

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

М.И. Курячий
А.В. Каменский
А.А. Тисленко

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

Учебно-методическое пособие
для студентов технических направлений и специальностей

Томск
2025

УДК 621.372.54.037.372(075.8)
ББК 32.811я73
К93

Рецензент:

Доцент кафедры ТУ ТУСУР, к.т.н., доцент, В.А. Кормилини

Курячий, Михаил Иванович

К93 Цифровая обработка сигналов: учебно-методическое пособие / М.И. Курячий, А.В. Каменский, А.А. Тисленко. – Томск: Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2025. – 83 с.

Настоящее учебно-методическое пособие по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» составлено с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО).

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» предназначено для студентов, обучающихся по техническим направлениям и специальностям, и содержит методические указания по организации практических занятий и самостоятельной работы при изучении данной дисциплины.

Приведены примеры решения задач, контрольных работ и расчётных заданий, а также фонда оценочных материалов по данной дисциплине.

Одобрено на заседании научно-методического семинара кафедры ТУ протокол №1 от 24.10.2025.

УДК 621.372.54.037.372(075.8)
ББК 32.811я73

©Курячий М.И., Каменский А.В.,
Тисленко А.А., 2025
©Томск. гос. ун-т систем упр. и
радиоэлектроники, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	5
1 Содержание учебно-методического пособия.....	6
2 Организация проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов.....	7
3 Организация выполнения контрольных работ.....	8
3.1 Основные формулы для анализа характеристик ЦФ	8
3.1.1 Примеры решения задач.....	12
3.2 Контрольная работа №1	16
3.2.1 Первая часть.....	16
3.2.2 Вторая часть.....	17
3.3 Контрольная работа №2	19
3.3.1 Основные формулы для исследования эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка (ЦРФ2П)	19
3.3.2 Устойчивость ЦРФ2П.....	21
3.3.3 Учет полюсов дополнительной функции $\Psi(z)$	24
3.3.4 Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №2)	25
3.4 Контрольная работа №3	26
3.4.1 Варианты индивидуальных заданий по контрольной работе №3	29
4 Организация и выполнение расчетного задания	37
4.1 Описание расчетного задания	37
4.2 Основные формулы для синтеза ЦФ	38
4.3 Примеры расчетов по синтезу ЦФ	41
4.3.1 Синтез ЦФ Баттерворта методом инвариантного преобразования ИХ.....	41
4.3.2 Синтез ЦФ методом отображения дифференциалов	43
4.3.3 Синтез ЦФ методом БЛП	44
4.3.4 Синтез ЦФ по методу Z-форм.....	46
4.4 Примеры расчетов и оформления преобразования частотных свойств ЦФ.....	48
4.4.1 Преобразование ФНЧ в ФНЧ1	48
4.4.2 Преобразование ФНЧ в ФВЧ	50
4.4.3 Преобразование ФНЧ в ПФ	52
4.5 Примеры расчетов и оформления нахождения нулей и полюсов	55
4.6 Примеры расчетов и оформления проверки устойчивости ЦФ.....	56
4.7 Расчет первых 10-ти отсчетов ИХ и ПХ. Выражение для СФ и АЧХ ЦФ	57
4.8 Пример структурной схемы ЦФ для прямой и канонической форм реализации	61
4.9 Алгоритм обработки ЦФ для прямой и канонической форм реализации. Объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала	61
4.10 Расчет среднеквадратического значения шума квантования всех источников... ..	61
4.11 Изменение значений нулей, полюсов и частотной характеристики при изменении коэффициентов ЦФ	66
5 Фонд оценочных материалов по дисциплине	70
5.1 Задачи по дисциплине ЦОС	70
5.2 Тестовые вопросы по дисциплине ЦОС.....	76
5.3 Пример вариантов контрольно-измерительных материалов (КИМ) по дисциплине ЦОС	81
5.4 Пример экзаменационного билета по дисциплине ЦОС.....	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	83
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	84

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Цифровая обработка сигналов» (ЦОС) объединяет в себе новые фундаментальные идеи по обработке одномерных и двумерных сигналов с высокими технологиями их реализации на базе цифровых сигнальных процессоров. Задачей дисциплины ЦОС является обеспечение подготовки студентов в области обработки сигналов в радиотехнических системах и устройствах, в том числе аудио- и видеосигналов на основе:

- изучения математических методов и алгоритмов, применяемых в современных и перспективных цифровых устройствах обработки сигналов;
- ознакомление с принципами и средствами реализации алгоритмов ЦОС, а также элементами систем проектирования.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- методы и средства дискретизации и квантования сигналов и ошибки, порождаемые этими процессами;
- методы построения линейных одномерных и двумерных систем обработки дискретных и цифровых сигналов, характеристики таких систем;
- методы синтеза цифровых устройств обработки сигналов;
- особенности построения, основные характеристики цифровых процессоров обработки сигналов и принципы проектирования систем на их основе.

Студент должен уметь:

- анализировать частотные, временные и точностные характеристики систем ЦОС;
- рассчитывать передаточные системные функции цифровых фильтров (ЦФ);
- синтезировать ЦФ с заданными временными, частотными и точностными характеристиками;
- проектировать ЦФ на базе цифровых сигнальных процессоров;
- пользоваться пакетами прикладных программ.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

АФП – аналоговый фильтр-прототип,
АЦП – аналого-цифровой преобразователь,
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика,
БИХ – бесконечная импульсная характеристика,
БЛП – билинейное преобразование,
ЕИ – единичный импульс,
ИХ – импульсная характеристика,
КИХ – конечная импульсная характеристика,
КЧХ – комплексная частотная характеристика,
ЛЦФ – линейный цифровой фильтр,
НРЦФ – нерекурсивный цифровой фильтр,
ОС – обратная связь,
ПФ – полосовой фильтр,
ПХ – переходная характеристика,
РУ – разностное уравнение,
РЦФ – рекурсивный цифровой фильтр,
СДО – система дистанционного обучения,
СФ – системная функция,
УМП – учебно-методическое пособие,
ФВЧ – фильтр верхних частот,
ФГОС ВО – федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования,
ФНЧ – фильтр нижних частот,
ФНЧ1 – фильтр нижних частот 1,
ФЧХ – фазо-частотная характеристика,
ЦОИ – цифровая обработка изображений,
ЦОС – цифровая обработка сигналов,
ЦРФ2П – цифровой рекурсивный фильтр 2-ого порядка,
ЦФ – цифровой фильтр,
ЦФВЧ – цифровой фильтр верхних частот,
ЦФНЧ – цифровой фильтр нижних частот.

1 СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ

В комплект учебно-методического обеспечения по дисциплине «Цифровая обработка сигналов» входят:

- учебное пособие [1,2];
- лабораторный практикум для выполнения компьютерных работ;
- данное учебно-методическое пособие (УМП);
- дополнительная литература [3-6].

По учебным планам дисциплина ЦОС изучается студентами различных технических направлений и специальностей.

К основным разделам дисциплины ЦОС, по которым студент проходит итоговую аттестацию (сдает экзамен либо зачет), относятся следующие вопросы.

1. Математическое описание цифровых сигналов и систем.
2. Цифровые фильтры и их характеристики, формы реализации и примеры построения цифровых фильтров.
3. Квантование сигналов, коэффициентов фильтра и результатов вычислений при ЦОС. Методы уменьшения ошибок квантования и округления данных.
4. Методы синтеза цифровых фильтров по заданному аналоговому фильтру-прототипу (АФП) или временным либо частотным характеристикам.
5. Преобразования частотных характеристик ЦФ. Методы синтеза цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ).
6. Цифровая обработка изображений. Двумерные линейные фильтры. Рекурсивная обработка изображений.
7. Нелинейная (ранговая) обработка изображений. Интерполяция и децимация двумерных сигналов.
8. Специализированные устройства для цифровой фильтрации данных. Аппаратное построение цифровых фильтров с КИХ и бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).
9. Цифровое сжатие видеосигналов. Пространственная и временная избыточность. Внутрикадровое кодирование.
10. Стандарты MPEG. Двухнаправленное кодирование. Типы данных и структура цифрового потока.

2 ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Практические занятия представлены следующим перечнем изучаемых тем:

- 1) изучение свойств одностороннего Z -преобразования. Прямое и обратное Z -преобразование широко используемых последовательностей;
- 2) дискретная свертка сигналов. Анализ временных и частотных характеристик нерекурсивных и рекурсивных ЦФ (НРЦФ и РЦФ);
- 3) точностные характеристики ЦФ;
- 4) тестовая контрольная работа по анализу характеристик ЦФ;
- 5) синтез ЦФ по АФП;
- 6) синтез ЦФ прямыми методами;
- 7) тестовая контрольная работа по синтезу ЦФ;
- 8) линейная цифровая обработка изображений (ЦОИ);
- 9) нелинейная (ранговая) ЦОИ;
- 10) тестовая контрольная работа по ЦОИ.

Часть самостоятельной работы студентов контролируется выполнением домашних заданий в виде трёх индивидуальных контрольных работ и расчетного задания.

Расчётное задание выполняется по теме «Синтез ЦФ и частотные преобразования их характеристик».

3 ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Названия контрольных работ:

- контрольная работа №1. «Анализ характеристик цифровых фильтров» (содержит 2 задачи). Доказательство свойств одностороннего Z-преобразования. Прямое и обратное Z-преобразование. Дискретная свертка сигналов. Анализ характеристик ЦФ;
- контрольная работа №2. «Исследование эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка» (содержит 6 заданий). Исследование точностных характеристик РЦФ второго порядка;
- контрольная работа №3. «Цифровая обработка изображений» (содержит 4 задания). Линейная ЦОИ.

В учебном пособии по ЦОС дана полная информация, позволяющая студенту успешно справиться с данными контрольными работами. Кроме того, по каждой контрольной работе в данном пособии приведены примеры решения задач. Следует внимательно отнестись к оформлению контрольных работ. Студент должен указать заданный ему вариант задания, повторить полностью формулировку задач, привести промежуточные выводы формул, подстановок и вычислений, а также ход решения с приведением ссылок на подразделы (страницы) учебного пособия и номера формул данного пособия. Недопустимо брать ответы из литературы и справочников. Особое внимание следует уделить записи ответов по решенным задачам (заданиям). В конце каждого из пунктов задания следует выделить ответ (сформулировать вывод), по которому в основном и будет формироваться оценка преподавателем. Работы следует подписывать, указывая группу, где студент обучается и дату выполнения контрольной работы, а также номер заданного варианта. В случае затруднений по выполнению контрольных работ студент должен своевременно обратиться за консультацией к преподавателю через коммуникации СДО.

3.1 Основные формулы для анализа характеристик ЦФ

Для выполнения работы по анализу характеристик ЦФ используется следующий перечень аналитических выражений:

1.0) прогрессии:

1.0.1) арифметическая прогрессия суммы от первого до n -го члена:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)r] = \frac{n}{2} (a + l), \quad (3.1)$$

где n – количество суммируемых членов арифметической прогрессии;

a – первый член арифметической прогрессии;

k – номер члена, участвующего в сумме первых n членов;

r – разность прогрессии;

l – последний член арифметической прогрессии.

1.0.2) геометрическая прогрессия:

$$\sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (3.2)$$

где q – знаменатель прогрессии.

1.0.3) арифметико-геометрическая прогрессия:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + kr)q^k = \frac{a - [a + (n-1)r]q^n}{1 - q} + \frac{rq(1 - q^{n-1})}{(1 - q)^2}. \quad (3.3)$$

1.1) аналитическая запись дискретного сигнала $x(nT)$:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(nT - kT), \quad (3.4)$$

где T – период дискретизации;

$\delta(nT)$ – аналитическая запись единичного импульса (ЕИ).

Пример:

$$\begin{aligned} \{x(kT)\} &= \{x(0); x(T); x(2T); x(3T)\} = \{0; 2; -3; 1\}, \\ x(nT) &= 2\delta(nT - T) - 3\delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T), \text{ при } n \geq 0. \end{aligned}$$

1.2) прямое Z -преобразование:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n} = Z\{f(nT)\}, \quad (3.5)$$

где $F(z)$ – изображение дискретного сигнала $f(nT)$;

z – комплексное число;

$Z\{\cdot\}$ – оператор прямого Z -преобразования.

1.3) обратное Z -преобразование:

$$f(nT) = Z^{-1}\{f(nT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^K \operatorname{res}_{z=z_k} [F(z) z^{n-1}] = \sum_{k=1}^K \operatorname{res}_{z=z_k} [\Psi(z)], \quad (3.6)$$

где $Z\{\cdot\}$ – оператор прямого Z -преобразования;

j – мнимая единица;

K – количество полюсов изображения $F(z)$;

z_k – k -ый полюс функции $\Psi(z)$;

$\operatorname{res}\{\cdot\}$ – оператор вычета комплекснозначной функции $\Psi(z)$.

Для выражения (4.6) направление обхода интеграла – против часовой стрелки.

Вычисление вычетов зависит от кратности полюса m , таким образом, выражения, для вычисления, следующие:

– в полюсе кратности m ($m > 1$):

$$\operatorname{res}_{z=z_k} [\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [\Psi(z)(z - z_k)^m], \quad (3.7)$$

– в простом полюсе ($m = 1$):

$$\operatorname{res}_{z=z_k} [\Psi(z)] = [\Psi(z)(z - z_k)]. \quad (3.8)$$

1.4) дискретная свертка двух сигналов может быть вычислена несколькими способами:

1.4.1) аналитическим, во временной плоскости:

$$f(nT) = x(nT) f(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) y(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT) y(kT). \quad (3.9)$$

При этом выходной сигнал $y(nT)$ должен быть известен, его можно получить, к примеру, с использованием произведения входного сигнала $x(nT)$ и импульсной характеристики $h(nT)$:

$$y(nT) = x(nT) h(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) h(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT) h(kT). \quad (3.10)$$

1.4.2) аналитическим, в Z -плоскости, путём использования Z -образа входного сигнала $X(z)$ и выходного сигнала $Y(z)$:

$$F(z) = X(z) Y(z). \quad (3.11)$$

1.4.3) графическим способом:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = x(0)h(nT) + x(T)h(nT - T) + \dots =$$

$$= y_0(nT) + y_1(nT) + \dots, \text{ при } n \geq 0. \quad (3.12)$$

Пример нахождения дискретной свертки графическим способом (на примере нахождения выходного сигнала ЦФ). Дан входной дискретный сигнал $x(nT)$ и импульсная характеристика $h(nT)$, содержание которых идентично и отражено последовательностью:

$$h(nT) = x(nT) = \{0; 2,5; 2,5; 2,5\}.$$

Согласно (3.10) вычисление дискретной свертки двух дискретных сигналов графическим способом схематично приведено на рисунке 3.1.

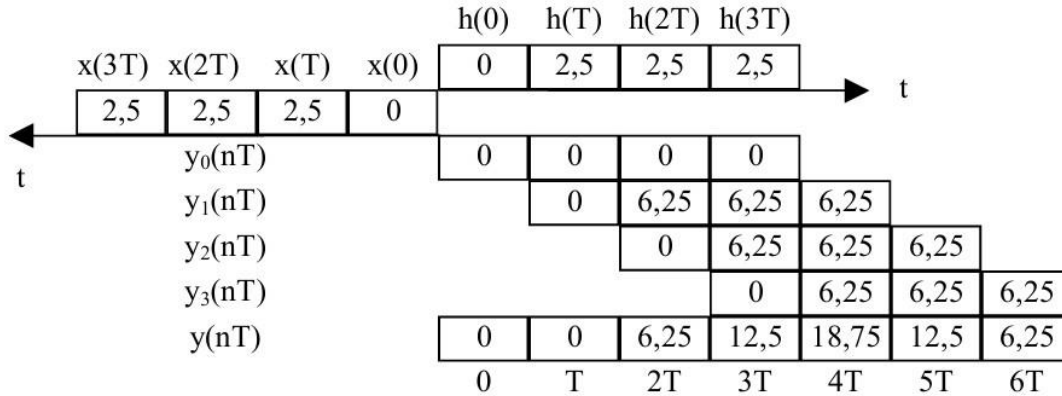


Рисунок 3.1 – Схематичное представление вычисления дискретной свертки сигналов

Результат дискретной свертки записывается в виде последовательности:

$$y(nT) = \{0; 0; 6,25; 12,5; 18,75; 12,5; 6,25\}.$$

Длина L дискретной свертки определяется следующим выражением:

$$L = n_x + n_h - 1, \quad (3.13)$$

где n_x – количество отсчетов входного дискретного сигнала;
 n_h – количество отсчетов импульсной характеристики.

В данном примере длина дискретной свертки

$$L = 4 + 4 - 1 = 7,$$

равна 7 отсчетам.

1.5) связь ИХ и системной функции (СФ) (передаточной) в Z-форме:

$$H(z) = Z\{h(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}, \quad (3.14)$$

$$h(nT) = Z^{-1}\{H(z)\}. \quad (3.15)$$

1.6) разностное уравнение (РУ) линейного цифрового фильтра (ЛЦФ):

$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i \cdot x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j \cdot y(nT - jT) =$$

$$= a_0 \cdot x(nT) + a_1 \cdot x(nT - T) + \dots + b_1 \cdot y(nT - T) + \dots, \text{ при } n \geq 0. \quad (3.16)$$

где a_i – коэффициенты нерекурсивной части ЦФ;

b_j – коэффициенты рекурсивной части ЦФ.

1.7) системная (передаточная) функция ЛЦФ:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N b_j \cdot z^{-j}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2} - \dots}. \quad (3.17)$$

1.8) частотные характеристики:

– комплексно-частотная характеристика (КЧХ):

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (3.18)$$

– амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T}) \right|, \quad (3.19)$$

– фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\varphi(\omega) = \arg \left\{ H(e^{j\omega T}) \right\} = \arctg \frac{\operatorname{Im} \left[H(e^{j\omega T}) \right]}{\operatorname{Re} \left[H(e^{j\omega T}) \right]}. \quad (3.20)$$

Важными аспектами анализа ЦФ по частотным характеристикам являются следующие пункты:

а) достаточным количеством точек вычисления АЧХ является 5 точек. В таблице 3.1 приведён пример промежуточных вычислений в этих точках.

Таблица 3.1 – Пример промежуточных вычислений АЧХ

Ω	$\nu = \omega T$	$z = e^{j\nu}$	$\cos(\nu)$	$\sin(\nu)$	$A(\nu) = \left H(z) \right _{z=e^{j\nu}}$
0	0°	1	1	0	$A(0) = H(1) $
$\frac{\pi}{4T}$	45°	$\frac{1+j}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left H\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right) \right $
$\frac{\pi}{2T}$	90°	j	0	1	$ H(j) $
$\frac{3\pi}{4T}$	135°	$\frac{1-j}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left H\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right) \right $
$\frac{\pi}{T}$	180°	-1	-1	0	$ H(0) $

На рисунке 3.2 представлено графическое отражение используемых точек на комплексной плоскости.

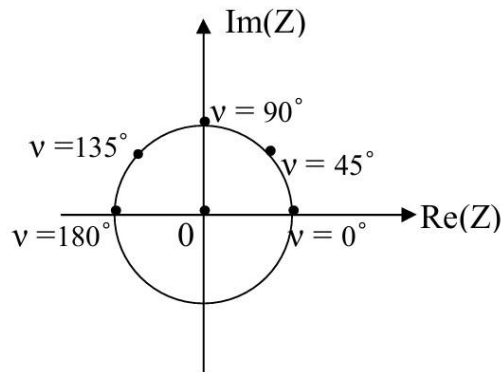


Рисунок 3.2 – Графическое отражение используемых точек на комплексной плоскости

б) использование свойство четности АЧХ для действительных коэффициентов a_i, b_j ;

в) использование свойство периодичности АЧХ и ФЧХ;

г) производить запись $H(z)$ по положительным степеням (общий вид):

$$H(z) = \frac{a_0 \cdot z^M + a_1 \cdot z^{M-1} + a_2 \cdot z^{M-2} + \dots}{z^N - b_1 \cdot z^{N-1} - b_2 \cdot z^{N-2} - \dots}. \quad (3.21)$$

Пример:

$$H(z) = \frac{4 - 2,5z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1} = \frac{4z^2 - 2,5z + 0,8}{z^2}.$$

1.9) прямая форма реализации ЛЦФ приведена на рисунке 3.3.

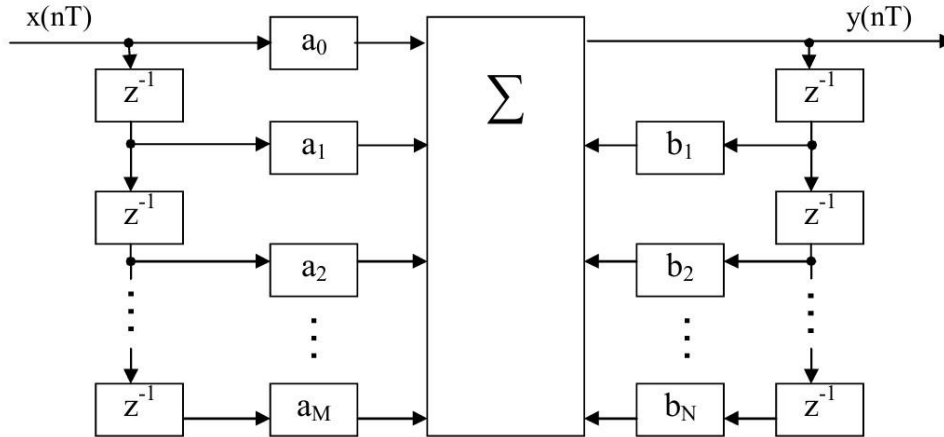


Рисунок 3.3 – Прямая форма реализации ЛЦФ

3.1.1 Примеры решения задач

Задача №1.

Задан дискретный сигнал:

$$x(nT) = \begin{cases} 0, & n \leq 0, \\ 2,5, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & n > 3. \end{cases}$$

Используя основные формулы для анализа ЦФ и информацию о сигнале необходимо:

- 1) привести аналитическую форму записи дискретного сигнала;
- 2) найти изображение входной последовательности $X(z)$;
- 3) записать РУ, считая $H(z)=X(z)$;
- 4) записать выражение для ИХ;
- 5) найти свертку $y(nT) = x(nT)h(nT)$ графическим способом;
- 6) привести структурную схему фильтра.

Решение:

- 1) аналитическая форма:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(nT - kT) = 2,5 [\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)],$$

- 2) изображение входной последовательности:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = 0z^{-0} + 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) + 0z^{-4} + \dots,$$

3) РУ (алгоритм функционирования ЦФ). Нахождение РУ может быть выполнено посредством вывода изображения выходного сигнала $Y(z)$ через ИХ, с последующим преобразованием изображения $Y(z)$ в оригинал $y(nT)$ (выходной сигнал во временной области):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2,5(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}),$$

$$Y(z) = 2,5 X(z) [z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}],$$

$$y(nT) = 2,5 [x(nT - T) + x(nT - 2T) + x(nT - 3T)], \text{ при } n \geq 0,$$

4) ИХ:

$$h(nT) = 2,5 [\delta(nT - T) + \delta(nT - 2T) + \delta(nT - 3T)], \text{ при } n \geq 0,$$

5) дискретная свертка, выполненная графическим способом (рисунок 3.4):

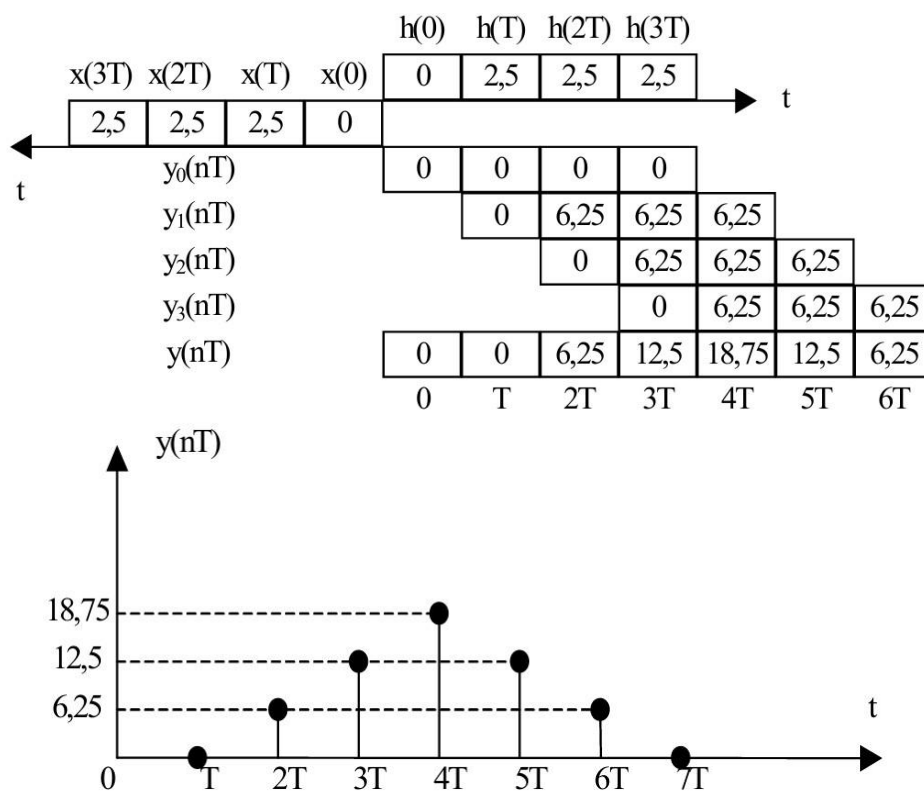


Рисунок 3.4 – Дискретная свертка, выполненная графическим способом (иллюстрация к решению задачи №1)

Из данных рисунка 4 видно, что получаемый сигнал в процессе свертки прямоугольных сигналов обладает треугольной формой.

Численный результат свертки входного сигнала и ИХ:

$$\{y(nT)\} = \{0; 0; 6,25; 12,5; 18,75; 12,5; 6,25; 0; \dots\}.$$

6) структурная схема фильтра (рисунок 3.5):

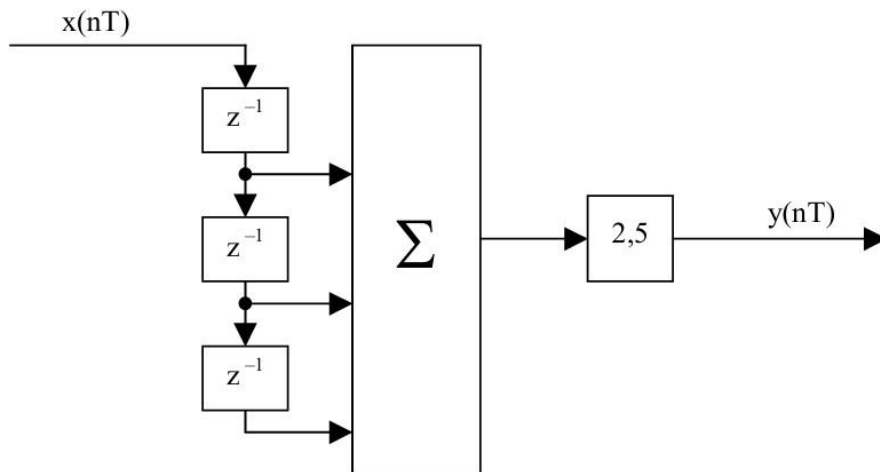


Рисунок 3.5 – Структурная схема фильтра (иллюстрация к решению задачи №1)

Задача №2.

Дано изображение дискретного сигнала:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}.$$

Необходимо:

- 1) найти входной сигнал $x(nT)$ во временной области методом вычетов;
- 2) считая $H(z) = X(z)$ записать РУ;
- 3) привести структурную схему.

Решение:

1) для нахождения входного сигнала $x(nT)$ методом вычетов, во-первых, приведем представление изображения дискретного сигнала $X(z)$ к положительным степеням:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,3}.$$

Во-вторых, необходимо найти полюсы изображения $X(z)$:

$$\Psi(z) = \frac{z}{z - 0,3} z^{n-1} = \frac{z^{n-1+1}}{z - 0,3} = \frac{z^n}{z - 0,3}.$$

Обратив внимание на знаменатель функции $\Psi(z)$, можно сделать вывод, что единственным полюсом является $z_1 = 0,3$, его кратность равна $m = 1$.

Применяя метод вычетов, находим функцию входного сигнала $x(nT)$:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = \operatorname{res}_{z_1=0,3} [\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow 0,3} \left[\frac{z^n}{z - 0,3} (z - 0,3) \right] = 0,3^n,$$

при $n \geq 0$.

Или

$$x(nT) = u(nT) \cdot 0,3^n, \text{ при } n \geq 0.$$

Итак, входной сигнал $x(nT)$ принимает следующие численные значения (вычислены первые три значения):

$$\{x(nT)\} = \{1; 0,3; 0,09; \dots\}.$$

2) аналитическая запись РУ. Для записи РУ в аналитическом виде, на основании известного изображения $X(z)$, во-первых, следует извлечь основные коэффициенты нерекурсивной a_i и рекурсивной b_j части ЦФ и крайний используемый индекс для каждой из частей (т.е. M и N , большее из которых отражает порядок ЦФ).

Таким образом числитель $X(z)$ отражает нерекурсивную часть ЦФ и показывает, что: $a_0 = 1, M = 0$.

Знаменатель $X(z)$ отражает рекурсивную часть ЦФ и показывает, что: $N = 1, b_1 = 0,3$.

Во-вторых, на основании полученных данных необходимо составить РУ одним из двух способов:

– вариант 1:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j y(nT - jT) = a_0 x(nT) + b_1 y(nT - T) = \\ = x(nT) + 0,3y(nT - T),$$

при $n \geq 0$;

– вариант 2:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

$$Y(z) = X(z) + 0,3Y(z)z^{-1},$$

$$y(nT) = x(nT) + 0,3y(nT - T),$$

при $n \geq 0$.

3) структурная схема (рисунок 3.6):

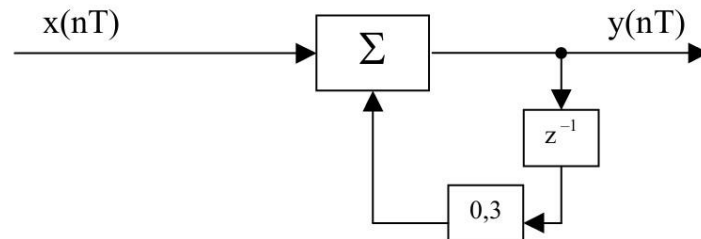


Рисунок 3.6 – Структурная схема фильтра (иллюстрация к решению задачи №2)

Задача №3.

Найти обратное Z-преобразование от $X(z) = z^{-1}$.

Решение:

Определим полюса функции $X(z)$:

$$\Psi(z) = z^{-1}z^{n-1} = z^{n-1-1} = z^n z^{-2} = \frac{z^n}{z^2},$$

при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Соответственно, единственным полюсом кратности $m = 2$ является $z_1 = 0$.

РУ в этом случае выглядит следующим образом:

$$x(nT) = Z^{-1}\{X(z)\} = \operatorname{res}_{z=0}[\Psi(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1!} \left(\frac{z^n}{z^2} z^2 \right) \frac{d}{dz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (nz^{n-1}).$$

Вычислив полученный предел и приняв $n = 1$ можно составить аналитическую запись известного сигнала, а именно единичного импульса $\delta(nT)$:

$$x(nT) = \delta(nT) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, \\ 0, & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом $\{x(nT)\} = \{0; 1; 0; \dots\}$ – запись выходного сигнала в виде конечной последовательности.

3.2 Контрольная работа №1

3.2.1 Первая часть

Задания первой части контрольной работы №1 не обладают индивидуальным набором вариантов. Выполнение подобных заданий направлено на закрепление освоения математического аппарата Z-преобразований и освоения алгоритма дискретной свертки двух одномерных сигналов.

Для выполнения первой части необходимо выполнить следующие задания:

1) привести с доказательством свойства (теоремы) одностороннего Z-преобразования: линейность, сдвиг (опережение и запаздывание), дискретная свертка, дифференцирование Z-преобразования, обращение (обратное Z-преобразование), равенство Парсеваля для дискретных сигналов во временной области, частотной области и в области Z-преобразования, начальное и конечное значения, сумма членов последовательности;

2) выполнить прямое и обратное Z-преобразование для функций, представленных в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Z-преобразования базовых функций

Функция	Z-образ
$f(nT)$	$F(z)$
$\delta(nT)$	1
$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$u(nT-T)K$	$\frac{K}{z-1}$
$u(nT)KA^n$	$\frac{Kz}{z-A}$
$u(nT-T)KA^{n-1}$	$\frac{K}{z-A}$
$u(nT)e^{-anT}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$r(nT)$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$u(nT)\sin(\omega nT)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$u(nT)\cos(\omega nT)$	$\frac{z \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$u(nT)e^{-anT} \sin(\omega nT)$	$\frac{ze^{-aT} \sin(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
$u(nT)e^{-anT} \cos(\omega nT)$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos(\omega T))}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

3) найти с помощью метода вычетов обратное Z-преобразование от:

$$X(z) = 0,3z^{-3},$$

т. е. требуется найти аналитический вид дискретного сигнала $x(nT)$ по его известному Z-образу;

4) выполнить дискретную свертку графическим способом двух сигналов. Сигналы выбрать самим, длиной не менее четырёх отсчётов, принимающих целые значения в интервале от 1 до 9. Таким образом требуется найти численную конечную последовательность сигнала $f(nT)$, представляющего результат свертки двух сигналов $x(nT)$ и $y(nT)$:

$$f(nT) = x(nT) y(nT).$$

Например:

$$\{x(nT)\} = \{3; 7; 4; 2\},$$

$$\{y(nT)\} = \{1; 8; 5; 3\}.$$

3.2.2 Вторая часть

Задания второй части контрольной работы №1 подразумевают набор индивидуальных вариантов, выполнение, одного из которых позволяет осваивать алгоритм анализа характеристик НРЦФ и РЦФ.

Для всех вариантов в отношении пункта по анализу характеристик НРЦФ РУ выглядит следующим образом:

$$y(nT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + a_2 x(nT - 2T),$$

при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

В таблице 3.3 приведены значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 нерекурсивной части НРЦФ по вариантам.

Таблица 3.3 – Варианты по анализу характеристик НРЦФ

Номер варианта	a_0	a_1	a_2
1	1	-1	5
2	2	-2	4
3	3	-3	3
4	4	-4	2
5	5	-5	1
6	-1	5	-1
7	-2	4	-2
8	-3	3	-3
9	-4	2	-4
10	-5	1	-5
11	1	5	1
12	2	4	2
13	3	3	3
14	4	2	4
15	5	1	5
16	-1	-5	1
17	-2	-4	2
18	-3	-3	3
19	-4	-2	4
20	-5	-1	5
21	-5	1	5
22	-4	2	4
23	-3	3	3
24	-2	4	2
25	-1	5	1

Для проведения анализа характеристик НРЦФ требуется:

- 1) найти ИХ $h(nT)$, построить её график;
- 2) найти СФ $H(z)$;
- 3) найти КЧХ $H(e^{j\omega T})$;
- 4) найти АЧХ $A(\omega)$;
- 5) привести структурную схему ЦФ;
- 6) построить АЧХ по пяти точкам, принадлежащих следующему диапазону частот:

$$\omega \in \left[0; \frac{\pi}{T} \right],$$

и зеркально отразить в противоположную ($\omega < 0$) сторону по оси частот.

- 7) по виду АЧХ определить тип ЦФ.

Для всех вариантов в отношении пункта по анализу характеристик РЦФ ИХ выглядит следующим образом:

$$H(z) = \frac{Kz^{-l}}{1 - b_1z^{-1}}.$$

В таблице 3.4 приведены значения коэффициентов K, l, b_1 ИХ $H(z)$ РЦФ по вариантам.

Таблица 3.4 – Варианты по анализу характеристик РЦФ

Номер варианта	K	l	b_1
1	2	2	0,2
2	3	3	0,3
3	4	4	0,4
4	5	5	0,5
5	6	6	0,6
6	7	7	0,7
7	8	8	0,8
8	9	9	0,9
9	10	10	0,95
10	11	10	0,15
11	12	9	0,25
12	13	8	0,35
13	14	7	0,45
14	15	6	0,55
15	16	5	0,65
16	17	4	0,75
17	18	3	0,85
18	19	2	0,95
19	20	1	0,97
20	21	11	0,99
21	22	12	0,51
22	23	13	0,52
23	24	14	0,53
24	25	15	0,54
25	26	16	0,55

Для проведения анализа характеристик РЦФ требуется найти выражения для:

- 1) ИХ, т. е. $h(nT)$ используя метод вычетов. Построить график ИХ для $n = 0, 1, 2, 3, 4$;

- 2) РУ, т. е. $y(nT)$, при $n \geq 0$;
 3) КЧХ, т. е. $H(e^{j\omega T})$;
 4) АЧХ, т. е. $A(\omega)$. Построить график АЧХ для пяти точкам. По виду АЧХ определить тип ЦФ.

3.3 Контрольная работа №2

3.3.1 Основные формулы для исследования эффектов квантования в цифровом рекурсивном фильтре второго порядка (ЦРФ2П)

Исследование эффектов квантования в ЦРФ2П предполагает следующие аспекты:

1) в отличие от НРЦФ, которые всегда устойчивы, для устойчивости ЦРФ2П должны выполняться следующие условия:

а) предел ИХ по бесконечному количеству отсчетов не должен отражать бесконечность, т. е. несходимость ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| < \infty;$$

б) корни характеристического уравнения должны находиться внутри единичной окружности:

$$z^N - b_1 z^{N-1} - b_2 z^{N-2} - \dots - b_N = 0, \text{ т. е. } |z_i| < 1.$$

При этом по характеристике корней можно сделать следующие выводы:

– если корни вещественные, то в системе устанавливается аperiodический режим;

– если имеются комплексно-сопряженные корни, то система колебательная;

2) РУ с учетом операций квантования:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M R[a_i x(n-i)] + \sum_{j=1}^N R[b_j y(n-i)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $R[\cdot]$ – оператор квантования.

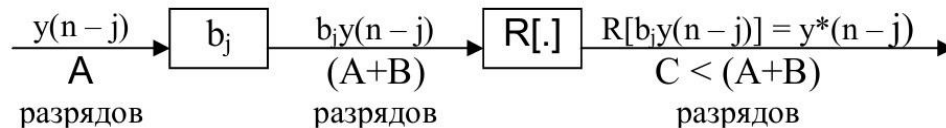


Рисунок 3.7 – Иллюстрация к РУ с учётом операций квантования

При вероятностной оценке ошибки квантования операцию квантования линейризуем, т. е. вводим сумматор и источник шума $e_j(n)$ (рисунок 3.8).

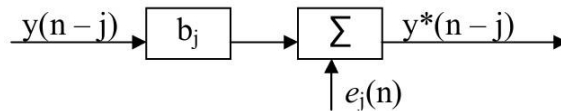


Рисунок 3.8 – Иллюстрация к вероятностной оценке ошибки квантования (линеаризация)

Дисперсия шума квантования выражается как:

$$\sigma_j^2 = \frac{\Delta_j^2}{12},$$

$$\Delta_j = 2^{-c_j}.$$

Номер младшего разряда в j -ой цепи: $a_0, a_1, \dots, a_{Cj}, c_j$;

3) дисперсия выходного шума во временной области аргумента выражается как:

$$\sigma_{k \text{ вых}}^2 = \sigma_{k \text{ вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_k^2(n),$$

$$\sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n),$$

$$\sigma_{0 \text{ Вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12},$$

где $\sigma_{k \text{ Вх}}^2 = \sigma_j^2$ - для обратных связей (либо $\sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_i^2$ - для прямой цепи);

Δ – шаг квантования в АЦП;

4) дисперсия выходного шума в комплексной плоскости аргумента выражается как:

$$\sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_k(z) H_k(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Psi(z) dz.$$

Контурный интеграл находится как сумма вычетов в особых точках подынтегрального выражения, лежащих внутри единичной окружности $|z| < 1$, т. е. полюса $H_k(z^{-1})$ не учитываются, т. к. они лежат вне единичной окружности;

5) дисперсия выходного шума в частотной области аргумента выражается как:

$$\sigma_{k \text{ Вых}}^2 = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{T}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} |H_k(e^{j\omega T})|^2 d\omega = \sigma_{k \text{ Вх}}^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H_k(e^{jv})|^2 dv,$$

где $v = \omega T$ – нормированная частота;

б) суммарная дисперсия выходного шума:

$$\sigma_{\Sigma \text{ Вых}}^2 = \sum_{k=0}^K \sigma_{k \text{ Вых}}^2,$$

где $\sigma_{0 \text{ Вых}}^2$ – погрешность, связанная с АЦП.

При вероятностном подходе используются предположения:

а) отсчеты от всех источников погрешностей $e_k(n)$ представляются дискретными белыми шумами с равномерным законом распределения и дисперсией:

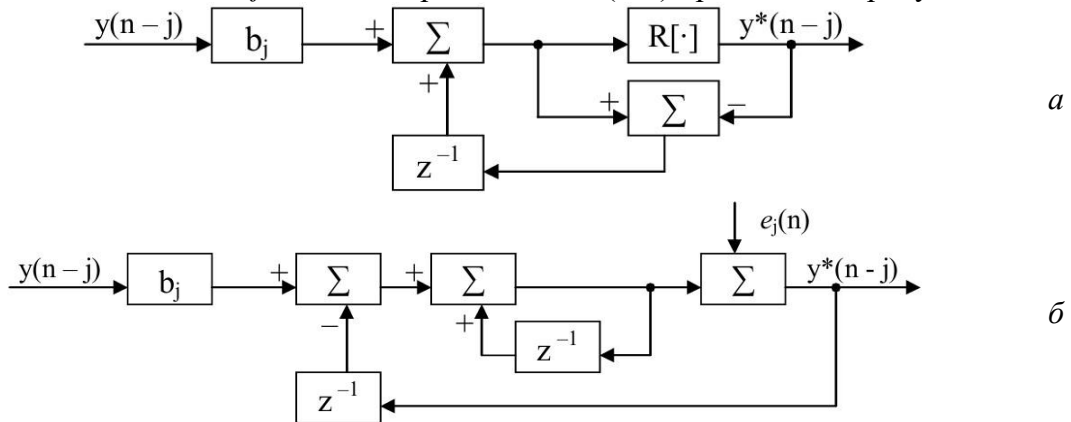
$$\sigma_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{12},$$

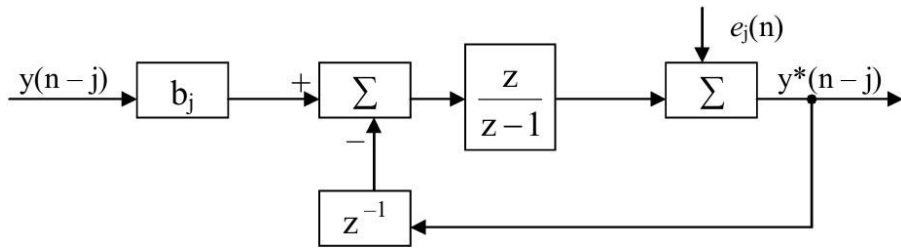
$$\Delta_k = 2^{-C_k};$$

б) все источники шума $e_k(n)$ не коррелированы между собой;

в) любой из источников шума $e_k(n)$ не коррелирован с входным сигналом $x(n)$;

7) учет остатков. Варианты представления эквивалентных схем для учета остатков для математической модели j -ой цепи обратной связи (ОС) приведена на рисунке 3.9.





6

Рисунок 3.9 – Иллюстрации к эквивалентным схемам для учета остатков:
а – вариант №1; б – вариант №2; в – вариант №3

Системная функция по сигналу:

$$H_s(z) = \frac{b_j \frac{z}{z-1}}{1 + \frac{z}{z-1} z^{-1}} = \frac{b_j z}{z-1+1} \equiv b_j.$$

Системная функция по шуму:

$$H_N(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{z-1} z^{-1}} = \frac{z-1}{z-1+1} = 1 - z^{-1}.$$

Таким образом, при учете остатков шумы дополнительно проходят по цепи вычитателя первой разности (цифрового дифференциатора, рисунок 3.10).

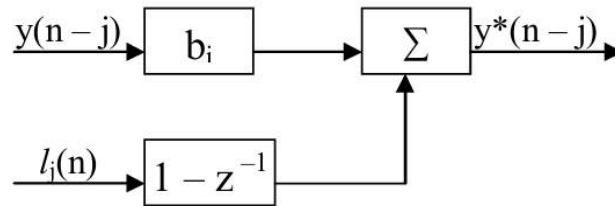


Рисунок 3.10 – Иллюстрация к учету остатков шумов

3.3.2 Устойчивость ЦРФ2П

Системная функция ЦРФ2П:

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - b_1 z - b_2}.$$

Т. е. характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0.$$

Выражения для нахождения действительных корней характеристического уравнения следующие:

$$|z_{1,2}| = \left| \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} \right| < 1.$$

Выражения для нахождения комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения следующие:

$$|z_{1,2}| = \left| \frac{b_1}{2} \pm j \sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)} \right| < 1.$$

Также важную роль играет выражение для определения границ колебательности:

$$D = \frac{b_1^2}{4} + b_2 = 0.$$

Воспользовавшись вышеприведёнными выражениями для нахождения корней характеристического уравнения, можно определить три граничных условия.

Первое условие получим для действительного корня $|z_1|$:

$$|z_1| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1.$$

Второе условие получим также для действительного корня $|z_2|$:

$$|z_1| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1.$$

Теперь покажем, что оба условия также выводимы из комплексно-сопряженных корней:

$$|z_2| = \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 - b_1,$$

$$|z_2| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1.$$

Третье условие выводится следующим образом:

$$|z_2| = -\frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} < 1 \Rightarrow \frac{b_1^2}{4} + b_2 < 1 + b_1 + \frac{b_1^2}{4} \Rightarrow b_2 < 1 + b_1.$$

На рисунке 3.11 показан, т. н. треугольник устойчивости для ЦРФ2П.

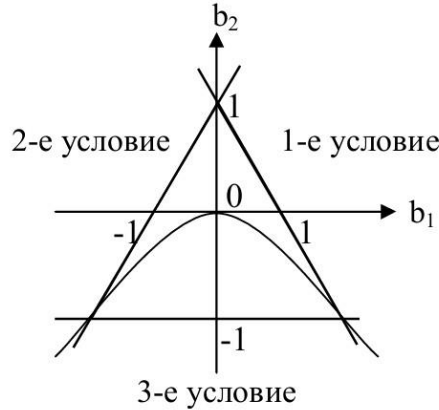


Рисунок 3.11 – Треугольник устойчивости для ЦРФ2П

Аналитическое выражение для определения границы между апериодическими и колебательными режимами:

$$D = 0 \Rightarrow b_2 = -\frac{b_1^2}{4}.$$

Определим интервалы границ устойчивости:

1) первое условие:

$$b_2 = 1 - b_1,$$

$$b_1 \in [0; 2],$$

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 - 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 - 2)) = \begin{cases} 1, \\ b_1 - 1; \end{cases}$$

2) второе условие:

$$b_2 = 1 + b_1,$$

$$b_1 \in [-2; 0]$$

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_1^2 + 4b_1 + 4)} = \frac{1}{2}(b_1 \pm (b_1 + 2)) = \begin{cases} -1, \\ b_1 + 1. \end{cases}$$

Для $D > 0$ существует два полюса на действительной оси Z :

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}.$$

Т. е. область апериодических решений отображается в пары точек на действительной оси Z (рисунок 3.12).

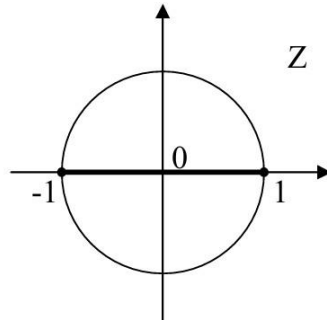


Рисунок 3.12 – Иллюстрация к области апериодических решений

Для $D < 0$ существует два комплексно-сопряжённых полюса:

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm j\sqrt{-\left(\frac{b_1^2}{4} + b_2\right)} = \frac{b_1}{2} \pm j\sqrt{-D}.$$

Модули:

$$|z_{1,2}| = \frac{b_1^2}{4} - \frac{b_1^2}{4} - b_2 = -b_2 < 1,$$

определяются только значением b_2 , таким образом, что:

- при $b_2 \Rightarrow -1$ мы подходим к границе устойчивости;
- при $b_2 \Rightarrow 0$ модуль $b_2 \Rightarrow -1$.

Граница при $b_2 \Rightarrow -1$ $|z_{1,2}| = 1$ отображается на единичную окружность (конкретная точка зависит от коэффициента b_1 , рисунок 3.13).

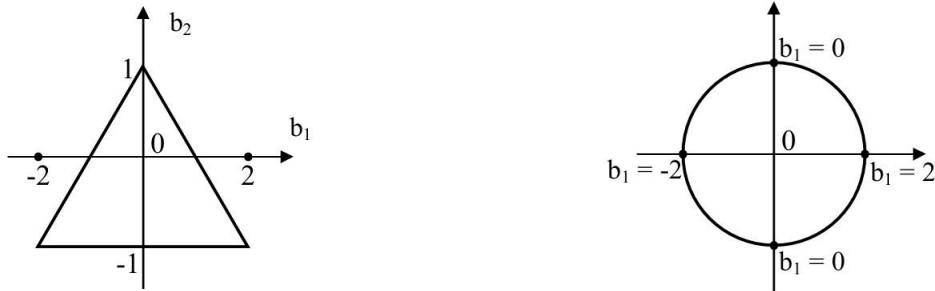


Рисунок 3.13 – Иллюстрация к $D < 0$

Граница устойчивости: $D = 0$; $z_{1,2} = \frac{b_1}{2}$; $b_1 \in [-2; 2]$ (рисунок 3.14).



Рисунок 3.14 – Иллюстрация к $D = 0$

Два полюса сливаются в один:

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2}.$$

3.3.3 Учет полюсов дополнительной функции $\Psi(z)$

Системная функция ЦРФ2П:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0.$$

Т. к. корнями характеристического уравнения являются $z_{1,2}$, тогда:

$$z_1 + z_2 = b_1,$$

$$z_1 z_2 = -b_2.$$

Выведем функцию $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = H(z) H(z^{-1}) \frac{1}{z} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(z - z_1)(z - z_2)} \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{-b_2 (z - z_3)(z - z_4)} \frac{1}{z}.$$

Полюсы $H(z)$:

$$z_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}.$$

Полюсы $H(z^{-1})$:

$$z_3 = \frac{1}{z_1},$$

$$z_4 = \frac{1}{z_2}.$$

Полюс $1/z$:

$$z_5 = 0.$$

Учтем только следующие полюсы: z_1, z_2, z_5 (рисунок 3.15).

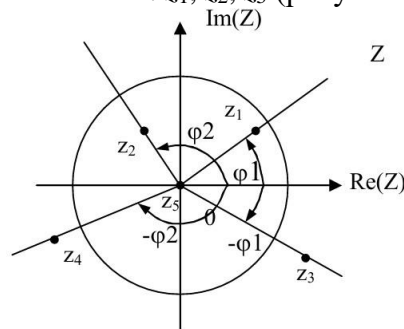


Рисунок 3.15 – Иллюстрация к учету полюсов дополнительной функции $\Psi(z)$

Пример:

Вычет в $z = 0$. Вычет в приведённой точке равен:

$$\text{Res } \Psi(z) = \frac{a_0 a_2}{z_1 z_2} = -\frac{a_0 a_2}{b_2}.$$

Требуется чтоб выполнялось условие:

$$\begin{cases} a_0 \neq 0, \\ a_2 \neq 0, \end{cases}$$

иначе вычет будет равен нулю, и ничего не добавится к сумме вычетов.

3.3.4 Варианты индивидуальных заданий (контрольная работа №2)

Для выполнения задачи требуется взять из таблицы 3.5 системную функцию, соответствующего номеру своего варианта, и выполнить следующие пункты:

1) оцените область устойчивости ЦФ второго порядка в зависимости от значений коэффициентов b_1 и b_2 и разбейте ее на подобласти для апериодических сигналов и колебательных систем. Область устойчивости оценить: 1 – по характеристическому уравнению, 2 – по критерию Рауса-Гурвица;

2) определите дисперсию шума АЦП на выходе цифрового фильтра (получите расчетную формулу $\sigma_{0\text{вых}}^2 = \sigma_{0\text{вх}}^2 \cdot \dots$);

3) нарисуйте структурную схему цифрового фильтра при канонической форме реализации, и последующие пункты задания работы выполняйте, используя эту форму реализации;

4) определите выходные дисперсии шумов округления, вносимых при умножении на коэффициенты фильтра b_1 и b_2 ;

5) определите суммарную дисперсию шумов квантования и округления на выходе цифрового фильтра;

6) при предположении, что один из множителей на b_1 (b_2) выполняет операции с сохранением остатка, вычислите выходную дисперсию шумов округления;

7) сделайте вывод и объяснения процессов формирования ошибок и их представления в виде шумов в цифровом фильтре.

Таблица 3.5 – Варианты системных функций РЦФ 2-ого порядка

Номер варианта	Системная функция $H(z)$	Номер варианта	Системная функция $H(z)$
1	$H(z) = \frac{1}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	14	$H(z) = \frac{2+z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
2	$H(z) = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	15	$H(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
3	$H(z) = \frac{z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	16	$H(z) = \frac{2+z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
4	$H(z) = \frac{z^{-1}-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	17	$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
5	$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	18	$H(z) = \frac{2+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
6	$H(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	19	$H(z) = \frac{2-z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
7	$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	20	$H(z) = \frac{2-z^{-1}-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
8	$H(z) = \frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	21	$H(z) = \frac{2-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
9	$H(z) = \frac{z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	22	$H(z) = \frac{2-z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
10	$H(z) = \frac{1+z^{-1}-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	23	$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$

Продолжение таблицы 3.5.

Номер варианта	Системная функция $H(z)$	Номер варианта	Системная функция $H(z)$
11	$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	24	$H(z) = \frac{z^{-1}-2z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
12	$H(z) = \frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$	25	$H(z) = \frac{2+z^{-1}-z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$
13	$H(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$		

3.4 Контрольная работа №3

Дан входной двумерный массив чисел (изображение) – $x(n_1, n_2)$. Необходимо получить выходной массив при заданном операторе преобразования $T[\cdot]$. Функциональная схема, отражаемая выражением

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)],$$

представлена на рисунке 3.16.

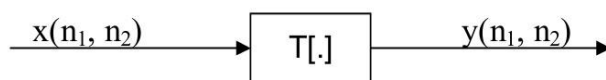


Рисунок 3.16 – Функциональная схема оператора $T[\cdot]$

Оператор системы $T[\cdot]$ представляет собой правило или набор правил, по которым происходит преобразование (отображение) входного сигнала на выходной.

Мы будем рассматривать следующие классы многомерных систем:

- линейные;
- инвариантные к сдвигу (стационарные);
- устойчивые;
- физически реализуемые;
- нерекursивные (всегда устойчивы).

Примеры нерекursивных двумерных ЦФ:

1) оператор двойного дифференцирования (разделимый фильтр) (рисунок 3.17);

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3.17 – Иллюстрация к оператору двойного дифференцирования

2) лапласиан, функциональная схема которого приведена на рисунке 3.18;

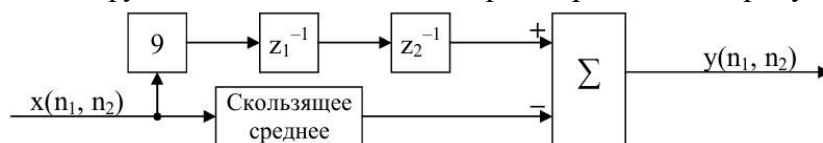


Рисунок 3.18 – Функциональная схема ЦФ двумерного Лапласиана:

z_1^{-1} – оператор задержки на один элемент; z_2^{-1} – оператор задержки на одну строку

Необходимо отметить, что ЦФ двумерного Лапласиана не является разделимым фильтром, поэтому формирование значений элементов маски формируется следующим образом (рисунок 19):

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ** \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3.19 – Иллюстрация к ЦФ двумерного Лапласиана

В случае двумерного НРЦФ РУ имеет следующий вид:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} a_{i_1, i_2} x(n_1 - i_2, n_2 - i_2),$$

при $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0$.

Соответственно, при условии, что:

$$x(n_1, n_2) = 0,$$

при $n_1 < 0, n_2 < 0$.

На рисунке 3.20 приведён пример применения ЦФ двойного дифференцирования к входному сигналу $x(n_1, n_2)$ для получения выходного сигнала $y(n_1, n_2)$.

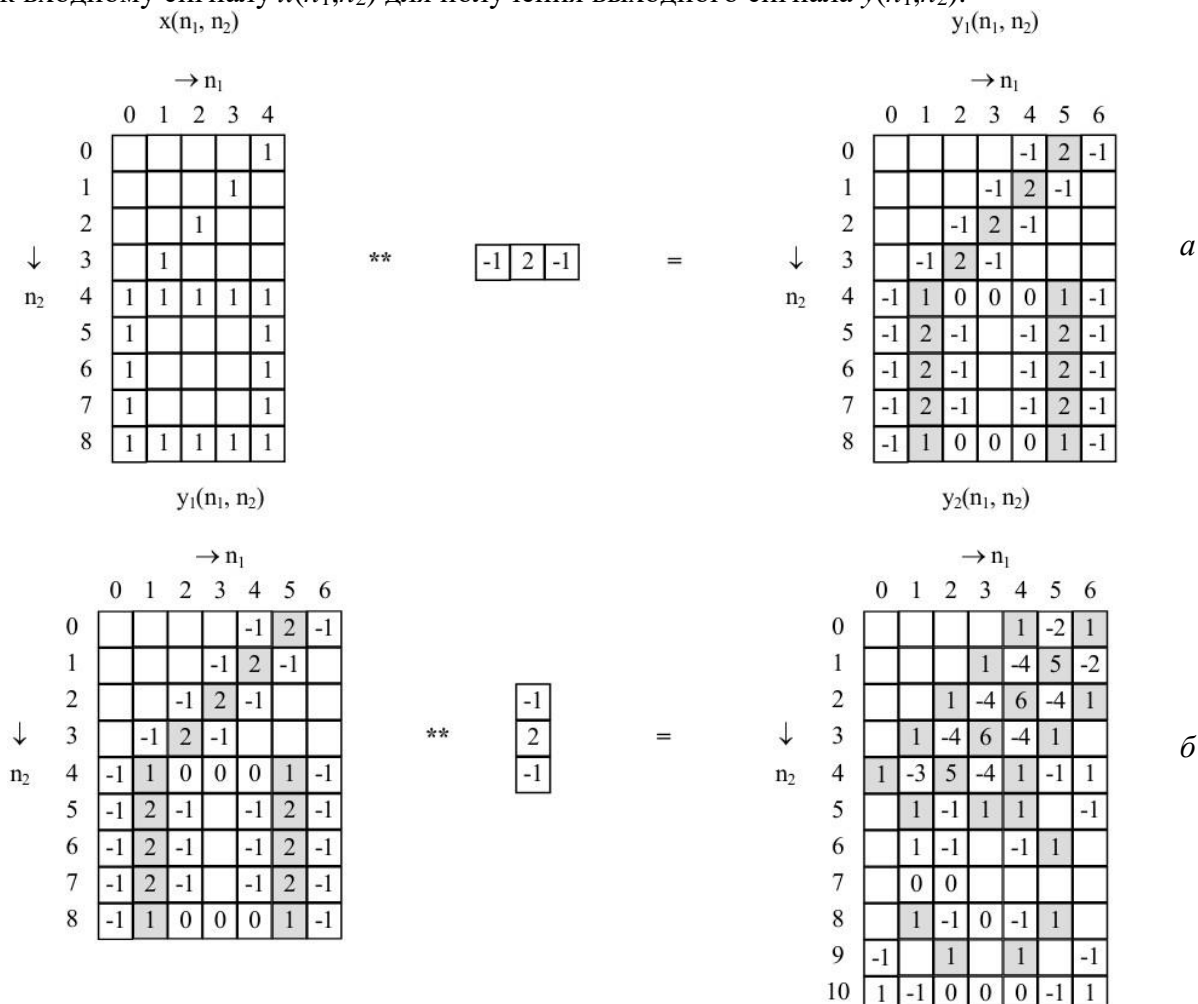


Рисунок 3.20 – Пример применения ЦФ двойного дифференцирования:

а – двумерная свертка горизонтальной составляющей маски;

б – двумерная свертка вертикальной составляющей маски

На рисунке 3.21 приведён пример применения ЦФ двумерного Лапласиана (по алгоритму, приведенному на рисунке 3.19).

3.4.1 Варианты индивидуальных заданий по контрольной работе №3

Вариант №1.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №2.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №3.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №4.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №5.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №6.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №7.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное

уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №8.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №9.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление - таблица чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №10.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) «скользящее среднее»;
- 2) лапласиан для «восьми соседей»;
- 3) оператор выделения вертикальных линий;
- 4) оператор «запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №11.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел,

описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №12.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №13.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного фильтра представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №14.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №15.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №16.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «6» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №17.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «7» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №18.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «8» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №19

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «9» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №20.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «0» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения малоразмерных объектов из шумов и фонов;
- 2) лапласиан для «четырёх соседей»;
- 3) оператор выделения левой диагонали;
- 4) оператор «север».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №21.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «1» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения правой диагонали;

- 2) оператор двойного дифференцирования;
- 3) оператор выделения горизонтальных линий;
- 4) оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №22.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «2» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения правой диагонали;
- 2) оператор двойного дифференцирования;
- 3) оператор выделения горизонтальных линий;
- 4) оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №23.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «3» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения правой диагонали;
- 2) оператор двойного дифференцирования;
- 3) оператор выделения горизонтальных линий;
- 4) оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №24.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «4» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения правой диагонали;
- 2) оператор двойного дифференцирования;
- 3) оператор выделения горизонтальных линий;
- 4) оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

Вариант №25.

Вычислить сигналы на выходе двумерных фильтров (представление в виде таблицы чисел размером 7×11). Входной сигнал представлен в виде бинарного массива чисел, описывающего цифру «5» (представление цифры по методу, принятому при начертании почтового индекса на конверте в матрице отсчетов 5×9).

ИХ двумерного ЦФ представляется «маской» 3×3 типа:

- 1) оператор выделения правой диагонали;
- 2) оператор двойного дифференцирования;
- 3) оператор выделения горизонтальных линий;
- 4) оператор «юго-запад».

Для каждого из четырех заданных вариантов представить матрицу отсчетов выходного сигнала, нарисовать структурную схему двумерного фильтра и записать разностное уравнение. Заданные «маски» импульсных характеристик следует брать из раздела 3 учебного пособия по ЦОС.

4 ОРГАНИЗАЦИЯ И ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ

После изучения теоретической и практической частей дисциплины «Цифровая обработка сигналов» для студентов, в соответствии с учебным планом, предусмотрено выполнение расчетного задания.

Целью расчетного задания является освоение студентами методов синтеза ЦФ по заданному АФП и преобразование их частотных характеристик (раздел 2 учебного пособия). Анализ характеристик синтезированных ЦФ (раздел 1 учебного пособия). Проектирование разработанного фильтра на базе цифровой схемотехники (раздел 4).

В примерах расчетов и оформления преобразования частотных свойств ЦФ используются следующие обозначения: фильтр нижних частот (ФНЧ), фильтр нижних частот 1 (ФНЧ1), фильтр верхних частот (ФВЧ), полосовой фильтр (ПФ).

4.1 Описание расчетного задания

Исходные данные:

- частота дискретизации: $f_d = 100$ кГц;
- частота среза по уровню -3 дБ: $f_{cp} = f_0 + (N-1)\Delta f$;
- частота среза по уровню -12 дБ: $f_2 = 2 f_{cp}$;
- $f_0 = 10$ кГц, $\Delta f = 1$ кГц, $N = 1, 2, \dots, 25$ (номер варианта по списку группы).

Для осуществления синтеза ЦФ требуется выполнить следующие пункты:

1) использовать в качестве АФП фильтр Баттерворта 2-ого порядка, для которого определить:

- операторный коэффициент передачи, который выражается формулой:

$$K(p) = \frac{\omega_{cp}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} + \omega_{cp}^2}, \quad (4.1)$$

где ω_{cp} – угловая частота среза по уровню -3 дБ;

- АЧХ $K(p)$, описывающийся следующим образом:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cp}}\right)^4}}. \quad (4.2)$$

- ИХ ЦФ, которая описывается следующим образом:

$$h(t) = \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} \exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} t\right) \sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}} t\right). \quad (4.3)$$

2) необходимо синтезировать ЦФ Баттерворта следующими методами:

- инвариантное преобразование ИХ;
- отображение дифференциалов;
- билинейное преобразование (БЛП);
- метод Z-форм;

3) выбрать ЦФ, синтезированный выше методом БЛП и получить, используя частотные преобразования, фильтры с другими частотными характеристиками по следующим принципам:

- ФНЧ в ФНЧ1;
- ФНЧ в ФВЧ;
- ФНЧ в ПФ.

При этом для получения фильтров с другими частотными характеристиками, необходимо принять во внимание следующие выражения:

- угловая частота среза исходного цифрового ФНЧ:

$$\Theta_{\text{ср}} = 2\pi f_{\text{ср}}, \quad (4.4)$$

- угловая частота среза преобразованного цифрового ФНЧ1:

$$\omega_{\text{ср}} = 1,5\Theta_{\text{ср}}, \quad (4.5)$$

- угловая частота среза преобразованного цифрового ФВЧ:

$$\omega_{\text{ср}} = \Theta_{\text{ср}}, \quad (4.6)$$

- угловые частоты среза ПФ:

$$\omega_1 = \frac{\Theta_{\text{ср}}}{\sqrt{2}}, \quad (4.7)$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}\Theta_{\text{ср}}, \quad (4.8)$$

4) для синтезированных фильтров получить выражение для системной функции $H(z)$, символьные и численные значения ее коэффициентов a_i, b_j ;

5) зарисовать структурные схемы синтезированных ЦФ;

6) на одном графике построить АЧХ АФП и ЦФ, синтезированных по всеми вышеприведённым различными методами синтеза ЦФ;

7) на одном графике построить АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, синтезированных с использованием частотных преобразований;

8) найти значения нулей и полюсов. Показать картину нулей и полюсов на комплексной Z -плоскости;

9) проверить условие устойчивости фильтра;

10) записать выражение для СФ и АЧХ. Рассчитать ИХ и переходную характеристику (ПХ);

11) показать структурную схему фильтра для прямой и канонической форм реализации;

12) записать алгоритм обработки ЦФ РУ для прямой и канонической реализаций. Привести объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала;

13) нарисовать эквивалентную шумовую схему ЦФ для прямой и канонической форм реализации. Рассчитать среднеквадратические значения шума квантования всех источников;

14) показать, как изменяются значения нулей, полюсов и, соответственно, АЧХ при:

- $a_1 = 0$;

- $a_2 = 0$;

- $a_1 = a_2 = 0$;

- $a_2 = b_2 = 0$;

- $b_1 = 0$;

15) составить схемную либо программную реализацию ЦФ;

16) сформулировать заключение и выводы по результатам синтеза ЦФ.

4.2 Основные формулы для синтеза ЦФ

Для осуществления синтеза ЦФ требуется обращаться к следующим выражениям:

1) инвариантное преобразование ИХ:

$$h(nT) = T \cdot h_a(t) \Big|_{t=nT}, \quad n \geq 0. \quad (4.9)$$

Домножение на T производится по двум причинам:

– для выполнения одинаковых условий передачи по постоянной составляющей, т. е. пусть $K(0) = 1$, тогда $H(e^{j\omega T})|_{\omega=0} = H(1) \approx 1$. Но нормировка все равно нужна, т. е.:

$$H_{\text{н}}(e^{j\omega T}) = \frac{H(e^{j\omega T})}{|H(1)|}, \quad (4.10)$$

– ИХ ЦФ должна быть безразмерной;

2) метод отображения дифференциалов: при известном операторном коэффициенте $K(p)$ фильтра-прототипа, отображающая замена (замена Эйлера) может быть выражена следующим образом:

$$p = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}, \quad (4.11)$$

3) метод БЛП. При известном операторном коэффициенте $K(p, \omega_a)$, где:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{\text{ср}} T}{2}\right), \quad (4.12)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – необходимая частота среза ЦФ.

Отображающая замена p в случае операторного коэффициента $K(p, \omega_a)$ выражается следующим образом:

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad (4.13)$$

4) метод Z-форм. Преобразуем $K(p)$ к виду, когда показатели степеней p – отрицательные, в связи с этим отображающие замены имеют вид:

$$p^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}, \quad (4.14)$$

$$p^{-2} = \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}, \quad (4.15)$$

5) частотное преобразование ФНЧ в ФНЧ1. Для осуществления частотного преобразования выбираем ЦФ, синтезированный методом БЛП, с частотой среза $\Theta_{\text{ср}}$ по уровню -3 дБ; $H(z)$ – системная функция ФНЧ. Далее необходимо произвести замену:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad (4.16)$$

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{ср}} - \omega_{\text{ср}} T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{ср}} + \omega_{\text{ср}} T}{2}\right)}, \quad (4.17)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – требуемая частота среза ФНЧ1;

б) частотное преобразование ФНЧ в ФВЧ. Для СФ $H(z)$ исходного ФНЧ принять требуемую частоту среза $\Theta_{\text{ср}}$. Далее необходимо произвести замену:

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}, \quad (4.18)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\Theta_{\text{ср}} + \omega_{\text{ср}} T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_{\text{ср}} - \omega_{\text{ср}} T}{2}\right)}, \quad (4.19)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ – требуемая частота среза ФВЧ;

7) частотное преобразование ФНЧ в ПФ. Аналогично частотному преобразованию ФНЧ в ФВЧ следует для СФ $H(z)$ исходного ФНЧ принять требуемую частоту среза $\Theta_{\text{ср}}$.

Замена производится следующим образом:

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}, \quad (4.20)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}T\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}T\right)}, \quad (4.21)$$

$$k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}T\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_{\text{cp}}T}{2}\right), \quad (4.22)$$

Дадим некоторые пояснения по использованию приведенных формул:

– найдём ИХ фильтра Баттерворта второго порядка исходя из $K(p)$:

$$K(p) = \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_{\text{cp}}p + \omega_{\text{cp}}^2}, \quad (4.23)$$

$$h_a(t) = L^{-1}\{K(p)\}, \quad (4.24)$$

$$h_a(t) = \sqrt{2}\omega_{\text{cp}} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{cp}}}{\sqrt{2}}t\right) \sin\left(\frac{\omega_{\text{cp}}}{\sqrt{2}}t\right), \text{ при } t \geq 0. \quad (4.25)$$

При замене t на nT получим:

$$h(nT) = Th_a(nT), \text{ при } n \geq 0, \quad (4.26)$$

$$\sin\left(\frac{\omega_{\text{cp}}T}{\sqrt{2}}n\right) = \sin(\beta n) = \frac{e^{j\beta n} - e^{-j\beta n}}{2j}, \quad (4.27)$$

где β :

$$\beta = \frac{\omega_{\text{cp}}T}{\sqrt{2}}, \quad (4.28)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n}, \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \quad (4.30)$$

– разберем задачу: найти q_1 и q_2 и свернуть ряд, затем привести $H(z)$ к стандартному виду:

$$H_1(z) = k_0 \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{-j}} = k_0 \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots}. \quad (4.31)$$

Определить сначала a_i, b_j в символьном виде, затем в числовом виде.

При использовании метода отображения дифференциалов производим $K(p)$ отображающую замену p в соответствии с (4.11), получаем выражение для $H_2(z)$ и приводим его к стандартному виду. Затем находим коэффициенты a_i, b_j сначала в символьном, а затем в числовом виде.

При БЛП переопределяем частоту ω_a , согласно выражению (4.12), и записываем выражение для операторного коэффициента $K(p)$ согласно (4.23). Далее проводим замену

отображающей замены p согласно выражению (4.13), после чего получаем выражение для $H_3(z)$, которое приводим к стандартному виду, в соответствии с выражением (4.31). Требуется, чтобы коэффициенты a_i были представлены как можно проще.

При использовании метода Z-форм приводим выражение для операторного коэффициента $K(p)$ к виду с отрицательными степенями p :

$$K(p) = \frac{M(p)p^{-2}}{N(p)p^{-2}}. \quad (4.32)$$

Производя соответствующие замены для p^{-1} и p^{-2} , согласно выражениям (4.14) и (4.15) соответственно, находим выражение для $H_4(z)$.

4.3 Примеры расчетов по синтезу ЦФ

Приведенные расчеты по синтезу ЦФ являются достаточно полными, но обучающийся должен избежать искушения, встать на путь повторения и копирования приведенного ниже примера оформления расчетного задания.

Именно поэтому, в приведенном примере использованы частотные преобразования ЦФ, синтезированного по методу Z-форм, а не по методу БЛП, которое предусмотрено в расчетном задании. По этой же причине не раскрыт пункт 15: составление схемной либо программной реализации синтезированного ЦФ; и пункт 16, где студент должен сформулировать заключение и выводы по результатам синтеза ЦФ.

4.3.1 Синтез ЦФ Баттерворта методом инвариантного преобразования ИХ

Задана ИХ $h(t)$ АФП, его частота среза $f_{\text{ср}}$ и соответствующая ей угловая частота $\omega_{\text{ср}}$, рассчитанная согласно выражению (4.4):

$$\begin{aligned} h(t) &= \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} t\right) \sin\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} t\right), \\ f_{\text{ср}} &= f_0 + \Delta f (N-1) = 10 + 1(11-1) = 20 \text{ кГц}, \\ \omega_{\text{ср}} &= 2\pi f_{\text{ср}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 10^3 = 12,56 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить ИХ ЦФ необходимо продискретизировать ИХ АФП:

$$h(nT) = Th(t)\big|_{t=nT},$$

где T – период дискретизации, равный:

$$T = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \text{ с}.$$

Для дискретизации воспользуемся прямым Z-преобразованием:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} T\omega_{\text{ср}} \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) \sin\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T\omega_{\text{ср}} \sqrt{2} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) \left\{ -\frac{j}{2} \left[\exp\left(j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) - \exp\left(-j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) \right] \right\} z^{-n} = \\ &= -\frac{j}{2} T\omega_{\text{ср}} \sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) \left[\exp\left(j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) - \exp\left(-j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) \right] z^{-n} = \\ &= -\frac{j}{2} T\omega_{\text{ср}} \sqrt{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT + j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT - j \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}} nT\right) z^{-n} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{j}{2}T\omega_{cp}\sqrt{2}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T+j\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T+j\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}\right)^n\right]=\\
&= -\frac{j}{2}T\omega_{cp}\sqrt{2}\left[\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T+j\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}}-\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T-j\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}}\right]=\\
&= T\omega_{cp}\sqrt{2}\frac{\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)\sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}}{1-2\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)\cos\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-1}+\exp\left(-\frac{2\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, была получена системная функция $H(z)$ вида:

$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Используя заданные частоту среза f_{cp} и соответствующую ей угловую частоту ω_{cp} АФП, можно вычислить величины коэффициентов a_1 и b_1, b_2 :

$$\begin{aligned}
a_1 &= T\omega_{cp}\sqrt{2}\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)\sin\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right) = 10^{-5} \cdot 12,56 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot \exp\left(-\frac{12,56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}10^{-5}\right) \times \\
&\quad \times \sin\left(\frac{12,56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}10^{-5}\right) = 0,56726,
\end{aligned}$$

$$b_1 = 2\exp\left(-\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right)\cos\left(\frac{\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right) = 2\exp\left(-\frac{12,56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}10^{-5}\right)\cos\left(\frac{12,56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}10^{-5}\right) = 0,51859,$$

$$b_2 = -\exp\left(-\frac{2\omega_{cp}}{\sqrt{2}}T\right) = -\exp\left(-\frac{2 \cdot 12,56 \cdot 10^4}{\sqrt{2}}10^{-5}\right) = -0,16912.$$

На рисунке 4.1 приведена схема для инвариантного преобразования ИХ.

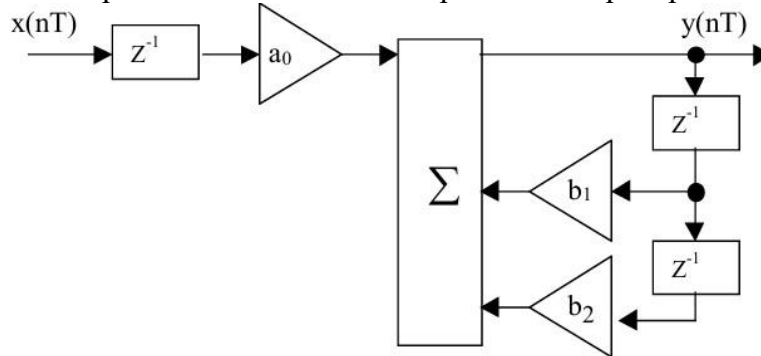


Рисунок 4.1 – Схема для инвариантного преобразования ИХ

На рисунке 4.2 приведена АЧХ АФП (сплошная линия) и ЦФ (пунктирная линия).

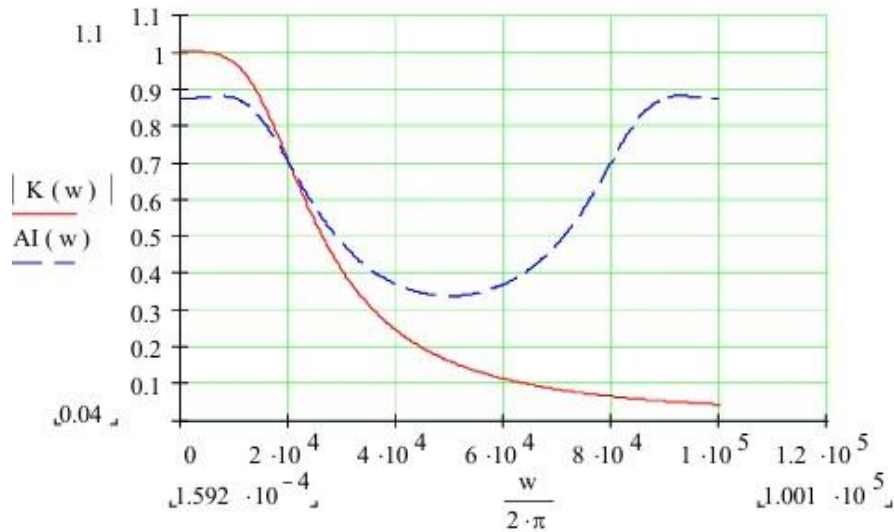


Рисунок 4.2 – АЧХ АФП и ЦФ

4.3.2 Синтез ЦФ методом отображения дифференциалов

Задана ПХ АФП:

$$K(p) = \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} p + \omega_{\text{cp}}^2},$$

где

$$p = \frac{1}{T}(1 - z^{-1}).$$

Вывод системной функции ЦФ:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\frac{1}{T^2}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{1}{T}(1 - z^{-1}) + \omega_{\text{cp}}^2} = \\ &= \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\frac{1}{T^2} - \frac{2}{T^2} z^{-1} + \frac{1}{T^2} z^{-2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}}}{T} - \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}}}{T} z^{-1} + \omega_{\text{cp}}^2} = \\ &= \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{\left(\frac{1}{T^2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}}}{T} + \omega_{\text{cp}}^2\right) - \left(\frac{2}{T^2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}}}{T}\right) z^{-1} + \frac{1}{T^2} z^{-2}} = \\ &= \frac{\omega_{\text{cp}}^2 T^2}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} T + \omega_{\text{cp}}^2 T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} T}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} T + \omega_{\text{cp}}^2 T} z^{-1} + \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} T + \omega_{\text{cp}}^2 T} z^{-2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем системную функцию $H(z)$ вида:

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$a_0 = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 T^2}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} T + \omega_{\text{cp}}^2 T^2} = \frac{1,256^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,256^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,3625,$$

$$b_1 = \frac{2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} T}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} T + \omega_{cp}^2 T^2} = \frac{2 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,256^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,86706,$$

$$b_2 = \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{cp} T + \omega_{cp}^2 T^2} = \frac{-1}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,256^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = -0,22955.$$

На рисунке 4.3 приведена структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу отображения дифференциалов.

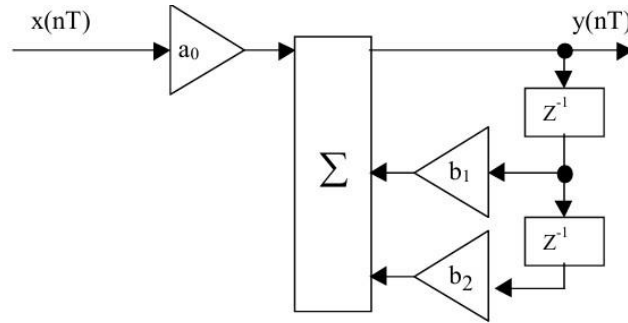


Рисунок 4.3 – Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу отображения дифференциалов

На рисунке 4.4 приведена АЧХ ЦФ (пунктир), рассчитанного по методу отображения дифференциалов, и АФП (сплошная).

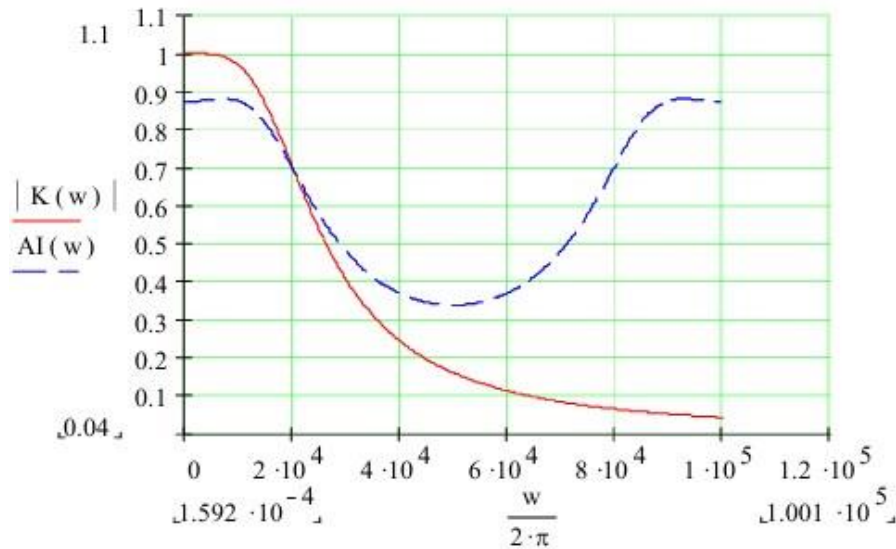


Рисунок 4.4 – АЧХ АФП и ЦФ

4.3.3 Синтез ЦФ методом БЛП

Обычно, в БЛП делается коррекция частоты. Это производится заменой $\omega_{cp} \rightarrow \omega_k$:

$$\omega_k = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(T \frac{\omega_{cp}}{2} \right) = \frac{2}{10^{-5}} \operatorname{tg} \left(\frac{1,256}{2} \right) = 1,453 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$p = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}.$$

Тогда, вывод системной функции производится следующим образом:

$$H(z) = \frac{\omega_k^2}{\frac{4}{T^2} \left(\frac{z-1}{1+z} \right)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} \frac{z-1}{1+z} + \omega_k^2} = \frac{\omega_k^2 (1+z)^2}{\frac{4}{T^2} (z-1)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} (z-1)(1+z) + \omega_k^2 (1+z)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_k^2 (1+2z+z^2)}{\frac{4}{T^2} (1-2z+z^2) + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} (z^2-1) + \omega_k^2 (1+2z+z^2)} = \\
&= \frac{\omega_k^2 (1+2z+z^2)}{\frac{4}{T^2} z^2 - \frac{8}{T^2} z + \frac{4}{T^2} + \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} z^2 - \sqrt{2} \cdot \omega_k \frac{2}{T} + \omega_k^2 + 2\omega_k^2 z + \omega_k^2 z^2} = \\
&= \frac{\omega_k^2 T^2 (1+2z+z^2)}{(4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2) - (8-2\omega_k^2 T^2) z + (4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2) z^2} = \\
&= \frac{\omega_k^2 T^2 (1+2z^{-1}+z^{-2})}{(4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2) - (8-2\omega_k^2 T^2) z^{-1} + (4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2) z^{-2}} = \\
&= \frac{\frac{\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} (1+2z^{-1}+z^{-2})}{1 - \frac{8-2\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} z^{-1} + \frac{4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем системную функцию $H(z)$ вида:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$a_0 = \frac{\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} = \frac{1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{4+2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,20657,$$

$$a_1 = \frac{2\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} = \frac{2 \cdot 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{4+2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,41314,$$

$$a_2 = \frac{\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} = \frac{1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{4+2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,20657,$$

$$b_1 = \frac{8-2\omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} = \frac{8-2 \cdot 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{4+2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = 0,36953,$$

$$b_2 = \frac{4-2\sqrt{2} \cdot \omega_k T - \omega_k^2 T^2}{4+2\sqrt{2} \cdot \omega_k T + \omega_k^2 T^2} = \frac{4-2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2}{4+2\sqrt{2} \cdot 1,453 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} + 1,453^2 (10^5)^2 (10^{-5})^2} = -0,19582.$$

На рисунке 4.5 приведена структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу БЛП.

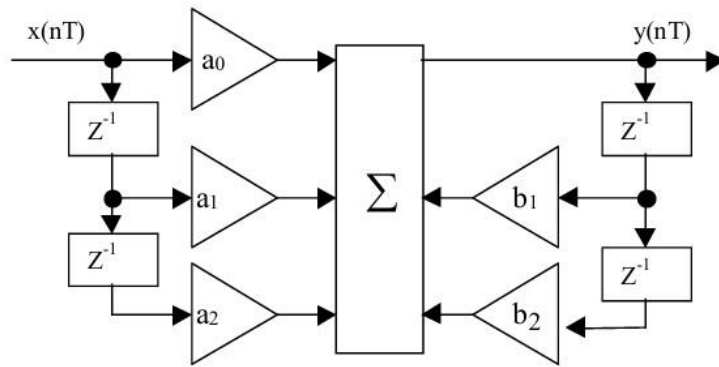


Рисунок 4.5 – Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу БЛП

На рисунке 4.6 приведена АЧХ ЦФ (пунктир), рассчитанного по методу БЛП, и АФП (сплошная).

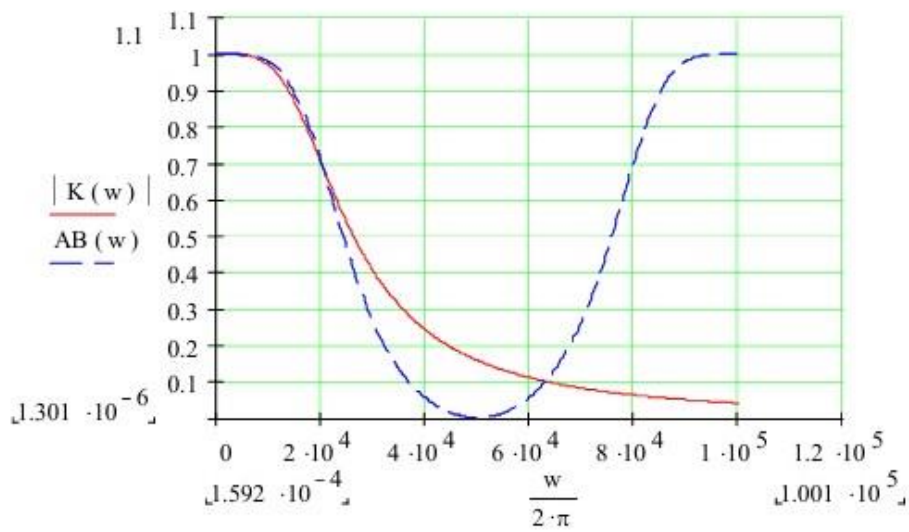


Рисунок 4.6 – АЧХ АФП и ЦФ

4.3.4 Синтез ЦФ по методу Z-форм

Задана ПХ АФП. Понизим степень оператора p с положительных значений до отрицательных:

$$K(p) = \frac{\omega_{\text{cp}}^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} p + \omega_{\text{cp}}^2} = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 p^{-2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} p^{-1} + \omega_{\text{cp}}^2 p^{-2}},$$

При отрицательных показателях степеней оператора p имеет место быть:

$$p^{-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1},$$

$$p^{-2} = \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}.$$

Вывод системной функции $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} (z^2 + 10z + 1)}{(z-1)^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} (z-1)(z+1) + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} (z^2 + 10z + 1)} = \\
&= \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} (z^2 + 10z + 1)}{z^2 - 2z + 1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} z^2 - \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} z^2 + 10\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} z + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} = \\
&= \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} (z^2 + 10z + 1)}{\left(1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) - \left(2 - 10\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) z + \left(1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) z^2} = \\
&= \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12} (z^{-2} + 10z^{-1} + 1)}{\left(1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) - \left(2 - 10\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) z^{-1} + \left(1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}\right) z^{-2}} = \\
&= \frac{\frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} (z^{-2} + 10z^{-1} + 1)}{1 - \frac{2 - 10\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} z^{-1} + \frac{1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили системную функцию $H(z)$ вида:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$a_0 = a_2 = \frac{\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} = \frac{1,256^2 \cdot (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \frac{10^{-5}}{2} + 1,256^2 (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}} = 0,06514,$$

$$a_1 = 10a_0 = 0,6514,$$

$$b_1 = \frac{2 - 10\omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} = \frac{2 - 10 \cdot 1,256^2 (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \frac{10^{-5}}{2} + 1,256^2 (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}} = 0,33861,$$

$$b_2 = \frac{1 - \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{cp}} \frac{T}{2} + \omega_{\text{cp}}^2 \frac{T^2}{12}} = \frac{1 - \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \frac{10^{-5}}{2} + 1,256^2 (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}}{1 + \sqrt{2} \cdot 1,256 \cdot 10^5 \frac{10^{-5}}{2} + 1,256^2 (10^5)^2 \frac{(10^{-5})^2}{12}} = -0,1203.$$

Структурная схема ЦФ, рассчитанного по методу Z-форм, аналогична структурной схеме ЦФ, рассчитанного по методу БЛП (рисунок 4.5).

На рисунке 4.7 приведена АЧХ АФП (сплошная) и ЦФ (пунктир), рассчитанного по методу Z-форм.

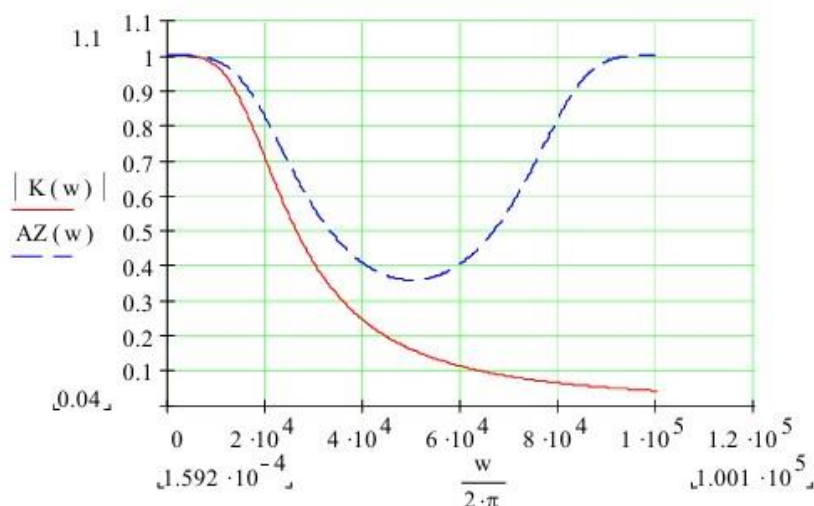


Рисунок 4.7 – АЧХ АФП и ЦФ

На рисунке 4.8 приведён сводный график АЧХ фильтра-прототипа и ЦФ, рассчитанных различными методами.

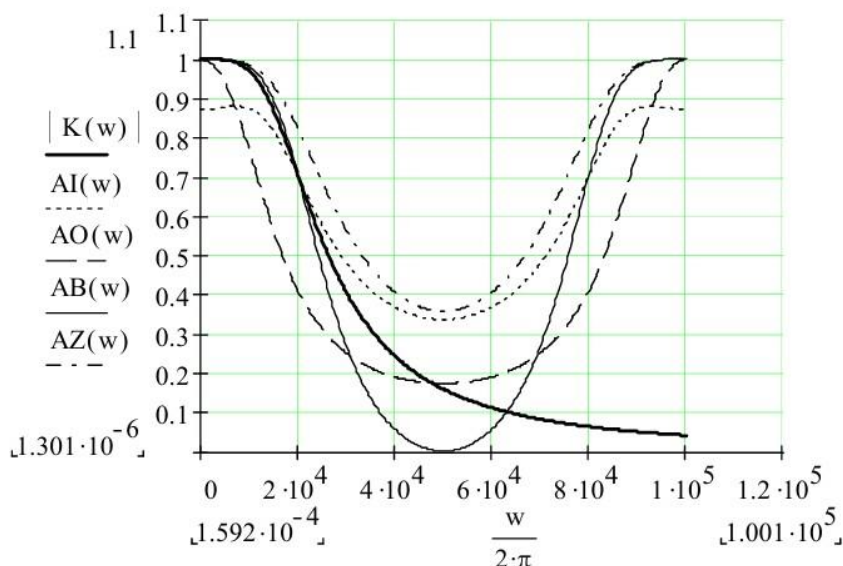


Рисунок 4.8 – АЧХ АФП и ЦФ:

$|K(\omega)|$ – фильтр-прототип, $AI(\omega)$ – ЦФ инвариантным методом,
 $AO(\omega)$ – ЦФ методом отображения дифференциалов, $AB(\omega)$ – ЦФ БЛП,
 $AZ(\omega)$ – ЦФ методом Z-форм

4.4 Примеры расчетов и оформления преобразования частотных свойств ЦФ

4.4.1 Преобразование ФНЧ в ФНЧП

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ, синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$.

Произведём замену:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}},$$

где

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)} = 0,30902,$$

т. к.:

$T = 10^{-5}$ с – период дискретизации;

$\Theta_{\text{cp}} = 2\pi f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – частота среза исходного ЦФ ФНЧ;

$\omega_{\text{cp}} = 1,5\Theta_{\text{cp}} = 1,885 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – частота среза, преобразованного ЦФ ФНЧ1.

С учётом сделанной замены вывод системной функции $H(z)$ производится следующим образом:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} + a_2 \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right)^2}{1 - b_1 \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} - b_2 \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right)^2} = \\ &= \frac{a_0 (1 - \alpha z^{-1})^2 + a_1 (z^{-1} - \alpha)(1 - \alpha z^{-1}) + a_2 (z^{-1} - \alpha)^2}{(1 - \alpha z^{-1})^2 - b_1 (z^{-1} - \alpha)(1 - \alpha z^{-1}) - b_2 (z^{-1} - \alpha)^2} = \\ &= \frac{a_0 (1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}) + a_1 (z^{-1} - \alpha - \alpha z^{-2} + \alpha^2 z^{-1}) + a_2 (z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2)}{(1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}) - b_1 (z^{-1} - \alpha - \alpha z^{-2} + \alpha^2 z^{-1}) - b_2 (z^{-2} - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2)} = \\ &= \frac{(a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) + (-2a_0 \alpha + a_1 + a_1 \alpha^2 - 2a_2 \alpha) z^{-1} + (a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_2) z^{-2}}{(1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2) - (2\alpha + b_1 + b_1 \alpha^2 - 2b_2 \alpha) z^{-1} - (-\alpha^2 - b_1 \alpha + b_2) z^{-2}} = \\ &= \frac{\frac{a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} + \frac{-2a_0 \alpha + a_1 + a_1 \alpha^2 - 2a_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-1} + \frac{a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-2}}{1 - \frac{2\alpha + b_1 + b_1 \alpha^2 - 2b_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-1} - \frac{-\alpha^2 - b_1 \alpha + b_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-2}} = \\ &= \frac{a_{n0} + a_{n1} z^{-1} + a_{n2} z^{-2}}{1 - b_{n1} z^{-1} - b_{n2} z^{-2}}. \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$a_{n0} = a_{n2} = \frac{a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,30066,$$

$$a_{n1} = \frac{-2a_0 \alpha + a_1 + a_1 \alpha^2 - 2a_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,8757,$$

$$b_{n1} = \frac{2\alpha + b_1 \alpha^2 + b_1 - 2b_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,35445,$$

$$b_{n2} = \frac{-\alpha^2 - b_1 \alpha + b_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = -0,12257.$$

На рисунке 4.9 приведена структурная схема ЦФ, преобразованного в ФНЧ1.

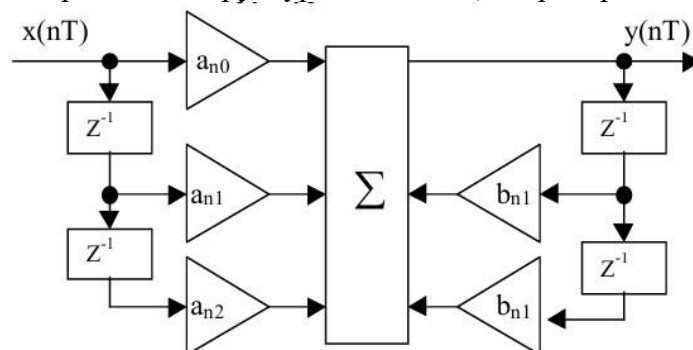


Рисунок 4.9 – Структурная схема ЦФ, преобразованного в ФНЧ1

На рисунке 4.10 приведена АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ЦФ ФНЧ1 (сплошная).

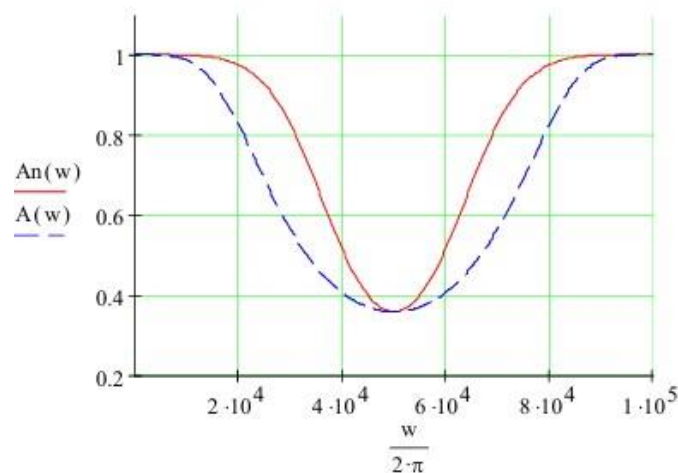


Рисунок 4.10 – АЧХ ЦФ ФНЧ и ЦФ ФНЧ1

4.4.2 Преобразование ФНЧ в ФВЧ

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$.

Произведём замену:

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}},$$

где

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} - \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Theta_{\text{cp}} + \omega_{\text{cp}} T}{2}\right)} = 0,30902,$$

т. к.:

$T = 10^{-5}$ с – период дискретизации;

$\Theta_{\text{cp}} = 2\pi f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5$ Гц – частота среза исходного ЦФ ФНЧ;

$\omega_{\text{cp}} = \Theta_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – частота среза, преобразованного ЦФ ФВЧ.

С учётом сделанной замены, вывод системной функции $H(z)$ производится следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} + a_2 \left(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \right)^2}{1 - b_1 \frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} - b_2 \left(\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \right)^2} = \\
 &= \frac{a_0 (1 + \alpha z^{-1})^2 - a_1 (z^{-1} + \alpha)(1 + \alpha z^{-1}) + a_2 (z^{-1} + \alpha)^2}{(1 + \alpha z^{-1})^2 + b_1 (z^{-1} + \alpha)(1 + \alpha z^{-1}) - b_2 (z^{-1} + \alpha)^2} = \\
 &= \frac{a_0 (1 + 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}) - a_1 (z^{-1} + \alpha + \alpha z^{-2} + \alpha^2 z^{-1}) + a_2 (z^{-2} + 2\alpha z^{-1} + \alpha^2)}{(1 + 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}) + b_1 (z^{-1} + \alpha + \alpha z^{-2} + \alpha^2 z^{-1}) - b_2 (z^{-2} + 2\alpha z^{-1} + \alpha^2)} = \\
 &= \frac{(a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2) + (2a_0 \alpha - a_1 - a_1 \alpha^2 + 2a_2 \alpha) z^{-1} + (a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_2) z^{-2}}{(1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2) + (2\alpha + b_1 + b_1 \alpha^2 - 2b_2 \alpha) z^{-1} + (\alpha^2 + b_1 \alpha - b_2) z^{-2}} = \\
 &= \frac{\frac{a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} + \frac{2a_0 \alpha - a_1 - a_1 \alpha^2 + 2a_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-1} + \frac{a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-2}}{1 + \frac{2\alpha + b_1 + b_1 \alpha^2 - 2b_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-1} + \frac{\alpha^2 + b_1 \alpha - b_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} z^{-2}} = \\
 &= \frac{a_{v0} + a_{v1} z^{-1} + a_{v2} z^{-2}}{1 - b_{v1} z^{-1} - b_{v2} z^{-2}}.
 \end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$\begin{aligned}
 a_{v0} &= a_{v2} = \frac{a_0 - a_1 \alpha + a_2 \alpha^2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,30066, \\
 a_{n1} &= \frac{-2a_0 \alpha + a_1 + a_1 \alpha^2 - 2a_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,8757, \\
 b_{n1} &= \frac{2\alpha + b_1 \alpha^2 + b_1 - 2b_2 \alpha}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = 0,35445, \\
 b_{n2} &= \frac{-\alpha^2 - b_1 \alpha + b_2}{1 + b_1 \alpha - b_2 \alpha^2} = -0,12257.
 \end{aligned}$$

На рисунке 4.11 приведена структурная схема ЦФ, преобразованного в ФВЧ.

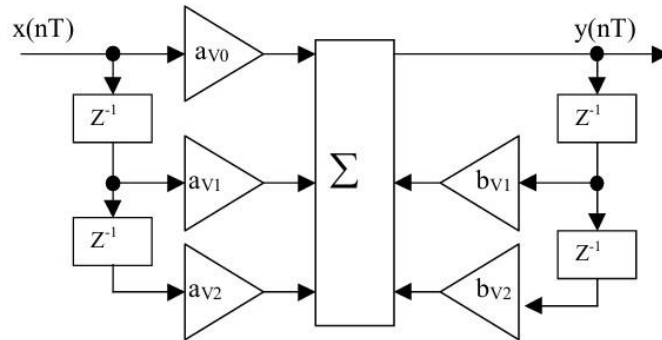


Рисунок 4.11 – Структурная схема ЦФ, преобразованного в ФВЧ

На рисунке 4.12 приведена АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ЦФ ФВЧ (сплошная).

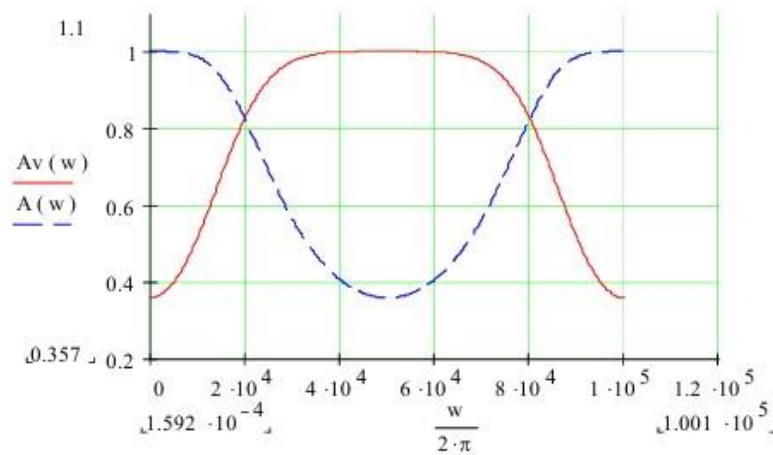


Рисунок 4.12 – АЧХ ЦФ ФНЧ и ЦФ ФВЧ

4.4.3 Преобразование ФНЧ в ПФ

Для преобразования возьмем системную функцию ЦФ, синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$.

Произведём замену:

$$z^{-1} \rightarrow -\frac{\left\{ z^{-2} - \left[\frac{2\alpha k}{k+1} \right] z^{-1} + \frac{k-1}{k+1} \right\}}{\left\{ \frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \left[\frac{2\alpha k}{k+1} \right] z^{-1} + 1 \right\}},$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} T\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T\right)} = 0,26103,$$

$$k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\Theta_{\text{cp}}}{2} T\right) = 1,52625.$$

где $\Theta_{\text{cp}} = 2\pi f_{\text{cp}} = 1,256 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – частота среза исходного ЦФ ФНЧ, при $T = 10^{-5} \text{ с}$;

$\omega_1 = \frac{\Theta_{\text{cp}}}{\sqrt{2}} = 0,89 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – первая частота среза преобразованного ЦФ ПФ;

$\omega_2 = \sqrt{2} \cdot \Theta_{\text{cp}} = 1,776 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – вторая частота среза преобразованного ЦФ ПФ.

С учётом сделанной замены, вывод системной функции $H(z)$ производится следующим образом:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1} \right) + a_2 \left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1} \right)^2}{1 - b_1 \left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1} \right) - b_2 \left(\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1} z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + 1} \right)^2}.$$

В результате упрощений была получена системная функция ПФ:

$$H(z) = \frac{a_{pf0} + a_{pf1} z^{-1} + a_{pf2} z^{-2} + a_{pf3} z^{-3} + a_{pf4} z^{-4}}{1 - b_{pf1} z^{-1} - b_{pf2} z^{-2} - b_{pf3} z^{-3} - b_{pf4} z^{-4}}.$$

Вычисление коэффициентов системной функции $H(z)$:

$$\begin{aligned} a_{pf0} = a_{pf4} &= \frac{a_2 + a_1 + a_0 + 2a_0 k + a_0 k^2 - a_1 k^2 - 2a_2 k + a_2 k^2}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = -0,06296, \\ a_{pf1} = a_{pf3} &= \frac{-4a_0 \alpha k^2 - 4a_0 \alpha k + 4a_1 \alpha k^2 - 4a_2 \alpha k^2 + 4a_2 \alpha k}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = 0,18462, \\ a_{pf2} &= \frac{2a_2 k^2 - 2a_1 k^2 - 2(a_0 + a_1 + a_2) + 2a_0 k^2 + 4a_0 \alpha^2 k^2 - 4a_1 \alpha^2 k^2 + 4a_2 \alpha^2 k^2}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = -0,62954, \\ b_{pf1} &= -\frac{-4\alpha k - 4\alpha k^2 - 4b_1 \alpha k^2 + 4b_2 \alpha k^2 - 4b_2 \alpha k}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = 0,72106, \\ b_{pf2} &= -\frac{2b_1 k^2 + 4\alpha^2 k^2 + 4b_1 \alpha^2 k^2 - 4b_2 \alpha^2 k^2 + 2(b_1 + b_2) + 2k^2 - 2b_2 k - 2}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = -0,89722, \\ b_{pf3} &= -\frac{4\alpha k - 4b_1 \alpha k^2 + 4b_2 \alpha k + 4b_2 \alpha k^2 - 4\alpha k^2}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = 0,31266, \\ b_{pf4} &= -\frac{-b_2 k^2 - 2b_2 k + b_1 k^2 - b_2 + k^2 - 2k - b_1 + 1}{1 + 2k - b_1 - b_2 + k^2 + b_1 k^2 + 2b_2 k - b_2 k^2} = -0,21773. \end{aligned}$$

На рисунке 4.13 приведена структурная схема ЦФ, преобразованного в ПФ.

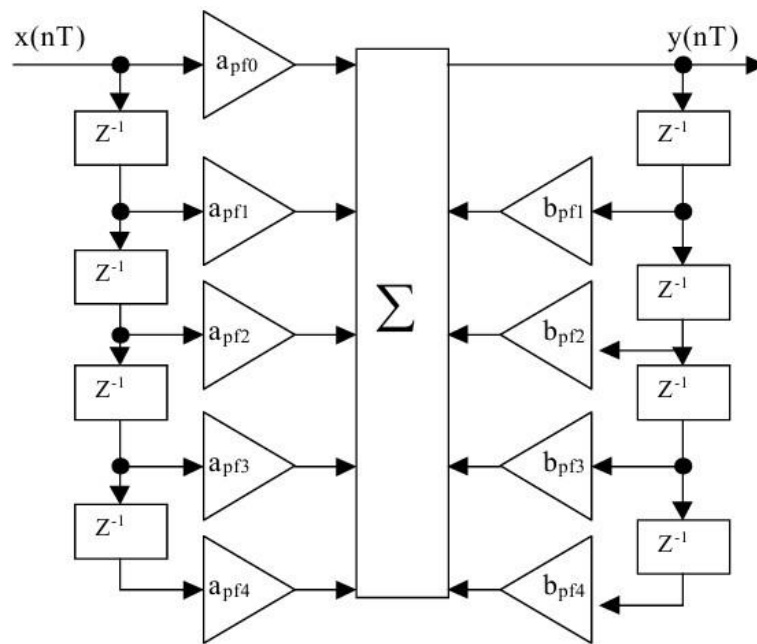


Рисунок 4.13 – Структурная схема ЦФ, преобразованного в ПФ

На рисунке 4.14 приведена АЧХ ЦФ ФНЧ (пунктир) и ЦФ ПФ (сплошная).

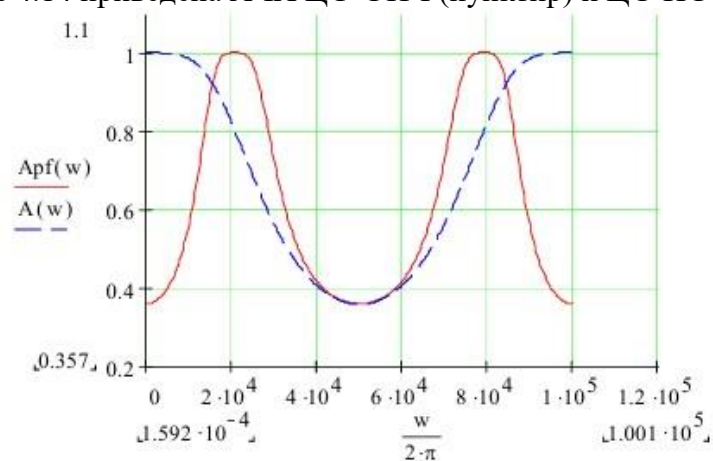


Рисунок 4.14 – АЧХ ЦФ ФНЧ и ЦФ ПФ

На рисунке 4.15 приведён сводный график АЧХ АФП и ЦФ, с преобразованными частотными свойств.

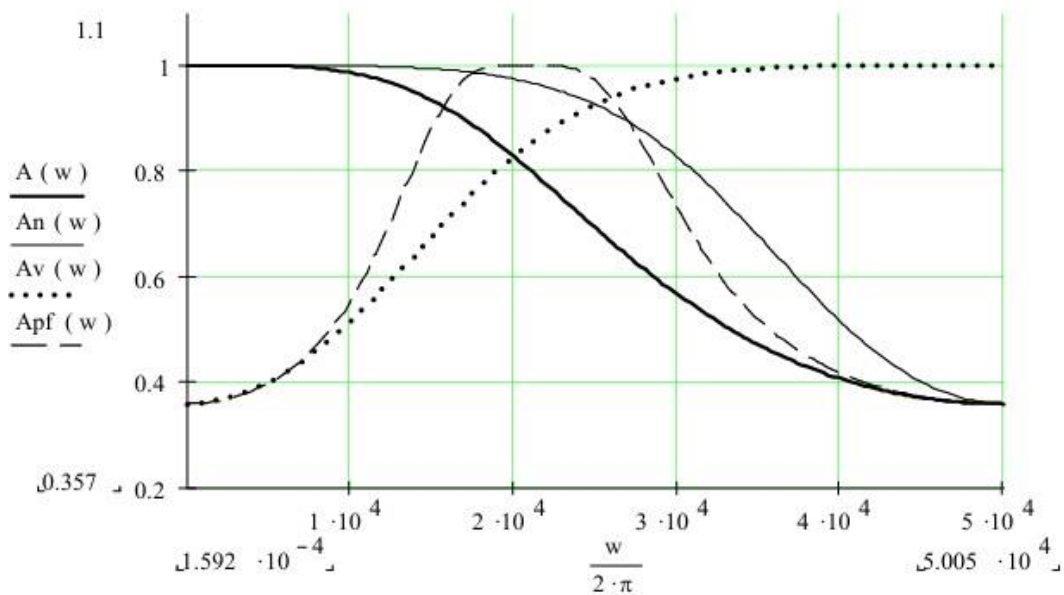


Рисунок 4.15 – АЧХ АФП и ЦФ:

$A(\omega)$ – АЧХ исходного ЦФ, $A_n(\omega)$ – АЧХ ЦФНЧ, $A_v(\omega)$ – ЦФВЧ, $A_{pf}(\omega)$ – АЧХ ПФ

4.5 Примеры расчетов и оформления нахождения нулей и полюсов

Возьмем системную функцию ЦФ, синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$:

$$H(z) = \frac{0,06514 + 0,6514z^{-1} + 0,06514z^{-2}}{1 - 0,33861z^{-1} + 0,1203z^{-2}}.$$

Чтобы найти значения нулей и полюсов, перейдем к положительным степеням z :

$$H(z) = \frac{0,06514z^2 + 0,6514z + 0,06514}{z^2 - 0,33861z + 0,1203}.$$

Найдем значения полюсов, для этого приравняем знаменатель системной функции $H(z)$ к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение:

$$z^2 - 0,33861z + 0,1203 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$z_1 = \frac{0,33861 + \sqrt{0,33861^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,1203}}{2} = 0,169 + 0,303j,$$

$$z_2 = \frac{0,33861 - \sqrt{0,33861^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,1203}}{2} = 0,169 - 0,303j.$$

Значения полюсов:

$$z_{n1} = 0,169 + 0,303j,$$

$$z_{n2} = 0,169 - 0,303j.$$

Для нахождения значения нулей вынесем общий множитель $0,06514$ из числителя, чтобы получить характеристическое уравнение:

$$0,06514(z^2 + 10z - 1) = 0.$$

Найдём корни характеристического уравнения:

$$z_1 = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = -0,101$$

$$z_2 = \frac{-10 - \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = -9,89.$$

Таким образом значения нулей равны:

$$z_{н1} = -0,101$$

$$z_{н2} = -9,89.$$

На рисунке 4.16 приведена карта нулей и полюсов на комплексной Z -плоскости.

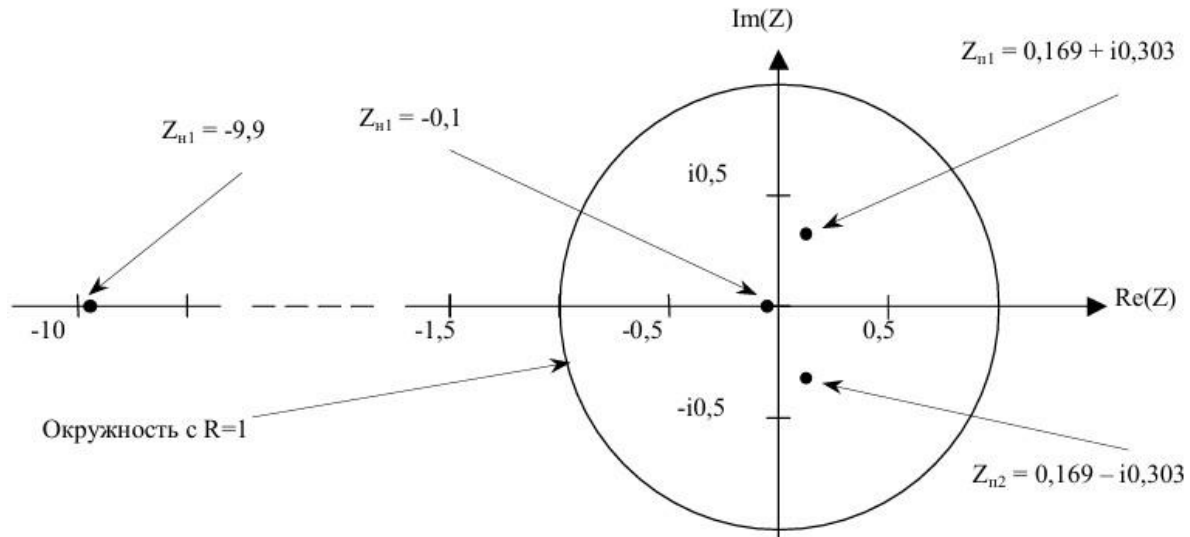


Рисунок 4.16 – Карта нулей и полюсов на комплексной Z -плоскости

4.6 Примеры расчетов и оформления проверки устойчивости ЦФ

Устойчивость фильтра определяется значениями коэффициентов b_1 и b_2 :

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0.$$

Выражения для нахождения корней этого уравнения описываются следующим образом:

$$z_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2},$$

$$z_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}.$$

Фильтр устойчив, когда $|z| \leq 1$, или $1 \geq |z_{1,2}|$, т. е.:

$$1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2} \right|.$$

Рассмотрим два случая:

1) когда дискриминант больше либо равен нулю:

$$b_1 + 4b_2 \geq 0,$$

тогда:

$$1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2} \right| \Rightarrow 2 \geq |b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}| \Rightarrow 2 \geq \pm (b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}).$$

Таким образом, в результате решения этого неравенства получаем четыре попарно равных неравенства: $1 - b_1 \geq b_2$, $1 - b_1 \geq b_2$;

2) когда дискриминант меньше нуля:

$$1 \geq \left| \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2} \right| \Rightarrow 1 \geq \left| \frac{b_1}{2} \pm j \frac{\sqrt{-(b_1^2 + 4b_2)}}{2} \right| \Rightarrow 1 \geq \pm \left(\frac{b_1}{2} + j \frac{-b_1^2 - 4b_2}{2} \right),$$

$$1 \geq -b_2 \Rightarrow b_2 \geq -1.$$

По полученным неравенствам построим треугольник устойчивости (рисунок 4.17).

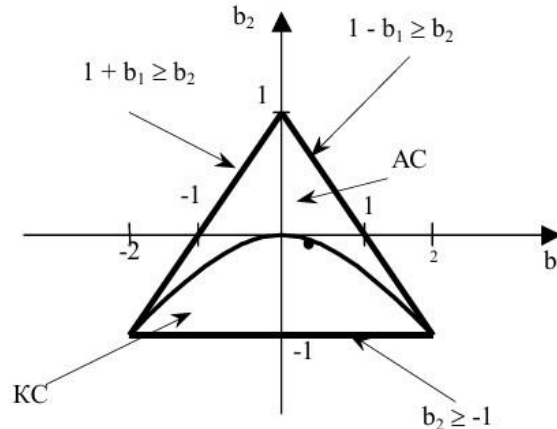


Рисунок 4.17 – Пример треугольника устойчивости

Так как точка с координатами (b_1, b_2) внутри треугольника устойчивости, то ЦФ ФНЧ является устойчивым.

Неравенство для колебательных систем (КС):

$$b_1^2 + 4b_2 \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq j2\sqrt{b_2}.$$

Неравенство для аperiodических систем (АС):

$$b_1^2 + 4b_2 < 0 \Rightarrow b_1 < \pm j2\sqrt{b_2}.$$

Судя по треугольнику устойчивости, данный ЦФ ФНЧ является колебательной системой.

4.7 Расчет первых 10-ти отсчетов ИХ и ПХ. Выражение для СФ и АЧХ ЦФ

Выражение для передаточной функции ЦФ, рассчитанного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$.

Расчет АЧХ для ЦФ, синтезированного по методу Z-форм:

$$A(\omega) = |H(\exp[j\omega T])|.$$

В системной функции $H(z)$ необходимо произвести следующую замену:

$$z^{-1} \rightarrow \exp(-j\omega T),$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{a_0 + a_1 \exp(-j\omega T) + a_2 \exp(-j2\omega T)}{1 - b_1 \exp(-j\omega T) - b_2 \exp(-j2\omega T)}.$$

Для преобразования выражения, с целью получения действительной и мнимой части, требуется прибегнуть к разложению экспоненты через синусы и косинусы:

$$\begin{aligned}
H(\exp[j\omega T]) &= \frac{a_0 + a_1 [\cos(\omega T) - j \cdot \sin(\omega T)] + a_2 [\cos(2\omega T) - j \cdot \sin(2\omega T)]}{1 - b_1 [\cos(\omega T) - j \cdot \sin(\omega T)] - b_2 [\cos(2\omega T) - j \cdot \sin(2\omega T)]} = \\
&= \frac{[a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)] - j[a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)] + j[b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]} = \\
&= \frac{[a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)][1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} + \\
&+ \frac{[a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)][b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} + \\
&+ j \frac{[a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)][b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} - \\
&- j \frac{[a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)][1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} = \\
&= \operatorname{Re}[H(\exp\{j\omega T\})] + j \operatorname{Im}[H(\exp\{j\omega T\})].
\end{aligned}$$

Таким образом выражение для действительной части Re :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[H(\exp\{j\omega T\})] &= \frac{[a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)][1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} + \\
&+ \frac{[a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)][b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2}.
\end{aligned}$$

А для мнимой части Im :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}[H(\exp\{j\omega T\})] &= \frac{[a_0 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)][b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2} - \\
&- \frac{[a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)][1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]}{[1 - b_1 \cos(\omega T) - b_2 \cos(2\omega T)]^2 + [b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)]^2}.
\end{aligned}$$

Соответственно АЧХ принимает вид:

$$A(\omega) = |H(\exp[j\omega T])| = \sqrt{(\operatorname{Re}[H(\exp[j\omega T])])^2 + (\operatorname{Im}[H(\exp[j\omega T])])^2}.$$

С помощью передаточной функции запишем РУ:

$$y(nT) = [a_0 x(nT) + a_1 x(nT - T) + a_2 x(nT - 2T)] + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T), \quad n \geq 0.$$

Для расчета первых 10 отсчетов ИХ производится следующая замена:

$$x(nT) \rightarrow \delta(nT).$$

Замененный входной сигнал аналитически описывается следующим образом:

$$\delta(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

После замены РУ имеет вид:

$$y(nT) = [a_0 \delta(nT) + a_1 \delta(nT - T) + a_2 \delta(nT - 2T)] + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T).$$

Численные значения первых 5 отсчетов рассмотрены подробно:

$$\begin{aligned}
y(0T) &= [a_0 x(0T) + a_1 x(0T - T) + a_2 x(0T - 2T)] + b_1 y(0T - T) + b_2 y(0T - 2T) = \\
&= [a_0 x(0T) + a_1 x(-T) + a_2 x(-2T)] + b_1 y(-1T) + b_2 y(-2T) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 0 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0 - 0,1203 \cdot 0 = 0,6514, \\
y(1T) &= [a_0 x(1T) + a_1 x(1T - T) + a_2 x(1T - 2T)] + b_1 y(1T - T) + b_2 y(1T - 2T) = \\
&= [a_0 x(1T) + a_1 x(0T) + a_2 x(-1T)] + b_1 y(0T) + b_2 y(-1T) = \\
&= [0,06514 \cdot 0 + 0,6514 \cdot 1 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0,6514 - 0,1203 \cdot 0 = 0,67346, \\
y(2T) &= [a_0 x(2T) + a_1 x(2T - T) + a_2 x(2T - 2T)] + b_1 y(2T - T) + b_2 y(2T - 2T) = \\
&= [a_0 x(2T) + a_1 x(1T) + a_2 x(0T)] + b_1 y(1T) + b_2 y(0T) = \\
&= [0,06514 \cdot 0 + 0,6514 \cdot 0 + 0,06514 \cdot 1] + 0,33861 \cdot 0,67346 - 0,1203 \cdot 0,6514 = 0,28534, \\
y(3T) &= [a_0 x(3T) + a_1 x(3T - T) + a_2 x(3T - 2T)] + b_1 y(3T - T) + b_2 y(3T - 2T) = \\
&= [a_0 x(3T) + a_1 x(2T) + a_2 x(1T)] + b_1 y(2T) + b_2 y(1T) = \\
&= [0,06514 \cdot 0 + 0,6514 \cdot 0 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0,28534 - 0,1203 \cdot 0,67346 = 0,0156, \\
y(4T) &= [a_0 x(4T) + a_1 x(4T - T) + a_2 x(4T - 2T)] + b_1 y(4T - T) + b_2 y(4T - 2T) = \\
&= [a_0 x(4T) + a_1 x(3T) + a_2 x(2T)] + b_1 y(3T) + b_2 y(2T) = \\
&= [0,06514 \cdot 0 + 0,6514 \cdot 0 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0,0156 - 0,1203 \cdot 0,28534 = -0,02904.
\end{aligned}$$

Численные значения остальных отсчётов ИХ:

$$\begin{aligned}
y(5T) &= -0,01171, \\
y(6T) &= -0,47 \cdot 10^{-3}, \\
y(7T) &= 1,25 \cdot 10^{-3}, \\
y(8T) &= 0,48 \cdot 10^{-3}, \\
y(9T) &= 0,012 \cdot 10^{-3}, \\
y(10T) &= -0,054 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

На рисунке 4.18 приведён график ИХ ЦФ.

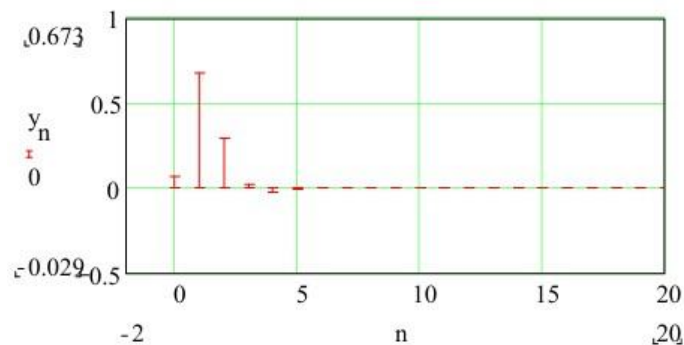


Рисунок 4.18 – График ИХ ЦФ

Для расчета первых 10 отсчетов ПХ в РУ требуется произвести замену:

$$x(nT) \rightarrow u(nT).$$

Замененный входной сигнал аналитически описывается следующим образом:

$$u(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

После замены РУ имеет вид:

$$y(nT) = [a_0 u(nT) + a_1 u(nT - T) + a_2 u(nT - 2T)] + b_1 y(nT - T) + b_2 y(nT - 2T).$$

Численные значения первых 5 отсчётов рассмотрены подробно:

$$\begin{aligned}
 y(0T) &= [a_0x(0T) + a_1x(0T - T) + a_2x(0T - 2T)] + b_1y(0T - T) + b_2y(0T - 2T) = \\
 &= [a_0x(0T) + a_1x(-T) + a_2x(-2T)] + b_1y(-1T) + b_2y(-2T) = \\
 &= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 0 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0 - 0,1203 \cdot 0 = 0,06514, \\
 y(1T) &= [a_0x(1T) + a_1x(1T - T) + a_2x(1T - 2T)] + b_1y(1T - T) + b_2y(1T - 2T) = \\
 &= [a_0x(1T) + a_1x(0T) + a_2x(-1T)] + b_1y(0T) + b_2y(-1T) = \\
 &= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 1 + 0,06514 \cdot 0] + 0,33861 \cdot 0,06514 - 0,1203 \cdot 0 = 0,7385, \\
 y(2T) &= [a_0x(2T) + a_1x(2T - T) + a_2x(2T - 2T)] + b_1y(2T - T) + b_2y(2T - 2T) = \\
 &= [a_0x(2T) + a_1x(1T) + a_2x(0T)] + b_1y(1T) + b_2y(0T) = \\
 &= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 1 + 0,06514 \cdot 1] + 0,33861 \cdot 0,7385 - 0,1203 \cdot 0,06514 = 1,0239, \\
 y(3T) &= [a_0x(3T) + a_1x(3T - T) + a_2x(3T - 2T)] + b_1y(3T - T) + b_2y(3T - 2T) = \\
 &= [a_0x(3T) + a_1x(2T) + a_2x(1T)] + b_1y(2T) + b_2y(1T) = \\
 &= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 1 + 0,06514 \cdot 1] + 0,33861 \cdot 1,0239 - 0,1203 \cdot 0,7385 = 1,0395, \\
 y(4T) &= [a_0x(4T) + a_1x(4T - T) + a_2x(4T - 2T)] + b_1y(4T - T) + b_2y(4T - 2T) = \\
 &= [a_0x(4T) + a_1x(3T) + a_2x(2T)] + b_1y(3T) + b_2y(2T) = \\
 &= [0,06514 \cdot 1 + 0,6514 \cdot 1 + 0,06514 \cdot 1] + 0,33861 \cdot 1,0395 - 0,1203 \cdot 1,0239 = 1,0105.
 \end{aligned}$$

Численные значения остальных отсчётов ИХ:

$$\begin{aligned}
 y(5T) &= 0,9988, \\
 y(6T) &= 0,9983, \\
 y(7T) &= 0,9996, \\
 y(8T) &= 1,0000, \\
 y(9T) &= 1,0001, \\
 y(10T) &= 0,9994.
 \end{aligned}$$

На рисунке 4.19 приведён график ПХ ЦФ.

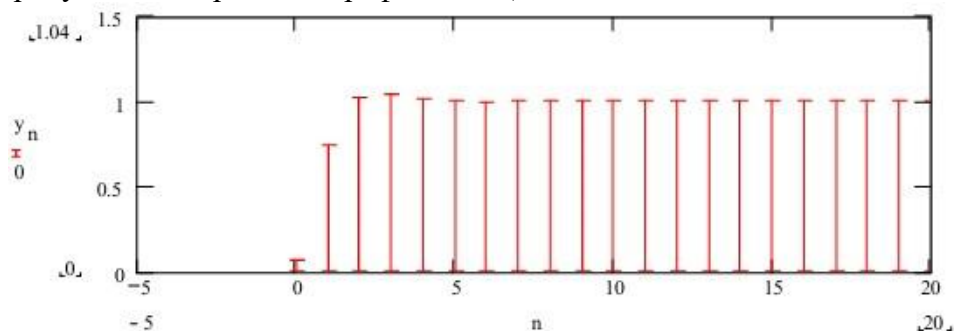


Рисунок 4.19 – График ПХ ЦФ

4.8 Пример структурной схемы ЦФ для прямой и канонической форм реализации

Системная функция ЦФ ФНЧ, синтезированный по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

На рисунке 4.20 приведена структурная схема ЦФ для прямой формы реализации.

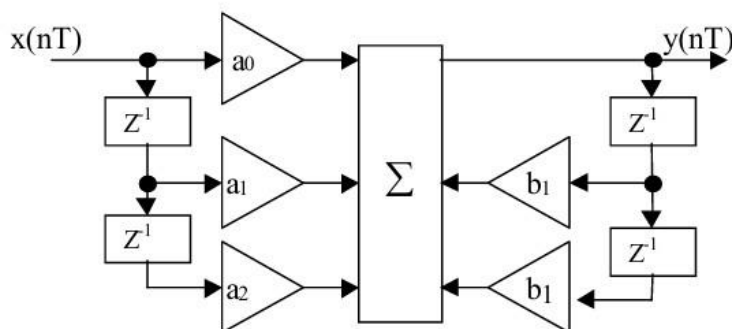


Рисунок 4.20 – Структурная схема ЦФ для прямой формы реализации

На рисунке 4.21 приведена структурная схема ЦФ для канонической формы реализации.

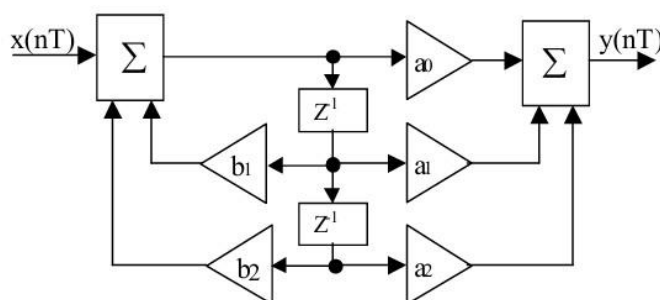


Рисунок 4.21 – Структурная схема ЦФ для канонической формы реализации

4.9 Алгоритм обработки ЦФ для прямой и канонической форм реализации. Объем вычислительных операций на один отсчет выходного сигнала

Исходя из структурной схемы ЦФ для прямой и канонической форм реализации следует записать РУ и пояснить алгоритм формирования выходного сигнала по каждому из тактов его обработки.

4.10 Расчет среднеквадратического значения шума квантования всех источников

Т. к. $a_0 = a_2$, $a_1 = 10a_2$, то для уменьшения $\sigma_{\Sigma_{\text{вых}}}^2$ схему ЦФ можно упростить. Эквивалентная шумовая схема фильтра для прямой формы реализации учитывая то что $a_0 = 1$; $a_2 = 1$ т.е. умножения не происходит, и то что $a_1 = 10$ при умножении на целое число шумы не вносятся. На рисунке 4.22 приведена эквивалентная шумовая схема ЦФ для прямой формы реализации с учетом шумов.

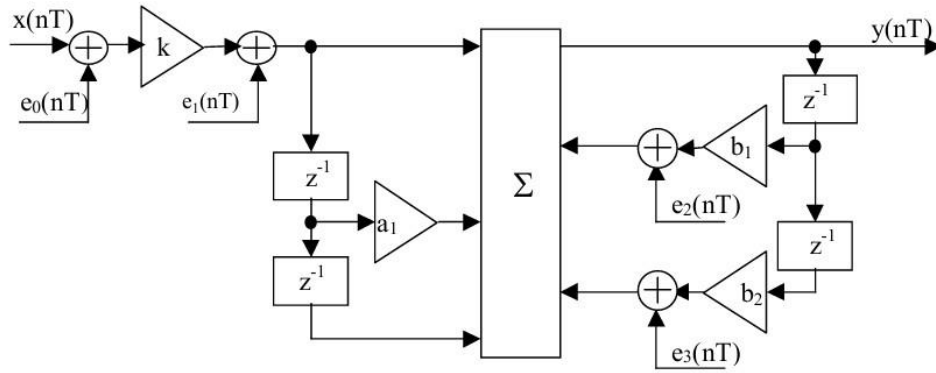


Рисунок 4.22 – Эквивалентная шумовая схема ЦФ для прямой формы реализации с учётом шумов

На рисунке 4.22 обозначены: $e_0(nT)$ – шумы АЦП; $e_1(nT)$ – шумы, вносимые при умножении на коэффициент k_0 ; $e_2(nT)$ и $e_3(nT)$ – шумы, вносимые при умножении на коэффициенты b_1 и b_2 соответственно. Нахождение среднеквадратического значения шума АЦП:

$$\sigma_{0\text{вых}}^2 = \sigma_{0\text{вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_0(z) H_0(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{0\text{вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Phi_0(z) dz,$$

$$H_0(z) = k_0 \frac{1 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = k_0 \frac{z^2 + a_1 z + 1}{z^2 - b_1 z - b_2},$$

$$H_0(z^{-1}) = k_0 \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}{z^{-2} - b_1 z^{-1} - b_2} = k_0 \frac{1 + a_1 z + z^2}{1 - b_1 z - b_2 z^2},$$

$$\Phi_0(z) = H_0(z) H_0(z^{-1}) z^{-1} = k_0 \frac{z^2 + a_1 z + 1}{z^2 - b_1 z - b_2} k_0 \frac{1 + a_1 z + z^2}{1 - b_1 z - b_2 z^2} z^{-1} =$$

$$= k_0^2 \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{(1 - b_1 z - b_2 z^2)^2 (z^2 - b_1 z - b_2)} z^{-1} = k_0^2 \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z - z_1) (z - z_2) (z - z'_1) (z - z'_2)},$$

где z_1 и z_2 – корни характеристического уравнения:

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0;$$

z'_1 и z'_2 – корни другого характеристического уравнения:

$$z^2 + \frac{b_1}{b_2} z - \frac{1}{b_2} = 0.$$

Для нахождения корней обоих характеристических уравнений можно использовать следующие выражения:

$$z_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2},$$

$$z_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2},$$

$$z'_1 = \frac{2}{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}},$$

$$z'_2 = \frac{2}{b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}.$$

Тогда связь между корнями обоих характеристических уравнений следующая:

$$z_1 = \frac{1}{z'_1},$$

$$z_2 = \frac{1}{z'_2}.$$

Подставив данные выражения для нахождения корней характеристических уравнений, придём к следующей записи среднеквадратического значения шума:

$$\begin{aligned}\sigma_{0\text{ Вых}}^2 &= \sigma_{0\text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C k_0^2 \frac{(1+a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z-z_1)(z-z_2)(z-z'_1)(z-z'_2)} dz = \\ &= \sigma_{0\text{ Вх}}^2 \left(\lim_{z \rightarrow 0} \left(k_0^2 \frac{(1+a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z-z_1)(z-z_2)(z-z'_1)(z-z'_2)} (z-0) \right) \right) + \\ &+ \lim_{z \rightarrow z_1} \left(k_0^2 \frac{(1+a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z-z_1)(z-z_2)(z-z'_1)(z-z'_2)} (z-z_1) \right) + \\ &+ \lim_{z \rightarrow z_2} \left(k_0^2 \frac{(1+a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z-z_1)(z-z_2)(z-z'_1)(z-z'_2)} (z-z_2) \right).\end{aligned}$$

В результате преобразований получаем:

$$\sigma_{0\text{ Вых}}^2 = \sigma_{0\text{ Вх}}^2 k_0^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1 b_1 - 2 + a_1^2 b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1+b_2)(b_1+b_2-1)(b_1-b_2+1)}.$$

Среднеквадратичное отклонение на входе АЦП:

$$\sigma_{\text{Вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-C}}{12}.$$

где C – разрядность АЦП.

Принимаем разрядность АЦП равной $C = 8$. Тогда:

$$\sigma_{\text{Вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(2^{-8})^2}{12} = 1,272 \cdot 10^{-6}.$$

отсюда

$$\begin{aligned}\sigma_{0\text{ Вых}}^2 &= \sigma_{0\text{ Вх}}^2 k_0^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1 b_1 - 2 + a_1^2 b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1+b_2)(b_1+b_2-1)(b_1-b_2+1)} = \\ &= \frac{-2 \cdot 0,33861^2 - 4 \cdot 0,06514 \cdot 0,33861 - 2 + 0,06514^2 \cdot (-0,1203) - 0,06514^2 + 2 \cdot (-0,1203)^2}{(1-0,1203)(0,33861-0,1203-1)(0,33861-0,1203+1)} = \\ &= 6,872 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

Нахождение среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на k_0 :

$$\begin{aligned}\sigma_{1\text{ Вых}}^2 &= \sigma_{1\text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_1(z) H_1(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{1\text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \varphi_1(z) dz, \\ H_1(z) &= \frac{1+a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1-b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2 + a_1 z + 1}{z^2 - b_1 z - b_2}, \\ H_1(z^{-1}) &= \frac{z^{-2} + a_1 z^{-1} + 1}{z^{-2} - b_1 z^{-1} - b_2} = \frac{1+a_1 z + z^2}{1-b_1 z - b_2 z^2}, \\ \varphi_1(z) &= H_1(z) H_1(z^{-1}) z^{-1} = \frac{z^2 + a_1 z + 1}{z^2 - b_1 z - b_2} \frac{1+a_1 z + z^2}{1-b_1 z - b_2 z^2} z^{-1} =\end{aligned}$$

$$= \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{(1 - b_1 z - b_2 z^2)^2 (z^2 - b_1 z - b_2)^2} z^{-1} = \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z'_1)(z - z'_2)}.$$

Произведя расчет аналогичный расчету среднеквадратического значения шума АЦП, запишем аналитическое выражение для среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на k_0 :

$$\begin{aligned}\sigma_{1\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{1\text{ВХ}}^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1 b_1 - 2 + a_1^2 b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1 + b_2)(b_1 + b_2 - 1)(b_1 - b_2 + 1)}, \\ \sigma_{1\text{ВХ}}^2 &= 1,272 \cdot 10^{-6}, \\ \sigma_{1\text{ВЫХ}}^2 &= 1,62 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Нахождение среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на b_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_2(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \varphi_2(z) dz, \\ H_2(z) &= \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2}, \\ H_2(z^{-1}) &= \frac{z^{-2}}{z^{-2} - b_1 z^{-1} - b_2} = \frac{1}{1 - b_1 z - b_2 z^2}, \\ \varphi_2(z) &= H_2(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2} \frac{1}{1 - b_1 z - b_2 z^2} z^{-1} = \\ &= \frac{z}{(1 - b_1 z - b_2 z^2)^2 (z^2 - b_1 z - b_2)^2} = \frac{z}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z'_1)(z - z'_2)}.\end{aligned}$$

Подставив выражения для нахождения корней характеристических уравнений придём к следующей записи среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на b_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z'_1)(z - z'_2)} dz = \\ &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \left(\lim_{z \rightarrow z_1} \left(k_0^2 \frac{z}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z'_1)(z - z'_2)} (z - z_1) \right) \right) + \\ &+ \lim_{z \rightarrow z_2} \left(\frac{z}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z'_1)(z - z'_2)} (z - z_2) \right).\end{aligned}$$

В результате преобразования получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= \sigma_{2\text{ВХ}}^2 \frac{b_2 - 1}{(1 + b_2)(b_1 + b_2 - 1)(b_1 - b_2 + 1)}, \\ \sigma_{2\text{ВХ}}^2 &= 1,272 \cdot 10^{-6}, \\ \sigma_{2\text{ВЫХ}}^2 &= 1,42 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Нахождение среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на b_2 :

$$\sigma_{3\text{ВЫХ}}^2 = \sigma_{3\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_3(z) H_3(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{3\text{ВХ}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \varphi_3(z) dz,$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2},$$

$$H_3(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{z^{-2} - b_1 z^{-1} - b_2} = \frac{1}{1 - b_1 z - b_2 z^2},$$

$$\varphi_3(z) = H_3(z) H_3(z^{-1}) z^{-1} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2} \frac{1}{1 - b_1 z - b_2 z^2} z^{-1}.$$

Вывод аналитического выражения для $\sigma_{3 \text{ Вых}}^2$ коэффициента b_2 и расчет численного его значения аналогичен, приведенному выше для коэффициента b_1 .

В результате преобразования получим:

$$\sigma_{3 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{3 \text{ Вх}}^2 \frac{b_2 - 1}{(1 + b_2)(b_1 + b_2 - 1)(b_1 - b_2 + 1)},$$

$$\sigma_{3 \text{ Вх}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6},$$

$$\sigma_{3 \text{ Вых}}^2 = 1,42 \cdot 10^{-4}.$$

На рисунке 4.23 приведена эквивалентная шумовая схема фильтра для канонической формы реализации.

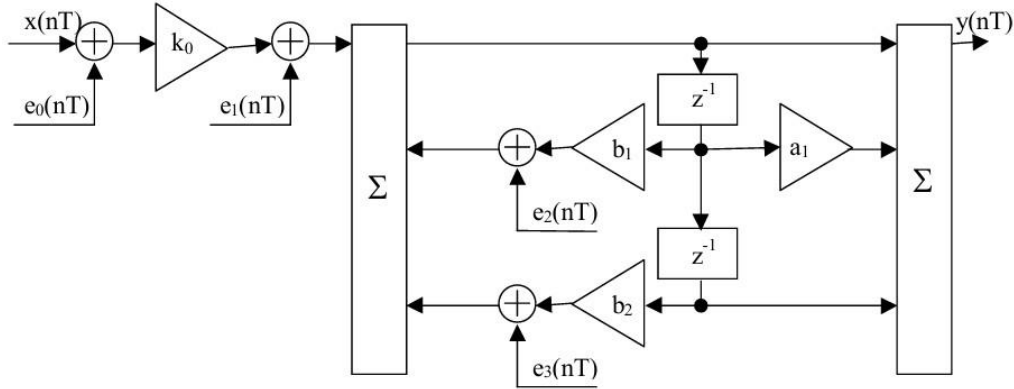


Рисунок 4.23 – Эквивалентная шумовая схема фильтра для канонической формы реализации

Нахождение аналитического выражения для $\sigma_{0 \text{ Вых}}^2$, вносимого со стороны АЦП, и $\sigma_{1 \text{ Вых}}^2$, вносимого при умножении на коэффициент k_0 , аналогично проведенному выше для прямой формы реализации ЦФ. Численные значения также будут совпадать:

$$\sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{0 \text{ Вх}}^2 k_0^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1 b_1 - 2 + a_1^2 b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1 + b_2)(b_1 + b_2 - 1)(b_1 - b_2 + 1)},$$

$$\sigma_{1 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{1 \text{ Вх}}^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1 b_1 - 2 + a_1^2 b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1 + b_2)(b_1 + b_2 - 1)(b_1 - b_2 + 1)},$$

$$\sigma_{0 \text{ Вых}}^2 = 6,872 \cdot 10^{-7},$$

$$\sigma_{1 \text{ Вых}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}.$$

Нахождение среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на коэффициент b_1 :

$$\sigma_{2 \text{ Вых}}^2 = \sigma_{2 \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_2(z) H_2(z^{-1}) z^{-1} dz = \sigma_{2 \text{ Вх}}^2 \frac{1}{2\pi j} \oint_C \varphi_2(z) dz,$$

$$\varphi_2(z) = \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{(1 - b_1 z - b_2 z^2)(z^2 - b_1 z - b_2)} z^{-1} = \frac{(1 + a_1 z + z^2)^2}{z_1 z_2 z (z - z_1)(z - z_2)(z - z_1')(z - z_2')},$$

$$\sigma_{2\text{ Вых}}^2 = \sigma_{2\text{ Вх}}^2 \frac{-2b_1^2 - 4a_1b_1 - 2 + a_1^2b_2 - a_1^2 + 2b_2^2}{(1+b_2)(b_1+b_2-1)(b_1-b_2+1)},$$

$$\sigma_{2\text{ Вх}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6},$$

$$\sigma_{2\text{ Вых}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}.$$

Нахождение среднеквадратического значения шума, вносимого при умножении на коэффициент b_2 аналогично:

$$\sigma_{3\text{ Вых}}^2 = \sigma_{3\text{ Вх}}^2 \frac{(-2b_1^2 - 4a_1b_1 - 2 + a_1^2b_2 - a_1^2 + 2b_2^2)}{(1+b_2)(b_1+b_2-1)(b_1-b_2+1)},$$

$$\sigma_{2\text{ Вх}}^2 = 1,272 \cdot 10^{-6},$$

$$\sigma_{2\text{ Вых}}^2 = 1,62 \cdot 10^{-4}.$$

4.11 Изменение значений нулей, полюсов и частотной характеристики при изменении коэффициентов ЦФ

Система функция ЦФ ФНЧ, синтезированного по методу Z-форм:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}.$$

Численные значения коэффициентов системной функции следующие: $a_0 = 0,06514$, $a_1 = 0,6514$, $a_2 = 0,06514$, $b_1 = 0,33861$, $b_2 = -0,1203$.

Далее рассмотрены случаи изменения коэффициентов ЦФ:

1) $a_1 = 0$; системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_2z^{-2}}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}}.$$

Чтобы найти значения нулей и полюсов, перейдём к положительным степеням z :

$$H(z) = \frac{a_0z^2 + a_2}{z^2 - b_1z - b_2}.$$

Значения полюсов не изменяются, т. к. не изменяется знаменатель $H(z)$. Найдём значения нулей, т. к.

$$a_0 = a_2.$$

то характеристическое уравнение имеет вид:

$$z^2 + 1 = 0,$$

отсюда корни характеристического уравнения равны:

$$z_{н1} = \sqrt{-1} = j,$$

$$z_{н2} = -\sqrt{-1} = -j.$$

На рисунке 4.24 приведена АЧХ исходного ЦФ (пунктир) и ЦФ, при $a_1 = 0$ (сплошная);

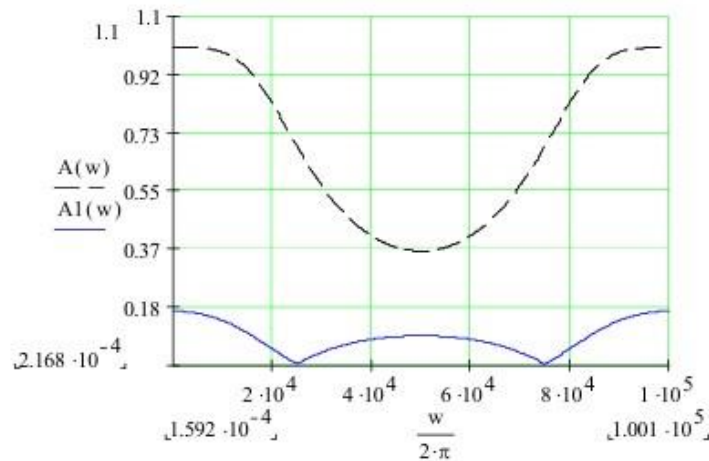


Рисунок 4.24 – АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, при $a_1 = 0$

2) $a_2 = 0$; системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Значения полюсов не изменяются т.к. не изменяется знаменатель $H(z)$. Найдем значения нулей, т. к.:

$$10a_0 = a_1.$$

то характеристическое уравнение имеет вид:

$$z^2 + 10z = z(z + 10) = 0,$$

отсюда корни характеристического уравнения равны:

$$z_{n1} = 0$$

$$z_{n2} = -10$$

На рисунке 4.25 приведена АЧХ исходного ЦФ (пунктир) и ЦФ, при $a_2 = 0$ (сплошная);

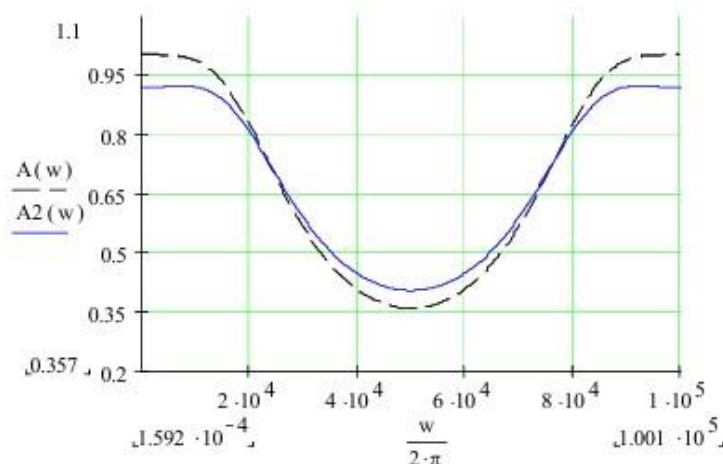


Рисунок 4.25 – АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, при $a_2 = 0$

3) $a_1 = a_2 = 0$; системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}.$$

Значения полюсов не изменяются т.к. не изменяется знаменатель $H(z)$. Характеристическое уравнение для нахождения нулей следующее: Найдем значения нулей:

$$z^2 = 0.$$

Найдем значения нулей:

$$z_{n1} = z_{n2} = 0.$$

На рисунке 4.26 приведена АЧХ исходного ЦФ (пунктир) и ЦФ, при $a_1 = a_2 = 0$ (сплошная);

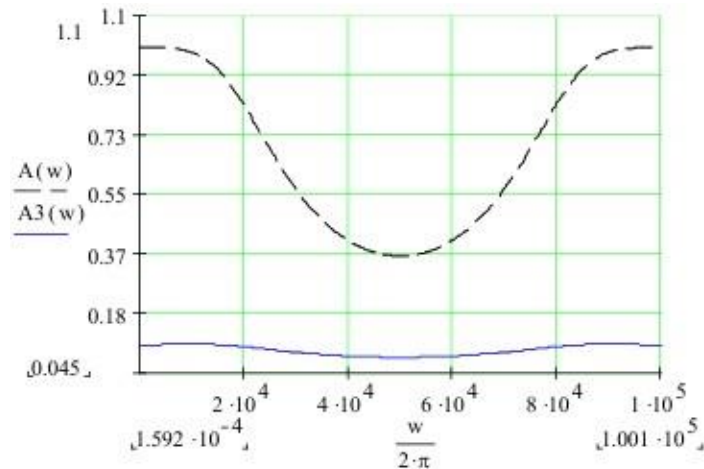


Рисунок 4.26 – АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, при $a_1 = a_2 = 0$

4) $b_2 = a_2 = 0$; системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}.$$

Найдем значения полюсов. Для этого приравняем знаменатель системно функции к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение:

$$z - 0,33861 = 0.$$

Значение полюса:

$$z_{n1} = 0,33861.$$

Найдем значения нулей, т. к.:

$$10a_0 = a_1$$

то характеристическое уравнение имеет вид:

$$z^2 + 10z = z(z + 10) = 0,$$

отсюда корни характеристического уравнения равны:

$$z_{n1} = 0,$$

$$z_{n2} = -10.$$

На рисунке 4.27 приведена АЧХ исходного ЦФ (пунктир) и ЦФ, при $b_2 = a_2 = 0$ (сплошная);

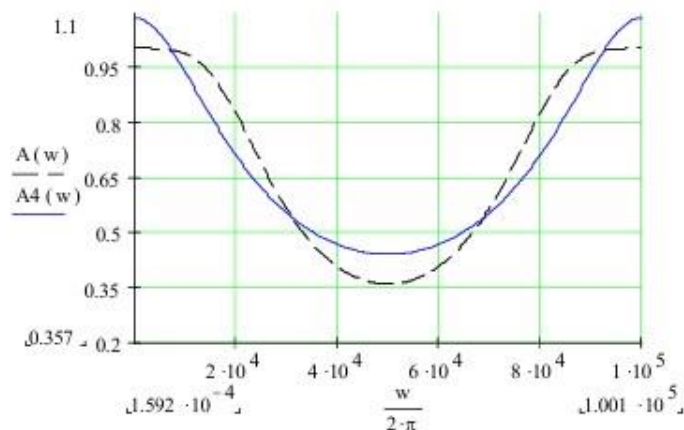


Рисунок 4.27 – АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, при $b_2 = a_2 = 0$

5) $b_1 = 0$; системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_2 z^{-2}}.$$

Найдем значения полюсов. Для этого приравняем знаменатель системы функции к нулю, чтобы получить характеристическое уравнение:

$$z^2 + 0,1203 = 0.$$

Значение полюсов:

$$z_{n1} = 0,347j,$$

$$z_{n2} = -0,347j.$$

Значения нулей не изменятся.

На рисунке 4.28 приведена АЧХ исходного ЦФ (пунктир) и ЦФ, при $b_1 = 0$ (сплошная).

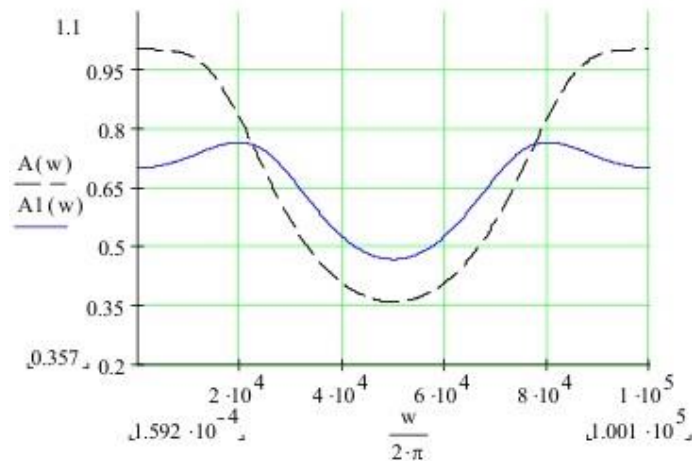


Рисунок 4.28 – АЧХ исходного ЦФ и ЦФ, при $b_1 = 0$

5 ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1 Задачи по дисциплине ЦОС

Каждый студент должен по заданному варианту решить две задачи.

Вариант №1.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование ступенчатой функции:

$$u(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0; \end{cases}$$

- 2) на вход ЦФ с ИХ:

$$h(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0,5 & n = 1, \\ 1 & n > 1, \end{cases}$$

подаётся сигнал в виде последовательности трех единичных отсчетов. Определить сигнал на выходе фильтра.

Вариант №2.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование экспоненциально убывающего сигнала:

$$x(nT) = e^{-anT};$$

- 2) на вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой:

$$h(nT) = \exp\left(-\frac{n}{2}\right),$$

подается сигнал:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 8, \\ 0, & n = 0, n > 8. \end{cases}$$

Найти сигнал на выходе ЦФ (первые 10 отсчетов).

Вариант №3.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование дискретизированного гармонического сигнала:

$$x(nT) = A \cos(n\omega_0 T), n \geq 0;$$

- 2) на вход цифрового фильтра с системной функцией:

$$H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}},$$

подается сигнал:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$$

Найти сигнал на выходе цифрового фильтра (первые 13 отсчетов).

Вариант №4.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование степенной функции:

$$x(nT) = a^n, |a| < 1, n \geq 0;$$

2) на вход цифрового фильтра с системной функцией:

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - z^{-1} - 0,5z^{-2}},$$

подается сигнал:

$$x(nT) = \exp\left(-\frac{2}{3}n\right), n \geq 0.$$

Найти Z-преобразование сигнала на выходе цифрового фильтра.

Вариант №5.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование сигнала, состоящего из двух отсчетов: $x(0) = a$, $x(T) = b$;
- 2) для обработки сигнала в виде пяти одинаковых отсчетов (дискретизированный прямоугольный импульс) используется согласованный цифровой фильтр, импульсная характеристика которого совпадает по форме с сигналом. Определить системную функцию фильтра и алгоритмы фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации. Найти сигнал на выходе цифрового фильтра (первые 10 отсчетов).

Вариант №6.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование серии из N равных отсчетов, равных a ;
- 2) при подаче на вход цифрового фильтра единичного импульса на выходе получается последовательность $\{1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^n; \dots\}$. Найти импульсную характеристику и системную функцию цифрового фильтра. Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра.

Вариант №7.

Перечень заданий:

- 1) найти Z-преобразование прореженной последовательности:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}; \end{cases}$$

- 2) при подаче на вход цифрового фильтра последовательности $\{1; 1/4; 1/16; \dots; 1/4^n; \dots\}$ на выходе получается последовательность $\{2; 1; 1/2; 1/4; \dots; 1/2^{n-1}; \dots\}$. Определить системную функцию фильтра, импульсную характеристику и схему фильтра, а также записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение).

Вариант №8.

Перечень заданий:

- 1) Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением:

$$X(z) = \frac{z}{z - K}.$$

Найти сигнал $x(nT)$;

- 2) системная функция цифрового фильтра определяется выражением:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}.$$

Определить положение нулей и полюсов системной функции на Z-плоскости. Устойчив ли такой фильтр?

Вариант №9.

Перечень заданий:

- 1) Z-преобразование дискретного сигнала описывается выражением:

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}.$$

Найти сигнал $x(nT)$;

- 2) задана системная функция цифрового фильтра:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 1,2z^{-1} - 0,64z^{-2}}.$$

Определить положение нулей и полюсов системной функции на Z-плоскости. Устойчив ли такой фильтр?

Вариант №10.

Перечень заданий:

- 1) найти сигнал, Z-преобразование которого описывается выражением:

$$X(z) = 1 + z^{-1};$$

- 2) найти комплексную частотную характеристику цифрового фильтра с импульсной характеристикой:

$$h(nT) = e^{-\frac{nT}{\tau}}.$$

Построить график амплитудно-частотной характеристики при $T/\tau = 1$ и $T/\tau = 0,1$.

Вариант №11.

Перечень заданий:

- 1) найти сигнал, Z-преобразование которого описывается выражением:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}};$$

- 2) найти АЧХ цифрового фильтра с системной функцией:

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - 0,77z^{-1} + 0,28z^{-2}}.$$

Построить график АЧХ при интервале дискретизации $T = 1$ мс.

Вариант №12.

Перечень заданий:

- 1) найти сигнал, Z-преобразование которого описывается выражением:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}};$$

- 2) системная функция цифрового фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}}.$$

Изобразить схемы цифрового фильтра в прямой и канонической формах реализации.

Вариант №13.

Перечень заданий:

- 1) найти дискретную свертку двух дискретизированных прямоугольных импульсов, заданных пятью отсчетами;
- 2) получите формулу $X(z)$ от дискретной ступенчатой функции:

$$x(nT) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Указание: примените формулу суммирования бесконечной геометрической прогрессии. Заметьте, что функция $X(z)$ определена во внешней области единичного круга, т.е. при $|z| > 1$.

Вариант №14.

Перечень заданий:

- 1) вычислить Z-преобразование дискретной свертки двух сигналов: $x(nT)$, имеющего два ненулевых отсчета $x(0) = 1$ и $x(T) = 1$ и $y(nT)$, состоящего из трех отсчетов: $y(0) = 2$; $y(T) = 2$; $y(2T) = 2$;
- 2) найти дискретный сигнал $x(n)$, которому отвечает Z-преобразование:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0,3z^{-1}}.$$

Вариант №15.

Перечень заданий:

- 1) импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением:

$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра;

- 2) найдите $x(6)$ дискретной последовательности $x(n)$, Z-преобразование которой:

$$X(z) = \frac{25}{1 - 0,9z^{-1}}.$$

Вариант №16.

Перечень заданий:

- 1) алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид:

$$y(nT) = x(nT) + 0,5x(nT - T).$$

Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и системную функцию в Z-форме.

- 2) задано Z-преобразование:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - 0,4z^{-1})(1 - 0,6z^{-1})}.$$

Найти сигнал $x(n)$.

Вариант №17.

Перечень заданий:

1) найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой:

$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 1; \end{cases}$$

2) найдите дискретный сигнал $x(n)$, Z -преобразование которого:

$$X(z) = z^{-2}.$$

Сигнал найти методом обратного Z -преобразование.

Вариант №18.

Перечень заданий:

1) найти системную функцию и записать разностное уравнение для цифрового фильтра с импульсной характеристикой:

$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ 0, & n - \text{нечетное}; \end{cases}$$

2) вычислить Z -преобразование $F(z)$ свертки $f(n)$ дискретных сигналов $x(n) = \{1; 1; 1; 0; 0; 0; \dots\}$ и $y(n) = \{0; 0; 1; 1; 0; 0; \dots\}$.

Вариант №19.

Перечень заданий:

1) импульсная характеристика цифрового фильтра определяется выражением:

$$h(nT) = 2 \exp\left(-\frac{n}{3}\right).$$

Найти системную функцию и записать алгоритм фильтрации в рекурсивной и нерекурсивной формах реализации;

2) найдите комплексную частотную характеристику и амплитудно-частотную характеристику цифрового фильтра. Его разностное уравнение:

$$y(nT) = x(nT) - 2x(nT - T) + x(nT - 2T), \quad n \geq 0.$$

Вариант №20.

Перечень заданий:

1) алгоритм цифровой фильтрации имеет следующий вид:

$$y(nT) = 2x(nT) - 0,5x(nT - T) + 0,5y(nT - T).$$

Найти импульсную характеристику цифрового фильтра и его системную функцию;

2) цифровой фильтр имеет следующий алгоритм:

$$y(n) = x(n - 2) + 0,4y(n - 1) + 0,32y(n - 2).$$

Найдите системную функцию, комплексную частотную характеристику и импульсную характеристику фильтра.

Вариант №21.

Перечень заданий:

1) покажите, что цифровой фильтр, алгоритм которого описывается разностным уравнением:

$$y(n) = x(n) - 3x(n-1) + 0,3x(n-2) - x(n-3),$$

осуществляет приближенное трехкратное дифференцирование относительно медленных входных сигналов.

Указание: найти выражение для комплексно-частотной характеристики и разложить в ряд Маклорена при $\omega T \rightarrow 0$;

2) найдите аналитическое выражение m -ого члена в импульсной характеристике $h(n)$ рекурсивного фильтра, работающего в соответствии с алгоритмом:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0,5y(n-2), n \geq 0.$$

Вариант №22.

Перечень заданий:

1) найти системную функцию цифрового фильтра (см. рисунок) и записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение);

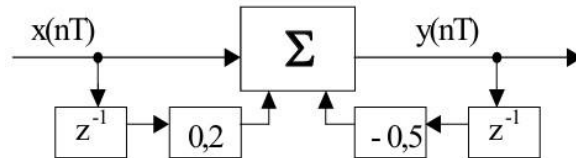


Рисунок 5.1 – Структурная схема цифрового фильтра

2) цифровой фильтр имеет следующий алгоритм:

$$y(n) = 1,5x(n) + 4x(n-1) + 0,85y(n-1).$$

Фильтр работает с шагом дискретизации по времени $T = 0,1$ мс. Найдите модуль $|H(e^{j\omega})|$ и фазовый угол $\varphi(\omega)$ частотного коэффициента передачи фильтра на частоте $\omega = 2 \cdot 10^4$ рад/с.

Вариант №23.

Перечень заданий:

1) системная функция цифрового фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение);

2) собственные колебания в рекурсивном цифровом фильтре второго порядка описываются разностным уравнением следующего вида:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0,5y(n-2), n \geq 0.$$

Исследуйте устойчивость данного цифрового фильтра и определите параметры колебаний на выходе фильтра при передаче на его вход единичного импульса.

Вариант №24.

Перечень заданий:

1) системная функция цифрового фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}.$$

Определить его импульсную характеристику и записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение);

2) на вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h(nT) = e^{-2n}$ подается сигнал:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 10, \\ 0, & n = 0, n > 10. \end{cases}$$

Определить сигнал на выходе фильтра.

Вариант №25.

Перечень заданий:

1) системная функция цифрового фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{0,8 + 0,3z^{-1} - 0,5z^{-2}}{1 - 0,6z^{-1} - 0,4z^{-2} + 0,3z^{-3}}.$$

Записать алгоритм цифровой фильтрации (разностное уравнение) и изобразить схему фильтра;

2) на вход цифрового фильтра с системной функцией:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0,5z^{-2}},$$

подается сигнал:

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & n > 4. \end{cases}$$

Определить сигнал на выходе цифрового фильтра.

5.2 Тестовые вопросы по дисциплине ЦОС

Двести тестовых вопросов разбиты на 20 тем, по 10 вопросов в каждой. Далее приведены примеры вопросов с ответами по каждой из тем.

Тема: **Цифровые цепи и сигналы.**

Пример: Укажите связь числа уровней квантования N и наименьшего числа разрядов m двоичных чисел, кодирующие эти уровни?

a) $m = \lg N$;

b) $m = \frac{N^2}{2}$;

c) $m = \text{Int}(\log_2 N)$;

d) $m = \ln N$.

Ответ: c.

Тема: **Цифровые системы обработки сигналов.**

Пример: Основное разностное уравнение для линейных ЦФ имеет вид:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^M a_i x(nT - iT) + \sum_{j=1}^N b_j y(nT - jT), \quad n \geq 0.$$

Что описывает первая и вторая сумма уравнения?

- а) первая сумма описывает нерекурсивную часть фильтра, вторая рекурсивную часть;
- б) первая сумма описывает рекурсивную часть фильтра, вторая нерекурсивную часть;
- в) первая сумма описывает линейную часть фильтра, вторая нелинейную часть фильтра;
- г) первая сумма описывает нелинейную часть фильтра, вторая линейную часть фильтра.

Ответ: а.

Тема: **Z-преобразование.**

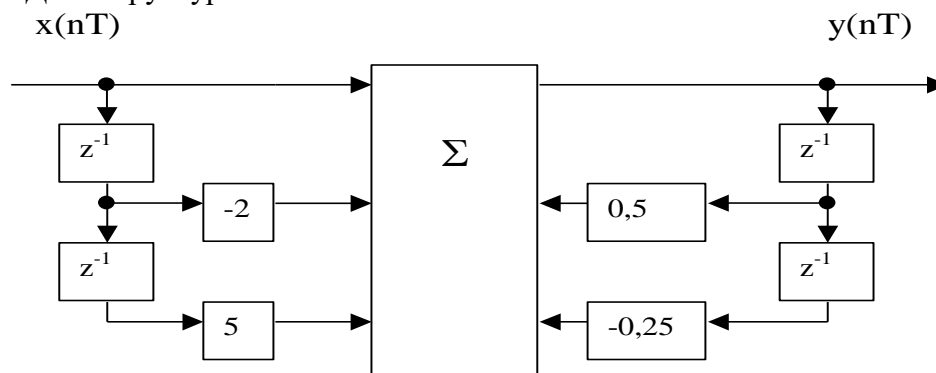
Пример: $f(nT) = K u(nT)$. Найти Z-образ.

- а) $\frac{z}{z-1}$;
- б) $\frac{K}{z-1}$;
- в) $\frac{Kz}{z-1}$;
- г) $\frac{z-A}{Kz}$.

Ответ: в.

Тема: **Формы реализации цифровых фильтров**

Пример: Дана структурная схема:



Укажите верную системную функцию:

- а) $H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2}}{1 + 5z^{-1} - 2z^{-2}}$;
- б) $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2}}$;
- в) $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 0,5z^{-1} - 0,25z^{-2}}$;
- г) $H(z) = \frac{-1 + 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2}}$.

Ответ: б.

Тема: **Характеристики цифровых фильтров**

Пример: Разностное уравнение имеет вид:

$$y(nT) = 0,6x(nT) - 0,6x(nT - T) + 1,32y(nT - T) - 0,85y(nT - 2T);$$

Выберите системную функцию:

- а) $H(z) = \frac{0,6 - 0,6z^{-1}}{1 - 1,32z^{-1} + 0,85z^{-2}}$,
- б) $H(z) = \frac{0,6 + 0,6z^{-1}}{1 - 1,32z^{-1} + 0,85z^{-2}}$,

$$\text{с) } H(z) = \frac{0,6 - 0,6 z^{-1}}{1 + 1,32 z^{-1} - 0,85 z^{-2}}, \quad \text{д) } H(z) = \frac{-0,6 + 0,6 z^{-1}}{1 - 1,32 z^{-1} + 0,85 z^{-2}}.$$

Ответ: а.

Тема: Нелинейные эффекты в цифровых фильтрах

Пример: Дисперсия шума АЦП на выходе вычислителя первой разности равна:

$$\text{а) } \sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = 2\sigma_{\text{вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{6}, \quad \text{б) } \sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = 3\sigma_{\text{вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{4},$$

$$\text{с) } \sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = \sigma_{\text{вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad \text{д) } \sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(nT) = 6\sigma_{\text{вх}}^2 = \frac{\Delta^2}{2}.$$

Ответ: а.

Тема: Синтез цифровых фильтров с использованием фильтра-прототипа

Пример: Замена какого вида используется в методе билинейного преобразования:

$$\text{а) } p = \frac{2z-1}{Tz+1}; \quad \text{б) } p^{-1} = \frac{Tz-1}{2z+1}; \quad \text{с) } p = \frac{Tz+1}{2z-1}; \quad \text{д) } p = \frac{2z+1}{Tz-1}.$$

Ответ: а.

Тема: Синтез цифровых фильтров с помощью временных окон

Пример: Временные окна необходимы:

- а) для уменьшения изрезанности АЧХ в точке $\omega = 0$;
- б) для уменьшения изрезанности АЧХ в точке $\omega = 2\pi/T$;
- с) для уменьшения изрезанности АЧХ вблизи крутых склонов;
- д) для уменьшения изрезанности АЧХ в точке $\omega = \pi/T$.

Ответ: с.

Тема: Построение цифровых фильтров

Пример: Вычислители первых и вторых разностей не пропускают постоянную составляющую, потому что они являются:

- а) цифровыми интеграторами;
- б) цифровыми дифференциаторами;
- с) накапливающими сумматорами;
- д) полосовыми фильтрами.

Ответ: б.

Тема: Частотные характеристики цифровых фильтров

Пример: Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра имеет период повторения:

$$\text{а) } \frac{\pi T}{2}; \quad \text{б) } \pi T; \quad \text{с) } \frac{2\pi}{T}; \quad \text{д) } \frac{\pi}{T}.$$

Ответ: с.

Тема: Основы цифровой обработки изображений

Пример: При помощи какой обработки выделение малоразмерного объекта на фоне с резкими перепадами яркости дает лучшие результаты:

- а) линейной;
- б) нелинейной;
- с) как линейной, так и нелинейной;
- д) стационарной.

Ответ: б.

Тема: **Двумерные линейные дифференцирующие фильтры**

1	1	-1
1	-2	-1
1	1	-1

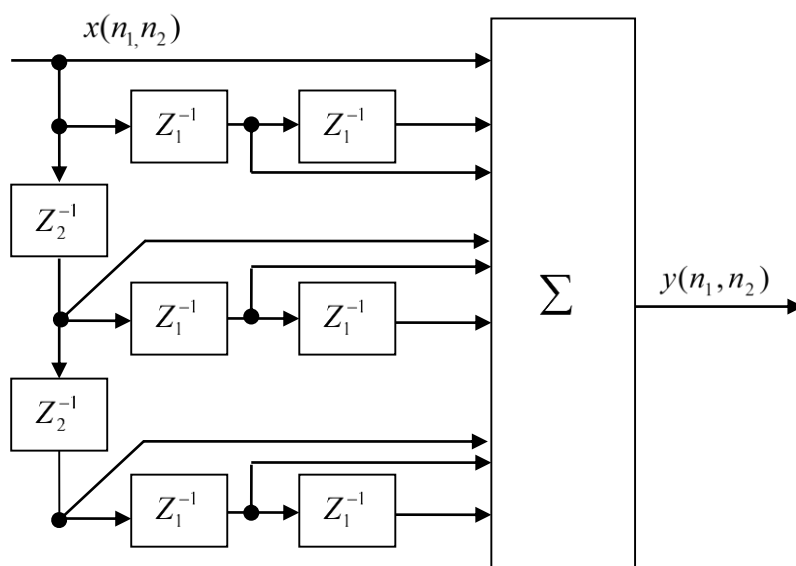
Пример:

- а) оператор выделения вертикальных линий;
- б) оператор выделения малоразмерных деталей из шумов;
- с) градиентный оператор выделения перепада в направлении "Запад";
- д) градиентный оператор выделения перепада в направлении "Юг".

Ответ: с.

Тема: **Двумерные линейные интегрирующие фильтры**

Пример: Какому фильтру соответствует структурная схема:



- а) скользящее среднее;
- б) градиентный оператор выделения перепада в направлении "Запад";
- с) лапласиан для "восьми соседей";
- д) двойное дифференцирование.

Ответ: а.

Тема: **Двумерные разностные уравнения**

Пример: Какое разностное уравнение соответствует данной маске $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$:

- а) $y(n_1, n_2) = -x(n_1, n_2) - x(n_1, n_2 - 1) + x(n_1, n_2 - 2) - x(n_1 - 1, n_2) - 2x(n_1 - 1, n_2 - 1) + x(n_1 - 1, n_2 - 2) + x(n_1 - 2, n_2) + x(n_1 - 2, n_2 - 1) + x(n_1 - 2, n_2 - 2);$
- б) $y(n_1, n_2) = -x(n_1, n_2) - x(n_1, n_2 - 1) + x(n_1 - 1, n_2) - x(n_1, n_2 - 2) - 2x(n_1 - 1, n_2 - 1) + x(n_1 - 1, n_2 - 2) + x(n_1 - 2, n_2) + x(n_1 - 2, n_2 - 1) + x(n_1 - 2, n_2 - 2);$
- с) $y(n_1, n_2) = -x(n_1 - 2, n_2 - 1) - x(n_1 - 2, n_2 - 2) + x(n_1 - 2, n_2) - x(n_1 - 1, n_2) - 2x(n_1 - 1, n_2 - 1) + x(n_1 - 1, n_2 - 2) + x(n_1 - 2, n_2) + x(n_1 - 2, n_2 - 1) + x(n_1 - 2, n_2 - 2);$

Ответ: а.

Тема: **Рекурсивная обработка изображений**

Пример: Интервальное дифференцирование производит:

- a) операцию интегрирования на заданном интервале;
- b) вычисление сигнала рассогласования между центром строба и объекта;
- c) операцию сложения на заданном интервале;
- d) операцию двойного дифференцирования.

Ответ: **b**.

Тема: **Медианная обработка изображений**

Пример: Дано изображение $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Найти медиану:

- a) 4;
- b) 2;
- c) 3;
- d) 1.

Ответ: **b**.

Тема: **Экстремальная обработка изображений**

Пример: Какой из предложенных методов дает лучшие результаты при выделении малоразмерных объектов на гладком фоне:

- a) метод минимума первых разностей;
- b) метод минимума модулей первых разностей;
- c) метод минимума вторых разностей.

Ответ: **c**.

Тема: **Цифровое сжатие видеосигналов**

Пример: Дискретное косинусное преобразование используется при:

- a) внутрикадровом кодировании;
- b) межкадровом кодировании;
- c) межстрочном кодировании;
- d) межэлементном кодировании.

Ответ: **a**.

Тема: **Стандарты MPEG**

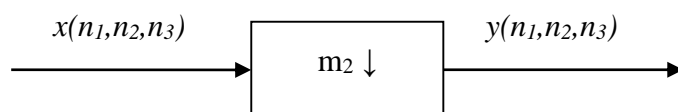
Пример: Какой из стандартов MPEG поддерживает чересстрочную развёртку:

- a) MPEG-1;
- b) MPEG-2;
- c) оба;
- d) ни один из них.

Ответ: **b**.

Тема: **Применение устройств цифровой обработки сигналов**

Пример: Блок:



выполняет операцию децимации видеоданных:

- a) по элементам;
- b) по строкам;
- c) по кадрам;

d) по группам кадров.

Ответ: **b**.

5.3 Пример вариантов контрольно-измерительных материалов (КИМ) по дисциплине ЦОС

КИМ по дисциплине ЦОС содержит задания:

- на установление соответствия;
- на установление последовательности;
- задания открытого типа.

Далее приведены примеры заданий с ответами и с сценариями выполнения для каждого из типов вопросов.

1. Задание на установление соответствия

Сценарий выполнения	Результат оценивания
Прочитайте задание и установите правильное соответствие. Сопоставьте элементы из списка 1 с элементами списка 2, чтобы сформировать пары элементов. Запишите ответ попарно буквы и цифры вариантов ответа. Каждый элемент правого списка (элемент списка 2) быть использован один раз. Некоторые элементы могут вообще не быть использованы.	Полное совпадение с верным ответом – 1 балл; неверный ответ или его отсутствие – 0 баллов.

Соедините оператор и тип цифровой системы:

Оператор	Тип цифровой системы
А. $y(nT) = n^2 x(nT - T)$.	1. линейная. 2. нелинейная. 3. физически нереализуемая. 4. физически реализуемая 5. нестационарная. 6. физически нереализуемая и нестационарная.
Б. $y(nT) = nx^2(nT - T)$.	
В. $y(nT) = nx(nT + T)$.	
Г. $y(nT) = n^2 x(nT + T)$.	

Ответ:

А	Б	В	Г
5	2	3	6

2. Задание на установление последовательности

Сценарий выполнения	Результат оценивания
Прочитайте задание и установите правильную последовательность элементов. Запишите ответ в нужной последовательности без пробелов и знаков препинания.	Полное совпадение с верным ответом – 1 балл; неверный ответ или его отсутствие – 0 баллов.

Установите правильный порядок выполнения этапов аналогово-частотного преобразования при синтезе цифрового фильтра (ЦФ).

1. Дискретизация фильтра.
2. Расчет аналогового фильтра нижних частот.

3. Преобразование (аналоговый в аналоговый) полосы частот.

4. Определение заданных характеристик ЦФ.

Запишите соответствующую последовательность цифр слева направо:

Ответ:

2	3	1	4
---	---	---	---

3. Задание открытого типа

Сценарий выполнения	Результат оценивания
Прочитайте задание и запишите ответ. Ответом является одно слово. Ответ может быть записан любым регистром.	Полное совпадение с верным ответом – 1 балл; неверный ответ или его отсутствие – 0 баллов.

Какая характеристика линейного цифрового фильтра называется реакция (выходной отклик) фильтра при нулевых начальных условиях на входное воздействие в виде единичного импульса?

Ответ: импульсная.

5.4 Пример экзаменационного билета по дисциплине ЦОС

В билетах по дисциплине ЦОС студентам необходимо ответить на два теоретических вопроса и решить две задачи.

Пример:

1. Определение цифрового фильтра. Свойства стационарности, линейности. физической реализуемости и устойчивости. Примеры разностных уравнений и реализации цифровых фильтров.

2. Ошибки, возникающие в цифровых рекурсивных фильтрах (ЦРФ) из-за квантования данных. Расчёт ошибок при прямой и канонической формах реализации ЦРФ первого порядка по вероятностному подходу. Рекомендации по использованию прямой и канонической форм реализации ЦРФ.

3. Найти Z-преобразование ступенчатой функции $u(nT) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

4. На вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой
$$h(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0,5, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$
 подается сигнал в виде последовательности трех единичных отсчетов.

Определить сигнал на выходе фильтра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-методическом пособии приведены материалы для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов по дисциплине ЦОС. Определён перечень отчетных материалов для студентов: контрольные работы, расчетное задание, задачи, тестовые вопросы, варианты КИМ, пример экзаменационного билета.

Учебно-методическое пособие в практическом плане дополняет теоретический материал, изложенный в учебном пособии, что позволяет студентам получить необходимые компетенции по дисциплине ЦОС.

Дальнейшее теоретическое и практическое освоение ЦОС будет связано с программно-аппаратными реализациями систем и устройств для обработки сигналов и изображений, которые будут использоваться в соответствующих дисциплинах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцева, Е.В. Цифровая обработка сигналов и изображений: учеб. пособие / Е.В. Зайцева, А.Г. Костевич, М.И. Курячий. – Томск: гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – Томск: Издательство ТУСУР, 2018. – 220 с.
2. Курячий, М.И. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов с грифом УМО / М.И. Курячий. – Томск: ТУСУР, 2009. – 190 с.
3. Оппенгейм, А.В. Цифровая обработка сигналов: моногр. / А.В. Оппенгейм, Шафер Р.В.; пер. с англ.; пер.: С.А. Кулешов; ред. пер.: А.С. Ненашев. – Москва: Техносфера, 2006. – 855 с.
4. Гонсалес, Р.С. Цифровая обработка изображений: моногр. / Р.С. Гонсалес, Р.Э. Вудс; пер. с англ.; пер. П.А. Чочна. – Москва: Техносфера, 2005. – 1070 с.
5. Гонсалес, Р.С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB: моногр. / Р.С. Гонсалес, Р.Э. Вудс, С. Эддинс; пер. с англ.; пер.: В.В. Чепыжов. – Москва: Техносфера, 2006. – 615 с.
6. Цифровое телевидение в видеоинформационных системах: монограф. / А.Г. Ильин, Г.Д. Казанцев, А.Г. Костевич, М.И. Курячий, И.Н. Пустынский, В.А. Шалимов. – Томск: ТУСУР, 2010. – 465 с.