

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ» (ТУСУР)**

Д.С. Брагин

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Курс лекций

Часть 2

**Учебное пособие для студентов технических направлений
подготовки и специальностей**

Томск

2026

УДК 621.391
ББК 32.841.1
Б 87

Рецензент:

Дмитриев В.Д., доцент кафедры телекоммуникаций и основ радиотехники ТУСУРа,
кандидат технических наук

Б 87 Радиотехнические цепи и сигналы: Курс лекций. Часть 2. Учебное пособие для студентов технических направлений подготовки и специальностей / Д.С. Брагин – Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2026. – 54 с.

Настоящий курс лекций содержит систематическое изложение теоретических основ дискретной и цифровой радиотехники. Данное пособие предназначено для закрепления и углубления знаний в области математического описания дискретных сигналов, а также для освоения методов их спектрального анализа на основе дискретного преобразования Фурье и Z-преобразования. Выполнение представленных в лекциях теоретических выкладок позволяет студентам приобрести навыки синтеза и анализа линейных цифровых фильтров, включая трансверсальные и рекурсивные структуры, а также изучить принципы их практической реализации в системах цифровой обработки сигналов.

Настоящее электронное учебное пособие разработано и скорректировано с учётом апробированной методики чтения лекций.

Одобрено на заседании кафедры ТОР, протокол № 11 от 1 июля 2026 г.

УДК 621.391
ББК 32.841.1

© Брагин Д.С., 2026
© Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2026

Оглавление

1. Дискретная (цифровая) радиотехника	5
1.1 Дискретные сигналы и их анализ	5
1.1.1 Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы	5
1.2 Модели дискретных сигналов	8
1.2.1 Дискретизирующая последовательность	8
1.2.2 Модулированные импульсные последовательности	10
1.2.3 Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности	11
1.2.4 Восстановление непрерывного сигнала по модулированной импульсной последовательности	13
1.2.5 Определение аналогового сигнала по совокупности отсчетов	15
1.3 Дискретизация периодических сигналов	15
1.3.1. Дискретное преобразование Фурье	16
1.3.2 Восстановление исходного сигнала по ДПФ	18
1.3.3 Обратное дискретное преобразование Фурье	19
1.3.4 Геометрическая трактовка дискретного преобразования Фурье	20
1.3.5 Алгоритмы быстрого преобразования Фурье	22
1.3.6 Дискретная свертка	23
1.4 Теория Z-преобразования	24
1.4.1 Определение Z-преобразования	24
1.4.2 Сходимость ряда	25
1.4.3 Z – преобразования непрерывных функций	26
1.4.4 Обратное Z - преобразование	26
1.4.5 Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье	27
1.4.6 Важнейшие свойства z-преобразования	27
1.5 Цифровые фильтры	28
1.5.1 Принцип цифровой обработки сигналов	29
1.5.2 Квантование сигналов в ЦФ	30

1.5.3 Алгоритм линейной цифровой фильтрации	31
1.5.4 Дискретные гармонические последовательности	33
1.5.5 Частотный коэффициент передачи ЦФ	34
1.5.6 Системная функция ЦФ	34
1.6 Реализация алгоритмов цифровой фильтрации	36
1.6.1 Трансверсальные цифровые фильтры	36
1.6.2 Рекурсивные цифровые фильтры.....	40
1.7 Синтез линейных цифровых фильтров	46
1.7.1 Метод инвариантных импульсных характеристик.....	46
1.7.2 Сравнение трансверсальных и рекурсивных ЦФ	48
1.7.3 Синтез ЦФ на основе дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи	49
1.7.4 Метод инвариантных частотных характеристик	49
1.7.5 Влияние квантования на работу цифрового фильтра	52
Список литературы	54

Лекция №1

1. Дискретная (цифровая) радиотехника

1.1 Дискретные сигналы и их анализ

Дискретные сигналы естественно возникают в тех случаях, когда источник сообщений выдает информацию в фиксированные моменты времени. Примером могут служить сведения о температуре воздуха, передаваемые радиовещательными станциями несколько раз в сутки. Свойство дискретного сигнала проявляется здесь предельно ярко: в паузах между сообщениями никаких сведений о температуре нет. Фактически же температура воздуха изменяется во времени плавно, так что результаты измерения возникают за счет дискретизации непрерывного сигнала – операции, которая фиксирует отсчетные значения.

Дискретные сигналы приобрели особое значение в последние десятилетия под влиянием совершенствования техники связи и развития способов обработки информации быстродействующими вычислительными устройствами. Большие успехи достигнуты в разработке и использовании специализированных устройств для обработки дискретных сигналов, так называемых цифровых фильтров.

В настоящее время благодаря бурному развитию микропроцессорной техники получила широкое распространение цифровая обработка сигналов. При этом *физический* сигнал (напряжение, ток и т. д.) преобразуется в последовательность *чисел*, которая затем подвергается *математическим* преобразованиям в вычислительном устройстве. Трансформированный цифровой сигнал (последовательность чисел) может быть преобразован обратно в напряжение или ток.

Настоящий раздел посвящен рассмотрению принципов математического описания дискретных сигналов, а также теоретических основ построения линейных устройств для их обработки.

1.1.1 Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Исходный физический сигнал является непрерывной функцией времени. Такие сигналы, определенные во все моменты времени, называют аналоговыми. Последовательность чисел, представляющая сигнал при цифровой обработке, является дискретным рядом и не может полностью соответствовать аналоговому сигналу. Числа, составляющие последовательность, являются значениями сигнала в отдельные (дискретные)

моменты времени и называются отсчетами сигнала. Как правило, отсчеты берутся через равные промежутки времени Δ , называемые периодом дискретизации (или интервалом, шагом дискретизации). Величина, обратная периоду дискретизации, называется частотой дискретизации: $f_d = 1/\Delta$. В общем случае представление сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как мы ничего не знаем о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Однако, как будет показано далее, существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть точно восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов.

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется дискретизацией, а результат такого преобразования – дискретным сигналом.

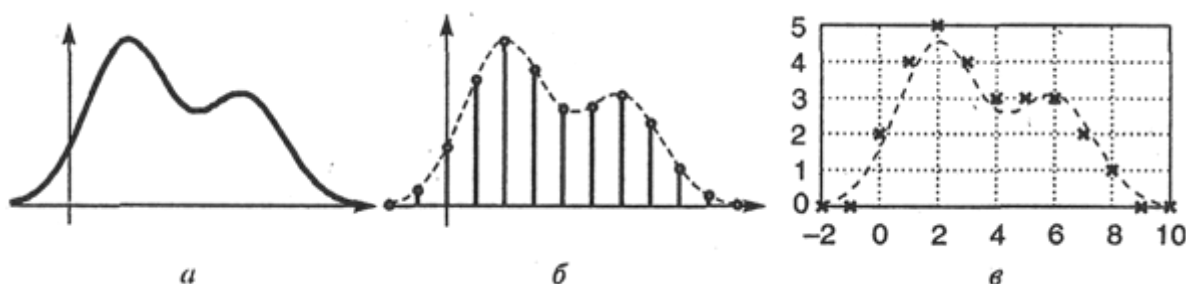


Рисунок 1.1 – Аналоговый (а), дискретный (б) и цифровой (в) сигналы

При обработке сигнала в вычислительных устройствах его отсчеты представляются в виде двоичных чисел, имеющих ограниченное число разрядов. Вследствие этого отсчеты могут принимать лишь конечное множество значений и, следовательно, при представлении сигнала происходит его округление. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется квантованием по уровню, а возникающие при этом ошибки округления – ошибками (или шумами) квантования.

Сигнал, дискретный во времени, но не квантованный по уровню, называется дискретным сигналом. Сигнал, дискретный во времени и квантованный по уровню, называют цифровым сигналом. Сигналы, квантованные по уровню, но непрерывные во времени, на практике встречаются редко. Разницу между аналоговыми, дискретными и цифровыми сигналами иллюстрирует рисунок 1.1.

Вычислительные устройства, предназначенные для обработки сигналов, могут оперировать только цифровыми сигналами. Существуют также устройства, построенные в основном на базе аналоговой схемотехники, которые работают с дискретными сигналами, представленными в виде импульсов различной амплитуды или длительности. Чтобы

подчеркнуть отсутствие квантования по уровню, такие устройства иногда называют дискретно-аналоговыми (ДАУ).

Замечание 1

В данной курсе термины «цифровой фильтр» и «дискретный фильтр» будут использоваться как синонимы, хотя, строго говоря, речь пойдет о дискретных сигналах и фильтрах, поскольку эффекты, связанные с квантованием, в большинстве случаев не будут приниматься во внимание — о них лишь кратко пойдет речь в следующем подразделе.

Обобщенная структура системы цифровой обработки сигналов приведена на рисунке 1.2. На вход поступает аналоговый сигнал $S_{ВХ}(t)$. Его временная дискретизация и квантование по уровню производятся в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). Процессы дискретизации и квантования являются независимыми друг от друга, но они, как правило, выполняются внутри одного блока. Выходным сигналом АЦП является последовательность чисел, поступающая в цифровой процессор ЦП, осуществляющий требуемую обработку. Процессор осуществляет над входными отсчетами различные математические операции; ранее полученные отсчеты и промежуточные результаты могут сохраняться в памяти процессора для использования в последующих вычислениях. Результатом работы процессора является новая последовательность чисел, представляющих собой отсчеты выходного сигнала. Аналоговый выходной сигнал $S_{ВЫХ}(t)$ восстанавливается по этой последовательности чисел с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП). Напряжение на выходе ЦАП имеет ступенчатую форму (см. рисунок 1.2); при необходимости оно может быть преобразовано в плавно меняющийся выходной сигнал с помощью сглаживающего фильтра Φ .

Устройства, реализуемые с помощью структуры, аналогичной представленной на рисунке 1.2, могут иметь самый разнообразный характер. В цифровой форме можно создавать фильтры, анализаторы спектра, нелинейные преобразователи сигналов и многое другое.

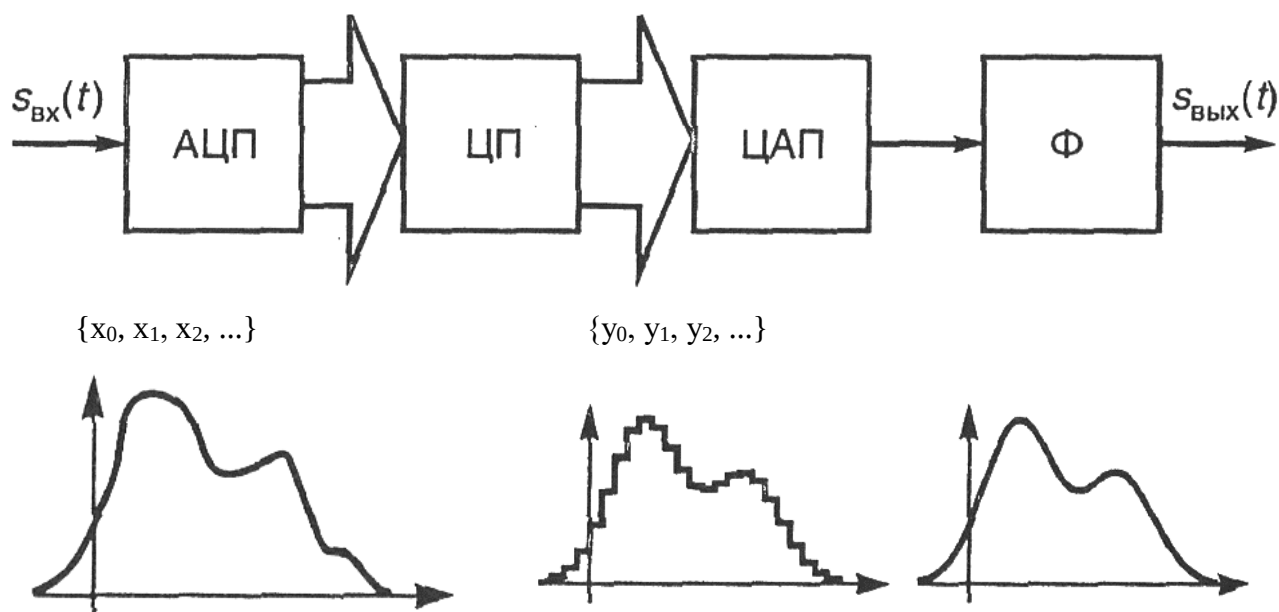


Рисунок 1.2 – Структурная схема системы цифровой обработки сигналов

Замечание 2

Следует отметить, что использование входных и выходных сигналов в аналоговой форме (и, следовательно, наличие АЦП и ЦАП) не всегда является необходимым. Так, при реализации цифрового генератора сигналов не нужен входной аналоговый сигнал, а ЦАП может отсутствовать, если конечный результат необходим в цифровой форме.

К достоинствам цифровой обработки сигналов относятся высокая гибкость и точность выполнения преобразований сигнала. Основным недостатком является ограниченное быстродействие; впрочем, по мере развития технологии рабочие частоты цифровых устройств постоянно возрастают.

1.2 Модели дискретных сигналов

Если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно-непрерывной функции, то соответствующий ему дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой последовательность $(..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...)$ отсчетных значений сигнала $x(t)$ в точках $(..., t_{-1}, t_0, t_1, t_2, ...)$ соответственно.

1.2.1 Дискретизирующая последовательность

На практике, как правило, отсчеты дискретных сигналов берут во времени через равный промежуток Δ , называемый интервалом (шагом) дискретизации:

$$\Delta = t_m - t_{m-1} = t_{m-1} - t_{m-2} = \dots \quad (1.1)$$

Операцию дискретизации, т.е. переход от аналогового сигнала $x(t)$ к дискретному сигналу $x_d(t)$, можно описать, введя в рассмотрение обобщенную функцию:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta). \quad (1.2)$$

называемую дискретизирующей последовательностью.

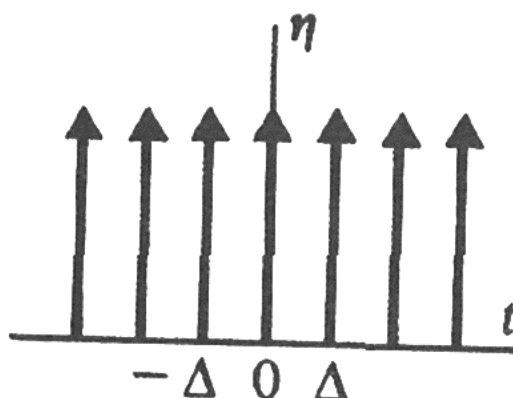


Рисунок 1.3 – Дискретизирующая последовательность

Очевидно, дискретный сигнал $x_d(t)$ представляет собой функционал, определенный на множестве всевозможных аналоговых сигналов $x(t)$ и равный скалярному произведению функции $x(t)$ и $\eta(t)$:

$$x_d(t) = (x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) dt. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) указывает путь практической реализации устройства для дискретизации аналогового сигнала. Работа дискретизатора основана на операции стробирования – перемножения обрабатываемого сигнала $x(t)$ и «гребенчатой» функции $\eta(t)$. Поскольку длительность отдельных импульсов, из которых складывается дискретизирующая последовательность, равна нулю, на выходе идеального дискретизатора в равноотстоящие моменты времени возникают отсчетные значения обрабатываемого аналогового сигнала.

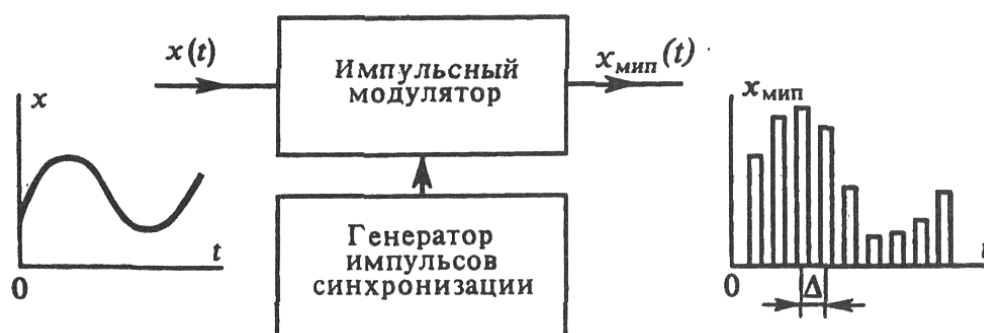


Рисунок 1.4 – Структурная схема импульсного модулятора

1.2.2 Модулированные импульсные последовательности

Дискретные сигналы начали использовать еще в 40-х годах при создании радиотехнических систем с импульсной модуляцией. Этот вид модуляции отличается тем, что в качестве «несущего колебания» вместо гармонического сигнала служит периодическая последовательность коротких импульсов. Импульсный модулятор (рисунок 1.4) представляет собой устройство с двумя входами, на один из которых подается исходный аналоговый сигнал $x(t)$. На другой вход поступают короткие синхронизирующие импульсы с интервалом повторения Δ . Модулятор построен таким образом, что в момент подачи каждого синхронизирующего импульса происходит измерение мгновенного значения сигнала $x(t)$. На выходе модулятора возникает последовательность импульсов, каждый из которых имеет площадь, пропорциональную соответствующему отсчетному значению аналогового сигнала. Сигнал $x_{\text{мип}}(t)$ на выходе импульсного модулятора будем называть модулированной импульсной последовательностью (МИП). Естественно, что дискретный сигнал является математической моделью МИП.

Отметим, что с принципиальной точки зрения характер импульсов, из которых складывается МИП, безразличен. В частности, эти импульсы могут иметь одинаковую длительность, в то время как их амплитуда пропорциональна отсчетным значениям дискретизируемого сигнала. Такой вид преобразования непрерывного сигнала получил название амплитудно-импульсной модуляции (АИМ). Возможен другой способ — широтно-импульсная модуляция (ШИМ). Здесь амплитуды импульсов на выходе модулятора постоянны, а их длительность (ширина) пропорциональна мгновенным значениям аналогового колебания.

Выбор того или иного способа импульсной модуляции диктуется рядом технических соображений, удобством схемной реализации, а также характерными особенностями

передаваемых сигналов. Например, нецелесообразно использовать АИМ в случае, если полезный сигнал изменяется в очень широких пределах, т.е., как часто говорят, имеет широкий динамический диапазон. Для неискаженной передачи такого сигнала требуется передатчик со строго линейной амплитудной характеристикой. Создание такого передатчика – самостоятельная, технически сложная проблема. Системы ШИМ не предъявляют требований к линейности амплитудных характеристик передающего устройства. Однако их схемная реализация может оказаться несколько сложнее по сравнению с системами АИМ.

Математическую модель идеальной МИП можно получить следующим образом. Рассмотрим формулу динамического представления сигнала $x(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Поскольку МИП определена лишь в точках $t_k = k \cdot \Delta$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), интегрирование в формуле (1/4) следует заменить суммированием по индексу k . Роль дифференциала ds будет играть интервал (шаг) дискретизации Δ . Тогда математическая модель модулированной импульсной последовательности, образованной бесконечно короткими импульсами, окажется заданной выражением:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta). \quad (1.5)$$

где $x_k = x(k \cdot \Delta)$ – выборочные значения аналогового сигнала.

1.2.3 Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности

Исследуем спектр сигнала, возникающего на выходе идеального импульсного модулятора и описываемого выражением (1.5). Заметим, что сигнал вида МИП с точностью до коэффициента пропорциональности Δ равен произведению функции $x(t)$ и дискретизирующей последовательности $\eta(t)$:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta x(t) \eta(t). \quad (1.6)$$

Известно, что спектр произведения двух сигналов пропорционален свертке их спектральных плотностей. Поэтому если известны законы соответствия сигналов и спектров:

$$x(t) \leftrightarrow S_x(\omega), \eta(t) \leftrightarrow S_\eta(\omega).$$

то спектральная плотность МИП-сигнала:

$$S_{\text{МИП}}(\omega) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\xi) S_x(\omega - \xi) d\xi. \quad (1.7)$$

Чтобы найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ дискретизирующей последовательности, разложим периодическую функцию $\eta(t)$ в комплексный ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nt/\Delta}.$$

Коэффициенты этого ряда ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$C_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) e^{-\frac{i2\pi nt}{\Delta}} dt = \frac{1}{\Delta}.$$

Обратившись к формуле (4.40 Часть 1), получаем:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right). \quad (1.8)$$

т.е. спектр дискретизирующей последовательности состоит из бесконечной совокупности дельта-импульсов в частотной области. Данная спектральная плотность является периодической функцией с периодом $2\pi/\Delta[c^{-1}]$.

Наконец, подставив формулу (1.8) в (1.7) и изменив порядок следования операций интегрирования и суммирования, находим:

$$S_{\text{мип}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right). \quad (1.9)$$

Итак, спектр сигнала, полученного в результате идеальной дискретизации бесконечно короткими стробирующими импульсами, представляет собой сумму бесконечного числа «копий» спектра исходного аналогового сигнала. Копии располагаются на оси частот через одинаковые интервалы $2\pi/\Delta$, равные значению угловой частоты первой гармоники дискретизирующей импульсной последовательности (рисунок 1.5 а, б).

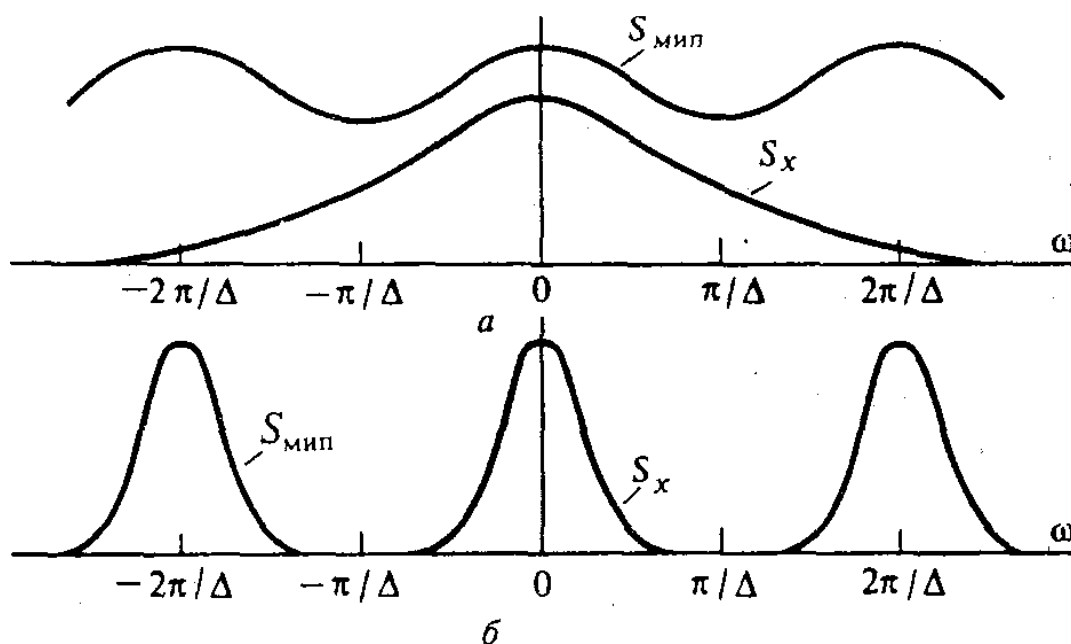


Рисунок 1.5 – Спектральная плотность модулированной импульсной последовательности при различных значениях верхней граничной частоты: *а* – верхняя граничная частота велика; *б* – верхняя граничная частота мала

1.2.4 Восстановление непрерывного сигнала по модулированной импульсной последовательности

В дальнейшем будем полагать, что вещественный сигнал $x(t)$ имеет низкочастотный спектр, симметричный относительно точки $\omega = 0$ и ограниченный верхней граничной частотой ω_B . Из рисунка 1.5, *б* следует, что если $\omega_B \leq \pi/\Delta$, то отдельные копии спектра $S_x(\omega)$ не накладываются друг на друга.

Поэтому аналоговый сигнал с таким спектром, подвергнутый импульсной дискретизации, может быть совершенно точно восстановлен с помощью идеального ФНЧ, на вход которого подана импульсная последовательность вида (1.5). При этом наибольший допустимый интервал дискретизации $\Delta \leq \pi/\omega_B$, что согласуется с теоремой Котельникова.

Действительно, пусть фильтр, восстанавливающий непрерывный сигнал, имеет частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ K_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases}$$

Импульсная характеристика этого фильтра описывается выражением:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{K_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t}.$$

Принимая во внимание, что МИП-сигнал вида (1.5) есть взвешенная сумма дельта-импульсов, находим отклик на выходе восстанавливающего фильтра:

$$y(t) = \frac{K_0 \omega_B \Delta}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin[\omega_B(t - k\Delta)]}{\omega_B(t - k\Delta)}. \quad (1.10)$$

Данный сигнал с точностью до масштабного коэффициента повторяет исходное колебание с ограниченным спектром.

Идеальный ФНЧ физически нереализуем и может служить лишь теоретической моделью для объяснения принципа восстановления сообщения по его дискретным импульсным отсчетам. Реальный фильтр нижних частот имеет АЧХ, которая либо охватывает несколько лепестков спектральной диаграммы МИП, либо, концентрируясь вблизи нулевой частоты, оказывается значительно уже центрального лепестка спектра. Для примера на рисунке 1.6, б-е приведены кривые, характеризующие сигнал на выходе RC-цепи, используемой в качестве восстанавливающего фильтра (рисунок 1.6, а).

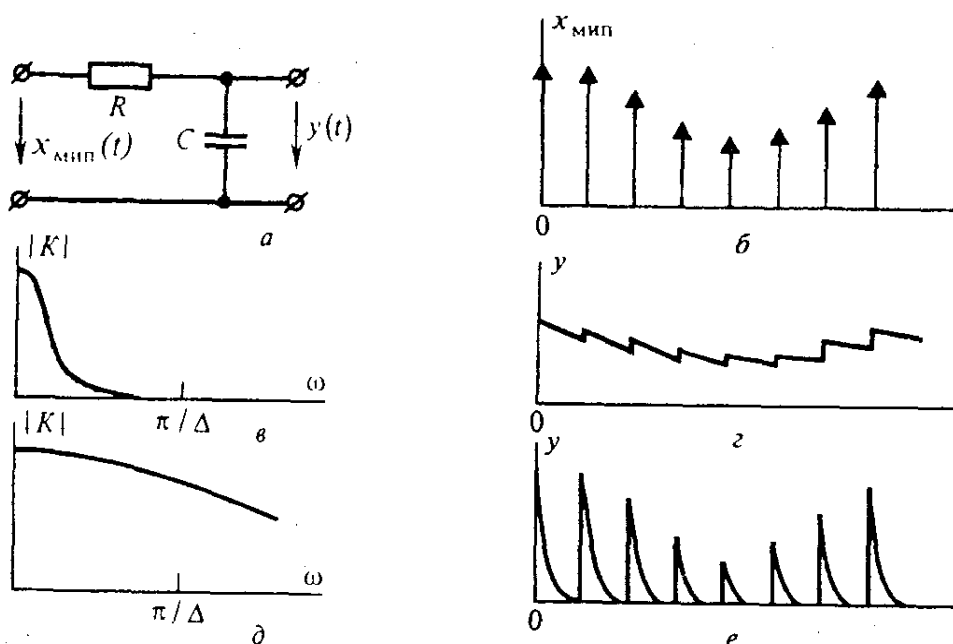


Рисунок 1.6 – Восстановление непрерывного сигнала по его импульсным отсчетам с помощью RC-цепи: а – схема фильтра; б – дискретный входной сигнал; в, г – АЧХ фильтра и сигнал на его выходе в случае $RC \gg \Delta$; д, е – то же, для случая $RC \gg \Delta$

Из приведенных графиков видно, что реальный восстанавливающий фильтр неизбежно искажает входное колебание. Заметим, что для восстановления сигнала можно использовать как центральный, так и любой боковой лепесток спектральной диаграммы.

1.2.5 Определение аналогового сигнала по совокупности отсчетов

Располагая МИП-представлением, можно не только восстановить аналоговый сигнал, но и найти его спектральную плотность. Для этого следует прежде всего непосредственно связать спектральную плотность МИП с отсчетными значениями:

$$S_{\text{МИП}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{МИП}}(t) e^{-i\omega t} dt = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta) e^{-i\omega t} dt = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k\Delta}. \quad (1.11)$$

С другой стороны, спектральная плотность $S_{\text{МИП}}(\omega)$ была найдена ранее другим способом [см. формулу (1.9)]. Поэтому справедливо соотношение:

$$\Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k\Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x \left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta} \right). \quad (1.12)$$

известное в математике как формула суммирования Пуассона.

Однозначно найти функцию $S_x(\omega)$, зная левую часть равенства (1.12) из результатов измерений, вообще говоря, невозможно ввиду эффекта наложения копий спектра. Исключение составляет случай, когда заранее известно, что исходный сигнал $x(t)$ имеет спектр низкочастотного вида, удовлетворяющий условию теоремы Котельникова. Тогда очевидно, что спектр аналогового сигнала:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\frac{\pi}{\Delta}, \\ \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k\Delta}, & -\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta}, \\ 0, & \omega > \frac{\pi}{\Delta}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Данная формула исчерпывающе решает поставленную задачу при указанном выше ограничении.

1.3 Дискретизация периодических сигналов

Модель дискретного сигнала вида (1.5) предполагает, что отсчетные значения аналогового колебания $x(t)$ могут быть получены в неограниченном числе точек на оси времени. Практически получить столь обширные сведения о сигнале, безусловно, невозможно, поскольку обработка всегда ведется на конечном интервале времени.

Изучим особенности спектрального представления дискретного сигнала, который задан на отрезке $[0, T]$ своими отсчетами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ взятыми соответственно в моменты времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta$; полное число отсчетов $N = T/\Delta$. Массив этих чисел,

вещественных или комплексных, является единственным источником сведений о спектральных свойствах сигнала $x(t)$.

Методика изучения таких дискретных сигналов состоит в том, что полученная выборка отсчетных значений мысленно повторяется бесконечное число раз. В результате сигнал становится периодическим (рисунок 1.7).

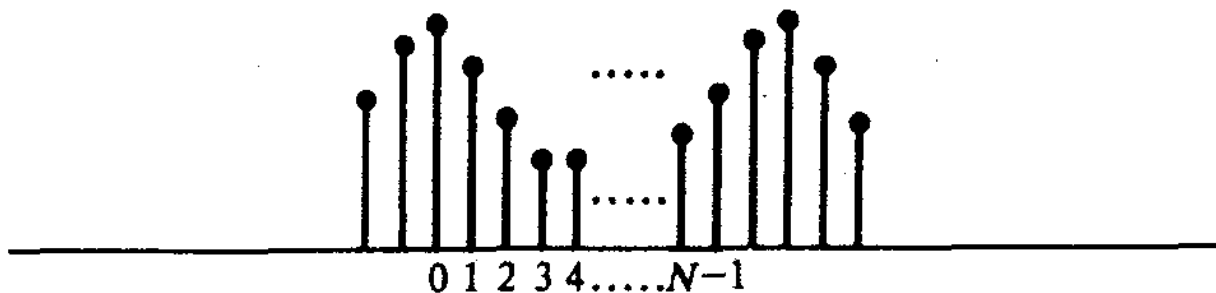


Рисунок 1.7 – Дискретное представление периодического сигнала

Сопоставив такому сигналу некоторую математическую модель, можно воспользоваться разложением в ряд Фурье и найти соответствующие амплитудные коэффициенты. Совокупность этих коэффициентов образует спектр дискретного периодического сигнала.

1.3.1. Дискретное преобразование Фурье

Воспользуемся моделью в виде последовательности дельта-импульсов и сопоставим исходному колебанию $x(t)$ его дискретное МИП-представление:

$$x_{\text{мип}}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta). \quad (1.14)$$

Представим дискретную модель (1.14) комплексным рядом Фурье:

$$x_{\text{мип}}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n t / T}. \quad (1.15)$$

с коэффициентами:

$$C_n = \frac{1}{T\Delta} \int_0^T x_{\text{мип}}(t) e^{-\frac{i2\pi n t}{T}} dt. \quad (1.16)$$

Подставляя формулу (1.14) в (1.16) и вводя безразмерную переменную $\xi = t / \Delta$, получим:

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta) e^{-\frac{i2\pi n t}{T}} dt = \\
&= \frac{1}{N} \int_0^N \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(\xi - k) e^{-\frac{i2\pi n \xi}{N}} d\xi = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^N \delta(\xi - k) e^{-\frac{i2\pi n \xi}{N}} d\xi.
\end{aligned}$$

Наконец, используя фильтрующее свойство дельта - функции, имеем:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi n k / N}. \quad (1.17)$$

Формула (1.17) определяет последовательность коэффициентов, образующих дискретное преобразование Фурье (ДПФ) рассматриваемого сигнала. Отметим некоторые очевидные свойства ДПФ:

1. Дискретное преобразование Фурье есть линейное преобразование, т.е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.
2. Число различных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ вычисляемых по формуле (1.17), равно числу N отсчетов за период; при $n = N$, коэффициент $C_N = C_0$.
3. Коэффициент C_0 (постоянная составляющая) является средним значением всех отсчетов:

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

4. Если N – четное число, то:

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^k$$

5. Пусть отсчетные значения x_k – вещественные числа. Тогда коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi(N-n)k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{i2\pi n k / N} = C_n^*.$$

Поэтому можно считать, что коэффициенты $C_{N/2+1}, \dots, C_{N-1}$ отвечают отрицательным частотам. При изучении амплитудного спектра сигнала они не дают новых сведений.

Пример 1.1 Дискретный сигнал на интервале своей периодичности задан шестью равноотстоящими отсчетами $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Найти коэффициенты ДПФ этого сигнала.

Используя основную формулу (1.17), непосредственно вычисляем:

$$C_0 = 3/6 = 0.5,$$

$$C_1 = 1/6(1 + e^{-i\pi/3} + e^{-i2\pi/3}) = 1/6(1 - i\sqrt{3}),$$

$$C_2 = 1/6(1 + e^{-i2\pi/3} + e^{-i4\pi/3}) = 0,$$

$$C_3 = 1/6(1 + e^{-i\pi} + e^{-i2\pi}) = 1/6.$$

Последующие коэффициенты находят на основании свойства 5:

$$C_4 = C_2^* = 0, C_5 = C_1^* = 1/6(1 + i\sqrt{3}).$$

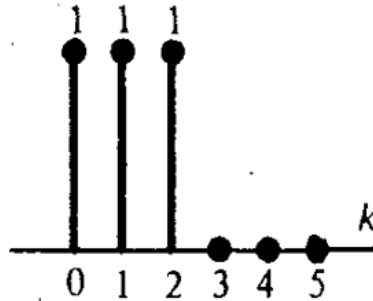


Рисунок 1.8 – Коэффициенты ДПФ сигнала примера 1.1

Итак, располагая дискретным сигналом с числом отсчетов $N = 6$, можно найти постоянную составляющую, а также комплексные амплитуды первой, второй и третьей гармоник исходного непрерывного сигнала. Ясно, что при любом четном N число находимых гармоник составляет половину числа отсчетов. Это положение непосредственно вытекает из теоремы Котельникова. Действительно, верхнюю граничную частоту в спектре дискретизируемого сигнала следует находить из соотношения $f_B = 1/(2\Delta) = (N/2)f_1$, где $f_1 = 1/T$ – частота первой гармоники.

1.3.2 Восстановление исходного сигнала по ДПФ

Если на основании совокупности отсчетов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ некоторого сигнала найдены коэффициенты ДПФ $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N/2}$, то по ним всегда можно восстановить исходный сигнал $x(t)$ с ограниченным спектром, который был подвергнут дискретизации. Ряд Фурье такого сигнала принимает, очевидно, вид конечной суммы:

$$x(t) = C_0 + 2|C_1| \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) + 2|C_2| \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi_2\right) + \dots + 2|C_{N/2}| \cos\left(\frac{N\pi t}{T} + \varphi_{N/2}\right),$$

где $\varphi_i = \arg C_i$ – фазовый угол коэффициента ДПФ.

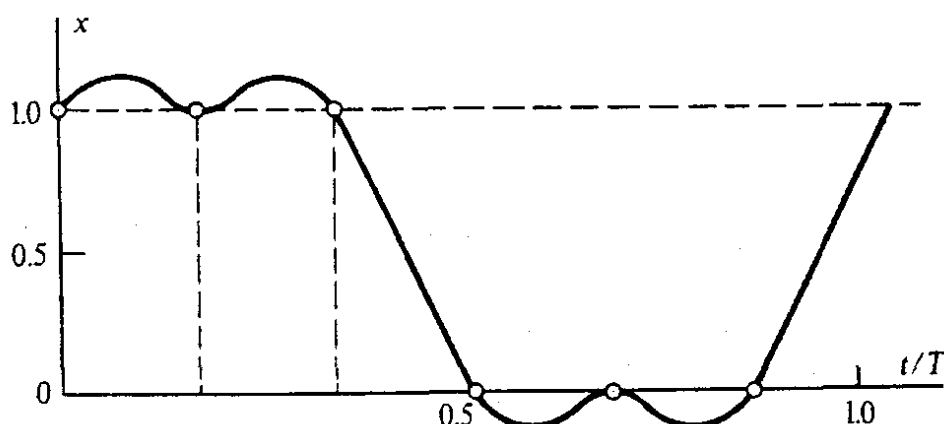


Рисунок 1.9 – Сигнал, восстановленный по коэффициентам ДПФ

В качестве примера на рисунке 1.9 изображен сигнал $x(t)$, восстановленный по своим отсчетам в соответствии с данными примера 1.1. На основании формулы (1.18) этот сигнал имеет вид:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{6} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right).$$

Следует подчеркнуть, что восстановление непрерывного сигнала по формуле (1.18) есть не приближенная, а точная операция, полностью эквивалентная получению текущих значений сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам. Однако процедура, использующая ДПФ, в ряде случаев предпочтительна. Она приводит к конечным суммам гармоник, в то время как ряд Котельникова для периодического сигнала принципиально должен содержать бесконечное число членов.

1.3.3 Обратное дискретное преобразование Фурье

Задача дискретного спектрального анализа может быть поставлена и по-иному. Допустим, что коэффициенты C_n образующие ДПФ, заданы. Положим в формуле (15) $t = k \cdot \Delta$ и учтем, что суммируется лишь конечное число членов ряда, которые отвечают гармоникам, содержащимся в спектре исходного сигнала. Таким образом, получаем формулу для вычисления отсчетных значений:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{i2\pi nk/N}, \quad (1.19)$$

выражающую алгоритм обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ).

Взаимно дополняющие друг друга формулы (1.17) и (1.19) являются дискретными аналогами обычной пары преобразований Фурье для непрерывных сигналов.

В настоящее время дискретный спектральный анализ является одним из наиболее распространенных методов исследования сигналов с помощью компьютеров. Алгоритмы вычисления ДПФ и БПФ реализованы в таких широко распространенных прикладных математических пакетах, как Maple и MathCAD.

1.3.4 Геометрическая трактовка дискретного преобразования Фурье

Следует подчеркнуть, что МИП-сигнал вида (1.5) представляет собой лишь одну из возможных моделей дискретного сигнала. Такие модулированные последовательности естественно применять для описания импульсных колебаний АИМ или ШИМ. При обработке же радиотехнических сигналов с помощью вычислительных устройств дискретный сигнал выступает не как последовательность импульсов, а как упорядоченная последовательность чисел. Роль времени при этом играет целая переменная – номер соответствующего отсчета.

Дискретному преобразованию Фурье можно придать интересную и глубокую интерпретацию, если последовательность $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ рассматривать как вектор в N -мерном евклидовом пространстве. В таком пространстве имеется N линейно-независимых векторов:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,\dots,0), \\ e_1 &= (0,1,0,\dots,0), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e_{N-1} &= (0,0,0,\dots,1), \end{aligned} \tag{1.20}$$

образующих базис, который будем называть естественным базисом. При этом очевидно, что:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e_k,$$

т.е. отсчетные значения x_k служат проекциями вектора x на соответствующие базисные векторы.

Поскольку рассматриваемое пространство является евклидовым, норма этого вектора:

$$\|x\| = (\sum_{k=0}^{N-1} x_k x_k^*)^{1/2}.$$

В то время как скалярное произведение двух векторов x и y вычисляется по формуле:

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_k^*.$$

Векторы x и y ортогональны, если $(x, y) = 0$. Наряду с естественным базисом в N -мерном евклидовом пространстве можно ввести много других базисных систем.

Среди них особую роль играет базис Фурье, элементами которого служат векторы:

$$\begin{aligned} f_0 &= (1, 1, \dots, 1), \\ f_1 &= \left(1, e^{\frac{i2\pi}{N}}, e^{\frac{i4\pi}{N}}, \dots, e^{\frac{i2(N-1)\pi}{N}}\right), \\ f_2 &= \left(1, e^{\frac{i4\pi}{N}}, e^{\frac{i8\pi}{N}}, \dots, e^{\frac{i4(N-1)\pi}{N}}\right), \\ &\vdots \\ f_{N-1} &= \left(1, e^{\frac{i2\pi(N-1)}{N}}, e^{\frac{i4\pi(N-1)}{N}}, \dots, e^{\frac{i2\pi(N-1)^2}{N}}\right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Скалярное произведение элементов базиса Фурье:

$$(f_m, f_l) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi(m-l)k/N} = \begin{cases} N, m = l, \\ 0, m \neq l \end{cases} \quad (1.22)$$

Здесь верхнее равенство очевидно; сумма обращается в нуль при $m \neq l$, поскольку все слагаемые являются комплексными числами с единичным модулем и линейно нарастающим аргументом. При суммировании соответствующие векторы всегда образуют на комплексной плоскости правильный замкнутый многоугольник.

Итак, базис Фурье ортогонален, но не нормирован на единицу, поскольку:

$$\|f_m^2\| = N, m = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.23)$$

Найдем коэффициенты разложения некоторого вектора x по элементам базиса Фурье:

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} C_n f_n. \quad (1.24)$$

Для этого умножим обе части равенства (1.24) скалярно на базисный вектор f_n с фиксированным номером n :

$$(x, f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k(f_k, f_n).$$

Так как базис Фурье ортогонален, то в правой части отличным от нуля окажется лишь слагаемое с номером $k=n$:

$$(x, f_n) = C_n \|f_n\|^2.$$

Откуда:

$$C_n = \frac{1}{\|f_n\|^2} (x, f_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi nk/N}$$

что полностью совпадает с формулой (1.17), полученной на основе модели МИП-сигнала.

1.3.5 Алгоритмы быстрого преобразования Фурье

Как видно из формулы (1.17) или (1.19), чтобы вычислить ДПФ или ОДПФ последовательности из N элементов, требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Если длины обрабатываемых массивов имеют порядок тысячи или более, то использовать эти алгоритмы дискретного спектрального анализа в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного быстродействия вычислительных устройств.

Выходом из положения явился алгоритм *быстрого преобразования Фурье* (БПФ), предложенный в 60-х годах. Существенно сократить число выполняемых операций здесь удастся за счет того, что обработка входного массива сводится к нахождению ДПФ (или ОДПФ) массивов с меньшим числом членов.

Будем предполагать, и это существенно для метода БПФ, что число отсчетов $N = 2^p$, где p – целое число. Разобьем входную последовательность $\{x_k\}$ на две части с четными и нечетными номерами:

$$\begin{aligned} \{x_k\}_{\text{чт}} &= \{x_{2k}\}, \{x_k\}_{\text{нч}} = \{x_{2k+1}\}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

и представим n -й коэффициент ДПФ в виде:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x_{2k} e^{-\frac{i4\pi nk}{N}} + x_{2k+1} e^{-\frac{i2\pi n(2k+1)}{N}} \right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{k\text{чт}} e^{-i\frac{2\pi nk}{N/2}} + e^{-i\frac{2\pi n}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{k\text{нч}} e^{-i\frac{2\pi nk}{N/2}} \right).$$

Непосредственно видно, что первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до $N/2-1$ выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$C_n = C_{n\text{чт}} + e^{-i\frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{нч}}, n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (1.26)$$

Теперь учтем, что последовательности коэффициентов, относящихся к четной и нечетной частям входного массива, являются периодическими с периодом $N/2$:

$$C_{n\text{чт}} = C_{(n+\frac{N}{2})\text{чт}}, C_{n\text{нч}} = C_{(n+\frac{N}{2})\text{нч}}.$$

Кроме того, входящий в формулу (1.26) множитель при можно преобразовать так:

$$e^{-i\frac{2\pi(\frac{N}{2}+n)}{N}} = e^{-i\pi} e^{-i\frac{2\pi n}{N}} = -e^{-i\frac{2\pi n}{N}}.$$

Отсюда находим выражение для второй половины множества коэффициентов ДПФ:

$$C_{\frac{N}{2}+n} = C_{n\text{чт}} - e^{-i\frac{2\pi n}{N}} C_{n\text{нч}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (1.27)$$

Формулы (1.26) и (1.27) лежат в основе алгоритма БПФ. Далее вычисления строят по итерационному принципу: последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами вновь разбивают на две части. Процесс продолжают до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из единственного элемента. Легко видеть, что ДПФ этого элемента совпадает с ним самим. Можно показать, что число операций, необходимых для вычисления БПФ, оценивается как $N \log_2 N$.

Выигрыш в скорости вычислений по сравнению с традиционным ДПФ достигает сотен и даже тысяч при достаточных длинах входных массивов

1.3.6 Дискретная свертка

По аналогии с обычной сверткой двух сигналов:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau.$$

вводят дискретную свертку - сигнал, отсчеты которого связаны с отсчетами дискретных сигналов $x_d(t)$ и $y_d(t)$ соотношением:

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1.28)$$

Найдем связь между коэффициентами дискретной свертки и ДПФ сигналов $x_d(t)$, $y_d(t)$. Для этого выразим текущие значения отсчетов x_k и y_{m-k} как ОДПФ от соответствующих спектров:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} e^{i2\pi nk/N},$$

$$y_{m-k} = \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl} e^{i2\pi l(m-k)/N},$$

а затем подставим эти величины в формулу (1.28):

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} e^{i2\pi nk/N} \sum_{l=0}^{N-1} C_{yl} e^{i2\pi l(m-k)/N}.$$

Изменив порядок суммирования, получим:

$$f_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} C_{xn} C_{yl} e^{i2\pi lm/N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi(n-l)k/N}. \quad (1.29)$$

Нетрудно заметить, что внутренняя сумма может быть вычислена на основании формулы (1.22), отображающей свойство ортогональности элементов базиса Фурье. Воспользовавшись этим, получаем:

$$f_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} C_{yn} e^{i2\pi mn/N}. \quad (1.30)$$

Поскольку формула (1.30) есть ОДФФ, приходим к выводу, что коэффициенты преобразования Фурье свертки являются произведениями коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов:

$$C_{fk} = C_{xk} C_{yk}, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (1.31)$$

Этот результат имеет большое значение в теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. Оказывается, что если сигналы достаточно длинны (например, содержат несколько тысяч отсчетов), то для вычисления свертки целесообразно вначале найти их ДПФ, перемножить коэффициенты, а затем воспользоваться формулой (1.30), применив алгоритм БПФ. Такой способ вычислений часто более экономичен, чем прямое использование формулы (1.28).

1.4 Теория Z-преобразования

При анализе и синтезе дискретных и цифровых устройств широко используют так называемое z-преобразование, играющее по отношению к дискретным сигналам такую же роль, как интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к непрерывным сигналам. В данном параграфе излагаются основы теории этого функционального преобразования и некоторые его свойства.

1.4.1 Определение Z-преобразования

Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ – числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчетные значения некоторого сигнала. Поставим ей в однозначное соответствие сумму ряда по отрицательным степеням комплексной переменной z :

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k}. \quad (1.32)$$

Назовем эту сумму, если она существует, z-преобразованием последовательности $\{x_k\}$. Целесообразность введения такого математического объекта связана с тем, что свойства дискретных последовательностей чисел можно изучать, исследуя их z-преобразования обычными методами математического анализа.

На основании формулы (1.32) можно непосредственно найти z-преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу с единственным отсчетом $\{x_k\} = (1, 0, 0, \dots)$ соответствует $X(z)=1$. Если же, например, $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ то:

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

1.4.2 Сходимость ряда

Если в ряде (1.32) число слагаемых бесконечно велико, то необходимо исследовать его сходимость. Из теории функций комплексного переменного известно следующее. Пусть коэффициенты рассматриваемого ряда удовлетворяют условию:

$$|x_k| < MR_0^k. \quad (1.33)$$

при любых $k \geq 0$. Здесь $M > 0$ и $R_0 > 0$ – постоянные вещественные числа. Тогда ряд (1.32) сходится при всех значениях z , таких, что $|z| > R_0$. В этой области сходимости сумма ряда представляет собой аналитическую функцию переменной z , не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек.

Рассмотрим, например, дискретный сигнал $\{x_k\} = (1, 1, 1, \dots)$, образованный одинаковыми единичными отсчетами и служащий моделью обычной функции включения. Бесконечный ряд $X(z) = 1 + 1/z + 1/z^2 + \dots$ является суммой геометрической прогрессии и сходится при любых z в кольце $|z| > 1$. Суммируя прогрессию, получаем:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

На границе области аналитичности при $z = 1$ эта функция имеет единственный простой полюс.

Аналогично получается z-преобразование бесконечного дискретного сигнала $\{x_k\} = (1, a, a^2, \dots)$, где a – некоторое вещественное число. Здесь:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

Данное выражение имеет смысл в кольцевой области $|z| > a$.

1.4.3 Z-преобразования непрерывных функций

Полагая, что отсчеты $\{x_k\}$ есть значения непрерывной функции $x(t)$ в точках $t = k\Delta$, любому сигналу $x(t)$ можно сопоставить его z -преобразование при выбранном шаге дискретизации:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta) z^{-k}. \quad (1.34)$$

Например, если $x(t) = \exp(at)$, то соответствующее z -преобразование:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(ak\Delta) z^{-k} = \frac{z}{z - \exp(a\Delta)}.$$

является аналитической функцией при $|z| > \exp(a\Delta)$.

1.4.4 Обратное Z-преобразование

Пусть $X(z)$ – функция комплексной переменной z , аналитическая в кольцевой области $|z| > R_0$. Замечательное свойство z -преобразования состоит в том, что функция $X(z)$ определяет всю бесконечную совокупность отсчетов $(x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Действительно, умножим обе части ряда (1.32) на множитель z^{m-1} :

$$z^{m-1}X(z) = x_0 z^{m-1} + x_1 z^{m-2} + \dots + x_m z^{-1} + \dots, \quad (1.35)$$

а затем вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции $X(z)$.

Обход контура интегрирования проводится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки:

При этом воспользуемся фундаментальным положением, вытекающим из теоремы Коши:

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } n = -1, \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

Очевидно, интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером m , поэтому:

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-1} X(z) dz. \quad (1.36)$$

Данная формула называется обратным z -преобразованием.

Пример 1.2 Задано z -преобразование вида $X(z)=(z + 1)/z$. Найти коэффициенты дискретного сигнала $\{x_k\}$, отвечающего этой функции.

Прежде всего отметим, что функция $X(z)$ аполитична во всей плоскости, за исключением точки $z=0$, поэтому она действительно может быть z -преобразованием некоторого дискретного сигнала.

Обращаясь к формуле (1.36), находим, что

$$x_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z+1}{z^2} dz = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z+1}{z} dz = 1,$$

.....

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-1}(z+1) dz = 0.$$

при любых $m \geq 2$. Таким образом, исходный дискретный сигнал имеет вид $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

1.4.5 Связь с преобразованиями Лапласа и Фурье

Определим при $t \geq 0$ сигнал вида идеальной МИП:

$$x_{\text{МИП}}(t) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta).$$

Преобразовав его по Лапласу, получим изображение:

$$F(p) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \exp(-pk\Delta), \quad (1.37)$$

которое непосредственно переходит в z -преобразование, если выполнить подстановку $z = \exp(p\Delta)$. Если же положить $z = \exp(i\omega\Delta)$, то выражение:

$$S(\omega) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \exp(-i\omega k\Delta). \quad (1.38)$$

будет преобразованием Фурье импульсной последовательности.

Установленный здесь факт дает возможность проводить формальную аналогию между спектральными свойствами непрерывных и дискретных сигналов.

1.4.6 Важнейшие свойства z -преобразования

Рассмотрим некоторые свойства z -преобразования.

1. Линейность. Если $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ – некоторые дискретные сигналы, причем известны соответствующие z - преобразования $X(z)$ и $Y(z)$, то сигналу $\{u_k\} = \{\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k\}$ будет отвечать преобразование $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ при любых постоянных α и β . Доказательство проводится путем подстановки суммы в формулу (1.32).

2. Z -преобразование смещенного сигнала. Рассмотрим дискретный сигнал $\{y_k\}$, получающийся из дискретного сигнала $\{x_k\}$ путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т.е. когда $y_k = x_{k-1}$. Непосредственно вычисляя z -преобразование, получаем следующий результат:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z). \quad (1.39)$$

Таким образом, символ z^{-1} служит оператором единичной задержки (на один интервал дискретизации) в z -области.

3. Z -преобразование свертки. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные сигналы, для которых определена свертка

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (1.40)$$

Применительно к дискретным сигналам по аналогии с (1.40) принято вводить дискретную свертку $\{f_k\}$ – последовательность чисел, общий член которой:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.41)$$

Вычислим z -преобразование дискретной свертки:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = X(z) Y(z). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Итак, свертке двух дискретных сигналов отвечает произведение z -преобразований.

1.5 Цифровые фильтры

В настоящее время широко используются методы обработки радиотехнических сигналов с помощью микроэлектронных вычислительных устройств и систем. В данном параграфе рассматривается простейший, наиболее изученный и внедренный класс систем

дискретной обработки сигналов – так называемые *линейные стационарные цифровые фильтры*. Выполняя, подобно аналоговым цепям, операцию частотной фильтрации, цифровые фильтры (ЦФ) обладают рядом существенных преимуществ. Сюда относятся, например, высокая стабильность параметров, возможность получать самые разнообразные формы АЧХ и ФЧХ. Цифровые фильтры не требуют настройки и легко реализуются на ЭВМ программными методами.

1.5.1 Принцип цифровой обработки сигналов

На рисунке 1.10 приведена основная структурная схема цифровой обработки сигналов.

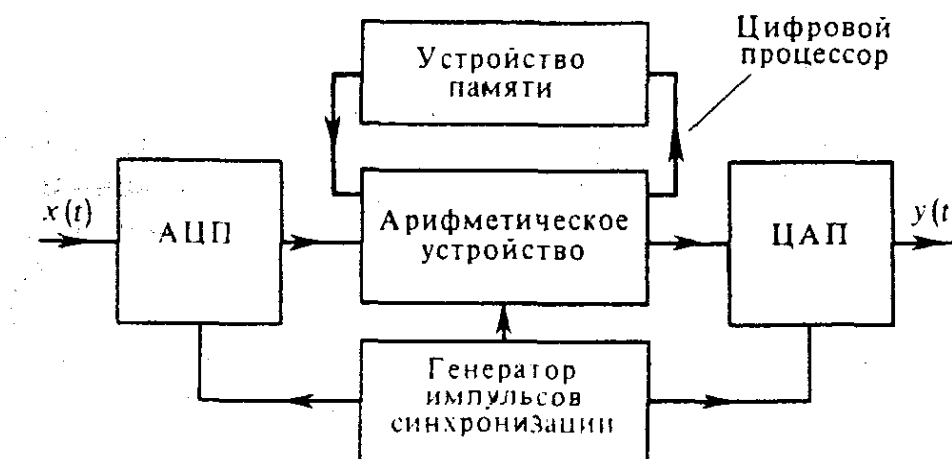


Рисунок 1.10 – Структурная схема цифровой обработки непрерывных сигналов

Непрерывный входной сигнал $x(t)$ поступает в аналого-цифровой преобразователь (АЦП), управляемый синхронизирующими импульсами от генератора, задающего частоту дискретизации. В момент подачи синхронизирующего импульса на выходе АЦП возникает сигнал, отображающий результат измерения мгновенного значения входного колебания в виде двоичного числа с фиксированным количеством разрядов. В зависимости от особенности построения устройства этому числу соответствует либо последовательность коротких импульсов (передача в последовательном коде), либо совокупность уровней напряжений на сигнальных шинах отдельных разрядов (передача в параллельном коде). Преобразованный таким образом сигнал поступает в основной блок устройства, так называемый *цифровой процессор*, состоящий из арифметического устройства и устройства памяти. Арифметическое устройство выполняет над цифрами ряд операций, таких, как умножение, сложение и сдвиг во времени на заданное число интервалов дискретизации. В

устройстве памяти может храниться некоторое число предшествующих отсчетов входного и выходного сигналов, которые необходимы для выполнения операций обработки.

Цифровой процессор преобразует поступающие в него числа в соответствии с заданным алгоритмом фильтрации и создает на выходе последовательность двоичных чисел, представляющих выходной сигнал. Если в дальнейшем необходимо иметь информацию в аналоговой форме, то используется цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП). Однако это устройство может и отсутствовать, если сигналы подвергаются только цифровым преобразованиям.

Основной техникой показатель ЦФ – быстродействие – зависит как от скорости протекания переходных процессов в микроэлектронных компонентах, так и от сложности алгоритма фильтрации.

Если в начале 70-х годов предельные частоты сигналов, обрабатываемых с помощью ЦФ, составляли несколько килогерц, то достижения современной микроэлектроники непрерывно расширяют этот диапазон. Цифровая фильтрация сигналов получила новый стимул развития с появлением относительно недорогих и надежных микропроцессоров, а также устройств памяти, выполненных по технологии больших интегральных схем (БИС).

1.5.2 Квантование сигналов в ЦФ

Специфика любого цифрового устройства – представление сигналов в виде последовательности чисел с ограниченной разрядностью. Поэтому мгновенное значение сигнала дискретизируется по уровню таким образом, что интервалом дискретизации (минимальной разностью между двумя соседними уровнями) служит единица младшего двоичного разряда.

Точное значение отсчета сигнала в двоичной форме имеет вид:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}, \quad (1.43)$$

где $a_n = 0$ или 1 . При ограничении длины числа x некоторым количеством разрядов N вместо точного значения получается его округленное (машинное) представление:

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} a_n 2^{-n} + \beta_N 2^{-N}. \quad (1.44)$$

причем коэффициент β_N равен либо a_N либо $a_N + 1$ в зависимости от того, нуль или единица содержится в $(N + 1)$ -м разряде.

В радиотехнике дискретные сигналы, уровни которых могут принимать лишь счетное множество значений, называют квантованными сигналами. Квантование сигналов приводит к специфической погрешности при обработке, которая получила название шума квантования. Прямой путь снижения этой погрешности - использование двоичных чисел с большим количеством разрядов. Однако при этом неизбежно снижается быстродействие ЦФ из-за увеличения времени выполнения операций над многоразрядными числами. Поэтому на практике в микропроцессорных системах для цифровой обработки сигналов и дискретного управления обычно применяют двоичные числа с количеством разрядов от 4 до 16.

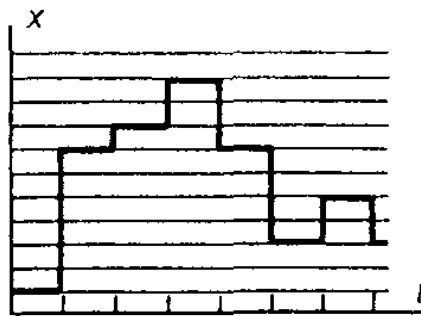


Рисунок 1.11 – Квантованный сигнал

1.5.3 Алгоритм линейной цифровой фильтрации

Математическая теория цифровых фильтров переносит на случай дискретных сигналов все основные положения теории линейных систем, преобразующих непрерывные сигналы.

Как известно, линейная стационарная система преобразует непрерывный входной сигнал $x(t)$ таким образом, что на ее выходе возникает колебание $y(t)$, равное свертке функции $x(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (1.45)$$

Линейный цифровой фильтр, по определению, есть дискретная система (физическое устройство или программа для компьютера), которая преобразует последовательность $\{x_k\}$ числовых отсчетов входного сигнала в последовательность $\{y_k\}$ отсчетов выходного сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots) \quad (1.46)$$

или сокращенно:

$$\{x_k\} \Rightarrow \{y_k\}.$$

Линейный цифровой фильтр обладает тем свойством, что сумма любого числа входных сигналов, умноженных на произвольные коэффициенты, преобразуется в сумму его откликов на отдельные слагаемые, т.е. из соответствий:

$$\{x_k^{(1)}\} \Rightarrow \{y_k^1\}, \dots, \{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{y_k^N\}$$

следует, что:

$$a_1\{x_k^{(1)}\} + \dots + a_N\{x_k^{(N)}\} \Rightarrow \{a_1y_k^1 + \dots + a_Ny_k^N\}, \quad (1.47)$$

при любых коэффициентах $a_1, a_2, \dots, a_N$.

Для того чтобы обобщить формулу (1.45) на случай дискретных сигналов, вводят понятие импульсной характеристики ЦФ. По определению, она представляет собой дискретный сигнал $\{h_k\}$, который является реакцией ЦФ на «единичный импульс» (1, 0, 0, 0, ...):

$$(1, 0, 0, 0 \dots) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3 \dots). \quad (1.48)$$

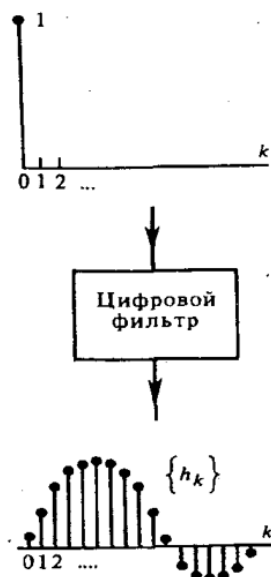


Рисунок 1.12 – Импульсная характеристика ЦФ

Линейный ЦФ стационарен, если при смещении входного единичного импульса на любое число интервалов дискретизации импульсная характеристика смещается таким же образом, не изменяясь по форме. Например:

$$\begin{aligned} (0, 1, 0, 0, 0 \dots) &\Rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \dots), \\ (0, 0, 1, 0 \dots) &\Rightarrow (0, 0, h_0, h_1, h_2, h_3 \dots). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Рассмотрим, каким образом из свойств линейности и стационарности вытекает наиболее общий алгоритм линейной цифровой фильтрации. Пусть $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ –

некоторый сигнал на входе ЦФ с известной импульсной характеристикой. Используя соотношения (1.47) и (1.49), можно записать m -й отсчет выходного сигнала $\{y_k\}$:

$$y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}. \quad (1.50)$$

Формула (1.50), играющая ведущую роль в теории линейной цифровой фильтрации, показывает, что выходная последовательность есть дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики фильтра.

Смысл этой формулы прост и нагляден: в момент каждого отсчета ЦФ проводит операцию взвешенного суммирования всех предыдущих значений входного сигнала, причем роль последовательности весовых коэффициентов играют отсчеты импульсной характеристики. Иными словами, ЦФ обладает некоторой «памятью» по отношению к прошлым входным воздействиям.

Практический интерес представляют лишь физически реализуемые ЦФ, импульсная характеристика которых не может стать отличной от нуля в отсчетных точках, предшествующих моменту подачи входного импульса. Поэтому для физически реализуемых фильтров коэффициенты $h_{-1}, h_{-2}, \dots$ обращаются в нуль и суммирование в (1.50) можно распространить на все положительные значения индекса k :

$$y_m = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.51)$$

1.5.4 Дискретные гармонические последовательности

Как известно, в теории линейных систем особую роль играют комплексные сигналы вида $x(t) = A \exp [i(\omega t + \varphi)]$, отображающие гармонические колебания. При дискретизации такого сигнала по времени получается так называемая **гармоническая последовательность**:

$$\{x_k\} = \{A \exp [i(\omega k \Delta + \varphi)]\}, \quad (1.52)$$

такая, что:

$$\operatorname{Re}\{x_k\} = \{A \cos(\omega k \Delta + \varphi)\}. \quad (1.53)$$

Следует иметь в виду, что последовательности (1.52) и (1.53) представляют дискретизированные гармонические сигналы неоднозначно. Действительно, эти последовательности не изменятся при замене частоты ω на $\omega + 2\pi n / \Delta = \omega + n\omega_d$, где n - любое целое число, ω_d - угловая частота дискретизации.

1.5.5 Частотный коэффициент передачи ЦФ

Предположим, что на вход линейного стационарного цифрового фильтра подана гармоническая последовательность $\{x_k\}$ вида (1.52), неограниченно протяженная во времени, т.е. с индексом k , принимающим значения $0, \pm 1, \pm 2$. Для того чтобы вычислить выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$, воспользуемся формулой свертки (1.50) и найдем m -й отсчет на выходе:

$$y_m = \sum_{k=-\infty}^m x_k h_{m-k} = A e^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega k \Delta} h_{m-k}.$$

Выполнив тождественные преобразования, получим:

$$y_m = A e^{i(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega(k-m)\Delta} h_{m-k}.$$

Введем новый индекс суммирования $n = m-k$. Тогда:

$$y_m = A e^{i(\omega m \Delta + \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega n \Delta} h_n. \quad (1.54)$$

В соответствии с формулой (1.54) выходной сигнал имеет структуру дискретной гармонической последовательности с той же частотой, что и входной сигнал. Выходные отсчеты получаются из входных, умножением на комплексную величину:

$$K(i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\omega n \Delta} h_n \quad (1.55)$$

называемую **частотным коэффициентом передачи ЦФ**, зависящую от частоты ω , а также от шага дискретизации Δ и от совокупности коэффициентов $\{h_k\}$ импульсной характеристики ЦФ.

Формула (1.55) позволяет сделать выводы:

- 1) частотный коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$;
- 2) функция $K(i\omega)$ есть преобразование Фурье импульсной характеристики ЦФ, представленной в форме последовательности дельта-импульсов:
[ср. с формулой (1.38)].

1.5.6 Системная функция ЦФ

Расчет важнейшей характеристики цифрового фильтра – частотного коэффициента передачи – удобно проводить, используя методы z-преобразований.

Сопоставим дискретным сигналам $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{h_k\}$ их z -преобразования $X(z)$, $Y(z)$, $H(z)$ соответственно. Выходной сигнал фильтра $\{y_k\}$ есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики, поэтому [см. формулы (1.42), (1.50)] выходному сигналу отвечает функция:

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (1.56)$$

Системной функцией стационарного линейного ЦФ называют отношение z -преобразования выходного сигнала к z -преобразованию сигнала на входе. Соотношение (1.56) устанавливает, что системная функция, фильтра:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}. \quad (1.57)$$

есть z -преобразование импульсной характеристики.

Сравнивая выражения (1.55) и (1.57), приходим к следующему выводу: чтобы получить частотный коэффициент передачи ЦФ из его системной функции, в последней нужно сделать подстановку $z = e^{i\omega\Delta}$

Пример 1.3 Цифровой фильтр имеет импульсную характеристику, состоящую из двух ненулевых отсчетов: $\{h_k\} = (1, -1, 0, 0, \dots)$. Вычислить частотный коэффициент передачи $K(i\omega)$ фильтра.

Здесь системная функция $H(z) = 1 - z^{-1}$.

Откуда: $K(i\omega) = 1 - e^{-i\omega\Delta} = [1 - \cos(\omega\Delta)] + i\sin(\omega\Delta)$.

Уравнение АЧХ фильтра имеет вид:

$$K(i\omega) = \sqrt{[1 - \cos(\omega\Delta)]^2 + \sin^2(\omega\Delta)} = 2 \left| \sin\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right) \right|.$$

в то время как ФЧХ описывается выражением:

$$\varphi_k(\omega) = \arctg \frac{\sin(\omega\Delta)}{1 - \cos(\omega\Delta)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega\Delta}{2}.$$

Амплитудно-частотная характеристика фильтра является периодической функцией, но практически она имеет смысл лишь в интервале частот от 0 до $\omega = \pi/\Delta$. На верхней частоте интервала каждому периоду дискретизированного гармонического сигнала соответствуют два отсчета. По теореме Котельникова это есть предельное значение частоты сигнала, который может однозначно восстановлен по своим отсчетам.

Заметим, что если на вход такого фильтра поступает гармонический сигнал с частотой, значительно более низкой, чем частота дискретизации, так что $\omega\Delta \ll 1$, то:

$$K(i\omega) = \left[1 - 1 + \frac{1}{2}(\omega\Delta)^2 - \dots \right] + i \left[\omega\Delta - \frac{1}{6}(\omega\Delta)^3 + \dots \right] \approx i\omega\Delta.$$

Поэтому такая система приближенно выполняет операцию дифференцирования относительно медленных входных сигналов.

1.6 Реализация алгоритмов цифровой фильтрации

Физически осуществимые ЦФ, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в i -й дискретный момент времени могут использовать следующие данные:

а) значение входного сигнала в момент i -го отсчета, а также некоторое число «прошлых» входных отсчетов $x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}, \dots, x_{i-m}$;

б) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-n}$.

Целые числа m и n определяют порядок ЦФ.

Классификация ЦФ проводится по-разному в зависимости от того, как используется информация о прошлых состояниях системы

1.6.1 Трансверсальные цифровые фильтры

Так принято называть фильтры, которые работают в соответствии с алгоритмом:

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m}, \quad (1.58)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – последовательность коэффициентов.

Число m является порядком трансверсального цифрового фильтра. Как видно из формулы (1.58), трансверсальный фильтр проводит взвешенное суммирование предшествующих отсчетов входного сигнала и не использует прошлые отсчеты выходного сигнала. Применив z -преобразование к обеим частям выражения (1.58), убеждаемся, что:

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}) X(z).$$

Отсюда следует, что системная функция:

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m}{z^m} \quad (1.59)$$

является дробно-рациональной функцией z , имеющей m -кратный полюс при $z = 0$ и m нулей, координаты которого определяются коэффициентами фильтра.

Алгоритм функционирования трансверсального ЦФ поясняется структурной схемой, приведенной на рисунке 1.13.

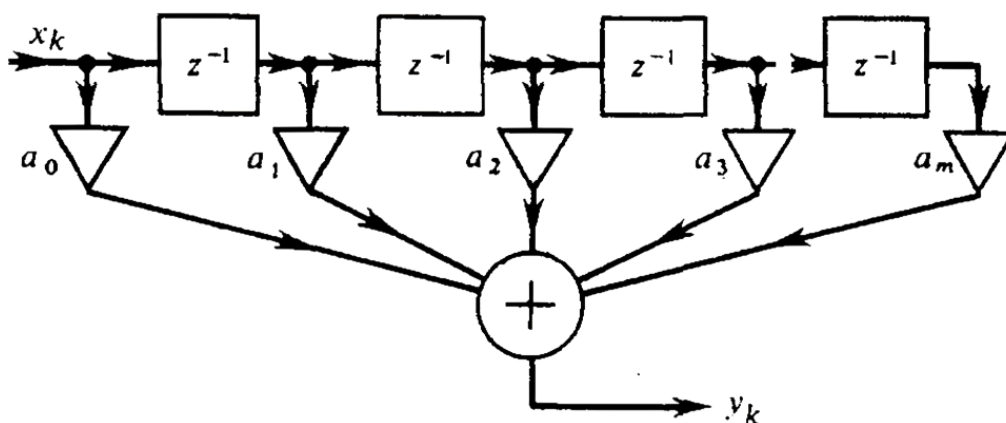


Рисунок 1.13 – Схема построения трансверсального ЦФ

Основными элементами фильтра служат блоки задержки отсчетных значений на один интервал дискретизации (прямоугольники с символами z^{-1}), а также масштабные блок выполняющие в цифровой форме операции умножения на соответствующие коэффициенты. С выходов масштабных блоков сигналы поступают в сумматор, где, складываясь образуют отсчет выходного сигнала. Вид представленной здесь схемы объясняет смысл термина «трансверсальный фильтр» (от английского transverse – поперечный).

Программная реализация трансверсального ЦФ

Следует иметь в виду, что структурная схема, изображенная на рисунке 1.13, не является принципиальной схемой электрической цепи, а служит лишь графическим изображением алгоритм обработки сигнала. Используя средства языка ФОРТРАН рассмотрим фрагмент программы, реализующей трансверсальную цифровую фильтрацию.

Пусть в оперативной памяти компьютера образованы два одномерных массива длиной M ячеек каждый: массив с именем X , в котором хранятся значения входного сигнала, и массив с именем A , содержащий значения коэффициентов фильтр:

Содержимое ячеек массива X меняется каждый раз с получением нового отсчета входного сигнала. Предположим, что этот массив заполнен предыдущими отсчетами входной последовательности, и рассмотрим ситуацию, возникающую в момент прихода очередного отсчета, которому в программе присвоено имя S . Данный отсчет должен разместиться в ячейке с номером 1, но лишь после того, как предыдущая запись будет сдвинута на одну позицию вправо, т. е. в сторону запаздывания.

Элементы сформированного, таким образом массива X почленно умножаются на элементы массива A и результат заносится в ячейку с именем Y , где накапливается отсчетное значение выходного сигнала. Ниже приводится текст программы трансверсальной цифровой фильтрации:

DO1 $K = 1, M - 1$

$$1 \quad X(M - K + 1) = X(M - K)$$

$$X(1) = S$$

С МАССИВ X СФОРМИРОВАН

$$Y = 0.$$

DO2 $K = 1, M$

$$2 \quad Y = Y + X(K) * A(K)$$

Импульсная характеристика

Вернемся к формуле (1.59) и вычислим импульсную характеристику трансверсального ЦФ, осуществив обратное Z-преобразование. Легко видеть, что каждое слагаемое функции $H(z)$ дает вклад, равный соответствующему коэффициенту a_n , смещенному на n позиций в сторону запаздывания. Таким образом, здесь:

$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m). \quad (1.60)$$

К такому выводу можно прийти и непосредственно, рассматривая структурную схему фильтра (см. рисунок 1.13) и полагая, что на его вход подан «единичный импульс» (1, 0, 0, 0, ...).

Важно отметить, что импульсная характеристика трансверсального фильтра содержит конечное число членов.

Частотная характеристика

Если в формуле (1.59) провести замену переменной $z = \exp(i\omega\Delta)$, то получим частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = a_0 + a_1 e^{i\omega\Delta} + a_2 e^{i2\omega\Delta} + \dots + a_m e^{im\omega\Delta}. \quad (1.61)$$

Предполагается, что отсчеты входного сигнала и коэффициенты фильтра представляются вещественными числами.

При заданном шаге дискретизации Δ можно реализовать самые разнообразные формы АЧХ, подбирая должным образом весовые коэффициенты фильтра.

Пример 1.4. Исследовать частотные характеристики трансверсального цифрового фильтра 2-го порядка, выполняющего усреднение текущего значения входного сигнала и двух предшествующих отсчетов по формуле:

$$y_i = \frac{1}{3} (x_i + x_{i-1} + x_{i-2}). \quad (1.62)$$

Системная функция этого фильтра:

$$H(z) = \frac{1}{3} (1 + z^{-1} + z^{-2}).$$

откуда находим частотный коэффициент передачи:

$$|K(i\omega)| = \frac{1}{3}(1 + e^{-i\omega\Delta} + e^{-i2\omega\Delta}) = \frac{1}{3}\{[1 + \cos(\omega\Delta) + \cos(2\omega\Delta)] - i[\sin(\omega\Delta) + \sin(2\omega\Delta)]\}.$$

Элементарные преобразования приводят к следующим выражениям для АЧХ и ФЧХ данной системы:

$$|K(i\omega)| = \frac{1}{3}\sqrt{3 + 4\cos(\omega\Delta) + 2\cos(2\omega\Delta)},$$

$$\varphi_K(\omega) = -\text{arctg} \frac{\sin(\omega\Delta) + \sin(2\omega\Delta)}{1 + \cos(\omega\Delta) + \cos(2\omega\Delta)} = -\omega\Delta.$$

Соответствующие графики представлены на рисунке 1.14 (а, б), где по горизонтальным осям отложена величина $\omega\Delta$ - фазовый угол интервала дискретизации при текущем значении частоты.

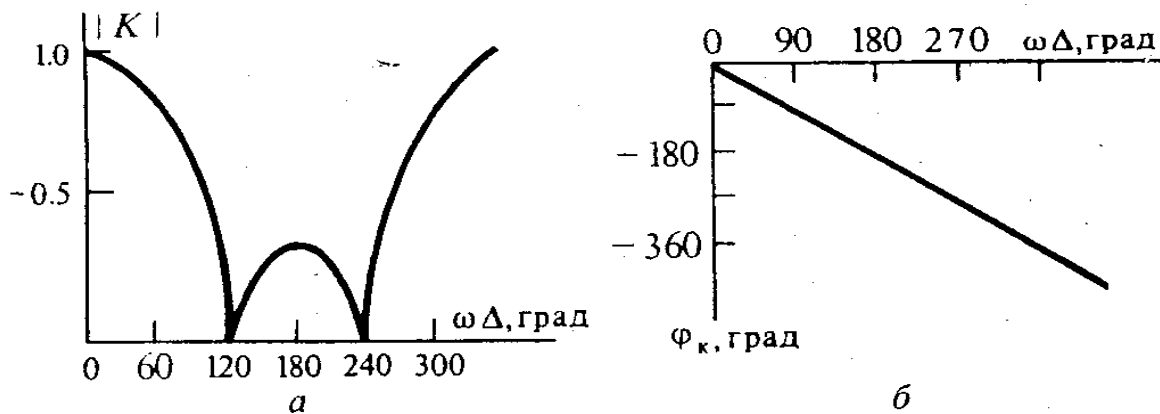


Рисунок 1.14 – Частотные характеристики трансверсального ЦФ из примера 1.4: а – АЧХ; б – ФЧХ

Предположим, например, что $\omega\Delta = 60^\circ$, т.е. на один период гармонического входного колебания приходится шесть отсчетов. При этом входная последовательность будет иметь вид:

$$\dots, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \dots$$

(абсолютные значения отсчетов не играют роли, поскольку фильтр линейен). Используя алгоритм (1.62), находим выходную последовательность:

$$\dots, 2/3, 2/3, 0, -2/3, -2/3, 0, \dots$$

Можно заметить, что ей отвечает гармонический выходной сигнал той же частоты, что и на входе, с амплитудой, равной $2/3 = 0.66$ от амплитуды входного колебания и с начальной фазой, смещенной на 60° в сторону запаздывания.

При $\omega\Delta < 120^\circ$ рассматриваемый фильтр сглаживает входную последовательность и может играть роль ФНЧ. Однако частотная характеристика фильтра периодична и немонотонна. Если исходный аналоговый сигнал не был подвергнут предварительной

частотной фильтрации и в нем присутствуют составляющие, для которых $\omega\Delta > 180^\circ$ (условия теоремы Котельникова не выполняются), то они не будут ослабляться данным ЦФ. Более того, из-за наличия высокочастотных составляющих цифро-аналоговый преобразователь восстановит некоторое низкочастотное колебание, которое совсем не содержалось во входном сигнале. Это паразитное явление (эффект «наложения» или «маскировки», высокочастотных составляющих спектра) в принципе присуще любым дискретным системам. Оно заставляет уделять серьезное внимание предварительной обработке сигнала, подвергаемого цифровой фильтрации.

1.6.2 Рекурсивные цифровые фильтры

Этот вид цифровых фильтров характерен тем, что для формирования i -го выходного отсчета используются предыдущие значения не только входного, но и выходного сигнала:

$$y_i = a_0x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_mx_{i-m} + b_1y_{i-1} + b_2y_{i-2} + \dots + b_ny_{i-n} \quad (1.63)$$

причем коэффициенты $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, определяющие рекурсивную часть алгоритма фильтрации, не равны нулю одновременно. Чтобы подчеркнуть различие структур двух видов ЦФ, трансверсальные фильтры называют также нерекурсивными фильтрами.

Системная функция рекурсивного ЦФ

Выполнив z-преобразование обеих частей рекуррентного соотношения (1.63), находим, что системная функция:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}}{1 - b_1z^{-1} - \dots - b_nz^{-n}} = \\ &= \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_mz^{n-m}}{z^n - b_1z^{n-1} - \dots - b_n}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

описывающая частотные свойства рекурсивного ЦФ, имеет на z -плоскости n полюсов. Если коэффициенты рекурсивной части алгоритма вещественны, то эти полюсы либо лежат на вещественной оси, либо образуют комплексно-сопряженные пары.

Структурная схема рекурсивного ЦФ

На рисунке 1.15 изображена схема алгоритма вычислений, проводимых в соответствии с формулой (1.63).

Верхняя часть структурной схемы отвечает трансверсальной (нерекурсивной) части алгоритма фильтрации. Для ее реализации требуется в общем случае $m + 1$ масштабных блоков (операций умножения) и m ячеек памяти, в которых хранятся входные отсчеты.

Рекурсивной части алгоритма соответствует нижняя часть структурной схемы. Здесь используются n последовательных значений выходного сигнала, которые в процессе работы фильтра перемещаются из ячейки в ячейку путем сдвига.

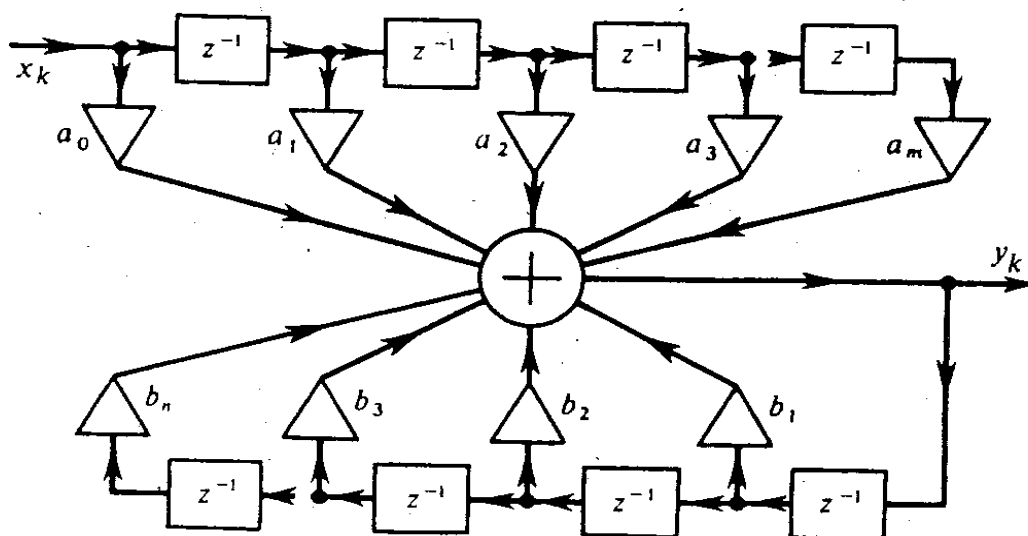


Рисунок 1.15 – Структурная схема рекурсивного ЦФ

Недостатком данного принципа реализации является потребность в большом числе ячеек памяти, отдельно для рекурсивной и нерекурсивной частей. Более совершенны канонические схемы рекурсивных ЦФ, в которых используется минимально возможное количество ячеек памяти, равное наибольшему из чисел m и n . В качестве примера на рисунке 1.16 изображена структурная схема канонического рекурсивного фильтра 2-го порядка, которой отвечает системная функция:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}. \quad (1.65)$$

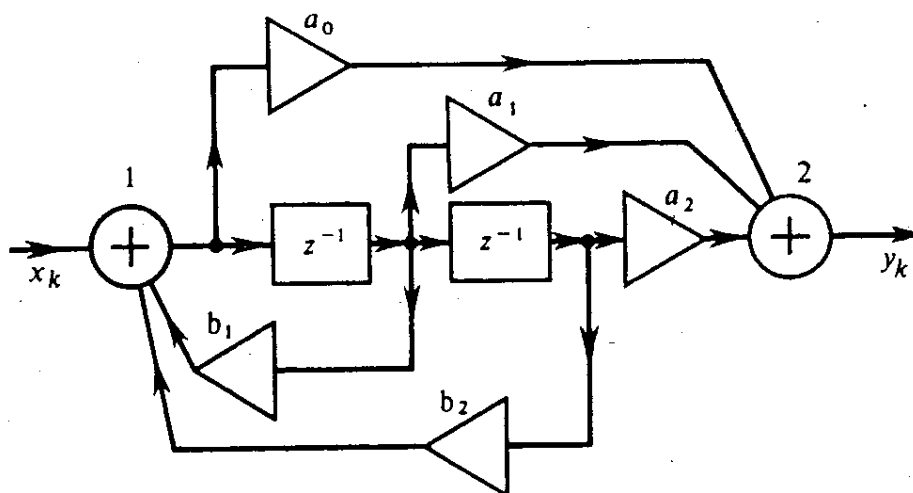


Рисунок 1.16 – Структурная схема канонического рекурсивного ЦФ 2-го порядка

Для того чтобы убедиться в том, что эта система реализует заданную функцию, рассмотрим вспомогательный дискретный сигнал $\{w_k\}$ на выходе сумматора 1 и запишем два очевидных уравнения:

$$w_k = x_k + b_1 w_{k-1} + b_2 w_{k-2}, \quad (1.66)$$

$$y_k = a_0 + a_1 w_{k-1} + a_2 w_{k-2}. \quad (1.67)$$

Выполнив z-преобразование уравнения (1.66), находим, что:

$$W(z) = X(z)/(1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}). \quad (1.68)$$

С другой стороны, в соответствии с выражением (1.67):

$$Y(z) = W(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}). \quad (1.69)$$

Объединив соотношения (1.68) и (1.69), приходим к заданной системной функции (1.65).

Устойчивость рекурсивных ЦФ

Рекурсивный ЦФ является дискретным аналогом динамической системы с обратной связью, поскольку в ячейках памяти хранятся значения его предшествующих состояний.

Если заданы некоторые начальные условия, т.е. совокупность значений $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-m}$ то в отсутствие входного сигнала фильтр будет образовывать элементы бесконечной последовательности $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots$, играющей роль свободных колебаний.

Цифровой фильтр называется устойчивым, если возникающий в нем свободный процесс есть невозрастающая последовательность, т. е. значения $|y_n|$ при $n \rightarrow \infty$ не превышают некоторого положительного числа M независимо от выбора начальных условий.

Свободные колебания в рекурсивном ЦФ на основании алгоритма (1.63) являются решением линейного разностного уравнения:

$$y_i = b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + \dots + b_n y_{i-n}. \quad (1.70)$$

По аналогии с принципом решения линейных дифференциальных уравнений будем искать решение (1.70) в виде показательной функции:

$$y_i = \alpha^i. \quad (1.71)$$

с неизвестным пока значением α . Подставив (1.71) в (1.70) и сократив на общий множитель, убеждаемся, что α является корнем характеристического уравнения:

$$\alpha^n - b_1 \alpha^{n-1} - b_2 \alpha^{n-2} - \dots - b_n = 0. \quad (1.72)$$

На основании (1.64) это уравнение в точности совпадает с уравнением, которому удовлетворяют полюсы системной функции рекурсивного ЦФ. Пусть система корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ уравнения (1.72) найдена. Тогда общее решение разностного уравнения (1.70) будет иметь вид:

$$y_i = A_1 a_1^i + A_2 a_2^i + \dots + A_n a_n^i. \quad (1.73)$$

Коэффициенты должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись начальные условия.

Если все полюсы системной функции $H(z)$, т.е. числа $z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$, по модулю не превосходят единицы, располагаясь внутри единичного круга с центром в точке $z=0$, то на основании (1.73) любой свободный процесс в ЦФ будет описываться членами убывающих геометрических прогрессий и фильтр будет устойчив. Ясно, что практически применяться могут только устойчивые цифровые фильтры.

Трансверсальные цифровые фильтры не являются динамическими системами и устойчивы при любом выборе коэффициентов

Пример 1.5 Исследовать устойчивость рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка с системной функцией $H(z) = \frac{a_0}{(1-b_1 z^{-1}-b_2 z^{-2})}$.

Характеристическое уравнение $z^2 - b_1 z - b_2 = 0$ имеет корни:

$$z_{1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}.$$

Кривая, описываемая уравнением $b_1^2 + 4b_2 = 0$, на плоскости (b_1, b_2) коэффициентов есть граница, выше которой полюсы системной функции вещественны, а ниже – комплексно сопряжены.

Для случая комплексно-сопряженных полюсов $|z_{1,2}|^2 = -b_2$, поэтому одной из границ области устойчивости является прямая $b_2 = -1$.

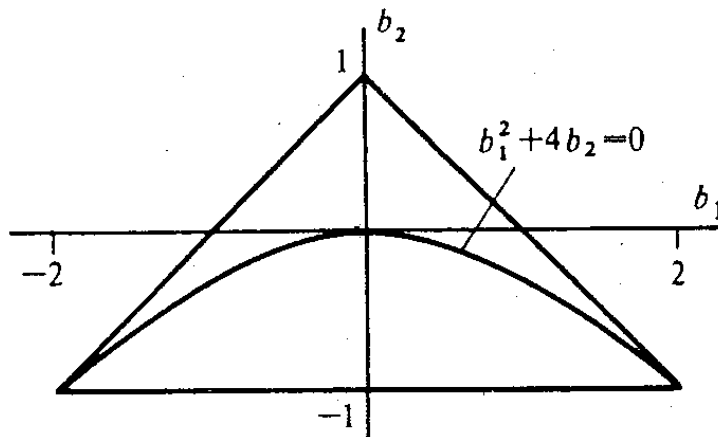


Рисунок 1.17 – Область устойчивости рекурсивного фильтра 2-го порядка

Рассматривая вещественные полюсы при $b_2 > 0$, имеем условие устойчивости в виде:

$$\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2} < 1,$$

или:

$$\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2} < 1 - b_1/2.$$

Возведя в квадрат обе части этого неравенства, видим, что границей области устойчивости является прямая $b_2 = 1 - b_1$. Аналогично исследуется случай $b < 0$.

В результате приходим к выводу, что данный рекурсивный фильтр устойчив, если значения коэффициентов b_1 и b_2 лежат внутри треугольной области, изображенной на рисунке 1.17.

Критерий устойчивости рекурсивного ЦФ

Задачу об устойчивости рекурсивного ЦФ произвольного порядка можно решить, связав данную проблему с расположением корней многочленов. Для этого заметим, что преобразование вида:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}. \quad (1.74)$$

взаимно-однозначно отображает левую полуплоскость комплексной переменной w на единичный круг в комплексной плоскости z с центром в точке $z = 0$. Действительно, точке $w = -1$ соответствует точка $z = 0$. В то же время мнимая ось в w -плоскости, т. е.. совокупность точек с координатами $w = ia$ (a – произвольное вещественное число), отображается в множество точек единичной окружности $z = -\exp[i2\text{artg}(a)]$.

Возьмем характеристическое уравнение ЦФ:

$$z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - \dots - b_n = 0. \quad (1.75)$$

и подставим в него переменную z , выраженную через переменную w , согласно формуле (1.74):

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n - b_1 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1} - b_2 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-2} - \dots - b_n = 0.$$

Приведя это выражение к общему знаменателю $(w-1)^n$, получим характеристическое уравнение относительно переменной w :

$$(w+1)^n - b_1(w-1)(w+1)^{n-1} - b_2(w-1)^2(w+1)^{n-2} - \dots - b_{n-1}(w-1)^{n-1}(w+1) - b_n(w-1)^n = 0 \quad (1.76)$$

Если многочлен по степеням w , образующий левую часть последней формулы, имеет корни лишь в левой полуплоскости, то исходный характеристический многочлен вида (1.75)

имеет корни, располагающиеся лишь в единичном круге на z -плоскости. Как следствие, анализируемый рекурсивный ЦФ будет устойчивым.

Отметим, что многочлен $(w - 1)^n$ не имеет корней в левой плоскости. Поэтому приведение к общему знаменателю правомерно

Пример 1.6 Исследовать устойчивость рекурсивного цифрового фильтра 3-го порядка с характеристическим уравнением $z^3 + 0.4z^2 - 0.5z + 1 = 0$.

В соответствии с формулой (1.76) получаем преобразованное уравнение:

$$\begin{aligned}(w + 1)^3 + 0.4(w - 1)(w + 1)^2 - 0.5(w - 1)^2(w + 1) + 1 &= \\ &= 0.9w^3 + 3.9w^2 + 3.1w + 1.1 = 0.\end{aligned}$$

Здесь все коэффициенты положительны и в то же время:

$$a_1 a_2 - a_3 a_0 = 11.1 > 0.$$

По критерию Рауса-Гурвица, данный многочлен устойчив. Значит, устойчив и анализируемый цифровой фильтр.

Импульсная характеристика рекурсивного ЦФ

Характерная черта, отличающая рекурсивный ЦФ, состоит в том, что из-за наличия обратной связи его импульсная характеристика имеет вид неограниченно-протяженной последовательности. Покажем это на примере простейшего фильтра 1-го порядка, описываемого системной функцией:

$$H(z) = \frac{a}{1 - bz^{-1}} = \frac{az}{z - b}.$$

Данный фильтр устойчив, если $|b| < 1$.

Известно [см. формулу (1.57)], что импульсную характеристику можно найти с помощью обратного z -преобразования, примененного к системной функции. Используя формулу (1.36), находим m -й член в последовательности $\{h_k\}$:

$$h_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{az^m}{z - b} dz. \quad (1.77)$$

Интегрирование осуществляется по единичной окружности, внутри которой располагается точка полюса $z = b$.

Поскольку вычет подынтегральной функции в точке полюса равен, как легко видеть, ab^m , искомая импульсная характеристика фильтра представляет собой убывающую геометрическую прогрессию:

$$\{h_k\} = (a, ab, ab^2, \dots). \quad (1.78)$$

1.7 Синтез линейных цифровых фильтров

Важное практическое значение имеют методы синтеза ЦФ, обеспечивающие заранее заданные свойства, например, требуемый вид импульсной или частотной характеристики. Ниже будет идти речь о тех приемах синтеза, которые существенным образом опираются на свойства аналоговых цепей, служащих модельными аналогами (прототипами) цифровых устройств.

1.7.1 Метод инвариантных импульсных характеристик

В основе этого простейшего метода синтеза ЦФ лежит предположение о том, что синтезируемый ЦФ должен обладать импульсной характеристикой, которая является результатом дискретизации импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра – прототипа. Имея в виду синтез физически реализуемых систем, для которых импульсная характеристика обращается в нуль при $t < 0$, получим следующее выражение импульсной характеристики ЦФ:

$$\{h_k\} = (h(0), h(\Delta), h(2\Delta), \dots). \quad (1.79)$$

Следует обратить внимание на то, что число отдельных членов в выражении импульсной характеристики ЦФ может быть, как конечным, так и бесконечным. Это определяет структуру синтезируемого фильтра: импульсной характеристике с конечным числом отсчетов отвечает трансверсальный фильтр, в то время как для реализации неограниченно протяженной импульсной характеристики требуется рекурсивный ЦФ.

Связь между коэффициентами импульсной характеристики и структурой ЦФ особенно проста для трансверсального фильтра. В общем случае синтез структуры фильтра осуществляется путем применения z -преобразования к последовательности вида (1.79). Найдя системную функцию $H(z)$ фильтра, следует сравнить ее с общим выражением (1.64) и определить коэффициенты трансверсальной и рекурсивной частей.

Степень приближения амплитудно-частотной характеристики синтезированного ЦФ к характеристике аналогового прототипа зависит от выбранного шага дискретизации Δ . При необходимости следует вычислить частотный коэффициент передачи ЦФ, осуществив в системной функции $H(z)$ замену переменной по формуле $z = \exp(i\omega\Delta)$, и затем сравнить результат с частотным коэффициентом передачи аналоговой цепи.

Пример 1.7 Рассмотреть синтез трансверсального цифрового фильтра, подобного динамической системе 1-го порядка (например, интегрирующей RC-цепи) с импульсной характеристикой вида:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-t/\tau), & t > 0. \end{cases} \quad (1.80)$$

(несущественный для задачи синтеза амплитудный множитель в импульсной характеристике положен равным единице).

Пусть импульсная характеристика аппроксимируется последовательностью из трех равноотстоящих отсчетов:

$$\{h_k\} = (1, e^{-\Delta/\tau}, e^{-2\Delta/\tau}). \quad (1.81)$$

Трансверсальный ЦФ с такой импульсной характеристикой описывается разностным уравнением:

$$y_k = x_k + e^{-\Delta/\tau} x_{k-1} + e^{-2\Delta/\tau} x_{k-2}. \quad (1.82)$$

Применив z-преобразование к последовательности (1.81), находим системную функцию ЦФ:

$$H(z) = 1 + e^{-\Delta/\tau} z^{-1} + e^{-2\Delta/\tau} z^{-2}, \quad (1.83)$$

откуда частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = 1 + e^{-\Delta/\tau} e^{-i\omega\Delta} + e^{-2\Delta/\tau} e^{-i2\omega\Delta}. \quad (1.84)$$

Пример 1.8 Рассмотреть случай, когда импульсная характеристика (1.80) аналоговой цепи аппроксимируется бесконечной дискретной последовательностью:

$$\{h_k\} = (1, e^{-\Delta/\tau}, e^{-2\Delta/\tau}, \dots). \quad (1.85)$$

Выполнив z-преобразование импульсной характеристики (1.85), получим системную функцию:

$$H(z) = 1 + e^{-\Delta/\tau} z^{-1} + e^{-2\Delta/\tau} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-\Delta/\tau} z^{-1}}. \quad (1.86)$$

Данной системной функции отвечает рекурсивный ЦФ 1-го порядка, содержащий, помимо сумматора, один масштабный блок и один элемент задержки.

Частотный коэффициент передачи фильтра:

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 - e^{-\Delta/\tau} e^{-i\omega\Delta}}. \quad (1.87)$$

1.7.2 Сравнение трансверсальных и рекурсивных ЦФ

Желательно, чтобы АЧХ синтезируемого ЦФ достаточно точно аппроксимировала АЧХ аналогового прототипа. Выбор того или иного варианта структуры ЦФ в рамках метода инвариантной импульсной характеристики существенно сказывается на точности приближения.

Сравним частотные характеристики двух ЦФ, рассмотренных в примерах 1.7 и 1.8. Оба эти фильтра соответствуют аналоговому прототипу с частотным коэффициентом передачи:

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (1.88)$$

Положим для конкретности, что отношение $\omega\tau = 5$. На основании формул (1.88), (1.84) и (1.87), сделав несложные преобразования, запишем выражения нормированных АЧХ аналогового и двух цифровых фильтров, рекурсивного и трансверсального:

$$\left| \frac{K(i\omega)}{K(i0)} \right|_{\text{АНАЛ.}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 25\omega^2\Delta^2}}. \quad (1.89)$$

$$\left| \frac{K(i\omega)}{K(i0)} \right|_{\text{РЕКУР.}} = \frac{0.1811}{\sqrt{1.6703 - 1.6375\cos(\omega\Delta)}}. \quad (1.90)$$

$$\left| \frac{K(i\omega)}{K(i0)} \right|_{\text{ТРАНСВ.}} = \frac{\sqrt{2.1201 + 2.7531\cos(\omega\Delta) + 1.3606\cos(2\omega\Delta)}}{2.4890}. \quad (1.91)$$

Результаты расчета величин $\left| \frac{K(i\omega)}{K(i0)} \right|$ по данным формулам сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1 – Результаты расчета $\left| \frac{K(i\omega)}{K(i0)} \right|$

$\omega\Delta$	$ K(j\omega) / K(j0) $		
	Тип фильтра		
	аналоговый	цифровой рекурсивный	Цифровой трансверсальный
0.0	1.0000	1.0000	1.0000
0.5	0.3714	0.3754	0.9201
1.0	0.1961	0.2046	0.7005
1.5	0.1322	0.1454	0.3990
2.0	0.0995	0.1182	0.1305
2.5	0.0797	0.1050	0.2234
3.0	0.0665	0.1000	0.3360

Из приведенных данных видно, что как рекурсивный, так и трансверсальный ЦФ действительно обладают характеристиками фильтров нижних частот. Однако рекурсивный фильтр по своим частотным свойствам оказывается гораздо ближе к аналоговому прототипу.

1.7.3 Синтез ЦФ на основе дискретизации дифференциального уравнения аналоговой цепи

К структуре ЦФ, приближенно соответствующего известной аналоговой цепи, можно прийти, осуществив дискретизацию дифференциального уравнения, описывающего аналоговый прототип. Как пример использования этого метода рассмотрим синтез ЦФ, отвечающего колебательной динамической системе 2-го порядка, для которой связь между выходным колебанием $y(t)$ и входным колебанием $x(t)$ устанавливается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = x(t). \quad (1.92)$$

Предположим, что шаг дискретизации равен Δ и рассмотрим совокупности дискретных отсчетов $\{y_k\}$ и $\{x_k\}$. Если в (1.92) заменить производные их конечно-разностными выражениями, то дифференциальное уравнение превратится в разностное уравнение:

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{\Delta^2} + 2a \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta} + \omega_0^2 y_n = x_n. \quad (1.93)$$

Перегруппировав слагаемые, получим:

$$y_n = \frac{\Delta^2 x_n + 2(1 + a\Delta)y_{n-1} - y_{n-2}}{1 - 2a\Delta + \omega_0^2 \Delta^2}. \quad (1.94)$$

Разностное уравнение (1.94) задает алгоритм рекурсивного фильтра 2-го порядка, который моделирует аналоговую колебательную систему. Такой ЦФ принято называть цифровым резонатором.

При соответствующем выборе коэффициентов цифровой резонатор может выполнять роль частотно-избирательного фильтра, подобного колебательному контуру.

1.7.4 Метод инвариантных частотных характеристик

Принципиально невозможно создать ЦФ, частотная характеристика которого в точности повторяла бы частотную характеристику некоторой аналоговой цепи. Причина состоит в том, что, как известно, частотный коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, определяемым шагом дискретизации (рисунок 1.18).

Говоря о подобии (инвариантности) частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров, можно требовать лишь то, чтобы весь бесконечный интервал частот ω_a , относящихся к аналоговой системе, был преобразован в отрезок частот ω_c цифрового фильтра, удовлетворяющих неравенству:

$$-\frac{\pi}{\Delta} < \omega_c < \frac{\pi}{\Delta}, \quad (1.95)$$

при сохранении общего вида АЧХ.

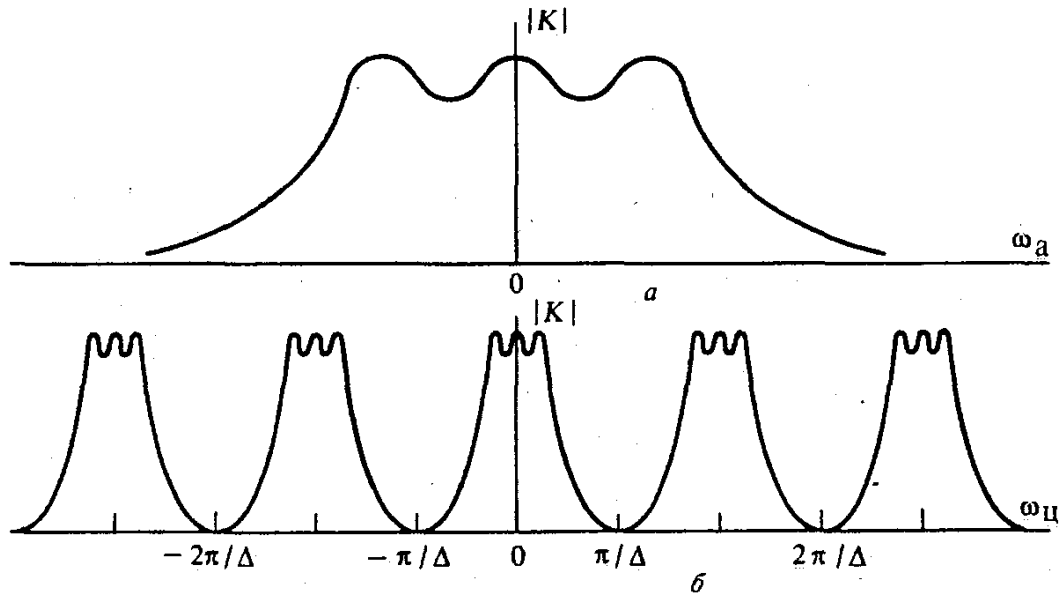


Рисунок 1.18 – Амплитудно-частотные характеристики фильтров: *a* – аналогового; *б* – цифрового

Пусть $K_a(p)$ – передаточная функция аналогового фильтра, задаваемая дробно-рациональным выражением по степеням комплексной частоты p . Если воспользоваться связью между переменными z и p : $z = \exp(p\Delta)$, то можно записать:

$$p = \frac{1}{\Delta} \ln z. \quad (1.96)$$

Однако с помощью этого закона связи нельзя получить физически реализуемую системную функцию ЦФ, поскольку подстановка (1.96) в выражение $K_a(p)$ приведет к системной функции, не выражающейся в виде частного двух многочленов. Требуется найти такую дробно-рациональную функцию от z , которая обладала бы основным свойством преобразования (1.96), а именно переводила бы точки единичной окружности, лежащей в плоскости z , в точки мнимой оси на плоскости p .

Среди прочих способов для синтеза фильтров нижних частот получила распространение связь вида:

$$p = \frac{2z - 1}{\Delta z + 1}, \quad (1.97)$$

устанавливающая однозначное соответствие между точками единичной окружности в z -плоскости со всей мнимой осью в p -плоскости. Характерная особенность этого закона преобразования состоит в следующем. Пусть в (1.97) выполнена замена переменной $z = \exp(i\omega\Delta)$. Тогда:

$$i\omega_a = \frac{2 \exp(i\omega_{\text{ц}}\Delta) - 1}{\Delta \exp(i\omega_{\text{ц}}\Delta) + 1},$$

откуда вытекает соотношение между частотными переменными ω_a и $\omega_{\text{ц}}$ аналоговой и цифровой систем:

$$\omega_a = \frac{2}{\Delta} \operatorname{tg} \frac{\omega_{\text{ц}}\Delta}{2}. \quad (1.98)$$

Если частота дискретизации достаточно велика ($\omega_{\text{ц}}\Delta \ll 1$), то, как легко видеть из формулы (1.98), $\omega_a \approx \omega_{\text{ц}}$. Таким образом, на низких частотах характеристики аналогового и цифрового фильтров практически совпадают. В общем случае нужно принимать во внимание трансформацию масштаба по оси частот цифрового фильтра, описываемого формулой (1.98).

Практически процедура синтеза ЦФ состоит в том, что в функции $K_a(p)$ аналоговой цепи выполняется замена переменной по формуле (1.97). Полученная при этом системная функция ЦФ оказывается дробно-рациональной и поэтому позволяет непосредственно записать алгоритм цифровой фильтрации.

Пример 1.9. Синтезировать цифровой фильтр с частотной характеристикой, подобной характеристике аналогового ФНЧ 2-го порядка типа Баттерворта. Частота среза для ЦФ $\omega_{\text{ц}} = 1500 \text{ с}^{-1}$. Частота дискретизации $\omega_{\text{д}} = 10000 \text{ с}^{-1}$.

Прежде всего определяем шаг дискретизации $\Delta = 2\pi/\omega_{\text{д}} = 6.2832 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. По формуле (1.98) находим частоту среза аналогового фильтра, подобного синтезируемому ЦФ:

$$\omega_{\text{сц}} = \frac{2}{\Delta} \operatorname{tg} \frac{\omega_{\text{ц}}\Delta}{2} = 1621.9 \text{ с}^{-1}.$$

Как известно, передаточная функция аналогового ФНЧ 2-го порядка типа Баттерворта, рассматриваемая относительно нормированной комплексной частоты $p_{\text{н}}$ имеет вид [1, гл. 13]:

$$K_a(p_{\text{н}}) = \frac{1}{p_{\text{н}}^2 + \sqrt{2}p_{\text{н}} + 1}, \quad (1.99)$$

или при переходе к истинной комплексной частоте:

$$K_a(p_{\text{н}}) = \frac{\omega_{\text{сц}}^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_{\text{сц}}p + \omega_{\text{сц}}^2}. \quad (1.100)$$

Выполнив в (1.100) замену переменной вида (1.97), находим системную функцию ЦФ:

$$H(z) = \omega_{ca}^2 (z+1)^2 \left\{ \left[\left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 + \sqrt{2} \left(\frac{2}{\Delta} \right) \omega_{ca} + \omega_{ca}^2 \right] z^2 + 2 \left[\omega_{ca}^2 - \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 \right] z + \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 - \sqrt{2} \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 \omega_{ca} + \omega_{ca}^2 \right\}^{-1}$$

$$H(z) = \omega_{ca}^2 (z+1)^2 \left\{ \left[\left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 + \sqrt{2} \left(\frac{2}{\Delta} \right) \omega_{ca} + \omega_{ca}^2 \right] z^2 + 2 \left[\omega_{ca}^2 - \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 \right] z + \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 - \sqrt{2} \left(\frac{2}{\Delta} \right)^2 \omega_{ca} + \omega_{ca}^2 \right\}. \quad (1.101)$$

Подставив в эту формулу числовые значения, получим следующий результат:

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{7.6272z^2 - 5.7033z + 2.0761}. \quad (1.102)$$

1.7.5 Влияние квантования на работу цифрового фильтра

При проектировании ЦФ в ряде случаев следует учитывать специфические погрешности их работы, возникающие за счет квантования сигналов, т.е. вследствие представления всех величин, как постоянных, так и изменяющихся во времени, в виде двоичных чисел с конечной разрядностью.

Квантованный характер сигналов приводит к целому ряду явлений, описанных в литературе по цифровой фильтрации. Здесь будет рассмотрен простейший эффект - возникновение так называемого шума квантования.

Пусть u_{max} – наибольшее значение аналогового сигнала на входе АЦП, которое еще не вызывает переполнения арифметических устройств фильтра. Если m - число двоичных разрядов, отводимых для представления чисел в фильтре, то очевидно, что квантование сигнала происходит с шагом:

$$q_{кв} = \frac{u_{max}}{2^m}. \quad (1.103)$$

Квантованные отсчеты описывают мгновенные значения аналогового сигнала не точно, а с некоторой погрешностью, тем меньшей, чем меньше шаг квантования. Иными словами, отсчеты входного сигнала x_k фильтра являются суммами истинных значений x_k и отсчетов n_k некоторого дискретного случайного процесса, называемого шумом квантования:

$$x_k = \widetilde{x}_k + n_k. \quad (1.104)$$

Теоретически и экспериментально показано, что в большинстве случаев, интересных для практики, последовательность $\{n_k\}$ образована статистически независимыми

случайными величинами, каждая из которых равномерно распределена на интервале от $-q_{\text{кв}}/2$ до $q_{\text{кв}}/2$ и поэтому имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma_{\text{вх}}^2 = q_{\text{кв}}^2/12$ [1, гл. 6].

Шум квантования, присутствующий на входе ЦФ, преобразуется этим устройством. Пусть $\{n_{\text{вх}k}\}$ – дискретная последовательность, соответствующая входному шуму квантования. Для того чтобы найти i -й отсчет выходной последовательности $\{n_{\text{вых}k}\}$, следует вычислить дискретную свертку входного шумового сигнала и импульсной характеристики фильтра:

$$n_{\text{вых}l} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i n_{\text{вх}l-i}. \quad (1.105)$$

Отсюда определяем функцию корреляции шума квантования на выходе:

$$\begin{aligned} R_{\text{вых}}(m) &= \sum_{i=0}^{\infty} n_{\text{вых}i} n_{\text{вых}l-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_j n_{\text{вх}i-j} h_{j-m} n_{\text{вх}i-j-m} = \\ &= R_{\text{вх}}(m) \sum_{i=0}^{\infty} h_i h_{i-m}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Положив $m = 0$, получим дисперсию шума на выходе:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = R_{\text{вх}}(0) \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 = \frac{q_{\text{кв}}^2}{12} \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2. \quad (1.107)$$

Таким образом, выходной шум квантования оказывается тем больше, чем медленнее уменьшаются отсчеты импульсной характеристики фильтра.

Список литературы

1. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов/С. И. Баскаков. - 5-е издание, стереотип. - М.: Высшая школа, 2005. – 462 с.
2. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебное пособие для вузов/И. С. Гоноровский. – 5-е издание. – М: Дрофа, 2006. – 717 с.