .$$

Пример 4. Пусть задан квазидетерминированный случайный процесс $X\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right)$ со случайной амплитудой A, частотой ω_0, и начальной фазой θ. Случайные амплитуда A, частота ω_0 и начальная фаза θ независимы. Дана плотность вероятности $W(\omega_0)$ и $W(\theta)$, для амплитуды известно среднее значение $\mathrm{M}[A]$. Поскольку только для двух величин ω_0 и θ дана плотность вероятности. То сначала рассматривают применение оператора математического ожидания в свёрнутом виде:

$$\mathrm{M}\left[X\left(t\right)\right] = \mathrm{M}\left[A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right)\right].$$

Но, поскольку амплитуда, частота и начальная фаза независимы, то математическое ожидание М[.] от произведения указанных случайных величин есть произведение их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}\left[X\left(t\right)\right] = \mathrm{M}\left[A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right)\right] = \mathrm{M}\left[A\right] \cdot \mathrm{M}\left[\cos\left(\omega_0 t + \theta\right)\right].$$

Для второго множителя даны плотности вероятности, тогда:

$$\mathrm{M}\left[X(t)\right]=\mathrm{M}[A]\cdot\mathrm{M}\left[\cos(\omega_0 t+\theta)\right]=\mathrm{M}[A]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t+\theta)\cdot W(\omega_0,\theta)d\omega_0 d\theta=$$

$$=\mathrm{M}[A]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t+\theta)\cdot W(\omega_0)\cdot W(\theta)d\omega_0 d\theta.$$

Далее рассчитывается интеграл традиционными методами.

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция времени $\sigma_X^2(t)$, значения которой в любой момент времени t равны дисперсии в соответствующем сечении случайного процесса:

$$\sigma_X^2(t)=\mathbf{M}\left[\left(X-m_X(t)\right)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-m_X(t)\right)^2 W[x;t]dx.. \qquad (2.6)$$

Дисперсия случайного процесса графически отражает разброс (степень отклонения) значений случайного процесса от математического ожидания.

Для описания степени зависимости значений случайного процесса $X(t)$ в два момента времени t_1 и t_2 вводят понятие **корреляционной функции** $R_X(t_1,t_2)$, которая определяется как математическое ожидание произведения значений случайного процесса в два момента времени $R_X(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right]$ и вычисляется по формуле

$$R_X(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2W[x_1,x_2;t_1,t_2]dx_1dx_2, \qquad (2.7)$$

где $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$.

Ковариационной функцией $K_X(t_1,t_2)$ случайного процесса $X(t)$ называется математическое ожидание произведения центрированных значений случайного процесса в два момента времени

$$K_X(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[\left(X(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_X(t_2)\right)\right]=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_1)(x_2-m_2)W[x_1,x_2;t_1,t_2]dx_1dx_2, \qquad (2.8)$$

где $\mathbf{M}\left[x(t_1)\right]=m_1$, $\mathbf{M}\left[x(t_2)\right]=m_2$.

Временем (интервалом) корреляции называют интервал времени τ_k, на котором в среднем имеет место заметная коррелированность между значениями случайного процесса,

$$\tau_k=\frac{1}{2R_X(0)}\int_0^{\infty}R_X(\tau)d\tau. \qquad (2.9)$$

Стационарность и эргодичность случайного процесса

Случайный процесс называется **стационарным**, если плотности распределения вероятностей, описывающие процесс, инвариантны относительно сдвига по оси времени:

$$W_n\left[x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n\right] = W_n\left[x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau\right], \qquad (2.10)$$

где τ – произвольный сдвиг во времени.

Если вышеприведенное условие выполняется для $n > 2$, то случайный процесс называется **стационарным в узком смысле**; если это условие выполняется только для $n = 1$ и $n = 2$, то случайный процесс называется **стационарным в широком смысле.** Для стационарного в широком смысле случайного процесса

$$\mathbf{M}_X\left(t\right) = \mathbf{M}_X, \quad \sigma_X^2\left(t\right) = \sigma_X^2, \quad R_X\left(t_1, t_2\right) = R_X\left(\tau\right), \quad \tau = t_2 - t_1, \qquad (2.11)$$

т. е. математическое ожидание и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит лишь от разности моментов времени, в которые берутся значения случайного процесса.

Эргодическое свойство состоит в том, что любая вероятностная характеристика случайного процесса, полученная путем усреднения по совокупности реализаций, оказывается равной аналогичной характеристике, полученной путем усреднения по времени одной реализации.

Случайные процессы, обладающие эргодическим свойством, называются **эргодическими случайными процессами**.

Временные средние характеристики случайного процесса вводятся следующим образом:

временное математическое ожидание –

$$\mathbf{M}_X^t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x\left(t\right)dt \qquad (2.12)$$

временная дисперсия –

$$D_X^t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(x\left(t\right) - m_X^t\right)^2 dt \qquad (2.13)$$

временная корреляционная функция –

$$R_X^t = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x\left(t\right)x\left(t-\tau\right)dt \qquad (2.14)$$

Стационарный процесс $X\left(t\right)$ будет эргодическим, если среднее значение и корреляционная функция R_X^t будут одинаковыми для всех реализаций процесса. Для эргодичности гауссовского случайного процесса достаточно, чтобы он был стационарным, а его корреляционная функция удовлетворяла требованию

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|R_0(\tau)\right|d\tau<\infty, \tag{2.15}$$

где $R_0(\tau)=R_X(\tau)-\mathbf{M}_X^2$, а $R_X(\tau)$ и $\mathbf{M}_X$ – корреляционная функция и среднее значение процесса соответственно.

2.2.2 Методические указания к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

– владеть терминами и определениями, приведёнными выше;

– знать и понимать смысл формул (2.1), (2.4), (2.5) – (2.7);

– знать и владеть следующими сведениями из теории вероятностей:

1) формула для плотности равномерного распределения вероятностей случайной величины X:

$$W(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{если } X\in[a,b]\\ 0,\quad \text{если } X\notin[a,b]\end{cases};$$

2) формула для плотности гауссовского распределения вероятностей одной случайной величины X:

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2};$$

3) формула для плотности гауссовского распределения вероятностей двух случайных величин X и Y:

$$W(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{x,y}^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-r_{x,y}^2\right)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r_{x,y}\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{x_y{}^2}{\sigma_y^2}\right)};$$

4) свойства математического ожидания $\mathbf{M}[X]$ случайной величины X (см. Приложение);

5) свойства дисперсии $D[X]$ случайной величины X (см. Приложение);

– знать тригонометрические тождества (см. Приложение);

– знать таблицу интегралов и интеграл «Гаусса»; (см. Приложение);

– знать свойства и способы решения интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.2.3 Контрольные вопросы

1. Что такое случайный процесс?
2. Какой случайный процесс называют квазидетернимированным?
3. Что такое многомерная плотность вероятности случайного процесса? Какими свойствами она обладает?
4. Что показывает плотность вероятности случайного процесса в конкретный момент времени и в два момента времени?
5. Что такое моментные функции случайного процесса? Назовите примеры моментных функций.
6. Что такое математическое ожидание случайного процесса? Напишите формулу для вычисления математического ожидания случайного процесса. Что показывает математическое ожидание случайного процесса? Поясните с помощью рисунка.
7. Что такое дисперсия случайного процесса? Напишите формулу для вычисления дисперсии случайного процесса. Что показывает дисперсия случайного процесса? Поясните с помощью рисунка.
8. Что такое корреляционная функция случайного процесса? Напишите формулу для вычисления корреляционной функции случайного процесса. Что показывает корреляционная функция случайного процесса? Поясните с помощью рисунка.
9. Что такое интервал временной корреляции случайного процесса ? Что показывает интервал временной корреляции случайного процесса ? Поясните с помощью рисунка.
10. Какие случайные процессы называют стационарными и нестационарными? Поясните с помощью рисунка. Чем отличаются стационарные процессы в узком и широком смысле?
11. Какие процессы называют эргодическим? Приведите примеры эргодических и неэргодических случайных процессов.
12. Может ли быть нестационарный процесс эргодическим ? Почему?
13. Как вычисляются моментные функции эргодических случайных процессов ? В чём отличие этих формул по сравнению с вычислением моментных функций неэргодических случайных процессов?

2.2.4 Примеры решения задач

1. Найти одномерную и двумерную плотности распределения вероятностей процесса *X*(*t*) $\mathbf{X}(\mathbf{t})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{t})+\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{t})$ с постоянной частотой $\boldsymbol{\omega}=const$, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – взаимно независимые гауссовские величины с нулевыми математическими ожиданиями $M[\alpha]=M[\beta]=0$ и дисперсиями $D_\alpha=D_\beta=\sigma^2$.

Решение:

В любой момент времени t случайная величина $X(t) = X$ является линейной комбинацией гауссовских случайных величин. Поэтому случайная величина X является гауссовской. Гауссовская случайная величина X определяется математическим ожиданием и дисперсией функцией. В свою очередь, гауссовский случайный процесс определяется плотностью вероятности $W(X;t)$ и $W(X_1,X_2;t_1,t_2)$. Для записи этих плотностей вероятностей необходимо найти математическое ожидание $M[X(t)]$ и корреляционную функцию $R_x(t_1, t_2)$ процесса $X(t)$.

Найдем математическое ожидание $M[X(t)]$:

$$M[X(t)]=M[\alpha\cdot\cos(\omega\cdot t)+\beta\cdot\sin(\omega\cdot t)]=$$
$$=M[\alpha]\cdot\cos(\omega\cdot t)+M[\beta]\cdot\sin(\omega\cdot t)=0.$$

Найдем, теперь корреляционную функцию $R_x(t_1, t_2)$:

$$R_x(t_1,t_2)=M\left[\{\alpha\cdot\cos(\omega\cdot t_1)+\beta\cdot\sin(\omega\cdot t_1)\}\cdot\{\alpha\cdot\cos(\omega\cdot t_2)+\beta\cdot\sin(\omega\cdot t_2)\}\right]=$$
$$=M[\alpha^2]\cdot\cos(\omega\cdot t_1)\cdot\cos(\omega\cdot t_2)+M[\alpha\cdot\beta]\cdot\cos(\omega\cdot t_1)\cdot\sin(\omega\cdot t_2)+$$
$$+M[\beta\cdot\alpha]\cdot\cos(\omega\cdot t_2)\cdot\sin(\omega\cdot t_1)+M[\beta^2]\cdot\sin(\omega\cdot t_1)\cdot\sin(\omega\cdot t_2).$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ являются взаимно независимыми случайными величинами, тогда:

$$M[\alpha\cdot\beta]=M[\alpha]\cdot M[\beta]=0.$$

С другой стороны, дисперсия D_α и математическое ожидание $M[\alpha]$ связаны соотношением:

$$D_\alpha=M[\alpha^2]-M^2[\alpha].$$

По условию задачи $M[\alpha]=0$, поэтому $D_\alpha=M[\alpha^2]=\sigma^2$. Отсюда:

$$R_x(t_1,t_2)=\sigma^2\cdot\cos(\omega\cdot t_1)\cdot\cos(\omega\cdot t_2)+\sigma^2\cdot\sin(\omega\cdot t_1)\cdot\sin(\omega\cdot t_2)=$$
$$=\sigma^2\cdot\cos\left[\omega\cdot\underbrace{(t_2-t_1)}_{\tau}\right]=\sigma^2\cdot\cos(\omega\cdot\tau).$$

Теперь запишем выражения для искомых плотностей вероятностей:

$$W(X;t)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{X^2}{2\cdot\sigma^2}\right),$$

$$W(X_1,X_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma^2\cdot\sqrt{1-\cos^2(\omega\cdot\tau)}}\exp\left(-\frac{X_1^2-2\cdot X_1\cdot X_2\cdot\cos^2(\omega\cdot\tau)+X_2^2}{2\cdot\sigma^2\cdot\left(1-\cos^2(\omega\cdot\tau)\right)}\right).$$

2. Задан процесс $X(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\theta)$ со случайной амплитудой A, и заданными частотой ω_0 и начальной фазой θ. Известно математическое ожидание случайной амплитуды: $m_A=\mathbf{M}[A]$. Определить математическое ожидание $M[X(t)]$ случайного процесса $X(t)$.

Решение:

Воспользуемся формулой (2.5) для нахождения математического ожидания случайного процесса $X(t)$:

$$\mathbf{M}_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}xW[x;t]dx.$$

Процесс является случайным из-за случайности амплитуды: реализации случайного процесса представляют собой косинусоиды, которые отличаются только амплитудами. Эти амплитуды изменяются случайно при переходе от одной реализации к следующей реализации. В условиях задачи не задана как плотность распределения вероятностей мгновенных значений $W[x;t]$, так и плотность распределения вероятностей амплитуды $W(A)$ случайного процесса $X(t)$. Поэтому будем решать задачу в общем виде:

$$\mathbf{M}_X(t)=\mathbf{M}\left[X(t)\right]=\mathbf{M}\left[A\cos(\omega_0 t+\theta)\right].$$

Амплитуда реализации случайного процесса не зависит от частоты ω_0 и начальной фазы θ. Из теории вероятностей известно, математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению их математических ожиданий (см. Приложение):

$$\mathbf{M}[XY]=\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y].$$

Тогда:

$$\mathbf{M}_X(t)=\mathbf{M}\left[A\cos(\omega_0 t+\theta)\right]=\mathbf{M}[A]\mathbf{M}\left[\cos(\omega_0 t+\theta)\right].$$

Более того, частота ω_0 и начальная фаза θ не случайны и при фиксированном значении времени t являются константой. Из теории вероятностей известно, что константу «*c*» можно выносить за знак математического ожидания (см. Приложение):

$$\mathbf{M}[cX] = c\mathbf{M}[X].$$

Отсюда:

$$\mathbf{M}_X(t) = \mathbf{M}[X(t)] = \mathbf{M}[A]\cos(\omega_0 t + \theta) = m_A \cos(\omega_0 t + \theta).$$

Математическое ожидание квазидетерминированного процесса изменяется во времени t, поэтому заданный случайный процесс является нестационарным.

2.2.5 Упражнения

1. Гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $0{,}1\ \text{В}^2$, аддитивно смешивается со случайным двоичным сигналом, принимающим значения ± 1 В.

А) Определите, какого типа будет суммарный случайный процесс: непрерывным, дискретным или непрерывнозначным?

Б) Ответьте на тот же вопрос в случае, когда суммарный случайный процесс проходит через:

– ограничитель с порогом ограничения ± 1,1 В;

– идеальный ограничитель с амплитудной характеристикой вида $U_{\text{вых}} = \operatorname{sign}(U_{\text{вх}})$.

2. Реализация случайного процесса $x(t)$, определенного формулой $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$, где A и ω – постоянные, θ – случайная величина с определенным распределением вероятности, наблюдается в три момента времени, для которых его значения оказались равными: $x(0) = 0$; $x(1) = 10$; $x(2) = 0$.

Между моментами $t = 0$ и $t = 2$ отсутствуют нулевые значения реализации. Определите:

а) значения параметров A, ω и θ;

б) значение $x(2{,}5)$.

3. Процесс задан в форме $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} A_n f(t - nt_1)$, где A_n – независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале [0,10];

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ для } 0 \le t \le t_1/2, \\ 0, \text{ для других } t \end{cases}.$$

а) Квазидетерминированным или случайным является данный процесс? Почему?

б) Непрерывным, дискретным или непрерывнозначным является данный процесс? Почему?

4. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $y(t)=e^{-\alpha t}x(t)$, где $x(t)$ – случайный процесс с известными характеристиками $m_x(t)$ и $R_x(t_1,t_2)$.

5. Дан случайный процесс $x(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t+e^{-\alpha t}$, где α, ω – постоянные; U,V – случайные величины; $M[U]=M[V]=0$; $D[U]=D[V]=1$; $K_{UV}=0{,}5$. Найти: $m_X(t)$; $R_X(t_1,t_2)$, $D_X(t)$.

6. Случайный процесс имеет вид $x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\theta)$, где A и ω – постоянные, θ – случайная величина.

а) Докажите, что этот процесс стационарен в широком смысле, если θ равномерно распределена в интервале $[0,2\pi]$.

б) Докажите, что этот процесс не может быть стационарным, если θ не является равномерно распределенной на этом интервале.

7. Пусть $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$, где $X(t)$ – стационарный случайный процесс с известной корреляционной функцией $R_X(t)$; $a\ge 0$. Найти корреляционную функцию $R_Y(t)$.

8. Реализация случайного процесса получается в результате пятикратного бросания игральной кости. На интервале $[i-1,i]$ значение реализации равно исходу i -го бросания игральной кости.

а) Изобразите получившуюся реализацию, если исходами пяти бросаний являются: 5, 2, 6, 4, 1.

б) Какова вероятность того, что будет наблюдаться реализация, определенная в п. *а*?

в) Сколько различных реализаций содержит ансамбль данного случайного процесса?

г) Какова вероятность того, что наблюдаемая реализация будет состоять только из цифры 3?

9. Найти плотность вероятности гармонического колебания $X(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\theta)$, где начальная фаза θ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[-\pi,\pi]$. Является ли случайный процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле?

10. Решить предыдущую задачу для случая, когда фаза начальная θ – нормальная случайная величина с нулевым средним значением и среднеквадратичным значением $\sigma_\varphi=60°$.

11. Квазидетерминированный случайный процесс описывается выражением

$$X(t)=\begin{cases} At & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0,\end{cases}$$

где A – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 2. Определить:

а) математическое ожидание этого процесса;

б) дисперсию этого процесса.

12. Случайный процесс определен как $X(t) = A + B \cdot \cos(\omega t + \theta)$, где A – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-5,5]$; B – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной 25; ω – постоянная; θ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Величины A, B и θ статистически независимы. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этого процесса. Является ли этот процесс стационарным в широком смысле?

13. Случайный процесс $Y(t)$ связан со стационарным случайным процессом $X(t)$ соотношением $Y(t) = 10X(t) + 5$. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна $R_X(\tau) = 10e^{-10^3|\tau|}$. Определите корреляционную функцию процесса $Y(t)$.

14. Определите корреляционную функцию и дисперсию гармонического колебания $X(t) = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, где A_0 и ω_0 – известные величины, а θ – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π.

15. Определите корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $X(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, где ω_0 – известная величина; θ – случайная начальная фаза с равномерным распределением на интервале от $-\pi$ до π; A – случайная величина, не зависящая от θ, с известным средним квадратом $\mathrm{M}[A^2]$.

16. Задан квазидетерминированный процесс $X(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, где амплитуда A и частота ω_0 – известные, θ – случайная начальная фаза, имеющая равномерный закон распределения в интервале от 0 до 2π. Определить математическое ожидание случайного процесса $\mathrm{M}[X(t)]$, дисперсию случайного процесса $\mathrm{D}[X(t)]$ и корреляционную функцию $R_X(t_1, t_2)$.

17. Задан квазидетерминированный процесс $X(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, где частота ω_0 – известна, амплитуда A и θ начальная фаза – независимые случайные величины. Начальная фаза θ имеет равномерный закон распределения в интервале от 0 до 2π. Случайная величина A имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(A)$. Определить математическое ожидание $\mathrm{M}[X(t)]$ и корреляционную функцию $R_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

18. Задан случайный процесс вида $X(t) = A \cdot Z(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$, где частота ω_0 – известна, A и θ – независимые случайные величины. Случайная величина θ имеет равномерный закон распределения в интервале от 0 до 2π. Случайная величина A имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(A)$. $Z(t)$ –

случайный процесс с известной корреляционной функцией $R_Z(t_1,t_2)$, который не зависит от A и от θ. Найти $R_X(t_1,t_2)$ корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$.

19. Задан случайный процесс вида $X(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t)$, где ω_0 – известная величина, A гауссовская величина с нулевыми математическими ожиданием и дисперсией $D_A=\sigma^2$. Найти: математическое ожидание, корреляционную функцию $R_X(t_1,t_2)$, а также одномерную и двумерную плотность распределения случайного процесса $X(t)$.

20. Найти интервал корреляции τ_k случайного процесса $X(t)$, имеющего корреляционную функцию следующего вида $R_X(\tau)=A\mathrm{e}^{-\alpha^2\tau^2}$.

2.3 Тема № 2 «Вероятностное описание совокупности случайных процессов»

2.3.1 Сведения из теории

Выше было показано, что для описания случайного процесса необходимо его зафиксировать в моменты времени $t_1, t_2, \dots t_n$, задав $2n$-мерную плотность распределения вероятностей.

Описание одновременно двух случайных процессов аналогично описанию одного процесса. **Наиболее полное описание свойств изучаемых процессов дают многомерные плотности вероятностей**. Если случайный процесс $X(t)$ зафиксировать в моменты времени $t_1, t_2, \dots t_n$, а случайный процесс $Y(t)$ – в моменты времени $t'_1, t'_2, \dots t'_n$, то полученную в результате систему $2n$ случайных величин опишем, задав $2n$-мерную плотность распределения вероятностей:

$$W_{2n}\left(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n; y_1, y_2, ..., y_n, t'_1, t'_2, ..., t'_n\right). \tag{2.16}$$

Для приближенного описания свойств совокупности двух случайных процессов, как и в случае одного процесса, используются моментные функции.

Чтобы охарактеризовать случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$, необходимо задать средние значения $\mathbf{M}_X(t)$ и $\mathbf{M}_Y(t)$, дисперсии $D_X(t)$ и $D_Y(t)$, а также корреляционные функции $R_X(t_1, t_2)$ и $R_Y(t_1, t_2)$. Если между процессами существует вероятностная связь, то для описания степени этой связи вводят взаимно корреляционные функции.

Взаимно корреляционные функции представляют собой математическое ожидание произведения значений двух процессов, взятых в разные моменты времени:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 W\left[x_1, t_1; y_2, t_2\right] dx_1\, dy_2. \tag{2.17}$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\left[Y(t_1)X(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 x_2 W\left[y_1, t_1; x_2, t_2\right] dx_2\, dy_1. \tag{2.18}$$

Два стационарных случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ будут *стационарно связанными* в широком смысле, если двухмерная плотность распределения значений процессов в два различных момента времени будет инвариантна относительно (т. е. не зависеть от) сдвига по оси времени:

$$W\left[x_1, t_1; y_2, t_2\right] = W\left[x_1, t_1 + \tau; y_2, t_2 + \tau\right]. \tag{2.19}$$

Выполнение этого условия влечет за собой равенство $R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_2-t_1)$. Следовательно, для стационарно связанных процессов в широком смысле степень связи между процессами не зависит от начала отсчета времени.

Взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ отражает линейную зависимость между их мгновенными значениями. *Для некоррелированных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ взаимная корреляционная функция равна нулю.*

Среди стационарно связанных процессов можно выделить *взаимно эргодические* случайные процессы, для которых усреднение по времени и по ансамблю реализаций эквивалентно. Временные взаимно корреляционные функции определяются выражениями

$$R_{XY}^{t}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y(t+\tau)dt \tag{2.20}$$

и

$$R_{YX}^{t}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)x(t+\tau)dt. \tag{2.21}$$

Свойства <u>корреляционной функции</u> стационарных и эргодических процессов:

1. $R_X(0)=\mathbf{M}\left[X^2(t)\right]$, т. е. корреляционная функция при аргументе $\tau=0$ дает среднюю полную мощность или средний квадрат случайного процесса $X(t)$.

2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является четной функцией, т. е. $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$. Для нестационарного случая свойство четности заменяется на свойство симметрии $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$.

3. Корреляционная функция принимает максимальное значение при аргументе равном нулю: $R_X(\tau)\le R_X(0)$.

4. Связь между корреляционной $R_X(t)$ и ковариационной $K_X(t)$ функциями устанавливает соотношение $R_X(\tau)=K_X(\tau)+m_X^2$.

Математическое ожидание можно определить по корреляционной функции, устремив аргумент в бесконечность, $R_X(\infty)=m_X^2$, так как $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_X(\tau)\to 0$.

*Последнее утверждение справедливо, если в процессе $X(t)$ отсутствуют периодические **аддитивные** компоненты.*

<u>Если случайный процесс стационарный, но не эргодический, то функция $R_X(t)$ может и не содержать никакой информации относительно его математического ожидания.</u>

Свойства взаимно корреляционной функции случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ следующие.

1. В общем случае взаимные корреляционные функции не являются четными относительно τ. Тем не менее, существует вид симметрии, описываемый соотношением $R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$.

2. Взаимная корреляционная функция не обязательно должна иметь максимум при $\tau = 0$. Тем не менее, справедливо соотношение

$$\left|R_{XY}(\tau)\right| \le \left[R_X(0) R_Y(0)\right]^{1/2} \tag{2.22}$$

причем аналогичное соотношение справедливо и для $R_{YX}(t)$.

3. Если два случайных процесса статистически независимы, то $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau)$.

Для *комплексных случайных процессов* особенность состоит в том, что при усреднении произведения значений процессов один из сомножителей берется комплексно-сопряженным:

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* W\left[x_1, x_2; t_1, t_2\right] dx_1 dx_2 \tag{2.23}$$

и

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2^* W\left[x_1, y_2; t_1, t_2\right] dx_1 dy_2 \tag{2.24}$$

где звездочкой отмечены комплексно-сопряженные функции.

Аналогично и во временных корреляционной и взаимно корреляционной функциях один из сомножителей берется комплексно-сопряженным:

$$R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x^*(t-\tau) dt, \tag{2.25}$$

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau) dt, \tag{2.26}$$

$$R_{YX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t) x^*(t-\tau) dt. \tag{2.27}$$

Для комплексных случайных процессов свойство 2 корреляционной функции приобретает вид $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$.

Свойство 1 взаимно корреляционной функции также видоизменяется и принимает вид $R_{YX}(\tau) = R_{XY}^*(-\tau)$.

2.3.2 Методические указания к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

– владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
– знать и понимать смысл формул (2.1), (2.4), (2.5) – (2.7);
– знать и владеть следующими сведениями из теории вероятностей:
  1) формула для плотности равномерного распределения вероятностей случайно величины X:

$$W(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{если } X\in[a,b]\\ 0, \quad \text{если } X\notin[a,b]\end{cases};$$

  2) свойства математического ожидания $\mathbf{M}[X]$ случайной величины X (см. Приложение);
  3) свойства дисперсии $D[X]$ случайной величины X (см. Приложение);

– знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
– знать таблицу интегралов (см. Приложение);
– знать свойства интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.3.3 Контрольные работы

1. Каким образом наиболее полно описывают совокупностью двух случайных процессов?
2. Какими моментными функциями описывают совокупность двух случайных процессов?
3. Что такое взаимная корреляционная функция двух случайных процессов?
4. Какие два случайных процесса называют стационарно связанными?
5. Чему равна взаимная корреляционная функция независимых случайных процессов?
6. Какие процессы называют взаимно эргодическими?
7. Каковы свойства корреляционной функции ?
8. Каковы свойства взаимной корреляционной функции ?
9. Как определить корреляционную и взаимную корреляционную функцию комплексных случайных процессов ?

10. От чего зависит взаимная корреляционная функция суммы двух зависимых случайных процессов ?

11. Как определить взаимную корреляционную функцию эргодических процессов?

2.3.4 Примеры решения задач

1. Заданы два стационарных процесса $X(t)=A\cdot\cos(\omega_x t+\theta)$ и $Y(t)=A\cdot\cos(\omega_y t+\theta)$ с известными частотами ω_x, ω_y и со случайными и взаимно независимыми амплитудами A, B и начальной фазой θ. Известно математическое ожидание случайных амплитуд: $m_A=\mathbf{M}[A]$ и $m_B=\mathbf{M}[B]$. Начальная фаза θ имеет равномерный закон распределения в интервале от 0 до 2π. Определить взаимную корреляционную функцию этих процессов.

Решение:

Воспользуемся формулой (2.17) для нахождения взаимной корреляционной функции двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1y_2W\left[x_1,t_1;y_2,t_2\right]dx_1\,dy_2.$$

В условиях задачи не задана двумерная (совместная) плотность распределения вероятностей мгновенных значений $W\left[x_1,t_1;y_2,t_2\right]$, или плотности распределения вероятностей амплитуд $W(A)$ случайного процесса $X(t)$ и $W(B)$ случайного процесса $Y(t)$. Задана только плотность распределения вероятностей начальной фазы случайного процесса:

$$W(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, \text{если } \theta\in[0,2\pi]\\ 0, \ \text{ если } \theta\notin[0,2\pi]\end{cases}.$$

Плотность распределения вероятностей начальной фазы сигнала от времени не зависит, и <u>начальная фаза реализации квазидетерминированного процесса от времени не зависит</u>, поэтому $W\left[x_1,x_2;t_1,t_2\right]=W(\theta)$.

Начнём решать задачу сначала в общем виде:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=\mathbf{M}\left[A\cos(\omega_x t_1+\theta)B\cos(\omega_y t_2+\theta)\right].$$

Амплитуды A и B реализаций случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ постоянны для рассматриваемых реализаций, не зависимы между собой, и не зависят от частот ω_x, ω_y и начальной фазы θ. Из теории вероятностей известно, математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению их математических ожиданий (см. Приложение):

$$\mathbf{M}[XY]=\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y].$$

Тогда:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\mathbf{M}\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=\mathbf{M}\left[AB\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)\right]=.$$

$$=\mathbf{M}[AB]\mathbf{M}\left[\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)\right]=$$

$$=\mathbf{M}[A]\mathbf{M}[B]\mathbf{M}\left[\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)\right]=$$

$$=m_A m_B\mathbf{M}\left[\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)\right].$$

Последний множитель есть корреляционная функция периодических составляющих случайных процессов. Её следует найти на основании известной плотности распределения начальной фазы θ следующим образом:

$$\mathbf{M}\left[\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)d\theta.$$

Упростим подынтегральное выражение, воспользовавшись тригонометрическими формулами:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(\omega_x t_1+\theta)\cos\left(\omega_y t_2+\theta\right)d\theta=\left\{\begin{aligned}&\cos(\alpha)\cos(\beta)=\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\cos\left(\omega_x t_1-\omega_y t_2\right)+\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\cos\left(\omega_x t_1-\omega_y t_2\right)d\theta+\int\limits_0^{2\pi}\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]d\theta\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\omega_x t_1-\omega_y t_2\right)\int\limits_0^{2\pi}d\theta+\int\limits_0^{2\pi}\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]d\theta\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left\{2\pi\cdot\cos\left(\omega_x t_1-\omega_y t_2\right)+\int\limits_0^{2\pi}\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]d\theta\right\}.$$

Решим второй интеграл:

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]d\theta=\left\{\varphi=\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta;d\varphi=2d\theta;d\theta=\frac{d\varphi}{2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\omega_x t_1+\omega_y t_2}^{\omega_x t_1+\omega_y t_2+4\pi}\cos(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\sin(\varphi)\Big|_{\omega_x t_1+\omega_y t_2}^{\omega_x t_1+\omega_y t_2+4\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2+4\pi\right]-\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2\right]\right\}.$$

В силу периодичности функции $\sin(x)$

$$\int_0^{2\pi}\cos\left[\left(\omega_x t_1+\omega_y t_2\right)+2\theta\right]d\theta=\frac{1}{2}\cdot\left\{\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2+4\pi\right]-\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2\right]-\sin\left[\omega_x t_1+\omega_y t_2\right]\right\}=0.$$

Отсюда, корреляционная функция случайного процесса равна:

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=\frac{1}{2}m_A m_B\cos\left(\omega_x t_1-\omega_y t_2\right).$$

2. Задана некоторая функция $f\left(\tau\right)$:

$$\boldsymbol{f\left(\tau\right)=10e^{-10^3|\tau-A|}+Be^{-5|\tau|}+20\cos 5\tau+C\sin 5\tau.}$$

Определить допустимые значения констант «*A*», «*B*» и «*C*», при которых функция $f\left(\tau\right)$ является корреляционной функцией стационарного и эргодического случайного процесса $X\left(t\right)$.

Решение:

Воспользуемся первыми двумя свойствами корреляционной функции стационарного и эргодического случайного процесса:

1. $R_X\left(0\right)=\mathbf{M}\left[X^2\left(t\right)\right]$, т. е. корреляционная функция при аргументе $\tau=0$ дает среднюю полную мощность процесса $X\left(t\right)$.

2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса является четной функцией, т. е. $R_X\left(\tau\right)=R_X\left(-\tau\right)$. Для нестационарного случая свойство четности заменяется на свойство симметрии $R_X\left(t_1,t_2\right)=R_X\left(t_2,t_1\right)$.

Проанализируем выражение корреляционной функции из условия задачи. Константа «*A*» неэнергетическая, т. к. характеризует сдвиг функции по оси времени τ. Константы «*B*» и «*C*» энергетические, т. е. характеризуют амплитуду составляющих корреляционной функции.

Найдем сначала неэнергетический параметр (константу «*A*») корреляционной функции. Для этого «избавимся» от энергетических параметров, установив константы «*B*» и «*C*» равными нулю. Тогда:

$$f\left(\tau\right)=10e^{-10^3|\tau-A|}.$$

При любом вещественном значении «*A*» график функции $10e^{-10^3|\tau-A|}$ будет смещаться по горизонтальной оси (оси абсцисс). Это делает функцию несимметричной относительно вертикальной оси (оси ординат). Но согласно второму свойству, корреляционная функция должна быть симметричной функцией относительно оси ординат. Поэтому $A=0$.

Перейдем определению констант «*B*» и «*C*». Рассмотрим сначала константу «*C*». Функция $\sin\left(x\right)$ является нечётной относительно оси ординат.

Поэтому при ненулевой константе «*C*» сложение функции $\sin(x)$ с чётной функцией будет давать нечётную функцию. Чтобы обеспечить симметрию корреляционной функции относительно оси ординат, необходимо, чтобы константа $C = 0$.

Для нахождения константы «*B*» воспользуемся первым свойством: корреляционная функция при аргументе $\tau = 0$ дает среднюю полную мощность процесса $X(t)$. Ясно, что средняя полная мощность не может быть равной нулю или отрицательной, иначе – случайный процесс не существует. Поэтому запишем неравенство:

$$f(\tau) = \lim_{\tau \to 0} 10e^{-10^3|\tau|} + Be^{-5|\tau|} + 20\cos 5\tau > 0$$

или, решая это неравенство, получим:

$$10 + B + 20 > 0$$

$$B > -30, \text{ и } f(\tau) = R_X(\tau) = 10e^{-10^3|\tau|} + (-30,...,\infty)e^{-5|\tau|} + 20\cos 5\tau.$$

2.3.5 Упражнения

1. Даны два совместных случайных стационарных процесса

$$X(t) = 5 \cdot \cos(10t + \theta),$$

и

$$Y(t) = 20 \cdot \cos(15t + \theta),$$

где θ – случайная величина, имеющая равномерный закон распределения в интервале от 0 до 2π.

Определить математическое ожидание, дисперсию каждого из процессов, и взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(\tau)$ случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

2. Пусть радиолокационная система излучает сигнал $X(t)$, а принимает отражённый от цели сигнал $Y(t) = aX(t - \tau_1) + n(t)$, a – постоянная ($a \ll 1$), τ_1 – задержка отражённого сигнала относительно излученного, $n(t)$ – стационарный гауссовский шум приёмника, статистически независимый от сигнала $X(t)$.

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{XY}(\tau)$ излученного сигнала $X(t)$ и принятого сигнала $Y(t)$.

3. Даны два стационарных случайных процесса $U(t)$ и $V(t)$, связанные с другими случайными процессами соотношениями:

$$U(t) = X(t) + Y(t) \text{ и } V(t) = X(t) - Y(t),$$

причём случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически зависимы и имеют ненулевые математические ожидания.

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{UV}(\tau)$ стационарных случайных процессов $U(t)$ и $V(t)$.

4. Дан стационарный случайный процесс $Z(t) = X(t) \pm Y(t)$, причём случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ статистически зависимы и имеют ненулевые математические ожидания.

Определить корреляционную функцию $R_{UZ}(\tau)$ стационарного случайного процесса $Z(t)$.

5. Заданы корреляционные функции $R_X(\tau)$ случайного стационарного и эргодического процесса $X(t)$:

а) $R_X(\tau) = \dfrac{h^2}{2}\left(1 + e^{-2\alpha|\tau|}\right)$;

б) $R_X(\tau) = 10e^{-8\tau^2}$;

в) $R_X(\tau) = 5e^{-100\tau} + 36$;

г) $R_X(\tau) = e^{-14\tau^2}\cos 28\pi\tau$;

д) $R_X(\tau) = 10\dfrac{\left(\tau^2 + 8\right)}{\tau^2 + 4}$;

е) $R_X(\tau) = \dfrac{\left(25\tau^2 + 16\right)}{6{,}25\tau^2 + 4}$.

Определить математическое ожидание и дисперсию стационарного и эргодического случайного процесса $X(t)$.

6. Определить корреляционную функцию случайного процесса $Z(t)$, который представлен в виде:

$$Z(t) = X(t + a) - X(t),$$

где $X(t)$ – стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $R_X(t_1, t_2)$.

7. Заданы два взаимно некоррелированных случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $R_X(t_1, t_2)$ и $R_Y(t_1, t_2)$. Определить корреляционную функцию произведения указанных процессов $Z(t) = X(t)Y(t)$.

8. Заданы некоторые функции $f(\tau)$:

а) $f(\tau) = 9e^{-4|\tau|} - Ae^{-10|\tau|}$;

б) $f(\tau) = 10e^{-15|\tau + A|}$;

в) $f(\tau) = 40\cos 20\tau + A\sin 5\tau$.

Определить допустимые значения константы «A» при которых функция $f(\tau)$ является корреляционной функцией стационарного и эргодического случайного процесса $X(t)$.

2.4 Тема № 3 «Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса»

2.4.1 Сведения из теории

Для описания спектрального состава случайного процесса $X(t)$ используется спектральная плотность мощности $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{M\left[X_T(\omega)X_T^*(\omega)\right]}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{M\left[\left|X_T(\omega)\right|^2\right]}{2T} \quad (2.28)$$

где $M[.]$ – оператор усреднения;

$X_T(\omega)$ – преобразование Фурье реализации случайного процесса, наблюдаемого на интервале $[-T,T]$,

$X_T(t)=\begin{cases} X(t)\ при\ |t|\le T \\ 0\ при\ |t|>T \end{cases}$ – реализация случайного процесса $X_T(t)$, наблюдаемого на интервале $[-T,T]$.

Мощность стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием (или средний квадрат случайного процесса) связана со спектральной плотностью мощности через интеграл:

$$P_X=M\left[X^2\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)df=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_X(s)ds \quad (2.29)$$

где s – комплексная частота, при переходе от $j\omega\to s$.

Выражение (2.29) можно переписать иначе:

$$P_X=D_X=\sigma_X^2=M\left[X^2\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c(s)c(-s)}{d(s)d(-s)}ds, \quad (2.30)$$

где $c(s)$, $c(-s)$ – полиномы относительно s, которые могут быть записаны в виде

$c(s)=c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+...+c_0$, и $d(s)=d_n s^n+d_{n-1}s^{n-1}+...+d_0$;

n – наивысшая степень полинома знаменателя.

Эти полиномы могут быть найдены в результате факторизации спектральной плотности мощности.

Зная коэффициенты c_i, d_j можно найти значение интеграла (2.30). Это значение выражается через указанные коэффициенты, в зависимости от n, следующим образом:

$$n=1,\quad J_1=\frac{c_0^2}{2d_0d_1},$$

$$n=2,\quad J_2=\frac{c_1^2d_0+c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2},$$

$$n=3,\quad J_3=\frac{c_2^2d_0d_1+\left(c_1^2-c_0c_2\right)d_0d_3+c_0^2d_1d_3}{2d_0d_3\left(d_1d_2-d_0d_3\right)},$$

$$n=4,\quad J_4=\frac{1}{2d_0d_4\left(-d_0d_3^2-d_1^2d_4+d_1d_2d_3\right)}\times$$

$$\times\left[c_3^2\left(-d_0^2d_3+d_0d_1d_2\right)+\left(c_2^2-2c_1c_3\right)d_0d_1d_4+\left(c_1^2-2c_0c_2\right)d_0d_3d_4+c_0^2\left(-d_1d_4^2+d_2d_3d_4\right)\right].$$

Для **факторизации спектральной плотности** мощности случайного процесса сначала выполняют переход в выражении для $S_X\left(\omega\right)$ к комплексной частоте ($j\omega\to s$), а затем находятся корни числителя и знаменателя (нули и полюса). К одному сомножителю относят нули и полюса с положительной мнимой частью, к другому – нули и полюса с отрицательной мнимой частью. Вещественные нули и полюса делят пополам между этими множителями. Пример:

$$S\left(\omega\right)=\frac{25\left(\omega^2+16\right)}{\omega^4+34\omega^2+225}.$$

Делаем замену: $\omega\to js$.

Тогда: $S\left(s\right)=\dfrac{25\left(-s^2+16\right)}{s^4-34s^2+225}$.

Корни числителя: $s_{1,2}=\pm4$. Корни знаменателя: $s_{1,2}=\pm3$, $s_{3,4}=\pm5$. Значит:

$$25\left(-s^2+16\right)=5\left(s+4\right)5\left(-s+4\right)$$

и

$$s^4-34s^2+225=\left(s+3\right)\left(s+5\right)\left(-s+3\right)\left(-s+5\right).$$

Поэтому:

$$S\left(s\right)=\frac{25\left(-s^2+16\right)}{s^4-34s^2+225}=\frac{5\left(s+4\right)}{\left(s+3\right)\left(s+5\right)}\cdot\frac{5\left(-s+4\right)}{\left(-s+3\right)\left(-s+5\right)}=$$

$$=\frac{5\left(s+4\right)}{s^2+8s+15}\cdot\frac{5\left(-s+4\right)}{s^2-8s+15}=\frac{c\left(s\right)}{d\left(s\right)}\cdot\frac{c\left(-s\right)}{d\left(-s\right)},$$

а соответствующие коэффициенты равны:

$c_0=20$, $c_1=5$ – для числителя;

$d_0=15$, $d_1=8$, $d_2=1$ – для знаменателя.

Спектральный состав случайного процесса непосредственно связан с корреляционными свойствами во временной области. Эта взаимосвязь даётся формулами Винера-Хинчина:

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, \tag{2.31}$$

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{2.32}$$

Из формул Винера-Хинчина следует, что корреляционная функция случайного процесса связана преобразованием Фурье со спектральной плотностью мощности, и наоборот.

Эффективная ширина энергетического спектра стационарного случайного процесса может быть найдена из следующего равенства:

$$\begin{gathered}\Delta\omega_{эф}\tau_k=\frac{\pi}{2},\\ \Delta f_{эф}\tau_k=\frac{1}{4},\end{gathered} \tag{2.33}$$

где $\Delta\omega_{эф}$ – эффективная ширина спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса (в рад/с);

$\Delta f_{эф}$ – эффективная ширина спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса (в Гц);

τ_k – интервал корреляции стационарного случайного процесса

или непосредственно из спектральной плотности мощности:

$$\Delta\omega_{эф}=\frac{1}{S_x(0)}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega,\ \text{рад/с}. \tag{2.34}$$

2.4.2 Методические рекомендации к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

- владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
- знать и понимать смысл формул (2.28) – (2.33);
- знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
- знать таблицу интегралов (см. Приложение);
- уметь представлять спектральную плотность мощности как функцию комплексной частоты в результате перехода $j\omega\to s$;
- уметь факторизовать спектральную плотность мощности;

– уметь вычислять коэффициенты полиномов факторизованной спектральной плотности мощности и через них вычислять значение интеграла;
– знать представление тригонометрических функций с помощью формулы Эйлера:

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\ \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j};$$

$$\operatorname{tg}(x)=-j\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{e^{jx}+e^{-jx}},\ \operatorname{ctg}(x)=j\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{e^{jx}-e^{-jx}};$$

– знать представление дельта-функции через интеграл:

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt \text{ или } \delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}d\omega;$$

– знать свойства интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.4.3 Контрольные вопросы

1. Что такое спектральная плотность мощности случайного процесса? Поясните физически смысл спектральной плотности мощности? Каковые её единицы измерения?
2. Поясните теорему и приведите формулы Винера-Хинчина? Поясните графически смысл этой теоремы.
3. Какими свойствами обладает спектральная плотность мощности?
4. В чём суть факторизации спектральной плотности мощности?
5. Какой вид имеет спектральная плотность мощности гармонического сигнала со случайной начальной фазой, распределённой равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$.
6. Как определить мощность случайного процесса по спектральной плотности мощности?
7. Как определить эффективную ширину спектральной плотности мощности случайного процесса?
8. Как связаны между собой интервал временной корреляции случайного процесса и ширина его спектральной плотности мощности?
9. Как определить взаимную спектральную плотность мощности по взаимной корреляционной функции?

10. От чего зависит спектральная плотность мощности суммы двух зависимых случайных процессов ?

2.4.4 Примеры решения задач

1. Задан стационарный случайный процесс $\boldsymbol{X(t)}$ с известной корреляционной функцией $\boldsymbol{R_X(\tau)}$:

$$\boldsymbol{R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)}.$$

Определить спектральную плотность мощности $\boldsymbol{S_X(\omega)}$ случайного процесса $\boldsymbol{X(t)}$.

Решение:

Воспользуемся формулой (2.31) для определения спектральной плотности мощности по известной корреляционной функции $R_X(\tau)$ стационарного случайного процесса $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\left|\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\frac{e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}\left(e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{j\omega_0\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega_0\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right)=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{j\tau(\omega_0-\omega)}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\tau(\omega_0+\omega)}d\tau\right)=\left||\tau|=\begin{cases}\tau,\ \tau\ge 0\\ -\tau,\ \tau<0\end{cases}\right|=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}e^{j\tau(\omega_0-\omega)}d\tau+\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau}e^{j\tau(\omega_0-\omega)}d\tau\right)+\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}e^{-j\tau(\omega_0+\omega)}d\tau+\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau}e^{-j\tau(\omega_0+\omega)}d\tau\right)=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\tau[\alpha+j(\omega-\omega_0)]}d\tau+\int_{-\infty}^{0}e^{\tau[\alpha-j(\omega-\omega_0)]}d\tau\right)+\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\tau[\alpha+j(\omega+\omega_0)]}d\tau+\int_{-\infty}^{0}e^{\tau[\alpha-j(\omega+\omega_0)]}d\tau\right)=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(-\frac{e^{-\tau[\alpha+j(\omega-\omega_0)]}}{\alpha+j(\omega-\omega_0)}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{e^{\tau[\alpha-j(\omega-\omega_0)]}}{\alpha-j(\omega-\omega_0)}\Bigg|_{-\infty}^{0}\right)+\frac{\sigma_X^2}{2}\left(-\frac{e^{-\tau[\alpha+j(\omega+\omega_0)]}}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{e^{\tau[\alpha-j(\omega+\omega_0)]}}{\alpha-j(\omega+\omega_0)}\Bigg|_{-\infty}^{0}\right)=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{\alpha-j(\omega-\omega_0)}\right)+\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{\alpha-j(\omega+\omega_0)}\right)=$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{2\alpha}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)=\alpha\cdot\sigma_X^2\left(\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right).$$

2. Задан стационарный случайный процесс $X(t)$ с известной спектральной плотностью мощности $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega)=\alpha\sigma_X^2\left(\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)$$

Определить корреляционную функцию $R_X(\tau)$ случайного процесса $X(t)$.

Решение

По теореме Винера-Хинчина, корреляционная функция случайного процесса связана со спектральной плотностью мощности через обратное преобразование Фурье:

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\alpha\cdot\sigma_X^2\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)\right\}\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\alpha\cdot\sigma_X^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\right)\right\}\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\alpha\cdot\sigma_X^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}d\omega}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{2\cdot\pi}\alpha\cdot\sigma_X^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\tau}d\omega}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}.$$

Подобного рода интегралы удобней вычислять с помощью вычетов. Найдем полюсы для первого и второго интеграла.

Полюсы первого интеграла найдём, решая уравнение:

$\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2=0$,

$\alpha^2+\omega^2-2\cdot\omega_0\cdot\omega+\omega_0^2=0$

$\omega^2-2\cdot\omega_0\cdot\omega+\alpha^2+\omega_0^2=0$, решим квадратное уравнение:

$a=1$

$b=-2\cdot\omega_0$

$c=\alpha^2+\omega_0^2$

$D=b^2-4\cdot a\cdot c=(-2\cdot\omega_0)^2-4\cdot1\cdot\left(\alpha^2+\omega_0^2\right)=4\cdot\omega_0^2-4\cdot\left(\alpha^2+\omega_0^2\right)=4\cdot\omega_0^2-4\cdot\alpha^2-4\cdot\omega_0^2=-4\cdot\alpha^2$

$$\omega_1=\frac{2\cdot\omega_0+\sqrt{-4\cdot\alpha^2}}{2}=\frac{2\cdot\omega_0+2\cdot\alpha\cdot\sqrt{-1}}{2}=\omega_0+j\cdot\alpha,$$

$$\omega_2=\frac{2\cdot\omega_0-\sqrt{-4\cdot\alpha^2}}{2}=\frac{2\cdot\omega_0-2\cdot\alpha\cdot\sqrt{-1}}{2}=\omega_0-j\cdot\alpha.$$

Аналогично, получим полюсы для второго интеграла:

$\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2=0$,

$$\omega_{1,2}=\frac{-2\cdot\omega_0\pm\sqrt{-4\cdot\alpha^2}}{2}=\frac{-2\cdot\omega_0\pm2\cdot\alpha\cdot\sqrt{-1}}{2}=-\omega_0\pm j\cdot\alpha.$$

Полюсы оказались комплексными и отличаются знаком мнимой части.

Если $\tau > 0$, то показатель экспоненты $e^{j\omega\tau}$ при изменении переменной интегрирования достигнет полюса в верхней полуплоскости, там где положительно α, т.е. $\alpha > 0$. Этому условию удовлетворяют:

$\omega_1=\omega_0+j\cdot\alpha$ для первого интеграла;

$\omega_1=-\omega_0+j\cdot\alpha$ для второго интеграла.

Если $\tau < 0$, то показатель экспоненты $e^{j\omega\tau}$ при изменении переменной интегрирования достигнет полюса в нижней полуплоскости, там где отрицательно α, т.е. $\alpha < 0$. Этому условию удовлетворяют:

$\omega_1=\omega_0-j\cdot\alpha$ для первого интеграла;

$\omega_1=-\omega_0-j\cdot\alpha$ для второго интеграла.

Определим интеграл с помощью вычетов. Полюсы оказались первого порядка. Рассмотрим область только для $\tau > 0$. Для функции вида $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и полюса первого порядка z_0, вычет определяем следующим образом:

$$\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\left.\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)_z}\right|_{z=z_0}.$$

Тогда интеграл для τ > 0 через вычеты определим следующим образом:

$$R_X(\tau) = \frac{\alpha \cdot \sigma_X^2}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha \cdot \sigma_X^2}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} + \alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1 = -\omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} \right] =$$

$$= j \cdot \left[\alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} + \alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1 = -\omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} \right].$$

Рассмотрим первый вычет для τ > 0:

$$\operatorname*{Res}_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} = \operatorname*{Res}_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\left[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2\right]_\omega} \right\}.$$

Производная $\left[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2\right]_\omega = \frac{d\left[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2\right]}{d\omega} = 2 \cdot (\omega - \omega_0).$

Тогда:

$$\operatorname*{Res}_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} = \left. \frac{e^{j\omega\tau}}{2 \cdot (\omega - \omega_0)} \right|_{\omega_1 = \omega_0 + j \cdot \alpha} = \frac{e^{j(\omega_0 + j \cdot \alpha)\tau}}{2 \cdot (\omega_0 + j \cdot \alpha - \omega_0)} = \frac{e^{j(\omega_0 + j \cdot \alpha)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} =$$

$$= \frac{e^{j\omega_0\tau + j \cdot j \cdot \alpha\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} = \frac{e^{j\omega_0\tau - \alpha\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} = \frac{e^{-(\alpha - j\omega_0)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha}.$$

Аналогично, для второго вычета для τ > 0:

$$\operatorname*{Res}_{\omega_1 = -\omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} = \operatorname*{Res}_{\omega_1 = -\omega_0 + j \cdot \alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\left[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2\right]_\omega} \right\} = \left. \frac{e^{j\omega\tau}}{2 \cdot (\omega + \omega_0)} \right|_{\omega_1 = -\omega_0 + j \cdot \alpha} =$$

$$= \frac{e^{j(-\omega_0 + j \cdot \alpha)\tau}}{2 \cdot (-\omega_0 + j \cdot \alpha + \omega_0)} = \frac{e^{j(-\omega_0 + j \cdot \alpha)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} = \frac{e^{-(\alpha + j\omega_0)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha}.$$

Отсюда, корреляционная функция равна для τ > 0:

$$R_X(\tau) = j \cdot \left[\alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1=\omega_0+j\cdot\alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} + \alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \operatorname*{Res}_{\omega_1=-\omega_0+j\cdot\alpha} \left\{ \frac{e^{j\omega\tau}}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} \right] =$$

$$= j \cdot \alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \frac{e^{-(\alpha - j\omega_0)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} + j \cdot \alpha \cdot \sigma_X^2 \cdot \frac{e^{-(\alpha + j\omega_0)\tau}}{2 \cdot j \cdot \alpha} = \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{-(\alpha - j\omega_0)\tau} + \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{-(\alpha + j\omega_0)\tau}.$$

Аналогично, корреляционная функция для $\tau < 0$:

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{(\alpha - j\omega_0)\tau} + \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{(\alpha + j\omega_0)\tau}.$$

Объединяя эти решения для $\tau > 0$ и $\tau < 0$, получим:

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{-(\alpha - j\omega_0)\tau} + \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{-(\alpha + j\omega_0)\tau} + \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{(\alpha - j\omega_0)\tau} + \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot e^{(\alpha + j\omega_0)\tau} =$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot \left[e^{-\alpha\tau} \cdot e^{j\omega_0\tau} + e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega_0\tau} + e^{\alpha\tau} \cdot e^{-j\omega_0\tau} + e^{\alpha\tau} \cdot e^{j\omega_0\tau} \right] =$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{2} \cdot \left[e^{-\alpha\tau} \cdot \left\{ e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau} \right\} + e^{\alpha\tau} \cdot \left\{ e^{-j\omega_0\tau} + e^{j\omega_0\tau} \right\} \right] =$$

$$= \sigma_X^2 \cdot \left[e^{-\alpha\tau} \cdot \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} + e^{\alpha\tau} \cdot \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} \right] =$$

$$= \left| \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right| = \sigma_X^2 \cdot \left[e^{-\alpha\tau} \cdot \cos(\omega_0\tau) + e^{\alpha\tau} \cdot \cos(\omega_0\tau) \right] = \sigma_X^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\omega_0\tau).$$

2.4.5 Упражнения

1. Задан стационарный случайный процесса $X(t)$ с корреляционной функцией вида:

а) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

б) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \left(1 + e^{-\alpha|\tau|}\right)$;

в) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \left(1 + \alpha|\tau|\right) e^{-\alpha|\tau|}$;

г) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \cos(\omega_0\tau)$;

д) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\alpha|\tau|\cos(\omega_0\tau)$;

е) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\tau^2}{2}}\cos(\omega_0\tau)$;

ж) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\dfrac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}\cos(\omega_0\tau)$;

з) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\left[\cos(\omega_1\tau)+\sin(\omega_2\tau)\right]$;

и) $R_X(\tau)=\sigma_X^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos(\omega_0\tau)+\dfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0|\tau|)\right)$;

к) $R_X(\tau)=\dfrac{N_0\beta}{\pi}\dfrac{\sin(\beta\tau)}{\beta\tau}$.

Определить спектральную плотность мощности $S_X(\omega)$ случайного процесса $X(t)$.

2. Для стационарного случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией, указанной в задаче 1, определить эффективную ширину спектральной плотности мощности в рад/с и Гц.

3. Стационарный случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием имеет спектральную плотность мощности $S_X(\omega)$ следующего вида:

а) $S_X(\omega)=\dfrac{16}{\omega^4+13\omega^2+36}$;

б) $S_X(\omega)=\dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}$;

в) $S_X(\omega)=\dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}\left(a^2+b^2\omega^2\right)$;

г) $S_X(\omega)=\dfrac{\sigma_X^2\sqrt{2\pi}}{\beta}e^{-\frac{\omega^2}{2\beta^2}}$;

д) $S_X(\omega)=\dfrac{16\alpha^5\sigma_X^2}{3\left(\alpha^2+\omega^2\right)^3}$;

е) $S_X(\omega)=\dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{3\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}$;

ж) $S_X(\omega)=\begin{cases}N_0, & |\omega|\le\beta\\ 0, & |\omega|>\beta\end{cases}$;

з) $S_X(\omega)=\begin{cases} N_0, & \omega_1\le|\omega|\le\omega_2 \\ 0, & |\omega|<\omega_1, |\omega|>\omega_2 \end{cases}$;

и) $S_X(\omega)=\dfrac{16\left(\omega^2+36\right)}{\omega^4+13\omega^2+36}$;

к) $S_X(\omega)=\begin{cases} 1-\dfrac{|\omega|}{8\pi}, & |\omega|\le 8\pi \\ 0, & |\omega|>8\pi \end{cases}$;

л) $S_X(\omega)=\dfrac{9}{\omega^2+64}$;

м) $S_X(\omega)=\dfrac{32}{\omega^2+16}$;

н) $S_X(\omega)=\dfrac{1800}{\omega^2+900}$;

о) $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+64}$;

п) $S_X(\omega)=\pi\delta(\omega)+16\pi\delta(\omega+8)+16\pi\delta(\omega-8)+\dfrac{25\left(\omega^2+16\right)}{\omega^4+34\omega^2+225}$;

р) $S_X(\omega)=10\pi\delta(\omega)+100\pi\delta(\omega+3)+100\pi\delta(\omega-3)+\dfrac{\omega^2+10}{\omega^4+5\omega^2+4}$.

Для случайного процесса $X(t)$ определить:

- среднюю мощность на сопротивлении 1 Ом;
- эффективную ширину спектральной плотности мощности;
- ширину спектральной плотности мощности по уровню 0,5 от $S_X(0)$;
- наименьший интервал времени $\tau_{\min}$ между соседними значениями случайного процесса $X(t)$, при котором корреляционная функция $R_X(\tau)$ обращается в нуль.

4. Определить мощность случайного процесса $X(t)$, если известна его спектральная плотность мощности $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega)=\begin{cases} 16\cdot\pi, \text{ при } \omega\in[a\le\omega\le b] \\ 0, \text{ при } \omega\notin[a\le\omega\le b] \end{cases}.$$

Как изменится мощность случайного процесса $X(t)$, если a и b увеличить в четыре раза, т. е. $a_2=4\cdot a_1$ и $b_2=4\cdot b_1$.

2.5 Тема № 6 «Узкополосные гауссовские случайные процессы»

2.5.1 Сведения из теории

Гауссовским называют случайный процесс $X(t)$, значения которого $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в любые моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ распределены по гауссовскому закону. Любую n-мерную плотность распределения гауссовского случайного процесса $X(t)$ можно записать, если известны корреляционная функция $R_X(t_1, t_2)$ и среднее значение $M_X(t)$.

Многомерная плотность распределения вероятностей дискретного гауссовского случайного процесса $X(t)$ может быть записана как:

$$W_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \mathbf{K}}} e^{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right]}, \tag{2.35}$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \ldots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ – вектор мгновенных значений гауссовского случайного процесса;

$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \ldots \\ m(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \\ \ldots \\ m_{xn} \end{bmatrix}$ – вектор математического ожидания гауссовского случайного процесса,

$$(x-\mathbf{m})^T = \left[x_1 - m_{x1} \quad x_2 - m_{x2} \quad \ldots \quad x_n - m_{xn}\right],$$

$$(x-\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} x_1 - m_{x1} \\ x_2 - m_{x2} \\ \ldots \\ x_n - m_{xn} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}$ – корреляционная матрица гауссовского случайного процесса,

$$k_{ij}=R_X\left(t_i,t_j\right)-M_X\left(t_i\right)M_X\left(t_j\right).$$

В частности, если зафиксированы два момента времени t_1 и t_2, то совместное распределение значений x_1 и x_2 гауссовского случайного процесса записывается в виде:

$$W\left(x_1,x_2\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-r_{x1,x2}^2}\left[\frac{\left(x_1-m_{x1}\right)^2}{\sigma_{x1}^2}-2r_{x1,x2}^2\frac{\left(x_1-m_{x1}\right)\left(x_2-m_{x2}\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}}+\frac{\left(x_2-m_{x2}\right)^2}{\sigma_{x2}^2}\right]}}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{x2}\sqrt{1-r_{x1,x2}^2}},\tag{2.36}$$

где $r_{x_1,x_2}=\dfrac{R_X\left(t_1,t_2\right)-M_X\left(t_1\right)M_X\left(t_2\right)}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}}$ – коэффициент корреляции значений x_1 и x_2 гауссовского случайного процесса;

m_{x1} – математическое ожидание случайного процесса $X\left(t_1\right)$;

m_{x2} – математическое ожидание случайного процесса $X\left(t_2\right)$;

σ_{x1} – среднеквадратическое отклонение случайного процесса $X\left(t_1\right)$;

σ_{x2} – среднеквадратическое отклонение случайного процесса $X\left(t_2\right)$.

Если рассматривается закон распределения значения гауссовского случайного процесса x_2 в момент времени t_2, при условии, что зафиксировано значение x_1 в момент времени t_1, то плотность рассматриваемой случайной величины записывается как:

$$W\left(x_2/x_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x2/x1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x_2-m_{x2/x1}\right)^2}{\sigma_{x2/x1}^2}},\tag{2.37}$$

где $m_{x2/x1}=m_{x2}+r_{x1,x2}\dfrac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}\left(x_1-m_{x1}\right)$ – условное математическое ожидание x_2, при условии, что x_1 приняло определённое значение;

$\sigma_{x2/x1}^2=\sigma_{x2}^2\left(1-r_{x1,x2}^2\right)$ – условная дисперсия гауссовской случайной величины x_2, при условии, что x_1 приняло определённое значение.

Для некоррелированного гауссовского случайного процесса $X\left(t\right)$ со среднеквадратическим отклонением σ_X многомерная плотность распределения вероятностей может быть записана как:

$$W_X\left(\mathbf{x}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-m_i}{\sigma_X}\right)^2}}{\left(2\pi\right)^{n/2}\sigma_X^n}=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-m_i}{\sigma_X}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}.\tag{2.38}$$

Узкополосным называют случайный процесс, спектральная плотность мощности которого сосредоточена в полосе частот Δf, значительно более узкой, чем центральная частота f_0, т. е. $\Delta f << f_0$.

Узкополосным шумом называют квазисинусоиду, у которой случайным образом и медленно во времени меняются огибающая и начальная фаза.

Огибающая $V(t)$ узкополосного случайного процесса – это случайная функция, которая описывает случайное изменение во времени мгновенной амплитуды гармонического колебания на частоте $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$.

Начальная фаза $\varphi(t)$ узкополосного случайного процесса – это случайная функция, которая описывает случайное изменение во времени мгновенной фазы гармонического колебания на частоте $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$. Далее вместо термина начальная фаза используем термин фаза.

Стационарный узкополосный гауссовский процесс описывается как:

$$X(t) = V(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right] = X_C \cos\left[\omega_0 t\right] - X_C \sin\left[\omega_0 t\right], \qquad (2.39)$$

где ω_0 – центральная (средняя) частота узкополосного гауссовского случайного процесса;

$V(t)$ – медленно меняющаяся случайная огибающая узкополосного гауссовского процесса;

$\varphi(t)$ – медленно меняющаяся случайная фаза узкополосного гауссовского процесса;

$X_C(t) = V(t)\cdot\cos\left[\varphi(t)\right]$ – косинусная квадратурная составляющая;

$X_S(t) = V(t)\cdot\sin\left[\varphi(t)\right]$ – синусная квадратурная составляющая.

Квадратурные составляющие узкополосного случайного процесса $X_C(t)$ и $X_S(t)$ связаны с огибающей и фазой соотношениями вида:

$$V(t) = \sqrt{X_C^2(t) + X_S^2(t)} \qquad (2.40)$$

и

$$\varphi(t) = arctg\left(\frac{X_S(t)}{X_C(t)}\right). \qquad (2.41)$$

Если квадратурные составляющие узкополосного гауссовского случайного процесса $X_C(t)$ и $X_S(t)$ являются независимыми, распределёнными по нормальному закону с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями, то в любой момент времени t огибающая V распределена по закону Релея, а начальная фаза φ распределена равномерно в интервале $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$W(V) = \frac{V}{\sigma_X^2} e^{-\frac{V^2}{2\sigma_X^2}} \qquad (2.42)$$

для огибающей V, и

$$W_\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, \text{ при } 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases} \tag{2.43}$$

для начальной фазы φ.

Среднее значение m_V огибающей V узкополосного гауссовского случайного процесса со среднеквадратическим отклонением σ_X определяется выражением:

$$m_V = \sigma_X \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.44}$$

Дисперсия D_V огибающей V узкополосного гауссовского случайного процесса со среднеквадратическим отклонением σ_X определяется выражением:

$$D_V = \sigma_V^2 = \sigma_X^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.45}$$

Дисперсия D_φ начальной фазы φ узкополосного гауссовского случайного процесса не зависит от среднеквадратического отклонения σ_X и всегда равна:

$$D_\varphi = 188{,}5 \text{ градусов}^2, \tag{2.46}$$

а среднеквадратическое отклонение начальной фазы φ узкополосного гауссовского случайного процесса равно $\sigma_\varphi = 103{,}9$ градуса.

Если наблюдается аддитивная смесь гармонического сигнала $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \psi)$ с узкополосным гауссовским случайным процессом $X(t)$

$$Y(t) = s(t) + X(t) = V(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(t)\right], \tag{2.47}$$

то в любой момент времени t огибающая V распределена по обобщённому закону Релея (закону Райса)

$$W(V) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{V^2 + A^2}{2\sigma_X^2}} I_0\left(\frac{AV}{\sigma_X^2}\right), \tag{2.48}$$

а начальная фаза φ имеет закон распределения следующего вида

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_X^2}} + \frac{A\cos\varphi}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{A^2 \sin^2\varphi}{2\sigma_X^2}} \Phi^*\left(\frac{A\cos\varphi}{\sigma_X}\right), \tag{2.49}$$

где σ_X – среднеквадратическое отклонение узкополосного гауссовского процесса;

A – амплитуда гармонического (полезного) сигнала;

$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – интеграл вероятностей (функция ошибок), причём $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$.

При большом отношении сигнал/шум $q \gg 1$ обобщённое распределение Релея огибающей приближается к нормальному закону распределения:

$$W(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(V-A)^2}{2\sigma_X^2}}, \tag{2.50}$$

а плотность распределения начальной фазы также приближается к нормальному закону:

$$W(\varphi) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} e^{-q\varphi^2}. \tag{2.51}$$

Среднее значение m_V огибающей V аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом со среднеквадратическим отклонением σ_X определяется выражением:

$$m_V = \sigma_X \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{q}{2}\right) I_0\left(\frac{q}{2}\right) + q I_1\left(\frac{q}{2}\right) \right] e^{-\frac{q}{2}}, \tag{2.52}$$

где $q = \frac{A^2}{2\sigma_X^2}$ – отношение сигнал/шум по мощности;

A – амплитуда полезного сигнала;

σ_X – среднеквадратическое отклонение случайного процесса;

$I_n(x)$ – функция Бесселя n-го порядка от мнимого аргумента (рисунок 2.4).

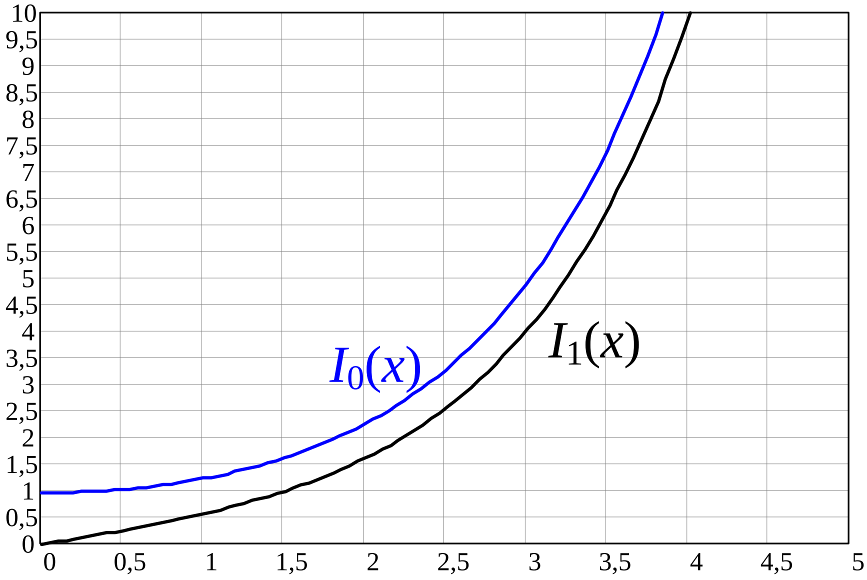


Рисунок 2.4 – Функции Бесселя нулевого и первого порядка

При малом и большом отношении сигнал/шум q по мощности среднее значение m_V огибающей V аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом со среднеквадратическим отклонением σ_X может быть вычислено как:

$$m_V = \sigma_X \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{q}{2} \right], \text{ при } q < 1$$
$$m_V = A \sqrt{1 + \frac{1}{4q}}, \text{ при } q < 1. \tag{2.53}$$

Дисперсия D_V огибающей V аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом со среднеквадратическим отклонением σ_X определяется выражением:

$$D_V = \sigma_V^2 = 2\sigma_X^2 \left(1 + \frac{q}{2} \right) - m_V^2. \tag{2.54}$$

При малом и большом отношении сигнал/шум q по мощности дисперсия D_V огибающей V аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом со среднеквадратическим отклонением σ_X может быть вычислена как:

$$D_V = \sigma_V^2 = \sigma_X^2 \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \left[1 + \frac{q}{2} \right], \text{ при } q < 1$$
$$D_V = \sigma_V^2 = \sigma_X^2, \text{ при } q > 3. \tag{2.55}$$

При большом отношении сигнал/шум q по мощности дисперсия D_φ начальной фазы φ аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом со среднеквадратическим отклонением σ_X может быть вычислена как:

$$D_\varphi \approx \frac{1}{2q}, \text{ рад}^2. \tag{2.56}$$

Если закон распределения случайной величины X описывается плотностью распределения вероятностей $W(X)$, то для нахождения вероятности попадания её в интервал $[\alpha, \beta]$ используется следующее выражение:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta W(X) dX. \tag{2.57}$$

В частности, для нормального закона распределения случайной величины X вероятности попадания её в произвольный интервал $[\alpha, \beta]$ определяется следующим выражением:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \qquad (2.58)$$

2.5.2 Методические указания к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:
- владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
- знать и понимать смысл формул (2.35) – (2.58);
- знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
- знать таблицу интегралов (см. Приложение);
- уметь пользоваться таблицей для функции ошибок $\Phi^*(x)$;
- уметь вычислять коэффициенты полиномов факторизованной спектральной плотности мощности и через них вычислять значение интеграла;
- знать представление тригонометрических функций с помощью формулы Эйлера:
$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j};$$
- знать представление дельта-функции через интеграл:
$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt \text{ или } \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}d\omega;$$
- знать свойства интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.5.3 Контрольные вопросы

1. Какой процесс называется гауссовским? Запишите плотность вероятности гауссовского процесса. Опишите смысл входящих величин. Как преобразуется выражение для плотности вероятности гауссовского процесса, если мгновенные значения в два любых момента времени некоррелированные?
2. Как записывается плотность вероятности гауссовского процесса в два момента времени и условная плотность вероятности?
3. Какой процесс называют узкополосным? Изобразите реализацию узкополосного процесса и его спектральную плотность мощности. Что такое огибающая и начальная фаза узкополосного случайного процесса?

4. Какое распределение имеет огибающая и начальная фаза узкополосного гауссовского случайного процесса? Какое распределение имеют квадратурные составляющие гауссовского случайного процесса? Каковы моментные функции квадратур узкополосного гауссовского случайного процесса?
5. Что определяется отношение сигнал/шум для аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом.
6. Если наблюдается аддитивная смесь гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом, то по каком закону распределены огибающая и начальная фаза в зависимости от отношения сигнал/шум?
7. Как определить математическое ожидание огибающей и начальной фазы аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом в зависимости от отношения сигнал/шум?
8. Как определить вероятность попадания мгновенных значений гауссовского случайного процесса для t = const. в интервал $[a, b]$?

2.5.4 Примеры решения задач

1. Найти математическое ожидание и дисперсию огибающей V суммы гармонического сигнала $s(t)=5\cdot\cos(\omega_0 t)$ и узкополосного гауссовского случайного процесса $X(t)$, корреляционная функция которого определяется выражением:

$$\boldsymbol{R_X(\tau)=e^{-10^4|\tau|}\cos 10^6\tau.}$$

Решение:

Проанализируем корреляционную функцию узкополосного случайного процесса:

$$R_X(\tau)=e^{-10^4|\tau|}\cos 10^6\tau.$$

Заданная в условии задачи корреляционная функция представляет собой произведение гармонической компоненты $\cos 10^6\tau$ на спадающую со временем компоненту $e^{-10^4|\tau|}$. Гармоническая компонента имеет частоту 10^6 рад/с. Предположим, что гармонический сигнал $s(t)=5\cdot\cos(\omega_0 t)$ имеет частоту $\omega_0=10^6$ рад/с. Определим отношение сигнал/шум q по мощности:

$$q=\frac{A^2}{2\sigma_X^2}.$$

Среднеквадратическое отклонение σ_X узкополосного гауссовского случайного процесса найдем из следующего выражения:

$$\sigma_X^2(t)=\mathbf{M}\left[X(t)^2\right]-m_X^2(t),$$

где средний квадрат $\mathbf{M}\left[X(t)^2\right]$ и квадрат математического ожидания $m_X^2(t)$ найдем из свойств корреляционной функции:

$$\mathbf{M}\left[X^2(t)\right] = \lim_{\tau \to 0} R_X(\tau) = \lim_{\tau \to 0} e^{-10^4|\tau|} \cos 10^6 \tau = 1,$$

$$m_X^2 = \lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} e^{-10^4|\tau|} \cos 10^6 \tau \to 0,$$

$$\sigma_X^2(t) = \mathbf{M}\left[X(t)^2\right] - m_X^2(t) = 1 - 0 = 1 \text{ Вт}.$$

Амплитуда полезного сигнала равна $A = 5$ В. Отношение сигнал/шум по мощности, равно:

$$q = \frac{A^2}{2\sigma_X^2} = \frac{5^2}{2} = 12{,}5 \gg 1.$$

Воспользуемся выражениями (2.53) и (2.55) для нахождения математического ожидания и дисперсии огибающей суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского случайного процесса:

$$m_V = A\sqrt{1 + \frac{1}{4q}} = 5\sqrt{1 + \frac{1}{4 \cdot 12{,}5}} = 5{,}05 \text{ В},$$

$$D_V = \sigma_V^2 = \sigma_X^2 = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ Вт},$$

или

$$\sigma_V = \sigma_X = 1 \text{ В}.$$

2. Найти отношение сигнал/шум q, при котором начальная фаза суммы гармонического сигнала $s(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$ и узкополосного гауссовского случайного процесса $X(t)$ находится в пределах ± 0,2 рад с вероятностью 0,9. Считать, что отношение сигнал/шум достаточно большое, т. е. q >> 1.

Решение:

Плотность распределения начальной фазы суммы гармонического сигнала $s(t)$ и узкополосного гауссовского случайного процесса $X(t)$ при большом отношении сигнал/шум q приблизительно описывается нормальным законом распределения, т. е. формулой (2.51):

$$W(\varphi) = \sqrt{\frac{q}{\pi}} e^{-q\varphi^2}.$$

Поскольку начальная фаза – случайна, то вероятность попадания её в интервал $[\alpha, \beta]$ равный $[-0{,}2, 0{,}2]$ можно найти по формуле (2.58):

$$P(\alpha \le \varphi \le \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m_\varphi}{\sigma_\varphi}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m_\varphi}{\sigma_\varphi}\right).$$

Начальная фаза гармонического сигнала равна нулю, поэтому нормальный закон распределения начальной фазы симметричен относительно математического ожидания $m_\varphi = 0$. В этом случае:

$$P(\alpha \le \varphi \le \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta}{\sigma_\varphi}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha}{\sigma_\varphi}\right).$$

Отсюда, с учётом условия задачи и свойства симметрии функции ошибок $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$, запишем:

$$0,9 = \Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right) - \Phi^*\left(\frac{-0,2}{\sigma_\varphi}\right) = \Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right) - 1 + \Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right) = 2\Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right) - 1.$$

Пользуясь таблицей для функции ошибок из приложения, получим:

$$\frac{1,9}{2} = \Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right), \text{ или } 0,95 = \Phi^*\left(\frac{0,2}{\sigma_\varphi}\right), \text{ так что } 0,95 = \Phi^*(0,8289).$$

Поэтому это уравнение можно переписать как:

$$0,8289 = \frac{0,2}{\sigma_\varphi}.$$

Отсюда, среднеквадратическое отклонение начальной фазы равно:

$$\sigma_\varphi = \frac{0,2}{0,8289} = 0,241.$$

Для определения отношения сигнал/шум воспользуемся выражением (2.56) дисперсии D_φ начальной фазы φ аддитивной смеси гармонического сигнала с узкополосным гауссовским случайным процессом:

$$D_\varphi \approx \frac{1}{2q}.$$

Отсюда, отношение сигнал/шум q по мощности, равно:

$$q \approx \frac{1}{2D_\varphi} = \frac{1}{2\sigma_\varphi^2} = \frac{1}{2 \cdot 0,241^2} = 8,6.$$

3. Гауссовский стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию вида:

$$\boldsymbol{R_X(\tau) = e^{-10^3|\tau|}}.$$

В момент времени t_1 процесс принял значение $X(t_1)=0{,}1$ В. Найти вероятность того, что через интервал времени $\Delta t=0{,}5$ мс с процесс $X(t+\Delta t)$ превысит уровень $x_0=0{,}5$ В.

Решение:

По условию задачи гауссовский стационарный случайный процесс фиксируется в два момента времени:

$$t_1 \to X(t_1) \to x_1 \text{ и } t_2 = t_1 + \Delta t \to X(t_2) \to x_2.$$

Поскольку значения случайного процесса коррелированы во времени (задана корреляционная функция, отличающаяся от дельта-функции), то воспользуемся выражением (2.37) для условной плотности распределения вероятностей указанных значений:

$$W(x_2/x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x2/x1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2-m_{x2/x1})^2}{\sigma_{x2/x1}^2}},$$

где $m_{x2/x1}=m_{x2}+r_{x1,x2}\dfrac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}(x_1-m_{x1})$ – условное математическое ожидание x_2, при условии, что x_1 приняло определённое значение;

$\sigma_{x2/x1}^2=\sigma_{x2}^2\left(1-r_{x1,x2}^2\right)$ – условная дисперсия гауссовской случайной величины x_2, при условии, что x_1 приняло определённое значение,

$$r_{x_1,x_2}=\frac{R_X(t_1,t_2)-M_X(t_1)M_X(t_2)}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}}.$$

Среднеквадратическое отклонение σ_X узкополосного гауссовского случайного процесса найдем из следующего выражения:

$$\sigma_X^2(t)=\mathbf{M}\left[X(t)^2\right]-m_X^2(t),$$

где средний квадрат $\mathbf{M}\left[X(t)^2\right]$ и квадрат математического ожидания $m_X^2(t)$ найдем из свойств корреляционной функции:

$$\mathbf{M}\left[X^2(t)\right]=\lim_{\tau\to 0}R_X(\tau)=\lim_{\tau\to 0}e^{-10^3|\tau|}=1,$$

$$m_X^2=\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=\lim_{\tau\to\infty}e^{-10^3|\tau|}\to 0,$$

$$\sigma_X^2(t)=\mathbf{M}\left[X(t)^2\right]-m_X^2(t)=1-0=1 \text{ Вт}$$

для любых моментов времени, поэтому

$$m_{x2/x1}=x_1 r_{x1,x2} \text{ и } r_{x_1,x_2}=\frac{R_X(t_1,t_2)}{\sigma_X^2}.$$

Подставляя значения из условия задачи, получаем:

$$r_{x_1,x_2}=\frac{R_X(t_1,t_2)}{\sigma_X^2}=\frac{e^{-10^3|\Delta t|}}{1}=e^{-10^3\left|0{,}5\cdot 10^{-4}\right|}=0{,}95,$$

$$m_{x2/x1} = 0{,}1 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}095,$$

$\sigma^2_{x2/x1} = 1 - 0{,}95^2 = 0{,}098$, так что $\sigma_{x2/x1} = \sqrt{\sigma^2_{x2/x1}} = \sqrt{0{,}098} = 0{,}313.$

Вероятность того, что гауссовская (нормальная) случайная величина превысит некоторый уровень $x_0 = 0{,}5$ В, найдем из формул (2.57) и (2.58)

$$P(X > x_0) = \int_{x_0}^{\infty} W(X)\,dX = \Phi^*(\infty) - \Phi^*\left(\frac{x_0 - m_{x2/x1}}{\sigma_{x2/x1}}\right)$$

или

$$P(X > x_0) = 1 - \Phi^*\left(\frac{x_0 - m_{x2/x1}}{\sigma_{x2/x1}}\right).$$

Отсюда:

$$P(X > 0{,}5) = 1 - \Phi^*\left(\frac{0{,}5 - 0{,}095}{0{,}313}\right) \approx 1 - \Phi^*(1{,}3) \approx 1 - 0{,}9032 = 0{,}1.$$

2.5.5 Упражнения

1. Дисперсия стационарного узкополосного гауссовского случайного процесса равна 1 Вт. Среднее значение узкополосного процесса равно нулю. Найдите плотность распределения вероятностей и дисперсию огибающей этого процесса.

2. Определите математическое ожидание и дисперсию огибающей узкополосного гауссовского случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией:

$$R_X(\tau)=10e^{-5\cdot 10^4|\tau|}\cos 10^7\tau.$$

3. Корреляционная функция узкополосного гауссовского случайного процесса определяется выражением:

$$R_X(\tau)=4e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau.$$

Определите вероятность того, что в заданный момент времени огибающая этого процесса превысит 4 В.

4. Найти математическое ожидание и дисперсию огибающей суммы гармонического сигнала $s(t)=4\cdot\cos 10^6 t$ и узкополосного гауссовского шума с дисперсией 0,25 В^2 и центральной частотой спектра $\omega_0=10^6$ рад/с.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию огибающей суммы гармонического сигнала $s(t)=4\cdot\cos 20^6 t$ и узкополосного гауссовского шума с дисперсией 10 В^2 и центральной частотой спектра $\omega_0=20^6$ рад/с.

6. Найти плотность вероятности огибающей суммы гармонического сигнала с амплитудой 2 В и узкополосного гауссовского шума с дисперсией 4 В^2. Частота гармонического сигнала совпадает с центральной частотой спектра шума.

7. Спектр мощности гауссовского случайного процесса $x(t)$ задан в виде:

$$S_X(\omega)=\frac{100}{\omega^2+100}.$$

В момент времени t_1 процесс принял значение $x(t_1)=0$. Определить условную дисперсию процесс в момент времени

$$t_2=t_1+\Delta t,\ \text{где}\ \Delta t=0{,}05\ \text{с}.$$

8. Дисперсия (мощность) узкополосного гауссовского шума равна 2 Вт. Среднее значение узкополосного процесса равно нулю. К узкополосному процессу добавляется гармонический сигнал амплитудой 0,5 В на нагрузке 5 Ом. Определить математическое ожидание и дисперсию огибающей суммарного процесса.

9. Рассматривается смесь гармонического сигнала $s(t)=5\cdot\cos\left(10^6 t+\psi\right)$ и узкополосного шума $n(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 0,25e^{-10^4|\tau|}\cos 10^6\tau.$$

Определить, с какой вероятностью фазовая ошибка начальной фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного гауссовского случайного процесса наблюдается в интервале ± 0,1 рад.

2.6 Тема № 4 «Анализ линейной системы в переходном режиме при стационарном воздействии»

2.6.1 Сведения из теории

Линейная система – система, для которой справедливы следующие условия:

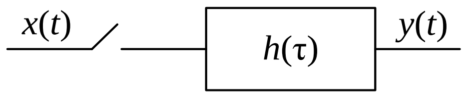
– если воздействие $x(t)$ вызывает отклик $y(t)$, то воздействие $ax(t)$ должно вызывать отклик $ay(t)$ для произвольного «*a*».

– если воздействие $x_1(t)$ вызывает отклик $y_1(t)$, а воздействие $x_2(t)$ вызывает отклик $y_2(t)$, то сумма воздействий $x_1(t)+x_2(t)$ должна вызывать отклик, равный сумме откликов $y_1(t)$ и $y_2(t)$ на каждое воздействие в отдельности (принцип суперпозиции), т. е. $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$.

Отсюда следует, что линейные системы обеспечивают линейное преобразование случайного процесса.

Линейная стационарная система – линейная система, не содержащая параметров, изменяющихся во времени и для которой справедливо условие:

– если воздействие $x(t)$ вызывает отклик $y(t)$, то сдвинутое по времени входное воздействие $x(t+\tau)$ приводит к аналогичному сдвигу во времени отклика системы $y(t+\tau)$.



Линейная система может быть описана следующими характеристиками:

– **импульсная характеристика** $h(\tau)$;

– **комплексная частотная характеристика** $K(j\omega)$, связанная преобразованием Фурье с функцией $h(t)$:

$$K(j\omega)=\int_0^\infty h(t)e^{-j\omega t}dt; \tag{2.59}$$

– **передаточная функция системы** $H(p)$, связанная преобразованием Лапласа с импульсной переходной характеристикой:

$$H(p)=\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt. \tag{2.60}$$

Комплексная частотная характеристика получается из передаточной функции линейной системы путём замены комплексной частоты как $p = j\omega$.

Импульсная характеристика может быть найдена по известным комплексной частотной характеристике $K(j\omega)$ или передаточной функции $H(p)$ путём обратного преобразования Фурье или Лапласа, соответственно:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{и}$$
$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_C H(p)e^{st}dt, \tag{2.61}$$

где C – замкнутый контур интегрирования в плоскости комплексного переменного p.

Примерами линейных систем являются электрические фильтры, состоящие из резисторов сопротивлением R, катушки индуктивностью L и конденсатора ёмкостью C. Такие

Отклик линейной системы во временной области можно определить через интеграл свёртки:

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.62}$$

Если в момент $t = 0$ на вход фильтра с неизменными во времени параметрами поступает стационарный случайный процесс, то статистические характеристики отклика могут быть найдены по следующим формулам:

$$M_Y(t) = M\left[y(t)\right] = M_X\int_0^t h(\tau)d\tau \tag{2.63}$$

для математического ожидания отклика;

$$M\left[y^2(t)\right] = \int_0^t\int_0^t R_x(\tau_1-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.64}$$

для среднего квадрата (мощности) отклика;

$$R_Y(\tau) = \int_0^t\int_0^{t+\tau} R_X(\tau-\tau_2+\tau_1)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.65}$$

для корреляционной функции отклика,
при условии, что линейная система устойчива и физически реализуема.

Другими примерами линейных преобразований являются дифференцирование и интегрирование случайных процессов.

Случайный процесс $X(t)$ является **дифференцируемым** в *среднеквадратическом*, если для сколь угодно малого времени T можно найти случайный процесс $Z(t)$ такой, что

$$\lim_{T\to 0} M\left\{\left[\frac{X(t+T)-X(t)}{T}-Z(t)\right]^2\right\}=0. \qquad (2.66)$$

Тогда случайный процесс $Z(t)$ называют производной от случайного процесса $X(t)$ в среднеквадратическом и обозначают как:

$$Z(t)=\frac{dX(t)}{dt}=X'(t)_t. \qquad (2.67)$$

Спектральная плотность мощности $S_Z(\omega)$ производной $Z(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ определяется следующим образом:

$$S_Z(\omega)=\omega^2\cdot S_X(\omega), \qquad (2.68)$$

где

$S_X(\omega)$ – спектральная плотность мощности стационарного случайного процесса $X(t)$.

Математическое ожидание $m_Z(t)$ производной случайного процесса $X(t)$ определяется следующим образом:

$$m_Z(t)=M\left[Z(t)\right]=\frac{dm_X(t)}{dt}=\frac{dM\left[X(t)\right]}{dt}, \qquad (2.69)$$

а корреляционная функция и дисперсия производной случайного процесса $X(t)$ определяются как:

$$R_Z(t_1,t_2)=\frac{d^2R_X(t_1,t_2)}{dt_1dt_2}, \qquad (2.70)$$

$$D_Z(t)=R_Z(t,t)=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\cdot S_X(\omega)d\omega. \qquad (2.71)$$

Из последнего выражения следует, что у дифференцируемого случайного процесса спектральная плотность мощности должна убывать с увеличением частоты быстрей чем ω^{-3}.

В частности, для стационарного случайного процесса $X(t)$ указанные моментные функции производной равны:

$$m_Z(t)=0,\ R_Z(\tau)=-\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2} \text{ и } D_Z=R_Z(0). \qquad (2.72)$$

Условием существования производной $Z(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ является существование второй производной корреляционной функции в точке $\tau = 0$:

$$\left.\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}=const. \qquad (2.73)$$

Случайный процесс $X(t)$ является **интегрируемым** в *среднеквадратическом*, если для сколь угодно малого времени T можно найти случайный процесс $Z(t)$ такой, что

$$\lim_{T\to 0} M\left\{\left[\sum_{k=1}^{t/T} X\left(k\cdot T\right) - Z\left(t\right)\right]^2\right\} = 0. \tag{2.74}$$

Тогда случайный процесс $Z(t)$ называют определённым интегралом от случайного процесса $X(t)$ в среднеквадратическом и обозначают как:

$$Z\left(t\right) = \int_0^t X\left(t\right)dt. \tag{2.75}$$

Математическое ожидание $m_Z\left(t\right)$ интеграла от случайного процесса $X(t)$ определяется следующим образом:

$$m_Z\left(t\right) = M\left[Z\left(t\right)\right] = \int_0^t m_X\left(t\right)dt, \tag{2.76}$$

а корреляционная функция и дисперсия производной случайного процесса $X(t)$ определяются как:

$$R_Z\left(t_1,t_2\right) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X\left(t_1,t_2\right)d\tau_1 d\tau_2, \tag{2.77}$$

$$D_Z\left(t\right) = R_Z\left(t,t\right). \tag{2.78}$$

В частности, для стационарного случайного процесса $X(t)$ указанные моментные функции интеграла равны:

$$m_Z\left(t\right) = m_X\cdot t,\ R_Z\left(t_1,t_2\right) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X\left(\tau_2-\tau_1\right)d\tau_1 d\tau_2 \text{ и } D_Z = R_Z\left(t,t\right). \tag{2.79}$$

Мощность отклика линейного фильтра (***дисперсию отклика***) можно выразить через средний квадрат и математическое ожидание следующим образом

$$P_Y = D_y = M\left[y^2\left(t\right)\right] - M_Y^2,\ \text{Вт}. \tag{2.80}$$

Для ***белого шума*** спектральная плотность мощности одинакова на всех частотах

$$\begin{gathered} S\left(f\right) = N_0 = kT,\ \text{Вт/Гц, или} \\ S\left(\omega\right) = N_0 = \frac{kT}{2\pi},\ \text{Вт}\cdot\text{с}^2/\text{рад}, \end{gathered} \tag{2.81}$$

а корреляционная функция представляет собой дельта-функцию:

$$R\left(\tau\right) = N_0\delta\left(\tau\right). \tag{2.82}$$

2.6.2 Методические рекомендации к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

– владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
– знать и понимать смысл формул (2.34) – (2.81);
– знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
– знать таблицу интегралов (см. Приложение);
– уметь находить импульсную характеристику фильтра;
– уметь находить комплексную частотную характеристику фильтра;
– знать свойства интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.6.3 Контрольные вопросы

1. Какие электрические цепи (системы) называются линейными?
2. Какими функциями описываются характеристики линейных систем?
3. Что такое переходный режим линейной системы?
4. Какое воздействие линейной системы называют стационарным?
5. Как определить моментные функции отклика линейной системы с импульсной характеристикой $h(\tau)$ в переходном режиме при воздействии стационарного процесса с заданной корреляционной функцией? Как в этом случае определить среднюю мощность отклика на выходе?
6. Какой шум называется белым? Чему равна мощность белого шума? Чему равен коэффициент корреляции белого шума в совпадающие моменты времени и в разные моменты времени?
7. Какой случайный процесс называется дифференцируемым? Каковые условия существования такого процесса?
8. Как определить спектральную плотность мощности отклика идеального дифференциатора?
9. Как определить моментные функции отклика идеального дифференциатора?
10. Какой случайный процесс называется интегрируемым? Каковые условия существования такого процесса?
11. Как определить спектральную плотность мощности отклика идеального интегратора?
12. Как определить моментные функции отклика идеального интегратора?

2.6.4 Примеры решения задач

1. На вход параллельного колебательного *RLC*-контура поступает радиоимпульс длительностью *T* и амплитудой *U*0. Несущая частота радиоимпульса совпадает с центральной частотой контура. Найти выходной сигнал и максимальную мощность на выходе параллельного колебательного контура, который функционирует в колебательном режиме.

Решение:

Параллельный колебательный контур – контур, резонансные свойства которого определяются его импедансом: отношением напряжения на контуре к току, протекающему через него.

Сначала найдем импульсную характеристику параллельного колебательного контура, а затем выходной сигнал с помощью интеграла свёртки (Дюамеля).

Импульсная характеристика параллельного колебательного контура

Передаточная функция параллельного колебательного контура определяется его импедансом

$$H(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=\frac{U(s)}{U(s)\cdot\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{s\cdot L}+s\cdot C\right)}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{s\cdot L}+s\cdot C},$$

или

$$H(s)=\frac{s\cdot L}{s^2\cdot L\cdot C+\frac{L}{R}\cdot s+1}=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{1}{R\cdot C}\cdot s+\frac{1}{LC}}\ \Rightarrow$$

Обозначим:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\ \alpha=\frac{1}{2\cdot R\cdot C}\ \Rightarrow$$

$$H(s)=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\omega_0^2}=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\omega_0^2+\alpha^2-\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{\underbrace{s^2+2\cdot\alpha\cdot s+\alpha^2}_{(s+\alpha)^2}+\omega_0^2-\alpha^2}=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{(s+\alpha)^2+\underbrace{\left(\omega_0^2-\alpha^2\right)}_{\omega_d^2}}=\frac{1}{C}\cdot\frac{s}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}=$$

$$=\frac{1}{C}\cdot\frac{s-\alpha+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}=\frac{1}{C}\cdot\left(\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}-\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right)$$

Импульсная характеристика параллельного колебательного контура может быть найдена как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции:

$$h(t)=L^{-1}\left[H(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{C}\cdot\left(\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}-\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{C}\cdot L^{-1}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}-\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{C}\cdot\left(L^{-1}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]\right)\Rightarrow$$

Смотрим таблицу преобразования Лапласа:

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n\in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\mathrm{arcctg}\,p$
$t^n e^{\lambda t},\ n\in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a),\ a>0$	e^{-ap}
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		

Из таблицы преобразования Лапласа, получаем:

$$L^{-1}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_d\cdot t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{\omega_d}{\omega_d}\cdot\frac{\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]=$$

$$=L^{-1}\left[\frac{\alpha}{\omega_d}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}\right]=\frac{\alpha}{\omega_d}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega_d\cdot t),$$

или

$$h(t)=\frac{1}{C}\cdot\left[e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_d\cdot t)-e^{-\alpha\cdot t}\cdot\frac{\alpha}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right]=$$
$$=\frac{1}{C}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\left[\cos(\omega_d\cdot t)-\frac{\alpha}{\omega_d}\cdot\sin(\omega_d\cdot t)\right].$$
Используя формулу:
$$A\cdot\cos(\varphi)+B\cdot\sin(\varphi)=Z\cdot\cos(\varphi+\psi),$$
где
$$Z=\sqrt{A^2+B^2}\ \text{ и }\ \psi=arctg\left(\frac{B}{A}\right),$$
преобразуем выражение в квадратных скобках
$$A=1,\ B=-\frac{\alpha}{\omega_d}$$
$$K=\sqrt{1^2+\left(-\frac{\alpha}{\omega_d}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)^2}=\frac{\sqrt{\omega_d^2+\alpha^2}}{\omega_d}=\frac{\omega_0}{\omega_d}$$
$$\psi=arctg\left(-\frac{\alpha}{\omega_d}\right)=-arctg\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right),$$
отсюда
$$h(t)=\frac{1}{C}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_d}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_d\cdot t+\psi)=\frac{1}{C}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_d}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin\left(\omega_d\cdot t+\psi+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{C}\cdot\frac{\omega_0}{\omega_d}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin\left[\omega_d\cdot t+arctg\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right)\right].$$
Для колебательного режима, когда добротность контура высока, несущая частота значительно выше величины, обратной потерям (декременту затухания):
$$\omega_d>>\alpha\ \Rightarrow arctg\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right)\to\frac{\pi}{2},\text{ а также }\omega_d^2=\omega_0^2-\alpha^2\approx\omega_0^2$$
$$h(t)\approx\frac{1}{C}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin\left[\omega_d\cdot t+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{C}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_d\cdot t).$$
Таким образом, для колебательного режима
$$h(t)\approx\frac{1}{C}\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_d\cdot t)=A_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega_0\cdot t),$$
где
$$A_0=\frac{1}{C}.$$

Выходной сигнал параллельного колебательного контура

Пусть на вход параллельного колебательного контура поступает радиоимпульс длительностью T с частотой, совпадающей с центральной:

$$s_{вх}(t)=\begin{cases}U_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t), & t\in[0,T]\\ 0, & t\notin[0,T]\end{cases}.$$

Найдем выходной сигнал параллельного колебательного контура через интеграл свёртки:

$$s_{вых}(t)=\int_0^t s_{вх}(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t U_0\cdot\cos(\omega_0\cdot\tau)\cdot A_0\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\cos[\omega_0\cdot(t-\tau)]d\tau=$$

$$=U_0\cdot A_0\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\cos(\omega_0\cdot\tau)\cdot\cos[\omega_0\cdot(t-\tau)]d\tau\Rightarrow$$

Учитывая, что

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)=0{,}5\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

получим

$$s_{вых}(t)=U_0\cdot A_0\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\cos[\omega_0\cdot(t-\tau)]d\tau=$$

$$=\frac{U_0\cdot A_0}{2}\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\{\cos[\omega_0\cdot\tau-\omega_0\cdot(t-\tau)]+\cos[\omega_0\cdot\tau+\omega_0\cdot(t-\tau)]\}d\tau=$$

$$=\frac{U_0\cdot A_0}{2}\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot[\cos(\omega_0\cdot t)+\cos(2\cdot\omega_0\cdot\tau-\omega_0\cdot t)]d\tau=$$

$$=\frac{U_0\cdot A_0}{2}\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot[\cos(\omega_0\cdot t)+\cos(2\cdot\omega_0\cdot\tau-\omega_0\cdot t)]d\tau=$$

$$=\frac{U_0\cdot A_0}{2}\cdot\left\{\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}d\tau+\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\cos(2\cdot\omega_0\cdot\tau-\omega_0\cdot t)d\tau\right\}\Rightarrow$$

Второй интеграл

$$\int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\cos(2\cdot\omega_0\cdot\tau-\omega_0\cdot t)d\tau$$

содержит быстроосциллирующую функцию (с удвоенной высокой частотой), площадь под которой близка к нулю. Или, иначе, при взятии интеграла от произведения косинуса на экспоненту неизбежно появится множитель $\sim\frac{1}{2\cdot\omega_0}$, который при высокой удвоенной частоте будет устремлять результат интегрирования в нуль. К этому же результату можно прийти, если взять циклический интеграл.

Чтобы не путать верхний предел интегрирования с временем для удобства перейдём к другому обозначению верхнего предела интегрирования. Тогда:

$$s_{вых}(t) \approx \frac{U_0 \cdot A_0}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \int_0^{t'} e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} d\tau + 0 =$$

$$= \frac{U_0 \cdot A_0}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \int_0^{t'} e^{-\alpha\cdot t} \cdot e^{\alpha\cdot\tau} d\tau =$$

$$= \frac{U_0 \cdot A_0}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot \int_0^{t'} e^{\alpha\cdot\tau} d\tau = \frac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot \left(e^{\alpha\cdot t'} - 1\right) = .$$

Отсюда:

$$s_{вых}(t) \approx \frac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot \left(e^{\alpha\cdot t'} - 1\right) = \frac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \left[e^{-\alpha\cdot(t'-t)} - e^{-\alpha\cdot t}\right]$$

.

В пределах радиоимпульса, когда 0 ≤ t ≤ T, первая экспонента при $t' = t$ равна единице, так как $e^{-\alpha\cdot(t'-t)} = e^{-\alpha\cdot(t-t)} = e^0 = 1$. После радиоимпульса, когда t > T верхний предел интегрирования ограничен длительностью входного сигнала, т.е. $t' = T$ и экспонента $e^{-\alpha\cdot(t'-t)} = e^{-\alpha\cdot(T-t)}$.

Тогда, выходной сигнал параллельного колебательного контура с учётом $e^{-\alpha\cdot(T-t)} - e^{-\alpha\cdot t} = e^{-\alpha\cdot(t-T)} \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot T}\right)$

записывается следующим образом:

$$s_{вых}(t) = \begin{cases} \dfrac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot t}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), & t \in [0, T] \\ \dfrac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha} \cdot e^{-\alpha\cdot(t-T)} \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), & t > T \end{cases}.$$

Согласно этому выражению, выходной сигнал параллельного колебательного контура возрастает в течение длительности радиоимпульса экспоненциально с постоянной времени $\tau_{контура} = \dfrac{1}{\alpha} = 2 \cdot R \cdot C$, а после окончания импульса – убывает. Мощность сигнала на выходе колебательного контура максимальна в момент времени t = T и равна квадрату амплитуды:

$$P_{s,\max} = s_{вых}^2(T) = \left(\frac{U_0 \cdot A_0}{2\cdot\alpha}\right)^2 \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot T}\right)^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot T).$$

2. На вход параллельного колебательного *RLC*-контура поступает белый шум со спектральной плотностью мощности N_0. Найти мощность шума на выходе параллельного колебательного контура, который функционирует в колебательном режиме.

Решение:

Воспользуемся результатами решения предыдущей задачи. Найдём мощность шума на выходе параллельного колебательного контура с помощью импульсной характеристики h(τ) следующим образом:

$$P_{ш.вых} = M\left[y^2(t)\right] - M_Y^2 = \int_0^t \int_0^t R_x(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - M_Y^2,$$

где

$h(\tau)$ – импульсная характеристика колебательного контура.

Для белого шума на входе колебательного контура математическое ожидание равно нулю, т.е. $M_x = 0$. Поэтому математическое ожидание шума на выходе колебательного контура равно также нулю:

$$M_Y(t) = M\left[y(t)\right] = M_X \cdot \int_0^t h(\tau) d\tau = 0.$$

Поэтому мощность белого шума на выходе колебательного контура определяем как математическое ожидание квадрата отклика:

$$P_{ш.вых} = M\left[y^2(t)\right] = \int_0^t \int_0^t R_x(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Запишем для белого шума корреляционную функцию:

$R_x(\tau) = N_0 \cdot \delta(\tau)$.

Тогда с учётом фильтрующего свойства дельта-функции, формула для мощности шума на выходе колебательного контура преобразуем следующим образом:

$$P_{ш.вых} = \int_0^t \int_0^t N_0 \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= N_0 \cdot \int_0^t \underbrace{\left\{ \int_0^t \delta(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) d\tau_1 \right\}}_{h(\tau_2)} h(\tau_2) d\tau_2 = N_0 \cdot \int_0^t h^2(\tau_2) d\tau_2,$$ или, в других обозначениях

$$P_{ш.вых} = N_0 \cdot \int_0^t h^2(\tau) d\tau.$$

Подставим в предыдущую формулу выражение импульсной характеристики колебательного контура для условий колебательного режима и проинтегрируем:

$$P_{ш.вых} = N_0 \cdot \int_0^t h^2(\tau) d\tau = N_0 \cdot \int_0^t \left\{ A_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \right\}^2 d\tau =$$

$$= A_0^2 \cdot N_0 \cdot \int_0^t e^{-2 \cdot \alpha \cdot \tau} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot \tau) d\tau = \left| \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2 \cdot \alpha)}{2} \right| =$$

$$=\frac{A_0^2\cdot N_0}{2}\cdot\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\left\{1+\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)\right\}d\tau=$$

$$=\frac{A_0^2\cdot N_0}{2}\cdot\left\{\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}d\tau+\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau\right\}.$$

Решим первый интеграл:

$$\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}d\tau=-\frac{1}{2\cdot\alpha}\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}d\left(-2\cdot\alpha\cdot\tau\right)=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\bigg|_0^t=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}-e^0}{2\cdot\alpha}=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}-1}{2\cdot\alpha}=\frac{1-e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}.$$

Решим второй интеграл по частям как циклический:

$$W=\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau=\left|U\cdot V\big|_0^t-\int_0^t VdU\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}U=\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right) & dU=-2\cdot\omega_0\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau\\ dV=e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}d\tau & V=-\dfrac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)\bigg|_0^{t=T}-\int_0^t\left(-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\right)\cdot\left(-2\cdot\omega_0\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)\right)d\tau=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot T}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot T\right)+\frac{1}{2\cdot\alpha}-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\underbrace{\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau}_{Z}\Rightarrow$$

$$Z=\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau=\left|U\cdot V\big|_0^t-\int_0^t VdU\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}U=\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right) & dU=2\cdot\omega_0\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau\\ dV=e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}d\tau & V=-\dfrac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)\bigg|_0^t-\int_0^t\left(-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}}{2\cdot\alpha}\right)\cdot\left(2\cdot\omega_0\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)\right)d\tau=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\underbrace{\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)dt}_{W}=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot W$$

Тогда, подставляя указанные выше переменные:

$$W=\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau=$$

$$=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)+\frac{1}{2\cdot\alpha}-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\left\{-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot W\right\}\Rightarrow$$

Получаем уравнение:

$$W=-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)+\frac{1}{2\cdot\alpha}-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\left\{-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot W\right\}.$$

Решим его относительно W:

$$W\cdot\left(1+\frac{\omega_0^2}{\alpha^2}\right)=\frac{1}{2\cdot\alpha}+\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)$$

$$W\cdot\frac{\alpha^2+\omega_0^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2\cdot\alpha}+\frac{\omega_0\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha^2}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)$$

Отсюда:

$$\int_0^t e^{-2\cdot\alpha\cdot\tau}\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot\tau\right)d\tau=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}\left\{\frac{1}{2\cdot\alpha}+\frac{\omega_0\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha^2}\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)\right\}.$$

Тогда, мощность шума на выходе параллельного колебательного контура в момент времени T:

$$P_{ш.вых}=\frac{A_0^2\cdot N_0}{2}\left\{\frac{1-e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}\left[\frac{1}{2\cdot\alpha}+\frac{\omega_0\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha^2}\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-\frac{e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{2\cdot\alpha}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)\right]\right\},$$

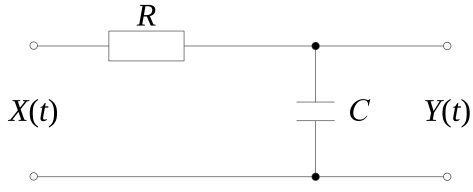
или

$$P_{ш.вых}=\frac{A_0^2\cdot N_0}{2\cdot 2\cdot\alpha}\cdot\left\{1-e^{-2\cdot\alpha\cdot t}-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega_0^2}\cdot\left[1+\frac{\omega_0\cdot e^{-2\cdot\alpha\cdot t}}{\alpha}\cdot\sin\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)-e^{-2\cdot\alpha\cdot t}\cdot\cos\left(2\cdot\omega_0\cdot t\right)\right]\right\}.$$

3. На вход RC-цепи поступает белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности N_0. Определить математическое ожидание, средний квадрат, мощность и корреляционную функцию отклика (напряжения), снимаемого с конденсатора C.

Решение:

В условии задачи RC-цепь представляет собой фильтр низких частот, поскольку напряжение снимается с конденсатора:



Поскольку на вход фильтра подаётся белый шум $X(t)$, представляющий стационарный случайный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности N_0, то отклик $Y(t)$ также представляет собой случайный процесс.

Найдем сначала математическое ожидание отклика фильтра низких частот. Белый шум имеет математическое ожидание равное нулю, т. е. $M_X = 0$. Математическое ожидание отклика может быть найдено по формуле (2.63):

$$M_Y(t) = M_X \int_0^t h(\tau)d\tau = 0 \cdot \int_0^t h(\tau)d\tau = 0.$$

Таким образом, в данном случае математическое ожидание отклика $Y(t)$ не зависит от времени и равно нулю.

Найдем теперь средний квадрат отклика по формуле (2.64):

$$M\left[y^2(t)\right] = \int_0^t \int_0^t R_X(\tau_1 - \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Для этого необходимо знать корреляционную функцию случайного процесса на входе фильтра и импульсную характеристику фильтра. Для белого шума корреляционная функция $R_X(\tau)$ представляет собой дельта-функцию:

$$R_x(\tau) = N_0\delta(\tau).$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, перепишем предыдущее выражение как:

$$M\left[y^2(t)\right] = N_0 \int_0^t \int_0^t \delta(\tau_1 - \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \right| = N_0 \int_0^t h^2(\tau_2)d\tau_2.$$

Найдем импульсную характеристику RC-фильтра низких частот первого порядка. Для этого запишем сначала его комплексную частотную характеристику $K(j\omega)$. По определению:

$$K(j\omega) = \frac{U_{вых}(j\omega)}{U_{вх}(j\omega)} = \frac{I_{вых}(j\omega)Z_{вых}(j\omega)}{I_{вх}(j\omega)Z_{вх}(j\omega)},$$

где $U_{\text{вых}}(j\omega)$ – спектр выходного напряжения RC-фильтра;

$U_{\text{вх}}(j\omega)$ – спектр входного напряжения RC-фильтра;

$I_{\text{вых}}(j\omega)$ – спектр выходного тока RC-фильтра;

$I_{\text{вх}}(j\omega)$ – спектр входного тока RC-фильтра;

$Z_{\text{вых}}(j\omega)$ – комплексное выходное сопротивление RC-фильтра;

$Z_{\text{вх}}(j\omega)$ – комплексное входное сопротивление RC-фильтра.

В данном случае RC-фильтр представляет собой последовательное соединение резистора сопротивлением R и конденсатора ёмкостью C. При последовательном соединении элементов токи одинаковые, поэтому $I_{\text{вых}}(j\omega) = I_{\text{вх}}(j\omega)$ и после их сокращения можно записать:

$$K(j\omega) = \frac{Z_{вых}(j\omega)}{Z_{вх}(j\omega)}.$$

Комплексное входное сопротивление RC-фильтра образовано последовательным соединением резистора и конденсатора, поскольку протекающий ток от верхнего входного зажима по очереди проходит через указанные элементы к нижнему зажиму:

$$Z_{\text{вых}}(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

Комплексное выходное сопротивление RC-фильтра образовано только конденсатором, поскольку напряжение снимается только с этого элемента:

$$Z_{\text{вых}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}.$$

Отсюда, комплексная частотная характеристика записывается в виде:

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\beta},$$

где β – постоянная времени RC-фильтра низких частот.

Перейдем теперь к передаточной функции $H(s)$, сделав замену $j\omega = s$:

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT} = \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} + s} = \frac{F}{F + s},$$

где $F = 1/RC$.

Для нахождения импульсной характеристики согласно формуле (2.61) возьмём обратное преобразование Лапласа от передаточной функции с помощью таблицы изображений по Лапласу из приложения:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_C H(s)e^{st}dt = \frac{F}{2\pi j}\int_C \frac{e^{st}}{F + s}dt = \left| L^{-}\left[\frac{1}{F + s}\right] = e^{-Ft} \right| =$$

$$= Fe^{-Ft} = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Таким образом, импульсная характеристика RC-фильтра низких частот первого порядка описывается следующим выражением:

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-\frac{t}{\beta}}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}.$$

В результате, получим следующее выражение для среднего квадрата отклика фильтра низких частот:

$$M\left[y^2(t)\right]=\int_0^t\int_0^t N_0\delta(\tau_1-\tau_2)\frac{1}{\beta}e^{-\frac{\tau_1}{\beta}}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{\tau_2}{\beta}}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\frac{N_0}{\beta^2}\int_0^t e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}}d\tau_2=\frac{N_0}{\beta^2\left(-\frac{2}{\beta}\right)}e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}}\Bigg|_0^t=-\frac{N_0}{2\beta}\left(e^{-\frac{2t}{\beta}}-e^0\right)=\frac{N_0}{2\beta}\left(1-e^{-\frac{2t}{\beta}}\right).$$

В начальный момент времени $t=0$ средний квадрат равен нулю, а затем постепенно возрастает, устанавливаясь при $t\to\infty$ до уровня

$$M\left[y^2(t)\right]=\frac{N_0}{2\beta}.$$

Считая, что полоса пропускания фильтра низких частот по уровню половинной мощности (- 3 дБ) равна

$$\Delta F=\frac{1}{2\pi\beta},$$

получим следующее выражение для среднего квадрата

$$M\left[y^2(t)\right]=\pi N_0\Delta F.$$

Мощность (дисперсия) отклика, связана со средним квадратом и математическим ожиданием отклика, следующим выражением (2.65):

$$P_Y=M\left[y^2(t)\right]-M_Y^2.$$

Используя это выражение, найдем мощность случайного процесса на выходе фильтра:

$$P_Y=\pi N_0\Delta F-0=\pi N_0\Delta F\ \text{Вт}.$$

Отметим, что мощность случайного процесса на выходе фильтра пропорциональна полосе пропускания и является конечной. На входе фильтра мощность случайного процесса стремится к бесконечности.

Найдем теперь корреляционную функцию отклика фильтра низких частот. Для этого воспользуемся формулой (2.65):

$$R_Y(\tau)=\int_0^t\int_0^{t+\tau}R_X(\tau-\tau_2+\tau_1)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

которая с учётом введённой выше корреляционной функции и импульсной характеристики фильтра низких частот перепишется в виде

$$R_Y(\tau)=N_0\int_0^t\int_0^{t+\tau}\delta(\tau-\tau_2+\tau_1)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=N_0\int_0^{t+\tau}h(\tau_2-\tau)h(\tau_2)d\tau_2.$$

Чтобы оба сомножителя в подынтегральном выражении были отличны от нуля, необходимо выполнение двух неравенств, связанных с физической реализуемостью фильтра низких частот:

$$\tau_2>0 \text{ и } \tau_2-\tau>0.$$

С точки зрения физической реализуемости, $\tau_1 = \tau_2 - \tau$ не должна превышать $t+\tau$ – верхний предел внутреннего интеграла по переменной τ_1, а τ_2 не должна превышать верхний предел t внешнего интеграла по τ_2. Это означает, что в область интегрирования будут входить такие значения τ_2, для которых справедливы следующие неравенства:

$$0 < \tau_1 < t + \tau$$

$$0 < \tau_2 - \tau < t + \tau$$

$$\tau < \tau_2 < t + 2\tau$$

и

$$0 < \tau_2 < t.$$

Если $\tau > 0$, то неравенства $\tau < \tau_2 < t + 2\tau$ и $0 < \tau_2 < t$ совместно выполняются в области: $\tau < \tau_2 < t$.

Если $\tau < 0$, то неравенства $\tau < \tau_2 < t + 2\tau$ и $0 < \tau_2 < t$ совместно выполняются в области: $0 < \tau_2 < t$.

Перепишем пределы интегрирования при $\tau > 0$ и решим указанный выше интеграл:

$$R_Y(\tau) = N_0 \int_\tau^t h(\tau_2 - \tau) h(\tau_2) d\tau_2 = N_0 \int_\tau^t \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\tau_2 - \tau}{\beta}} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0}{\beta^2} \int_\tau^t e^{-\frac{\tau_2 - \tau}{\beta}} e^{-\frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \int_\tau^t e^{\frac{-\tau_2 + \tau}{\beta} - \frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \int_\tau^t e^{\frac{1}{\beta}(-\tau_2 + \tau - \tau_2)} d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0}{\beta^2} e^{\frac{\tau}{\beta}} \int_\tau^t e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \left(-\frac{\beta}{2}\right) e^{\frac{\tau}{\beta}} e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}} \Big|_\tau^t = -\frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \left(e^{-\frac{2t}{\beta}} - e^{-\frac{2\tau}{\beta}} \right) = \frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \left(e^{-\frac{2\tau}{\beta}} - e^{-\frac{2t}{\beta}} \right).$$

Теперь перепишем пределы интегрирования при $\tau < 0$ и решим указанный выше интеграл:

$$R_Y(\tau) = N_0 \int_0^t h(\tau_2 - \tau) h(\tau_2) d\tau_2 = N_0 \int_0^t \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\tau_2 - \tau}{\beta}} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0}{\beta^2} \int_0^t e^{-\frac{\tau_2 - \tau}{\beta}} e^{-\frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \int_0^t e^{\frac{-\tau_2 + \tau}{\beta} - \frac{\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \int_0^t e^{\frac{1}{\beta}(-\tau_2 + \tau - \tau_2)} d\tau_2 =$$

$$= \frac{N_0}{\beta^2} e^{\frac{\tau}{\beta}} \int_0^t e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}} d\tau_2 = \frac{N_0}{\beta^2} \left(-\frac{\beta}{2}\right) e^{\frac{\tau}{\beta}} e^{-\frac{2\tau_2}{\beta}} \Big|_0^t = -\frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \left(e^{-\frac{2t}{\beta}} - 1 \right) = \frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\beta}} \right).$$

Таким образом, корреляционная функция отклика $R_Y(\tau)$ фильтра низких частот запишется следующим образом:

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \begin{cases} e^{-\frac{2\tau}{\beta}} - e^{-\frac{2t}{\beta}} & \tau > 0 \\ 1 - e^{-\frac{2t}{\beta}} & \tau < 0 \end{cases}.$$

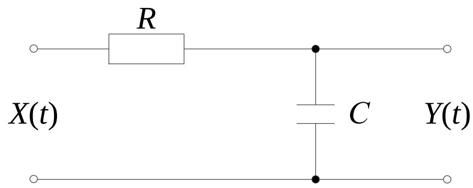
В установившемся режиме при $t \to \infty$ корреляционная функция отклика $R_Y(\tau)$ фильтра низких частот стремится к следующему значению:

$$\lim_{t\to\infty} R_Y(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{N_0}{2\beta} e^{\frac{\tau}{\beta}} \begin{cases} e^{-\frac{2\tau}{\beta}} - e^{-\frac{2t}{\beta}} & \tau > 0 \\ 1 - e^{-\frac{2t}{\beta}} & \tau < 0 \end{cases} = \frac{N_0}{2\beta} e^{-\frac{|\tau|}{\beta}}.$$

4. На вход RC-цепи поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с математическим ожиданием $\mathrm{M}_X = 5$. Определить математическое ожидание отклика (напряжения), снимаемого с конденсатора C. Является ли отклик стационарным случайным процессом?

Решение:

В условии задачи RC-цепь представляет собой фильтр низких частот, поскольку напряжение снимается с конденсатора:



Математическое ожидание отклика может быть найдено по формуле (2.63):

$$M_Y(t) = M_X \int_0^t h(\tau)\,d\tau.$$

Воспользуемся результатами предыдущей задачи и запишем импульсную характеристику RC-фильтра низких частот:

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, & \tau \ge 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}, & \tau \ge 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases},$$

где $\beta = RC$ – постоянная времени.

Подставим это выражение в формулу (2.63), получим:

$$M_Y(t) = M_X \int_0^t \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\tau}{\beta}} d\tau = \frac{M_X}{\beta} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{\beta}} d\tau = -\frac{M_X}{\beta} \beta e^{-\frac{\tau}{\beta}} \Bigg|_0^t =$$

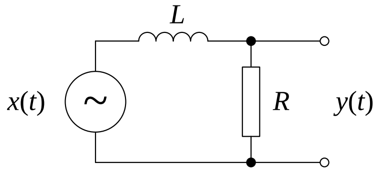
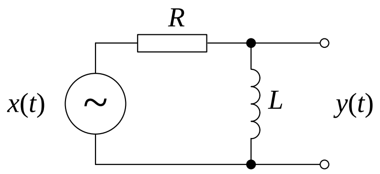
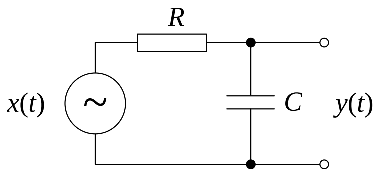
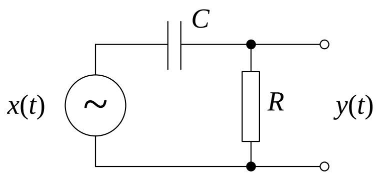
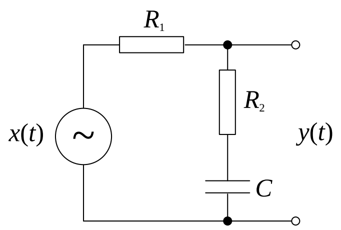
$$= M_X \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right).$$

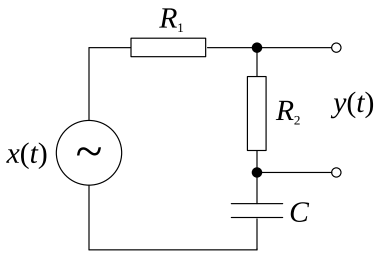
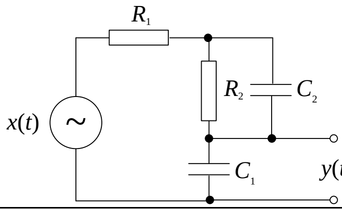
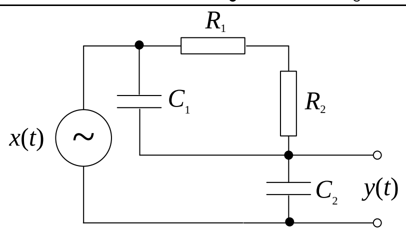
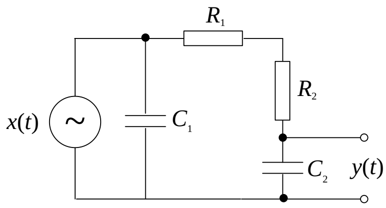
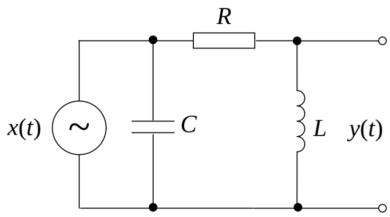
Из этого выражения видно, что существует переходный и установившийся режим отклика. В переходном режиме случайный процесс нестационарный, а в установившемся – стационарный.

2.6.5 Упражнения

1. На вход линейной системы поступает белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности N_0. Определить импульсную характеристику линейной системы, математическое ожидание, средний квадрат, мощность и корреляционную функцию отклика $Y(t)$, а также изобразить полученные временные зависимости. Линейная система представляет собой пассивный электрический фильтр из таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Пассивные электрические фильтры

а)	
б)	
в)	
г)	
д)	
е)	идеальный интегратор
ж)	идеальный дифференциатор

з)	
и)	
к)	
л)	
м)	

2. Входным воздействием линейной системы является стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $R_X(\tau)$:

а) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

б) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \left(1 + e^{-\alpha|\tau|}\right)$;

в) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \left(1 + \alpha|\tau|\right) e^{-\alpha|\tau|}$;

г) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \cos(\omega_0 \tau)$;

д) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \alpha|\tau| \cos(\omega_0 \tau)$;

е) $R_X(\tau) = \sigma_X^2\, \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2 \tau^2}{2}} \cos(\omega_0 \tau)$;

ж) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \dfrac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau} \cos(\omega_0 \tau)$;

з) $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \left[\cos(\omega_1 \tau) + \sin(\omega_2 \tau)\right]$;

и) $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos(\omega_0\tau)+\dfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0|\tau|)\right)$;

к) $R_X(\tau)=\dfrac{N_0\beta}{\pi}\dfrac{\sin(\beta\tau)}{\beta\tau}$.

Определить для отклика $Y(t)$ линейной системы:

а) средний квадрат;
б) математическое ожидание;
в) среднюю мощность,

если линейная система представлена фильтром из задания № 1.

г) как зависит мощность и математическое ожидание отклика от возможных параметров линейной системы?

3. Квазидетерминированный случайный процесс описывается выражением $x(t)=M+B\cdot\cos(20t+\theta)$, где M – случайная величина с гауссовской плотностью вероятностей, математическое ожидание и дисперсия которой соответственно равны 5 и 64; B – случайная величина с релеевской плотностью вероятностей и средним квадратом, равным 32; θ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0,2\pi]$. Все три случайные величины M, B и θ взаимно независимы. Данный случайный процесс воздействует на вход линейной системы, импульсная которой равна

$$h(t)=10\exp(-10t)u(t),$$

где $u(t)$ – единичная ступенчатая функция.

Определить:

д) Выражение для случайного процесса на выходе системы.
е) Математическое ожидание выходного процесса.
ж) Значение среднего квадрата выходного процесса.

На вход интегратора со сбросом воздействует белый шум, имеющий двустороннюю спектральную плотность, равную $0{,}25\ \text{В}^2/\text{Гц}$. Импульсная переходная характеристика интегратора определяется выражением

$$h(t)=5\left[u(t)-u(t-0{,}2)\right],$$

где $u(t)$ – единичная ступенчатая функция.

Найдите:

з) математическое ожидание случайного процесса на выходе этой системы;
и) значение среднего квадрата выходного процесса.

5. Для случая воздействия белого шума на вход интегратора со сбросом, импульсная переходная характеристика которого определена в предыдущем упражнении, определите значение корреляционной функции выходного процесса при следующих τ: а) $\tau=0$; б) $\tau=0{,}1$; в) $\tau=0{,}21$.

6. Импульсная переходная характеристика линейной системы имеет вид

$$h(t)=3\exp(-3t)u(t).$$

На вход этой системы воздействует случайный процесс, корреляционная функция которого равна:

$$R_X(\tau) = 2\exp(-4|\tau|).$$

Определите корреляционную функцию отклика при следующих значениях ее аргумента: а) $\tau = 0$; б) $\tau = 0{,}5$; в) $\tau = 1$.

7. Процесс Винера $Y(t)$ связан с процессом $X(t)$ соотношением

$$y(t) = \int_0^t x(s)\,ds,$$

где $X(t)$ – белый шум с функцией корреляции $R_X(\tau) = N_0\delta(\tau)$.

Определить:

к) Корреляционную функцию процесса $Y(t)$;

л) Дисперсию D_y процесса $Y(t)$.

8. К конденсатору с ёмкостью C в момент времени $t = 0$ подключается флуктуационный ток $X(t)$, представляющий собой белый шум со спектральной плотностью N_0. Найти дисперсию напряжения D_y на конденсаторе.

9. К конденсатору с ёмкостью C в момент времени $t = 0$ подключается флуктуационный ток $X(t)$, представляющий собой случайный процесс с корреляционной функцией: $R_X(\tau) = \sigma^2\exp(-\beta|\tau|)$.

Найти дисперсию напряжения D_y на конденсаторе.

10. Импульсная характеристика интегратора со сбросом имеет вид:

$$h(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le \tau \le 0{,}5, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

На вход этого интегратора воздействует белый шум $x(t)$ с двусторонней спектральной плотностью, равной 10 $\text{В}^2/\text{Гц}$.

Определить:

м) математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ на выходе интегратора;

н) значение среднего квадрата выходного напряжения;

о) дисперсию выходного процесса.

11. Случайный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = 16\exp(-2|\tau|) + 16$$

воздействует на вход линейной системы, импульсная характеристика которой равна:

$$h(t) = \delta(t) - 2\exp(-2t)u(t).$$

Определите:

п) математическое ожидание случайного процесса $y(t)$ на выходе этой линейной системы;

р) дисперсию выходного процесса.

12. На цепь, составленную из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R, воздействует напряжение $x(t)$, представляющее собой белый шум со спектральной плотностью N_0.

Найдите спектральную плотность и корреляционную функцию напряжения $y(t)$ на сопротивлении.

13. Для линейной системы с импульсной характеристикой вида

$$h(t) = t\exp(-3t)u(t).$$

Найдите значение среднего квадрата выходного процесса при воздействии на ее вход случайного процесса $x(t)$, спектральная плотность которого имеет вид

$$S_X(\omega) = \frac{1800}{\omega^2 + 900}.$$

2.7 Тема № 5 «Анализ линейной системы в установившемся режиме при стационарном воздействии»

2.7.1 Сведения из теории

Анализ линейной системы в установившемся режиме при воздействии на её вход стационарного случайного процесса удобно проводить в частотной области. Для этого находят спектральную плотность отклика с помощью выражения:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) K(j\omega) K^*(j\omega) = S_X(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2, \qquad (2.83)$$

где $K(j\omega)$ – комплексная частотная характеристика линейной системы;

или, в области комплексных частот p, где мнимая ось имеет значение вещественной угловой частоты ω, с помощью выражения

$$S_Y(p) = S_X(p) H(p) H(-p), \qquad (2.84)$$

где $H(p)$ – передаточная функция линейной системы.

На основе выражений (2.83), (2.84) может быть найдена частотная характеристика формирующего фильтра по заданной спектральной плотности мощности отклика. Для этого в качестве входного воздействия необходимо рассматривать белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0\delta(\omega)$.

Для определения среднего квадрата (мощности) отклика линейной системы в установившемся режиме, используют выражение, аналогичное (2.29):

$$M\left[Y^2\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(f)df=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_Y(p)dp \qquad (2.85)$$

или

$$M\left[Y^2\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c(p)c(-p)}{d(p)d(-p)}dp, \qquad (2.86)$$

где $c(p)$, $c(-p)$ – полиномы относительно p, которые могут быть записаны в виде

$$c(p)=c_{n-1}p^{n-1}+c_{n-2}p^{n-2}+...+c_0, \text{ и } d(p)=d_np^n+d_{n-1}p^{n-1}+...+d_0;$$

n – наивысшая степень полинома знаменателя.

Эти полиномы могут быть найдены в результате факторизации спектральной плотности мощности.

Зная коэффициенты c_i, d_j можно найти значение интеграла (2.86). Это значение выражается через указанные коэффициенты, в зависимости от n, следующим образом:

$$n=1,\quad J_1=\frac{c_0^2}{2d_0d_1},$$

$$n=2,\quad J_2=\frac{c_1^2d_0+c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2},$$

$$n=3,\quad J_3=\frac{c_2^2d_0d_1+\left(c_1^2-c_0c_2\right)d_0d_3+c_0^2d_1d_3}{2d_0d_3\left(d_1d_2-d_0d_3\right)},$$

$$n=4,\quad J_4=\frac{1}{2d_0d_4\left(-d_0d_3^2-d_1^2d_4+d_1d_2d_3\right)}\times$$

$$\times\left[c_3^2\left(-d_0^2d_3+d_0d_1d_2\right)+\left(c_2^2-2c_1c_3\right)d_0d_1d_4+\left(c_1^2-2c_0c_2\right)d_0d_3d_4+c_0^2\left(-d_1d_4^2+d_2d_3d_4\right)\right].$$

Математическое ожидание отклика линейной системы при стационарном входном воздействии может быть найдено следующим образом:

$$m_Y=m_XH(0), \qquad (2.87)$$

где $H(0)$ – значение передаточной функции линейной системы при $s=0$.

Мощность отклика линейной системы при стационарном входном воздействии может быть найдена следующим образом:

$$P_Y=M\left[Y^2(t)\right]-m_Y^2,\text{ Вт.} \qquad (2.88)$$

Спектральный состав отклика линейной системы связан с корреляционными свойствами во временной области формулами Винера-Хинчина:

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,$$
$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \qquad (2.89)$$

Эффективная ширина энергетического спектра отклика может быть найдена из следующего равенства:

$$\Delta\omega_{эф}\tau_k = \frac{\pi}{2},$$
$$\Delta f_{эф}\tau_k = \frac{1}{4}, \qquad (2.90)$$

где $\Delta\omega_{эф}$ – эффективная ширина спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса (в рад/с);

$\Delta f_{эф}$ – эффективная ширина спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса (в Гц);

τ_k – интервал корреляции стационарного случайного процесса

или непосредственно из спектральной плотности мощности:

$$\Delta\omega_{эф} = \frac{1}{S_X(0)}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega, \text{ рад/с.} \qquad (2.91)$$

Для оценки отношения сигнал/шум на выходе линейных приёмных трактов нередко используется понятие ***эффективной шумовой полосы*** B – полосы идеального фильтра с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой, на выходе которого средний квадрат отклика такой же, как и на выходе реального фильтра. При этом считается, что идеальный и реальный фильтры возбуждаются белым шумом.

Для определения эффективной шумовой полосы используется следующее выражение:

$$B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} H(p)H(-p)dp\right], \qquad (2.92)$$

где $H(p)$ – нормированная на максимальное значение передаточная функция линейной системы.

Для ненормированной передаточной функции линейной системы формула (2.88) перепишется следующим образом:

$$B=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi j\left|H(0)\right|^{2}}\int_{-j\infty}^{j\infty}H(p)H(-p)dp\right]. \qquad (2.93)$$

Отметим, что эквивалентная шумовая полоса идеального фильтра в общем случае не совпадает с полосой пропускания реального фильтра на уровне половинной мощности. Однако, чем ближе график модуля комплексной частотной характеристики реального фильтра к прямоугольной конфигурации (т. е. чем круче скаты амплитудно-частотной характеристики), тем больше степень совпадения эквивалентной шумовой полосы и полосы пропускания на уровне половинной мощности.

2.7.2 Методические указания решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

- владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
- знать и понимать смысл формул (2.82) – (2.89);
- знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
- знать таблицу интегралов (см. Приложение);
- уметь представлять спектральную плотность мощности как функцию комплексной частоты в результате перехода $j\omega \to s$;
- уметь факторизовать спектральную плотность мощности;
- уметь вычислять коэффициенты полиномов факторизованной спектральной плотности мощности и через них вычислять значение интеграла;
- знать представление тригонометрических функций с помощью формулы Эйлера:

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\ \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j};$$

- знать представление дельта-функции через интеграл:

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt \text{ или } \delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}d\omega;$$

- знать свойства интегралов (см. Приложение);
- уметь находить импульсную характеристику фильтра;
- уметь находить комплексную частотную характеристику фильтра.

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.7.3 Контрольные вопросы

1. Что такое установившийся режим линейной системы? Чем установившийся режим линейной системы отличается от переходного режима?
2. Как связаны спектральная плотность отклика линейной системы и входного воздействия?
3. Какой фильтр называется формирующим? Какое воздействие поступает на вход формирующего фильтра?
4. Как определить средний квадрат отклика линейной системы в установившемся режиме при стационарном случайном процессе на входе?
5. Как определить математическое ожидание и среднюю мощность отклика линейной системы при стационарном воздействии? Что для этого нужно знать?
6. Что нужно знать для определения корреляционной функции отклика в установившемся режиме при стационарном воздействии?
7. Что такое эффективная шумовая полоса линейной системы? Поясните графически. Что нужно знать для определения эффективной шумовой полосы?
8. На вход линейной цепи с частотной характеристикой $K(j\omega)$ воздействует стационарный случайный процесс с заданной спектральной плотностью мощности $S_X(\omega)$. Как найти спектральную плотность мощности и корреляционную функцию отклика линейной цепи в установившемся режиме?
9. На вход линейной цепи с частотной характеристикой $K(j\omega)$ воздействует стационарный гауссовский случайный процесс с заданной спектральной плотностью мощности $S_X(\omega)$. Как найти плотность вероятности отклика линейной цепи в установившемся режиме?

2.7.4 Примеры решения задач

1. Найти передаточную функцию формирующего фильтра, на выходе которого спектральная плотность отклика описывается следующим выражением:

$$\boldsymbol{S_Y(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+64}.}$$

$$\boldsymbol{S_Y(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+64}.}$$

Решение:

Воспользуемся выражением (2.84) для нахождения передаточной функции формирующего фильтра:

$$S_Y(p)=S_X(p)H(p)H(-p).$$

Чтобы найти передаточную функцию формирующего фильтра, необходимо записать спектральную плотность отклика как функцию комплексной частоты p, а затем факторизовать её.

Запишем спектральную плотность отклика как функцию комплексной частоты p, сделав замену $j\omega\to p$ в выражении для $S_Y(\omega)$. Получим образ по Лапласу следующего вида:

$$S_Y(p)=\frac{-p^2+1}{p^4+64}.$$

Найдем нули и полюса $S_Y(p)$:

$$p_{1,2}=\pm 1 \text{ – нули,}$$

$$p_{3,4}=-2\pm j2 \text{ и } p_{5,6}=2\pm j2 \text{ – полюса.}$$

Тогда выразим числитель и знаменатель через нули и полюса:

$$S_Y(p)=\frac{(p+1)(-p+1)}{(p+2+j2)(p+2-j2)(-p+2+j2)(-p+2-j2)}=$$

$$=\frac{(p+1)(-p+1)}{\left(p^2+4p+8\right)\left(p^2-4p+8\right)}.$$

Теперь сгруппируем части, лежащие в левой и правой полуплоскостях. Получим следующее выражение:

$$S_Y(p)=\frac{(p+1)}{\left(p^2+4p+8\right)}\cdot\frac{(-p+1)}{\left(p^2-4p+8\right)}=H(p)H(-p).$$

Отсюда, передаточная функция формирующего фильтра, равна:

$$H(p)=\frac{(p+1)}{\left(p^2+4p+8\right)}.$$

Входным воздействием RC-цепи является стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $R_X(\tau)$:

$$\boldsymbol{R_X(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} + 36.}$$

Определить:

с) математическое ожидание отклика $Y(t)$;

т) средний квадрат отклика $Y(t)$;

у) мощность отклика $Y(t)$, если отклик в установившемся режиме наблюдается на конденсаторе.

Решение:

Если отклик RC-цепи наблюдается на конденсаторе, то такая цепь является фильтром низких частот.

Математическое ожидание отклика RC-фильтра низких частот найдем с помощью формулы (2.87):

$$m_Y = m_X H(0).$$

Передаточную функцию RC-фильтра низких частот найдем по комплексной частотной характеристике $K(j\omega)$, которая записывается следующим образом:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T},$$

где $T = RC$ – постоянная времени.

Тогда передаточная функция $H(p)$ RC-фильтра низких частот путём замены $j\omega \to p$ запишется следующим образом:

$$H(p) = \frac{1}{1 + pT}.$$

С другой стороны, нужно определить математическое ожидание входного воздействия $X(t)$. Согласно 4-му свойству корреляционной функции случайного процесса «*Математическое ожидание можно определить по корреляционной функции, устремив аргумент в бесконечность,* $R_X(\infty) = m_X^2$» находим математическое ожидание стационарного случайного процесса $X(t)$ в указанные моменты времени, поскольку корреляционная функция не содержит периодических составляющих:

$$m_X = \pm\sqrt{\lim_{\tau\to\infty} \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} + 36} \to \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Отсюда, математическое ожидание отклика RC-фильтра низких частот равно:

$$m_Y = \left.\frac{\pm 6}{1+pT}\right|_{p=0} = \pm 6.$$

Средний квадрат отклика RC-фильтра низких частот можно найти с помощью формулы (2.85):

$$M\left[Y^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} S_Y(p)dp.$$

Спектральную плотность отклика RC-фильтра низких частот найдем с помощью выражения (2.83):

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)K(j\omega)K^*(j\omega) = S_X(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2.$$

Для этого получим сначала спектральную плотность входного воздействия с помощью формул Винера-Хинчина (2.31):

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} + 36\right)e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= \sigma_x^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau + 36\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Второе слагаемое $36\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau$, как известно, представляет собой произведение константы 36 на дельта-функцию, поскольку:

$$2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}d\tau.$$

Поэтому второе слагаемое запишем как:

$36\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}d\tau = 36\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega)$ – мощность постоянной (частота $\omega = 0$) составляющей случайного процесса.

Рассмотрим теперь первое слагаемое:

$$\sigma_x^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau = \left\|\tau\right| = \begin{cases}\tau,\ \tau\ge 0\\ -\tau,\ \tau<0\end{cases}\right| = \sigma_x^2\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau\right\} =$$

$$= \sigma_x^2\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(\alpha-j\omega\tau)}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau(\alpha+j\omega\tau)}d\tau\right\} =$$

$$= \sigma_x^2\left\{\frac{1}{(\alpha-j\omega)}e^{\tau(\alpha-j\omega\tau)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{(\alpha+j\omega)}e^{-\tau(\alpha+j\omega\tau)}\Big|_{-\infty}^{0}\right\} =$$

$$= \sigma_x^2\left\{\frac{1}{(\alpha-j\omega)} + \frac{1}{(\alpha+j\omega)}\right\} = \sigma_x^2\left\{\frac{\alpha-j\omega+\alpha+j\omega}{(\alpha-j\omega)(\alpha+j\omega)}\right\} =$$

$$= \sigma_x^2\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2 - j\alpha\omega + j\alpha\omega + \omega^2}\right\} = \sigma_x^2\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right\}$$ – случайная составляющая.

Отсюда получаем, что спектральная плотность мощности входного воздействия, равна:

$$S_X(\omega) = \sigma_x^2 \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right\} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Поскольку спектральная плотность мощности представляет собой сумму постоянной составляющей и дробно-рациональной функции, удобней находить спектральную плотность мощности отклика по формуле (2.84):

$$S_Y(p) = S_X(p) H(p) H(-p).$$

Осуществляя замену $j\omega \to p$, получим спектральную плотность мощности входного воздействия в области комплексной частоты s:

$$S_X(p) = \left\{ \frac{2\sigma_x^2 \alpha}{-p^2 + \alpha^2} \right\} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p) = \left\{ \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{p + \alpha} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{-p + \alpha} \right\} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p).$$

Отсюда, находим спектральную плотность отклика RC-фильтра низких частот:

$$S_Y(p) = \left[\sigma_x^2 \left\{ \frac{2\alpha}{-p^2 + \alpha^2} \right\} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p) \right] \frac{1}{1 + pT} \frac{1}{1 - pT} =$$

$$= \left[\frac{2\alpha\sigma_x^2}{-p^2 + \alpha^2} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p) \right] \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} + p} \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} - p} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{p + \alpha} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{-p + \alpha} + 36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p) \right] \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} + p} \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} - p} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{p + \alpha} \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} + p} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{-p + \alpha} \frac{\frac{1}{T}}{\frac{1}{T} - p} + \frac{36 \cdot 2\pi \cdot \delta(p)}{1 + pT} \right] =$$

$$= \left[\frac{c(p)}{d(p)} \cdot \frac{c(-p)}{d(-p)} + \frac{36 \cdot 2\pi \cdot \delta(s)}{1 + sT} \right],$$

где указанные полиномы числителя и знаменателя равны

$$c(p) = \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{T} \quad \text{и} \quad d(p) = p^2 + \left(\alpha + \frac{1}{T} \right) p + \frac{\alpha}{T}.$$

Максимальная степень полинома знаменателя равна 2. Воспользуемся теперь выражением (2.86) для нахождения среднего квадрата отклика:

$$M\left[Y^2\right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(p)c(-p)}{d(p)d(-p)} dp + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{36 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)}{1 + (\omega T)^2} df = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2} + 36,$$

где

$$c_0 = \frac{\sqrt{2\sigma_x^2\alpha}}{T}, \quad c_1 = 0,$$

$$d_0 = \frac{\alpha}{T},\ d_1 = 2T,\ d_2 = 1.$$

Подставляя эти коэффициенты в выражение выше, получим следующее выражение для среднего квадрата отклика:

$$M\left[Y^2\right] = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} + 36 = \frac{c_0^2}{2d_0 d_1} + 36 = \frac{\dfrac{2\sigma_x^2\alpha}{T^2}}{2\dfrac{\alpha}{T}\left(\alpha + \dfrac{1}{T}\right)} + \frac{16}{\pi} = \frac{\sigma_x^2}{1+\alpha T} + 36.$$

Мощность отклика RC-фильтра низких частот найдем из формулы (2.88):

$$P_Y = M\left[Y^2(t)\right] - m_Y^2 = \frac{\sigma_x^2}{1+\alpha T} + 36 - 36 = \frac{\sigma_x^2}{1+\alpha T},\ \text{Вт}.$$

В данном случае, получена мощность случайной составляющей отклика, равная:

$$P_Y = \frac{\sigma_x^2}{1+\alpha T}.$$

Мощность постоянной составляющей отклика равна 36 Вт.

2.7.5 Упражнения

На вход линейной системы поступает белый шум $X(t)$ со спектральной плотностью мощности N_0. Определить передаточную функцию линейной системы, математическое ожидание, спектральную плотность мощности, средний квадрат, мощность, корреляционную функцию отклика $Y(t)$ в установившемся режиме. Линейная система представляет собой пассивный электрический фильтр из таблицы 2.1.

2. Найти передаточную функцию формирующего фильтра, на выходе которого спектральная плотность отклика описывается следующим выражением:

а) $S_Y(\omega) = \dfrac{16}{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}$;

б) $S_Y(\omega) = \dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^2}$;

в) $S_Y(\omega) = \dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^2}\left(a^2 + b^2\omega^2\right)$;

г) $S_Y(\omega)=\dfrac{\sigma_X^2\sqrt{2\pi}}{\beta}e^{-\frac{\omega^2}{2\beta^2}}$;

д) $S_Y(\omega)=\dfrac{16\alpha^5\sigma_X^2}{3\left(\alpha^2+\omega^2\right)^3}$;

е) $S_Y(\omega)=\dfrac{4\alpha^3\sigma_X^2}{3\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}$;

ж) $S_Y(\omega)=\dfrac{10\cdot\left(\omega^2+5\right)}{\omega^4+10\cdot\omega^2+24}$;

з) $S_Y(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+64}$;

и) $S_Y(\omega)=\dfrac{\omega^2+10}{\omega^4+5\omega^2+4}$;

к) $S_Y(\omega)=\dfrac{16\left(\omega^2+36\right)}{\omega^4+13\omega^2+36}$;

л) $S_Y(\omega)=\dfrac{25\left(\omega^2+16\right)}{\omega^4+34\omega^2+225}$;

м) $S_Y(\omega)=\dfrac{9}{\omega^2+64}$;

н) $S_Y(\omega)=\dfrac{32}{\omega^2+16}$;

о) $S_Y(\omega)=\dfrac{1800}{\omega^2+900}$;

п) $S_Y(\omega)=\dfrac{\omega^2+1}{\omega^4+64}$.

3. Для уменьшения уровня шума в усилителе используется линейная электрическая цепь. Предполагая, что входным сигналом является белый шум со спектральной плотностью мощности N_0 Вт/Гц, определить, при каких параметрах цепи действующее значение шума на выходе не превышает Z мВ. Линейную электрическую цепь выбрать из таблицы 2.1, исключая вариант г).

4. Найти эквивалентную шумовую полосу линейного электрического фильтра из таблицы 2.1, исключая вариант г).

5. На вход линейной системы поступает стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией:

р) $R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$;

с) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\left(1+e^{-\alpha|\tau|}\right)$;

т) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\left(1+\alpha|\tau|\right)e^{-\alpha|\tau|}$;

у) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\cos(\omega_0\tau)$;

ф) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\alpha|\tau|\cos(\omega_0\tau)$;

х) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2\tau^2}{2}}\cos(\omega_0\tau)$;

ц) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\dfrac{\sin(\alpha\tau)}{\alpha\tau}\cos(\omega_0\tau)$;

ч) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\left[\cos(\omega_1\tau)+\sin(\omega_2\tau)\right]$;

ш) $R_X(\tau)=\sigma_X^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos(\omega_0\tau)+\dfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0|\tau|)\right)$;

щ) $R_X(\tau)=\dfrac{N_0\beta}{\pi}\dfrac{\sin(\beta\tau)}{\beta\tau}$.

Определить передаточную функцию линейной системы, математическое ожидание, спектральную плотность мощности, средний квадрат, мощность, корреляционную функцию отклика $Y(t)$ в установившемся режиме. Линейная система представляет собой пассивный электрический фильтр из таблицы 2.1.

6. На вход последовательной RC-цепи подается случайный гауссовский процесс с корреляционной функцией:

$$R_X(\tau)=10e^{-10^3|\tau|}+1.$$

Параметры цепи: $R=2$ кОм, $C=0{,}5$ мкФ.

Найти плотность вероятности напряжения $y(t)$ на конденсаторе.

7. На вход одноконтурного резонансного усилителя с коэффициентом усиления 30, резонансной частотой 5 МГц и полосой пропускания 60 кГц поступает узкополосный шум с корреляционной функцией

$$R(\tau)=10^{-4}e^{-10^5|\tau|}\cos\pi\cdot10^7\tau.$$

Определить дисперсию и корреляционную функцию шума на выходе усилителя.

8. На вход динамической системы, описываемой уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2t}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t),$$

подается случайный процесс с корреляционной функцией:

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2e^{-\alpha|\tau|}+\beta.$$

Найти корреляционную функцию отклика $R_Y(t)$.

9. Случайное напряжение с корреляционной функцией приложено ко входу идеального полосно-пропускающего фильтра с коэффициентом передачи 1 в полосе частот от 10 кГц до 1 МГц. Найдите спектральную плотность и эффективное значение напряжения на выходе фильтра.

10. Коэффициент усиления резонансного усилителя равен постоянной величине $K_p = 100$ в диапазоне частот от 8 до 10 МГц и нулю на остальных частотах. На вход усилителя подается белый шум с двусторонней спектральной плотностью $S_0 = 10^{-12}$ В^2/Гц. Определите дисперсию и корреляционную функцию шума на выходе усилителя.

2.8 Тема № 7 «Оптимальные линейные системы»

2.8.1 Сведения из теории

Оптимальная система – система, минимизирующая вредное влияние случайных возмущений на полезный сигнал на входе системы.

Критерий оптимальности – числовая характеристика, относительно которой сравниваются различные системы определённого класса.

Синтез оптимальных систем рассматривается для следующих условий:

– оптимальная система ищется в классе физически реализуемых линейных систем;

– оптимальная система является стационарной;

– на вход оптимальной системы поступает стационарный случайный процесс.

Рассмотрим примеры критерием оптимальности и подходы к синтезированию линейных оптимальных систем.

Критерий оптимальности: максимум отношения сигнал/шум

Если входной полезный сигнал детерминированный, то в качестве критерия оптимальности рассматривают критерий *максимизации отношения сигнал/шум* q *по мощности на выходе системы в фиксированный момент времени* t_0.

Отношение сигнал/шум на выходе линейной системы в момент времени t_0 запишем следующим образом:

$$q = \frac{P_{s,вых}(t_0)}{P_{n,вых}}, \tag{2.94}$$

где

$P_{s,вых}(t_0)$ – мощность сигнала на выходе линейной системы в момент времени t_0;

$P_{n,вых}$ – мощность шума на выходе линейной системы.

Если полезный сигнал является случайным, то будем рассматривать критерий минимизации среднего квадрата разности между выходным сигналом системы $y(t)$ и истинным значением принимаемого полезного сигнала $s(t)$, т .е. $\mathrm{M}\left\{\left[s(t)-y(t)\right]^2\right\}$.

Для критерия максимума отношения сигнал/шум q импульсная характеристика оптимальной линейной системы находится в результате решения интегрального уравнения Винера-Хопфа во временной области

$$\int_0^{\infty} h(\lambda) R_n(\tau-\lambda) d\lambda = s(t_0-\tau) \tag{2.95}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) R_n(\tau-\lambda) d\lambda = s(t_0-\tau), \tag{2.96}$$

где $h(\lambda)$ – искомая оптимальная импульсная характеристика линейной системы;

$R_n(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса;

t_0 – момент времени наблюдения максимума отношения сигнал/шум.

В результате решения интегрального уравнения (2.95) получаем импульсную характеристику **физически реализуемой** линейной системы. Однако решение интегрального равнения Винера-Хопфа (2.95) затруднительно. В этом случае переходят к решению уравнения (2.96), которое оказывается проще. Однако в результате решения интегрального уравнения (2.96) **не всегда** получают **физически реализуемую** импульсную характеристику оптимальной линейной системы.

В результате решения интегрального уравнения Винера-Хопфа (2.96) в частотной области получают комплексную частотную характеристику оптимальной линейной системы. Комплексная частотная характеристика $H(j\omega)$ оптимальной линейной системы по критерию максимума отношения сигнал/шум q в момент времени t_0 может быть найдена из следующего соотношения в частотной области:

$$H(j\omega) = \frac{A^*(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}}{S_n(\omega)}, \tag{2.97}$$

где

$A(j\omega)$ – комплексный спектр полезного сигнала $s(t)$ на входе оптимальной линейной системы;

$A^*(j\omega)$ – комплексно-сопряжённый спектр полезного сигнала $s(t)$ на входе оптимальной линейной системы;

$S_n(\omega)$ - спектральная плотность мощности шума на входе оптимальной линейной системы.

Амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра с точностью до константы повторяет форму амплитудно-частотного спектра:

$$\left|H(j\omega)\right| = k\left|A^*(j\omega)\right|. \tag{2.98}$$

Фазочастотная характеристика оптимального фильтра является сопряжённой фазочастотному спектру сигнала:

$$\arg\left[H(j\omega)\right] = -\arg\left[A(j\omega)\right] - \omega_0 t. \tag{2.99}$$

Максимальное отношение сигнал/шум q в момент времени t_0 при этом оценивается с помощью следующего выражения:

$$q = \frac{s_0^2(t_0)}{M\left[n_0^2(t_0)\right]} = \frac{\left[\int\limits_0^\infty h(\tau)s(t_0-\tau)d\tau\right]^2}{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty h(\tau)h(\lambda)R_n(\tau-\lambda)d\tau d\lambda}. \tag{2.100}$$

Импульсная характеристика согласованного фильтра может быть найдена как

$$h_{\text{опт}}(\tau) = s(t_0-\tau), \tag{2.101}$$

комплексная частотная характеристика согласованного фильтра описывается выражением

$$H(j\omega) = \frac{A^*(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}}{N_0}, \tag{2.102}$$

а отношение сигнал/шум q на выходе согласованного фильтра может быть найдено из формулы

$$q = \frac{1}{N_0}\int\limits_0^\infty s^2(t_0-\tau)d\tau = \frac{E_s}{N_0}, \tag{2.103}$$

где E_s – энергия полезного сигнала;

N_0 – спектральная плотность мощности случайного процесса $n(t)$.

?

При каких условиях получена импульсная характеристика согласованного фильтра?

Критерий оптимальности: минимуму среднего квадрата разности

Оптимизация линейных систем по критерию минимума среднего квадрата ошибки состоит в нахождении передаточной функции (импульсной характеристики), минимизирующей квадрат разности между полезным сигналом.

Задача оптимизации линейных систем решается при следующих предположениях:

1) Входное воздействие представляет собой аддитивную смесь, в общем случае, случайного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, причём эти случайные процессы являются стационарными в широком смысле с известными корреляционной $R_s(\tau)$, $R_n(\tau)$ и взаимно корреляционной функциями $R_{s,n}(\tau)$, $R_{n,s}(\tau)$.

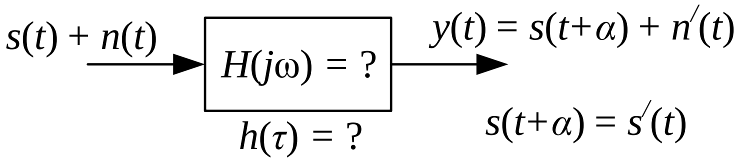


Рисунок 2.5 – Входное воздействие и отклик в задаче оптимизации линейной системы по критерию минимума среднего квадрата ошибки

Пусть на входе оптимальной линейной системы имеется поступает аддитивная смесь, в общем случае, случайного полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$.

По теореме Винера-Хинчина (2.31), (2.32) по корреляционным и взаимно корреляционным функциям можно найти соответствующие спектральные плотности мощности:

$S_s(\omega)$ – спектральная плотность мощности сигнала $s(t)$ на входе фильтра;

$S_n(\omega)$ – спектральная плотность мощности шума $n(t)$ на входе фильтра.

2) Фильтр является линейным и стационарным, т.е. не содержит переменных во времени параметров.

3) Отклик линейного фильтра является стационарным в широком смысле.

4) Критерий оптимальности – минимум среднего квадрата ошибки.

Ошибку на выходе оптимальной линейной системы определим как разность между идеальным откликом $s(t)$ и реальным откликом $y(t)$:

$$\varepsilon(t) = s(t) - y(t). \tag{2.104}$$

Средний квадрат ошибки $s(t) - y(t)$ на выходе оптимального линейного фильтра записывается во временной области следующим образом:

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right] = R_s(0) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u) R_{s+n,s}(u)\,du, \tag{2.105}$$

где $R_s(\tau)$ – корреляционная функция полезного сигнала на входе оптимальной линейной системы;

$R_s(\tau)$ – взаимная корреляционная функция между суммой полезного сигнала с шумом и полезным сигналом на входе фильтра.

или, в частотной области:

$$\mathbf{M}\left[\varepsilon^2\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[1-H(p)\right]\left[1-H(-p)\right]S_s(p)dp+ \quad (2.106)$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}H(p)H(-p)S_n(p)dp\,,$$

где $S_s(p)$ – образ по Лапласу спектральной плотности мощности сигнала на входе оптимальной линейной системы;

$S_n(p)$ – образ по Лапласу спектральной плотности мощности шума на входе фильтра;

$S_s^{вых}(p)=\left[1-H(p)\right]\left[1-H(-p)\right]S_s(p)$ – образ по Лапласу спектральной плотности мощности сигнала на выходе оптимальной линейной системы;

$S_n^{вых}(p)=\left[1-H(p)\right]\left[1-H(-p)\right]S_n(p)$ – образ по Лапласу спектральной плотности мощности шума на выходе фильтра.

Если сигнал и шум не коррелированы, то спектральная и взаимная спектральная плотность мощности могут быть записаны следующим образом:

$$S_{s+n}(\omega)=S_s(\omega)+S_n(\omega),\ S_{s+n,s}(\omega)=S_s(\omega) \quad (2.107)$$

или, для образов по Лапласу указанных спектральных плотностей

$$S_{s+n}(p)=S_s(p)+S_n(p),\ S_{s+n,s}(p)=S_s(p). \quad (2.108)$$

Критерий оптимальности – минимум среднего квадрата ошибки – записывается следующим образом:

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right]\to\min\,. \quad (2.109)$$

Для нахождения структуры оптимальной линейной системы по критерию минимума среднего квадрата разности $M\left[\varepsilon^2(t)\right]\to\min$ используют уравнение Винера-Хопфа:

$$\int_{0}^{\infty}h(u)\cdot R_{s+n}(u-\tau)du=R_{s+n,s}(\tau) \quad (2.110)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot R_{s+n}(u-\tau)du=R_{s+n,s}(\tau), \quad (2.111)$$

где $h(u)$ – искомая оптимальная импульсная характеристика линейной системы;

$R_{s+n}(\tau)$ – корреляционная функция суммы полезного случайного сигнала и стационарного шума;

$R_{s+n,s}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция между суммой полезного случайного сигнала и стационарного шума, и полезным случайным сигналом.

Если сигнал и шум не коррелированы, то корреляционная и взаимная корреляционная функция могут быть записаны следующим образом:

$$R_{s+n} = R_s + R_n,\ R_{s+n,s} = R_s. \tag{2.112}$$

В результате решения интегрального уравнения (2.110) получаем импульсную характеристику **физически реализуемой** линейной системы. Однако решение интегрального равнения Винера-Хопфа (2.110) затруднительно. В этом случае переходят к решению уравнения (2.111), которое оказывается проще. Однако в результате решения интегрального уравнения (2.111) **не всегда** получают **физически реализуемую** импульсную характеристику оптимальной линейной системы.

Интегральное уравнение Винера -Хопфа (2.110), (2.111) обычно решают в частотной области. Для этого:

– от корреляционных функций $R_{s+n}(\tau)$, $R_{s+n,s}(\tau)$ переходят к соответствующим спектральным плотностям мощности $S_{s+n}(\omega)$ и $S_{s+n,s}(\omega)$;

– от спектральных плотностей мощности $S_{s+n}(\omega)$ и $S_{s+n,s}(\omega)$ переходят к передаточным функциям $S_{s+n}(p)$ и $S_{s+n,s}(p)$ с помощью преобразования Лапласа.

Тогда передаточная функция оптимальной линейной системы $H_{\text{опт}}(p)$ может быть найдена из выражения

$$H_{\text{опт}}(p) = \frac{S_{s+n,s}(p)}{S_{s+n}(p)}, \tag{2.113}$$

или

$$H_{\text{опт}}(p) = \frac{1}{S^{+}_{s+n}(p)} \cdot \frac{S_{s+n,s}(p)}{S^{-}_{s+n}(p)}, \tag{2.114}$$

где $S_{s+n}(p)$ – образ по Лапласу спектральной плотности мощности для суммы полезного случайного сигнала и стационарного шума;

$S_{s+n}^{+}(p)$ – факторизованный образ по Лапласу спектральной плотности мощности суммы полезного случайного сигнала и стационарного шума для нулей и полюсов в левой полуплоскости;

$S_{s+n}^{-}(p)$ – факторизованный образ по Лапласу спектральной плотности мощности суммы полезного случайного сигнала и стационарного шума для нулей и полюсов в правой полуплоскости;

$S_{s+n,s}(p)$ – образ по Лапласу взаимной спектральной плотности мощности между суммой полезного случайного сигнала с стационарным шумом, и полезным случайным сигналом.

При использовании выражения (2.113) для определения передаточной функции оптимальной линейной системы могут быть получены физически нереализуемые решения. Однако выражение (2.114) всегда приводит к физически реализуемой оптимальной линейной системе.

Подходы к оптимизации линейных систем

Традиционно рассматриваются следующие подходы к оптимизации линейных систем.

1) С ограничением на структуру линейной системы.

В этом случае оптимизация выполняется для линейной системы с определённой структурой (импульсной характеристикой, передаточной функцией или электрической цепи), но не известны значения параметров этой структуры (коэффициентов в аналитическом выражении импульсной характеристики или передаточной функции, либо номиналов электрической цепи). Поэтому конечным результатом такой оптимизации являются такие значения параметров структуры линейной системы, при которых обеспечивается выполнение критерия оптимальности.

2) Без ограничения структуры линейной системы.

В этом случае структура линейной системы неизвестна, поэтому конечным результатом оптимизации без ограничения структуры линейной системы является аналитическое выражение импульсной характеристики или передаточной функции с учётом всех коэффициентов, либо электрическая цепь с учётом номиналов входящих в неё элементов.

2.8.2 Методические указания к решению задач

Для успешного решения задач по данной теме необходимо:

- владеть терминами и определениями, приведёнными выше;
- знать тригонометрические тождества (см. Приложение);
- знать таблицу интегралов (см. Приложение);
- уметь факторизовать спектральную плотность мощности;
- уметь вычислять коэффициенты полиномов факторизованной спектральной плотности мощности и через них вычислять значение интеграла;
- знать представление тригонометрических функций с помощью формулы Эйлера:

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\quad \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j};$$

- знать представление дельта-функции через интеграл:

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt \ \text{ или } \ \delta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}d\omega;$$

знать свойства интегралов (см. Приложение).

На основе этих знаний необходимо сначала ответить на контрольные вопросы, а затем изучить примеры решения задач из следующего раздела.

2.8.3 Контрольные вопросы

1. Какую систему называют оптимальной?
2. Что такое критерий оптимальности?
3. Для каких условий в данном разделе рассматривается оптимизации систем?
4. Какие критерии оптимальности существуют?
5. Какие подходы к оптимизации линейных систем существуют? Чем эти подходы различаются?
6. Как записывается интегральное уравнение Винера-Хопфа для нахождения оптимальной импульсной характеристики физически реализуемой и физически не реализуемой линейной системы для достижения максимального отношения сигнал/шум на выходе? Объясните суть переменных, которые входят в это уравнение.
7. Что такое согласованный фильтр ? Каковы его свойства?
8. Какова импульсная характеристика и комплексная частотная характеристика согласованного фильтра?

9. Как записывается интегральное уравнение Винера-Хопфа для нахождения оптимальной импульсной характеристики физически реализуемой и физически не реализуемой линейной системы для достижения минимального среднего квадрата ошибки на выходе? Объясните суть переменных, которые входят в это уравнение.

2.8.4 Примеры решения задач

1. Наблюдается аддитивная смесь прямоугольного импульса и белого шума со спектральной плотностью S_0. Выполнить оптимизацию RC-фильтра низких частот по критерию максимума отношения сигнал/шум на выходе фильтра в момент времени t_0.

Решение:

По условию задачи структура линейной системы задана. В качестве линейной системы рассматривается фильтр низких частот. Поэтому для оптимизации будет рассматриваться параметрический подход в виде подбора параметров фильтра низких частот.

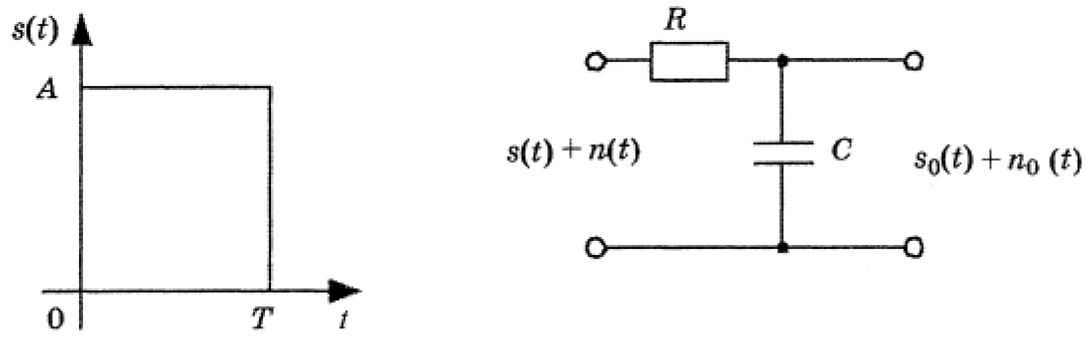
Вид прямоугольного импульса и RC-фильтр низких частот показан на рисунке 2.6 – .

Введём следующие обозначения:

$s_0(t)=\begin{cases} A & t\in[0,T] \\ 0 & t\notin[0,T] \end{cases}$ – полезный выходной сигнал RC-фильтра низких частот;

$n_0(t)$ – выходной шум.

По условию задачи, требуется получить оптимальный RC-фильтр низких частот с максимальным отношением сигнал/шум на выходе в момент времени t_0.



а б

Рисунок 2.7 – Форма сигнала (а) и система, максимизирующая отношение сигнал/шум (б)

Для оптимизации фильтра низких частот выберем параметр для оптимизации. Для RC-фильтра низких частот таким параметром является постоянная времени $\tau = RC$, или обратная ей величина $\beta = 1/\tau$.

Значение момента времени t_0 определим исходя из анализа полезного сигнала (без учёта шума) на выходе системы (см. рисунок 2.8).

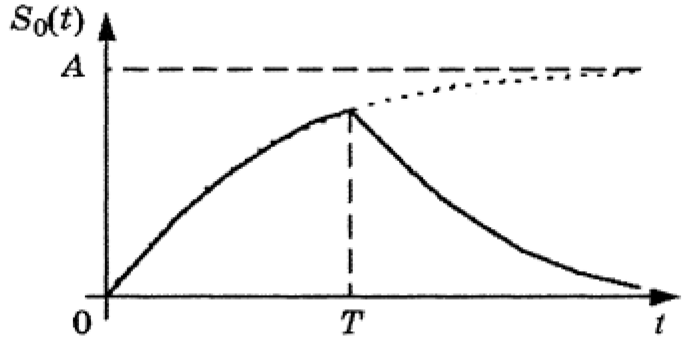


Рисунок 2.8 – Сигнальная составляющая случайного процесса на выходе *RC*-фильтра

Как видно из рисунка 2.8, полезный сигнал на выходе фильтра описывается выражением

$$s_0(t) = \begin{cases} A\left(1-e^{-\beta t}\right), \ 0 \le t \le T, \\ A\left(1-e^{-\beta t}\right)e^{-\beta(t-T)}, \quad T \le t \le \infty \end{cases} \qquad (2.115).$$

Отсюда видно, что выходной полезный сигнал максимален в момент времени $t_0 = T$ (см. рисунок 2.8). Таким образом, в момент времени t_0 максимальное значение сигнала равно

$$s_0(t) = A\left(1-e^{-\beta T}\right).$$

Найдем теперь мощность шума на выходе *RC* - фильтра низких частот. Белый шум на входе *RC* – фильтра низких частот имеет нулевое математическое ожидание, т.е. $M[n(t)] = 0$. Значит мощность шума равна среднему квадрату ошибки выходного шума:

$$P_ш = M\left[n_0^2(t)\right].$$

Найдем мощность шума на выходе фильтра. Частотная характеристика фильтра низких частот $H(j\omega)$ записывается следующим образом:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}. \qquad (2.116)$$

Мощность шума на выходе RC-фильтра низких частот найдем с помощью формулы (2.85):

$$P_ш = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0}{1+(\tau \cdot \omega)^2} d\omega = \frac{S_0}{\pi \cdot \tau} \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{S_0}{2 \cdot \tau} = \beta \frac{S_0}{2}. \quad (2.117)$$

Следовательно, отношение сигнал/шум в момент времени t_0 равно

$$q = \frac{s_0^2(t_0)}{\mathbf{M}\left[n_0^2(t_0)\right]} = \frac{A^2\left[1-e^{-\beta T}\right]^2}{\beta S_0 / 2}. \quad (2.118)$$

Для определения параметра β для получения максимального отношения сигнал/шум продифференцируем (2.118) по переменной β и производную приравняем нулю:

$$\frac{dq}{d\beta} = \frac{2A^2}{S_0} \frac{2\beta\left(1-e^{-\beta T}\right)Te^{-\beta T} - (1-e^{-\beta T})^2}{\beta^2} = 0.$$

Тогда получаем следующее уравнение:

$$2\beta T \cdot \left(1-e^{-\beta T}\right) \cdot e^{-\beta T} - \left(1-e^{-\beta T}\right)^2 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\left(1-e^{-\beta T}\right) \cdot \left[2\beta T e^{-\beta T} - \left(1-e^{-\beta T}\right)\right] = 0$$

$$\left(2\beta T e^{-\beta T} + e^{-\beta T} - 1\right) = 0$$

$$\left(2\beta T e^{-\beta T} + e^{-\beta T}\right) = 1$$

$$\left(2\beta T + 1\right) e^{-\beta T} = 1$$

$$2\beta T + 1 = \frac{1}{e^{-\beta T}}$$

$$2\beta T + 1 = e^{-\beta T}$$

$$\beta T \approx 1,256$$

$$\beta \approx \frac{1,256}{T}$$

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1,256}{T}.$$

Отсюда, оптимальное значение постоянной времени для *RC*-фильтра низких частот равно:

$$RC = T / 1,256.$$

Следует отметить, что именно это значение постоянной времени *RC*-фильтра обеспечивает максимум отношения сигнал/шум в момент времени *T*.

Оценим отношение сигнал/шум на выходе фильтра низких частот после подстановки оптимального значения βT. В результате получим

$$q_{\max} = 0,8145 \frac{A^2 T}{S_0}. \quad (2.119)$$

Нетрудно заметить, что A^2T представляет энергию импульса. Поэтому максимальное отношение сигнал/шум с учётом коэффициента пропорционально отношению энергии сигнала к спектральной плотности шума. Этот результат характерен для всех случаев максимизации отношения сигнал/шум при наличии белого шума. Из (2.119) следует, что коэффициент пропорциональности в нашем случае равен 0,8145. Для других видов фильтров коэффициенты окажутся другими.

В приведенном примере в процессе оптимизации выбирается один параметр фильтра. Для других фильтров, имеющих два или более параметров, процедура оптимизации оказывается аналогичной: отношение сигнал/шум дифференцируется по каждому из параметров, для которых должны быть определены оптимальные значения, а соответствующие производные приравниваются нулю. В результате получается система уравнений, решения которой представляют собой оптимальные значения параметров. Однако уравнения данной системы часто оказываются нелинейными, что затрудняет получение окончательного результата в аналитическом виде. В этом случае прибегают к численным методам решения системы уравнений, однако при этом остается много нерешенных вопросов, связанных, в частности, с единственностью получаемых решений.

2. На вход линейного фильтра поступает аддитивная смесь полезного сигнала $s(t)$ и белого гауссовского шума со спектральной плотностью S_0. Модель полезного сигнала описывается соотношением:

$$s(t) = \begin{cases} A \cdot e^{\alpha \cdot (t-T)}, & t \geq T \\ 0, & t < T \end{cases}.$$

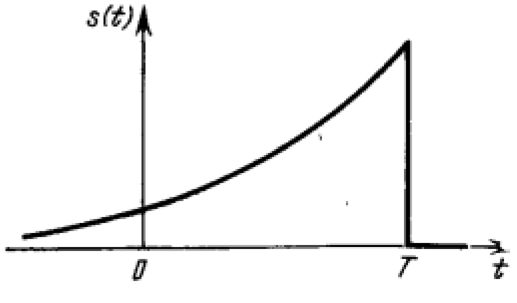


Рисунок 2.9 – Форма полезного сигнала на входе оптимального фильтра

Найти комплексную частотную характеристику оптимального фильтра, обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум в момент времени t_0.

Решение:

Комплексная частотная характеристика линейного оптимального фильтра по указанному в задаче критерию определяется формулой (2.97)

$$H(j\omega) = \frac{A^*(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}}{S_n(\omega)},$$

где

$A(j\omega)$ – спектр полезного сигнала $s(t)$ на входе оптимальной линейной системы;

$A^*(j\omega)$ – комплексно-сопряжённый спектр полезного сигнала $s(t)$ на входе оптимальной линейной системы;

$S_n(\omega)$ - спектральная плотность мощности шума на входе оптимальной линейной системы.

Для белого шума для всех частот $S_n(\omega) = S_0$.

Определим спектр полезного сигнала $A(j\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье:

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\cdot e^{\alpha\cdot(t-T)}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt = A\cdot e^{-\alpha\cdot T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\cdot t}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt =$$

$$= A\cdot e^{-\alpha\cdot T}\int_{-\infty}^{T} e^{(\alpha-j\cdot\omega)\cdot t}dt = \frac{A\cdot e^{-\alpha\cdot T}}{\alpha-j\cdot\omega}e^{(\alpha-j\cdot\omega)\cdot t}\Big|_{-\infty}^{T} = \frac{A\cdot e^{-\alpha\cdot T}}{\alpha-j\cdot\omega}\left[e^{(\alpha-j\cdot\omega)\cdot T}-e^{-\infty}\right] = \frac{A\cdot e^{-\alpha\cdot T}}{\alpha-j\cdot\omega}e^{(\alpha-j\cdot\omega)\cdot T} =$$

$$= \frac{A\cdot e^{-\alpha\cdot T+\alpha\cdot T-j\cdot\omega\cdot T}}{\alpha-j\cdot\omega} = \frac{A\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T}}{\alpha-j\cdot\omega}.$$

Отсюда, комплексная частотная характеристика линейного оптимального фильтра равна

$$H(j\omega) = \frac{A^*(j\omega)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t_0}}{S_n(\omega)} = S_0\cdot\frac{A\cdot e^{j\cdot\omega\cdot T}}{\alpha+j\cdot\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T} = \frac{S_0\cdot A}{\alpha+j\cdot\omega}.$$

Таким образом, линейный фильтр, согласованный с данным сигналом, может быть реализован с помощью резистора сопротивлением *R* и конденсатора ёмкостью *C*.

2.8.5 Упражнения

1. Осуществляется наблюдение аддитивной смеси случайного сигнала $x(t)$ со спектральной плотностью вида

$$S_X(s) = \frac{-2s^2}{s^4-13s^2+36}.$$

и белого шума, спектральная плотность которого равна 1. Определите полюсы и нули передаточной функции оптимального физически реализуемого фильтра

Винера, минимизирующего средний квадрат ошибки (разности) между входным сигналом и суммарным сигналом на выходе фильтра.

2. Наблюдается аддитивная смесь сигнала, представляющего собой случайный процесс со спектральной плотностью вида $S_X(\omega)=16/(\omega^2+16)$, и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,1 B^2/Гц.

а) Определите комплексную частотную характеристику без учета условия физической реализуемости линейного фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе фильтра.

б) Определите минимум среднего квадрата ошибки при использовании этого фильтра.

в) Повторите решение предыдущей задачи для физически реализуемого фильтра.

3. На входе *RC*-фильтра с комплексной частотной характеристикой вида $H(\omega)=b/(b+j\omega)$ наблюдается аддитивная смесь сигнала в виде синусоидальных незатухающих колебаний амплитудой 2 В и частотой 80 Гц и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,01 B^2/Гц. *RC*-фильтр используется для выделения сигнала. Определите отношение сигнал/шум на выходе фильтра, если его полоса пропускания на уровне половинной мощности равна: а) 10 Гц; б) 100 Гц; в) 1000 Гц.

4. Для сигнала и шума, параметры которых заданы в исходных данных к предыдущей задаче, определите:

а) полосу пропускания фильтра на уровне половинной мощности, при которой отношение сигнал/шум на его выходе максимально;

б) максимальное отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

5. На входе идеального фильтра нижних частот с комплексной частотной характеристикой вида

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & \text{при } |\omega|\le 2\cdot\pi\cdot W,\\ 0 & \text{при других } |\omega|\end{cases}$$

наблюдается аддитивная смесь случайного сигнала, имеющего спектральную плотность

$$S_s(\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{10} & \text{где } |\omega|\le 10,\\ 0 & \text{при других } |\omega|,\end{cases}$$

и белого шума, спектральная плотность которого равна 0,1 B^2/Гц. Определите *W*, при котором максимизируется средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным процессом на выходе фильтра.

6. Наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ со спектральной плотностью вида $S_s(\omega)=4/(\omega^2+4)$ и шума со спектральной плотностью $S_n(\omega)=\omega^2/(\omega^2+4)$. Определите:

а) комплексную частотную характеристику физически реализуемого фильтра, минимизирующего средний квадрат ошибки между входным сигналом и суммарным выходным процессом;

б) минимум среднего квадрата ошибки.

7. Полезный сигнал представляет собой прямоугольный видеоимпульс с амплитудой A и длительностью $\tau_{и}$ = 10 мкс. Белый шум на входе фильтра характеризуется спектральной плотностью $S_0=10^{-12}$ $В^2$/Гц. Найдите минимальное значение A, при котором возможно обнаружение этого сигнала, если факт присутствия сигнала можно надежно индицировать при отношении сигнал/шум $q \ge 3$.

8. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega)=\frac{S_0}{2}$, $s(t)$ – взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью вида $S_s(\omega)=\frac{2\cdot\sigma_s^2\cdot\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$.

Найти комплексную частотную характеристику и импульсную характеристику физически реализуемого фильтра по критерию максимума отношения сигнал/шум.

9. Полезный сигнал представляет собой видеоимпульс прямоугольной формы

$$s(t)=\begin{cases} A, & 0\le t\le \tau_{и}, \\ 0, & t<0, t>\tau_{и}. \end{cases}$$

Найдите частотную характеристику фильтра, согласованную с данным сигналом, если максимальное значение сигнала на выходе наступает при $t_0=\tau_{и}$.

10. Полезный сигнал представляет собой видеоимпульс прямоугольной формы

$$s(t)=\begin{cases} A, & 0\le t\le \tau_{и}, \\ 0, & t<0, t>\tau_{и}. \end{cases}$$

Найдите отклик фильтра, согласованного с данным сигналом. Максимальное значение отклика наступает при $t_0 = \tau_и$.

11. Фильтр согласован с сигналом

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le \tau_и, \\ 0, & t < 0, t > \tau_и. \end{cases}$$

Найдите корреляционную функцию шума на выходе такого фильтра. На вход фильтра поступает белый шум со спектральной плотностью S_0.

12. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = \frac{S_0}{2}$, $s(t)$ – взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$S_s(\omega) = \begin{cases} A \cdot \dfrac{\omega + \omega_в}{\omega_в}, \omega \in [-\omega_в, 0) \\ A \cdot \dfrac{\omega_в - \omega}{\omega_в}, \omega \in (0, -\omega_в] \\ 0, \quad \omega \notin [-\omega_в, 0) \wedge (0, -\omega_в] \end{cases}.$$

Найти комплексную частотную характеристику физически нереализуемого фильтра по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Вычислить минимальный средний квадрат ошибки.

13. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = \frac{S_0}{2}$, $s(t)$ – взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью вида $S_s(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$.

Найти комплексную частотную характеристику физически реализуемого фильтра по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Вычислить минимальный средний квадрат ошибки.

14. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$, $s(t)$ – взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный

гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией вида $R_s(\tau)=\exp\left(-\alpha\cdot|\tau|\right)$.

Найти комплексную частотную характеристику физически реализуемого фильтра по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Вычислить минимальный средний квадрат ошибки.

15. На вход фильтра поступает аддитивная смесь $x(t) = s(t) + n(t)$, где $n(t)$ – стационарный гауссовский шум со спектральной плотностью $S_n(\omega)=\dfrac{2\cdot\sigma_n^2\cdot\beta}{\omega^2+\beta^2}$, $s(t)$ – взаимно не коррелированный с $n(t)$ стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью вида $S_s(\omega)=\dfrac{2\cdot\sigma_s^2\cdot\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$.

Найти комплексную частотную характеристику и импульсную характеристику физически реализуемого фильтра по критерию минимума среднего квадрата ошибки. Вычислить минимальный средний квадрат ошибки.

3 ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Виды самостоятельной работы студентов и соответствующая форма контроля представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Виды самостоятельной работы и форма контроля

№ п/п	Наименование работы	Форма контроля
1	Проработка лекционного материала	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях
2	Подготовка к практическим занятиям	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях, тест
3	Подготовка к лабораторной работе	Конспект самоподготовки, опрос на занятиях
4	Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе	Отчёт по лабораторной работе, опрос на занятиях
5	Подготовка к экзамену (зачёту)	Сдача экзамена (зачёта)

Виды самостоятельной работы студентов описаны ниже.

3.1 Проработка лекционного материала

Материалы лекций и рекомендуемая литература являются основой для изучения и освоения дисциплины. Самостоятельная работа в части проработки лекционного материала состоит в непосредственном конспектировании материалов лекций с последующим изучением этих материалов с использованием рекомендуемой литературы.

Схема составления конспекта:

– Определить тему материала и цель составления конспекта.

– Разделить лекционный материал на смысловые части, выделив основные тезисы и выводы.

– Сформулировать положения лекционного материала.

– Выделить основные термины, определения и формулы.

– Сформулировать вопросы к конспекту лекций.

3.2 Подготовка к опросам на занятиях

Для самоподготовки к опросам на занятиях ниже представлены вопросы на самоподготовку:

1. Способы описания случайных процессов.
2. Моментные функции случайных процессов.

3. Корреляционная и взаимная корреляционная функция случайных процессов.
4. Спектральная плотность мощности случайного процесса.
5. Понятие гауссовского случайного процесса и его свойства.
6. Узкополосные гауссовские случайные процессы.
7. Одномерные плотности вероятностей огибающей и фазы узкополосного гауссовского случайного процесса.
8. Одномерные плотности вероятностей огибающей и фазы узкополосного аддитивной смести гауссовского случайного процесса и сигнала.
9. Понятие линейной системы.
10. Анализ линейной системы в переходном режиме.
11. Анализ линейной системы в установившемся режиме.
12. Имитация случайного процесса с заданной спектральной плотностью мощности.
13. Эквивалентная шумовая полоса линейной системы.
14. Понятие оптимальной системы. Критерии оптимальности.
15. Способы оптимизации линейных систем.
16. Оптимальные системы по критерию максимального отношения сигнал/шум.
17. Оптимальные системы по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

Необходимо, также, подготовиться к контрольным вопросам для каждой темы практического занятия.

3.3 Подготовка к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям необходимо пользоваться настоящими методическими указаниями, а также рекомендованной литературой.

В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо:
1. Вспомнить примеры решения задач, которые были разобраны на предыдущем практическом занятии.
2. Выполнить домашнее задание. В случае пропуска практического занятия узнать домашнее задание у старосты группы или одногруппников.
3. Познакомиться с темой следующего практического занятия.
4. Повторить материалы лекций в соответствие с темой следующего практического занятия, а также рекомендованные разделы из списка литературы.

Примерные темы практических занятий:
1. Вероятностное описание и характеристики случайного процесса.
2. Вероятностное описание совокупности случайных процессов.

3. Спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса.
4. Анализ линейной системы в переходном режиме при стационарном воздействии.
5. Анализ линейной системы в установившемся режиме при стационарном воздействии.
6. Узкополосные гауссовские случайные процессы.
7. Оптимальные линейные системы.

Отчёт по практическому занятию выполняется либо на бумажном носителе размером не меньше стандартного тетрадного листа, либо в виде электронного документа.

Отчёт должен содержать:

1. Тему работы.
2. Цель работы.
3. Исходные данные к выполнению домашнего задания или задач на самостоятельное решение.
4. Результаты решения к заданию с подробными пояснениями или расчётами.

3.4 Подготовка к тестированию

При подготовке к тестированию необходимо заблаговременно повторить лекционный материал, а также, при необходимости, соответствующий материал из рекомендованной литературы.

Вопросы к тестированию представлены в разделе 4.

3.5 Подготовка к лабораторной работе

При подготовке к лабораторной работе необходимо заблаговременно повторить лекционный материал по соответствующей теме, в том числе из методических указаний по проведению лабораторных работ по данной дисциплине.

В ходе подготовки к лабораторным работам необходимо:

1. Узнать тему предстоящей лабораторной работы.
2. Вспомнить основной теоретический материал по соответствующей теме.
3. Ответить на контрольные вопросы для допуска к выполнению лабораторной работы.
4. Ознакомиться с ходом выполнения работы.

3.6 Подготовка к защите отчёта по лабораторной работе

При подготовке к защите по лабораторной работе необходимо заблаговременно подготовить и оформить отчёт с результатами выполнения лабораторной работы, повторить лекционный материал по соответствующей теме, а также пользоваться методическими указаниями по проведению лабораторных работ по данной дисциплине.

Перед защитой к лабораторной работе необходимо:

1. Проверить отчёт к лабораторной работе, в том числе, ещё раз прочитать выводы по результатам выполнения лабораторной работы.
2. Осмыслить и осознать сделанные выводы к лабораторной работе. Дать физическую интерпретацию и объяснение полученным результатам.
3. Вспомнить основной теоретический материал по соответствующей теме.
4. Ответить на контрольные вопросы для выполнения лабораторной работы.

3.7 Подготовка к экзамену (зачёту)

Самостоятельная подготовка к экзамену (зачёту) состоит в подготовке (изучении) ответов на вопросы к теоретическому минимуму и подготовке ответов на основные вопросы к экзамену.

Для самостоятельной подготовки к экзамену (зачёту) студенту необходимо подготовить ответы к следующим основным вопросам:

1. Что такое случайная функция?
2. Что такое случайный процесс?
3. Что такое реализация случайного процесса?
4. Что такое квазидетерминированный сигнал?
5. Что такое математическое ожидание случайного процесса?
6. Что такое дисперсия случайного процесса?
7. Что такое корреляционная функция? Что показывает корреляционная функция случайного процесса?
8. Что такое интервал (временной) корреляции?
9. Что такое стационарный случайный процесс? Пояснить графически.
10. Что такое нестационарный случайный процесс? Пояснить графически.
11. В чём состоит эргодическое свойство случайного процесса? Приведите пример.

12. Укажите свойства корреляционной функции?

13. Что такое спектральная плотность мощности случайного процесса? Каковы её свойства?

14. Как связана спектральная плотность мощности и корреляционная функция случайного процесса? Пояснить рисунком.

15. Что такое белый шум? Какова спектральная плотность мощности и корреляционная функция спектральной плотности мощности?

16. Как вычисляется мощность случайного процесса ? Чему равна мощность белого шума ? Как зависит мощность ограниченного по полосе шума от полосы ?

17. Что такое узкополосный случайный процесс? Поясните рисунком.

18. Что такое широкополосный случайный процесс? Поясните рисунком.

19. Что такое квадратурные составляющие, огибающая и фаза случайного процесса?

20. Какова плотность распределения огибающей и фазы узкополосного случайного процесса?

21. Какова плотность распределения огибающей и фазы смеси узкополосного случайного процесса и гармонического сигнала при малом и большом отношении сигнал/шум?

22. Что такое нелинейная цепь? Что такое линейная цепь?

23. Какими характеристиками описываются линейные цепи? Как связан отклик линейной системы с входным воздействием?

24. Как преобразуются статистические характеристики случайного процесса при нестационарном режиме в результате прохождения через линейную цепь? Объяснить математически и объяснить физический смысл полученных математических выражений.

25. Как преобразуются статистические характеристики случайного процесса при стационарном режиме в результате прохождения через линейную цепь? Объяснить математически и объяснить физический смысл полученных математических выражений.

26. Объясните процедуру имитации случайного процесса с заданной спектральной плотностью.

27. Что такое формирующий фильтр?

28. В каких случаях шум, ограниченный по полосе, можно считать белым шумом ?

29. Что такое эквивалентная шумовая полоса ? Как вычисляется эквивалентная шумовая полоса ?

30. Как связаны корреляционная функция входного воздействия и отклика линейной цепи ?

31. Что такое оптимальная система ? Что такое критерий оптимальности ?

32. Какие критерии оптимальности используются при проектировании радиотехнических систем ? Какие требования предъявляются к критериям оптимальности?

33. Объясните процедуру оптимизации линейных систем путём подбора их параметров ?

34. Объясните процедуру оптимизации систем по критерию максимизации отношения сигнал/шум ? Корреляционный приёмник.

35. Объясните процедуру оптимизации систем по критерию минимизации среднего квадрата ошибки ?

36. Классификация нелинейных преобразований ?

37. Прямой метод исследования нелинейных преобразований случайных процессов ?

38. Чему равно отношение сигнал/шум на выходе звена, состоящего из квадратичного детектора и фильтра низких частот ?

39. Чему равно отношение сигнал/шум на выходе звена, состоящего из линейного детектора и фильтра низких частот ?

Список вопросов к теоретическому минимуму и примерные ответы.

1. Что такое случайный процесс?

Случайный процесс – процесс, который описывается случайной функции. Случайная функция – функция, которая в результате опыта принимает тот или иной вид, заранее неизвестный какой именно.

2. Что такое корреляционная функция? Что показывает корреляционная функция случайного процесса? Что такое интервал (временной) корреляции?

Корреляционная функция – математическое ожидание от произведения реализаций случайного процесса в два момента времени t_1 и t_2. Показывает быстроту изменения процесса во времени: чем ***у'же*** *корреляционная функция, тем* **быстрей** *изменяется во времени случайный процесс, и наоборот.*

3. Что такое стационарный/нестационарный случайный процесс?

Стационарный случайный процесс – случайный процесс, у которого плотность вероятности, математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция не меняются от времени. Иначе – нестационарный процесс.

4. В чём состоит эргодическое свойство случайного процесса?

Эргодическое свойство случайного процесса состоит в том, что статистические характеристики случайного процесса по совокупности реализаций равны соответствующим характеристикам, полученным по одной реализации.

5. Что такое спектральная плотность мощности случайного процесса?

Спектральная плотность мощности случайного процесса – это усреднённый по совокупности усечённых реализаций спектр мощности. Показывает распределение мощности случайного процесса по частоте.

6. Если ширина спектральной плотности мощности уменьшается, то интервал временной корреляции уменьшается или увеличивается?

Если ширина спектральной плотности мощности уменьшается, то интервал временной корреляции увеличивается, и наоборот.

7. Приведите формулировку теоремы Винера-Хинчина? Для чего необходима теорема Винера-Хинчина?

Теорема Винера-Хинчина говорит о том, что спектральная плотность мощности связана с корреляционной функцией через преобразование Фурье. Теорема Винера-Хинчина необходима для нахождения спектральной плотности мощности через корреляционную функцию, и, наоборот.

8. Что такое белый шум? Как вычисляется мощность случайного процесса ? Чему равна мощность белого шума ?

Белый шум – случайный процесс с постоянной по частоте спектральной плотностью мощности. Мощность случайного процесса равна дисперсии случайного процесса или равна интегралу от спектральной плотности мощности. У белого шума полоса бесконечна, поэтому мощность белого шума – стремится к бесконечности.

9. Что такое узкополосный случайный процесс? Что такое широкополосный случайный процесс?

*Узкополосный случайный процесс – случайный процесс, у которого полоса Δf **много меньше** центральной частоты f_0.*

*Широкополосный случайный процесс – случайный процесс, у которого полоса Δf **много больше** центральной частоты f_0.*

10. Какова плотность распределения огибающей и фазы смеси узкополосного случайного процесса и гармонического сигнала при малом и большом отношении сигнал/шум?

*При **большом** отношении сигнал/шум **огибающая** суммы сигнала и шума имеет **гауссовскую плотность вероятности.***

*При **малом** отношении сигнал/шум **огибающая** суммы сигнала и шума имеет **Релеевскую плотность вероятности**.*

*При **большом** отношении сигнал/шум **фаза** суммы сигнала и шума имеет **гауссовскую плотность вероятности.***

*При **малом** отношении сигнал/шум **фаза** суммы сигнала и шума имеет **равномерную плотность вероятности**.*

11. Объясните процедуру имитации случайного процесса с заданной спектральной плотностью.

Для имитации случайного процесса с заданной спектральной плотностью мощности сначала спектральную плотность аппроксимируют дробно-рациональным выражением, затем это выражение факторизуют, и множитель с положительными нулями используют для создания формирующего фильтра. На вход формирующего фильтра подают случайный процесс с постоянной спектральной плотностью, на выходе – получают случайный процесс с заданной спектральной плотностью мощности.

12. Назовите критерии оптимальности и условиях их применения?

Для оптимизации линейных систем обычно рассматриваются критерий максимума отношения сигнал/шум и критерий минимума среднего квадрата ошибки. Критерий максимума отношения сигнал/шум используется в обнаружителях принятого сигнала на фоне шума. Критерий минимума среднего квадрата ошибки используется в устройствах или алгоритмах фильтрации сигнала от шума, когда требуется как можно точней восстановить форму полезного сигнала и снизить влияние шума.

13. Какое интегральное уравнение следует решить для поиска импульсной характеристики оптимальной линейной системы ? Что для этого нужно знать?

Для поиска импульсной характеристики оптимальной линейной системы по критерию максимума отношения сигнал/шум решают следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^\infty h_{опт}(\lambda)\cdot R_n(\tau-\lambda)\,d\lambda = s(t-t_0).$$

Чтобы решить это уравнение и получить $h_{опт}(\lambda)$, *нужно знать форму полезного сигнала* $s(t-t_0)$ *и корреляционную функцию шума* $R_n(\tau-\lambda)$.

14. Что такое согласованный фильтр? Какова импульсная характеристика согласованного фильтра ? В каких задачах используется согласованный фильтр?

Согласованный фильтр – фильтр, на выходе которого отношение сигнал/шум в некоторый момент времени максимальный при условии, что на вход поступает аддитивная смесь полезного сигнала и белого шума. Импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отражением полезного сигнала. Согласованный фильтр используется в задачах обнаружения полезного сигнала на фоне шума.

3.8 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Во время самоподготовки рекомендуется обращаться к базам данных, информационно-справочным и поисковым системам, к которым у ТУСУРа открыт доступ:

• Библиотека ТУСУР: https://lib.tusur.ru/.

• Электронно-библиотечная система Издательства Лань: e.lanbook.com.

• Электронно-библиотечная система Юрайт: urait.ru.

• zbMATH: zbmath.org.

• Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы: https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh.

• Информационно-аналитическая система Science Index РИНЦ: https://elibrary.ru/defaultx.asp.

4 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Случайный процесс $X(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)$ со случайной начальной фазой φ_0 и детерминированными параметрами $(A, \cdot f_0)$ является:
   а) Широкополосным;
   б) Шумоподобным;
   в) Квазидетерминированным;
   г) Непрерывнозначным.
2. Случайный процесс $X(t)$, у которого математическое ожидание является детерминированной функцией времени, является:
   а) Детерминированным;
   б) Стационарным;
   в) Эргодическим;
   г) Нестационарным.
3. Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$, найденное усреднением по ансамблю реализаций, не равно математическому ожиданию, полученному усреднением по времени одной реализации. Такой случайный процесс относится к классу:
   а) Узкополосных;
   б) Широкополосных;
   в) Эргодических;
   г) Нестационарных.
4. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ являются стационарными гауссовскими. Каким процессом окажется произведение этих процессов?
   а) Гауссовским;
   б) Негауссовским;
   в) Детерминированным;
   г) Нестационарным.

5. Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ являются стационарными гауссовскими. Каким процессом окажется сумма этих процессов ?

   а) Гауссовским;

   б) Негауссовским;

   в) Детерминированным;

   г) Нестационарным.

6. Над гауссовским случайным процессом $X(t)$ выполнено преобразование вида $Y(t)$=X$(t)/C$, где C - вещественная константа. Какая плотность вероятностей окажется у случайного процесса $Y(t)$?

   а) Равномерная;

   б) Экспоненциальная;

   в) Рэлеевская;

   г) Гауссовская.

7. Над стационарным гауссовским случайным процессом $X(t)$ выполнено преобразование вида $Y(t)=|X(t)|$. Какая плотность вероятностей окажется у случайного процесса $Y(t)$?

   а) Экспоненциальная;

   б) Равномерная;

   в) Рэлеевская;

   г) Гауссовская.

8. Спектральная плотность мощности случайного процесса $X(t)$ с нулевым средним значением в ограниченной полосе df = 100 Гц постоянна и равна N_0=2 Вт/Гц. Случайный процесс $X(t)$ поступает на вход идеального фильтра с прямоугольной АЧХ и единичным коэффициентом передачи в полосе. Чему равна мощность шума на выходе идеального фильтра полосой 50 Гц?

   а) 200 Вт;

   б) 100 Вт;

   в) 25 Вт;

   г) 2 Вт.

9. Полезный сигнал является детерминированным вида $s(t) = A \cdot \exp(-b \cdot t)$. Какова будет импульсная характеристика согласованного фильтра, если на вход фильтра поступает аддитивная смесь сигнала и белого шума? Ответы:

   а) $h(t) = A \cdot \exp(-b \cdot (t_0 - t))$;

   б) $h(t) = A \cdot \exp(b \cdot (t_0 - t))$;

   в) $h(t) = -A \cdot \exp(-b \cdot (t_0 - t))$;

   г) $h(t) = -A \cdot \exp(b \cdot (t_0 - t))$;

10. Аддитивная смесь состоит из полезного сигнала мощностью 5 Вт и узкополосного гауссовского шума мощность 4 Вт. Каким законом распределения описывается огибающая аддитивной смеси полезного сигнала и шума ?

    а) Гауссовским;

    б) Рэлеевским;

    в) Райсовским;

    г) Равномерным.

11. Аддитивная смесь состоит из полезного сигнала мощностью 5 Вт и узкополосного гауссовского шума мощность 4 Вт. Каким законом распределения описывается фаза аддитивной смеси полезного сигнала и шума ?

    а) Гауссовским;

    б) Рэлеевским;

    в) Райсовским;

    г) Равномерным.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После успешного изучения практических основ статистической радиотехники студенты радиотехнических специальностей обладают компетенциями в части описания случайных сигналов или помех в радиотехнических системах. Студенты знают подходы и способы описания случайных сигналов, обладают навыками определения статистических характеристик этих сигналов, в том числе, после прохождения через линейные системы. Кроме этого, студенты знакомы с вопросами оптимизации линейных систем. Это составляет основу анализа, синтеза систем в части совершенствования радиоэлектронных устройств.

Для углубленного изучения статистической радиотехники в части теоретического освоения дисциплины рекомендуется литература [9 - 13], в части практического освоения дисциплины рекомендуется литература [1 - 8].

Элементы статистической радиотехники, как и прежде, применяются для изучения статистической теории радиотехнических систем, для описания стохастических систем, а также для разработки оптимальных систем обработки информации в радиотехнических системах.

6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Кашкин, В. Б. Статистическая радиотехника : учебное пособие / В. Б. Кашкин, А. А. Баскова, А. С. Пустошилов, Я. И. Сенченко. – Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2020. – 152 с.

2 Статистическая радиотехника: учебное пособие / Е. П. Петров, Н. Л. Харина. – Киров : Вятский государственный университет, 2014. – 99 с.

3 Сенин, А. И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи : учебное пособие / А. И. Сенин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. – 71 с.

4 Тихонов, В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи : в 4 т. Т. 2. Линейные и нелинейные преобразования : учебное пособие для вузов / В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых ; под ред. В. В. Сизых. – Москва : Радио и связь, 2004. – 400 с.

5 Тихонов, В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи : в 4 т. Т. 1. Случайные величины и процессы : учебное пособие для вузов / В. И. Тихонов, Б. И. Шахтарин, В. В. Сизых ; под ред. В. В. Сизых. – Москва : Радио и связь, 2003. – 400 с.

6 Россиев, А. И. Введение в статистическую радиотехнику: в 2 ч. : учебное пособие / А. И. Россиев ; Красноярский государственный технический университет. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 1999. – Ч. 1. – 104 с.

7 Заездный, А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / А. М. Заездный. – Москва : Связь, 1969. – 448 с.

8 Статистическая радиотехника. Примеры и задачи : учебное пособие / В. Г. Горяинов, А. Г. Журавлёв, В. И. Тихонов ; под ред. В. И. Тихонова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Советское радио, 1980. – 543 с.

9 Чумаков, А. С. Основы статистической радиотехники : учебное пособие / А. С. Чумаков ; Министерство образования Российской Федерации, Томский

государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск : ТУСУР, 2003. – 395 с.
10 Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Радио и связь, 1982. – 624 с.
11 Левин, Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Радио и связь, 1982. – 622 с.
12 Купер, Дж. Вероятностные методы анализа сигналов и систем / Дж. Купер, К. Макгиллен ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1989. – 376 с.
13 Давенпорт, Б. В. Введение в теорию случайных сигналов и шумов / Б. В. Давенпорт, В. Л. Рут ; пер. с англ. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 464 с.
14 Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Москва : Юстиция, 2018. – 658 с.
15 Пугачев, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. – Москва : Физматлит, 2002. – 496 с.
16 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 1997. – 400 с.
17 Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: руководство к решению задач : учебное пособие для вузов / С. И. Баскаков. – Москва : Высшая школа, 1987. – 206 с.
18 Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Радио и связь, 1986. – 511 с.
19 Каратаева, Н. А. Радиотехнические цепи и сигналы : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1: Теория сигналов и линейные цепи / Н. А. Каратаева ; Министерство образования Российской Федерации, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра радиоэлектроники и защиты информации. – Томск : ТМЦДО, 2001. – 260 с.

20 Жуков, В. П. Задачник по курсу радиотехнические цепи и сигналы : учебное пособие для вузов / В. П. Жуков, В. Г. Карташёв, А. М. Николаев. – Москва : Высшая школа, 1986. – 192 с.

Приложение А
(рекомендуемое)

Свойства математического ожидания $\mathbf{M}\left[X\right]$ случайной величины X

№	Свойство математического ожидания
1	$\mathbf{M}\left[c\right]=c$
2	$\mathbf{M}\left[cX\right]=c\mathbf{M}\left[X\right]$
3	$\mathbf{M}[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}[X_i]$
4	$\mathbf{M}[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b_i]=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\mathbf{M}[X_i]+b_i$
5	$\mathbf{M}\left[XY\right]=\mathbf{M}\left[X\right]\mathbf{M}\left[Y\right]+K_{xy}$

где X , Y – случайные величины;
a , b , c – некоторые вещественные числа;
K_{xy} – корреляционный момент случайных величин X и Y,
n – количество случайных величин X_i.

Свойства дисперсии $D\left[X\right]$ случайной величины X

№	Свойство дисперсии ожидания
1	$D\left[c\right]=0$
2	$D\left[cX\right]=c^2D\left[X\right]$
3	$D[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}D\left[X_i\right]+2\cdot\sum_{i<j}^{n}K_{X_iX_j}$
4	$D[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b_i]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot D[X_i]+2\cdot\sum_{i<j}^{n}a_i\cdot a_j\cdot K_{X_iX_j}$

5	Если *X*, *Y* – независимые случайные величины, то $D[XY]=D[X]D[Y]+m_x^2D[Y]+m_y^2D[X]$

Некоторые тригонометрические тождества

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\beta)=1$ $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$ $tg(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $ctg(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha+1$ $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=ctg^2\alpha+1$ $\cos^2(\alpha)=\dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ $\sin^2(\alpha)=\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$ $\sin(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$ $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\ \sin(x)=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j},$$
$$\mathrm{tg}(x)=-j\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{e^{jx}+e^{-jx}},\ \mathrm{ctg}(x)=j\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{e^{jx}-e^{-jx}}$$

Свойства интегралов

№	Свойства интегралов
1	Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$
2	Интеграл от суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых: $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
3	Производная неопределённого интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)_x^{/}=f(x)$
4	Символы неопределённого интегрирования и дифференциала, стоящие рядом, взаимно уничтожаются: $d\int f(x)dx=f(x)dx$
5	Форма результата интегрирования не зависит от того, что является переменной интегрирования – независимая переменная x или функция $U(x)$

Подведение под знак дифференциала

$$\boxed{f'(x)dx = df(x)}$$

$dx = d(x+a)$	$dx = \frac{1}{a}d(ax)$
$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$	$dx^n = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$
$xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$	$x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$
$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)$	$a^x dx = \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a}$
$e^x dx = d\left(e^x\right)$	$\cos xdx = d(\sin x)$
$\sin xdx = -d(\cos x)$	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tg\ x)$
$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctg\ x)$	$\sin 2xdx = d\left(\sin^2 x\right)$
$\sin 2xdx = -d\left(\cos^2 x\right)$	$\sin 2xdx = -\frac{1}{2}d(\cos 2x)$
$\frac{dx}{1+x^2} = d(arctg\ x)$	$\frac{dx}{1+x^2} = -d(arcctg\ x)$
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(arcsin\ x)$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(arccos\ x)$

* Пример, иллюстрирующий получение формулы из таблицы «Подведение по знак дифференциала»:

$d(\cos x) = (\cos x)' dx = -\sin xdx \rightarrow \sin xdx = -d(\cos x).$

Интегрирование по частям

$$\boxed{\int UdV = UV - \int VdU}$$

$$\int (2x+3)\cos 5x dx = \left| \begin{matrix} U = 2x+3 & dV = \cos 5x dx \\ dU = 2dx & V = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{5}(2x+3)\sin 5x - \frac{2}{5}\int \sin 5x dx = \frac{(2x+3)}{5}\sin 5x + \frac{2}{25}\cos 5x$$

Метод подстановки

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi_t^{/}(t)dt}$$

$$\int x^2\sqrt{x+7}dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x+7} & t^2 = x+7 \\ x = t^2 - 7 & dx = \left(t^2-7\right)^{/}dt = 2tdt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \left(t^2-7\right)^2 t2tdt = 2\int t^2\left(t^2-7\right)^2 dt = 2\int t^2\left(t^4 - 14t^2 + 49\right)dt =$$

$$= 2\int \left(t^6 - 14t^4 + 49t^2\right)dt = 2\left(\frac{t^7}{7} - 14\frac{t^5}{5} + 49\frac{t^3}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(x+7)^7}}{7} - 14\frac{\sqrt{(x+7)^5}}{5} + 49\frac{\sqrt{(x+7)^3}}{3}\right)$$

Теорема Барроу

Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на этом пределе:

$$\boxed{\left(\int_a^x f(x)dx\right)_x^{/} = f(x)}$$

Формула Ньютона-Лейбница

Величина определённого интеграла равна разности значений первообразной от подынтегральной функции, взятых при нижнем и верхнем пределах интегрирования:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

***Неопределённый интеграл** в геометрическом смысле – это семейство линий, получающихся при непрерывном параллельном перемещении любой их них по вертикали.*

***Определённый интеграл** в геометрическом смысле – это площадь (объём) соответствующей криволинейной трапеции.*

Приложение Б

Таблица интегралов

1. $\int u^k\,du = \dfrac{u^{k+1}}{k+1} + c, \quad (k \neq -1)$

2. $\int du = u + c$

3. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

4. $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + c$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

6. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$

7. $\int e^u\,du = e^u + c$

8. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

9. $\int \cos u\,du = \sin u + c$

10. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\ u + c$

11. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\ u + c$

12. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\ \mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\ \right| + c$

13. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

14. $\int \mathrm{tg}\ u\,du = -\ln|\cos u| + c$

15. $\int \mathrm{ctg}\ u\,du = \ln|\sin u| + c$

16. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + c$

17. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$

19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + c$

20. $\int \mathrm{sh}\ u\,du = \mathrm{ch}\ u + c$

21. $\int \mathrm{ch}\ u\,du = \mathrm{sh}\ u + c$

22. $\int \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2\ u} = \mathrm{th}\ u + c$

23. $\int \dfrac{du}{\mathrm{sh}^2\ u} = -\mathrm{cth}\ u + c$

24. $\int \ln u\,du = u\ \ln u - u + c$

25. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \dfrac{1}{2}\left(u\ \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\ \ln|U + \sqrt{u^2 \pm a^2}|\ \right) + c$

26. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{1}{2}\left(u\ \sqrt{a^2-u^2} + a^2 \arcsin\dfrac{u}{a}\right) + c$

27. $\int e^{\alpha u} \sin \beta u\ du = \dfrac{e^{\alpha u}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \sin \beta u - \beta \cos \beta u) + c$

28. $\int \mathrm{arctg}\ u\ du = u\ \mathrm{arctg}\ u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + c$

29. $\int \arcsin\ u\ du = u \arcsin\ u + \sqrt{1-u^2} + c$

30. $\int e^{\alpha u} \cos \beta u\,du = \dfrac{e^{\alpha u}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \cos \beta u + \beta \sin \beta u) + c$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}dx = \pi$; Интеграл «Гаусса»: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dx^2+Ex+F}dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{D}}e^{\frac{E^2}{4D}+F}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2}\cos(Bx)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{B^2}{4A}},\ \delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt$$ – дельта-функция,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a),$$

Пусть задано интеграл следующего вида:

$$J=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c(s)c(-s)}{d(s)d(-s)}ds,$$

$c(s)$, $c(-s)$ – полиномы относительно s, которые могут быть записаны в виде

$$c(s)=c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\ldots+c_0,\ \text{и}\quad d(s)=d_n s^n+d_{n-1}s^{n-1}+\ldots+d_0,$$

n – наивысшая степень полинома знаменателя.

Значение этого интеграла может быть вычислено через указанные коэффициенты, в зависимости от n, следующим образом:

$$n=1,\quad J_1=\frac{c_0^2}{2d_0d_1},$$

$$n=2,\quad J_2=\frac{c_1^2d_0+c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2},$$

$$n=3,\quad J_3=\frac{c_2^2d_0d_1+\left(c_1^2-c_0c_2\right)d_0d_3+c_0^2d_1d_3}{2d_0d_3\left(d_1d_2-d_0d_3\right)},$$

$$n=4,\quad J_4=\frac{1}{2d_0d_4\left(-d_0d_3^2-d_1^2d_4+d_1d_2d_3\right)}\times$$

$$\times\left[c_3^2\left(-d_0^2d_3+d_0d_1d_2\right)+\left(c_2^2-2c_1c_3\right)d_0d_1d_4+\left(c_1^2-2c_0c_2\right)d_0d_3d_4+c_0^2\left(-d_1d_4^2+d_2d_3d_4\right)\right].$$

Приложение В

Таблица изображений по Лапласу и свойства операционного исчисления

	$f(t)$	$F(p)$
1	$1,\quad \eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2	$\eta(t-\tau)$	$\dfrac{1}{p}\,e^{-p\tau}$
3	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
4	t	$1/p^2$
5	t^2	$2/p^3$
6	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$
7	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
9	$\mathrm{sh}\,\lambda t$	$\dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$
10	$\mathrm{ch}\,\lambda t$	$\dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$
11	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\mathrm{sh}\,\lambda t$	$\dfrac{\lambda}{(p+a)^2-\lambda^2}$
14	$e^{-at}\mathrm{ch}\,\lambda t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-\lambda^2}$

1. Свойство линейности $\quad a\,f_1(t)+b\,f_2(t) \;\risingdotseq\; a\,F_1(p)+b\,F_2(p)$

2. Свойство подобия $\quad f(kt)\risingdotseq \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$

3. Свойство затухания оригинала $\quad e^{at}\,f(t)\risingdotseq F(p-a)$

4. Свойство запаздывания оригинала $\quad f(t-\tau)\risingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}$

5. Дифференцирование оригинала $\quad f'(t)\risingdotseq p\,F(p)-f(0)$

6. Дифференцирование изображения $\quad F^{(n)}(p)\risingdotseq (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$

7. Интегрирование оригинала $\quad \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$

8. Интегрирование изображения $\quad \int\limits_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$

9. Изображение интеграла типа "свертка"

$$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)$$

10. Изображение произведения оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq$$

11. Теорема разложения $\quad f(t)=\sum \mathrm{res}\,[F(p)\,e^{pt},p_k]$

12. Изображение периодической функции $f(t)=f(t+T)$

$$f(t) \;\risingdotseq\; \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}\,f(t)\,dt$$

Приложение Г

Таблица значений интеграла вероятностей

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,72
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,75
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,78
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,81
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,86
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,88
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,93
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,97
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,97
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,98
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,98
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,98
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,99
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,99
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,99
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,99
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,99
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,99
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,99
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,99
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,99
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,99
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,99
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,99
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,99
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,99
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,99
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,99
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,00

Пример:

$\Phi^*\left(0,54\right)=0,7054$, $\Phi^*\left(-0,88\right)=1-\Phi^*\left(0,88\right)=1-0,8106=0,189$.