

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Д.С. Брагин

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Курс лекций

Часть 1

**Учебное пособие для студентов технических направлений
подготовки и специальностей**

Томск

2026

УДК 621.391
ББК 32.841.1
Б 87

Рецензент:

Дмитриев В.Д., доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники ТУСУРа,
кандидат технических наук

Б 87 Радиотехнические цепи и сигналы: Курс лекций. Часть 1. Учебное пособие для студентов технических направлений подготовки и специальностей / Д.С. Брагин – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2026. – 111 с.

Настоящий курс лекций содержит систематизированное изложение фундаментальных основ теории радиотехнических цепей и сигналов. Данное пособие предназначено для углубленного изучения математических методов описания сигналов, спектрального и временного анализа, а также основных принципов преобразования сигналов в линейных стационарных системах. Освоение представленного материала позволяет студентам овладеть ключевыми подходами к анализу детерминированных сигналов, включая ряды Фурье, преобразования Фурье и Лапласа, а также приобрести практические навыки расчета частотных и импульсных характеристик радиотехнических устройств, необходимые для решения профессиональных инженерных задач.

Настоящее электронное учебное пособие разработано и скорректировано с учётом апробированной методики чтения лекций.

Одобрено на заседании кафедры ТОР, протокол № 11 от 1 июля 2026 г.

УДК 621.391
ББК 32.841.1

© Брагин Д.С., 2026
© Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2026

Оглавление

1 Введение	4
1.1 Передача сигналов на расстояние и используемые в радиотехнике частоты	5
1.2 Обобщенная структурная схема канала связи. Назначение ее функциональных узлов ...	8
1.3 Классификация сигналов, используемых в радиотехнике	11
2 Основные характеристики детерминированных сигналов	14
2.1 Сигналы, модели сигналов	14
2.2 Динамическое представление сигналов	18
2.2.1 Динамическое представление сигнала с помощью функций Хевисайда	18
2.2.2 Динамическое представление сигнала с помощью дельта функций	19
3 Гармонический анализ.....	21
3.1. Обобщенные функции как математические модели сигналов	21
3.2. Геометрические методы в теории сигналов	23
3.3 Теория ортогональных сигналов	27
4 Спектральные представления сигналов.....	33
4.1 Периодические сигналы и ряды Фурье	33
4.2 Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье	39
4.3 Основные свойства преобразования Фурье.....	45
4.4 Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов	50
4.5. Преобразование Лапласа	57
5 Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные цепи.....	62
5.1. Физические системы и их математические модели	62
5.2 Импульсные, переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем	66
5.3 Линейные динамические системы	73
5.4 Спектральный метод	82
5.5 Операторный метод.....	90
6 Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы	96
6.1 Некоторые модели частотно-избирательных цепей	96
6.2. Частотно-избирательные цепи при широкополосных входных воздействиях	104
Список литературы	111

Лекция №1

1 Введение

Курс «Радиотехнические цепи и сигналы (РТЦ и С)» является одним из базовых курсов в подготовке современных радиоинженеров в области радиотехники и радиоэлектроники.

Радиотехника — это научно-техническая область, основными задачами которой являются:

1. изучение принципов генерации, усиления, излучения и приема электромагнитных колебаний и волн радиодиапазона;
2. практическое использование этих колебаний и волн с целью хранения, преобразования и передачи информации.

На первом своем этапе развития после изобретения радио А.С. Поповым (1895г.) радиотехника решала преимущественно задачи электросвязи, используя электромагнитные волны низкочастотного диапазона с длинами волн в несколько сотен или тысяч метров. В настоящее время круг задач радиотехники необычайно расширился. К ним относятся радиосвязь (в том числе космическая), телевидение, радиоуправление, радиолокация, радионавигация, радиотехнические методы в биологии, медицине, геофизике и т. д.

Основной задачей радиотехники является передача сообщений на расстояние.

Развитие и жизнь современного общества немыслима без широкого использования разнообразных средств и систем передачи сообщений. Сегодня совершенно очевидно, что научно-технический прогресс во многом определяется скоростью и объемом передаваемой информации. Объем информации непрерывно возрастает, увеличивается дальность связи, растут требования к надежности, качеству связи, эффективности использования оборудования. Все это приводит к непрерывному совершенствованию оборудования всех систем, в том числе и систем радиосвязи.

Целью данного курса является изучение фундаментальных закономерностей, связанных с получением сигнала, их передачей по каналам связи, обработкой и преобразованием их в радиотехнических цепях.

Основное внимание мы уделим:

- вопросам теории детерминированных и случайных сигналов, их математическому описанию;
- методам анализа прохождения сигналов через линейные цепи;

- методам модуляции радиосигналов;
- методам анализа прохождения радиосигналов через частотно-избирательные цепи;
- основам теории дискретных и цифровых сигналов;
- вопросам синтеза цифровых фильтров;
- нелинейным цепям и методам их анализа;
- преобразованиям сигналов и их спектров в нелинейных цепях.

1.1 Передача сигналов на расстояние и используемые в радиотехнике частоты

Приступая к изучению курса РТЦ и С следует уточнить понятие сигнала в радиотехнике.

Сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащего для отображения, регистрации и передачи сообщения (информации). В технике под термином «сигнал» понимают величину каким-либо образом отображающую состояние физической системы. В радиотехнике сигналом называют функцию времени $S(t)$, описывающую изменение во времени напряжения, напряженностей электрического или магнитного полей, тока или заряда. Расстояние, на которое передается сообщение, может быть незначительным (связь между блоками ЭВМ) или огромным (связь между космическими объектами). Передача сообщений в виде сигналов может осуществляться проводными, кабельными, волноводными линиями связи или в свободном пространстве.

Носителем информации в этом случае выступает особый вид материи – электромагнитное поле, энергия которого передается в пространстве в виде электромагнитных колебаний – радиоволн.

Сигналы, поступающие от источника сообщений (микрофон, телевизионная камера, телеметрический датчик) как правило, не могут быть переданы по радиоканалу. Это связано с их относительной низкочастотностью. Чтобы осуществить эффективную передачу сигналов, в какой-либо среде необходимо перенести спектр этих сигналов из низкочастотной области в область достаточно высоких частот. Такая процедура в радиотехнике получила название модуляции.

Процесс модуляции заключается в том, что высокочастотное колебание, способное распространяться на большие расстояния, наделяется признаками, характеризующими полезное сообщение. Таким образом, это колебание используется как переносчик или

носитель информации. При модуляции по заданному закону может меняться амплитуда, частота, фаза, или длительность радиосигнала, т.е. реализуются амплитудная, частотная, фазовая и импульсная модуляция.

Необходимость применения для передачи информации модулированных радиосигналом обусловлена двумя основными обстоятельствами:

Во-первых, при радиопередаче следует использовать радиосигнал, эффективно излучаемый антенной. Но эффективное излучение имеет место лишь тогда, когда геометрические размеры антенны соизмеримы с длиной волны излучаемого колебания. При уменьшении длины волны растет частота ($\lambda = C/f$). Это обстоятельство и определяет целесообразность применения в качестве несущего высокочастотное колебание.

Во-вторых, для неискаженной передачи радиосигнала через радиотехнические цепи, и антенно-фидерные устройства, необходимо, чтобы эффективная ширина спектра передаваемого радиосигнала была мала по сравнению с частотой несущего колебания, т.е. $\Delta\omega_{\text{эф}} \ll \omega_0$.

Выбор длины волны излучаемого колебания весьма существенен для обеспечения устойчивой и надежной связи. Выбор диапазона волн для каждой конкретной системы связи определяется следующими факторами:

1. особенностью распространения электромагнитных волн данного диапазона;
2. характером сообщения (шириной спектра);
3. габаритными размерами антенной системы;
4. характером помех в данном диапазоне.

Для современной радиотехники характерны интенсивное изучение малоисследованных диапазонов волн и стремление к расширению диапазона используемых волн в сторону как весьма длинных, так и в сторону коротких волн, включая инфракрасный и оптический диапазон. Согласно Регламенту радиосвязи, который является основным международным документом, определяющим использование частотного диапазона, радиоспектр от 3 кГц до 3000 ГГц разбивают на $N = 9$ диапазонов, каждый из которых занимает полосу от 0.3×10^N до 3×10^N Гц.

Таблица 1.1 – Классификация диапазонов частот

Номер диапазона	Диапазон частот	Наименование частот	Диапазон волн	Наименование волн
4	3...30 кГц	Очень низкие (ОНЧ)	100... 10 км	Мириаметровые (СДВ)
5	30...300 кГц	Низкие (НЧ)	10...1 км	Километровые (ДВ)

Продолжение таблицы 1.1

6	300...3000 кГц	Средние (СЧ)	1000...100 м	Гектометровые (СВ)
7	3...30 МГц	Высокие (ВЧ)	100...10 м	Декаметровые (КВ)
8	30...300 МГц	Очень высокие (ОВЧ)	10...1 м	Метровые (УКВ)
9	300...3000 МГц	Ультравысокие (УВЧ)	100...10 см	Дециметровые
10	3...30 ГГц	Сверхвысокие (СВЧ)	10...1 см	Сантиметровые
11	30...300 ГГц	Крайне высокие (КВЧ)	10...1 мм	Миллиметровые
12	300...3000 ГГц	Гипервысокие (ГВЧ)	1...0,1 мм	Децимиллиметровые

Все волны с длинами короче 1м называют ультракороткими волнами (УКВ) Волны сантиметрового и длинноволновой части миллиметрового диапазона иногда называют микроволнами от английского microwaves.

Радиотехника исторически развивалась с тенденцией к освоению все более высокочастотных диапазонов. Это связано, во-первых, с необходимостью создания высокоэффективных антенных систем, формирующих узкие диаграммы направленности электромагнитной мощности. В этом случае поперечные размеры антенны должны существенно превышать рабочую длину волны. Это условие легко выполняется в метровом, сантиметровом и, в особенности, в оптическом диапазоне волн.

Во-вторых, с ростом несущей частоты растет число реализуемых радиоканалов, и полоса каждого канала. Это позволяет реализовывать сложные виды модуляции (например, частотную) и повышать помехоустойчивость радиоканала.

Сверхдлинные волны ($f < 30$ кГц) прекрасно отражаются от земной поверхности и ионосферы. В этом случае формируется волновод Земля – ионосфера. Дальность распространения радиоволн в таком волноводе составляет несколько тысяч километров. Основная область использования сверхдлинных волн – создание систем устойчивой дальней навигации кораблей и самолетов. Проникая достаточно глубоко в почву и воду (вследствие большой длины волны) СДВ используются для систем подземной и подводной радиосвязи.

Условия распространения ДВ близки к условиям передачи СДВ. Структура поля в приземном пространстве ДВ диапазона на расстоянии сотен километров от передатчика формируется в результате сложения и интерференции земной поверхностной волны и отраженной от ионосферы. В результате формируются области со значительным

ослаблением поля. Мощность волны ДВ диапазона теряется вследствие земной дифракции и затухания поверхностной волны из-за конечной проводимости земной поверхности. Поэтому дальность радиосвязи на ДВ значительно меньше, чем на СДВ. Основные области применения служебная телеграфия и навигация. Основным недостатком связи на ДВ относительная узкополосность. Ширина полосы не превышает 270 кГц. Это ограничивает число радиоканалов.

СВ в основном используются для создания радиовещательных каналов. Условия распространения волн этого диапазона очень зависят от состояния ионосферы. Эти условия существенно меняются в течении суток, особенно днем и ночью. Работа в этом диапазоне осложняется явление замирания радиоволн. Это явление связано с интерференцией нескольких отраженных лучей от разных слоев ионосферы, состояние которых непрерывно изменяется.

Широкое применение КВ для создания систем радиосвязи и радиовещания волн связано с возможностью создания эффективных антенн с достаточно узкими диаграммами направленности. Влияние земных волн в этом диапазоне незначительно. Это позволяет при мощности передатчика в несколько ватт, используя ионосферный волновод получить дальность радиосвязи десятки тысяч километров. Распространение КВ-диапазона подвержено глубоким замираниям и интенсивным помехам из-за высокой плотности размещения передатчиков в этой области спектра.

Электромагнитные волны с частотами выше 30 МГц практически не отражаются от ионосферы. При таких длинах волн практически отсутствуют дифракционные эффекты от земли. Поэтому радиолинии УКВ диапазона обычно работают в условиях прямой видимости. В этом диапазоне широко используется механизм дальней тропосферной связи. УКВ диапазон широко используется для создания современных радиорелейных линий связи.

1.2 Обобщенная структурная схема канала связи. Назначение ее функциональных узлов

В процессе передачи и приема сообщений сигналы подвергаются различным преобразованиям. Некоторые из этих преобразований являются типовыми, обязательными для большинства радиотехнических систем независимо от их назначения, а также от характера передаваемого сообщения. В зависимости от передаваемой информации сообщением может быть текст телеграммы, представляющий собой последовательность

дискретных символов, данные на выходе вычислительной машины, фототелеграмма, телевизионное изображение, речь, музыка.

Рассмотрим структурную схему радиотехнического канала связи (рисунок 1.1). Процесс передачи сообщений разбивается на три основных этапа: преобразование сообщения в сигнал; передача сигнала по линии передачи; преобразование полученного сигнала в сообщение. На первом этапе сообщение $U(t)$ преобразуется передающим устройством в сигнал $U_c(t)$, в наиболее удобный для данной линии. В общем случае этот процесс состоит из операций кодирования и модуляции. При этом сообщение преобразуется в модулирующий сигнал. Для конкретной системы передачи понятия сообщение и модулирующий сигнал тождественны. В многоканальных системах, обеспечивающих независимую передачу нескольких сообщений, к этим операциям добавляется операция формирования многоканального сигнала. При модуляции меняется один из параметров несущего высокочастотного колебания передающего устройства (амплитуда, частота, фаза). Такой высокочастотный модулированный сигнал в системе радиосвязи называют радиосигналом. В передающем устройстве высокочастотный сигнал формируется (усиливается, преобразуется, фильтруется) и через линию передачи поступает на вход приемного устройства. Линией передачи называется среда распространения электромагнитных волн, используемая для трансляции сигналов от передающего устройства до приемного.

В проводной системе передачи такой средой называется физическая направляющая система – провода, коаксиальные и другие кабели, оптические волокна (световоды). В системах радиосвязи – это область пространства между передающими и приемными устройствами.

Преобразование исходного сообщения в электрический сигнал и кодирование.

При передаче речи и музыки такое преобразование осуществляется с помощью микрофона, при передаче изображения (телевидение), с помощью передающих телевизионных трубок. При передаче письменного сообщения (радиотелеграфия) сначала осуществляется кодирование - каждая буква заменяется комбинацией стандартных символов (азбука Морзе), которые затем преобразуются в стандартные электрические сигналы, например, импульсы разной длительности или разной полярности (точка, тире).

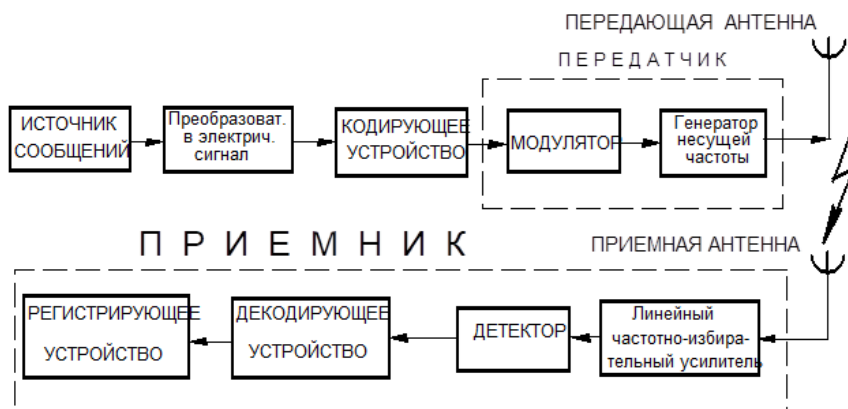


Рисунок 1.1 – Радиотехнический канал связи

Генерация ВЧ колебаний

Высокочастотный генератор является источником колебаний несущей частоты. Основными характеристиками генератора являются: несущая частота, диапазон частот (возможность быстрой перестройки частоты), мощность и КПД. Важное значение для генератора имеет стабильность частоты.

Модуляция

Процесс модуляции заключается в изменении одного или нескольких параметров несущих ВЧ колебаний по закону передаваемого сообщения. Частоты модулирующего колебания, как правило, намного меньше частоты несущего.

Усиление слабых сигналов в приемнике

Антенна приемника улавливает ничтожную долю энергии, от передатчика. В зависимости от расстояния между антеннами, от степени их направленности и условий распространения сигнала уровень сигнала на входе приемника составляет $10^{-10} \div 10^{-14}$ Вт или в относительных единицах $L = 10 \lg 1\text{Вт}/P_{\min} = 100 \div 140$ дБ. На выходе приемника для надежной регистрации требуется мощность $0.1 \div 1$ Вт. Поэтому коэффициент усиления в усилителе приемника должен достигать $90 \div 140$ дБ. Проблема усиления сигнала в приемнике неотделима от выделения полезного сигнала из совокупности сигнала и посторонних воздействий (помех), отличных по частоте от сигнала. Частотная избирательность осуществляется с помощью избирательных цепей. Чтобы получить высокую избирательность нужно иметь высокую стабильность частоты задающего высокочастотного генератора.

Детектирование и декодирование

Детектирование является процессом, обратным модуляции. На выходе детектора получают электрический сигнал, который с определенной точностью копирует

модулирующий сигнал, т.е. восстанавливается передаваемое сообщение. Детектор, как правило, включается на выходе приемника, следовательно, к нему подводится модулированное колебание, уже усиленное предыдущими ступенями приемника. Основное требование к детектору – точное воспроизведение формы сигнала. После детектирования осуществляется декодирование сигнала, т.е. процесс, обратный кодированию.

Кроме перечисленных операций, производимых в радиотехническом канале связи, в ряде случаев используются другие процессы: умножение и деление частоты, генерация коротких импульсов, различные виды импульсной модуляции и т.д.

1.3 Классификация сигналов, используемых в радиотехнике

С информационной точки зрения сигналы можно разделить на детерминированные и случайные.

Детерминированным называют любой сигнал, мгновенное значение которого в любой момент времени можно, предсказать с вероятностью равной единице. Если математическая модель сигнала позволяет осуществить предсказание сигнала, то такой сигнал можно отнести к классу детерминированных сигналов. Способы его задания могут быть разнообразными – математическая формула, вычислительный алгоритм, словесное описание. Примеры детерминированных сигналов: импульсы или последовательности импульсов, форма, амплитуда, положение во времени, которых известны, непрерывный гармонический сигнал или сложный по спектральному составу с заданными фазами и амплитудами.

Случайными называют сигналы, мгновенные значения которых заранее неизвестны и могут быть предсказаны с вероятностью меньшей единицы. Примеры таких сигналов: электрическое напряжение, соответствующее музыке и речи, последовательности знаков телеграфного кода при передаче неповторяющегося текста. К случайному сигналу можно отнести радиоимпульс, отраженный от цели и поступающий на вход радиолокационного приемника. В этом случае можно выделить два элемента случайности:

- 1) амплитуда радиоимпульса и фаза высокочастотного заполнения будут флуктуировать из-за изменения условий распространения радиосигнала;
- 2) параметры радиосигнала будут случайным образом меняться при изменении положения цели. По существу, любой сигнал, несущий в себе информацию, должен рассматриваться как случайным.

Детерминированный сигнал, «полностью известный» информации не содержит. Наряду с полезными случайными сигналами (изменение разности фаз в двухканальном

пеленгаторе в зависимости от угла места цели) в теории и практике приходится иметь дело со случайными сигналами помехами–шумами. Уровень шумов является основным фактором, ограничивающим скорость передачи информации при заданном сигнале. Поэтому изучение случайных сигналов неотделимо от изучения случайных шумов. Полезные случайные сигналы, а также помехи объединяют термином случайные колебания или случайные процессы.

Дальнейшую классификацию сигналов можно связать с их формой или представлением во времени, т.е. рассматривать их как непрерывные функции времени, соответствующие сообщению или как дискретные и закодированные сигналы, например, в двоичном коде. В первом случае под сигналом понимают непрерывно меняющуюся физическую величину – ток, напряжение, заряд по закону сообщения, во втором случае это сообщение содержится в последовательности двоично-кодированных чисел.

Обработка сигналов в виде непрерывных физических процессов осуществляется в виде аналоговых электронных цепей (усилителей, фильтров). Поэтому такие сигналы называю еще аналоговыми или континуальными сигналами.

Обработка сигналов, закодированных в цифру, осуществляется с помощью вычислительной техникой. Такие сигналы мы будем называть цифровыми сигналами.

В зависимости от формы сигналы мы разобьем на следующие классы:

- 1) произвольные по величине и непрерывные во времени;
- 2) произвольные по величине и дискретные во времени;
- 3) квантованные по величине и непрерывные во времени;
- 4) квантованные по величине и дискретные во времени.

Сигналы первого класса мы будем называть аналоговыми или континуальными, так как их можно трактовать как непрерывные модели физических величин, потому что они задаются на временной оси бесчисленным количеством точек. Аналоговые сигналы задаются непрерывной функцией времени $s(t)$, а дискретные сигналы (классы второй, четвертый) дискретной, принимающей только фиксированные значения. В дальнейшем термин дискретный мы будем применять только к дискретизации по времени; дискретность же по уровню будем обозначать термином квантование.

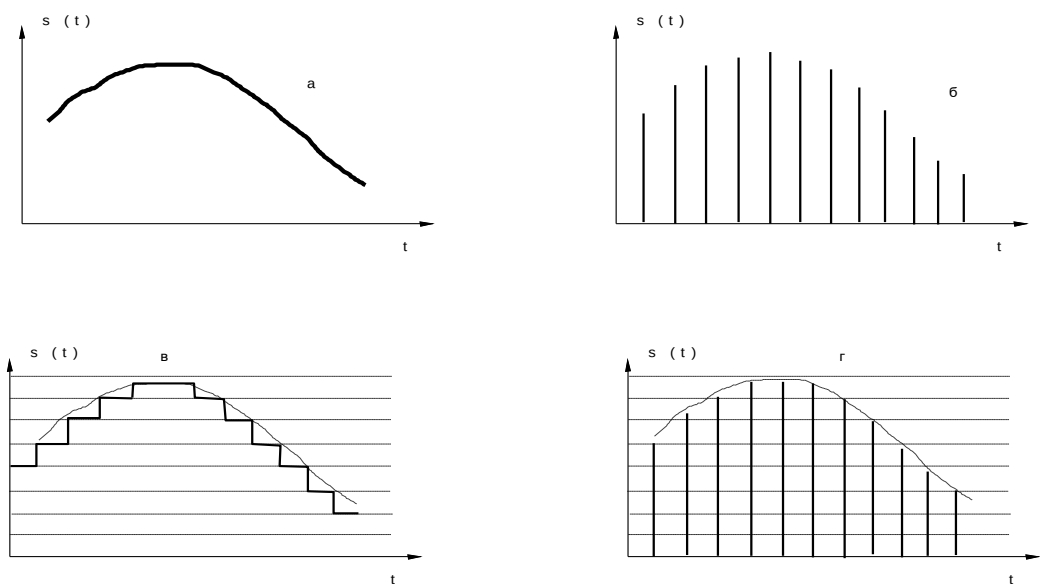


Рисунок 1.2 – Сигналы произвольные по величине и по времени

Квантование используют при представлении сигнала в цифровой форме с помощью цифрового кодирования, поскольку уровни можно пронумеровать числами с конечным числом разрядов. Поэтому дискретный по времени и квантованный по уровню сигнал в дальнейшем мы будем называть **цифровым сигналом**.

Таким образом, различают аналоговые (континуальные), дискретные, квантованные и цифровые сигналы. Им можно сопоставить аналоговые, дискретные и цифровые цепи.

При обработке континуального сигнала с помощью аналоговой цепи не требуется дополнительных преобразований сигнала. При обработке аналогового сигнала в дискретной цепи выполняются два преобразования: дискретизация сигнала по времени на входе дискретной цепи и обратное его преобразование в аналоговый сигнал на выходе дискретной цепи. При цифровой обработке сигнала требуется дополнительно еще два преобразования аналог – цифра: Квантование и цифровое кодирование на входе цифровой цепи и обратное преобразование цифра – аналог, т.е. декодирование и восстановление аналогового сигнала. Цифровая обработка требуют очень высокого быстродействия соответствующих электронных устройств. Поэтому цифровая техника начала развиваться на относительно низких частотах. В настоящее время достижения микроэлектроники способствуют быстрому освоению ВЧ и СВЧ диапазонов.

2 Основные характеристики детерминированных сигналов

2.1 Сигналы, модели сигналов

Детерминированный сигнал можно описать с помощью математической модели. Математическая модель гармонического сигнала выглядит следующим образом:

$$s(t) = U \cos \omega_0 t, \quad s(t) = U \sin \omega_0 t. \quad (2.1)$$

область определения гармонического сигнала – время $t \in (-\infty, \infty)$, ω_0 – угловая частота.

Можно сказать, если математическая модель сигнала позволяет осуществить точное предсказание сигнала, то такой сигнал можно отнести к классу детерминированных сигналов.

Еще примеры математических моделей детерминированных сигналов:
непрерывный сигнал (гауссов импульс):

$$s(t) = U \exp(-a^2 t^2), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (2.2)$$

Непрерывный сигнал (экспоненциальный импульс):

$$s(t) = \begin{cases} U \exp(-at), & t \in [0, \infty), \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Финитный, т.е. сигнал, принимающий отличные от нуля значения на ограниченном интервале времени T (прямоугольный видеоимпульс):

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \\ 0, & t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Финитный, (треугольный видеоимпульс):

$$s(t) = \begin{cases} \frac{U}{T}(t - T), & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Периодический сигнал:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.6)$$

где $r(t)$ – финитный сигнал на интервале;

T – периоде последовательности.

Дискретный сигнал, являющийся последовательностью отсчетов (чисел):

$$s(t) = U \exp(-akt), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Особое место среди математических моделей сигналов занимают модели тестовых сигналов, испытательных или пробных сигналов. Они широко используются в теоретических исследованиях, а приближенно отвечающие им физические (радиотехнические) сигналы – в экспериментальной радиотехнической, измерительной практике при описании разрывных, в частности импульсных сигналов.

Функция включения (единичная ступенчатая функция) или функция Хевисайда

Пусть дан сигнал, математическая модель которого имеет вид

$$s(t) = \begin{cases} 1, t > \xi \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\xi} + 1 \right), -\xi \leq t \leq \xi \\ 0, t < -\xi. \end{cases} \quad (2.7)$$

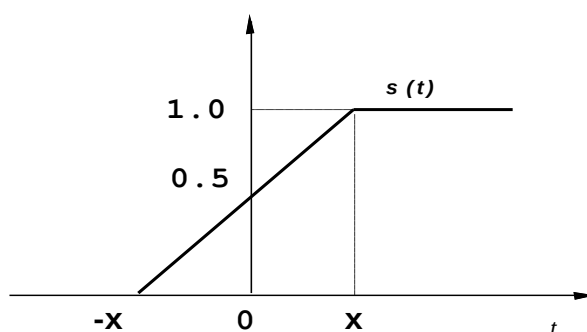


Рисунок 2.1 – Функция Хевисайда
(Оливер Хевисайд (1850-1925) – английский физик)

Такая функция описывает процесс перехода некоторого физического объекта из «нулевого» в «единичное» состояние. Переход совершается по линейному закону за время 2ξ . Если $\xi \rightarrow 0$, то в пределе переход из одного состояния совершится мгновенно. Математическая модель такого предельного сигнала получила название функции включения или функции Хевисайда:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ \frac{1}{2}, t = 0 \\ 0, t < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину t_0 :

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1, t > t_0 \\ \frac{1}{2}, t = t_0 \\ 0, t < t_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Приведенный здесь способ определения функции включения не является единственно возможным. Например, следующая функция с ростом номера n все более точно аппроксимируют разрывный сигнал, испытывающий единичный скачок при $t = 0$:

$$U_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)} . \quad (2.10)$$

Важнейшим тестовым радиотехническим сигналом является дельта-функция или функция Дирака. Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы, состоящий из двух симметрично смещенных функций включения:

$$s(t, \xi) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right]. \quad (2.11)$$

При любом выборе параметра ξ площадь этого импульса равна единице, т.е.:

$$\ddot{I}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \xi) dt = 1.$$

При $\xi \rightarrow 0$ импульс сокращает свою длительность, сохраняя свою площадь, поэтому его амплитуда должна неограниченно возрастать. Предел последовательности подобных функций при $\xi \rightarrow 0$ носит названия дельта-функция или функция Дирака.

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} s(t, \xi). \quad (2.12)$$

Особенность этой функции заключается в том, что будучи равной нулю, за исключением одной точки, где она максимально, т.е. сосредоточена, она, тем не менее, обладает единичным интегралом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.13)$$

Дельта функция является математической моделью короткого внешнего воздействия с единичной площадью. Кроме рассмотренных представлений существует еще ряд представлений дельта-функции, например:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n/(2\pi)} \exp(-nt^2/2). \quad (2.14)$$

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin nt / (\pi t)]. \quad (2.15)$$

С ростом параметра n длительность импульса сокращается, а его амплитуда возрастает.

Функция $\delta(t)$ относится к так называемым обобщенным, символическим функциям. С ее помощью, например, определяют не существующую в классическом смысле производную функции Хевисайда:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t). \quad (2.16)$$

В свою очередь, функция Хевисайда (2.8) может быть на основании (2.16) определена так:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Тестовыми являются гармонический сигнал и гармоническая (квазигармоническая) функция включения $s(t) = U \cos \omega_0 t$, $t > 0$, которую, используя функцию Хевисайда, можно записать как $s(t) = U \sigma(t) \cos \omega_0 t$.

Радиосигналом – называют сигнал, модель которого удобно представлять в форме:

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t) + \phi_0] = u(t) = U(t) \cos \psi(t). \quad (2.18)$$

Выделяют *огибающую* $U(t)$, *полную фазу* радиосигнала $\psi(t)$ и фазовую функцию $\phi(t)$. Частоту $\omega_0 = 2\pi f_0$ называют *несущей частотой*. Используя модель (2.18), обычно предполагают, что огибающая $U(t)$ и фазовая функция $\phi(t)$ изменяются за время $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (период несущей частоты) незначительно (если это предположение не выполняется, то может оказаться удобнее иная форма представления сигнала).

Очевидно, что представления многих сигналов могут рассматриваться как частные случаи выражения (2.18), например, при $U(t) = U = \text{const}$, или при $\omega_0 = 0$, или при $\phi(t) = 0$ и т.д. В последнем случае, т.е. если $\phi(t) = 0$, то ϕ_0 называют начальной фазой.

Простейшим радиосигналом является гармоническая функция (2.1). Если огибающая $U(t)$ – финитная функция, то радиосигнал (2.18) называют радиоимпульсом, огибающую $U(t)$ – соответствующим ему видеоимпульсом, а ω_0 – частотой заполнения радиоимпульса (при $\phi(t) = \phi_0$).

Выбрав в качестве огибающей прямоугольный видеоимпульс (2.4) и положив $\phi(t) = \phi_0 = 0$, получим радиосигнал в виде прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} U \cos \omega_0 t, & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \\ 0, & t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Если огибающая $U(t)$ — непрерывная функция, определенная на интервалах $t \in (-\infty, \infty)$ или $t \in [0, \infty)$, то ее иногда называют видеосигналом, соответствующим радиосигналу (2.18).

2.2 Динамическое представление сигналов

При вычислении отклика радиотехнической системы на известное входное воздействие необходимо не только располагать информацией о мгновенном значении сигнала, но и знать его поведение на всей временной оси, как в «прошлом», так и в «будущем». В этом случае используют специфическое представление сигнала. Реальный аналоговый сигнал представляется суммой некоторых элементарных сигналов, сдвинутых по оси времени на элементарный интервал. Если этот интервал $\Delta \rightarrow 0$, то в пределе будет получено точное представление сигнала. Этот способ описания сигнала назовем динамическим представлением сигнала.

Широко применяются два способа динамического представления сигнала. В первом используются ступенчатые функции, сдвинутые на интервал времени Δ . Высота ступеньки равна приращению сигнала на интервале времени Δ . При втором способе элементарным сигналом служат прямоугольные импульсы.

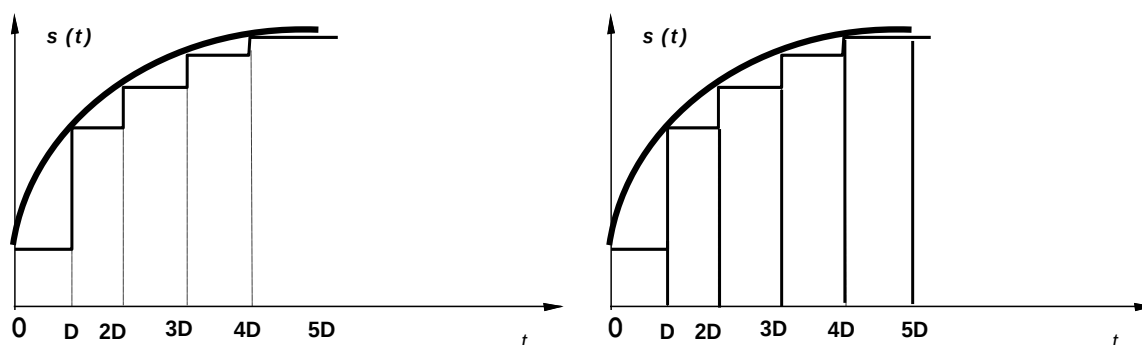


Рисунок 2.2 – Способы динамического представления сигнала

2.2.1 Динамическое представление сигнала с помощью функций Хевисайда

Рассмотрим сигнал $s(t)$, который в области $s(t)$ при $t < 0$ равен нулю. В заданной области заданный сигнал $s(t)$ представим в виде суммы смещенных на величину функций включения $\sigma(t-k\Delta)$, где k – целое число, тогда:

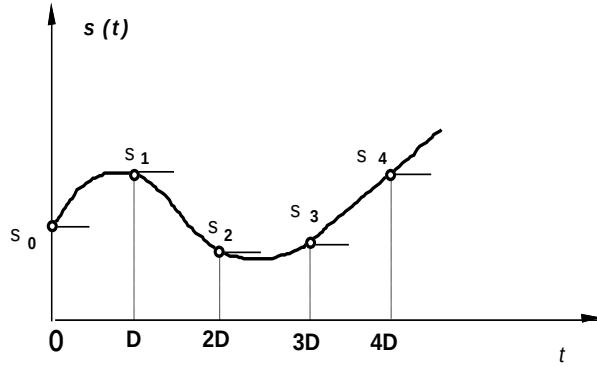


Рисунок 2.3 – Динамическое представление сигнала функциями включения

$$s(t) \approx s_0 \sigma(t) + (s_1 - s_0) \sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1) \sigma(t - 2\Delta) + \dots = s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \sigma(t - k\Delta). \quad (2.20)$$

Если теперь шаг устремить к нулю, то дискретную переменную $k\Delta$ можно заменить на непрерывную τ . При этом бесконечно малые приращения $s_k - s_{k-1}$ можно заменить на дифференциалы $ds = (ds/d\tau)d\tau$. В результате мы получаем формулу динамического представления произвольного сигнала с помощью функций Хевисайда:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (2.21)$$

2.2.2 Динамическое представление сигнала с помощью дельта функций

Вернемся к задаче описания аналогового сигнала суммой примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (рисунок 2.2). Если s_k – значение сигнала на k -м отсчете, то элементарный импульс с номером k представляется так:

$$\eta_k(t) = s_k [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)]. \quad (2.22)$$

В соответствии с принципом динамического представления исходный сигнал $s(t)$ должен рассматриваться как сумма таких элементарных слагаемых, т. е.:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \quad (2.23)$$

В этой сумме отличным от нуля будет только один член, отвечающий тому номеру k , который удовлетворяет неравенству $t_k < t < t_{k+1}$.

Если подставить (2.22) в (2.23), предварительно разделив и умножив на величину шага Δ , получим

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \Delta . \quad (2.24)$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)] \Delta = \delta(t - \tau) . \quad (2.25)$$

Заменяя суммирование интегрированием по формальной переменной τ , получим искомую формулу динамического представления сигнала:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau . \quad (2.26)$$

Из этого выражения следует важное свойство дельта-функции: *ее физическая размерность такая же, как и размерность частоты*, т.е. сек⁻¹.

Если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен δ -импульс. Здесь проявляется *фильтрующее свойство* дельта-функции.

Отсюда вытекает структурная схема системы, осуществляющей измерение мгновенных значений аналогового сигнала $s(t)$. Система состоит из двух звеньев: перемножителя и интегратора. Ясно, что измерение величины $s(\tau)$ будет тем точнее, чем короче тот реальный сигнал (например, прямоугольный видеоимпульс), который приближенно представляет дельта-функцию.

3 Гармонический анализ

Для анализа сигналов очень важны методы представления математической модели сигнала в виде разложения ее в функциональный ряд. Функциональные ряды широко используются при решении многих задач физики и математики. Тригонометрический, гармонический ряд или ряд Фурье занимает среди них особое место. Для радиотехнических приложений важность разложения сигнала по ортogonalной гармонической системе функций определяется, в частности, тем, что:

- во-первых, такое разложение оказывается, *безусловно применимым* как для сигналов, модели которых заданы единым аналитическим выражением, так и для сигналов, кусочно-заданных несколькими аналитическими выражениями;

- во-вторых, характером преобразования, которое претерпевает сигнал при прохождении через стационарную линейную (например, RLC) цепь; как известно, выходным сигналом в этом случае является гармонический сигнал с той же круговой частотой ω_0 , отличающийся от входного амплитудой и фазовым сдвигом.

Если разложение входного сигнала по ортogonalной системе тригонометрических функций известно, то выходной сигнал может быть получен как сумма независимо преобразованных цепью входных гармоник.

3.1. Обобщенные функции как математические модели сигналов

В классической математике полагают, что функция $s(t)$ должна принимать какие-то значения в каждой точке оси t . Однако рассмотренная дельта-функция не вписывается в эти рамки – ее значение при $t = 0$ не определено вообще, хотя эта функция и имеет единичный интеграл. Очевидна необходимость расширить само понятие функции как математической модели сигнала. В современной математике для этих целей вводится понятие обобщенной функции.

В основе идеи обобщенной функции лежит простое интуитивное соображение. Держа в руках и рассматривая какой-нибудь предмет, мы его поворачиваем, стремясь получить множество проекций этого объекта на всевозможные плоскости. Аналогом «проекции» исследуемой функции $f(t)$ может служить, например, значение интеграла:

$$(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt \quad (3.1)$$

при этом известную функции $\phi(t)$, называют пробной функцией.

Каждой функции $\varphi(t)$ отвечает, в свою очередь, некоторое конкретное числовое значение (f, φ) . Поэтому говорят, что формула (3.1) задает некоторый функционал на множестве пробных функций $\varphi(t)$. Непосредственно видно, что данный функционал линеен, т.е.:

$$(f, a\phi_1 + \beta\phi_2) = a(f, \phi_1) + \beta(f, \phi_2). \quad (3.2)$$

Если этот функционал к тому еще и непрерывен, то говорят, что на множестве пробных функций $\varphi(t)$ задана обобщенная функция $f(t)$. Интеграл в правой части выражения (3.1) нужно понимать формально, а не как предел соответствующих интегральных сумм. Именно с таких позиций следует рассматривать формулу динамического представления (2.26):

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Обобщенные функции, даже не заданные явными выражениями, обладают многими свойствами классических функций. Так, обобщенные функции можно дифференцировать. Для этого следует принять во внимание, что пробные функции $\varphi(t)$ являются финитными, т.е. обращаются в нуль вне конечного отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$. Тогда производная df/dt обобщенной функции $f(t)$ задается функционалом:

$$(f', \phi) = f(t)\phi(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi'(t) dt = -(f, \phi'). \quad (3.3)$$

В качестве примера найдем производную функции Хевисайда, рассматривая последнюю как обобщенную функцию. Здесь:

$$(\sigma', \phi) = -(\sigma, \phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t) dt = (\delta, \phi). \quad (3.4)$$

Поэтому:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t). \quad (3.5)$$

причем это равенство необходимо понимать именно в смысле теории обобщенных функций, поскольку в классическом смысле производная $\sigma'(t)$ при $t = 0$ просто не существует.

Таким же образом можно определить и производную дельта-функции:

$$(\delta', \phi) = -(\delta, \phi') = -\phi'(0). \quad (3.6)$$

Хотя явная формула для $\delta'(t)$ отсутствует, такой математический объект существует и действует по правилу – каждой классической функции $\varphi(t)$ он сопоставляет числовое значение ее производной в нуле с точностью до знака. В настоящее время теория обобщенных функций получила широкое развитие и многочисленные применения. На ее

основе созданы математические методы изучения процессов, для которых средства классического анализа оказываются недостаточными.

3.2. Геометрические методы в теории сигналов

При решении многих теоретических и прикладных задач радиотехники возникают такие вопросы: 1) в каком смысле можно говорить о величине сигнала, утверждая, например, что один сигнал значительно превосходит другой; 2) можно ли объективно оценивать, насколько два неодинаковых сигнала «похожи» друг на друга?

В XX в. был создан функциональный анализ – раздел математики, обобщающий наши интуитивные представления о геометрической структуре пространства. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию сигналов, в основе которой лежит концепция сигнала как вектора в специальном образом сконструированном бесконечномерном пространстве.

Линейное пространство сигналов. Пусть $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots\}$ – множество сигналов. Причина объединения этих объектов – наличие некоторых общих свойств, для всех элементов множества M .

Пример 3.1. Множество M образовано всевозможными аналоговыми сигналами, отличными от нуля на интервале времени $(0, 15 \text{ мкс})$ и равными нулю вне этого интервала.

Пример 3.2. Множество M состоит из сигналов вида $s_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi_n)$ – гармонических колебаний, отличающихся своими амплитудами, частотами и начальными фазами.

Исследование свойств сигналов, образующих такие множества, становится особенно полезным, когда удается выражать одни элементы множества через другие элементы.

Электрические колебания (сигналы) могут складываться, умножаться на произвольный масштабный коэффициент. Это позволяет для множества сигналов ввести *линейное пространство*.

Множество сигналов M образует вещественное линейное пространство, если справедливы следующие аксиомы:

1. Любой сигнал $u(t) \in M$ при любых t принимает лишь вещественные значения.
2. Для любых $u(t) \in M$ и $v(t)$ существует их сумма, $w = u + v$, причем w также содержится в M . Операция суммирования коммутативна: $u + v = v + u$ и ассоциативна: $u + (v + x) = (u + v) + x$.

3. Для любого сигнала $s(t) \in M$ и любого вещественного числа a определен сигнал $f(t) = as(t) \in M$.

4. Множество M содержит особый нулевой элемент 0 , такой, что $u + 0 = u$ для всех $u(t) \in M$.

Если математические модели сигналов принимают комплексные значения, то, допуская в аксиоме 3 умножение на комплексное число, приходим к понятию *комплексного линейного пространства*.

Введение структуры линейного пространства, является первым шагом на пути к геометрической трактовке сигналов. Элементы линейных пространств часто называют *векторами*, подчеркивая аналогию свойств этих объектов и обычных трехмерных векторов. Ограничения, налагаемые аксиомами линейного пространства, весьма жестки. Далеко не каждое множество сигналов оказывается линейным пространством.

Понятие координатного базиса.

Как и в обычном трехмерном пространстве, в линейном пространстве сигналов можно выделить специальное подмножество, играющее роль координатных осей.

Говорят, что совокупность векторов $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, принадлежащих множеству M , является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_i a e_i = 0. \quad (3.7)$$

выполняется лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов a_i .

Система линейно независимых векторов образует *координатный базис* в линейном пространстве.

Если дано разложение некоторого сигнала $s(t)$ в виде

$$s(t) = \sum_i c_i e_i, \quad (3.8)$$

то числа $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ являются *проекциями* сигнала $s(t)$ относительно выбранного базиса.

В теории сигналов число базисных векторов, как правило, неограниченно велико. Такие линейные пространства называют *бесконечномерными*. Естественно, что теория этих пространств не может быть вложена в формальную схему линейной алгебры, где число базисных векторов всегда конечно.

Нормированное линейное пространство. Энергия сигнала.

Для того чтобы продолжить и углубить геометрическую трактовку теории сигналов, необходимо ввести новое понятие, которое по своему смыслу соответствует длине вектора.

Это позволит не только придать точный смысл высказыванию вида «первый сигнал больше второго», но и указать, на сколько он больше.

Длину вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов L является *нормированным*, если каждому вектору $s(t) \in L$ однозначно сопоставлено число $\|s\|$ – норма этого вектора, причем выполняются следующие аксиомы нормированного пространства:

1. Норма неотрицательна, т. е. $\|s\| \geq 0$. Норма $\|s\| = 0$ тогда и только тогда, если $s = 0$;
2. Для любого числа a справедливо равенство $\|as\| = |a| \|s\|$;
3. Если $s(t)$ и $p(t)$ – два вектора из L , то выполняется неравенство треугольника: $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$.

Приведенные аксиомы относятся как к аналоговым, так и к дискретным сигналам

Можно предложить разные способы введения нормы сигналов. В радиотехнике для вещественных аналоговых сигналов норма определяется следующим образом

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} . \quad (3.9)$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное). Для комплексных сигналов норма

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t) dt} . \quad (3.10)$$

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt . \quad (3.11)$$

Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 Ом, если на его зажимах существует напряжение $s(t)$.

Если сигнал дискретен, то операция интегрирования должна быть заменена суммированием по всем отсчетам сигнала

Определять норму сигнала с помощью формулы (3.9) целесообразно по следующим причинам:

1. В радиотехнике о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например, количества теплоты, выделяемой в резисторе.

2. Энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, которые могут быть значительными, но происходящим на коротких отрезках времени.

Линейное нормированное пространство с конечной величиной нормы вида (3.9) носит название *пространства функций с интегрируемым квадратом* и кратко обозначается L_2 .

Метрическое пространство.

Теперь необходимо ввести еще одно фундаментальное понятие, которое обобщало бы наше обычное представление о расстоянии между точками в пространстве. Говорят, что линейное пространство L становится *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $u, v \in L$ сопоставлено неотрицательное число $p(u, v)$, называемое метрикой, или расстоянием между этими элементами.

Метрика, независимо от способа ее определения, должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

1. $p(u, v) = p(v, u)$.
2. $p(u, u) = 0$ при любых $u \in L$.
3. Каков бы ни был элемент $w \in L$, всегда $p(u, v) \leq p(u, w) + p(w, v)$.

Обычно метрику определяют, как норму разности двух сигналов:

$$p(u, v) = \|u - v\|. \quad (3.12)$$

Норму, в свою очередь, можно понимать, как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом: $\|u\| = p(u, 0)$.

Зная метрику, можно судить, например, о том, насколько хорошо один из сигналов аппроксимирует другой.

Пример 3.3. Сигнал $u(t)$ представляет собой отрезок синусоиды, обращаемой в нуль на концах отрезка $[0, T]$. Высота импульса U известна. Выбрать амплитуду A прямоугольного импульса $u(t)$ той же длительности так, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным.

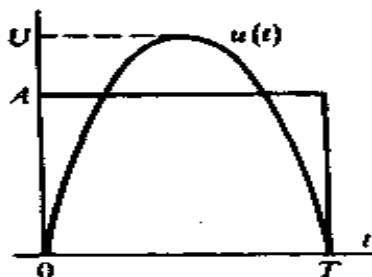


Рисунок 3.1 – Сигнал примера 3.3

Сигнал $u(t)$ представляется формулой:

$$u(t) = U \sin(\pi t/T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Квадрат расстояния между сигналами:

$$p^2(u, v) = \int_0^T (U \sin \frac{\pi t}{T} - A)^2 dt.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$p^2(u, v) = U^2 T/2 - 4AUT/\pi + A^2 T.$$

Исследуя это выражение на экстремум, убеждаемся, что минимум расстояния будет достигнут, если $A = 2U/\pi \approx 0.63717$. При этом:

$$p_{\min}^2 = U^2 T(1/2 - 4/\pi^2) \approx 0.095 U^2 T, \quad p_{\min} \approx 0.308 U \sqrt{T},$$

Заметим, что энергия синусоидального импульса:

$$E_U = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{U^2 T}{2}.$$

его норма $\|u\| = 0.707 U \sqrt{T}$.

Итак, при выбранной метрике минимально достижимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.

3.3 Теория ортогональных сигналов

Введя в множестве сигналов понятие линейного пространства, определив норму и метрику, мы, тем не менее, лишены возможности вычислить такую характеристику, как угол между двумя векторами. Это удастся сделать, сформулировав важное понятие скалярного произведения элементов линейного пространства.

Скалярное произведение сигналов.

Напомним, что если в обычном трехмерном пространстве известны два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, то квадрат модуля их суммы

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A}, \vec{B}), \quad (3.13)$$

где $(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \psi$ – скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла ψ между ними.

Действуя по аналогии, вычислим энергию суммы двух сигналов u и v :

$$E = - \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt. \quad (3.14)$$

В отличие от самих сигналов их энергии неаддитивные – энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую взаимную энергию

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt.$$

Сравнивая между собой формулы (3.13) и (3.14), определим *скалярное произведение* вещественных сигналов u и v :

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt. \quad (3.15)$$

а также косинус угла между ними:

$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (3.16)$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $(u, v) = 0$ (3.17)
2. $(u, v) = (v, u)$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$, где λ – вещественное число;
4. $(u+v, w) = (v, w) + (uw)$.

Линейное пространство с таким скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства, называется *вещественным гильбертовым пространством H* .

Справедливо фундаментальное неравенство Коши-Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (3.18)$$

Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить комплексное гильбертово пространство, введя в нем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt. \quad (3.19)$$

такое, что $(u, v) = (v, u)^*$.

Лекция №3

Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.

Два сигнала u и v называются ортогональными, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt = 0. \quad (3.20)$$

Пусть H – гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени $[t_1, t_2]$ конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$; ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (3.21)$$

Говорят, что при этом в пространстве сигналов задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал $s(t) \in H$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i. \quad (3.22)$$

Представление (3.22) называется обобщенным рядом Фурье сигнала $s(t)$ в выбранном базисе.

Коэффициенты данного ряда находят следующим образом. Возьмем базисную функцию u_k с произвольным номером k , умножим на нее обе части равенства (3.22) и затем проинтегрируем результаты по времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k. \quad (3.23)$$

В виду ортонормированности базиса в правой части равенства (3.23) останется только член суммы с номером $i=k$, поэтому

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k dt = (s, u_k). \quad (3.24)$$

Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом большого принципиального значения. Вместо того чтобы изучать функциональную зависимость в несчетном множестве точек, мы получаем возможность характеризовать эти сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье c_k .

Энергия сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье.

Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, разложенный в ряд по ортонормированной базисной системе:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t).$$

и вычислим его энергию, непосредственно подставив этот ряд в соответствующий интеграл:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j u_i u_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j \int_{t_1}^{t_2} u_i u_j dt. \quad (3.25)$$

Поскольку базисная система функций ортонормированная, в сумме (3.25) отличными от нуля окажутся только члены с номерами $i=j$. Отсюда получается замечательный результат:

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2. \quad (3.26)$$

Смысл этой формулы таков: энергия сигнала есть сумма энергий всех компонент, из которых складывается обобщенный ряд Фурье.

Оптимальность разложения сигнала по ортогональному базису.

Для сигнала $s(t)$ введем конечномерную аппроксимацию:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^N c_k u_k(t).$$

с неизвестными пока коэффициентами c_k и выберем эти коэффициенты так, чтобы минимизировать энергию ошибки аппроксимации:

$$\mu = \|s - \tilde{s}\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (s - \sum_{k=0}^N c_k u_k)^2 dt = \min. \quad (3.27)$$

Необходимое условие минимума состоит в том, что коэффициенты должны удовлетворять системе линейных уравнений:

$$\frac{\partial \mu}{\partial c_m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.28)$$

В развернутой форме энергия ошибки аппроксимации:

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} [s^2 - 2s \sum_{k=0}^N c_k u_k + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i c_j u_i u_j] dt.$$

Поскольку рассматриваемая базисная система функций ортогональна, отсюда следует, что:

$$\frac{\partial \mu}{\partial c_m} \int_{t_1}^{t_2} (c_m^2 u_m^2 - 2s c_m u_m) dt = 0.$$

Приняв во внимание единичную норму базисных функций, приходим к выводу, что равенства (3.28) будут выполняться, если

$$c_m = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_m(t) dt.$$

что полностью совпадает с выражением (3.24) для коэффициентов обобщенного ряда Фурье.

Более тщательный анализ (на нем здесь не останавливаемся), когда рассматривается также вторая производная энергии ошибки, показывает, что при разложении сигнала в обобщенный ряд Фурье обеспечивается не просто экстремум, а именно минимум энергии ошибки аппроксимации.

Напомним в заключение, что гильбертово пространство сигналов, по определению, обладает важным свойством полноты: если предельное значение суммы:

$$s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N c_k u_k(t).$$

существует, то этот предел сам является некоторым элементом гильбертова пространства.

В полном функциональном пространстве норма ошибки аппроксимации монотонно убывает с ростом N – числом учитываемых членов ряда. Выбирая N достаточно большим, всегда можно снизить норму ошибки до любой приемлемо малой величины.

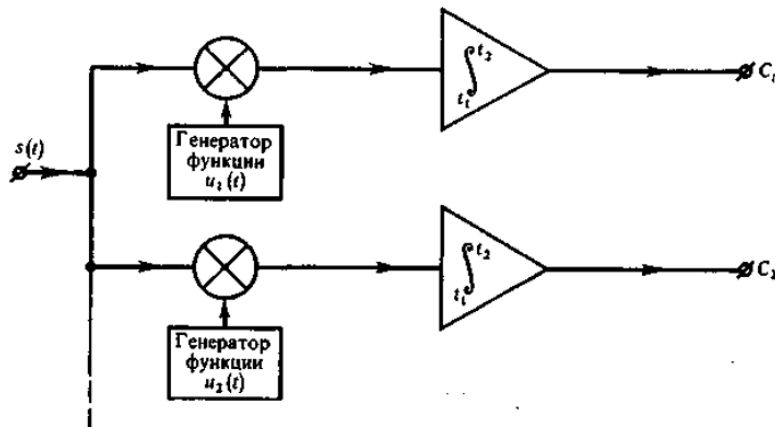


Рисунок 3.2 – Структурная схема устройства для аппаратного анализа сигналов

Рассмотрим структурную схему устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций (рисунок 3.2). Основными элементами здесь являются генераторы тех базисных функций, по которым проводится разложение. Анализируемый сигнал

одновременно подается на совокупность множительных звеньев, осуществляющих перемножение этого сигнала и соответствующей базисной функции. С выходов перемножителей сигналы поступают на интеграторы. При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени уровень, величина которого в соответствии с формулой (3.24) в точности равна тому или иному коэффициенту обобщенного ряда Фурье. Ясно, что работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удастся воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования перемножителей и интеграторов. Система, изображенная на рисунке 3.2, важна и в прикладном, и в теоретическом смысле. Анализируя ее, еще раз убеждаемся, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел.

4 Спектральные представления сигналов

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисов для представления радиотехнических сигналов, исключительное место занимают гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Значение гармонических сигналов для радиотехники обусловлено рядом причин:

1. Гармонические сигналы инвариантны относительно преобразований осуществляемых стационарными линейными электрическими цепями. Если такая цепь возбуждена источником гармонических колебаний, то сигнал на выходе цепи остается гармоническим с той же частотой, отличаясь от входного сигнала лишь амплитудой и начальной фазой.

2. Техника генерирования гармонических сигналов относительно проста

Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено спектральное разложение этого сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его спектр.

4.1 Периодические сигналы и ряды Фурье

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодический сигнал $s(t)$ со следующим свойством:

$$s(t) = s(t \pm nT), n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

где T – период сигнала.



Рисунок 4.1 – Примеры периодических сигналов

Ставится задача найти спектральное разложение такого сигнала.

Ряд Фурье. Зададим на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ ортонормированный базис, образованный гармоническими функциями с кратными частотами:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, u_1 = \sqrt{2/T} \sin 2\pi t/T,$$

$$u_2 = \sqrt{2/T} \cos 2\pi t/T, u_3 = \sqrt{2/T} \sin 4\pi t/T, \quad (4.2)$$

$$u_4 = \sqrt{2/T} \cos 4\pi t/T, u_5 = \sqrt{2/T} \sin 6\pi t/T.$$

Любая функция u_m из этого базиса удовлетворяет условию периодичности (4.1). Поэтому, выполнив ортогональное разложение сигнала $s(t)$ в этом базисе, т.е. вычислив коэффициенты

$$c_m = (s, u_m), \quad (4.3)$$

разложение

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(t). \quad (4.4)$$

справедливое на всей бесконечности оси времени.

Ряд вида (4.4) называется рядом Фурье данного сигнала.

Введем основную $\omega_1 = 2\pi/T$ последовательности, образующей периодический сигнал. Вычисляя коэффициенты разложения по формуле (4.3), запишем ряд Фурье для периодического сигнала

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)), \quad (4.5)$$

с коэффициентами:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad (4.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

Итак, в общем случае периодический сигнал содержит не зависящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник с частотами $\omega_n = n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), кратными основной частоте последовательности.

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой A_n и начальной фазой φ_n . Для этого коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде

$$a = A_n \cos \varphi_n, b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

так что

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \operatorname{tg} \varphi_n = b_n/a_n.$$

Подставив эти выражения в (4.5), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (4.7)$$

которая иногда оказывается удобнее.

Спектральная диаграмма периодического сигнала.

Так принято называть графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы (рисунок 4.2).

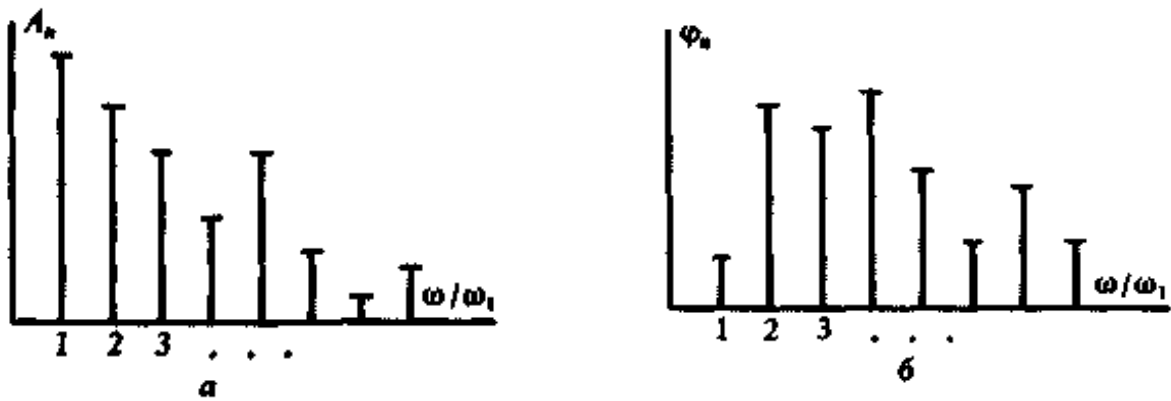


Рисунок 4.2 – Спектральные диаграммы некоторого периодического сигнала: а - амплитудная, б – фазовая

Здесь по горизонтальной оси в некотором масштабе отложены частоты гармоник, а по вертикальной оси представлены их амплитуды и начальные фазы.

Особо интересуются амплитудной диаграммой, которая позволяет судить о процентном содержании тех или иных гармоник в спектре периодического сигнала.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 4.1 Ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов $s(t)$ с известными параметрами τ_n , T , A четной относительно точки $t = 0$. В радиотехнике отношение $q = T/\tau_n$ называют скважностью последовательности. По формулам (4.6) находим:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q},$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau_n}{2}.$$

Окончательную формулу ряда Фурье удобно записать в виде

$$s(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos n\omega_1 t \right].$$

На рисунке 4.3 представлены амплитудные диаграммы рассматриваемой последовательности в двух крайних случаях. Важно отметить, что последовательность коротких импульсов, следующих друг за другом достаточно редко ($q \gg 1$), обладает богатым спектральным составом.



Рисунок 4.3 – Амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов: а – при большой скважности, б – при малой скважности

Комплексная форма ряда Фурье.

Спектральное разложение периодического сигнала можно выполнить и несколько по-иному, используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(ik\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.8)$$

Легко видеть, что функции этой системы периодичны с периодом T и ортонормированы на отрезке времени $[-T/2, T/2]$, так как

$$(u_n, u_m) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}.$$

Ряд Фурье произвольного периодического сигнала в данном случае принимает вид

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}.$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt.$$

Обычно используют следующую форму записи:

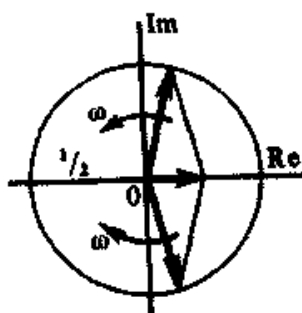
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}, \quad (4.9)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt. \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. Спектр сигнала в соответствии с формулой (4.9) содержит компоненты на отрицательной полуоси, причем спектр сигнала в соответствии с формулой (4.9) содержит компоненты на отрицательной полуоси частот, причем $C_{-n} = C_n^*$. В ряде (4.9) слагаемые с положительными и отрицательными частотами объединяются в пары, например:

$$C_n e^{in\omega_1 t} + C_{-n} e^{-in\omega_1 t} = |C_n| e^{i(n\omega_1 t + \varphi_n)} + |C_n| e^{-i(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Положительной частоте соответствует вектор, вращающийся против часовой стрелки, а отрицательной частоте – вектор, вращающийся по часовой стрелке.



Итак, отрицательная частота – понятие математическое, вытекающее из способа представления комплексных чисел.

Изображение периодического сигнала на комплексной плоскости.

Структура ряда Фурье (4.9) дает возможность изобразить периодический сигнал посредством бесконечной суммы вращающихся векторов на комплексной плоскости (рисунок 4.3). Построение осуществляется следующим образом. Из начала координат комплексной плоскости (точка 0) строят вещественный вектор C_0 , который отображает член с номером $n = 0$. Затем в формуле (4.9) полагают $t = 0$ и строят суммы векторов

$$C_+ = C_1 + C_2 + C_3 + \dots,$$

$$C_- = C_{-1} + C_{-2} + C_{-3} + \dots,$$

отвечающие вкладу слагаемых с положительными и отрицательными частотами. Если ряд Фурье сходится, то каждая из сумм отображается вектором конечной длины. Как указывалось, коэффициенты ряда Фурье с положительными и отрицательными частотами комплексно сопряжены, поэтому вектор $C_+ + C_-$ всегда вещественный.

Будучи сложен с постоянной составляющей C_0 , он образует вектор, длина которого равна $s(0)$ – значению сигнала в начальный момент времени.

Для сходимости ряда Фурье необходимо, чтобы длины символических векторов, отвечающих высшим гармоникам, достаточно быстро уменьшались с ростом их номеров.

В дальнейшем картина трансформируется – векторы $C_1, C_2, \dots$, соответствующие положительным частотам, вращаются с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots$ в сторону увеличения фазового угла, в то время как векторы $C_{-1}, C_{-2}, \dots$ вращаются в противоположном направлении. Конец результирующего вектора в каждый момент времени определяет текущее значение сигнала.

Такая наглядная интерпретация спектрального разложения периодического сигнала будет использована в последующем параграфе.

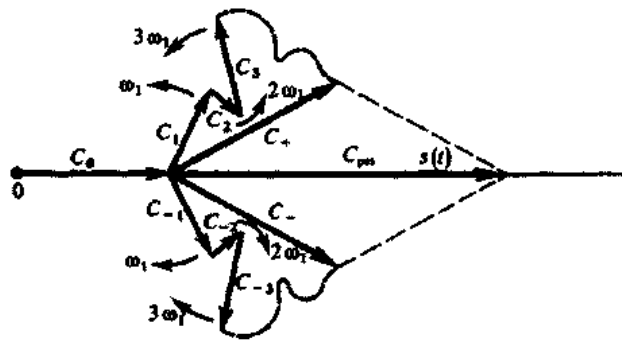


Рисунок 4.3 – Графическое отображение ряда Фурье в комплексной форме

Лекция №4

4.2 Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье

Метод рядов Фурье допускает глубокое обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Среди последних для радиотехники наибольший интерес представляют импульсные сигналы.

Периодическое продолжение импульса.

Пусть $s(t)$ – одиночный импульсный сигнал конечной длительности. Дополнив его мысленно такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , получим изученную ранее периодическую последовательность $s_{\text{пер}}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье

$$s_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}, \quad (4.11)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega_1 t} dt. \quad (4.12)$$

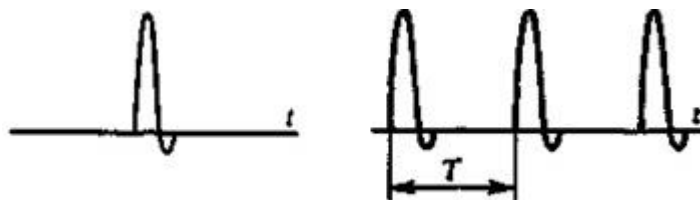


Рисунок 4.4 – Периодическое продолжение импульса

Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, устремим к бесконечности период повторения T . При этом, очевидно:

1. Частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n+1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах (4.11) и (4.12) дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить непрерывной ω – текущей частотой.

2. Амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченными малыми из-за наличия величины T в знаменателе формулы (4.12).

Наша задача состоит теперь в нахождении предельного вида формулы (4.12) при $T \rightarrow \infty$.

Понятие спектральной плотности сигнала.

Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_n e^{i\varphi_n}, C_{-n} = A_n e^{-i\varphi_n}.$$

Каждой такой паре отвечает гармоническое колебание

$$A_n e^{i(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-i(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

с комплексной амплитудой $A_n e^{i\varphi_n} = 2C_n$.

Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты ω_0 . В пределах этого интервала будет содержаться $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому составляющие можно складывать так, как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами:

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega_0 t} dt. \quad (4.13)$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega_0 t} dt. \quad (4.14)$$

Функция:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.15)$$

носит название спектральной плотности сигнала $s(\omega)$. Формула (4.15) осуществляет преобразование Фурье данного сигнала.

Физический смысл понятия спектральной плотности.

Интерпретацию полученных результатов удобно провести, перейдя от угловой частоты ω к циклической частоте $f = \omega/(2\pi)$. При этом формула (4.14) приобретет вид:

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0) \Delta f. \quad (4.16)$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ есть коэффициент пропорциональности между длиной малого интервала частот Δf и отвечающей ему комплексной амплитудой $2A_{f_0}$ гармонического сигнала с частотой f_0 . Коэффициент 2 означает, что вклад в амплитуду дают в равной мере и положительные и отрицательные частоты, образующие окрестности точек $\pm f_0$.

Принципиально важно, что спектральная плотность – комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. На векторной диаграмме непериодического сигнала (рисунок 4.6) длины элементарных векторов бесконечно малы, поэтому вместо ломаных линий (T конечно) получаются гладкие кривые ($T \rightarrow \infty$). Если на оси частот взять некоторую последовательность равноотстоящих точек $0 < \omega_1 < \omega_2 \dots$, то модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ установит линейный масштаб вдоль кривых: чем больше модуль спектральной плотности в заданной области частот, тем реже будут располагаться частотные точки на векторной диаграмме.

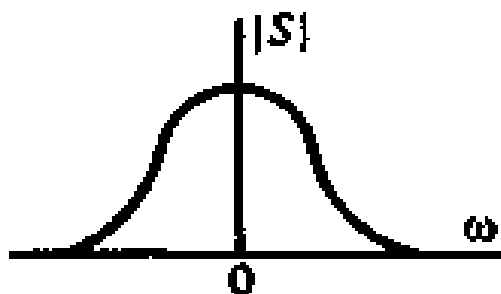


Рисунок 4.5 – Спектральная плотность одиночного сигнала

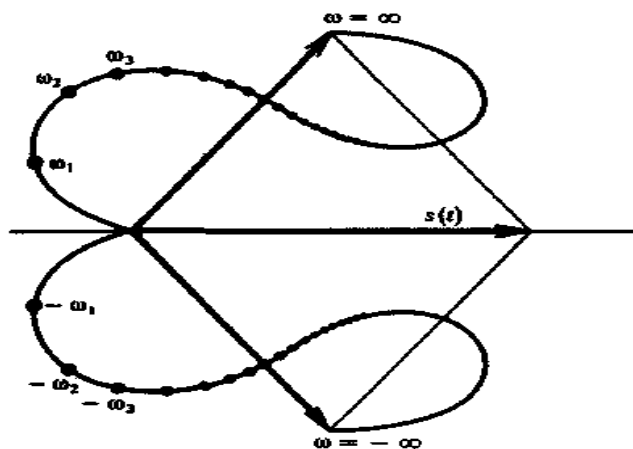


Рисунок 4.6 – Векторная диаграмма непериодического сигнала

Данная диаграмма построена для некоторого фиксированного момента времени; с течением времени конфигурация кривых будет изменяться весьма сложным образом, поскольку, чем выше частота, тем с большей угловой скоростью будут вращаться соответствующие участки кривых. Однако фактически важна не форма кривой, а лишь проекция на горизонтальную ось ее конечной точки (рисунок 4.6).

Обратное преобразование Фурье.

Решим обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной.

Вновь предположим, что непериодический сигнал получается из периодической последовательности, когда ее период устремляется к бесконечности. Воспользовавшись формулами (4.11) и (4.12), запишем

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{in\omega_1 t}.$$

Входящий сюда коэффициент $1/T$ пропорционален разности между частотами соседних гармоник:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

при любом целом n . Таким образом,

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{in\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками неограниченно сокращаются, последнюю сумму следует заменить интегралом:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.17)$$

Эта важная формула называется обратным преобразованием Фурье для сигнала $s(t)$.

Сформулируем окончательно фундаментальный результат: сигнал $S(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Метод спектральных разложений чрезвычайно обогащает теорию сигналов. Например, часто математическая модель сигнала, представленная функцией $s(t)$, т.е. во временной области сложна и недостаточно наглядна. В то же время описание этого сигнала в частотной области посредством функции $S(\omega)$ может оказаться простым. Однако гораздо важнее другое: спектральное представление сигналов открывает прямой путь к анализу прохождения сигналов через широкий класс радиотехнических цепей, устройств и систем.

Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса.

Пусть данный сигнал $s(t)$ имеет амплитуду U , длительность τ и располагается симметрично относительно начала отсчета времени. На основании формулы (4.15):

$$\begin{aligned} S(\omega) &= U \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{-i\omega t} dt = U \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} (\cos \omega t - i \cdot \sin \omega t) dt = 2U \int_0^{\tau_i/2} \cos \omega t dt = \\ &= \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_i}{2}. \end{aligned}$$

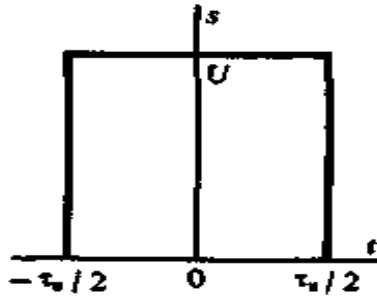


Рисунок 4.7 – Прямоугольный одиночный сигнал

Спектральная плотность рассматриваемого сигнала есть вещественная функция частоты. Удобно ввести безразмерную переменную $\xi = \omega \tau_i / 2$ и окончательно представить результат так:

$$S(\xi) = U \tau_i \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (4.19)$$

Отметим, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса: $S(0) = U \tau_i$. График, построенный по формуле (4.19), изображен на рисунке 4.8.

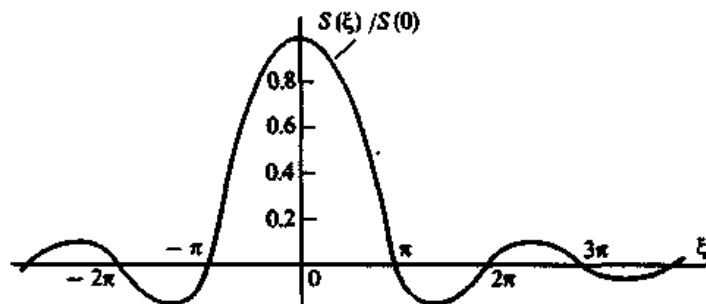


Рисунок 4.8 – График нормированной спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функция параметра $\xi = \omega \tau_i / 2$

Спектральная плотность дельта-функции.

Пусть сигнал $s(t)$ представляет собой короткий импульс, сосредоточенный в точке $t = 0$ и имеющий площадь A . Такой сигнал имеет математическую модель $s(t) = A \delta(t)$. Спектральная плотность этого сигнала

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \delta(t) dt.$$

На основании фильтрующего свойства дельта-функции входящий сюда интеграл численно равен значению классической функции в точке, где сосредоточена обобщенная функция. Поэтому

$$S(\omega) = A = \text{const} . \quad (4.20)$$

Итак, дельта-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах. Интересно интерпретировать этот результат на векторной диаграмме. В момент возникновения импульса ($t = 0$) все элементарные гармонические составляющие складываются когерентно, поскольку в соответствии с (4.20) спектральная плотность вещественна. Амплитуды этих составляющих при увеличении частоты не убывают (по сравнению с предыдущими примерами). Таким образом, при $t = 0$ наблюдается бесконечно большое значение сигнала.

Во все другие моменты времени сигнал будет обращаться в нуль, так как векторная сумма (см. рисунок 4.6) «свертывается» в точку.

Связь между длительностью импульса и шириной его спектра.

Если проанализировать частные случаи, изученные выше, то можно сделать очень важный вывод: чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр. Под шириной спектра здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например, изменяется в пределах от $|S|_{\max}$ до $0.1|S|_{\max}$.

Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс, полагая при этом, что верхняя граничная частота спектра $\omega_{\text{в}}$ – это частота, соответствующая первому нулю спектральной плотности. Нетрудно видеть, что

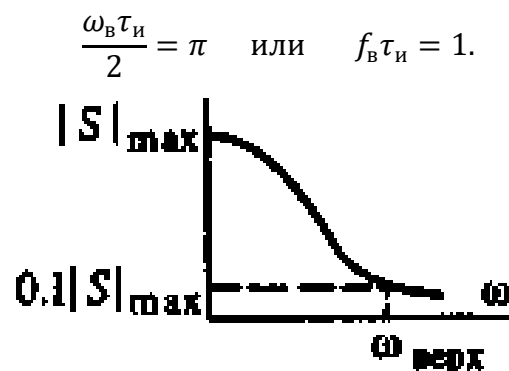


Рисунок 4.9 – Модуль спектральной плотности одиночного прямоугольного видеоимпульса

Итак, произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы:

$$f_{\text{в}} \tau_{\text{и}} = 1.$$

Это соотношение имеет первостепенное значение для радиотехники. Оно определяет требования к ширине полосы пропускания радиотехнического устройства. Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего усилителя. Короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать условия радиоприема в значительной полосе частот.

4.3 Основные свойства преобразования Фурье

Научившись вычислять спектральные плотности достаточно простых, но часто встречающихся импульсных сигналов, перейдем к систематическому изучению свойств преобразования Фурье.

Линейность преобразования Фурье.

Это важнейшее свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$, $\dots$, причем $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$..., то взвешенная сумма сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega). \quad (4.21)$$

где a_i – произвольные числовые коэффициенты.

Для доказательства формулы (4.21) следует подставить сумму сигналов в преобразование Фурье (4.15).

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности.

Пусть $s(t)$ – сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - i \cdot B(\omega).$$

Подставим это выражение в формулу обратного преобразования Фурье (4.17):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - i \cdot B(\omega)] (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) d\omega.$$

Для того чтобы сигнал, полученный путем такого двукратного преобразования, оставался вещественным, необходимо потребовать, чтобы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) dt = 0.$$

Это возможно лишь в том случае, если вещественная часть $A(\omega)$ спектральной плотности сигнала есть четная, а мнимая часть $B(\omega)$ – нечетная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega), B(\omega) = -B(-\omega). \quad (4.22)$$

Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени.

Предположим, что для сигнала $s(t)$ известно соответствие $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на t_0 секунд позднее. Принимая точку t_0 за новое начало отсчета времени, обозначим этот смещенный сигнал как $s(t - t_0)$. Покажем, что

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega) \exp(-i\omega t_0). \quad (4.23)$$

Доказательство очень простое. Действительно,

$$s(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-i\omega x} e^{-i\omega t_0} dx = S(\omega) e^{-i\omega t_0}.$$

Модуль комплексного числа $\exp(-i\omega t_0)$ при любых t_0 равен единице, поэтому амплитуды элементарных гармонических составляющих, из которых складывается сигнал, не зависят от его положения на оси времени. Информация об этой характеристике сигнала заключена в частотной зависимости аргумента его спектральной плотности (фазовом спектре).

Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени

Предположим, что исходный сигнал $s(t)$ подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени t играет новая независимая переменная kt (k — некоторое вещественное число). Если $k > 1$, то происходит «сжатие» исходного сигнала; если же $0 < k < 1$, то сигнал «растягивается» во времени.

Оказывается, что если $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$s(kt) \leftrightarrow 1/k S(\omega/k). \quad (4.24)$$

Действительно,

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-i\frac{\omega}{k} x} dx = \frac{1}{k} S(\omega/k).$$

откуда следует формула (4.24).

Итак, для того чтобы, например, сжать сигнал во времени, сохраняя его форму, необходимо распределить те же спектральные составляющие в более широком интервале частот при соответствующем пропорциональном уменьшении их амплитуд.

К рассматриваемому здесь вопросу близко примыкает следующая задача. Дан импульс $s(t)$ отличный от нуля на отрезке $[0, \tau_n]$ и характеризуемый спектральной плотностью $S(\omega)$. Требуется найти спектральную плотность $S_{обр}(\omega)$ «обращенного во времени» сигнала $s_{обр}(t)$ который представляет собой «зеркальную копию» исходного импульсного колебания. Поскольку очевидно, что $s_{обр}(t) = s(\tau_n - t)$, то

$$s_{обр}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_n - t) \exp(-i\omega t) dt .$$

Выполнив замену переменной $x = \tau_n - t$, находим, что

$$s_{обр}(\omega) = e^{-i\omega\tau_n} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{i\omega x} dx = e^{-i\omega\tau_n} s(-\omega) = e^{-i\omega\tau_n} s^*(\omega) . \quad (4.25)$$

Лекция №5

Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла.

Пусть сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ заданы. Будем изучать новый сигнал $f(t) = ds/dt$ и поставим цель найти его спектральную плотность $F(\omega)$. По определению:

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \tau)}{\tau} . \quad (4.26)$$

Преобразование Фурье – линейная операция, значит, равенство (4.26) справедливо и по отношению к спектральным плотностям. Учитывая (4.23), получаем

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-i\omega\tau)}{\tau} S(\omega) . \quad (4.27)$$

Представляя экспоненциальную функцию рядом Тейлора: $\exp(-i\omega\tau) = 1 - i\omega\tau - (\omega\tau)^2/2 - \dots$, подставляя этот ряд в (4.27) и ограничиваясь первыми двумя членами, находим

$$F(\omega) = i\omega S(\omega) . \quad (4.28)$$

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает. Как следствие модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем спектра исходного сигнала.

Формула (4.28) обобщается на случай спектра производной n -го порядка. Легко доказать, что если $g(t) = d^n s/dt^n$, то

$$G(\omega) = (i\omega)^n S(\omega) . \quad (4.29)$$

Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $i\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $i\omega$ является оператором дифференцирования, действующим в частотной области.

Рассмотренная функция $s(t) = \int f(t)dt$ является первообразной (неопределенным интегралом) по отношению к функции $f(t)$. Из (4.28) формально следует, что спектр первообразной:

$$S(\omega) = F(\omega)/(i\omega) . \quad (4.30)$$

Таким образом, множитель $1/(i\omega)$ служит оператором интегрирования в частотной области.

Спектральная плотность сигнала на выходе интегратора.

Во многих радиотехнических устройствах находят применения, так называемые интеграторы – физические системы, выходной сигнал которых пропорционален интегралу от входного воздействия. Рассмотрим конкретно интегратор, осуществляющий преобразование входного сигнала $s_{\text{вх}}(t)$ в выходной сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ по следующему закону:

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^T s_{\text{вх}}(\xi) d\xi. \quad (4.31)$$

где $T > 0$ – фиксированный параметр.

Определенный интеграл, входящий в (4.31), равен, очевидно, разности двух значений первообразной сигнала $s_{\text{вх}}(t)$ одно из которых вычисляется при аргументе t , а другое – при аргументе $t - T$. Используя соотношения (4.23) и (4.30) получаем формулу связи между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = \frac{S_{\text{вх}}(\omega)}{i\omega T} [1 - \exp(-i\omega T)]. \quad (4.32)$$

Сомножитель в скобках ограничен при любых частотах, в то же время модуль знаменателя линейно растет с увеличением частоты. Это свидетельствует о том, что рассматриваемый интегратор действует подобно фильтру нижних частот, ослабляя высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала.

Спектральная плотность произведения сигналов.

Как известно, при суммировании сигналов их спектры складываются. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – два сигнала, для которых известны соответствия $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$, $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$. образуем произведение этих сигналов: $s(t) = u(t) v(t)$ и вычислим его спектральную плотность. По общему правилу

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (4.33)$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $v(t)$ через его спектральную плотность и подставив результат в (4.33):

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) e^{i\xi t} d\xi \right] e^{-i\omega t} dt.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i(\omega-\xi)t} dt \right] d\xi$$

откуда

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi. \quad (4.34)$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют сверткой функций V и U . В дальнейшем будем символически обозначать операцию свертки так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi = V(\omega) * U(\omega). \quad (4.35)$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(\omega) * U(\omega). \quad (4.36)$$

Нетрудно убедиться, что операция свертки коммутативна, т. е. допускает изменение порядка следования преобразуемых функций:

Доказанная выше теорема о свертке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения $S(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$, причем $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$ и $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$, то сигнал $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ является сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ уже не в частотной, а во временной области:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi) s_2(\xi) d\xi. \quad (4.37)$$

Элементарное доказательство этой формулы вы сможете провести самостоятельно.

4.4 Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

Математические модели многих сигналов, широко применяемых в радиотехнике, не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости, поэтому метод преобразований Фурье в обычном виде к ним неприменим. Однако, как указывалось, можно говорить о спектральных плотностях таких сигналов, если допустить, что эти плотности описываются обобщенными функциями.

Обобщенная формула Рэлея.

Докажем важное вспомогательное положение, касающееся спектральных свойств сигналов. Пусть два сигнала $u(t)$ и $v(t)$, в общем случае комплекснозначные, определены своими обратными преобразованиями Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) U e^{i\omega t} d\omega,$$
$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) U e^{i\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение этих сигналов, выразив один из них, например $v(t)$, через его спектральную плотность $V(\omega)$:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Здесь внутренний интеграл представляет собой, очевидно, спектральную плотность $U(\omega)$ сигнала $u(t)$. Поэтому

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V). \quad (4.38)$$

Полученное соотношение представляет собой *обобщенную формулу Рэлея*. Легко запоминающаяся трактовка этой формулы такова: скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Дж. В. Стретт, Фурье; лорд Рэлей (1842-1919) крупнейший английский физик, известный своими работами в области теории колебаний и волн. В математике обобщенную формулу Рэлея называют также равенством Парсеваля или теоремой Планшереля.

Обобщение понятия спектральной плотности.

Будем считать, что сигнал $v(t)$ представляет собой абсолютно интегрируемую функцию. Тогда его преобразование Фурье $V(\omega)$ – обычная классическая функция частоты. Пусть наряду с этим сигнал $u(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и в обычном классическом смысле преобразование Фурье $U(\omega)$ не существует. Однако, можно расширить понятие спектральной плотности, допустив, что $U(\omega)$ является обобщенной функцией в том смысле, который был установлен нами раньше. Для этого в соответствии с

обобщенной формулой Рэлея достаточно положить, что $U(\omega)$ – функционал, который, действуя на известную функцию $V(\omega)$, дает следующий результат:

$$(U, V) = 2\pi(u, v). \quad (4.39)$$

Приемы вычисления спектров неинтегрируемых сигналов целесообразно рассмотреть на конкретных примерах.

Спектральная плотность постоянного во времени сигнала.

Простейший неинтегрируемый сигнал это постоянная величина $u(t) = A = \text{const.}$ Предположим, что $v(t)$ – произвольный вещественный абсолютно интегрируемый сигнал с известной спектральной плотностью $V(\omega)$. Раскрывая формулу (4.39), имеем:

$$(U, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt.$$

Но, как легко заметить,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i0t} dt = V(0).$$

Отсюда на основании фильтрующего свойства дельта-функции приходим к выводу, что равенство (4.39) возможно лишь при условии, что

$$U(\omega) = 2\pi A \delta(\omega). \quad (4.40)$$

Физический смысл полученного результата нагляден – неизменный во времени сигнал имеет спектральную составляющую только на нулевой частоте.

Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала.

Пусть $s(t) = \exp(i\omega_0 t)$ – комплексный экспоненциальный сигнал с заданной вещественной частотой ω_0 . Этот сигнал не является абсолютно интегрируемым, поскольку при $t \rightarrow \infty$ функция $s(t)$ не стремится ни к какому пределу. Преобразование Фурье $S(\omega)$ этого сигнала, рассматриваемое в обобщенном смысле, должно удовлетворять соотношению

$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i\omega_0 t} dt = 2\pi V(\omega_0).$$

Отсюда искомая спектральная плотность $S(\omega)$ выражается таким образом:

$$S(\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0). \quad (4.41)$$

Отметим следующее:

1. Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала равна нулю всюду, кроме точки $\omega = \omega_0$, где она имеет дельта - особенность.

2. Спектр данного сигнала несимметричен относительно точки $\omega = 0$ и сосредоточивается в области либо положительных, либо отрицательных частот.

Спектральная плотность гармонических колебаний.

Пусть $s(t) = \cos \omega_0 t$. По формуле Эйлера:

$$S(t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}.$$

Найденный выше спектр комплексного экспоненциального сигнала, а также свойство линейности преобразования Фурье позволяют сразу записать выражение спектральной плотности косинусоидального сигнала:

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (4.42)$$

Действуя аналогично, вы легко можете проверить самостоятельно, что для синусоидального сигнала справедливо соотношение:

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -i\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (4.43)$$

Следует заметить, что выражение (4.42) представляет собой четную, а выражение (4.43) – нечетную функцию частоты.

Спектральная плотность произвольного периодического сигнала.

Ранее периодические сигналы исследовались методами теории рядов Фурье. Теперь можно расширить представления об их спектральных свойствах, описав периодические сигналы с помощью преобразования Фурье.

Пусть:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t}.$$

– периодический сигнал, заданный своим рядом Фурье в комплексной форме. На основании формулы (4.41), принимая во внимание свойство линейности преобразования Фурье сразу получаем выражение спектральной плотности такого сигнала:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1). \quad (4.44)$$

Соответствующий график спектральной плотности своей конфигурацией повторяет обычную спектральную диаграмму периодического сигнала. График образован дельта-импульсами в частотной области, которые располагаются в точках с координатами $\pm n\omega_1$.

Спектральная плотность функции включения.

Вычислим спектральную плотность функции включения $\sigma(t)$ которую для простоты определим во всех точках, кроме точки $t=0$ [ср. с (2.7)]:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Заметим, прежде всего, что функция включения получается путем предельного перехода из экспоненциального видеоимпульса:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp(-\alpha t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Поэтому можно попытаться получить спектральную плотность функции включения, выполнив предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в формуле спектральной плотности экспоненциального колебания:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

Непосредственный переход к пределу, согласно которого $\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{i\omega}$, справедлив на всех частотах, кроме значения $\omega = 0$, когда необходимо более подробное рассмотрение.

Прежде всего, выделим в спектральной плотности экспоненциального сигнала вещественную и мнимую части:

$$\frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Можно убедиться в том, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega).$$

Действительно, предельное значение этой дроби при любых $\omega \neq 0$ обращается в нуль, и в то же время

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi.$$

независимо от величины α , откуда и следует сделанное утверждение.

Итак, получено взаимно однозначное соответствие функции включения и ее спектральной плотности:

$$\delta(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \quad (4.45)$$

Дельта-особенность при $\omega \rightarrow 0$ свидетельствует о том, что функция включения имеет постоянную составляющую, равную $1/2$.

Лекция №6

Спектральная плотность радиоимпульса.

Как известно, радиоимпульс $s_p(t)$ задается в виде произведения некоторого видеоимпульса $S_B(f)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания $s_p(t) = S_B(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Чтобы найти спектральную плотность радиоимпульса, будем полагать известной функцию $S_B(\omega)$ – спектр его огибающей. Спектр косинусоидального сигнала с произвольной начальной фазой получается путем элементарного обобщения формулы (4.42):

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0)e^{i\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-i\varphi_0}].$$

Спектр радиоимпульса есть свертка

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_B(\omega - \xi) [\delta(\xi - \omega_0)e^{i\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0)e^{-i\varphi_0}] d\xi.$$

Приняв во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем важный результат:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} S_B(\omega - \omega_0)e^{i\varphi_0} + \frac{1}{2} S_B(\omega + \omega_0)e^{-i\varphi_0}. \quad (4.46)$$

Рисунок 4.10 иллюстрирует трансформацию спектра видеоимпульса при умножении его на высокочастотный гармонический сигнал.

Видно, что переход от видеоимпульса к радиоимпульсу при спектральном подходе означает перенос спектра видеоимпульса в область высоких частот – вместо единственного максимума спектральной плотности при $\omega=0$ наблюдаются два максимума при $\omega = \pm \omega_0$; абсолютные значения максимумов сокращаются вдвое.

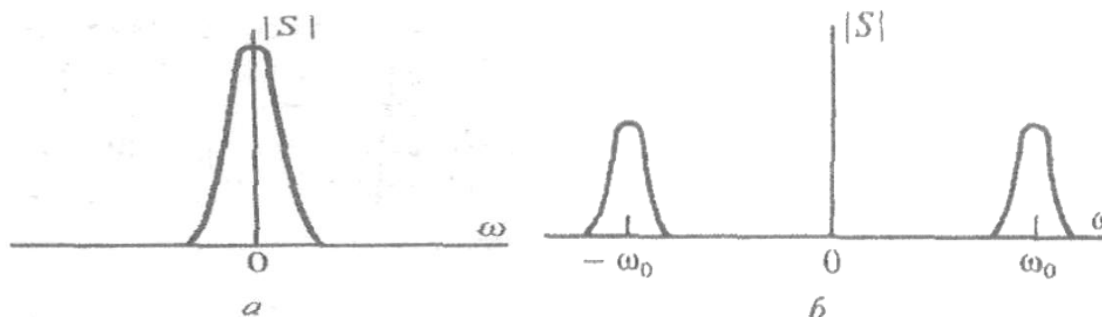


Рисунок 4.10 – Спектральная плотность радиоимпульса

Отметим, что графики на рисунке 4.10 отвечают ситуации, когда частота ω_0 значительно превышает эффективную ширину спектра видеоимпульса (именно такой случай

обычно и реализуется на практике). При этом не наблюдается ощутимого «перекрывания» спектров, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Однако может оказаться, что ширина спектра видеоимпульса велика настолько (при коротком импульсе), что выбранное значение частоты ω_0 не устраняет эффект «перекрывания». Как следствие, профили спектров видеоимпульса и радиоимпульса перестают быть подобными.

Пример 4.2 Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса.

Для простоты положим начальную фазу нулевой и запишем математическую модель радиоимпульса в виде:

$$s_p(t) = U[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})] \cos \omega_0 t.$$

Зная спектр соответствующего видеоимпульса [см. формулу (4.19)], на основании (4.46) находим искомый спектр:

$$S_p(\omega) = \frac{\omega \tau_{\text{и}}}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \tau_{\text{и}}}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \tau_{\text{и}}}{2}} \right]. \quad (4.47)$$



Рисунок 4.11 – Спектральные плотности радиоимпульсов для различных случаев

На рисунке 4.11 изображены результаты расчета спектральной плотности по формуле (4.47) для двух характерных случаев.

В первом случае (рисунок 4.10,а) импульс огибающей содержит 10 периодов высокочастотного заполнения ($\omega_0 \tau_{\text{и}} = 20\pi$); частота ω_0 здесь достаточно высока для того, чтобы избежать «перекрывания». Во втором случае (рисунок 4.11, б) радиоимпульс состоит всего лишь из одного периода заполнения ($\omega_0 \tau_{\text{и}} = 2\pi$). Наложение составляющих, которые соответствуют областям положительных и отрицательных частот, приводит к характерной асимметрии лепестковой структуры графика спектральной плотности радиоимпульса.

4.5. Преобразование Лапласа

Так называется еще один вид интегральных преобразований, который наряду с преобразованием Фурье широко используется в радиотехнике для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов.

Понятие комплексной частоты.

Спектральные методы, как уже известно, основаны на том, что исследуемый сигнал представляется в виде суммы неограниченно большого числа элементарных слагаемых, каждое из которых периодически изменяется во времени по закону $\exp(i\omega t)$.

Естественное обобщение этого принципа заключено в том, что вместо комплексных экспоненциальных сигналов с чисто мнимыми показателями вводят в рассмотрение экспоненциальные сигналы вида $\exp(pt)$, где p – комплексное число: $p = \sigma + i\omega$, получившее название комплексной частоты. Из двух таких комплексных сигналов можно составить вещественный сигнал, например, по следующему правилу:

$$s(t) = \frac{1}{2}(e^{pt} + e^{p^*t}). \quad (4.48)$$

где $p^* = \sigma - i\omega$ – комплексно-сопряженная величина. Действительно, при этом

$$s(t) = e^{\sigma t} \frac{(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t. \quad (4.49)$$

В зависимости от выбора вещественной и мнимой частей комплексной частоты можно получить разнообразные вещественные сигналы. Так, если $\sigma=0$, но $\omega \neq 0$, получаются обычные гармонические колебания вида $\cos \omega t$. Если же $\omega=0$, то в зависимости от знака σ получаются либо нарастающие, либо убывающие во времени экспоненциальные колебания. Более сложную форму такие сигналы приобретают, когда $\omega \neq 0$. Здесь множитель $\exp(\sigma t)$ описывает огибающую, которая экспоненциально изменяется во времени. Некоторые типичные сигналы изображены на рисунке 4.12.

Понятие комплексной частоты оказывается весьма полезным, прежде всего потому, что это дает возможность, не прибегая к обобщенным функциям, получать спектральные представления сигналов, математические модели которых неинтегрируемы. Существенно и другое соображение: экспоненциальные сигналы вида (4.49) служат «естественным» средством исследования колебаний в разнообразных линейных системах.

Следует обратить внимание на то, что истинная физическая частота ω служит мнимой частью комплексной частоты.

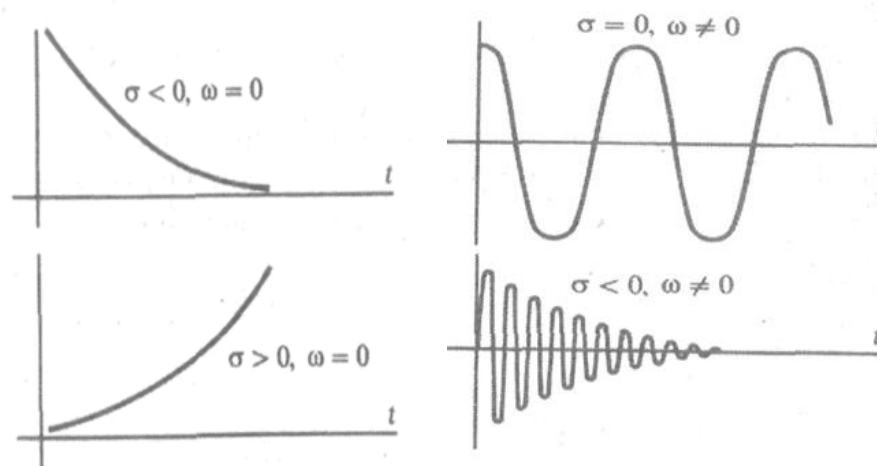


Рисунок 4.12 – Вещественные сигналы, отвечающие различным значениям комплексной частоты

Основные соотношения.

Пусть $f(t)$ – некоторый сигнал, вещественный или комплексный, определенный при $t > 0$ и равный нулю при отрицательных значениях времени. Преобразование Лапласа этого сигнала есть функция комплексной переменной p , задаваемая интегралом:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (4.50)$$

Сигнал $f(t)$ называется оригиналом, а функция $F(p)$ – его изображением по Лапласу (для краткости, просто изображением).

Условие, которое обеспечивает существование интеграла (4.50), заключается в следующем: сигнал $f(t)$ должен иметь не более чем экспоненциальную степень роста при $t > 0$, т.е. должен удовлетворять неравенству $|f(t)| \leq A \exp(at)$, где A, a – положительные числа.

При выполнении этого неравенства функция $F(p)$ существует в том смысле, что интеграл (4.50) абсолютно сходится для всех комплексных чисел p , у которых $\text{Re}(p) > a$. Число a называют абсциссой абсолютной сходимости.

Переменная p в основной формуле (4.50) может быть отождествлена с комплексной частотой $p = \sigma + i\omega$. Действительно, при чисто мнимой комплексной частоте, когда $\sigma = 0$, формула (4.50) переходит в формулу (4.15), определяющую Фурье-преобразование сигнала, который равен нулю при $t < 0$. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот.

Подобно тому, как это делается в теории преобразования Фурье, можно, зная изображение, восстановить оригинал. Для этого в формуле обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

следует выполнить аналитическое продолжение, перейдя от мнимой переменной $i\omega$ к комплексному аргументу $\sigma + i\omega$. На плоскости комплексной частоты интегрирование проводят вдоль неограниченно протяженной вертикальной оси, расположенной правее абсциссы абсолютной сходимости. Поскольку при $\sigma = \text{const}$ дифференциал $d\omega = (1/i)dp$, формула обратного преобразования Лапласа приобретает вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (4.51)$$

В теории функций комплексного переменного доказано, что изображения по Лапласу обладают «хорошими» свойствами с точки зрения гладкости: такие изображения во всех точках комплексной плоскости p , за исключением счетного множества так называемых особых точек, являются аналитическими функциями. Особые точки, как правило, – полюсы, однократные или многократные. Поэтому для вычисления интегралов вида (4.51) можно использовать гибкие методы теории вычетов.

На практике широко применяются таблицы преобразований Лапласа, в которых собраны сведения о соответствии между оригиналами и изображениями. Наличие таблиц сделало метод преобразования Лапласа популярным как в теоретических исследованиях, так и в инженерных расчетах радиотехнических устройств и систем.

Примеры вычисления преобразований Лапласа.

В способах вычисления изображений есть много общего с тем, что уже изучалось применительно к преобразованию Фурье. Рассмотрим наиболее характерные случаи.

Пример 4.3 Изображение обобщенного экспоненциального импульса.

Пусть $f(t) = \exp(p_0 t) \sigma(t)$, где $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$ – фиксированное комплексное число. Наличие σ – функции обуславливает равенство $f(t) = 0$ при $t < 0$. Воспользовавшись формулой (4.50), имеем:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = - \frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Если $\text{Re } p > p_0$, то числитель обратится в нуль при подстановке верхнего предела. В результате получаем соответствие:

$$e^{p_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - p_0}. \quad (4.52)$$

Как частный случай формулы (4.52), можно найти изображение вещественного экспоненциального видеоимпульса:

$$e^{at}\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + a}. \quad (4.53)$$

и комплексного экспоненциального сигнала:

$$e^{i\omega_0 t}\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - i\omega_0}. \quad (4.54)$$

Наконец, положив в (4.53) $a = 0$, находим изображение функции Хевисайда:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (4.55)$$

Пример 4.4 *Изображение дельта-функции.*

Если рассматриваемый импульс возникает в момент времени $t_0 > 0$, то интеграл:

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}.$$

Итак:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0}. \quad (4.56)$$

Это изображение определено во всех точках комплексной плоскости p и нигде не имеет особенностей, кроме бесконечно удаленной точки.

Некоторую сложность может представлять вычисление изображения дельта-импульса, сосредоточенного при $t = 0$, поскольку неясно, как надо учитывать вклад от обобщенной функции, сосредоточенной на одном из концов области интегрирования. Дело в том, что в разделе 2 дельта-функция определялась как предел последовательности импульсов, симметричных относительно точки $t = 0$. Если поступать формально, то в пределах области интегрирования окажется лишь половина такого импульса, что приведет к двукратному уменьшению интеграла. Для того чтобы этого не произошло, изображение функции $\delta(t)$ определяется как предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0-\varepsilon}^{\infty} \delta(t) e^{pt} dt = 1.$$

не зависящий от параметра ε . При таком подходе функция $\delta(t)$ всегда целиком принадлежит области интегрирования, поэтому:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1. \quad (4.57)$$

Изображение производных.

Чтобы найти изображение первой производной сигнала, следует выполнить интегрирование по частям:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt .$$

Легко видеть, что изображение первой производной содержит значение сигнала в начальной точке:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0) . \quad (4.58)$$

По индукции доказывается формула для изображения производной n -го порядка:

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) .$$

Возможность учитывать начальное состояние сигнала при $t = 0$ позволяет применять метод преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с известными начальными условиями.

5 Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные цепи

Системы, применяемые для обработки, преобразования и передачи сигналов, весьма разнообразны по принципам внутреннего устройства и внешним характеристикам. Для того чтобы их можно было сравнивать и классифицировать, сформулируем исходные понятия.

5.1. Физические системы и их математические модели

Радиотехническое устройство независимо от своего назначения и уровня сложности представляет собой систему, т.е. совокупность физических объектов, между которыми существуют определенные взаимодействия. В структуре системы можно выделить *вход*, на который подается исходный сигнал, и *выход*, откуда снимается преобразованный сигнал. Если интересуются лишь связью между сигналами на входе и выходе и не описывают внутренние процессы в системе, то говорят, что система представляет «черный ящик».

Системные операторы.

В наиболее простом случае входной сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, так и выходной сигнал $u_{\text{вых}}(t)$, называемый также *откликом* или *выходной реакцией* мы, описываются одиночными функциями времени. В более общем случае входной сигнал представляется в виде m -мерного вектора,

$$\vec{U}_{\text{вх}}(t) = \{u_{\text{вх}1}(t), u_{\text{вх}2}(t), \dots, u_{\text{вх}m}(t)\}.$$

а выходной сигнал – в виде n -мерного вектора

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \{u_{\text{вых}1}(t), u_{\text{вых}2}(t), \dots, u_{\text{вых}n}(t)\}.$$

Закон связи между сигналами $\vec{U}_{\text{вх}}(t)$ и $\vec{U}_{\text{вых}}(t)$ задают системным оператором T , результатом воздействия которого на сигнал $\vec{U}_{\text{вх}}(t)$ служит сигнал $\vec{U}_{\text{вых}}(t)$:

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = T \vec{U}_{\text{вх}}(t). \quad (5.1)$$

Пример 5.1. Предположим, что некоторая система преобразует одномерный входной сигнал по закону:

$$u_{\text{вых}}(t) = 15 du_{\text{вх}}(t) / dt.$$

В данном случае системный оператор может быть записан так: $T = 15d/dt$. Из этого выражения непосредственно вытекает структурная схема системы, образованная каскадным соединением масштабного звена (идеального усилителя) и дифференциатора.

Чтобы полностью определить задачу, следует указать также область $D_{\text{вх}}$ некоторого функционального пространства, которая называется областью допустимых входных воздействий. Задание этой области описывает характер входных сигналов, которые могут быть непрерывными или дискретными, детерминированными или случайными. Подобным же образом должна быть указана область $D_{\text{вых}}$ допустимых выходных сигналов.

В настоящей главе рассматриваются только системы, на которые воздействуют аналоговые сигналы.

Математической моделью системы называют совокупность системного оператора T и двух областей допустимых сигналов $D_{\text{вх}}$, $D_{\text{вых}}$.

Классификацию систем проводят на основании существенных свойств их математических моделей.

Стационарные и нестационарные системы.

Принято говорить, что система стационарна, если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Если T – оператор стационарной системы, то из равенства:

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = T\vec{U}_{\text{вх}}(t). \quad (5.2)$$

следует, что:

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t \pm t_0) = T\vec{U}_{\text{вх}}(t \pm t_0). \quad (5.3)$$

при любом значении t_0 . Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами. Если же свойства системы не инвариантны относительно выбора начала отсчета времени, то такую систему называют нестационарной (системой с переменными во времени параметрами или параметрической системой).

Оба указанных класса систем широко применяются в радиотехнике и будут изучаться в данном курсе.

Линейные и нелинейные системы.

Важнейший принцип классификации систем основан на том, что различные системы по-разному ведут себя при подаче на вход сумм нескольких сигналов. Если оператор системы таков, что справедливы равенства:

$$T(\vec{U}_{\text{вх1}} + \vec{U}_{\text{вх2}}) = T\vec{U}_{\text{вх1}} + T\vec{U}_{\text{вх2}}. \quad (5.4)$$

$$\alpha T(\vec{U}_{\text{вх}}) = \alpha T\vec{U}_{\text{вх}}.$$

где α – произвольное число, то данная система называется линейной. Условия (5.4) выражают фундаментальный принцип суперпозиции.

Если эти условия не выполняются, то говорят, что система является нелинейной.

Как будет показано в дальнейшем, линейные системы замечательны тем, что, по крайней мере теоретически, можно решить любую задачу о преобразовании входного сигнала такой системой

Строго говоря, все физические системы, с которыми имеет дело радиотехника, в той или иной степени нелинейны. Однако существует много систем, которые весьма точно описываются линейными моделями. Так, практически всегда можно пренебречь нелинейностью обычных резисторов, конденсаторов и некоторых индуктивных элементов.

Нелинейные радиотехнические устройства содержат в себе обычно такие элементы, как полупроводниковые диоды и транзисторы, имеющие вольтамперные характеристики сложного вида.

Теория нелинейных систем оказывается, как правило, довольно сложной. Далеко не все результаты могут быть получены здесь аналитическим путем. Однако именно с помощью нелинейных элементов осуществляются важнейшие преобразования радиотехнических сигналов.

Сосредоточенные и распределенные системы.

Другой критерий классификации радиотехнических систем основан на сопоставлении физических размеров системы и рабочей длины волны. Если характерный размер системы (например, наибольшая длина соединительных проводников цепи) оказывается гораздо меньше длины волны, то такую систему называют *сосредоточенной системой*.

В сосредоточенной электрической цепи всегда можно выделить физические области с преимущественной локализацией энергии электрического поля (конденсаторы) и магнитного поля (индуктивные элементы). Свойства сосредоточенных цепей слабо зависят от конфигурации соединительных проводников, поэтому для описания таких цепей принято использовать их абстрактные модели, называемые принципиальными схемами.

В радиотехнике сосредоточенные системы широко применяют вплоть до рабочих частот в несколько сотен мегагерц. Анализ и расчет сосредоточенных радиотехнических систем проводят с помощью известных законов Кирхгофа.

На частотах в несколько тысяч мегагерц, в так называемом сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне, физические размеры большинства устройств оказываются сравнимыми с длиной волны передаваемых колебаний, так что становится необходимым учет конечного времени распространения сигнала. Обычные электрические цепи в столь высокочастотном диапазоне уже не могут использоваться и на смену им приходят системы с распределенными параметрами (распределенные или волновые системы). Так, вместо соединительных

проводников применяются отрезки металлических труб – волноводы, вместо колебательных LC-контуров – их распределённые аналоги, называемые объемными резонаторами. Теория, методы анализа и проектирования распределенных систем достаточно сложны и составляют содержание отдельных радиотехнических дисциплин.

Закончив краткий обзор принципов классификации систем, сконцентрируем внимание на простейшем их виде – линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами.

Лекция №7

5.2 Импульсные, переходные и частотные характеристики линейных стационарных систем

Замечательная особенность линейных систем – справедливость принципа суперпозиции - открывает прямой путь к систематическому решению задач о прохождении разнообразных сигналов через такие системы. Способ динамического представления (см. раздел 2) позволяет представлять сигналы в виде сумм элементарных импульсов. Если удастся тем или иным способом найти реакцию на выходе, возникающую под воздействием элементарного импульса на входе, то окончательным этапом решения задачи явится суммирование таких реакций.

Намеченный путь анализа основан на временном представлении свойств сигналов и систем. В равной мере применим, а порой и гораздо более удобен анализ в частотной области, когда сигналы задаются рядами или интегралами Фурье. Свойства систем при этом описываются их частотными характеристиками, которые указывают закон преобразования элементарных гармонических сигналов.

Импульсная характеристика.

Пусть некоторая линейная стационарная система описывается оператором T . Для простоты будем полагать, что входной и выходной сигналы одномерны.

По определению, импульсной характеристикой системы называется функция $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал $\delta(t)$. Это означает, что! функция $h(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$h(t) = TS(t). \quad (5.5)$$

Поскольку система стационарна, аналогичное уравнение будет и в случае, если входное воздействие смещено во времени на производную величину t_0 :

$$h(t - t_0) = TS(t - t_0). \quad (5.6)$$

Следует ясно представить себе, что импульсная характеристика, так же, как и порождающая ее дельта-функция, есть результат разумной идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью при условии, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временным масштабом системы, например, периодом ее собственных колебаний.

Интеграл Дюамеля.

Зная импульсную характеристику линейной стационарной системы, можно формально решить любую задачу о прохождении детерминированного сигнала через такую систему. Действительно раньше мы доказали, что входной сигнал всегда допускает представление вида:

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Отвечающая ему выходная реакция:

$$u_{\text{вых}}(t) = T u_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Теперь примем во внимание, что интеграл есть предельное значение суммы, поэтому линейный оператор T на основании принципа суперпозиции может быть внесен под знак интеграла. Далее, оператор T «действует» лишь на величины, зависящие от текущего времени t , но не от переменной интегрирования τ . Поэтому из выражения (5.7) следует, что:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) T \delta(t - \tau) d\tau.$$

или окончательно:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Эта формула, имеющая фундаментальное значение в теории линейных систем, называется интегралом Дюамеля. Соотношение (5.8) свидетельствует о том, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой свертку двух функций – входного сигнала и импульсной характеристики системы.

Очевидно, формула (5.8) может быть записана также в виде:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Итак, если импульсная характеристика $h(t)$ известна, то дальнейшие этапы решения сводятся к полностью формализованным операциям.

Если интегралы (5.8) и (5.9) не удастся найти аналитически, всегда возможен численный анализ

Пример 5.2 *Некоторая линейная стационарная система, внутреннее устройство которой несущественно, имеет импульсную характеристику, представляющую собой*

прямоугольный видеоимпульс длительностью T . Импульс возникает при $t = 0$ и обладает амплитудой A_0 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A_0, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Определить выходную реакцию данной системы при подаче на вход ступенчатого сигнала $u_{\text{вх}}(t) = U_0 \sigma(t)$.

Применяя формулу интеграла Дюамеля (5.8), следует обратить внимание на то, что выходной сигнал будет выглядеть по-разному в зависимости от того, превышает или нет текущее значение t длительность импульсной характеристики. При $0 \leq t \leq T$ имеем:

$$u_{\text{вых}}(t) = A_0 U_0 \int_0^t d\tau = A_0 U_0 t.$$

Если же $t > T$, то при $\tau > T$ функция $h(t - \tau)$ обращается в нуль, поэтому:

$$u_{\text{вых}}(t) = A_0 U_0 \int_0^T d\tau = A_0 U_0 T.$$

Найденная выходная реакция отображается кусочно-линейным графиком.

Обобщение на многомерный случай.

До сих пор предполагалось, что как входной, так и выходной сигналы одномерны. В более общем случае системы с m входами и n выходами следует ввести парциальные импульсные характеристики $h_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, каждая из которых отображает сигнал на i -м выходе при подаче на j -й вход дельта-функции. Совокупность функций $h_{ij}(t)$ образует матрицу импульсных характеристик:

$$\hat{h}(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & h_{2m} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nm} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Формула интеграла Дюамеля в многомерном случае приобретает вид:

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t - \tau) \vec{U}_{\text{вх}}(\tau) d\tau. \quad (5.11)$$

где $\vec{U}_{\text{вых}}$ – n -мерный вектор;

$\vec{U}_{\text{вх}}$ – m -мерный вектор.

Условие физической реализуемости.

Каков бы ни был конкретный вид импульсной характеристики физически осуществимой системы, всегда должен выполняться важнейший принцип: выходной сигнал,

отвечающий импульсному входному воздействию, *не может возникнуть до момента появления импульса на входе.*

Отсюда вытекает очень простое ограничение на вид допустимых импульсных характеристик:

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (5.12)$$

Такому условию удовлетворяет, например, импульсная характеристика системы, рассмотренной в примере.

Легко видеть, что для физически реализуемой системы верхний предел в формуле интеграла Дюамеля может быть заменен на текущее значение времени:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) имеет ясный физический смысл: линейная стационарная система, выполняя обработку поступающего на вход сигнала, проводит операцию взвешенного суммирования всех его мгновенных значений, существовавших «в прошлом» при $-\infty < \tau < t$. Роль весовой функции выполняет при этом импульсная характеристика системы. Принципиально важно, что физически реализуемая система ни при каких обстоятельствах не способна оперировать «будущими» значениями входного сигнала.

Физически реализуемая система должна быть, кроме того, *устойчивой*. Это означает, что ее импульсная характеристика должна удовлетворять условию абсолютной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (5.14)$$

Переходная характеристика.

Пусть на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый функцией Хевисайда $\sigma(t)$. Выходную реакцию:

$$g(t) = T\sigma(t). \quad (5.15)$$

принято называть переходной характеристикой системы. Поскольку система стационарна, переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига:

$$g(t - t_0) = T\sigma(t - t_0).$$

Высказанные ранее соображения о физической реализуемости системы полностью переносятся на случай, когда система возбуждается не дельта-функцией, а единичным скачком. Поэтому переходная характеристика физически реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t > 0$, в то время как $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь. Действительно, так как $\delta(t) = d\sigma/dt$, то на основании (5.5):

$$h(t) = T\left[\frac{d}{dt}\sigma(t)\right].$$

Оператор дифференцирования d/dt и линейный стационарный оператор T могут меняться местами, поэтому:

$$h(t) = \frac{d}{dt}[T\sigma(t)] = \frac{d}{dt}g(t). \quad (5.16)$$

или:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\xi)d\xi. \quad (5.17)$$

Воспользовавшись формулой динамического представления и поступая так же, как и при выводе соотношения (5.8), получаем еще одну форму интеграла Дюамеля:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{du_{\text{вх}}}{d\tau}g(t-\tau)d\tau. \quad (5.18)$$

Частотный коэффициент передачи.

При математическом исследовании систем особый интерес представляют такие входные сигналы, которые, будучи преобразованы системой, остаются неизменными по форме. Если имеется равенство:

$$u_{\text{вых}}(t) = Tu_{\text{вх}} = \lambda u_{\text{вх}}. \quad (5.19)$$

то $u_{\text{вх}}$ является собственной функцией системного оператора T , а число λ , в общем случае комплексное, – его собственным значением.

Покажем, что комплексный сигнал $u_{\text{вых}} = \exp(i\omega t)$ при любом значении частоты ω есть собственная функция линейного стационарного оператора. Для этого воспользуемся интегралом Дюамеля вида (5.9) и вычислим:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}h(\tau)d\tau \right] \exp(i\omega t). \quad (5.20)$$

Отсюда видно, что собственным значением системного оператора является комплексное число:

$$K(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt. \quad (5.21)$$

называемое частотным коэффициентом передачи системы. Формула (5.21) устанавливает принципиально важный факт – частотный коэффициент передачи и импульсная

характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье. Поэтому всегда, зная функцию $K(i\omega)$ можно определить импульсную характеристику:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.22)$$

Мы подошли к важнейшему положению теории линейных стационарных систем - любую такую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной или переходной характеристик, либо в частотной: области, задавая частотный коэффициент передачи. Оба подхода равноценны и выбор одного из них диктуется удобствами получения исходных данных о системе и простой вычислений.

В заключение отметим, что частотные свойства линейной системы, имеющей m входов и n выходов, можно описать матрицей частотных коэффициентов передачи:

$$K(i\omega) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2m} \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{nm} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Между матрицами $h(t)$ и $K(i\omega)$ существует закон связи аналогичный тому, который задан формулами (5.21), (5.22).

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

Функция $K(i\omega)$ имеет простую интерпретацию: если на вход системы поступает гармонический сигнал с известной частотой ω и комплексной амплитудой $U_{вх}$, то комплексная амплитуда выходного сигнала:

$$U_{вых} = K(i\omega) U_{вх}. \quad (5.24)$$

Часто пользуются представлением частотного коэффициента передачи в показательной форме:

$$K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp[i\varphi_k(\omega)]. \quad (5.25)$$

Обе входящие сюда вещественные функции носят специальные названия: $|K(i\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), $\varphi_k(\omega)$ – фазо-частотная характеристика (ФЧХ) системы.

Ограничения, накладываемые на частотный коэффициент передачи.

Далеко не каждая функция $K(i\omega)$ может являться частотным коэффициентом передачи физически реализуемой системы. Простейшее ограничение связано с тем, что импульсная

характеристика $h(t)$ такой системы обязана быть вещественной. В силу свойств преобразования Фурье (см. раздел 4) это означает, что:

$$K(i\omega) = K^*(-i\omega). \quad (5.26)$$

В соответствии с формулой (5.26) модуль частотного коэффициента передачи (АЧХ) есть четная, а фазовый угол (ФЧХ) – нечетная функция частоты.

Гораздо сложнее ответить на вопрос о том, каким должен быть частотный коэффициент передачи для того, чтобы выполнялись условия физической реализуемости (5.12) и (5.14). Приведем без доказательства окончательный результат, известный под названием *критерия Пэли-Винера*: частотный коэффициент передачи физически реализуемой системы должен быть таким, чтобы существовал интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |K(i\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (5.27)$$

Рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий свойства частотного коэффициента передачи линейной системы.

Пример 5.3 *Некоторая линейная стационарная система имеет свойства идеального ФНЧ, т.е. ее частотный коэффициент передачи задается системой равенств:*

$$K(i\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B \\ K_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases}$$

На основании выражения (5.22) импульсная характеристика такого фильтра:

$$h(t) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{i\omega t} d\omega = \frac{K_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t}. \quad (5.28)$$

Симметрия графика этой функции относительно точки $t = 0$ свидетельствует о нереализуемости идеального фильтра нижних частот. Впрочем, этот вывод непосредственно вытекает из критерия Пэли-Винера. Действительно, интеграл (5.27) расходится для любой АЧХ, которая обращается в нуль на некотором конечном отрезке оси частот.

Несмотря на нереализуемость идеального ФНЧ, эту модель с успехом используют для приближенного описания свойств частотных фильтров, полагая, что функция $K(i\omega)$ содержит фазовый множитель, линейно зависящий от частоты:

$$K(i\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B \\ K_0 \exp(-i\omega t_0), & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases}$$

Как нетрудно проверить, здесь импульсная характеристика:

$$h(t) = \frac{K_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)}. \quad (5.29)$$

Параметр t_0 , равный по модулю коэффициенту наклона ФЧХ, определяет задержку во времени максимума функции $h(t)$. Ясно, что данная модель тем точнее отображает свойства реализуемой системы, чем больше значение t_0 .

5.3 Линейные динамические системы

Линейными динамическими системами принято называть устройства, характеризующиеся следующим свойством: их выходной сигнал, определяется не только величиной входного сигнала в рассматриваемый момент времени, но и «предысторией» этого сигнала. Иначе говоря, динамическая система обладает некоторой конечной или бесконечной «памятью», от характера которой зависят особенности преобразования входного сигнала.

Лекция №8

Системы, описываемые дифференциальными уравнениями.

Среди всевозможных динамических систем большое значение для теоретической радиотехники имеют те, которые описываются дифференциальными операторами. В общем случае речь идет о системах, для которых связь между одномерными входным и выходным сигналами устанавливается с помощью следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}} = \\ b_m \frac{d^m u_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0 u_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Предположим, что входной сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$ задан. Тогда правая часть уравнения (5.30), которую можно условно обозначить $f(t)$, является известной функцией. Анализ поведения системы сводится при этом к хорошо изученной в математике проблеме решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}} = f(t). \quad (5.31)$$

Порядок n этого уравнения принято называть порядком динамической системы.

Рассмотрим несколько примеров динамических систем и соответствующих им дифференциальных уравнений.

Пример 5.4 Дана RC -цепь вида T -образного четырехполюсника, возбуждаемая со стороны входа источником ЭДС $u_m(t)$. Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе.

Поскольку ток в цепи $i(t) = C du_{\text{ВЫХ}}/dt$, используя второй закон Кирхгофа, получаем дифференциальное уравнение:

$$RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = u_{\text{ВХ}}. \quad (5.32)$$

Итак, RC -цепь служит примером динамической системы 1-го порядка. Важнейший параметр этой цепи – постоянная времени $\tau = RC$, определяющая характерный временной масштаб протекания процессов в системе.

Пример 5.5 Дана более сложная система, образованная двумя RC -цепями, которые разделены идеальным усилителем с коэффициентом усиления K_0 . Входное сопротивление усилителя неограниченно велико, а выходное сопротивление бесконечно мало, поэтому усилитель является идеальным элементом развязки между цепями.

Вводя две постоянные времени $\tau_1 = R_1C_1$ и $\tau_2 = R_2C_2$, по аналогии с предыдущим примером, имеем следующие дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\tau_2 \frac{du_{\text{ВЫХ}}(t)}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} &= K_0 u_1, \\ \tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 &= K_0 u_{\text{ВХ}}(t).\end{aligned}$$

Исключив отсюда вспомогательную величину u_1 , получаем дифференциальное уравнение цепи:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 u_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = K_0 u_{\text{ВХ}}(t). \quad (5.33)$$

Рассмотренная здесь более сложная RC-цепь оказывается уже системой 2-го порядка.

Пример 5.6 Найти дифференциальное уравнение параллельного колебательного контура с потерями, считая, что входным сигналом служит ток $i(t)$, а выходным сигналом является напряжение $u(t)$ на контуре.

Суммируя токи:

$$i_C = C \frac{du}{dt}, \phi_{i_L} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi, \phi_{i_R} = \frac{u}{R},$$

получаем уравнение:

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi + \frac{u}{R} = i,$$

которое путем однократного дифференцирования по времени приводится к виду:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2a \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}. \quad (5.34)$$

где $a = 1/(2RC)$ – коэффициент затухания контура,

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота собственных колебаний в контуре без потерь.

Собственные колебания динамических систем.

Чтобы полностью определить поведение динамической системы, описываемой уравнением (5.31), требуется учесть начальные условия, которые характеризуют внутреннее состояние системы в некоторый фиксированный момент времени. Обычно принято задавать искомую функцию и ее $n-1$ производную при $t = 0$: $u_{\text{ВЫХ}}(0), u_{\text{ВЫХ}}^1(0), \dots, u_{\text{ВЫХ}}^{n-1}(0)$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решением уравнения (5.31), удовлетворяющим любым начальным условиям, является сумма некоторого частного решения неоднородного уравнения, у которого правая часть $f(t)$ отлична от нуля, и общего решения однородного уравнения:

$$a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}} = 0. \quad (5.35)$$

Проблема решения однородного дифференциального уравнения связана с нахождением корней характеристического уравнения системы:

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0. \quad (5.36)$$

Данное уравнение имеет ровно n корней. Поскольку коэффициенты уравнения вещественны, корни $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ могут быть либо вещественными, либо комплексно-сопряженными. Если все корни различны, то общее решение однородного уравнения (5.35), которое описывает собственные колебания системы имеет вид:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t}. \quad (5.37)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – постоянные числа, определяемые из начальных условий.

Если же некоторые из корней оказываются кратными, то составляющие общего решения однородного уравнения несколько усложняются за счет появления секулярных (вековых) множителей. Так, если γ_i представляет собой k -кратный корень, то ему отвечает совокупность собственных колебаний вида:

$$\exp(\gamma_i t), t \exp(\gamma_i t), \dots, t^{k-1} \exp(\gamma_i t).$$

Рассмотрим примеры собственных колебаний в линейных стационарных цепях.

Пример 5.7 *Апериодическая разрядка конденсатора емкостью C предварительно заряженного до напряжения U_0 и в момент времени $t = 0$ замыкаемого на резистор сопротивлением R .*

Цепь описывается следующим дифференциальным уравнением относительно переменной u_c – напряжения на конденсаторе:

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

при единственном начальном условии $u_c(0) = U_0$.

Характеристическое уравнение $\tau y + 1 = 0$ имеет корень $y = -1/\tau$. Отсюда находим общее решение уравнения свободных колебаний:

$$u_c(t) = A \exp(-t/\tau).$$

Для того чтобы удовлетворить начальному условию, следует положить $A = U_0$. Окончательно имеем:

$$u_c(t) = U_0 \exp(-t/\tau).$$

Итак, отрицательному вещественному корню характеристического уравнения отвечает собственное колебание, экспоненциально убывающее во времени.

Постоянная времени τ данной цепи есть промежуток времени, в течение которого свободный процесс затухает в $e = 2.71828...$ раз.

Пример 5.8 Колебательная разрядка конденсатора.

Пусть предыдущий пример усложнен тем, что в цепи имеется также индуктивный элемент L . Дифференциальное уравнение цепи относительно тока $i(t)$, составленное на основании второго закона Кирхгофа, имеет вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (5.38)$$

где $a = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Первое начальное условие $i(0)=0$ обусловлено наличием в контуре индуктивного элемента.

В начальный момент времени напряжение на конденсаторе уравновешивается ЭДС самоиндукции:

$$U_0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

откуда следует второе начальное условие:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -U_0/L.$$

Характеристическое уравнение данной цепи $\gamma^2 + 2a\gamma + \omega_0^2 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{\omega_0^2 - a^2} = -a \pm i\omega_c.$$

где ω_c – частота собственных колебаний системы. Если потери в контуре достаточно малы, то $\omega_0 \gg a$ поэтому $\omega_c \approx \omega_0$. Общее решение однородного уравнения:

$$i(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}. \quad (5.39)$$

содержит коэффициенты C_1 и C_2 , удовлетворяющие системе алгебраических уравнений (см. начальные условия):

$$C_1 + C_2 = 0,$$

$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = -U_0/L,$$

откуда:

$$C_1 = \frac{-U_0}{i2\omega_c L}, \quad C_2 = \frac{U_0}{i2\omega_c L}.$$

Подставив эти коэффициенты в выражение (5.39), получим окончательно:

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t. \quad (5.40)$$

Частотный коэффициент передачи.

Если на вход линейной динамической системы поступает сигнал, имеющий комплексную математическую модель вида $u_{\text{вх}}(t) = \exp(i\omega t)$, то сигнал на выходе $u_{\text{вых}}(t) = K(i\omega)\exp(i\omega t)$. Подставляя эти выражения в (5.30), после сокращения на общий множитель находим частотный коэффициент передачи системы:

$$K(i\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1(i\omega) + b_0}{a_m(i\omega)^m + a_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + a_1(i\omega) + a_0}. \quad (5.41)$$

Итак, частотный коэффициент передачи любой динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, представляет собой дробно-рациональную функцию переменной $i\omega$; коэффициенты этой функции совпадают с коэффициентами дифференциального уравнения.

В инженерных расчетах частотный коэффициент передачи линейных систем часто находят методами теории цепей на основании принципиальных схем, не прибегая к составлению дифференциальных уравнений. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.9 Частотный коэффициент передачи напряжения RC – цепи, схема которой приведена в примере 5.3. Здесь:

$$K(i\omega) = \frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}.$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени. Уравнение АЧХ принимает вид:

$$|K(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (5.42)$$

ФЧХ определяется следующим образом: $\varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$.

Вид АЧХ указывает на то, что такая цепь может использоваться в качестве фильтра нижних частот (ФНЧ).

Пример 5.10 Частотный коэффициент передачи напряжения Г-образного четырехполюсника, собранного из элементов L , C , R :

Здесь:

$$K(i\omega) = \frac{1/(i\omega C)}{R + i\omega L + 1/i\omega C} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega RC}.$$

откуда следует уравнение АЧХ:

$$|K(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

и уравнение ФЧХ:

$$\phi_k(\omega) = -\arctg[\omega RC / (1 - \omega^2 LC)].$$

Если сопротивление потерь R достаточно мало, так что добротность системы $Q = \sqrt{L/C}/R \gg 1$, то данная цепь может с успехом выполнять роль полосового фильтра.

Усилитель малых сигналов с аperiodической нагрузкой.

Типичным примером линейной динамической системы является электронный усилитель напряжения (рисунок 5.1 а, б). Для определенности в качестве управляемого элемента здесь взят биполярный транзистор типа $n-p-n$, включенный по схеме с общим эмиттером.

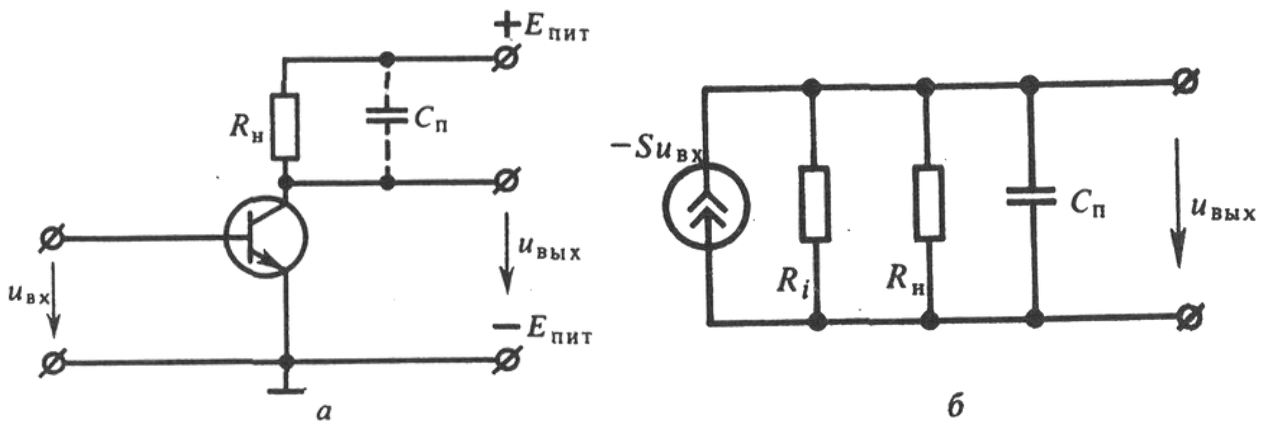


Рисунок 5.1 – Усилитель напряжения (а – упрощенная принципиальная схема; б – эквивалентная схема (R_n – резистор нагрузки, C_n – паразитная емкость))

Чтобы любые такие устройства можно было анализировать единообразно, принято использовать схемы замещения электронных приборов. Метод эквивалентных схем применим тогда, когда амплитуды переменных напряжений малы настолько, что можно пренебречь нелинейностью внешних характеристик электронных приборов. Например, биполярный транзистор достаточно точно описывается линейной схемой замещения, если амплитуда переменной составляющей входного напряжения мала по сравнению с так называемым температурным потенциалом $p-n$ -перехода $u_T = kT/e$, где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура перехода; e – заряд электрона.

Как известно из теории цепей, схема замещения активного электронного прибора (рисунок 5.1, б) содержит управляемый источник тока, создающий в выходной цепи ток $-Su_{вх}$ (S – крутизна характеристики прибора в рабочей точке), а также выходное (внутреннее) сопротивление прибора R_i , включенное параллельно источнику тока. Нагрузкой усилителя

является параллельное соединение сопротивления R_H и емкости C_{Π} ; такую нагрузку принято называть *апериодической* в отличие от колебательной нагрузки (LC-контура).

Полная проводимость, включенная параллельно источнику тока:

$$Y_{\Sigma} = \frac{1}{R_H} + \frac{1}{R_i} + i\omega C_{\Pi}.$$

Если на вход усилителя подан гармонический сигнал с частотой ω и комплексной амплитудой $U_{\text{вх}}$, то комплексная амплитуда выходного напряжения:

$$\dot{U}_{\text{вх}} = -S \dot{U}_{\text{вх.}} / Y_{\Sigma}.$$

Отрицательный знак указывает на то, что при увеличении напряжения на базе коллекторный ток возрастает и выходное напряжение уменьшается.

Откуда частотный коэффициент передачи напряжения:

$$K(i\omega) = -\frac{S}{Y_{\Sigma}} = -\frac{SR_{\text{ЭК}}}{1 + i\omega R_{\text{ЭК}} C_{\Pi}}. \quad (5.43)$$

граничная частота усиления, где $R_{\text{ЭК}} = R_H R_i / (R_H + R_i)$.

Таким образом, рассмотренный усилитель напряжения с резистивно-емкостной нагрузкой имеет частотный коэффициент передачи такого же вида, как и *RC-цепь*.

На нулевой частоте значение АЧХ максимально; модуль коэффициента усиления $K_0 = SR_{\text{ЭК}}$. С ростом частоты усиление падает из-за шунтирующего действия паразитной емкости. Полосу пропускания усилителя принято оценивать граничной частотой $\omega_{\text{гр}}$, на которой значения АЧХ уменьшаются в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с уровнем K_0 . Из (5.43) видно, что так как:

$$|K(i\omega)| = \frac{SR_{\text{ЭК}}}{\sqrt{1 + \omega^2 R_{\text{ЭК}}^2 C_{\Pi}^2}},$$

то:

$$\omega_{\text{гр}} = 1/(R_{\text{ЭК}} C_{\Pi}).$$

Пример 5.11 Усилитель, собранный по схеме рисунка 5.1, имеет следующие параметры: $R_H = 1.6$ кОм, $S = 20$ мА/В, $C_{\Pi} = 30$ пФ, $R_i = 15$ кОм. Вычислить коэффициент усиления на нулевой частоте и полосу пропускания усилителя.

Прежде всего находим эквивалентное сопротивление нагрузки: $R_{\text{ЭК}} = 1.6 \cdot 15 / (1.6 + 15) = 1.45$ кОм.

Модуль коэффициента усиления на нулевой частоте: $K_0 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1.45 \cdot 10^3 = 29$.

Граничная частота усилителя $\omega_{гр} = 1/(1.45 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-11}) = 2.3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ или $f_{гр} = 3.66$ МГц.

Устойчивость динамических систем.

По определению, линейная динамическая система называется устойчивой, если все ее собственные колебания затухают во времени. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения (5.36).

Эти корни не должны быть также и чисто мнимыми. Хотя при этом собственные колебания есть гармонические функции вида:

$$u_{\text{соб}}(t) = \begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix},$$

небольшие случайные изменения параметров системы могут, привести к переходу ее в неустойчивый режим, когда:

$$u_{\text{соб}}(t) = \exp(at) \begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix}.$$

представляют собой экспоненциально нарастающие по амплитуде колебания.

Возникновение нарастающих собственных колебаний в электрических цепях возможно лишь тогда, когда в составе цепи, помимо пассивных элементов L , C , R , содержатся активные элементы, передающие в цепь часть энергии от внешних источников. Распространенной моделью такого активного элемента служит резистор с отрицательным сопротивлением.

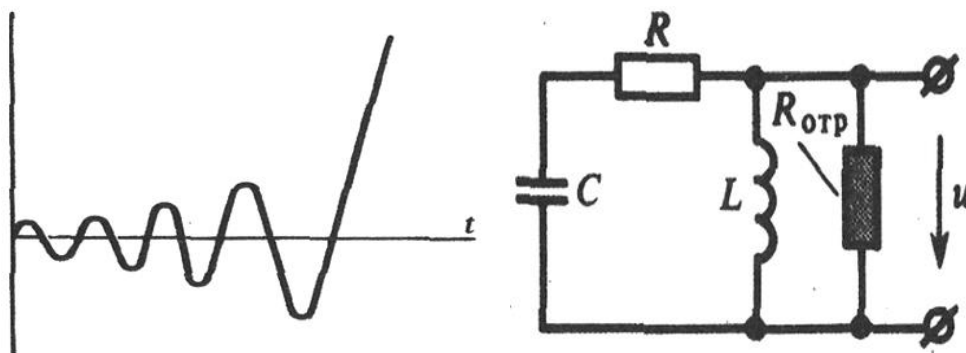


Рисунок 5.2 – Пример системы с нарастающими собственными колебаниями

Пример 5.12 Колебательный контур с параметрами $C = 80$ пФ, $L = 2.5$ мкГн, $R = 12$ Ом содержит резистор с отрицательным сопротивлением $R_{отр}$, включенный параллельно индуктивному элементу. Определить критическое значение этого сопротивления, при котором возникает неустойчивость цепи.

Дифференциальное уравнение данной цепи, составленное относительно напряжения u на индуктивном элементе, имеет вид:

$$\left(1 + \frac{R}{R_{\text{отр}}}\right) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_{\text{отр}} C}\right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Корни γ_1 и γ_2 характеристического уравнения имеют вещественные части:

$$\operatorname{Re} \gamma_{1,2} = -\frac{(R/L) + 1/R_{\text{отр}} C}{2(1 + \frac{R}{R_{\text{отр}}})}.$$

Система переходит в неустойчивый режим, когда величина $\operatorname{Re} \gamma_{1,2}$ обращается в нуль. Отсюда находим критическое значение отрицательного сопротивления:

$$R_{\text{отр.кр}} = -\frac{L}{RC} = -2.6 \text{ кОм.}$$

5.4 Спектральный метод

Говоря о спектральном методе анализа прохождения радиотехнических сигналов через линейные стационарные системы, обычно имеют в виду целый комплекс математических приемов, в основе которых лежит использование свойств частотного коэффициента передачи системы. Ниже на конкретных примерах показано применение спектрального подхода как к задаче нахождения реакции системы, так и к проблеме числовой оценки выходного сигнала.

Основная формула.

Пусть на входе некоторой линейной стационарной системы действует детерминированный сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, заданный обратным преобразованием Фурье:

$$u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Будем полагать, что известен частотный коэффициент передачи $K(i\omega)$ системы. Как было доказано, комплексный сигнал вида $\exp(i\omega t)$, являясь собственной функцией системного оператора, создает на выходе элементарную реакцию $K(i\omega)\exp(i\omega t)$. Суммируя эти реакции, находим представление выходного сигнала:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) U_{\text{вх}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.44)$$

Получена основная формула спектрального метода, свидетельствующая о том, что частотный коэффициент передачи системы служит множителем пропорциональности между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе:

$$U_{\text{вых}}(\omega) = K(i\omega)U_{\text{вх}}(\omega). \quad (5.45)$$

Итак, анализ систем в частотной области отличается замечательной чертой – эффект преобразования сигнала в системе отображается просто алгебраической операцией умножения.

Следует иметь в виду, что спектральный и временной подходы полностью эквивалентны друг другу. Действительно, интеграл Дюамеля (5.8) есть свертка функции $u_{\text{вх}}(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$ во временной области: $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) \cdot h(t)$. Значит, спектральная плотность выходного сигнала есть произведение спектральных плотностей функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $h(t)$. Отсюда непосредственно следует формула (5.45).

Практическая ценность спектрального метода нахождения выходной реакции в каждом конкретном случае зависит от того, удастся ли провести интегрирование в формуле (5.44).

Вычисление импульсных характеристик.

Как правило, нахождение частотных коэффициентов передачи линейных систем не вызывает принципиальных затруднений. Поэтому если требуется вычислить импульсную характеристику $h(t)$ системы, то целесообразно воспользоваться спектральным методом, согласно которому:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

В качестве примера найдем импульсную характеристику RC -цепи (рисунок 5.3), для которой выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе. Здесь:

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

поэтому импульсная характеристика:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} d\omega. \quad (5.46)$$

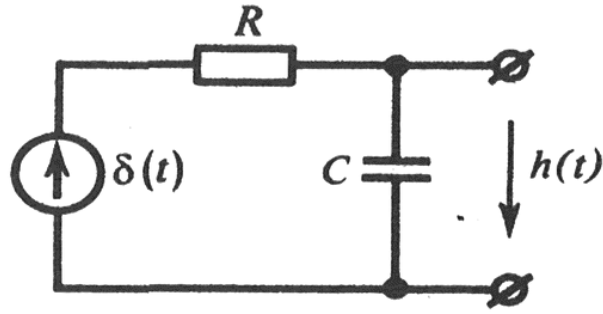
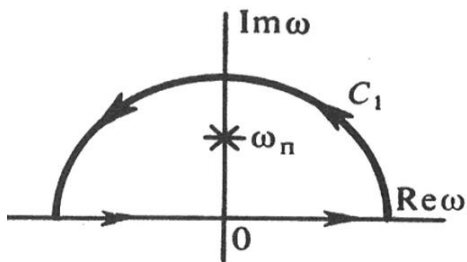


Рисунок 5.3 – RC-цепь

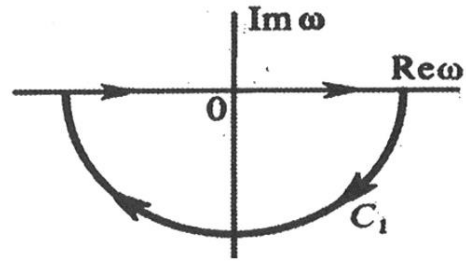
Применим метод вычетов и будем считать, что ω – комплексная переменная. Контур интегрирования в (5.46) образован всей вещественной осью $\text{Im } \omega = 0$ и дугой C_1 достаточно большого радиуса, которая может замыкаться как в верхней, так и в нижней полуплоскостях.

Подынтегральная функция в (5.46) имеет единственный простой полюс в точке с координатой $\omega_n = j/(RC)$. Вычет подынтегральной функции в этой точке

$$\text{res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega RC}\right)\bigg|_{\omega=\omega_n} = \frac{e^{-t/(RC)}}{iRC}.$$



Случай $t > 0$



Случай $t < 0$

Рисунок 5.4 – Контуры интегрирования

Найдем функцию $h(t)$ при $t > 0$. Для этого расположим дугу C_1 в *верхней полуплоскости*, поскольку именно в этом случае функция $\exp(\omega t)$ будет экспоненциально стремиться к нулю с ростом радиуса дуги. В пределе контурный интеграл будет равен интегралу, вычисленному лишь вдоль вещественной оси в соответствии с формулой (5.46).

По теореме. Коши, контурный интеграл от функции комплексной переменной равен числу $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов подынтегральной функции во всех полюсах, которые лежат внутри контура интегрирования. Таким образом:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)}, \quad \text{при } t > 0.$$

Если же требуется найти импульсную характеристику при $t < 0$, то контур интегрирования следует замкнуть в *нижней полуплоскости*, где подынтегральная функция вообще не имеет полюсов и поэтому:

$$h(t) = 0, \text{ при } t < 0.$$

График импульсной характеристики RC-цепи, построенный по формулам (5.51) и (5.52), представляет собой кривую, разрывную при $t = 0$ (рисунок 5.5).

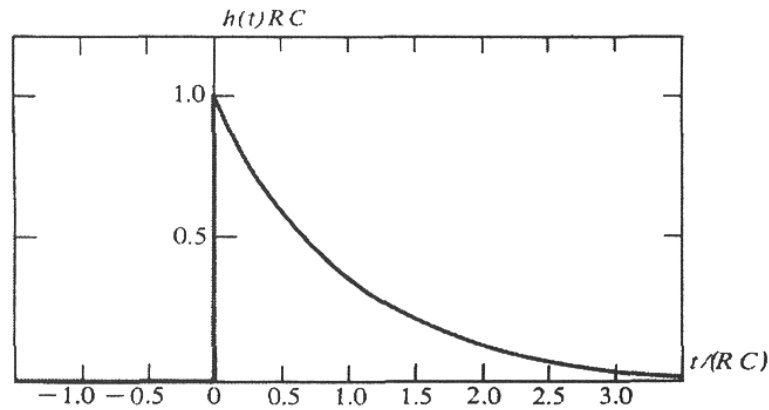


Рисунок 5.5 – График импульсной характеристики RC-цепи

Представление разрывных функций с помощью контурных интегралов является математическим приемом, широко используемым в теоретических исследованиях.

Лекция №9

Вычисление сигнала на выходе системы.

Как пример использования спектрального метода решим задачу о прохождении экспоненциального видеоимпульса напряжения вида: $u_{\text{ВХ}}(t) = U_0 \exp(-\alpha t) \sigma(t)$ через RC -цепь, рассмотренную выше. В данном случае спектральная плотность входного сигнала $U_{\text{ВХ}}(\omega) = U_0/(\alpha + i\omega)$ и задача сводится к вычислению интеграла, входящего в выражение

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t) d\omega}{(1 + i\omega/\alpha)(1 + i\omega RC)}.$$

Разлагая алгебраическую часть подынтегральной функции на элементарные дроби, имеем:

$$\frac{1}{(1 + i\omega/\alpha)(1 + i\omega RC)} = \frac{1}{1 - \alpha RC} \left(\frac{1}{1 + i\omega/\alpha} - \frac{\alpha RC}{1 + i\omega RC} \right).$$

Структура слагаемых, стоящих в квадратных скобках, позволяет непосредственно использовать результат, полученный при вычислении импульсной характеристики RC -цепи, и записать решение при $t > 0$:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{U_0}{1 - \alpha RC} [\exp(-\alpha t) - \exp(-t/(RC))]. \quad (5.47)$$

Естественно, что $u_{\text{ВЫХ}}(t) = 0$, при $t < 0$.

Соответствующий график приведен на рисунке 5.6.

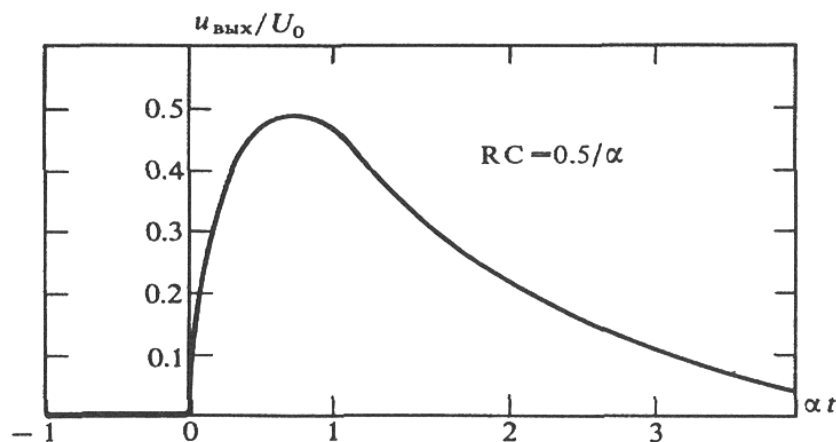


Рисунок 5.6 – Отклик RC -цепи на экспоненциальный видеоимпульс

Коэффициент передачи многозвенной системы.

В радиотехнике часто используют сложные системы, отдельные звенья которых включены *каскадно*, т. е. выходной сигнал предыдущего звена служит входным сигналом

для последующего звена. Примером такой системы может служить многозвенный усилитель.

Положим, что известны частотные коэффициенты передачи отдельных звеньев $K_n(i\omega)$, $n = 1, 2, \dots, N$. Возбуждая первое звено сигналом $u_{\text{вх}}(t) = \exp(i\omega t)$, получим на выходе сигнал:

$$u_{\text{вых}}(t) = K_1(i\omega)K_2(i\omega)\dots K_N(i\omega)\exp(i\omega t).$$

откуда результирующий коэффициент передачи

$$K(i\omega) = \prod_{n=1}^N K_n(i\omega). \quad (5.48)$$

В инженерных расчетах АЧХ систем часто выражают в логарифмических единицах – *децибелах*. Если на некоторой частоте ω известен модуль частотного коэффициента передачи, то *усиление* системы, выраженное в децибелах (дБ):

$$\Delta = 20 \lg |K(i\omega)|. \quad (5.49)$$

Если $|K(i\omega)| < 1$, то система ослабляет сигнал и усиление оказывается отрицательным.

Легко видеть, что при каскадном соединении звеньев их усиления суммируются алгебраически:

$$\Delta = \sum_{n=1}^N \Delta_n. \quad (5.50)$$

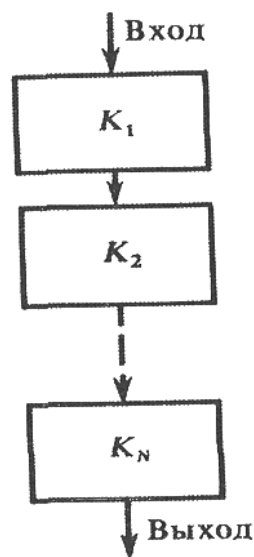


Рисунок 5.7 – Многозвенная система

Дифференцирующие и интегрирующие цепи.

Линейные цепи широко применяют для преобразования формы импульсных радиотехнических колебаний. Рассмотрим RC-цепь, возбуждаемую источником ЭДС,

выходным сигналом является напряжение на резисторе.

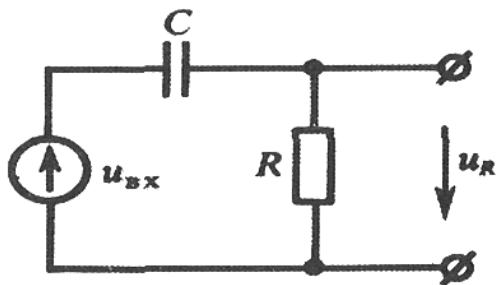


Рисунок 5.8 – RC-цепь, возбуждаемая источником ЭДС

Дифференциальное уравнение данной цепи имеет вид:

$$\tau \frac{du_R}{dt} + u_R = \tau \frac{du_{BX}}{dt}. \quad (5.51)$$

Если постоянная времени τ мала настолько, что в любой момент времени:

$$\tau \left| \frac{du_R}{dt} \right| \ll |u_R|. \quad (5.52)$$

то первым слагаемым в левой части уравнения (5.51) можно пренебречь по сравнению со вторым и записать

$$u_R(t) = \tau \frac{du_{BX}}{dt}. \quad (5.53)$$

Такая RC-цепь выполняет операцию приближенного дифференцирования сигнала. Схемотехническое применение дифференцирующих цепей – создание обострителей импульсных сигналов.

Выполнение неравенства (5.52) зависит не только от параметров цепи, но и от характеристик входного сигнала. Для оценок здесь проще всего воспользоваться анализом в частотной области. Частотный коэффициент передачи рассматриваемой цепи $K(\omega) = i\omega\tau / (1 + i\omega\tau)$ будет достаточно близок к частотному коэффициенту передачи идеального дифференциатора: $K(\omega) \ll i\omega\tau$, если произведение $\omega\tau$ пренебрежимо мало по сравнению с единицей в области частот, где сосредоточена основная доля энергии сигнала. Например, пусть входной сигнал – прямоугольный видеоимпульс длительностью τ_n . Используя грубую оценку верхней граничной частоты в спектре такого импульса: $\omega_b = 2\pi/\tau_n$, получаем условие, обеспечивающее пригодность RC-цепи для приближенного дифференцирования данного сигнала:

$$RC \ll \tau_n / (2\pi). \quad (5.54)$$

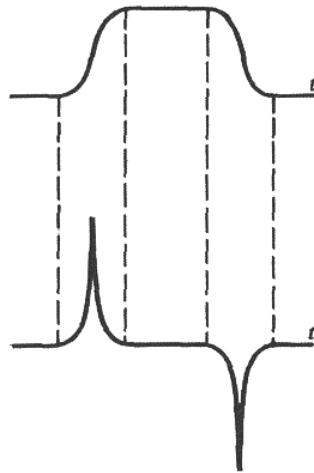


Рисунок 5.9 – Сигнал на входе и выходе дифференциальной цепи

Диаметрально противоположными свойствами может обладать RC -цепь, у которой выходной сигнал, снимаемый с конденсатора, удовлетворяет уравнению:

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = u_{вх}.$$

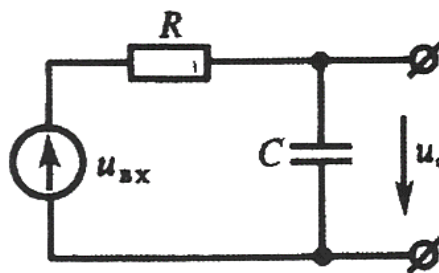


Рисунок 5.10 – Интегрирующая цепь

Если параметры цепи и входного сигнала таковы, что

$$\tau \left| \frac{du_c}{dt} \right| \gg |u_c|,$$

то:

$$u_c(t) \approx \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t u_{вх}(\xi) d\xi. \quad (5.55)$$

RC -цепь с такими свойствами называется интегрирующей цепью. Приближенное интегрирование выполняется тем точнее, чем больше относительная доля высокочастотных составляющих в спектре входного сигнала. Действительно, поскольку здесь $K(\omega) = 1/(1+i\omega\tau)$, приближенное равенство $K(\omega) \ll 1/i\omega\tau$, обеспечивающее интегрирующие свойства

цепи, будет справедливо при $\omega_n \tau \gg 1$, где ω_n – нижняя граничная частота спектра. Интегрирующие цепи дают возможность подавлять высокочастотные составляющие спектра входного сигнала и поэтому часто используются как сглаживающие фильтры. Кроме того, они могут преобразовывать скачкообразные перепады входного сигнала в линейно нарастающие импульсы на выходе.

5.5 Операторный метод

К рассмотренному спектральному методу тесно примыкает широко распространенный операторный метод, базирующийся на представлении входных и выходных сигналов преобразованиями Лапласа.

Решение дифференциальных уравнений операторным методом.

Преобразование Лапласа может быть использовано для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 u_{\text{ВЫХ}} = \\ b_m \frac{d^m u_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt} + b_0 u_{\text{ВХ}}. \end{aligned} \quad 5.56$$

устанавливает закон соответствия между сигналами на входе и выходе некоторой линейной стационарной системы. Наложим некоторые ограничения.

1) пусть входной сигнал $u_{\text{ВХ}}(t) = 0$ при $t < 0$.

2) зададим начальные условия: $u_{\text{ВЫХ}}(0) = u'_{\text{ВЫХ}}(0) = \dots = u^{(n-1)}_{\text{ВЫХ}}(0) = 0$.

3) примем, что область допустимых входных сигналов не содержит в себе функций, столь быстро нарастающих во времени, что для них не существует преобразования Лапласа.

Обозначим закон соответствия между оригиналами и изображениями следующим образом: $u_{\text{ВХ}}(t) \leftrightarrow U_{\text{ВХ}}(p)$, $u_{\text{ВЫХ}}(t) \leftrightarrow U_{\text{ВЫХ}}(p)$. Вычислив преобразования Лапласа от обеих частей уравнения (5.56), получим:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) U_{\text{ВЫХ}}(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U_{\text{ВХ}}(p). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Важнейшей характеристикой, на которой основан операторный метод, является отношение изображений выходного и входного сигналов:

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}. \quad (5.58)$$

называемое передаточной функцией или операторным коэффициентом передачи рассматриваемой системы.

В соответствии с формулой (5.57):

$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (5.59)$$

Если эта функция известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

1. $u_{\text{ВХ}}(t) \rightarrow U_{\text{ВХ}}(p);$
2. $U_{\text{ВЫХ}}(p) = K(p)U_{\text{ВХ}}(p);$
3. $U_{\text{ВЫХ}}(p) \rightarrow u_{\text{ВЫХ}}(t).$

Термин «операторный метод» исторически восходит к известным работам Хевисайда, который еще в конце прошлого века предложил символический способ решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в линейных электрических цепях. Метод Хевисайда основан на символической замене оператора дифференцирования d/dt комплексным числом p .

Свойства передаточной функции.

Сравнивая формулы (5.59) и (5.41), можно убедиться, что функция $K(p)$ есть результат аналитического продолжения частотного коэффициента передачи $K(i\omega)$ с мнимой осью $i\omega$ на всю плоскость комплексных частот $p = \sigma + i\omega$. Функция $K(p)$ аналитична на всей плоскости p , за исключением конечного числа точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, являющихся корнями знаменателя в формуле (5.59):

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Данные точки, т. е. корни уравнения называют полюсами передаточной функции $K(p)$. Точки $z_1, z_2, \dots, z_m$, представляющие собой корни уравнения

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0 = 0.$$

называют нулями данной передаточной функции.

Вынося общий множитель K_0 , возникающий при делении в (5.59) числителя на знаменатель, получаем так называемое *нуль-полюсное представление* передаточной функции:

$$K(p) = \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (5.60)$$

Вещественность коэффициентов дифференциального уравнения (5.57) обуславливает следующее свойство нулей и полюсов: все эти числа либо вещественны, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

Часто используют наглядный прием отображения передаточной функции с помощью *карты нулей и полюсов*, на которой некоторыми условными значками нанесены указанные точки. Саму функцию $K(p)$, принимающую комплексные значения, нельзя непосредственно представить графически, поэтому поступают так: над плоскостью с декартовой системой координат изображают трехмерную поверхность функции $|K(p)|$. Поверхность имеет характерный вид «горного ландшафта»; бесконечно высокие вершины соответствуют полюсам, а впадины – нулям передаточной функции. Выполнив сечение этой поверхности с помощью плоскости, содержащей как вертикальную ось, так и ось $i\omega$, получим профиль АЧХ системы.

Полюсы передаточной функции линейной системы являются корнями характеристического уравнения (5.36). Поэтому для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы эти полюсы располагались строго в левой полуплоскости комплексной переменной p . Нули передаточной функции в общем случае могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях.

Формула обращения.

Заключительным этапом решения задачи о прохождении сигнала через линейную стационарную систему с помощью операторного метода является поиск оригинала, которому отвечает изображение $U_{\text{вых}}(p) = K(p)U_{\text{вх}}(p)$.

Рассмотрим частный случай, когда функция $U_{\text{вых}}(p)$ представляет собой отношение двух многочленов по степеням комплексной частоты:

$$U_{\text{вых}}(p) = M(p)/N(p).$$

причем будем считать, что степень числителя m не превосходит степени знаменателя n и, кроме того, корни знаменателя $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ – простые.

Способ нахождения оригинала, отвечающего такому изображению, основывается на представлении функции $U_{\text{вых}}(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p - p_i}.$$

Коэффициенты C_i являются вычетами функции $U_{\text{вых}}(p)$ в точках полюсов, поэтому:

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N^1(p_i)(p - p_i)}.$$

Как известно, изображению $1/(p - p_i)$ соответствует оригинал $\exp(p_i t)$. Таким образом, приходим к известной формуле обращения:

$$U_{\text{вых}}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N^1(p_i)} \exp(p_i t). \quad (5.61)$$

Примеры нахождения выходных сигналов операторным методом.

При практическом использовании операторного метода большую часть формальных вычислений можно исключить, обращаясь к широко распространенным таблицам преобразований Лапласа.

Пример 5.13 Найти переходную характеристику RC-цепи. Здесь $\sigma(t) \leftrightarrow 1/p$, $K(p) = 1/(1+p\tau)$, поэтому $U_{\text{вых}}(p) = 1/[p(1+p\tau)]$. Разлагая эту функцию на элементарные дроби, имеем:

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/\tau}.$$

Оригиналы, соответствующие обоим слагаемым в правой части последней формулы, хорошо известны. Искомый результат имеет вид:

$$g(t) = (1 - e^{-t/\tau})\sigma(t).$$

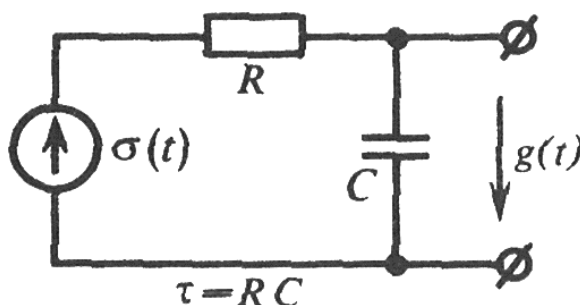


Рисунок 5.11 – Переходная характеристика RC-цепи

Пример 5.14 На входе RC-цепи действует прямоугольный видеоимпульс ЭДС с заданными длительностью T и амплитудой U_0 . Выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе цепи. Найти функцию, описывающую изменение во времени напряжения $U_c(t)$. Входной сигнал имеет изображение:

$$U_{\text{вх}}(p) = \frac{U_0}{p} (1 - e^{-pT}).$$

Множитель $\exp(-pT)$ свидетельствует о сдвиге во времени на величину T . Поэтому, используя результат, полученный в предыдущем примере, можно записать:

$$u_c(t) = U_0 \left[\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \sigma(t) \right] - U_0 \left[\left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right) \sigma(t - T) \right].$$

Для наглядности последнюю формулу целесообразно представить так:

$$u_c(t) = \{U_0(1 - e^{-t/\tau}) \text{ при } 0 \leq t \leq T,$$

$$u_c(t) = \{U_0 e^{-t/\tau} (e^{T/\tau} - 1) \text{ при } t > T.$$

Если выходной сигнал снимается с резистора, то при тех же параметрах R и C напряжение на резисторе $u_R = u_{вх} - u_c$.

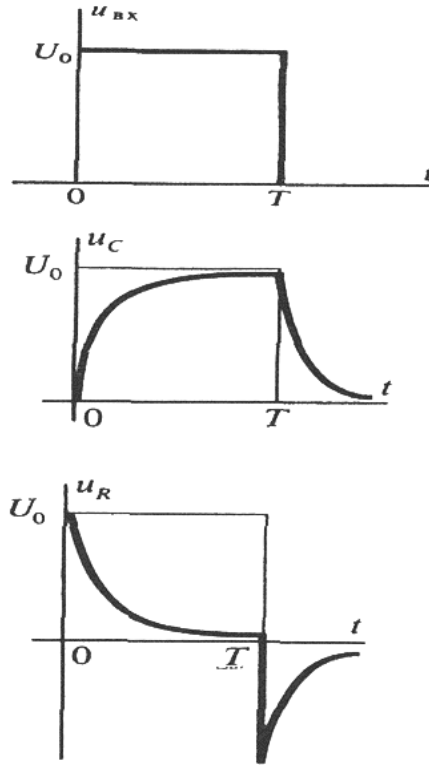


Рисунок 5.12 – Сигналы примера 5.13

Пример 5.15 Импульсная характеристика параллельного колебательного контура.

Параллельный колебательный контур с потерями возбуждается дельта - импульсом тока в неразветвленной части цепи. Выходным сигналом служит напряжение на контуре. Равенство $U(p) = Z(p)I(p)$ указывает на то, что передаточной функцией в данном случае служит операторное сопротивление контура:

$$Z(p) = \frac{p/C}{p^2 + 2ap + \omega_0^2}. \quad (5.62)$$

где $a = 1/(2RC)$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Формулу (5.62) удобно представить в виде:

$$Z(p) = \frac{p/C}{(p+a)^2 + \omega_c^2}. \quad (5.63)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ – частота собственных колебаний в контуре с потерями.

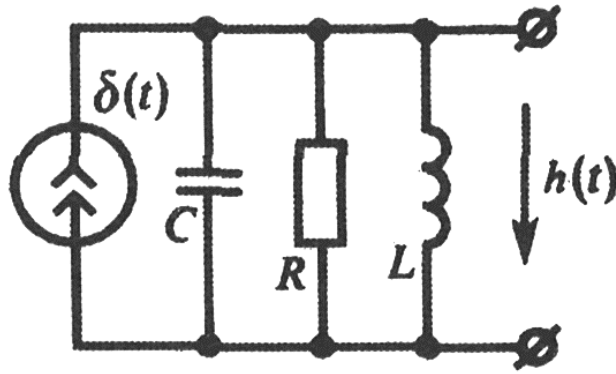


Рисунок 5.13 – Параллельный колебательный контур с потерями

Изображением дельта-импульса тока служит единица, поэтому импульсная характеристика данной системы – это оригинал, соответствующий изображению (5.63). По таблицам преобразований Лапласа находим:

$$h(t) = \frac{e^{at}}{C} \left(\cos \omega_c t - \frac{a}{\omega_c} \sin \omega_c t \right). \quad (5.64)$$

Если контур высокодобротный ($a \ll \omega_0$) то формула (5.64) несколько упрощается:

$$h(t) \approx \frac{e^{at}}{C} \cos \omega_0 t. \quad (5.65)$$

Необходимо помнить, что формулы (5.64) и (5.65) соответствуют возбуждению контура бесконечно коротким импульсом тока, площадь которого тем не менее составляет 1 А·с. В реальном масштабе – это очень большая величина: прямоугольный импульс длительностью 1 мкс должен иметь гигантскую амплитуду 10^6 А! Неудивительно, что при $C = 1000$ пФ такой импульс вызовет в начальный момент времени напряжение 10^9 В. Реальный импульс тока с амплитудой 0.01 А и длительностью 1 мкс имеет площадь 10^{-8} А·с; при $C = 1000$ пФ начальное напряжение на контуре составит лишь 10 В.

Итак, при $t > 0$ напряжение на параллельном контуре, который возбуждается коротким импульсом тока произвольной формы с площадью $\Pi_{\text{имп}}$, имеет вид:

$$u(t) = \frac{\Pi_{\text{имп}} e^{-at}}{C} \left(\cos \omega_c t - \frac{a}{\omega_c} \sin \omega_c t \right). \quad (5.66)$$

Этот ряд примеров можно было бы продолжить и рассмотреть, например, более сложную задачу о включении в колебательный контур источника гармонической ЭДС. Однако получающиеся при этом точные решения довольно громоздки. Гораздо удобнее использовать приближенный метод анализа нестационарных явлений в колебательных цепях.

Лекция №10

6 Воздействие детерминированных сигналов на частотно-избирательные системы

В радиотехнике с первых шагов ее становления получил широкое применение способ выделения полезных сигналов с помощью частотно-избирательных линейных цепей. Такие цепи пропускают на выход лишь колебания с частотами, которые лежат в относительно узкой полосе вокруг некоторой центральной частоты. Частотная фильтрация полезного сигнала особенно эффективна в том случае, если обрабатываемый сигнал в достаточной степени узкополосен.

Линейные частотно-избирательные цепи или, как их часто называют, линейные полосовые фильтры, обладают рядом специфических свойств. Для анализа прохождения сигналов через такие цепи в радиотехнике созданы методы, с которыми мы познакомимся в этом разделе.

6.1 Некоторые модели частотно-избирательных цепей

Простейшим полосовым фильтром является колебательный контур, образованный элементами L , C и R . В теории цепей подробно изучаются последовательные и параллельные контуры. Не приводя подробных выкладок, напомним основные положения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Частотные характеристики параллельного колебательного контура.

В окрестности резонансной частоты $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$ данная колебательная система может быть описана эквивалентной схемой, которая состоит из параллельного соединения элементов L , C и активного резонансного сопротивления:

$$R_{\text{рез}} = \rho Q. \quad (9.1)$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление контура;

Q – добротность колебательной системы.

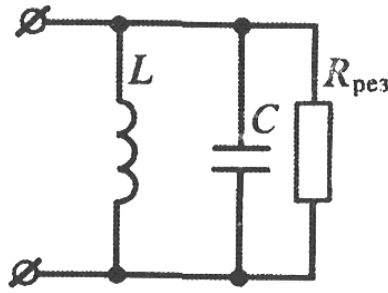


Рисунок 6.1 – Параллельный колебательный контур

Свойства контура определяются зависимостью его входного сопротивления от частоты. В качестве аргумента удобно использовать безразмерную обобщенную расстройку:

$$\xi = Q(\omega / \omega_{\text{рез}} - \omega_{\text{рез}} / \omega). \quad (6.2)$$

При этом входное сопротивление:

$$Z(j\xi) = R_{\text{рез}} / (1 + \xi). \quad (6.3)$$

Если $Q \gg 1$, то в узкой полосе вблизи резонансной частоты для расчета обобщенной расстройки следует пользоваться приближенной формулой:

$$\xi \approx 2Q(\omega - \omega_{\text{рез}}) / \omega_{\text{рез}}. \quad (6.4)$$

АЧХ параллельного колебательного контура отображается так называемой резонансной кривой. Если добротность достаточно высока, то резонансная кривая практически симметрична относительно частоты $\omega_{\text{рез}}$. Уравнение резонансной кривой:

$$|Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2(\omega - \omega_{\text{рез}})^2 / \omega_{\text{рез}}^2}}. \quad (6.5)$$

Интервал на оси частот (Гц) между точками, в которых $|Z|$ уменьшается от значения $R_{\text{рез}}$ до $K_{\text{рез}} / \sqrt{2} = 0.707 R_{\text{рез}}$, называют полосой пропускания контура:

$$\Pi_{0.707} = f_{\text{рез}} / Q. \quad (6.6)$$

Резкое снижение модуля сопротивления параллельного контура при расстройке относительно резонансной частоты позволяет использовать эту цепь для частотной фильтрации сигналов.

Пример 6.1. Параллельный колебательный контур с параметрами $Q = 125$, $L = 6$ мкГн настроен на частоту $f_{\text{рез}} = 8$ МГц. Контур возбуждается источником гармонического тока; выходным сигналом является напряжение на контуре. Определить, во сколько раз будет ослаблен сигнал на частоте 8.1 МГц по сравнению с сигналом на резонансной частоте.

Для настройки на требуемую резонансную частоту необходимо использовать конденсатор емкостью $C = 1/(4\pi^2 L f_{\text{рез}}) = 66$ пФ. Резонансное сопротивление контура $R_{\text{рез}} = \sqrt{L/C} Q = 37.69 \approx 38$ кОм. По формуле (6.4) обобщенная расстройка на частоте 8.1 МГц, $\xi = 2Q\Delta f / f_{\text{рез}} = 3.125$. Амплитуда выходного сигнала в рассматриваемой цепи пропорциональна модулю входного сопротивления контура. Поскольку:

$$|Z| / R_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}.$$

подставляя сюда найденное значение ξ , убеждаемся, что амплитуда этого сигнала на частоте 8.1 МГц составляет 0.305 от амплитуды сигнала на резонансной частоте. Этой цифре соответствует отрицательное усиление (ослабление) $\Delta = 20 \lg 0.305 = -10.3$ дБ.

Амплитудно-частотная характеристика данной системы изображена на рисунке 6.1.

Часто используют параллельные колебательные контуры с неполным включением. Внешние цепи могут подключаться либо к отводу в индуктивном элементе, либо к средней точке емкостного делителя. Входное сопротивление такого контура вычисляют по формуле (6.3), в которую следует подставить величину резонансного сопротивления:

$$R_{\text{рез}} = k_{\text{вкл}}^2 \rho Q,$$

где $k_{\text{вкл}}$ – коэффициент включения контура.

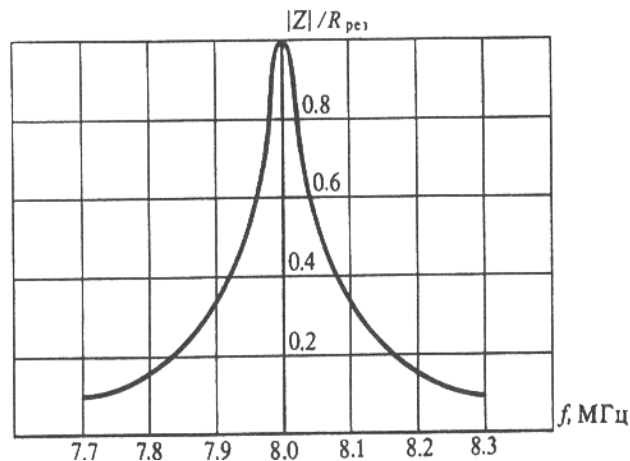


Рисунок 6.3 – АЧХ контура

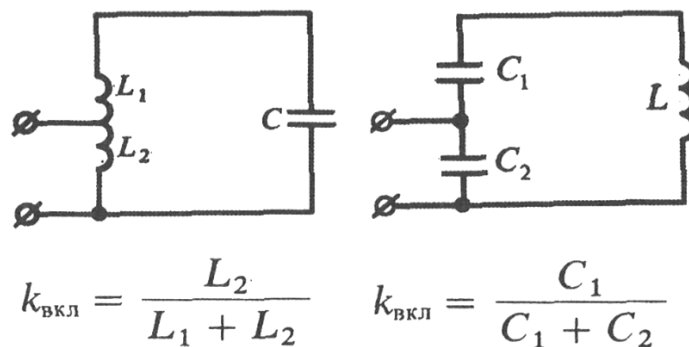


Рисунок 6.4 – Параллельные колебательные контура с неполным включением

Нуль-полюсное представление характеристик колебательного контура.

В рамках операторного метода динамические свойства параллельного колебательного контура с потерями можно описать, задав его входную проводимость:

$$Y(p) = 1/R_{\text{рез}} + pC + 1/(pL).$$

или входное сопротивление:

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{p/C}{p^2 + p/(R_{\text{рез}}C) + 1/LC}. \quad (6.7)$$

Заметив, что $1/LC = \omega_{\text{рез}}^2$ есть резонансная частота контура без потерь и $1/(R_{\text{рез}}C) = 1/(\rho QC) = \omega_{\text{рез0}}/Q$, перепишем выражение (6.7) следующим образом:

$$Z(p) = \frac{p/C}{p^2 + (\omega_{\text{рез0}}/Q)p + \omega_{\text{рез0}}^2}.$$

Данное операторное сопротивление имеет единственный нуль при $p = 0$ и два комплексно-сопряженных полюса в точках с координатами:

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_{\text{рез0}}}{2Q} \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \omega_{\text{рез0}}. \quad (6.8)$$

Полюсы расположены в левой полуплоскости (система устойчива) и *тем ближе к мнимой оси, чем выше добротность контура*. Последнее свойство является общим для любых частотно-избирательных систем.

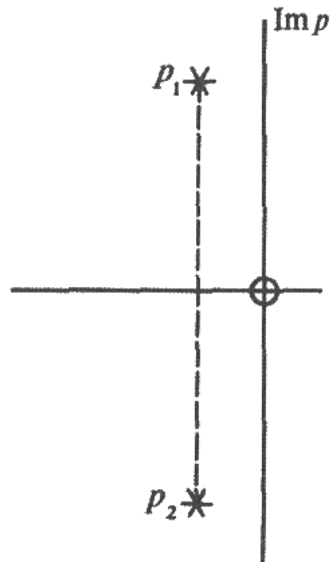


Рисунок 6.5 – Карта нулей и полюсов колебательного контура

Резонансный усилитель малых колебаний.

Данная узкополосная система совмещает в себе функции усилителя и линейного частотного фильтра (см. рисунок 6.6). Отличие от усилителя с резистивно-емкостной нагрузкой (см. раздел 5) состоит в том, что здесь нагрузкой электронного прибора служит параллельный колебательный контур; включение контура в общем случае может быть неполным.

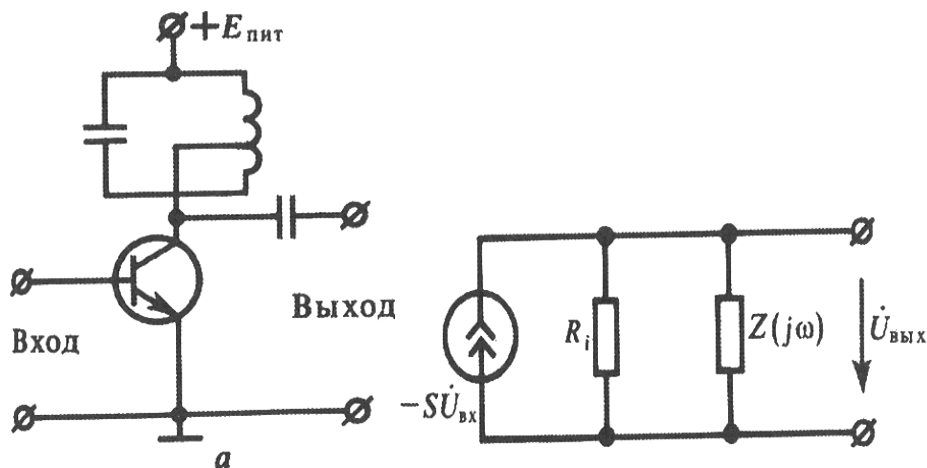


Рисунок 6.6 – Резонансный усилитель малых колебаний: а – принципиальная схема; б – схема замещения

Обращаясь к эквивалентной схеме замещения, видим, что ток с комплексной амплитудой $-S\dot{U}_{вх}$, поступающий от управляемого источника, протекает по сопротивлению:

$$Z_{эк}(j\omega) = \frac{Z(j\omega)R_i}{Z(j\omega) + R_i}.$$

И создает на нем падение напряжения, являющееся выходным сигналом усилителя. Несложные преобразования показывают [см. формулу (6.3)], что:

$$Z_{\text{эк}}(j\xi) = \frac{R_{\text{рез.эк}}}{1 + j\xi_{\text{эк}}} . \quad (6.9)$$

Здесь:

$$R_{\text{рез.эк}} = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + R_{\text{рез}} / R_i} . \quad (6.10)$$

– эквивалентное сопротивление контура усилителя при резонансе с учетом внутреннего сопротивления источника; эквивалентная обобщенная расстройка:

$$\xi_{\text{эк}} = \frac{\xi}{1 + R_{\text{рез}} / R_i} .$$

Можно считать, что влияние внутреннего сопротивления состоит в том, что добротность колебательной системы уменьшается и становится равной эквивалентной добротности:

$$Q_{\text{эк}} = \frac{Q}{1 + R_{\text{рез}} / R_i} . \quad (6.11)$$

Поскольку комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе усилителя $\dot{U}_{\text{вых}} = -SZ_{\text{эк}}\dot{U}_{\text{вх}}$, частотный коэффициент передачи данного устройства:

$$K(j\xi_{\text{эк}}) = \frac{-SR_{\text{рез.эк}}}{1 + j\xi_{\text{рез}}} . \quad (6.12)$$

Отсюда следуют соответственно уравнения АЧХ и резонансного усилителя:

$$|K(j\omega)| = \frac{-SR_{\text{рез.эк}}}{\sqrt{1 + 4Q_{\text{эк}}^2(\omega - \omega_{\text{рез}})^2 / \omega_{\text{рез}}^2}} . \quad (6.13)$$

$$\phi_{\text{к}}(\omega) = \pi - \arctg[2Q_{\text{эк}}(\omega - \omega_{\text{рез}}) / \omega_{\text{рез}}] . \quad (6.14)$$

Пример 6.2. Усилитель, собранный по схеме представленной на рисунке 6.6, имеет следующие параметры: $f_{\text{рез}} = 28$ МГц, $Q = 95$, $\rho = 430$ Ом, $k_{\text{вкл}} = 0.6$, $S = 20$ мА/В, $R_i = 15$ кОм. Определить модуль коэффициента усиления на резонансной частоте и полосу пропускания усилителя.

Резонансное сопротивление колебательной системы:

$$R_{\text{рез}} = k_{\text{вкл}}\rho Q = 0.36 \cdot 0.43 \cdot 95 = 14.71 \text{ кОм}.$$

Эквивалентное сопротивление контура при резонансе с учетом шунтирующего действия транзистора:

$$R_{рез.эк} = 14 \cdot 7.1 / (1 + 14.71/15) = 7.43 \text{ кОм.}$$

При настройке усилителя в резонанс $\xi_{эк} = 0$, поэтому из (6.12) следует, что резонансный коэффициент усиления:

$$K_{рез} = 2SK_{рез.эк} = 20 \cdot 7.43 = 148.6,$$

или в логарифмических единицах:

$$\Delta_{рез} = 20 \lg K_{рез} = 43 \text{ дБ.}$$

Полосу пропускания усилителя на уровне 0.707 определяем по формуле (6.6):

$$\Pi_{0.707} = f_{рез}(1 + R_{рез}/R_i)/Q = 0.58 \text{ МГц.}$$

Многоконтурные частотно-избирательные системы.

Рассмотренные выше одноконтурные узкополосные цепи обладают существенным недостатком – невысокой частотной избирательностью. Это свойство проявляется в том, что за границами полосы пропускания значения АЧХ таких цепей стремятся к нулю недостаточно быстро. Поэтому выходное колебание содержит не только полезный сигнал, спектр которого располагается вблизи максимума АЧХ, но и некоторую, порой значительную долю мешающих сигналов, шумов и т. д. со спектрами, лежащими на достаточном удалении от той частоты, на которую настроен фильтр.

Стремясь повысить частотную избирательность фильтров, прибегают к многоконтурным устройствам, в которых удается получить форму АЧХ, близкую к идеальной (прямоугольной).

Простейшим многоконтурным частотно-избирательным фильтром является система двух связанных колебательных контуров. Принцип работы такого устройства изучается в теории цепей. На рисунке 6.7 (а) изображена принципиальная схема резонансного усилителя, нагрузкой которого является система двух одинаковых индуктивно связанных контуров.

Параметрами этой системы являются коэффициент связи $k_c = M/L$ и так называемый фактор связи $A = k_c Q$. Модуль частотного коэффициента передачи данного усилителя вычисляют по формуле:

$$|K(j\xi)| = \frac{k_{вкл} ASR_{рез.эк}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (6.15)$$

Графики АЧХ, построенные в соответствии с выражением (6.15), изображены на рисунке 6.7 (б) при различных факторах связи A . Отметим, что если $A > 1$, то резонансная

кривая в полосе пропускания имеет провал, глубина которого возрастает с увеличением фактора связи.

Можно создавать весьма совершенные частотно-избирательные устройства, применяя фильтры с большим числом взаимно связанных колебательных систем.

В последнее время в радиотехнике стали получать распространение частотно-избирательные фильтры, построенные на новых схемотехнических принципах – так называемые активные фильтры. Большие успехи достигнуты в области конструирования частотных фильтров, работа которых основана на использовании ультразвуковых волн в твердых телах. Новая отрасль радиотехники, получившая название акустоэлектроники, сулит заманчивые перспективы создания миниатюрных и надежных частотно-избирательных систем.

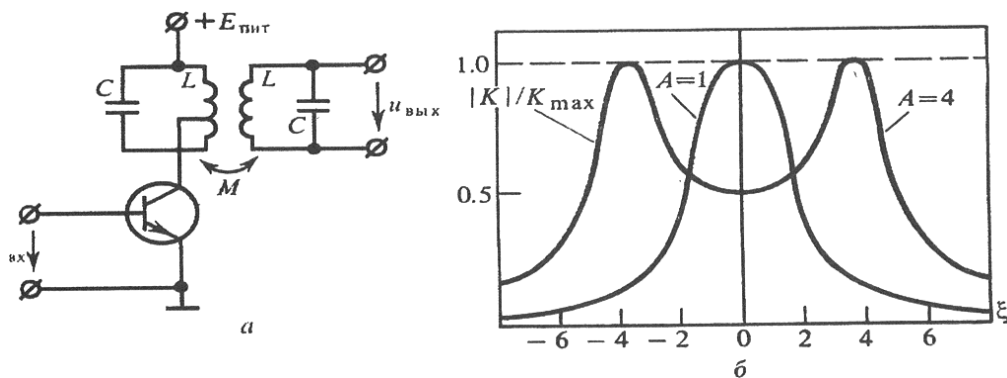


Рисунок 6.7 – Резонансный усилитель со связанными контурами: *а* – принципиальная схема; *б* – графики АЧХ при различных факторах связи

Идеализированные модели частотно-избирательных устройств.

При теоретическом исследовании частотно-избирательных узкополосных цепей часто применяют их упрощенные модели, которые позволяют правильно описывать основные свойства фильтров, опуская малосущественные и к тому же трудно анализируемые подробности.

Наиболее простой моделью служит гипотетический идеальный полосовой фильтр, коэффициент передачи которого постоянен и равен K_0 в пределах полосы пропускания:

$$K(i\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_0 + \Delta\omega \\ K_0, & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega \\ 0, & \text{на остальных частотах.} \end{cases} \quad (6.16)$$

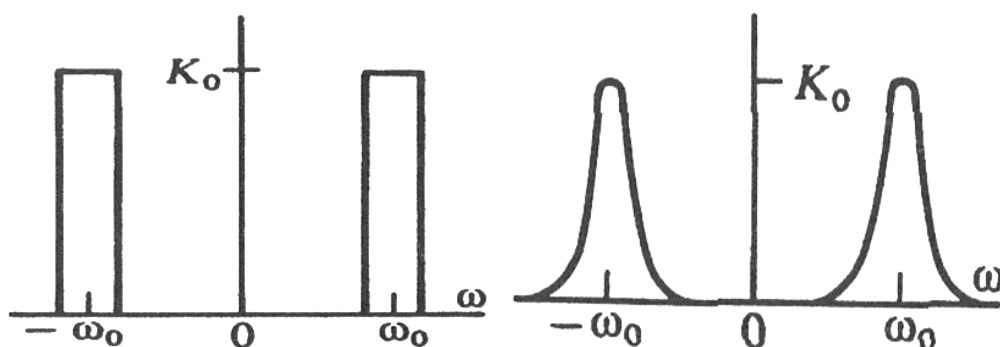


Рисунок 6.8 – АЧХ идеализированных избирательных устройств

Другой распространенной теоретической моделью узкополосной системы является так называемый гауссов радиофильтр, АЧХ которого представляет собой колоколообразную гауссову кривую, симметричную относительно частоты ω_0 . Частотный коэффициент передачи гауссова радиофильтра:

$$K(j\omega) = K_0 \exp[-b(\omega + \omega_0)^2] + K_0 \exp[-b(\omega - \omega_0)^2]. \quad (6.17)$$

где b – постоянная величина с размерностью c^2 , определяющая частотные свойства фильтра. Первое слагаемое в (6.17) обуславливает «всплеск» коэффициента передачи в области отрицательных частот, а второе – в области положительных частот. При $b\omega_0^2 \gg 1$ фильтр узкополосен и эффект перекрытия частотных характеристик, отвечающих отрицательным и положительным частотам, не наблюдается.

6.2. Частотно-избирательные цепи при широкополосных входных воздействиях

Задача о поведении узкополосной частотно-избирательной цепи, возбуждаемой широкополосным входным сигналом, представляет интерес, например, в связи с тем, что сигналы помех часто представляют собой короткие импульсы. Эффективная ширина спектра таких сигналов может значительно превышать ширину полосы пропускания частотно-избирательной системы.

Понятие широкополосного сигнала.

Пусть $K(j\omega)$ – частотный коэффициент передачи узкополосной цепи, способной выделять спектральные составляющие входного сигнала, сосредоточенные в малых окрестностях частот $\pm \omega_0$. Входное колебание $u_{BX}(t)$ со спектральной плотностью $S_{BX}(\omega)$ называют широкополосным сигналом применительно к данной цепи, если функцию $S_{BX}(\omega)$

можно приближенно считать постоянной в пределах полосы пропускания системы. При этом:

$$u_{\text{вых}}(t) \approx \frac{S_{\text{вх}}(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{S_{\text{вх}}(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.18)$$

Согласно выражению (6.18), форма выходного сигнала в данном случае определяется не характером входного колебания, а лишь частотным коэффициентом передачи системы.

Импульсная характеристика частотно-избирательной цепи.

Сигналом с предельно широким спектром является дельта-импульс, для которого $S_{\text{вх}}(\omega) = 1$. Выходным сигналом в данном случае служит импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.19)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части выражения (6.19) и перейдем в нем от переменной интегрирования ω к новой частотной переменной Ω в соответствии с формулой $\omega = -\omega_0 - \Omega$. Такой переход означает смещение функции $K(i\omega)$ из окрестности точки $-\omega_0$ в окрестность точки $\Omega = 0$. Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\omega_0} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{i\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{i\Omega t} d\Omega. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Поскольку рассматриваемая цепь узкополосная, модуль частотного коэффициента передачи достаточно резко уменьшается с увеличением Ω . Это означает, что в последнем интеграле (6.20) нижний предел $-\omega_0$ можно с полным основанием заменить на $-\infty$. В результате имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[-i(\omega_0 + \Omega)] e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad (6.21)$$

Аналогично, выполнив замену переменной $\omega = \omega_0 + \Omega$, преобразуем второй интеграл в (6.19) к виду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[i(\omega_0 + \Omega)] e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (6.22)$$

Комплексно-сопряженные выражения (6.21) и (6.22) складываются, поэтому импульсная характеристика узкополосной системы оказывается вещественной:

$$h(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[i(\omega_0 + \Omega)] e^{i\Omega t} d\Omega \right] e^{i\omega_0 t} \right\}. \quad (6.23)$$

Низкочастотный эквивалент частотно-избирательной цепи.

Этим термином принято называть воображаемую систему, частотный коэффициент передачи которой получается путем смещения частотного коэффициента передачи реальной узкополосной цепи из окрестности частоты ω_0 в окрестность нулевой частоты, т. е.:

$$K_{\text{НЧ}}(i\Omega) = K[i(\omega_0 + \Omega)]. \quad (6.24)$$

Интеграл в (6.23) является импульсной характеристикой НЧ - эквивалента:

$$h_{\text{НЧ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{НЧ}}(i\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (6.25)$$

Поэтому:

$$h(t) = \operatorname{Re}[2h_{\text{НЧ}}(t)e^{i\omega_0 t}]. \quad (6.26)$$

откуда следует, что функция $2h_{\text{НЧ}}(t)$ является комплексной огибающей импульсной характеристики реальной узкополосной цепи. В соответствии с формулой (6.26), в общем случае импульсная характеристика частотно-избирательной системы представляет собой квазигармоническое колебание, огибающая и начальная фаза которого медленно изменяются во времени (в масштабе времени $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$).

Пример 6.3. Низкочастотный эквивалент параллельного колебательного контура.

Здесь частотным коэффициентом передачи служит входное сопротивление:

$$Z(i\omega) = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + i2Q(\omega - \omega_{\text{рез}})/\omega_{\text{рез}}}. \quad (6.27)$$

Коэффициент передачи НЧ – эквивалента получим, выполнив в (6.27) замену переменной $\omega = \omega_{\text{рез}} + \Omega$:

$$Z_{\text{НЧ}}(i\Omega) = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + i2Q\Omega/\omega_{\text{рез}}}. \quad (6.28)$$

Эта формула с точностью до масштабного множителя $R_{\text{рез}}$ описывает частотный коэффициент передачи динамической системы 1-го порядка (подобной RC-цепи) с постоянной времени:

$$\tau_k = \frac{2Q}{\omega_{\text{рез}}}. \quad (6.29)$$

называемой постоянной времени колебательного контура.

Импульсная характеристика подобной системы была найдена ранее при изучении свойств RC-цепи:

$$h_{\text{нч}}(t) = \left(\frac{R_{\text{рез}}}{\tau_k}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right) \sigma(t). \quad (6.30)$$

Отсюда импульсная характеристика параллельного контура:

$$h(t) = (R_{\text{рез}} \omega_{\text{рез}} / Q) \exp(-t / \tau_k) \cos(\omega_{\text{рез}} t) \sigma(t). \quad (6.31)$$

Поскольку $\frac{R_{\text{рез}} \omega_{\text{рез}}}{Q} = 1/C$, где C – емкость контура, полученный результат полностью совпадает с найденным в примере 5.14.

Пример 6.4. Импульсная характеристика двухконтурного резонансного усилителя, схема которого изображена на рисунке 6.9.

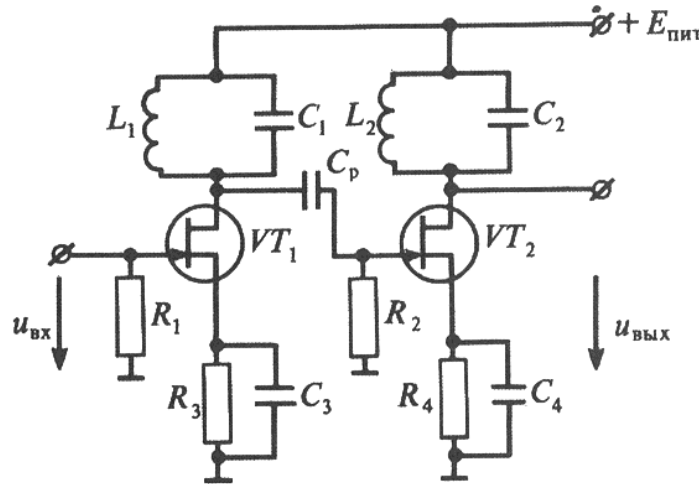


Рисунок 6.9 – Принципиальная схема двухконтурного усилителя

Положим для простоты, что обе ступени усилителя настроены на одну и ту же резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$, имеют одинаковые резонансные коэффициенты усиления $K_{\text{рез}}$ и одинаковые постоянные времени τ_k . Тогда частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = \frac{K_{\text{рез}}^2}{[1 + i(\omega - \omega_{\text{рез}})\tau_k]^2}.$$

так как:

$$Z(i\omega) = \frac{R_{\text{рез}}}{1 + i2Q(\omega - \omega_{\text{рез}})/\omega_{\text{рез}}}, \quad \tau_k = 2Q/\omega_{\text{рез}},$$

то:

$$K_{\text{нч}}(i\Omega) = \frac{K_{\text{рез}}^2}{[1 + i\Omega\tau_k]^2}.$$

Заменяя частотную переменную $i\Omega$ на комплексную частоту p , имеем следующую передаточную функцию НЧ – эквивалента:

$$K_{\text{НЧ}}(p) = \frac{K_{\text{рез}}^2 / \tau_{\text{к}}^2}{(p + 1/\tau_{\text{к}})^2}.$$

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа ей отвечает импульсная характеристика:

$$h_{\text{НЧ}}(t) = (K_{\text{рез}}^2 / \tau_{\text{к}}^2) t \exp(-t / \tau_{\text{к}}) \sigma(t).$$

откуда импульсная характеристика двухконтурного усилителя:

$$h(t) = \frac{2K_{\text{рез}}^2}{\tau_{\text{к}}} \left(\frac{t}{\tau_{\text{к}}} \right) \exp(-t / \tau_{\text{к}}) \cos(\omega_{\text{рез}} t) \sigma(t). \quad (6.32)$$

Соответствующий график приведен на рисунке 6.10.

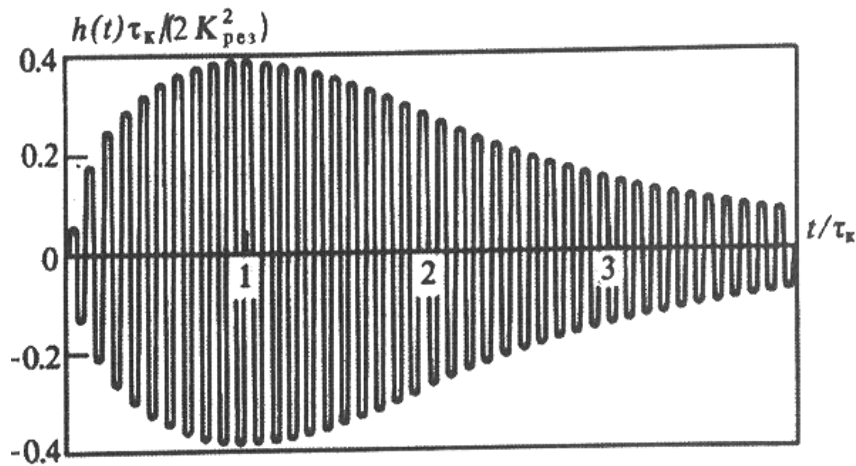


Рисунок 6.10 – Импульсная характеристика двухконтурного резонансного усилителя

Общий случай

Предположим, что на вход некоторой частотно-избирательной системы воздействует произвольный широкополосный сигнал со спектральной плотностью:

$$S_{\text{вх}}(\omega) = A(\omega) + iB(\omega).$$

Считая, что $u_{\text{вх}}(t)$ – вещественная функция, имеем $A(\omega) = A(-\omega)$, $B(\omega) = -B(-\omega)$.

Представим выходное колебание в виде суммы:

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вых}}^{(1)}(t) + iu_{\text{вых}}^{(2)}(t).$$

Здесь:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^{(1)}(t) &= \frac{A(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{A(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ &= 2A(\omega_0) \text{Re}[h_{\text{НЧ}}(t) e^{i\omega_0 t}]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Аналогично:

$$u_{\text{вых}}^{(1)}(t) = \frac{B(-\omega_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{B(\omega_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= i2B(\omega_0) \text{Im}[h_{\text{НЧ}}(t) e^{i\omega_0 t}]. \quad (6.34)$$

Подставляя эти промежуточные результаты в (6.35), получаем окончательный результат:

$$u_{\text{вых}}(t) = 2\{A(\omega_0) \text{Re}[h_{\text{НЧ}}(t) e^{i\omega_0 t}] - B(\omega_0) \text{Im}[h_{\text{НЧ}}(t) e^{i\omega_0 t}]\}. \quad (6.35)$$

Естественно, что из (6.35) вытекает как частный случай формула (6.26), описывающая импульсную характеристику узкополосной цепи.

Физический смысл спектрального разложения.

Предположим для простоты, что $h_{\text{НЧ}}(t)$ – вещественная функция, и представим формулу (6.35) в виде:

$$u_{\text{вых}}(t) = 2h_{\text{НЧ}}(t)[A(\omega_0) \cos \omega_0 t - B(\omega_0) \sin \omega_0 t] =$$

$$= 2h_{\text{НЧ}}(t) \sqrt{A^2(\omega_0) + B^2(\omega_0)} \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]. \quad (6.36)$$

где $\text{tg} \varphi(\omega_0) = B(\omega_0)/A(\omega_0)$. Входящее сюда выражение $\sqrt{A^2(\omega_0) + B^2(\omega_0)}$ представляет собой величину $|S_{\text{вх}}(\omega_0)|$. Таким образом, как отмечалось, отклик узкополосной системы на широкополосный сигнал пропорционален абсолютному значению спектральной плотности входного сигнала в той точке на оси частот, которая соответствует центральной частоте полосы пропускания системы.

Этот результат указывает путь осуществления аппаратного спектрального анализа сигналов.

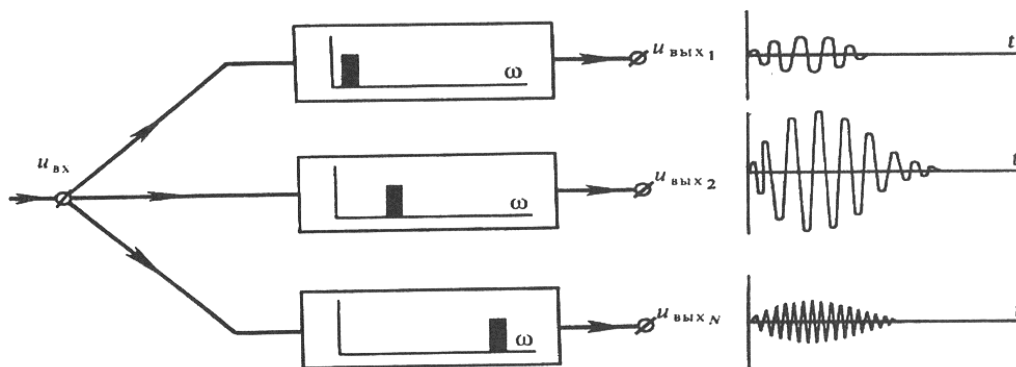


Рисунок 6.11 – Структурная схема анализатора спектра сигналов (амплитуды выходных колебаний фильтров пропорциональны модулям спектральной плотности)

Сформулированный здесь принцип аппаратного спектрального анализа имеет не только прикладное, но и большое принципиальное значение. В частности, он позволяет установить физический смысл поведения спектров сигналов. Например, как было показано, спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса длительностью τ_u обращается в нуль

на всех частотах $\omega_n = 2\pi n/\tau_{\text{и}}$, $n = 1, 2, \dots$. Предположим, что данный видеоимпульс воздействует на вход узкополосной колебательной системы, настроенной на одну из этих частот. Период собственных колебаний системы $T_n = 2\pi/\omega_n = \tau_{\text{и}}/n$ находится в целократном соотношении с длительностью импульса. Колебательная система, получив «толчок» от фронта импульса, через время, кратное периоду собственных колебаний, получит такой же «толчок», но в противоположном направлении, от среза импульса. В результате будет наблюдаться взаимное погашение этих реакций. Именно об этом говорят нулевые значения спектральной плотности видеоимпульса в некоторых точках оси частот.

Устройство состоит из набора узкополосных фильтров, полосы пропускания которых взаимно не перекрываются. Проводя одновременное измерение амплитуд выходных колебаний, можно получить информацию об интенсивности спектральных сопоставляющих входного сигнала в различных участках оси частот.

Список литературы

1. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов/С. И. Баскаков. - 5-е издание, стереотип. - М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.
2. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для вузов/И. С. Гоноровский. – 5-е издание. – М: Дрофа, 2006. – 717 с.