



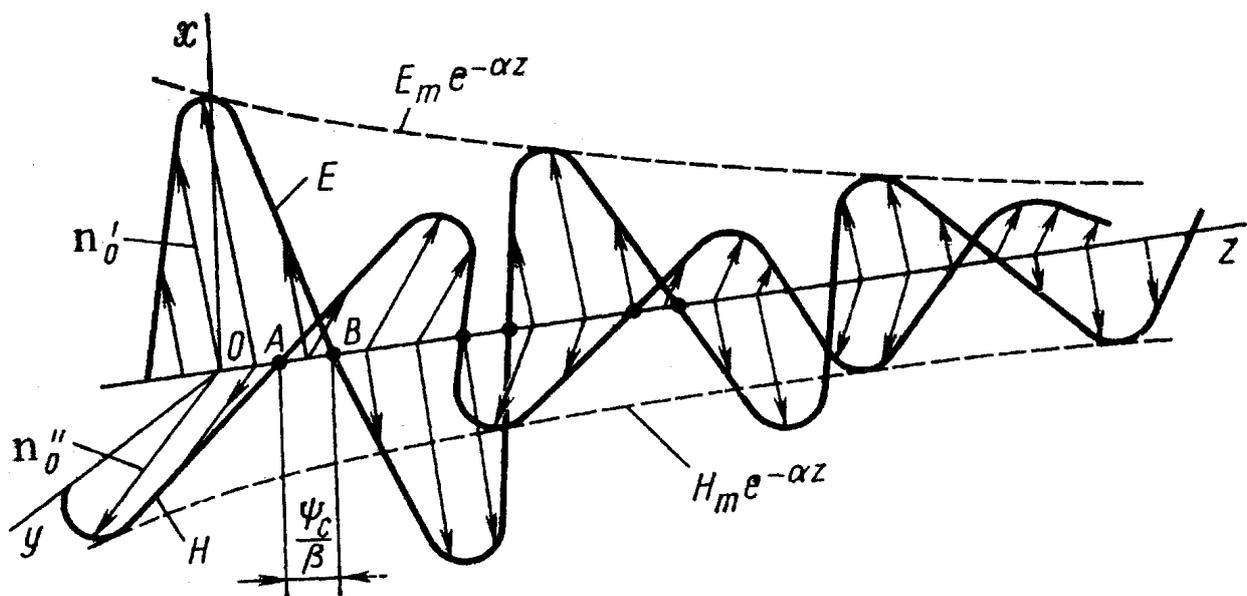
Кафедра конструирования  
и производства радиоаппаратуры

А.С. Шостак

# ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

## ЧАСТЬ 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие для студентов специальности 160905 –  
«Техническая эксплуатация транспортного  
радиооборудования»



ТОМСК 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А.С. Шостак

# **ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

## **ЧАСТЬ 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ**

Учебное пособие для студентов специальности 160905 –  
«Техническая эксплуатация транспортного  
радиооборудования»

2012

**Рецензент:** профессор кафедры КИПР, д.т.н. Татаринов В.Н.

**Технический редактор:** доцент кафедры КИПР ТУСУР, к.т.н. Озёркин Д.В.

**Шостак А.С.**

Основы электродинамики и распространение радиоволн. Часть 1. Электромагнитные поля и волны. Учебное пособие для студентов специальности 160905 – «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования».

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 143 с.

Содержание курса лекций соответствует программе курса «Основы электродинамики и распространение радиоволн» для специальности 160905 – «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования». В нем изложены основы прикладной электродинамики, включая уравнения Максвелла, теория плоских электромагнитных волн, принципы анализа распространения радиоволн в изотропных и анизотропных средах, а также особенности распространения радиоволн в земных условиях и на космических трассах. Учебное пособие также может быть использована студентами специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» при изучении курса “Техническая электродинамика ”



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1 ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>7</b>
<b>2 ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....</b>	<b>9</b>
2.1 Основные положения электромагнетизма.....	9
2.2 Уравнения Максвелла.....	20
2.3 Уравнения Максвелла для гармонических колебаний.....	29
2.4 Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Вектор Пойнтинга .....	34
2.4.1 Магнитный ток. Принцип перестановочной двойственности.....	36
2.4.2 Лемма Лоренца.....	38
<b>3 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ ВОЛН ...</b>	<b>39</b>
3.1 Плоские однородные электромагнитные волны.....	39
3.1.1 Понятие волнового процесса .....	39
3.1.2 Плоские волны и их характеристики .....	40
3.1.3 Затухание волн в материальных средах. Коэффициент распространения.....	42
3.1.4 Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца .....	44
3.2 Понятие характеристического сопротивления. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне .....	47
3.2.1 Плоские электромагнитные волны в физических средах ...	50
3.2.2 Плоские электромагнитные волны с эллиптической поляризацией .....	53
3.2.3 Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении .....	57
3.3 Граничные условия для векторов электромагнитного поля .....	58
3.3.1 Задача о граничных условиях .....	58
3.3.2 Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля.....	59
3.3.3 Граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля.....	60
3.3.4 Граничные условия для касательных составляющих векторов магнитного поля.....	62
3.3.5 Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля.....	64

<b>4</b>	<b>НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД .....</b>	<b>67</b>
4.1	Нормальное падение электромагнитной волны на идеально проводящую поверхность.....	67
4.2	Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство .....	68
4.3	Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины.....	71
4.4	К вопросу о создании неотражающих сред.....	73
<b>5</b>	<b>ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ .....</b>	<b>74</b>
5.1	Общий случай падения электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство .....	74
5.2	Перпендикулярная поляризация.....	76
5.3	Параллельная поляризация .....	78
5.4	Угол Брюстера .....	79
5.5	Полное внутреннее отражение.....	80
5.6	Неоднородные плоские волны.....	82
<b>6</b>	<b>РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ .....</b>	<b>84</b>
6.1	Волны в хорошо проводящей среде .....	84
6.2	Плазма и ее электродинамические параметры.....	86
6.3	Распространение электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме .....	88
6.4	Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости.....	93
<b>7</b>	<b>ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ</b>	<b>100</b>
7.1	Сверхпроводимость.....	100
7.2	Сверхпроводники первого рода.....	102
7.3	Уравнение Лондонов.....	103
7.4	Сверхпроводящее тело в постоянном магнитном поле. ....	104
7.5	Сверхпроводники второго рода.....	106
7.6	Сверхпроводники третьего рода.....	107

7.7	Высокотемпературная сверхпроводимость .....	108
7.8	Применение сверхпроводников .....	109
<b>8</b>	<b>ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ .....</b>	<b>110</b>
8.1	Общие свойства феррита .....	110
8.2	Физический механизм анизотропии ферритов. Уравнение движения намагниченности .....	110
8.3	Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита	115
8.4	Уравнения Максвелла в гиротропной среде .....	118
8.5	Поперечное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите .....	119
8.6	Продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите .....	122
8.7	Физические основы применения ферритов на СВЧ. Взаимные и невзаимные функциональные устройства .....	125
	<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>142</b>

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В радиотехнике и электротехнике определенный круг задач решают с помощью теории цепей, которая применима до тех пор, пока сохраняет смысл понятие электрической цепи, позволяющее отвлечься от существования электромагнитного поля. Использование этого понятия возможно только в случаях низкочастотного (в том числе постоянного) тока  $v$ , так называемых, квазистационарных системах, когда размер системы  $L_C$  значительно меньше длины электромагнитной волны  $\lambda$ :

$$L_C \ll \lambda.$$

Это условие обеспечивает в данный момент времени постоянство величины мгновенного тока во всей системе, так как сдвиг тока по фазе  $\Delta\varphi$  на одном конце системы относительно тока на другом ее конце мало отличается от нуля:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L_C}{\lambda} \approx 0.$$

Изучение быстропеременных электромагнитных процессов, когда приведенное условие не выполняется, за исключением отдельных случаев, требует отказа от теории цепей и сосредоточения внимания на электромагнитном поле системы. Характерными примерами таких систем являются антенны, радиотракт (пространство между передатчиком и приемником), линии передачи энергии на сверхвысоких частотах (электромагнитные колебания дециметрового, сантиметрового и более короткого диапазонов длин волн): волноводы, колебательные системы на этих частотах – полые резонаторы и другие системы.

Известно также, что обычные радиолампы в силу ряда причин (конечное время пролета электронов, паразитные индуктивности и емкости) не могут быть использованы для работы в области сверхвысоких частот (СВЧ). В этом случае вместо них используют электронные приборы, работающие на иных принципах: клистроны, магнетроны, лампы бегущей волны, а также устройства на основе твердотельной электроники. При разработке электронных приборов СВЧ приходится определять электромагнитное поле в них и исследовать характер взаимодействия этого поля с электронным потоком.

Следует отметить, что в ряде случаев (при постоянном или медленно меняющемся токе) электромагнитное поле приходится рассматривать, если изучаются процессы, протекающие в протяженных областях, например, при решении некоторых задач геологоразведки исследуют электрическое поле между электродами, зарытыми в землю на значительном расстоянии друг от друга, при подключении к ним постоянного напряжения.

Первая часть курса «Основы электродинамики и распространение радиоволн», в которой изложены законы электромагнитного поля, дает научную

базу, позволяющую решать перечисленные выше и целый комплекс других электродинамических задач. Эта часть является теоретической основой для второй части курса («Распространение радиоволн»). В целом же курс «Основы электродинамика и распространение радиоволн» представляет собой научный фундамент для последующих радиотехнических дисциплин, таких, как «Антенно-фидерные устройства», «Приемные и передающие устройства», «Радиолокация и радионавигация» и др.

Электродинамика изучает уравнения, описывающие электромагнитные поля и движение в них зарядов. В данной книге мы будем рассматривать макроскопическую теорию электромагнитного поля, т.е. будем изучать взаимодействие зарядов и вызванных ими полей на расстояниях, значительно превышающих внутриатомные расстояния. Нас будет интересовать только суммарное макроскопическое проявление взаимодействия внутриатомных зарядов с внешним электромагнитным полем (поляризация, намагниченность вещества).

Основными уравнениями, или постулатами, макроскопической теории электромагнитного поля являются уравнения, изложенные Дж. Максвеллом в 1873 г. в труде «Трактат об электричестве и магнетизме». Эти уравнения, получившие название уравнений Максвелла, математически связывают векторы поля друг с другом, а также с токами и зарядами. Максвелл ввел весьма важное понятие о токе смещения. Следствием этого явилось предположение Максвелла о существовании электромагнитных волн и общности световых и электродинамических процессов. Экспериментально существование электромагнитных волн было установлено Герцем, изучившим их некоторые свойства, в том числе скорость распространения. Обоснование основных положений и развитие теории электромагнитного поля связано с трудами таких выдающихся ученых, как Эрстед, Фарадей, Ампер, Лоренц, Хевисайд, Минковский, Эйнштейн и др.

В развитие современной электродинамики и теории распространения радиоволн большой вклад внесли советские ученые Б.А.Введенский, В.А.Фок, А.Н.Щукин, М.А.Леонтович и многие другие.

Уравнения электромагнитного поля теоретически не выводятся. Они обобщают экспериментально полученные закономерности. В настоящей книге вначале изучаются основные уравнения электромагнитного поля, а затем их приложения к важным для практики задачам и, в том числе, к вопросам распространения радиоволн на наземных и космических трассах.

## 2 ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ [1, 2, 4]

### 2.1 Основные положения электромагнетизма

#### Закон сохранения заряда

Если в объеме есть электрический заряд, то он может быть распределен по объему равномерно или неравномерно. В первом случае объемная плотность будет постоянна. Во втором случае она изменяется по какому-то закону. Под объемной плотностью электрического заряда понимается скалярная величина, равная пределу отношения величины заряда в этом объеме к величине этого объема, когда последний стремится к нулю:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

Электрический заряд может быть распределен по поверхности (поверхностный заряд) или по вдоль линии (линейный заряд). Тогда пользуются соответственно понятиями поверхностной  $\left(\sigma = \frac{dq}{dS}\right)$  и линейной плотности  $\left(\tau = \frac{dq}{dl}\right)$  электрического заряда.

Под действием электрического поля в веществе, обладающем электропроводностью, заряженные частицы могут перемещаться – так возникает электрический ток проводимости. Величина этого тока равна пределу отношения заряда, переносимого заряженными частицами сквозь рассматриваемую поверхность в течение некоторого времени, к величине этого промежутка времени, когда последний стремится к нулю:

$$i_{\text{ПП}} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = - \frac{dq}{dt}.$$

Распределение электрического тока по поверхности, сквозь которую он проходит, характеризуется плотностью тока проводимости  $\vec{j}_{\text{ПП}}$ . Под плотностью тока проводимости понимается векторная величина, численно равная пределу отношения тока проводимости сквозь некоторый элемент поверхности, нормальный к движению частиц, к площади этого элемента, когда последний стремится к нулю:

$$|\vec{j}_{\text{ПП}}| = - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i_{\text{ПП}}}{\Delta S} = - \frac{di_{\text{ПП}}}{dS}.$$

Вектор плотности электрического тока по направлению совпадает с направлением движения положительно заряженных частиц.

#### Уравнение непрерывности тока

В соответствии с законом сохранения электрического заряда количество электричества, выходящего за некоторый промежуток времени через за-

мкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ , равно уменьшению величины находящегося в объеме заряда  $q$  за этот же промежуток времени. За единицу времени через поверхность  $S$ , ограничивающую объем, выйдет заряд, численно равный току через эту поверхность  $\left( i_{3.П} = \oint_S \bar{j}_{ПП} d\bar{S} \right)$ , а уменьшение заряда равно  $-\frac{dq}{dt}$  откуда:

$$\oint_S \bar{j}_{ПП} d\bar{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (2.1)$$

При постоянном токе распределение зарядов по всему объему остается неизменным за некоторый промежуток времени, так как количество электричества, поступившее в замкнутый объем за некоторый промежуток времени, равно количеству электричества вытекшего из этого объема за этот же промежуток времени из этого объема  $\left( \frac{dq}{dt} = 0 \right)$ . Поэтому:

$$\oint_S \bar{j}_{ПП} d\bar{S} = 0.$$

Написанное равенство представляет собой уравнение непрерывности постоянного тока в интегральной форме. Согласно этому уравнению ток через любую замкнутую поверхность равен нулю и линии постоянного тока непрерывны, т.е. замкнуты сами на себя.

#### Векторы электромагнитного поля

Электромагнитное поле создается неподвижными зарядами и токами – движущимися зарядами. Возникнув, это поле вызывает появление соответствующих ему зарядов и токов.

Электромагнитное поле является векторным полем. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами:  $\bar{E}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{H}$ , где:

$\bar{E}$  – напряженность электрического поля;

$\bar{D}$  – электрическое смещение, или электрическая индукция;

$\bar{B}$  – магнитная индукция;

$\bar{H}$  – напряженность магнитного поля.

Перечисленные векторы поля полагаются конечными и непрерывными. Разрывы имеются только на поверхностях, ограничивающих среды с различными параметрами. Определить векторы в некоторой точке пространства – это значит найти указанные векторы в любой ее точке.

Для выяснения физического смысла векторов электромагнитного поля (ЭМП) используются законы электромагнетизма, в основе которых лежит возможность преобразования электромагнитной энергии в другие виды энергии.

### Напряженность электрического поля

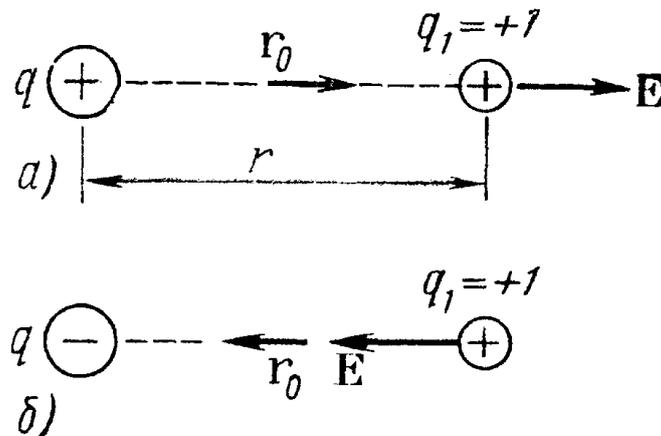
Напряженность электрического поля представляет собой векторную величину, равную силе, с которой электрическое поле действует на неподвижное точечное тело с единичным точечным зарядом, внесенное в рассматриваемую точку поля. Точечное заряженное тело имеет столь малые размеры, что в их размерах внешнее поле можно считать однородным.

Найдем выражение для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ . Для этого воспользуемся известным из физики экспериментальным законом Кулона. В соответствии с этим законом сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами в вакууме равна:

$$\bar{F} = \frac{qq_1\bar{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.2)$$

где  $\bar{F}$  – сила в вакууме, с которой заряды  $q$  и  $q_1$  действуют друг на друга;  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, или абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума;  $r$  – расстояние между ними;  $\bar{r}_0$  – единичный радиус-вектор.

В случае одноименных зарядов направление единичного радиус-вектора соответствует отталкиванию зарядов (рисунок 2.1, а), а в случае разноименных зарядов – притяжению зарядов (рисунок 2.1, б).



**Рисунок 2.1 - Взаимодействие зарядов**

Из определения напряженности электрического поля следует, что для ее расчета необходимо поделить обе части формулы (2.2) на  $q_1$  или взять заряд равным единице:

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q_1} = \frac{q\bar{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

С другой стороны, если известна напряженность поля в данной точке, созданная любой системой зарядов, то для определения силы  $\bar{F}$ , с которой поле будет действовать на заряд  $q_2$ , помещенный в эту точку, необходимо  $q_2$  умножить на  $\bar{E}$ , т.е.:

$$\vec{F} = q_2 \vec{E}. \quad (2.3)$$

### Электрическое смещение или электрическая индукция

Если область пространства, где имеет место электрическое поле, заполнить веществом, то под влиянием поля происходит:

а) смещение связанных заряженных частиц, входящих в состав атомов и молекул вещества;

б) ориентированное движение свободных заряженных частиц в структуре вещества.

В диэлектрике число свободных заряженных частиц (например, свободных электронов) ничтожно, поэтому воздействие на него поля приводит главным образом к смещению связанных заряженных частиц вещества в пределах молекулы. Этот процесс называется электрической поляризацией вещества. Поляризация протекает различным образом в зависимости от структуры вещества – диэлектрика и строения его молекулы. Так, у нейтральных диэлектриков имеет место деформационная или электронная поляризация, заключающаяся в том, что орбитальные электроны (электронные оболочки) атомов диэлектрика смещаются против направления вектора напряженности электрического поля, а связанные с ними положительно заряженные ядра атомов несколько сдвигаются по этому направлению.

Возможен и другой механизм поляризации. Это связано с тем, что молекулы некоторых веществ (например, воды), называемых дипольными диэлектриками, обладают электрическими моментами и при отсутствии внешнего электрического поля. Направление этих моментов хаотично (равновероятно) распределено в пространстве, следовательно, их действие при отсутствии поля не проявляется в окружающем пространстве. При воздействии на такую среду электрического поля происходит ориентировка молекулярных диполей по направлению вектора напряженности поля, что и проявляется через эффект поляризации вещества. Существуют также более сложные виды поляризации, например, у ионных диэлектриков и сегнетодиэлектриков.

Для упрощения расчетов все виды поляризации можно свести к эквивалентной картине возникновения молекулярных электрических диполей. При этом состояние поляризации характеризуют поляризованностью, или интенсивностью поляризации вещества  $\vec{P}$ , связанной с моментами указанных молекулярных диполей следующим образом:

$$\vec{P} = n_1(r) \vec{p}_\Delta,$$

где  $n_1(r)$  – число электрических диполей в единице объема среды (в  $1 \text{ м}^3$ ), образовавшихся (или сориентировавшихся) в результате ее поляризации на расстоянии  $r$  от начала отсчета;  $\vec{p}_\Delta = q_{CM} \Delta \vec{l}$  – величина момента смещающегося заряда атома или молекулы вещества (момент молекулярного электрического диполя);  $\Delta \vec{l}$  – приращение расстояния между зарядами, возникающее в результате поляризации.

Из приведенной выше формулы следует, что поляризованность, или интенсивность поляризации вещества, представляет собой векторную величину,

равную объемной плотности сориентированных по направлению поля молекулярных (атомных) электрических моментов вещества. Поляризованность может быть также определена как предел отношения электрического момента некоторого объема диэлектрика к этому объему, когда последний стремится к нулю:

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{\Delta V}}{\Delta V}.$$

Вектор  $\bar{P}$  иногда называют также вектором электрической поляризации или электрическим моментом единицы объема поляризованного диэлектрика. Сумма вектора напряженности электрического поля в рассматриваемой точке, умноженного на электрическую постоянную, и вектора поляризованности вещества в той же точке называется электрическим смещением, или электрической индукцией:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \quad (2.4)$$

Первый член в правой части выражения (2.4) представляет собой электрическую индукцию в вакууме.

В неоднородной среде, т.е. в среде, свойства которой различны в разных точках, вектор  $\bar{P}$  является функцией координат рассматриваемой точки. Если среда нелинейна, т.е. ее электрические свойства зависят от величины напряженности поля, то вектор  $\bar{P}$ , кроме того, является нелинейной функцией от напряженности поля:

$$\bar{P} = k_{\text{Э.А}}(E) \bar{E},$$

где  $k_{\text{Э.А}}(E)$  – величина, в общем случае изменяющаяся в функции  $E$ , и называемая абсолютной диэлектрической восприимчивостью. Примером таких сред являются сегнетодиэлектрики, у которых абсолютная диэлектрическая восприимчивость сложным образом зависит от величины напряженности электрического поля:  $k_{\text{Э.А}}(E) = f(E)$ . В линейной среде модуль вектора  $\bar{P}$  прямо пропорционален напряженности электрического поля, т.е.  $k_{\text{Э.А}}$  представляет собой постоянную величину, не зависящую от напряженности поля следующим образом:

$$\bar{D} = (\varepsilon_0 + k_{\text{Э.А}}) \bar{E} = \varepsilon_a \bar{E}, \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды (вещества).

Используется также понятие относительной  $\varepsilon_r$ , или просто диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$ , которая показывает, во сколько раз электрическое смещение  $D$  в данной среде по абсолютному значению больше или меньше его значения в вакууме  $D_0$ :

$$\varepsilon_r = \frac{D}{D_0} = \frac{\varepsilon_a E}{\varepsilon_0 E} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = 1 + k_{\text{Э}}, \quad (2.6)$$

где  $k_{\text{Э}}$  – относительная диэлектрическая восприимчивость.

### Магнитная индукция

Из физики известен опытный закон, которым определяется, так называемая, сила Лоренца  $\vec{F}$ , действующая в магнитном поле на электрический заряд  $q$ , движущийся со скоростью:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) следует, что эта сила пропорциональна заряду и векторному произведению скорости заряда  $\vec{v}$  на величину  $\vec{B}$ , называемую магнитной индукцией. Направление силы  $\vec{F}$  перпендикулярно к плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  (рисунок 2.2). Численно эта сила равна:

$$F = qvB \sin(\vec{v}, \vec{B}), \quad (2.7 a)$$

где  $(\vec{v}, \vec{B})$  – угол между направлением векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

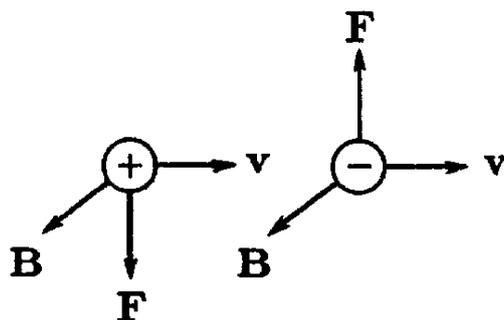


Рисунок 2.2 - Сила Лоренца  $\vec{F}$

Из (2.7 a) следует, что магнитная индукция  $\vec{B}$  численно равна силе  $\vec{F}$ , с которой магнитное поле действует на единичный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью в направлении, перпендикулярном к линиям магнитного поля. Направлена магнитная сила перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Если заряд  $q$  положителен, направление силы совпадает с направлением вектора  $[\vec{v}, \vec{B}]$ . В случае отрицательного  $q$  направления векторов  $\vec{F}$  и  $[\vec{v}, \vec{B}]$  противоположны (рисунок 2.2). Поскольку магнитная сила всегда направлена перпендикулярно к скорости заряженной частицы, она работы над частицей не совершает. Следовательно, действуя на заряженную частицу постоянным магнитным полем, изменить ее энергию нельзя.

Если имеются одновременно электрическое и магнитное поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

### Напряженность магнитного поля

Из курса физики известно, что напряженность магнитного поля связана с магнитной индукцией в вакууме  $\vec{B}_0$  соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (2.8)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная, или абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

При заполнении вакуума средой значение вектора  $\bar{B}$  изменяется вследствие того, что при воздействии внешнего магнитного поля в среде происходит определенная ориентация элементарных контурных токов (такие токи, в частности, образуют электроны, движущиеся по внутриатомным орбитам). При этом плоскости этих орбитальных токов стремятся занять перпендикулярное положение к направлению магнитного поля. В результате возникает дополнительное внутреннее магнитное поле, которое определенным образом накладывается на внешнее поле. Имеющееся при этом изменение напряженности магнитного поля в веществе, вызванное его намагничиванием, определяется намагниченностью, или интенсивностью намагничивания вещества  $\bar{J}$ . Тогда напряженность магнитного поля, обусловленная внешними по отношению к рассматриваемому веществу токами, как известно из физики, будет связана с магнитной индукцией  $\bar{B}$  в веществе следующим образом:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{J}; \quad \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{J}) \quad (2.9)$$

Намагниченностью  $\bar{J}$  называется векторная величина, характеризующая состояние вещества, приобретаемое им в результате намагничивания. Эта величина равна моменту молекулярных (атомных) токов единичного объема вещества:

$$\bar{J} = \frac{\sum \bar{p}_i}{\Delta V},$$

где  $\sum \bar{p}_i$  – геометрическая сумма моментов тока молекул (атомов) вещества в объеме  $\Delta V$ ;  $\bar{p}_i = i_{\text{МОЛ}} \Delta \bar{S}_{\text{МОЛ}}$  – момент тока молекулы (атома);  $i_{\text{МОЛ}}$  – эквивалентный замкнутый молекулярный ток;  $\Delta \bar{S}_{\text{МОЛ}}$  – вектор площадки, обтекаемой током  $i_{\text{МОЛ}}$ .

В литературе вместо намагниченности иногда пользуются термином «вектор намагниченности».

Подобно поляризованности  $\bar{P}$ , интенсивность намагничивания вещества  $\bar{J}$  в случае неоднородной среды является функцией координат, а в случае нелинейной среды – нелинейной функцией от напряженности магнитного поля. Если же среда линейна, то вектор  $\bar{J}$  прямо пропорционален напряженности магнитного поля, т.е.:

$$\bar{J} = k_M \bar{H},$$

где  $k_M$  – магнитная восприимчивость вещества в случае линейной среды, не зависящая от величины  $\bar{H}$ .

Подставив выражение для  $\bar{J}$  в (2.9), находим:

$$\bar{B} = \mu_0(1 + k_M)\bar{H} = \mu_a \bar{H}, \quad (2.10)$$

где  $\mu_a = \mu_0(1 + k_M)$  – абсолютная магнитная проницаемость среды (вещества).

Используется также коэффициент:

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = 1 + k_M, \quad (2.11)$$

называемый относительной магнитной проницаемостью. Очевидно, что  $\mu$ , как и  $\epsilon$ , является безразмерной величиной.

Умножив числитель и знаменатель формулы (2.11) на  $H$ , получим:

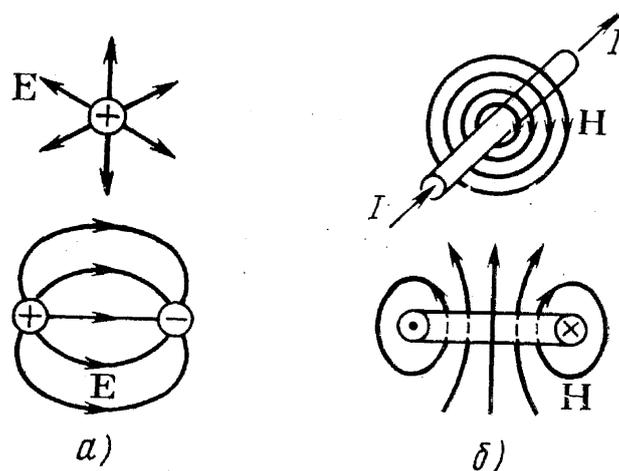
$$\mu = \frac{\mu_a H}{\mu_0 H} = \frac{B}{B_0}.$$

Из последнего соотношения следует, что относительная магнитная проницаемость показывает, во сколько раз магнитная индукция в данном материале больше или меньше ее значения в вакууме.

### Графическое изображение векторных полей

Для наглядного представления и лучшего понимания электромагнитных процессов пользуются графическим изображением поля. При этом каждому вектору поля в некоторой области в рассматриваемый момент времени ставится в соответствие семейство линий. Линии проводятся так, чтобы касательные к ним указывали направления поля, а их густота была прямо пропорциональна его абсолютному значению.

Линии вектора  $\vec{E}$  называются линиями напряженности электрического поля, а линии вектора  $\vec{H}$  – линиями напряженности магнитного поля. Аналогично могут быть определены линии электрической и магнитной индукции. В качестве примера на рисунке 2.3 приведены линии напряженности электрических полей одного и двух зарядов (а) и магнитных полей прямолинейного и кругового токов (б).



**Рисунок 2.3 - Графическое изображение векторных полей**

### Электромагнитные параметры и виды сред

Векторы поля связаны между собой электромагнитными параметрами среды – так называемыми, материальными уравнениями. Два из них были получены ранее.

К ним нужно добавить еще третье уравнение, характеризующее воздействие электрического поля на свободно заряженные частицы, имеющиеся в некоторых веществах, например в металлах. Как отмечалось, заряженные частицы под действием электрического поля приобретают ориентированное движение. Плотность возникающего при этом тока проводимости определяется третьим уравнением, представляющим закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}_{\text{ПП}} = \sigma_{\text{Э}} \vec{E}, \quad (2.12)$$

где  $\sigma_{\text{Э}}$  – удельная электрическая проводимость.

Уравнение (2.12) нетрудно получить на основании известного из курса физики закона Ома для цилиндрического проводника. Согласно этому закону напряжение  $U$  и ток  $I$  в проводнике связаны соотношением:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{l / \sigma_{\text{Э}} S} = \sigma_{\text{Э}} S \frac{U}{l}.$$

Поделим обе части этого соотношения на площадь  $S$  поперечного сечения проводника. Тогда, учитывая, что  $\frac{U}{l} = E$ , получим выражение, совпадающее с (2.12):

$$\frac{I}{S} \vec{l}_0 = \vec{j}_{\text{ПП}} = \sigma_{\text{Э}} \vec{E},$$

где  $\vec{l}_0$  – единичный вектор длины проводника.

При выводе равенства (2.12) предполагалось равномерное распределение тока по поперечному сечению цилиндрического проводника, что имеет место только при постоянном токе. При переменном токе, как будет показано ниже, ток неравномерно распределен по поперечному сечению такого проводника. В связи с этим для подтверждения справедливости уравнения (2.12) при переменном токе необходимо рассматривать весьма тонкую нить проводника, поперечное сечение которой стремится к нулю, т.е.:

$$\sigma_{\text{ПП}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i_{\text{ПП}}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\frac{U}{l} \sigma_{\text{Э}} S}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sigma_{\text{Э}} \frac{U}{l} = \sigma_{\text{Э}} E.$$

Из уравнений (2.5), (2.10) и (2.12) следует, что каждая среда характеризуется тремя электромагнитными параметрами:  $\mu_a$ ,  $\epsilon_a$ ,  $\sigma_{\text{Э}}$ . Значения параметров  $\mu_a$ ,  $\epsilon_a$  для некоторых материалов приводятся в справочниках. Следует отметить, что относительная диэлектрическая проницаемость обычно больше единицы, а относительная магнитная проницаемость чаще всего незначительно отличается от единицы. Однако существуют среды, для которых имеется исключение из указанного правила. Так, относительная диэлектрическая проницаемость для ионизированного газа (например, верхние ионизированные

слои атмосферы – ионосфера) может быть не только меньше единицы, но принимать даже нулевые и отрицательные значения.

По магнитным свойствам вещества можно классифицировать на три категории:

1) ферромагнетики (ферромагнитные среды) – магнитная проницаемость значительно больше единицы ( $\mu \gg 1$ ); при их намагничивании внутреннее дополнительное магнитное поле будет сравнительно большим по величине, а по направлению в основном совпадать с намагничивающим полем;

2) парамагнетики – магнитная проницаемость немного больше единицы; внутреннее дополнительное поле относительно небольшое по величине и направлено в одну сторону с намагничивающим полем;

3) диамагнетики – магнитная проницаемость немного меньше единицы; внутреннее дополнительное поле небольшое по величине, но направлено противоположно намагничивающему полю.

В зависимости от степени электропроводности вещества делят на проводники и диэлектрики (изоляторы). Промежуточные электромагнитные свойства имеют слабопроводящие вещества (среды). Такие среды условно называют полупроводящими или средами с потерями. Не следует путать их со средами, обладающими полупроводниковыми эффектами, заключающимися в том, что электропроводность в данной точке среды в противоположных направлениях существенно различна. Критерии разграничения веществ по электропроводности будут приведены после введения понятия комплексной диэлектрической проницаемости. В ряде задач электродинамики для упрощения вместо реального проводника или диэлектрика рассматривают идеальный проводник ( $\sigma_{\Sigma} \gg 1$ ) и идеальный диэлектрик ( $\sigma_{\Sigma} \ll 1$ ).

Выше была приведена классификация сред *по величине их электромагнитных параметров*. Наряду с этим используется классификация сред *по функциональной зависимости* электромагнитных параметров от различных факторов. Ранее была произведена такая классификация по двум факторам: зависимости электромагнитных параметров среды от величины векторов поля (линейные и нелинейные среды) и координат рассматриваемой точки среды (однородные и неоднородные среды). Дополним классификацию сред классификацией по третьему фактору – *зависимости электромагнитных параметров от направления*.

Прежде чем перейти к рассмотрению этого вопроса, отметим, что макроскопические параметры  $\mu_a$ ,  $\epsilon_a$ ,  $\sigma_{\Sigma}$  в большинстве случаев можно считать не зависящими от величины векторов поля, а среды – соответственно линейными. В ряде случаев можно считать также электромагнитные параметры в пределах одной и той же среды постоянными, не зависящими от координат. На границах раздела таких сред параметры резко (скачком) изменяются от значения параметров одной среды до значений параметров другой среды, оставаясь неизменными в пределах соответствующих сред. Однако существуют среды, параметры которых сравнительно плавно изменяются при переходе от

данного элемента среды к соседнему. Примером среды с плавным изменением параметров в пространстве может служить атмосфера, у которой с высотой изменяется диэлектрическая проницаемость: в нижних слоях (от поверхности земли до высоты  $\sim 90$  км) – вследствие резкого изменения по высоте температуры, влажности и плотности атмосферных газов; в верхних слоях (ионосфере) – за счет изменения концентрации ионизированных частиц. Подобно этому в море изменяется с глубиной проводимость морской воды.

По зависимости электромагнитных параметров сред от направления среды делятся на *изотропные* и *анизотропные*. *Изотропными* называются такие среды, свойства которых одинаковы для полей любых направлений. В изотропных средах векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  параллельны. Для таких сред справедливы соотношения (2.5), (2.10) и (2.12).

Наряду с этим существуют среды, параметры которых в рассматриваемой точке в различных направлениях будут разными. Такие среды называются *анизотропными*. При этом указанные векторы электромагнитного поля уже не параллельны между собой, а материальные уравнения должны быть заменены более сложными соотношениями.

#### Международная система электромагнитных единиц измерения

В России принята Международная система единиц СИ (в электротехнике ГОСТ 1494-61), в основном совпадающая с системой МКСА.

В этой системе за основные единицы приняты:

- 1) единица длины - 1 метр (м);
- 2) единица времени - 1 секунда (с);
- 3) единица массы - 1 килограмм (кг);
- 4) единица электрического тока - 1 Ампер (А).

Все остальные единицы являются зависимыми от перечисленных и определяются из основных физических законов. Так, например, единица силы 1 Ньютон (Н) определяется из второго закона Ньютона:  $F = ma$ . Электрическую постоянную  $\epsilon_0$  находят из закона Кулона (2.1), а магнитную постоянную  $\mu_0$  – на основании известного из физики закона Ампера, определяющего силу взаимодействия двух параллельных токов.

Эти постоянные оказываются следующими:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}} \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \approx 8.86 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\Phi}{\text{м}} \right],$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.256 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\Gamma\text{Н}}{\text{м}} \right].$$

Абсолютные диэлектрическая  $\epsilon_a$  и магнитная  $\mu_a$  проницаемости измеряются в таких же единицах, как и  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ .

Приведем единицы измерения наиболее часто встречающихся электрических величин. Единица заряда – кулон (Кл); электрического скалярного потенциала и напряжения – вольт (В); напряженности электрического поля – вольт на метр (В/м); электрической индукции – кулон на квадратный метр

(Кл/м<sup>2</sup>); электрического момента – кулон·метр (Кл·м); сопротивления – Ом (Ом); удельной электропроводности – сименс на метр (См/м).

Единицы измерения основных магнитных величин следующие: напряженности магнитного поля – ампер на метр (А/м); магнитного потока – вебер (Вб) или вольт·секунда (В·с); магнитной индукции – вебер на квадратный метр (Вб/м<sup>2</sup>) или тесла (Тл); магнитного момента – Гн·А·м = Вб·м. Скорость распространения света в вакууме  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \left[ \frac{м}{с} \right]$ . Остальные единицы

измерения в системе СИ и их связь с единицами системы Гаусса (СГС), разрешенной также к применению, можно найти в справочниках.

## 2.2 Уравнения Максвелла

### Уравнения Максвелла в интегральной форме и их физический смысл

В основе уравнений электромагнитного поля лежат законы полного тока и электромагнитной индукции, установленные опытным путем. Уравнения электродинамики в интегральной форме получены путем обобщения этих законов на случай переменных электромагнитных полей в произвольных средах. При изучении уравнений электромагнитного поля возможны два пути:

1. Вначале постулируют уравнения в интегральной форме, затем изучают их в дифференциальной форме; при этом последние выводят из первых.

2. Иногда поступают наоборот – сначала постулируют уравнения в дифференциальной форме, а затем выводят уравнения Максвелла в интегральной форме.

Оба пути правомерные. В настоящем пособии используется первый путь, т.е. постулируются уравнения электромагнитного поля в интегральной форме, так как в предшествующих курсах физики и теории цепей с ними более обстоятельно ознакомлены студенты. Это соответствует и исторической последовательности создания теории электромагнетизма.

### Первое уравнение Максвелла в интегральной форме

Для постоянного магнитного поля в любой среде справедлив, так называемый, закон полного тока, связывающий циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру с током проводимости, пронизывающим этот контур (рисунок 2.4):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = i_{\text{пр}} = \int_S \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S},$$

где  $\vec{H} d\vec{l} = H \bar{l}_0 dl \cos(\vec{H}, \bar{l}_0)$  – скалярное произведение вектора  $\vec{H}$  на вектор элемента длины контура  $d\vec{l} = \bar{l}_0 dl$ ;  $\bar{l}_0$  – единичный вектор, направленный по касательной к элементу длины  $dl$ ;  $(\vec{H}, \bar{l}_0)$  – угол между вектором  $\vec{H}$  и касательной к контуру в рассматриваемой точке;  $L$  – контур, вдоль которого

определяется циркуляция вектора  $\vec{H}$ ;  $S$  – поверхность, опирающаяся на контур  $L$ ;  $d\vec{S}$  – вектор элемента поверхности  $S$  (вектор-площадка).

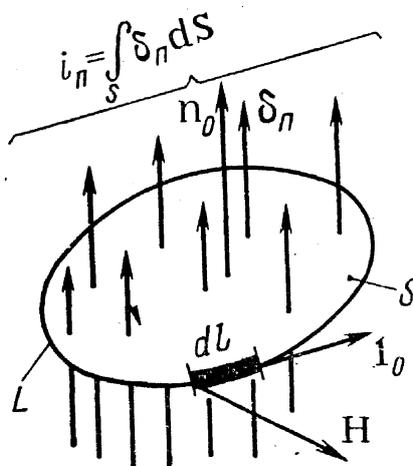


Рисунок 2.4 - Циркуляция  $\vec{H}$  по замкнутому контуру  $L$

При этом направление обхода контура должно образовывать с направлением нормали  $\vec{n}_0$  к поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ , правовинтовую систему.

Максвеллом было сделано предположение, что закон полного тока справедлив и для переменных полей, если в правой части к току проводимости добавить ток смещения. Существование этого тока вытекало из предположения, что магнитное поле может возникать не только при движении свободных зарядов, в частности, при наличии тока проводимости, но и в случае переменного электрического поля в отсутствии свободных зарядов.

Из курса физики известно, что плотность тока смещения связана с вектором электрической индукции соотношением:

$$\vec{j}_{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Тогда ток смещения через поверхность  $S$  будет равен:

$$i_{CM} = \int_S \vec{j}_{CM} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}.$$

Ток проводимости вместе с током смещения образует полный ток:

$$i = i_{\Pi} = i_{\Pi P} + i_{CM}; \quad \vec{j}_{\Pi} = \vec{j}_{\Pi P} + \vec{j}_{CM}.$$

Полный ток всегда является замкнутым током. Так, например, в случае цепи переменного тока, состоящей из проводов с последовательно включенным конденсатором, ток проводимости, имеющий место в проводах, замыкается током смещения конденсатора.

С учетом сказанного закон полного тока для переменных полей, называемый обобщенным законом полного тока или первым уравнением Максвелла в интегральной форме, запишется следующим образом:

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = i_{\Pi} = i_{\text{ПП}} + i_{\text{СМ}} = \int_S \bar{j}_{\Pi} d\bar{S} = \oint_S \left( \bar{j}_{\text{ПП}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dS. \quad (2.13)$$

Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме следует, что магнитные силовые линии всегда сцеплены с полным током (охватывают ток), который является суммой тока проводимости и тока смещения. Следовательно, магнитное поле создается как токами проводимости, так и токами, определяющимися изменением электрического поля во времени. Отметим, что на основании (2.4) ток смещения состоит фактически из двух составляющих:

$$\bar{j}_{\text{СМ}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}.$$

Первая составляющая, определяемая скоростью изменения вектора электрической индукции в вакууме, является плотностью электрического тока смещения в вакууме. Следует обратить внимание на условность последнего термина, который был введен в то время, когда признавалось существование эфира. При этом ток смещения в вакууме представлялся, как процесс механического смещения частиц эфира.

С современной точки зрения общим между токами смещения в вакууме и токами проводимости является только то, что они одинаковым образом возбуждают магнитное поле, т.е. одинаково входят в правую часть уравнения (2.13). Во всех остальных отношениях эти токи отличаются друг от друга. Наиболее важным отличием является то, что токи проводимости связаны сдвижением электрических заряженных частиц под действием электрического поля, тогда как токи смещения в вакууме не связаны с ним. Они соответствуют лишь изменению во времени напряженности электрического поля:

$$\bar{j}_{\text{СМ}0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Вторая составляющая тока смещения называется плотностью электрического тока поляризации. Этот ток образован попеременным смещением в атомах вещества связанных зарядов (например, смещением орбит электронов относительно положительно заряженных ядер атомов):

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = n(r)q \frac{\partial \Delta \bar{l}}{\partial t} = n(r)q \bar{v},$$

где  $\bar{v}$  – вектор скорости движения связанных зарядов.

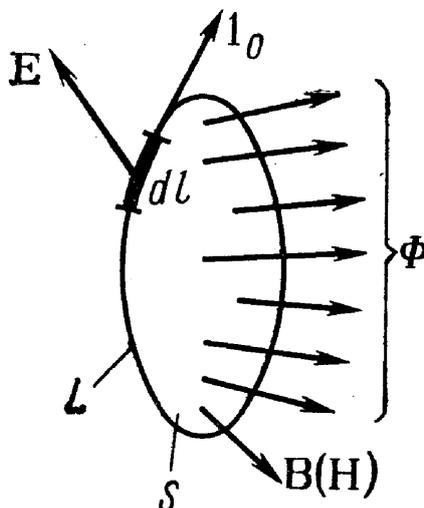
Следовательно, вторая составляющая тока смещения по своей природе подобна току проводимости.

### Второе уравнение Максвелла в интегральной форме

В основе второго уравнения Максвелла в интегральной форме лежит соотношение, выражающее явление электромагнитной индукции, открытое Фарадеем в 1831 г. Указанное соотношение связывает электродвижущую силу, наводимую в проводящем контуре, с изменением во времени магнитного поля:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.14)$$

где  $\mathcal{E}$  – ЭДС, наводимая в контуре  $L$  (рисунок 2.4);  $\Phi$  – магнитный поток, проходящий через поверхность, опирающуюся на контур  $L$ .



**Рисунок 2.5 – Связь ЭДС с магнитным потоком  $\Phi$**

Таким образом, ЭДС, наводимая в проводящем контуре, по величине равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Знак «минус» в правой части уравнения (2.14) показывает, что возникающая в контуре ЭДС вызывает в нем ток такого направления, при котором создаваемый им вокруг контура вторичный магнитный поток препятствует изменению первичного магнитного поля (в чем проявляется закон инерции для магнитных цепей).

Воспользуемся соотношениями, которыми связаны ЭДС и магнитный поток с векторами поля:

$$\mathcal{E} = \oint_L \bar{E} d\bar{l}, \quad \Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

Тогда на основании (2.14) будем иметь:

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} d\bar{S}.$$

Изменив порядок дифференцирования и интегрирования в правой части равенства, получим:

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}. \quad (2.15)$$

Обобщение закона электромагнитной индукции по Максвеллу заключается в отказе от ограничения, наложенного на этот закон словами «проводящий контур». Согласно Максвеллу соотношение (2.15) справедливо для любого контура независимо от того, является ли этот контур проводящим или произвольно выбранным в диэлектрической среде. С учетом распространения

на любой контур интегрирования выражение (2.15) называют вторым уравнением Максвелла в интегральной форме. Это уравнение связывает циркуляцию вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  с магнитным потоком, пронизывающим этот контур, т.е. с интегралом от вектора  $\vec{B}$ , взятым по поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $L$ . Из уравнения (2.15) следует, что всякое изменение магнитного поля во времени непременно вызывает (независимо от параметров среды) появление электрического поля.

### Третье и четвертое уравнения Максвелла в интегральной форме

Третьим и четвертым уравнениями Максвелла в интегральной форме являются известные из физики равенства Гаусса-Остроградского для векторов электрической и магнитной индукции. Эти уравнения также можно постулировать. Тогда, исходя из них и первых двух уравнений Максвелла, можно найти, как их следствие, уравнение непрерывности тока. Однако уравнение непрерывности тока можно получить также на основе закона сохранения заряда. В этом случае указанные уравнения Максвелла можно найти из уравнения непрерывности тока и первых двух уравнений Максвелла. Следовательно, третье и четвертое уравнения Максвелла в рассматриваемом случае не являются независимыми. Здесь будем постулировать равенства Гаусса-Остроградского для электромагнитного поля. Равенство Гаусса-Остроградского для вектора электрического смещения записывается так:

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q = \int_V \rho dV. \quad (2.16)$$

Из третьего уравнения Максвелла (2.16) следует, что поток вектора смещения через замкнутую поверхность  $S$  равен сумме зарядов, имеющих в объеме, заключенном внутри указанной поверхности.

При этом, если заряд положителен, то линии вектора смещения выходят из поверхности, внутри которой заключен этот заряд (рисунок 2.6, а); в случае же отрицательного заряда линии вектора смещения входят в этот объем (рисунок 2.6, б). Таким образом, силовые линии электрического поля имеют начало и конец.

Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю, так как не существуют магнитные заряды, т.е.:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.17)$$

Приведенное соотношение называется четвертым уравнением Максвелла в интегральной форме. Из него следует, что число силовых линий  $\vec{B}(\vec{H})$ , входящих в объем через замкнутую поверхность  $S$ , всегда равно числу выходящих силовых линий (рисунок 2.7).

Таким образом, силовые линии магнитного поля не имеют ни начала, ни конца, т.е. они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. В силу сказанного, уравнение (2.17) математическое выражение принципа непрерывности магнитного потока.

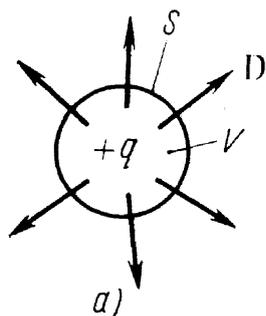


Рисунок 2.6 – Линии вектора смещения

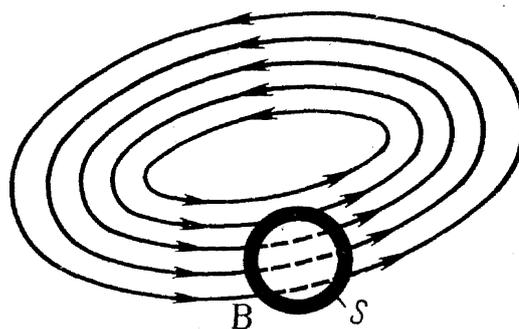
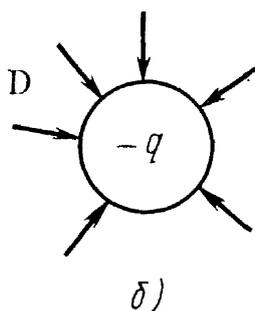


Рисунок 2.7 – Поток магнитной индукции через замкнутую поверхность

### Уравнения Максвелла в дифференциальной форме и их физический смысл

Уравнения (2.1), (2.5), (2.6) и (2.7) связывают интегральные эффекты векторов поля (циркуляцию, поток) в некоторой области с совокупностью зарядов и токов, имеющих в этой области. Однако во многих случаях представляет интерес связь между векторами поля в данной точке с зарядами и токами (точнее, с плотностями зарядов и токов) в той же точке. Эта связь математически представляется дифференциальными уравнениями Максвелла.

Получить дифференциальные уравнения из интегральных уравнений можно двумя путями (принципиально мало отличающимися):

- 1) непосредственным определением предельных отношений циркуляции векторов поля по замкнутому контуру и потоков этих векторов через замкнутую поверхность соответственно к площади поверхности, ограниченной контуром, и объему, заключенному в указанной замкнутой поверхности;
- 2) применением к интегральным уравнениям теорем Стокса и Остроградского-Гаусса.

Напомним, что теорема Стокса связывает линейный интеграл от любого вектора по замкнутому контуру (циркуляцию вектора) с интегралом по поверхности, ограниченной этим контуром:

$$\oint_L \bar{A} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{A} d\bar{S}, \quad (2.18)$$

где  $\text{rot} \bar{A}$  – ротор (вихрь) вектора  $\bar{A}$ , представляющий собой векторную величину;  $\int_S \text{rot} \bar{A} d\bar{S}$  – поток ротора вектора  $\bar{A}$  через поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ .

Теорема Остроградского-Гаусса связывает интеграл по замкнутой поверхности  $S$  с интегралом по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью:

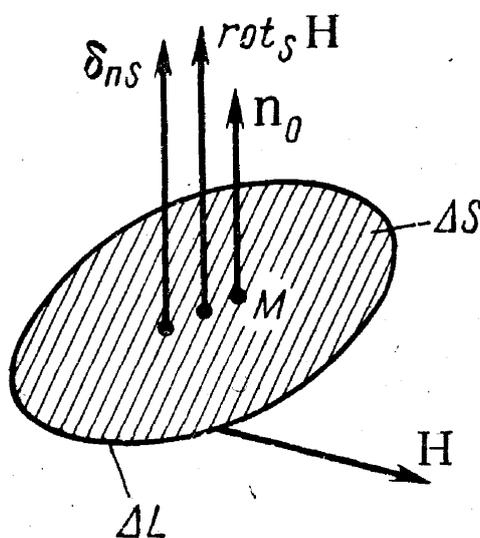
$$\oint_S \bar{A} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{A} dV, \quad (2.19)$$

где  $\operatorname{div}\bar{A}$  – дивергенция (расходимость) вектора  $\bar{A}$ , представляющая собой скалярную величину.

### Первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Для получения первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме возьмем отношение циркуляции вектора  $\bar{H}$  по замкнутому малому контуру  $\Delta L$  (рисунок 2.8) к площади  $\Delta S$ , охватываемой контуром, через которую проходит полный ток  $\Delta i_{\Pi}$ . Тогда в соответствии с уравнением (2.13) будем иметь:

$$\frac{\oint_{\Delta L} \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} = \frac{\Delta i_{\Pi}}{\Delta S}.$$



**Рисунок 2.8 - Связь  $\operatorname{rot}\bar{H}$  и полного тока  $\bar{j}_{\Pi} = \bar{j}_{\Pi P} + \bar{j}_{CM}$**

Запишем пределы, к которым стремятся левая и правая части равенства, когда  $\Delta S \rightarrow 0$ . Предел левой части характеризует магнитное поле в точке (контур  $\Delta L$  стягивается к точке  $M$ ) и представляет собой проекцию ротора вектора  $\bar{H}$  на направление нормали к поверхности  $\Delta S$ , опирающейся на рассматриваемый контур  $\Delta L$ :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} = \operatorname{rot}_S \bar{H} = \bar{n}_0 \operatorname{rot} \bar{H}.$$

Предел правой части дает проекцию вектора плотности тока на ту же нормаль:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i_{\Pi}}{\Delta S} = j_{\Pi S}.$$

Следовательно:

$$\operatorname{rot}_S \bar{H} = j_{\Pi S}.$$

При определенном положении элементарного контура в пространстве (когда он будет в рассматриваемой точке перпендикулярен к вектору плотности полного тока) указанный предел отношения будет максимален и равен ротору вектора  $\bar{H}$ :

$$\text{rot}\bar{H} = \bar{j}_{\Pi} = \bar{j}_{CM} + \bar{j}_{\Pi P}. \quad (2.20)$$

Соотношение (2.20) называется первым уравнением Максвелла в дифференциальной форме. С помощью интегрального соотношения (2.13) и теоремы Стокса (2.18) указанное уравнение находят следующим образом:

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{j}_{\Pi} d\bar{S}, \quad \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \text{rot}\bar{H} d\bar{S}.$$

Так как левые части обоих соотношений одинаковы, то равны и их правые части, т.е.:

$$\int_S \text{rot}\bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{j}_{\Pi} d\bar{S}.$$

Из равенства приведенных интегралов для произвольной поверхности  $S$  следует равенство подынтегральных функций, т.е. получаем уравнение (2.20).

Физический смысл дифференциального уравнения (2.20) заключается в том, что в любой точке напряженность магнитного поля определяется плотностью полного тока в этой точке. При этом все виды токов независимо от причин их возникновения (ток проводимости, ток смещения, конвекционный ток) являются равноценными в смысле возбуждения ими магнитных полей.

#### Второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме

Из интегрального соотношения (2.15) аналогично тому, как было получено уравнение (2.20), находим второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) устанавливает связь между электрическим полем и его изменением в пространстве с изменением магнитного поля во времени. При этом изменяющееся во времени магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Таким образом, наряду с электрическим полем, создаваемым электрическими зарядами, может существовать вихревое электрическое поле.

#### Уравнение непрерывности тока. Третье и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Для полной характеристики электромагнитного поля необходимо к полученным основным дифференциальным уравнениям Максвелла присоединить уравнение, выражающее закон сохранения заряда в дифференциальной форме или принцип непрерывности электрического тока в общем виде. Для этого будем исходить из закона сохранения заряда в интегральной форме (2.1). В соответствии с (2.1) ток  $i_{3,\Pi}$ , вытекающий из весьма малого объема  $\Delta V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $\Delta S$ , будет сопровождаться уменьшением заряда ( $\Delta q = \rho \Delta V$ ) в этом объеме. Возьмем отношение левой и

правой частью выражения (2.1) к объему  $\Delta V$  при стремлении последнего к нулю:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{j}_{ПП} d\bar{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Delta q}{\Delta V} \right).$$

Левая часть полученного соотношения в соответствии с определением представляет собой  $div \bar{j}_{ПП}$ , а правая – производную по времени от плотности заряда в рассматриваемой точке  $\left( -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$ . Окончательно закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме запишется следующим образом:

$$div \bar{j}_{ПП} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.22)$$

При постоянном токе плотность зарядов по всему объему проводника постоянна во времени  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Поэтому  $div \bar{j}_{ПП} = 0$ . Последнее равенство выражает принцип непрерывности постоянного электрического тока в дифференциальной форме. Пользуясь уравнением (2.22) и полученными ранее дифференциальными уравнениями Максвелла, найдем еще два соотношения, которые также причисляют к дифференциальным уравнениям поля. Для этого определим дивергенции векторов, входящих в левую и правую части первого и второго уравнений Максвелла в дифференциальной форме (2.20) и (2.21), соответственно. Третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме получаются в виде:

$$div \bar{D} = \rho. \quad (2.23)$$

Отличие от нуля дивергенции электрического смещения отражает в дифференциальной форме то обстоятельство, что линии электрического поля не замкнуты, т.е. имеются их начало и конец. При этом в точках, где  $div \bar{D} \neq 0$ , эти линии начинаются ( $+q$ ) или кончаются ( $-q$ ) (см. рисунок 2.6).

Четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$div \bar{B} = 0$$

выражает принцип непрерывности магнитного потока. Из этого уравнения следует, что силовые линии любого магнитного поля замкнуты.

#### Эквивалентные скалярные уравнения

Из вышеизложенного следует, что электромагнитное поле описывается четырьмя дифференциальными уравнениями, из которых первые два – векторные, а третье и четвертое – скалярные. Каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных уравнения, т.е. электромагнитному полю соответствуют 8 скалярных уравнений, связывающих составляющие его векторов. Вид развернутой записи этих скалярных уравнений зависит от выбранной системы координат.

Запишем скалярные дифференциальные уравнения электромагнитного поля в прямоугольной системе координат. В этом случае уравнение (2.20) в развернутом виде записывается так:

$$\vec{x}_0 \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{x}_0 j_{I_x} + \vec{y}_0 j_{I_y} + \vec{z}_0 j_{I_z}.$$

Векторы равны, если равны их составляющие, т.е. имеют место три скалярных уравнения:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = j_{I_x}, \quad \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = j_{I_y}, \quad \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = j_{I_z}.$$

Аналогично получаем три скалярных уравнения на основании (2.21). Скалярные же уравнения типа (2.23), (2.24) в развернутом виде в прямоугольной системе координат записываются следующим образом:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

### 2.3 Уравнения Максвелла для гармонических колебаний

#### Сводка уравнений Максвелла

Приведем систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

1.  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT} \right) d\vec{S}; \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT}.$
2.  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}; \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$
3.  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \text{div} \vec{D} = \rho.$
4.  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \text{div} \vec{B} = 0.$
5.  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}.$
6.  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}.$

В этих системах основными являются уравнения 1 и 2, первое из которых отображает закон полного тока, а второе – закон электромагнитной индукции. Часто говорят, что соотношения 1 и 2 образуют первую группу уравнений Максвелла.

Во вторую группу входят уравнение 3, являющееся записью закона Гаусса, и уравнение 4, которое отображает закон неразрывности силовых линий магнитного поля.

Наконец, третью группу образуют материальные уравнения 5 и 6, которые характеризуют электродинамические свойства материальной среды.

Чаще всего при решении задач электродинамики используют уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Входящие в них операции *rot* и *div* представляют собой некоторые комбинации частных производных первого порядка от проекций векторных полей; конкретные формы записи зависят от выбранной координатной системы.

Отметим, что достаточно найти один электрический вектор, например  $\vec{E}$ , и один магнитный вектор, например  $\vec{H}$ . Оставшиеся два вектора можно получить, воспользовавшись материальными уравнениями.

Таким образом, уравнения Максвелла представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно шести неизвестных функций (например,  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ ), которые зависят в общем случае от трех пространственных координат  $x, y, z$  и от времени  $t$ .

В большинстве практически интересных случаев можно обоснованно считать, что рассматриваемые материальные среды являются линейными. В подобных средах имеет место фундаментальный принцип суперпозиции электромагнитных полей: если  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  и  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  – частные решения уравнений Максвелла, то решением будет и сумма вида  $(a_1\vec{E}_1 + a_2\vec{E}_2, a_1\vec{H}_1 + a_2\vec{H}_2)$  с произвольными постоянными коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ . Принцип суперпозиции непосредственно следует из того, что операция дифференцирования по времени  $\frac{\partial}{\partial t}$  и векторные дифференциальные операции *rot* и *div* являются линейными.

Отмеченное свойство линейности существенно облегчает анализ многих электродинамических задач. Тем не менее, решить систему шести уравнений Максвелла в ситуациях, достаточно приближенных к реальным, зачастую весьма сложно. Прикладная электродинамика вынуждена прибегать к всевозможным приближенным методам, а также использовать приемы численного анализа, реализуемые с помощью компьютеров.

Уравнения Максвелла для гармонических колебаний. Комплексные амплитуды полей

В систему уравнений Максвелла входят частные производные по четырем аргументам:  $x, y, z$  и  $t$ . Процедура решения, несомненно, упростится, если из уравнений удастся исключить временную переменную  $t$ . Этого легко добиться, если рассматриваемый электромагнитный процесс протекает во времени по гармоническому закону с некоторой постоянной частотой  $\omega$ . Такие процессы часто встречаются на практике. К тому же, зная поведение поля на всех частотах, можно воссоздать поле с любым законом изменения во времени, воспользовавшись методом преобразования Фурье.

В наиболее общем случае вектор какого-либо поля, например  $\vec{E}$ , изменяющегося во времени по гармоническому закону, в некоторой заданной точке пространства записывается так:

$$\bar{E}(t) = E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) \bar{i}_x + E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) \bar{i}_y + E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \bar{i}_z \quad (2.24)$$

Здесь  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$ ,  $E_{mz}$  – амплитуды отдельных составляющих поля;  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  – соответствующие начальные фазы. Все шесть перечисленных величин являются действительными числами. Эквивалентная запись формулы (2.24) такова:

$$\bar{E}(t) = \operatorname{Re} \left[ \left( E_{mx} e^{j\varphi_x} \bar{i}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \bar{i}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \bar{i}_z \right) e^{j\omega t} \right]. \quad (2.25)$$

Вектор

$$\dot{\bar{E}} = E_{mx} e^{j\varphi_x} \bar{i}_x + E_{my} e^{j\varphi_y} \bar{i}_y + E_{mz} e^{j\varphi_z} \bar{i}_z \quad (2.26)$$

принимаящий в общем случае комплексные значения, принято называть *комплексной амплитудой поля*  $\bar{E}$  в заданной точке пространства. При этом считается, что частота  $\omega$  изменения поля во времени известна. В дальнейшем все комплексные амплитуды будут помечаться точками сверху.

Метод комплексных амплитуд широко применяют в теории электрических цепей. Однако следует указать на весьма существенное обстоятельство: в электродинамических задачах комплексные амплитуды выступают как пространственные, в общем случае трехмерные, векторы. Поэтому изобразить их в виде некоторых вспомогательных векторов, вращающихся на комплексной плоскости, принципиально невозможно. Экспоненциальные множители с мнимыми показателями, входящие в комплексные амплитуды отдельных проекций поля, характеризуют исключительно фазовые соотношения – между проекциями. Например, если комплексные амплитуды двух гармонически изменяющихся во времени векторов имеют вид  $\dot{\bar{E}}_1 = E_0 \bar{i}_x$  и  $\dot{\bar{E}}_2 = E_0 \bar{i}_x$ , то это отнюдь не означает, что эти два вектора образуют в пространстве угол  $90^\circ$  (в действительности оба вектора параллельны орту  $\bar{i}_x$ ), а лишь говорит о том, что при изменении во времени вектор  $\bar{E}_2$  опережает вектор  $\bar{E}_1$  на четверть периода.

Мгновенное значение вектора, гармонически изменяющегося во времени, выражается через комплексную амплитуду следующим образом:

$$\bar{E}(t) = \operatorname{Re} \left( \dot{\bar{E}} e^{j\omega t} \right). \quad (2.27)$$

Пример. Вектор поля  $\bar{H}$  изменяется по гармоническому закону с частотой  $f = 3 \text{ ГГц} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ . В некоторой точке пространства вектор имеет комплексную амплитуду  $\dot{\bar{H}} = 120 e^{j30^\circ} \bar{i}_x + 50 e^{j45^\circ} \bar{i}_y + 100 e^{-j90^\circ} \bar{i}_z$ . Требуется определить мгновенное значение данного вектора как функцию времени.

Применив формулу (2.27), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) = & 120 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 30^\circ) \bar{i}_x + 50 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t + 45^\circ) \bar{i}_y + \\ & + 100 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 t - 90^\circ) \bar{i}_z. \end{aligned}$$

Комплексные амплитуды легко ввести в уравнения Максвелла, полагая, что величины  $\dot{\vec{E}}(x, y, z)$ ,  $\dot{\vec{H}}(x, y, z)$  и т. д. зависят от пространственных координат. Возьмем, например, первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме и подставим в него соответствующие векторные поля, выраженные через комплексные амплитуды:

$$\text{rot Re}(\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\dot{\vec{D}}e^{j\omega t}) + \sigma \text{Re}(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}) + \text{Re}(\dot{\vec{j}}_{CT}e^{j\omega t}) \quad (2.28)$$

Изменяя порядок следования дифференциальных операций и операции взятия действительной части, что всегда допустимо, а затем, сокращая на общий экспоненциальный множитель, получаем:

$$\text{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\dot{\vec{D}} + \sigma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{CT}. \quad (2.29)$$

Таким образом, переход к комплексным амплитудам полей совершается по тем же правилам, что и в теории цепей, – оператор дифференцирования по времени, действующий на мгновенное значение поля, заменяется множителем  $j\omega$  при соответствующей комплексной амплитуде.

Аналогично преобразуются остальные уравнения Максвелла.

Приведем их окончательную сводку:

$$1. \text{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\dot{\vec{D}} + \sigma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{CT}.$$

$$2. \text{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}}.$$

$$3. \text{div}\dot{\vec{D}} = \rho. \quad (2.30)$$

$$4. \text{div}\dot{\vec{B}} = 0.$$

$$5. \dot{\vec{D}} = \varepsilon_a \dot{\vec{E}}.$$

$$6. \dot{\vec{B}} = \mu_a \dot{\vec{H}}.$$

Именно такая форма записи уравнений Максвелла обычно встречается в прикладных исследованиях и расчетах.

Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь

Рассмотрим электромагнитный процесс в материальной среде с конечным значением удельной проводимости  $\sigma$ . Объединив уравнения 1 и 5 из системы (2.30), получим:

$$\text{rot}\dot{\vec{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{CT}, \quad (2.31)$$

где величина

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (2.32)$$

представляет собой комплексную диэлектрическую проницаемость данного вещества.

Введя этот параметр, можно одновременно учесть как поляризационные, так и проводящие свойства вещества. Значение действительной части комплексной диэлектрической проницаемости описывает интенсивность про-

цесса поляризации, в то время как мнимая часть учитывает плотность токов проводимости.

**Пример.** Морская вода имеет следующие параметры  $\varepsilon = 75$ ,  $\sigma = 4$  См/м. Частота поля  $f = 0.1$  МГц. Сравнить степень выраженности процессов поляризации и электропроводности в этой среде на указанной частоте.

По формуле (2.32) находим комплексную диэлектрическую проницаемость:  $\tilde{\varepsilon}_a = 75 \left( \frac{10^{-9}}{36\pi} \right) - j \frac{4}{2\pi \cdot 10^5} = 6.63 \cdot 10^{-10} - j 6.36 \cdot 10^{-6} \frac{\Phi}{м}$ .

Отсюда следует, что при заданной частоте плотность тока проводимости в морской воде на четыре порядка превосходит суммарную плотность токов смещения и поляризации.

Изображая число  $\tilde{\varepsilon}_a$  в виде вектора на комплексной плоскости (рисунок 2.9), можно описывать соотношение между действительной и мнимой частями комплексной проницаемости при помощи угла  $\delta$ , который называют *углом диэлектрических потерь*. Чем больше этот угол, тем значительнее доля электромагнитной энергии, рассеиваемой в виде теплоты при протекании токов проводимости. В справочных таблицах обычно приводят значения тангенса этого угла:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}. \quad (2.33)$$

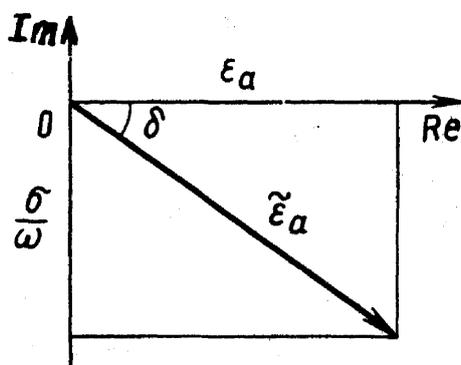


Рисунок 2.9 - Угол диэлектрических потерь  $\delta$

Тангенс угла потерь хороших диэлектриков на частотах СВЧ диапазона лежит в пределах от  $10^{-5}$  до  $10^{-4}$ ; если  $\operatorname{tg} \delta \geq 10^{-3}$ , то такой диэлектрик принято считать плохим.

## 2.4 Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Вектор Пойнтинга

Электромагнитное поле способно накапливать и переносить энергию. Законы движения энергии в электромагнитном поле вытекают из уравнений Максвелла.

Предположим, что внутри замкнутого объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$  (рисунок 2.10), существует электромагнитное поле с некоторым запасом энергии  $W$ . Будем считать, что внутри этого объема часть энергии поля необратимо превращается в теплоту, и пусть  $P_{\text{ПОТ}}$  – мгновенное значение мощности тепловых потерь. Энергия электромагнитного поля может также изменяться во времени за счет действия сторонних токов, сосредоточенных внутри объема. Обозначим символом  $P_{\text{СТ}}$  мгновенную мощность этих источников; величину  $P_{\text{СТ}}$  будем считать отрицательной, если сторонние источники (генераторы) увеличивают энергию поля, и положительной, если сторонние источники отбирают энергию из электромагнитного поля, действуя подобно внешним нагрузкам.

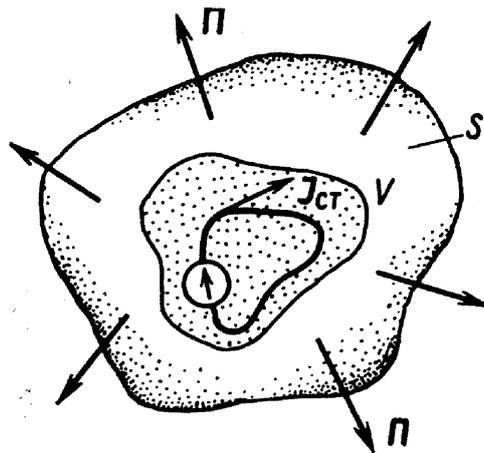


Рисунок 2.10 - Вектор Пойнтинга -  $\vec{P}$

Наконец, предположим, что в каждой точке поверхности задан некоторый вектор  $\vec{P}$ , своим модулем и направлением характеризующий плотность потока мощности. Вектор  $\vec{P}$  имеет размерность Вт/м<sup>2</sup>; если этот вектор ориентирован по направлению от поверхности, это означает, что в точке задания данного вектора энергия покидает объем  $V$ . На основании закона сохранения энергии естественно полагать, что перечисленные выше физические величины связаны между собой соотношением:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -\frac{dW}{dt} - P_{\text{ПОТ}} - P_{\text{СТ}}. \quad (2.34)$$

В 1884 г. английский ученый Дж. Пойнтинг, развивая идеи Максвелла, показал, что вектор плотности потока мощности электромагнитного поля:

$$\bar{P} = [\bar{E}\bar{H}]. \quad (2.35)$$

Данный вектор называют *вектором Пойнтинга*. Если электромагнитное поле изменяется во времени гармонически, то вектор Пойнтинга можно выразить через комплексные амплитуды  $\dot{\bar{E}}$  и  $\dot{\bar{H}}$  соответствующих полей, поскольку действительная часть любого комплексного числа есть полусумма комплексно-сопряженных чисел, так что:

$$\bar{E} = \text{Re}(\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{E}}e^{j\omega t} + \dot{\bar{E}}^*e^{-j\omega t}), \quad (2.36)$$

$$\bar{H} = \text{Re}(\dot{\bar{H}}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\dot{\bar{H}}e^{j\omega t} + \dot{\bar{H}}^*e^{-j\omega t}). \quad (2.37)$$

Подставим данные выражения в формулу (2.35):

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[ \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right] + \left[ \dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}} \right] + \left[ \dot{\bar{E}}\dot{\bar{H}} \right] e^{j2\omega t} + \left[ \dot{\bar{E}}^* \dot{\bar{H}}^* \right] e^{-j2\omega t} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right] + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left[ \dot{\bar{E}}\dot{\bar{H}} \right] e^{j2\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Здесь первое слагаемое в правой части неизменно во времени, а второе изменяется с удвоенной частотой. Таким образом, процесс переноса энергии в гармоническом электромагнитном поле характеризуется, с одной стороны, действительным вектором:

$$\bar{P}_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{P} dt = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right], \quad (2.39)$$

равным плотности потока мощности, *усредненной за период*, и, с другой стороны, действительным вектором:

$$\bar{P}_{КОЛ} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left[ \dot{\bar{E}}\dot{\bar{H}} \right] e^{j2\omega t} \right\}, \quad (2.40)$$

который представляет собой *колеблющуюся* составляющую вектора Пойнтинга. Следует иметь в виду, что среднее за период значение вектора  $\bar{P}_{КОЛ}$  равно нулю.

При анализе гармонических электромагнитных полей часто вводят *комплексный вектор Пойнтинга*:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \left[ \dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right], \quad (2.41)$$

обладающий тем свойством, что:

$$\bar{P}_{CP} = \text{Re} \dot{\bar{P}}. \quad (2.42)$$

Легко видеть, что имеется полная аналогия между комплексным вектором Пойнтинга и известной из теории цепей комплексной мощностью гармонического колебания. Если комплексный вектор Пойнтинга оказывается мнимым, то это значит, что рассматриваемый электромагнитный процесс в среднем за период не переносит мощности. Принято говорить, что чисто

мнимому значению комплексного вектора Пойнтинга отвечает перенос электромагнитным полем *реактивной мощности*.

Пример. В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды полей:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= 5\bar{i}_x - j8\bar{i}_y + 12e^{j30^\circ}\bar{i}_z \frac{B}{M}, \\ \dot{\vec{H}} &= 0.4e^{j45^\circ}\bar{i}_x + 1.6e^{-j45^\circ}\bar{i}_y - 0.75e^{j60^\circ}\bar{i}_z \frac{A}{M}.\end{aligned}$$

Найти комплексный вектор Пойнтинга  $\dot{\vec{P}}$  и его действительную часть  $\dot{\vec{P}}_{CP}$  в данной точке.

Сопряженная комплексная амплитуда магнитного вектора:

$$\dot{\vec{H}}^* = 0.4e^{-j45^\circ}\bar{i}_x + 1.6e^{j45^\circ}\bar{i}_y - 0.75e^{-j60^\circ}\bar{i}_z.$$

Раскрывая векторное произведение в декартовой системе координат, получим:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ 5 & -j8 & 12e^{j30^\circ} \\ 0.4e^{-j45^\circ} & 1.6e^{j45^\circ} & -0.75e^{j60^\circ} \end{pmatrix} = \\ &= (3e^{j150^\circ} - 9.6e^{j75^\circ})\bar{i}_x + (1.875e^{j60^\circ} + 2.4e^{-j15^\circ})\bar{i}_y + 5.6e^{j45^\circ}\bar{i}_z.\end{aligned}$$

Преобразуя экспоненты с мнимыми показателями по формуле Эйлера, находим, что:

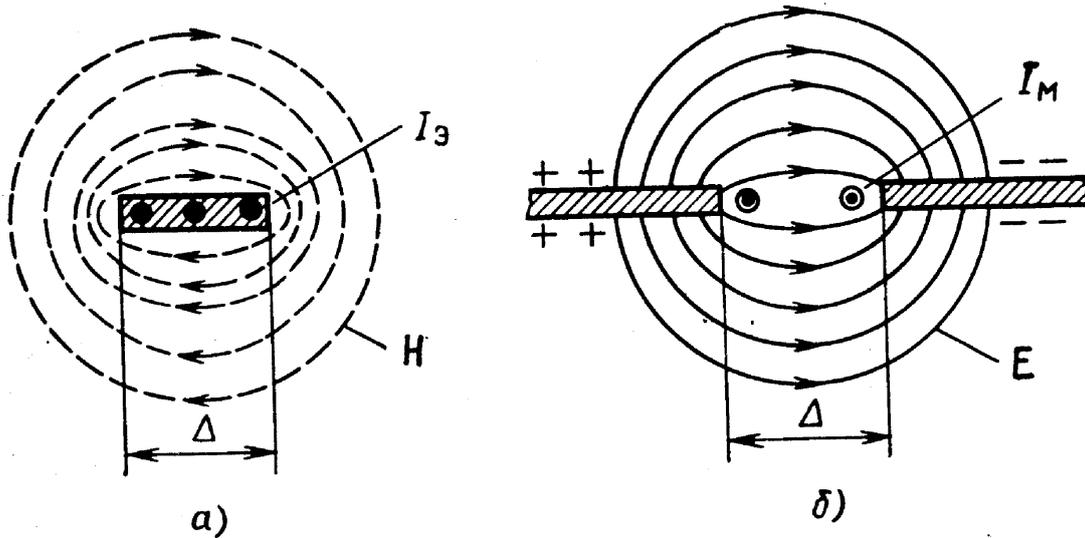
$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} &= (-5.083 - j7.773)\bar{i}_x + (3.306 + j1.003)\bar{i}_y + (3.960 + j3.960)\bar{i}_z \frac{Bm}{M^2}, \\ \dot{\vec{P}}_{CP} &= -5.083\bar{i}_x + 3.306\bar{i}_y + 3.960\bar{i}_z \frac{Bm}{M^2}.\end{aligned}$$

#### 2.4.1 Магнитный ток. Принцип перестановочной двойственности

Рассмотрим картину магнитных силовых линий, возникающую вблизи тонкой проводящей полоски шириной  $\Delta$ , по которой протекает электрический ток  $I_\Sigma$  (рисунок 2.11, а). В непосредственной близости от проводника магнитные силовые линии в значительной мере повторяют его контур. На самой поверхности проводника магнитный вектор касателен к плоскости полоски, отмеченной сплошной линией. С удалением от полоски силовые линии, постепенно деформируясь, превращаются в окружности. На рисунке 2.11, б изображена картина силовых линий электрического вектора в системе из двух заряженных металлических полуплоскостей, которые разделены зазором шириной  $\Delta$ . С точностью до направления стрелок в верхнем и нижнем полупространствах эта картина тождественна той, которая рассматривалась ранее.

Сходство картин данных полей позволяет чисто формально предположить, что в щели параллельно кромкам протекает некоторый гипотетический ток  $I_M$ , называемый *магнитным током*.

Подчеркнем, что в силу соленоидального характера магнитного поля физических носителей магнитного тока не существует. Понятие магнитного тока играет вспомогательную роль, позволяя в ряде случаев значительно упростить расчеты.



*a* - магнитное поле вблизи проводящей полоски;

*б* - электрическое поле вблизи зазора между двумя заряженными плоскостями

**Рисунок 2.11 - Картина силовых линий поля:**

Геометрическое сходство полей на рисунках 2.11, *a*, *б* есть следствие симметрии двух основных уравнений Максвелла:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}; \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}, \quad (2.43)$$

которые переходят одно в другое при следующих перестановках:

$$\dot{\vec{E}} \leftrightarrow \dot{\vec{H}}; \quad \epsilon_a \leftrightarrow \mu_a. \quad (2.44)$$

Если в правой части первого уравнения Максвелла фигурирует плотность стороннего электрического тока  $\vec{j}_{СТ.Э}$ , то для сохранения симметрии уравнений в правую часть второго уравнения следует ввести гипотетическую плотность стороннего магнитного тока  $\vec{j}_{СТ.М}$ , такую, что:

$$\vec{j}_{СТ.Э} \leftrightarrow \vec{j}_{СТ.М}. \quad (2.45)$$

В этом случае система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{j}}_{СТ.М}; \quad \text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{j}}_{СТ.Э}. \quad (2.46)$$

Соотношения (2.44) и (2.45) отображают принцип перестановочной двойственности для электромагнитного поля. В соответствии с этим принципом, если известно решение какой-либо электродинамической задачи, простая перестановка позволяет сразу получить решение двойственной (дуальной) задачи, в которой конфигурация силовых линий магнитного поля повто-

ряет конфигурацию силовых линий электрического поля в исходном процессе. При этом, поскольку уравнения Максвелла не меняют своего вида, дуальный электромагнитный процесс заведомо существует.

## 2.4.2 Лемма Лоренца

В теоретических вопросах важную роль играет соотношение, называемое леммой Лоренца, которое устанавливает связь между полями, возбуждаемыми в пространстве двумя независимыми системами сторонних токов.

Пусть некоторая совокупность гармонических сторонних токов  $\bar{j}^{(1)}_{СТ.Э}$ ,  $\bar{j}^{(1)}_{СТ.М}$  создает электромагнитное поле с комплексными амплитудами  $(\dot{\bar{E}}_1, \dot{\bar{H}}_1)$ , которое удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$rot \dot{\bar{H}}_1 = j\omega \epsilon_a \dot{\bar{E}}_1 + \dot{j}^{(1)}_{СТ.Э}; \quad rot \dot{\bar{E}}_1 = -j\omega \mu_a \dot{\bar{H}}_1 - \dot{j}^{(1)}_{СТ.М}. \quad (2.47)$$

Наряду с этим рассмотрим другую систему сторонних токов  $\bar{j}^{(2)}_{СТ.Э}$ ,  $\bar{j}^{(2)}_{СТ.М}$ , имеющих ту же самую частоту. Эти токи возбуждают поле с комплексными амплитудами  $(\dot{\bar{E}}_2, \dot{\bar{H}}_2)$ , удовлетворяющими уравнениям:

$$rot \dot{\bar{H}}_2 = j\omega \epsilon_a \dot{\bar{E}}_2 + \dot{j}^{(2)}_{СТ.Э}; \quad rot \dot{\bar{E}}_2 = -j\omega \mu_a \dot{\bar{H}}_2 - \dot{j}^{(2)}_{СТ.М}. \quad (2.48)$$

Этапы вывода леммы Лоренца схожи с теми, которые использовались при выводе формулы для вектора Пойнтинга. Прделав несложные операции, приходим к соотношению:

$$div [\dot{\bar{E}}_1 \dot{\bar{H}}_2] - div [\dot{\bar{E}}_2 \dot{\bar{H}}_1] = \dot{j}^{(1)}_{СТ.Э} \dot{\bar{E}}_2 + \dot{j}^{(2)}_{СТ.М} \dot{\bar{H}}_1 - \dot{j}^{(2)}_{СТ.Э} \dot{\bar{E}}_1 - \dot{j}^{(1)}_{СТ.М} \dot{\bar{H}}_2, \quad (2.49)$$

которое выражает лемму Лоренца в дифференциальной форме. Векторные произведения  $[\dot{\bar{E}}_1 \dot{\bar{H}}_2]$  и  $[\dot{\bar{E}}_2 \dot{\bar{H}}_1]$  в левой части можно трактовать как взаимные векторы Пойнтинга двух независимых электромагнитных процессов. Возможна также интегральная формулировка рассматриваемой леммы.

Лемма Лоренца в форме (2.49) является полезным инструментом решения многих задач электродинамики, особенно связанных с расчетом антенн.

### 3 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ ВОЛН [1, 2, 4]

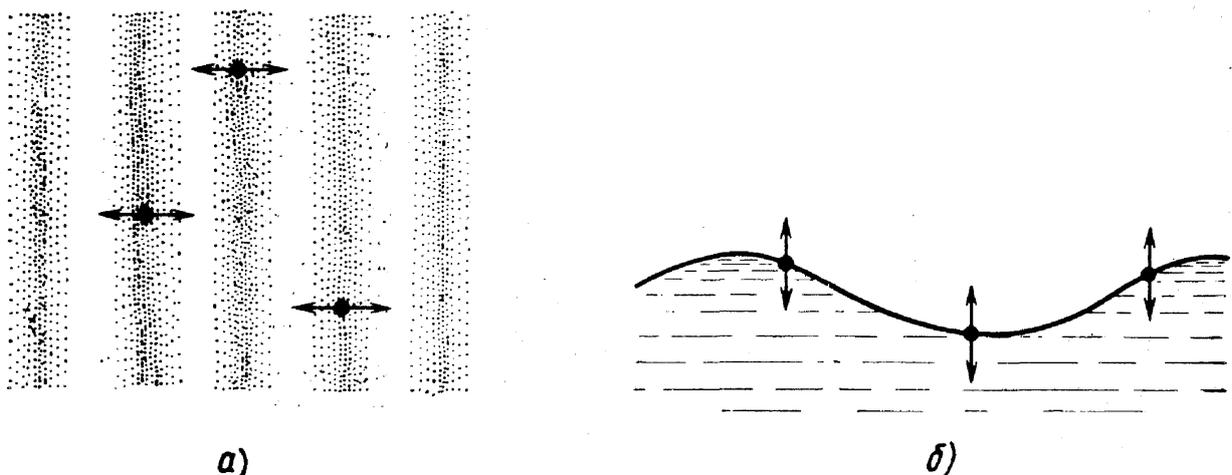
#### 3.1 Плоские однородные электромагнитные волны

##### 3.1.1 Понятие волнового процесса

Волнами в физике называют колебательные движения непрерывных сред. Существует принципиальная разница между волновыми процессами в сплошных средах и колебаниями токов и напряжений в электрических цепях. Если в теории цепей состояние системы полностью определяется конечным числом токов и напряжений в отдельных ветвях, то для задания волнового процесса требуется знать его состояние в бесконечном множестве точек пространства. Поэтому говорят, что среда, в которой распространяются волны, является *распределенной* физической системой.

Природа волновых явлений может быть самой разнообразной. Так, известны электромагнитные волны, механические волны в твердых, жидких и газообразных средах, волны на поверхности моря и т. д.

Сравним два хорошо известных и легко представимых волновых процесса – звуковые волны в воздухе и волны на поверхности воды (рисунок 3.1, *а*, *б*). Пусть эти волны распространяются в направлении слева направо или справа налево. Звуковые волны связаны с перемещением в пространстве областей сжатия и разрежения газа. Каждая отдельная частица газа колеблется вдоль направления распространения волны. Такие волны принято называть *продольными*. В литературе можно встретить также термины *акустические* или *скалярные волны*.



*а* – звуковые волны в воздухе; *б* – волны на поверхности воды

**Рисунок 3.1 – Примеры волновых процессов**

Совсем иной характер волн на поверхности воды. Здесь колеблющиеся частицы перемещаются перпендикулярно направлению распространения вол-

ны (строго говоря, предмет, плавающий на поверхности, описывает некоторую замкнутую кривую, однако продольные перемещения значительно меньше поперечных). Для волн такого вида следует указывать ту плоскость, в которой происходят колебания частиц. Эту плоскость называют *плоскостью поляризации*, а сами волны – *поперечными, поляризованными* или *векторными*. Нетрудно понять, что математическая теория поперечных волн сложнее теории продольных волн. Поэтому следует ожидать, что в поперечных волнах наблюдается большее число различных физических эффектов.

### 3.1.2 Плоские волны и их характеристики

Предположим, что в каждой точке пространства с декартовой системой координат  $(x, y, z)$  определена некоторая величина  $v$  (физическая природа ее на данном этапе безразлична), описываемая формулой:

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t - \beta z), \quad (3.1)$$

где  $V_m$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  – действительные числа.

Говорят, что данная зависимость является математической моделью *однородной плоской волны*.

Рассматривая характер изменения величины  $v(z, t)$  в пространстве и во времени, заметим, прежде всего, что значения  $v$  постоянны в любой плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Иными словами, мгновенные значения однородной плоской волны не зависят от поперечных координат  $x$  и  $y$ .

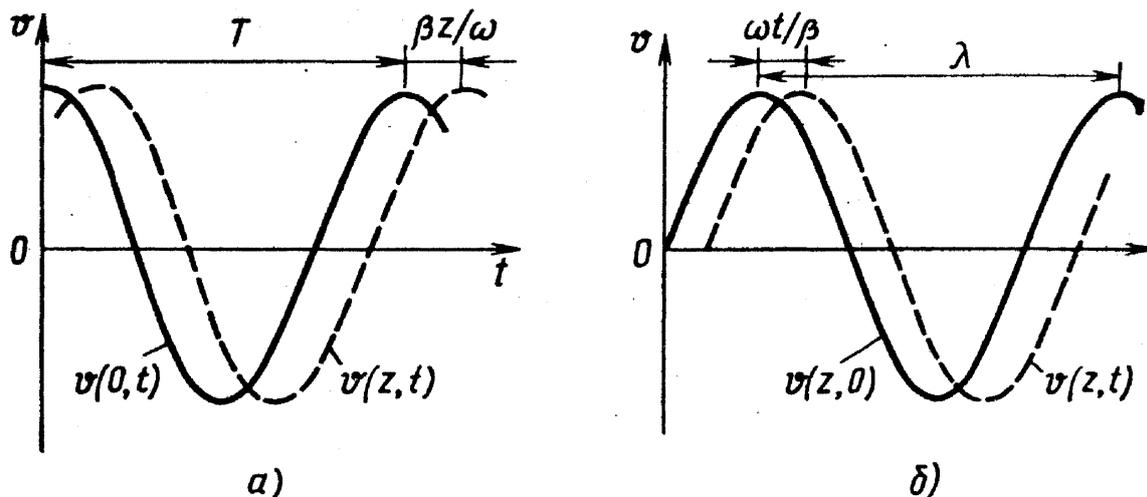
Далее обратим внимание на то, что как временная, так и пространственная зависимости величины  $v(z, t)$  описываются гармоническими функциями. Действительно, зафиксировав точку  $z = 0$ , получим  $v(0, t) = V_m \cos \omega t$ . Колебания в точке с координатой  $z > 0$  имеют вид  $v(z, t) = V_m \cos(\omega t - \beta z)$ , т.е. характеризуются теми же амплитудой  $V_m$  и частотой  $\omega$ , однако запаздывают по фазе на  $\beta z$  радиан. Сказанное поясняется кривыми на рисунке 3.2, *а*.

Рассмотрим теперь «мгновенную фотографию» процесса  $v(z, t)$  в начальный момент времени  $t = 0$  (рисунок 3.2, *б*). Данная зависимость описывается гармонической функцией  $v(z, 0) = V_m \cos \beta z$ . Параметр  $\beta$  играет роль «пространственной частоты» процесса и называется *коэффициентом фазы* плоской волны. Величина  $\beta$  имеет размерность рад/м или, короче,  $\text{м}^{-1}$ .

Функция  $v(z, 0)$  периодична; ее период  $\lambda$ , называют *длиной волны*. Между величинами  $\beta$  и  $\lambda$  существует очевидная связь:

$$\beta = 2\pi\lambda. \quad (3.2)$$

Чтобы изобразить график функции  $v(z, t)$  при  $t > 0$ , формулу (3.1) удобно записать в виде  $v(z, t) = V_m \cos(\beta z - \omega t)$ . При этом видно, что с ростом  $t$  фазовый сдвиг с  $\omega t$  увеличивается, так что исходная кривая  $v(z, 0)$  сдвигается вдоль оси *вправо*, т.е. в сторону увеличения координаты  $z$  (рисунок 3.2, *б*).



*a* – изменение поля во времени; *б* – изменение поля в пространстве

**Рисунок 3.2 – Однородная плоская волна**

Назовем *плоскостью равных фаз* или *волновым фронтом* воображаемую бесконечно протяженную плоскость, перпендикулярную оси  $z$ ; координата  $z$  этой плоскости при любых  $t$  удовлетворяет соотношению:

$$\omega t - \beta z = \text{const}. \quad (3.3)$$

Волновой фронт данной плоской волны перемещается вдоль оси  $z$  с так называемой *фазовой скоростью*:

$$v_{\Phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t - \text{const}}{\beta} \right) = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.4)$$

Формулу (3.4) можно представить и по-иному:

$$v_{\Phi} = \lambda f, \quad (3.5)$$

где  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  – частота процесса, выраженная в герцах.

Итак, из трех параметров  $v_{\Phi}$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  лишь два можно выбирать произвольно; третий параметр подчиняется соотношению (3.4).

**Пример.** Электромагнитная волна распространяется в вакууме с фазовой скоростью  $v_{\Phi} = c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Частота поля  $f = 400$  МГц. Определить длину волны  $\lambda$  и коэффициент фазы  $\beta$ .

$$\text{В данном случае } \lambda = \frac{c}{f} = 0.75 \text{ м}; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6.28}{0.75} = 8.378 \text{ м}^{-1}.$$

Рассмотрим однородную плоскую волну с математической моделью вида:

$$v(z, t) = V_m \cos(\omega t + \beta z). \quad (3.6)$$

Все сказанное ранее применимо и к этому случаю, за исключением того, что из уравнения волнового фронта  $\omega t - \beta z = \text{const}$  вытекает следующая формула для нахождения фазовой скорости:

$$v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\text{const} - \omega t}{\beta} \right) = -\frac{\omega}{\beta}. \quad (3.7)$$

Сравнивая выражения (3.4) и (3.7), убеждаемся, что плоская волна, описываемая формулой (3.6), распространяется *влево*, т.е. в сторону уменьшения координаты  $z$ .

### 3.1.3 Затухание волн в материальных средах. Коэффициент распространения

В любой реальной среде амплитуда волнового процесса неизбежно уменьшается по мере распространения, например за счет тепловых потерь. Закон ослабления амплитуды легко найти из следующих соображений. Предположим, что в начальной плоскости  $z = 0$  амплитуда имеет исходное значение  $V_{m0}$  принимаемое за 100% (рисунок 3.3). Положим для конкретности, что при прохождении одного метра пути амплитуда волны уменьшается на 10%, т.е.  $V_{m1} = 0.9V_{m0} = 90\%$ . Легко видеть, что  $V_{m2} = 0.9V_{m1} = 81\%$ ,  $V_{m3} = 0.9V_{m2} = 72.9\%$  и т.д. Общая закономерность такова:

$$\frac{V_{m0}}{V_{m1}} = \frac{V_{m1}}{V_{m2}} = \dots = \frac{V_{mN-1}}{V_{mN}} = \dots$$

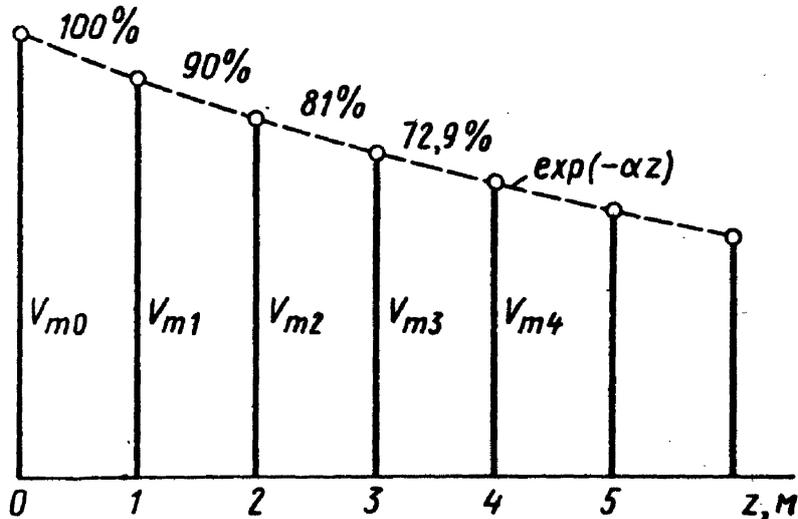


Рисунок 3.3 – Уменьшение амплитуды плоской волны при распространении в среде с потерями

Из элементарной алгебры известно, что именно таким свойством обладает показательная функция. Поэтому закон изменения амплитуды вдоль оси распространения в общем виде можно записать так:

$$V_m(z) = V_{m0} e^{-\alpha z}. \quad (3.8)$$

где  $\alpha$  – коэффициент ослабления плоской волны в среде. Эта действительная величина имеет, подобно коэффициенту фазы, размерность  $\text{м}^{-1}$ .

В технических расчетах часто используют особую логарифмическую единицу – погонное затухание  $\Delta_{\text{ПОГ}}$ , которое измеряют в децибелах на метр (дБ/м) и определяют по формуле:

$$\Delta_{\text{ПОГ}} = 20 \lg \left( \frac{V_{m0}}{V_{m1}} \right) = 20 \lg (e^\alpha) = 8.686\alpha. \quad (3.9)$$

Чтобы оценить удобство пользования логарифмическими единицами затухания, рассмотрим следующий пример.

Пример. В начальной плоскости  $z = 0$  амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны  $E_m(0) = 700 \text{ В/м}$ . Погонное затухание  $\Delta_{\text{ПОГ}} = 0.2 \text{ дБ/м}$ . Вычислить амплитуду  $E_m(400)$  в плоскости с координатой  $z = 400 \text{ м}$ .

Очевидно, что полное затухание волны вдоль пути распространения составит  $0.2 \cdot 400 = 80 \text{ дБ}$ , откуда (с учетом 3.9), получим

$$\lg \left( E_m(0) \cdot \frac{1}{E_m(400)} \right) = \frac{80}{20} = 4. \quad \text{Вычисляя антилогарифм, получаем}$$

$E_m(400) = \frac{E_m(0)}{10^4} = 0.07 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ . Следует обратить внимание на существенное (в 10000 раз) уменьшение амплитуды поля.

Объединив формулы (3.1) и (3.8), можно записать общее выражение для пространственно-временного распределения мгновенных значений поля однородной плоской волны в среде с затуханием:

$$v(z, t) = V_{m0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z). \quad (3.10)$$

Соответствующие кривые для значений  $t = 0$  и  $t > 0$  изображены на рисунке 3.4. График функции  $V_{m0} e^{-\alpha z}$ , выполняющей роль огибающей кривых, показан штриховой линией. Так как зависимость вида (3.10) является гармонической относительно аргумента  $t$ , можно воспользоваться методом комплексных амплитуд.

Очевидно, что комплексная амплитуда данного поля:

$$\dot{V}(z) = V_{m0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = V_{m0} e^{-(\alpha + j\beta)z}, \quad (3.11)$$

поскольку:

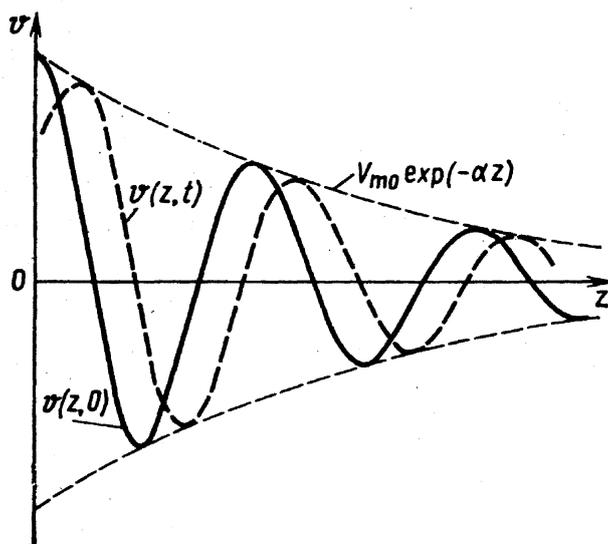
$$v(z, t) = \text{Re} \left[ \dot{V}(z) e^{j\omega t} \right].$$

Коэффициент фазы  $\beta$  и коэффициент ослабления  $\alpha$  объединяют в единую комплексную величину – так называемый коэффициент *распространения*:

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (3.12)$$

такой, что комплексная амплитуда поля плоской волны, распространяющейся в сторону возрастания координаты  $z$ , имеет вид:

$$V_{(+)} = V_{m0} e^{-\gamma z}. \quad (3.13)$$



**Рисунок 3.4 – Распределение мгновенных значений волнового процесса в среде с потерями**

Соответственно комплексная амплитуда волны, распространяющейся или, как часто говорят, бегущей в сторону уменьшения координаты  $z$ , такова:

$$V_{(-)} = V_{m0} e^{\gamma z}. \quad (3.14)$$

В частном случае, когда потери отсутствуют и амплитуда поля постоянна вдоль  $z$ , коэффициент распространения  $\gamma = j\beta$  оказывается чисто мнимым. Возможен и другой частный случай, когда коэффициент распространения чисто действительный:  $\gamma = \alpha$ . При этом волновой процесс, по сути, не существует; колебания  $v(z, t)$  во всех точках пространства происходят с одной и той же фазой, отличаясь лишь амплитудами.

### 3.1.4 Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца

Проведенное выше исследование свойств волновых процессов носило несколько абстрактный характер, и не было связано с конкретными физическими явлениями. Обращаясь к интересующим нас электромагнитным полям, докажем, что одним из частных решений уравнений Максвелла в неограниченном пространстве служат однородные плоские волны.

Рассмотрим бесконечное трехмерное пространство с заданными электродинамическими параметрами  $\tilde{\epsilon}_a, \mu_a$ . Предположим, что свободные заряды отсутствуют  $\rho = 0$ . Электромагнитный процесс, гармонический изменяющийся во времени с частотой  $\omega$ , характеризуется комплексными амплитудами полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$1. \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}. \quad 2. \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

$$3. \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = 0. \quad 4. \operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0. \quad (3.15)$$

Преобразуем систему (3.15) таким образом, чтобы свести ее к эквивалентному уравнению относительно комплексной амплитуды  $\dot{\vec{E}}$  вектора напряженности электрического поля. Для этого применим дифференциальную операцию *rot* к обеим частям уравнения 2, а затем воспользуемся выражением  $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}$  из левой части уравнения 1:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}} = \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{\vec{E}}. \quad (3.16)$$

Примем во внимание, что:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{E}} - \nabla^2 \dot{\vec{E}},$$

или в силу уравнения 3:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -\nabla^2 \dot{\vec{E}}.$$

Тогда уравнение (3.16) преобразуется к виду:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{\vec{E}} = 0. \quad (3.17)$$

В теории волновых процессов равенство (3.17) получило название *уравнения Гельмгольца* в честь немецкого ученого Германа Гельмгольца (1821 – 1894).

Введем параметр  $\gamma$ , в общем случае комплексный, удовлетворяющий соотношению:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a. \quad (3.18)$$

Будет показано, что  $\gamma$  представляет собой коэффициент распространения плоской волны, изучавшийся ранее. Уравнение Гельмгольца приобретает при этом вид:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} - \gamma^2 \dot{\vec{E}} = 0. \quad (3.19)$$

Очевидно, что таким же окажется уравнение относительно комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} - \gamma^2 \dot{\vec{H}} = 0. \quad (3.20)$$

Уравнения (3.19) и (3.20) являются однородными (с нулевой правой частью) векторными дифференциальными уравнениями второго порядка. Каждое из них эквивалентно трем дифференциальным уравнениям в частных производных относительно декартовых проекций комплексных амплитуд векторов поля. Например, представив (3.19) в развернутой форме, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_y &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_z}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{\vec{E}}_z = 0.$$

Решение данной системы относительно трех неизвестных функции  $\dot{\vec{E}}_x$ ,  $\dot{\vec{E}}_y$ ,  $\dot{\vec{E}}_z$ , каждая из которых в свою очередь зависит от трех пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , описывает в общем случае поле с весьма сложной пространственной конфигурацией. Предельно упрощая задачу, будем считать, что:

- 1) проекция  $\dot{\vec{E}}_x \neq 0$ , в то время как  $\dot{\vec{E}}_y = \dot{\vec{E}}_z = 0$ ;
- 2) отличная от нуля проекция  $\dot{\vec{E}}_x$  зависит лишь от координаты  $z$  (для конкретности), так что  $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} = 0$ .

В данном частном случае система (3.21) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка уже не в частных, а в обыкновенных производных, поскольку на основании предположения 2 производную  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  следует заменить на  $\frac{d^2}{dz^2}$ :

$$\frac{d^2 \dot{\vec{E}}_x}{dz^2} - \gamma^2 \dot{\vec{E}}_x = 0. \quad (3.22)$$

Общее решение этого линейного уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой сумму двух экспоненциальных слагаемых:

$$\dot{\vec{E}}_x(z) = \dot{\vec{E}}_1 e^{\gamma_1 z} + \dot{\vec{E}}_2 e^{\gamma_2 z}, \quad (3.23)$$

где  $\gamma_{1,2}$  – корни уравнения (3.18).

Изучим расположение этих корней на комплексной плоскости. Для этого заметим, что величина:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a + j\sigma\omega\mu_a$$

имеет отрицательную действительную и положительную мнимую части, т.е. отображается вектором во II квадранте (рисунок 3.5). Квадратный корень из этого комплексного числа имеет два значения. Одно из них, главное, обозначается здесь как  $\gamma_1$ , имеет аргумент  $\arg \gamma_1 = 0.5 \cdot \arg \gamma^2$  и лежит в I квадранте. Второе значение квадратного корня  $\gamma_2 = -\gamma_1$ . Это число отображается вектором в III квадранте. В дальнейшем будем считать, что число:

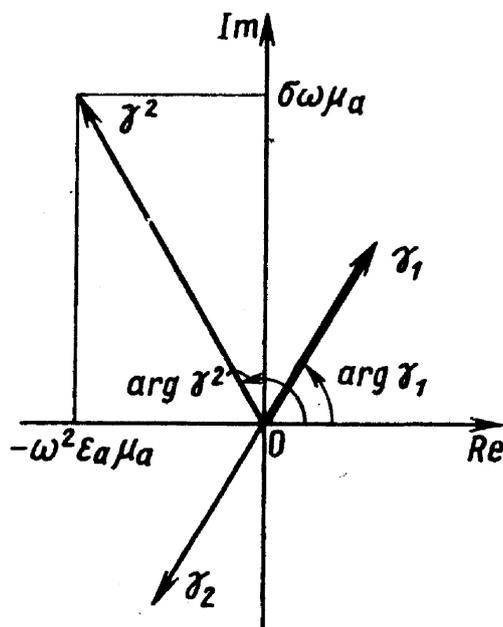
$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a} = j\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a} = \alpha - j\beta. \quad (3.24)$$

представляет собой главное значение квадратного корня  $\gamma^2$ , т.е.  $\gamma = \gamma_1$ . Тогда формулу (3.23) можно переписать так:

$$\dot{\vec{E}}_x(z) = \dot{\vec{E}}_1 e^{\gamma z} + \dot{\vec{E}}_2 e^{-\gamma z} = \dot{\vec{E}}_1 e^{(\alpha + j\beta)z} + \dot{\vec{E}}_2 e^{-(\alpha + j\beta)z} \quad (3.25)$$

Сравнивая эту формулу с выражениями (3.13) и (3.14), приходим к выводу о том, что полученное здесь частное решение уравнения Гельмгольца

описывает однородные плоские волны. Первому слагаемому правой части отвечает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в сторону уменьшения  $z$ . Второе слагаемое описывает такую же волну, бегущую в сторону возрастания координаты  $z$ . Эти волны никак не связаны между собой, так как им соответствуют два линейно независимых решения дифференциального уравнения (3.22).



**Рисунок 3.5 – Нахождение коэффициента распространения плоской волны**

### 3.2 Понятие характеристического сопротивления. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне

Найдя комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля в виде (3.25), можно определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, воспользовавшись уравнением 2 из системы (3.15):

$$\dot{\vec{H}} = \frac{j}{\omega \mu_a} \text{rot} \dot{\vec{E}}. \quad (3.26)$$

Рассмотрим электромагнитную волну, которая распространяется в сторону  $z > 0$  и характеризуется комплексной амплитудой  $\dot{\vec{E}} = \dot{E}_x \exp(-\gamma z) \vec{i}_x$ . Представив дифференциальную векторную операцию  $\text{rot}$  в развернутой форме, имеем:

$$\dot{\vec{H}} = \begin{pmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Раскрывая символический определитель по элементам первой строки, убеждаемся, что:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{-j\gamma}{\omega\mu_a} \dot{E}_x e^{-\gamma z},$$

или, подставив величину  $\gamma$  из выражения (3.24):

$$\dot{\vec{H}} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \dot{E}_x e^{-\gamma z} \bar{i}_y. \quad (3.28)$$

Отсюда можно сделать ряд существенных выводов:

- если вектор  $\vec{E}$  ориентирован вдоль оси  $x$ , то вектор  $\vec{H}$  направлен вдоль оси  $y$ , т.е. в однородной плоской волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны;
- оба вектора,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , перпендикулярны оси распространения, поэтому однородная плоская электромагнитная волна является поперечной волной;
- значения комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в любой точке пространства связаны некоторым коэффициентом пропорциональности.

На основании последнего из перечисленных свойств в электродинамике вводят понятие *характеристического (волнового) сопротивления* той физической среды, в которой распространяются однородные плоские волны. По определению, характеристическое сопротивление  $Z_C$  равно отношению комплексных амплитуд соответствующих проекций векторов напряженности электрического и магнитного поля. В данном случае:

$$Z_C = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y}. \quad (3.29)$$

Так как вектор  $\vec{E}$  имеет размерность В/м, а вектор  $\vec{H}$  – размерность А/м, то характеристическое сопротивление выражается в Ом. На основании равенства (3.28) получаем формулу, выражающую характеристическое сопротивление через параметры среды:

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}}. \quad (3.30)$$

Пользуясь понятием характеристического сопротивления, можно существенно упростить практические расчеты. Например, с помощью формулы (3.29) по известным величинам  $\dot{E}_x$  и  $Z_C$  удастся сразу вычислить комплексную амплитуду  $\dot{H}_y$ , не решая заново уравнений Максвелла.

Подчеркнем, что сопротивление  $Z_C$  есть коэффициент пропорциональности, не связанный в общем случае с тепловыми потерями энергии в среде.

Плотность потока мощности плоской электромагнитной волны равна среднему за период значению вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_C = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \dot{\vec{E}} \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{E}_x H_y^* \right) [\bar{i}_x \bar{i}_z] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{E}_x H_y^* \right) \bar{i}_z. \quad (3.31)$$

Этот вектор, как видно из последней формулы, ориентирован вдоль оси распространения волны.

Плотность потока мощности в однородной плоской волне можно выразить не через обе полевые величины  $\dot{E}_y$  и  $\dot{H}_y$ , а только через одну из них. Для этого следует воспользоваться соотношением (3.29), что приводит к выражению:

$$P_{CP.Z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \dot{E}_x E_x^* \cdot \frac{1}{Z_C} \right) = \frac{E^{2,ym}}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z_C} \right) \quad (3.32)$$

или

$$P_{CP.Z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( Z_C \dot{H}_y H_y^* \right) = \frac{H^{2,ym}}{2} \operatorname{Re} Z_C. \quad (3.33)$$

В прикладных расчетах эти выражения часто оказываются более удобными, нежели общая формула (3.31).

Исследуемые нами электромагнитные процессы происходят в безграничном изотропном физическом пространстве, свойства которого одинаковы для волн, распространяющихся в любых направлениях. Введя в этом пространстве правовинтовую декартову систему координат (в этой системе кратчайшее вращение вектора  $\bar{i}_y$  до совпадения с вектором  $\bar{i}_z$  представляется в направлении против движения стрелки часов, если смотреть с конца вектора  $\bar{i}_x$ ), мы наделили пространство определенной геометрической структурой и можем различать волны, движущиеся в противоположных направлениях вдоль оси  $z$ . Так, повторяя приведенные ранее выкладки, убеждаемся, что для электромагнитной волны, распространяющейся в сторону  $z < 0$  и имеющей комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля  $\dot{\vec{E}} = \dot{E}_x \exp(\gamma z) \bar{i}_x$ , комплексная амплитуда  $y$ -й проекции вектора напряженности магнитного поля:

$$\dot{\vec{H}}_y = -\sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \dot{E}_x \exp(\gamma z), \quad (3.34)$$

откуда [ср. с формулой (3.29)]:

$$\frac{\dot{E}}{\dot{H}} = -Z_C. \quad (3.35)$$

Отрицательный знак в этом выражении связан с тем, что данная волна переносит энергию в сторону уменьшения координаты  $z$ . Соответственно отрицательными оказываются и правые части формул (3.32) и (3.33).

### 3.2.1 Плоские электромагнитные волны в физических средах

Далее в качестве примеров будут исследованы характеристики однородных плоских электромагнитных волн, распространяющихся в некоторых важных для практики физических средах.

Вакуум. Данная идеальная среда имеет параметры:  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ . Коэффициент распространения плоских волн в вакууме:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad (3.36)$$

оказывается мнимым, что свидетельствует об отсутствии затухания волн ( $\alpha = 0$ ).

Коэффициент фазы плоской волны в вакууме:

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad (3.37)$$

откуда на основании формулы (3.4) фазовая скорость:

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} = c. \quad (3.38)$$

Таким образом, подтвержден один из основных результатов теории Максвелла – фазовая скорость однородной плоской волны в вакууме равна скорости света *независимо от частоты*. В физике среды с такими свойствами называют *средами без частотной дисперсии фазовой скорости*.

Характеристическое сопротивление вакуума принято обозначать символом  $Z_0$ ; при этом:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}. \quad (3.39)$$

На основании выражения (3.32) среднее значение  $z$ -й проекции вектора Пойнтинга плоской волны в вакууме:

$$P_{CP.Z} = \frac{E_{xm}^2}{240\pi}. \quad (3.40)$$

Пример. Среднее значение плотности потока мощности плоской электромагнитной волны в вакууме составляет  $5 \text{ Вт/м}^2$ . Определить амплитудное значение  $x$ -й проекции вектора напряженности электрического поля и  $y$ -й проекции вектора напряженности магнитного поля.

По формуле (3.40):

$$E_{xm} = \sqrt{240\pi P_{CP.Z}} = 61.4 \frac{В}{м}.$$

Воспользовавшись понятием характеристического сопротивления вакуума, получаем:

$$H_{ym} = \frac{E_{xm}}{Z_0} = 0.16 \frac{А}{м}.$$

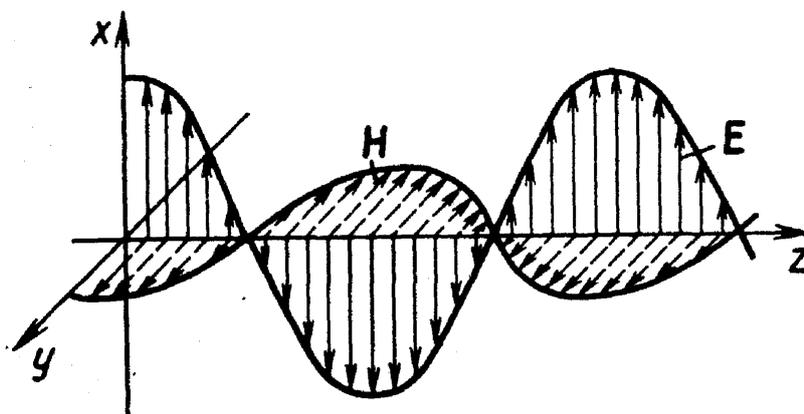
Величина  $Z_0$  действительная, а это означает, что гармонические поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  колеблются *в фазе*. Этот факт принято иллюстрировать, изображая пространственные распределения векторов электромагнитного поля в фиксированный момент времени (рисунок 3.6).

Отметим, что атмосферный воздух при нормальных условиях настолько схож по своим электродинамическим свойствам с вакуумом, что в подавляющем большинстве случаев для расчетов электромагнитных полей в воздухе можно использовать формулы (3.38) – (3.40).

Магнитоэлектрическая среда без потерь. В подобной среде относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , либо относительная магнитная проницаемость  $\mu$ , либо обе перечисленные величины удовлетворяют неравенствам  $\epsilon > 1$ ,  $\mu > 1$ . Удельная проводимость  $\sigma$ , обуславливающая тепловые потери, равна нулю. Фазовая скорость однородных плоских волн в такой среде:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (3.41)$$

в  $\sqrt{\epsilon\mu}$  раз меньше скорости распространения электромагнитных волн в вакууме.



**Рисунок 3.6 – Вектора плоской электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме**

Пример. Найти длину волны  $\lambda$  в среде без потерь, имеющей параметры  $\epsilon = 5$ ,  $\mu = 7$  на частоте  $f = 200$  МГц.

Фазовая скорость  $v_{\phi} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{5 \cdot 7}} = 5.07 \cdot 10^7 \frac{м}{с}$ . Отсюда длина волны

$$\lambda = \frac{v_{\phi}}{f} = 0.2535 м.$$

Характеристическое сопротивление магнитоэлектрической среды:

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (3.42)$$

увеличивается с ростом магнитной и уменьшается с ростом диэлектрической проницаемости.

Диэлектрик с малыми потерями. В радиотехнических устройствах часто используют немагнитные ( $\mu = 1$ ) диэлектрики, угол потерь у которых весьма мал ( $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$ ). Выведем приближенные формулы для расчета основных характеристик плоских электромагнитных волн в таких материалах, основываясь на том, что абсолютная комплексная диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a(1 - j\operatorname{tg}\delta)$ .

По общей формуле (3.24), коэффициент распространения:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a\mu_0} = j\omega\sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{1 - \operatorname{tg}\delta}. \quad (3.43)$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , радикал можно разложить в ряд Тейлора и с точностью до величин порядка  $(\operatorname{tg} \delta)^2$  получить:

$$\sqrt{1 - \operatorname{tg}\delta} \approx 1 - j\frac{\operatorname{tg}\delta}{2} \approx 1 - j\frac{\delta}{2}.$$

Подставив этот результат в формулу (3.43), приходим к следующим приближенным выражениям для коэффициента фазы и коэффициента затухания:

$$\begin{aligned} \beta &\approx \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{\epsilon} = \omega\frac{\sqrt{\epsilon}}{c}, \\ \alpha &\approx \omega\sqrt{\epsilon}\frac{\delta}{2c} = \frac{\beta\delta}{2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Пример. Найти коэффициент фазы  $\beta$ , длину волны  $\lambda$  и погонное затухание  $\Delta_{\text{ПОГ}}$  однородной плоской электромагнитной волны с частотой  $f = 40$  ГГц, которая распространяется в полистироле. Этот широко применяемый диэлектрик имеет следующие параметры:  $\epsilon = 2.56$ ,  $\operatorname{tg} \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ .

На основании формулы (3.44) коэффициент фазы:

$$\beta = \frac{6.28 \cdot 4 \cdot 10^{10} \sqrt{2.56}}{3 \cdot 10^8} = 1340 \text{ м}^{-1}.$$

Длина волны в полистироле:

$$\lambda = 2\pi \cdot \frac{1}{\beta} = 4.69 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4.69 \text{ мм}.$$

Коэффициент затухания:

$$\alpha = 1340 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} = 0.201 \text{ м}^{-1},$$

откуда погонное затухание:

$$\Delta_{\text{ПОГ}} = 8.68\alpha = 1.75 \text{ дБ/м}.$$

Итак, в диэлектрике с малыми потерями коэффициент фазы оказывается таким же, как и в диэлектрике без потерь. Согласно формулам (3.44), коэффициент затухания прямо пропорционален частоте волны, а также углу диэлектрических потерь.

Нетрудно получить формулу для расчета характеристического сопротивления немагнитного диэлектрика с малыми потерями:

$$Z_C = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0(1-jtg\delta)}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-jtg\delta}} \approx \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{\delta}{2}\right). \quad (3.45)$$

При выводе данного соотношения было использовано то, что при любых  $x$ , в общем случае комплексных, таких, что  $|x| \ll 1$ , справедливо приближенное равенство  $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ .

Комплексный характер сопротивления  $Z_C$  означает, что в среде с потерями поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются *не синфазно*. Однако, согласно формуле (3.45), угол сдвига фаз приблизительно равен  $\frac{\delta}{2}$  радиан, т.е. настолько мал, что им на практике обычно пренебрегают.

### 3.2.2 Плоские электромагнитные волны с эллиптической поляризацией

Все рассмотренные до сих пор электромагнитные волны обладали тем свойством, что в них вектор  $\vec{E}$  имел единственную проекцию, например  $E_x$  и совершал колебания в определенной плоскости, которая, как уже говорилось, называется *плоскостью поляризации* электромагнитной волны. Про однородную плоскую волну с фиксированной плоскостью поляризации говорят, что она имеет *линейную поляризацию*.

В общем случае плоскость поляризации может занимать произвольное положение. Чтобы убедиться в этом, допустим, что некоторый волновой процесс является суммой двух гармонических плоских волн одинаковой частоты, причем одна волна поляризована в плоскости  $XOZ$ , а другая – в плоскости  $YOZ$ . Пусть колебания обеих волн происходят синфазно. При этом результирующая волна в фиксированной точке пространства будет иметь следующие проекции вектора напряженности электрического поля:

$$E_x = E_{m1} \cos \omega t; \quad E_y = E_{m2} \cos \omega t. \quad (3.46)$$

Легко видеть, что суммарный вектор  $\vec{E}$  будет перемещаться вдоль диагонали прямоугольника со сторонами  $2E_{m1}$  и  $2E_{m2}$  (рисунок 3.7). Плоскость поляризации результирующей волны образует с осью  $x$  угол  $\varphi$ , такой, что:

$$tg\varphi = \frac{E_{m2}}{E_{m1}}.$$

Совсем иной характер волновой процесс приобретает в том случае, если две составляющие вектора  $\vec{E}$ , описываемые формулой вида (3.46), будут не только ортогональны в пространстве, но и сдвинуты по фазе во времени. Конкретно рассмотрим случай, когда:

$$E_x = E_{m1} \cos \omega t; \quad E_y = E_{m2} \sin \omega t. \quad (3.47)$$

Найдем уравнение кривой, которая служит геометрическим местом концов вектора  $\vec{E}$  суммарного процесса. Для этого перепишем формулу (3.47) в виде:

$$\frac{E_x}{E_{m1}} = \cos \omega t; \quad \frac{E_y}{E_{m2}} = \sin \omega t,$$

затем возведем оба равенства в квадрат и сложим:

$$\left(\frac{E_x}{E_{m1}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{m2}}\right)^2 = 1. \quad (3.48)$$

Получено уравнение эллипса, располагающегося в плоскости  $XOY$  и вписанного в прямоугольник со сторонами  $2E_{m1}$  и  $2E_{m2}$  (рисунок 3.8). Поэтому говорят, что рассмотренная нами электромагнитная волна имеет *эллиптическую поляризацию*. Результирующий вектор  $\vec{E}$  будет вращаться с частотой  $\omega$ , причем, как это легко заметить из формул (3.47), если смотреть с конца единичного вектора продольного направления  $\vec{i}_z$ , то вращение вектора  $\vec{E}$  будет представляться в направлении против стрелки часов. По установившейся в физике традиции такую волну называют *левополяризованной*.

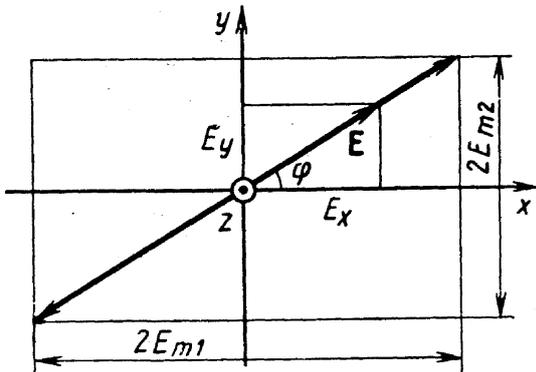


Рисунок 3.7 – Случай синфазного колебания двух волн

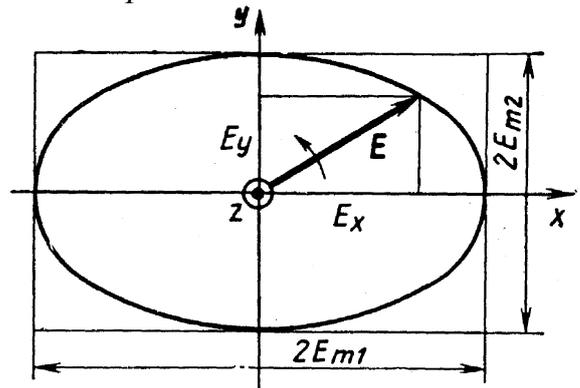


Рисунок 3.8 – Случай сдвига по фазе двух волн

Очевидно, что электромагнитный волновой процесс, для которого:

$$E_x = E_{m1} \cos \omega t; \quad E_y = -E_{m2} \sin \omega t \quad (3.49)$$

является *правополяризованной* волной.

На основании формул (3.47) можно записать выражение комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля эллиптически поляризованной волны с левым направлением вращения, распространяющейся в сторону увеличения координаты  $z$ :

$$\vec{E} = (E_{m1} \vec{i}_x - jE_{m2} \vec{i}_y) e^{-j\beta z}, \quad (3.50)$$

откуда, используя понятие характеристического сопротивления, получаем:

$$\vec{H} = \left( \frac{-jE_{m2}}{Z_C} \vec{i}_x + \frac{E_{m1}}{Z_C} \vec{i}_y \right) e^{-\beta z}. \quad (3.51)$$

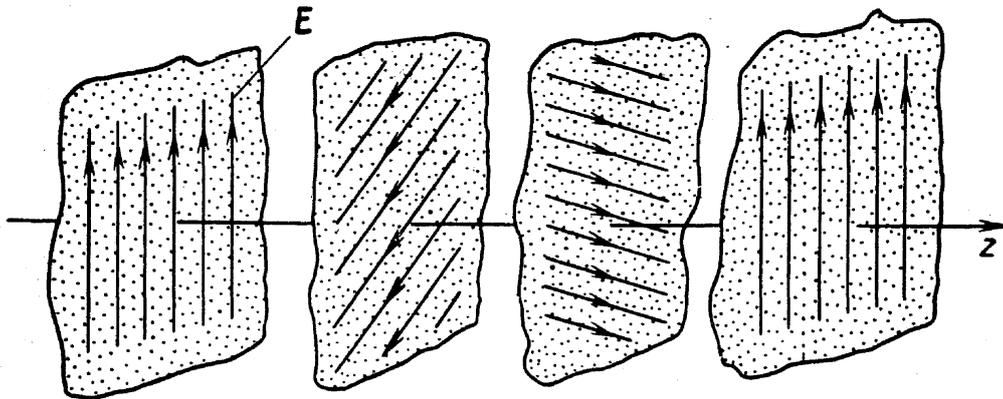
На основании двух последних выражений находим:

$$\bar{P}_{CP} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ E_{m1} & -jE_{m2} & 0 \\ \frac{-jE_{m2}}{Z_C} & \frac{E_{m1}}{Z_C} & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{E_{m1}^2}{2Z_C} + \frac{E_{m2}^2}{2Z_C} \right) \bar{i}_z, \quad (3.52)$$

т.е. среднее значение вектора Пойнтинга эллиптически поляризованной волны равно сумме средних плотностей мощности двух ортогональных компонентов с линейной поляризацией.

Важный частный случай – волна с *круговой поляризацией*, характерная тем, что в ней  $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ . При этом поляризационный эллипс, описываемый формулой (3.48), превращается в окружность радиусом  $E_m$ .

Наглядно представить волны с эллиптической поляризацией довольно трудно. Некоторую пользу здесь может принести чертеж, изображенный на рисунке 3.9, на котором волна с круговой поляризацией условно показана в виде последовательности волновых фронтов. По мере распространения волны направление векторов  $\bar{E}$ , одинаковое на каждом фронте, изменяется. Векторы совершают полный оборот на участке пути длиной  $\lambda$ .

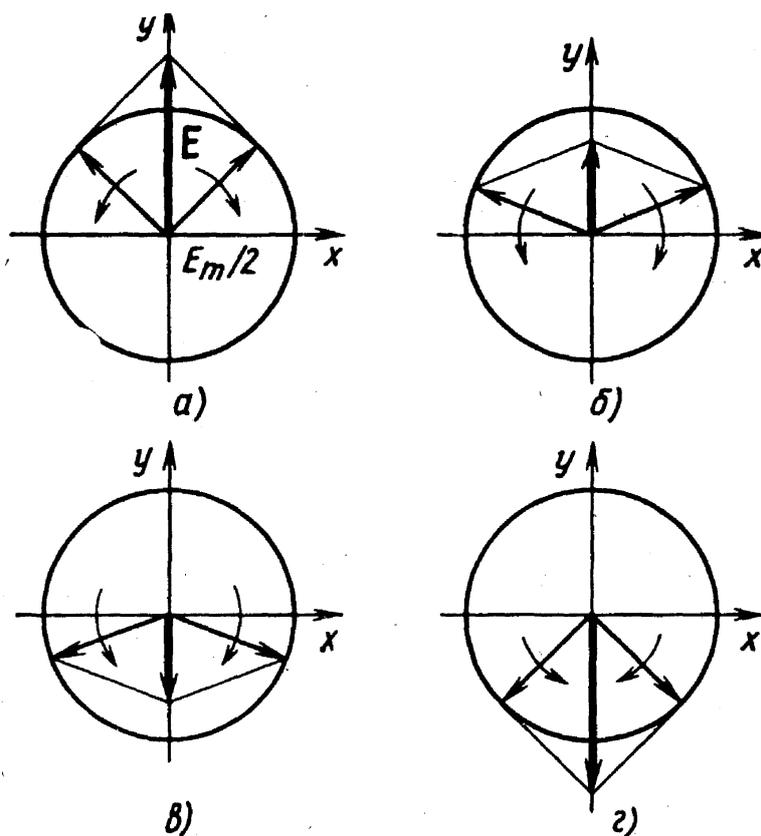


**Рисунок 3.9 – Ориентация электрического вектора в плоской волне с круговой поляризацией**

Волны с эллиптической или круговой поляризацией были получены путем сложения линейно поляризованных волн. В свою очередь, линейно поляризованную волну можно рассматривать как сумму волн с эллиптической поляризацией. В качестве примера на рисунке 3.10 изображено сложение двух волн с амплитудами  $E_m/2$  каждая, поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения. Из построения видно, что результирующая волна оказывается линейно поляризованной. Плоскость поляризации ориентирована вертикально; амплитуда, равная  $E_m$  в два раза превышает амплитуду слагаемых, поляризованных по кругу.

Поляризационные свойства плоских электромагнитных волн имеют большое значение для практической радиотехники. Так, если в поле волны с линейной поляризацией разместить штыревую антенну, ориентированную перпендикулярно плоскости поляризации, то на заряды в проводниках антенны не действуют никакие силы со стороны электромагнитного поля.

Как следствие, сигнал на выходе такой приемной антенны отсутствует. За счет этого появляется возможность создать два независимых радиоканала, совмещенных в пространстве, однако развязанных друг от друга благодаря поляризационным свойствам поля.



**Рисунок 3.10 – Сложение двух волн с круговой поляризацией**

С другой стороны, такая же штыревая антенна, размещенная в поле волны с круговой поляризацией перпендикулярно оси распространения, будет создавать выходной сигнал неизменной амплитуды независимо от ориентации в поперечной плоскости. Это обстоятельство делает волны с круговой поляризацией предпочтительными для организации радиосвязи с подвижными объектами, которые могут занимать в пространстве любые, заранее непредсказуемые положения.

### 3.2.3 Плоские волны, распространяющиеся в произвольном направлении

Рассмотрим случай, когда электромагнитная плоская волна распространяется вдоль некоторой произвольной оси  $z'$ , не совпадающей с осью  $z$  (рисунок 3.11). Относительно новой оси распространения можно написать следующее соотношение:

$$\vec{E} \sim \exp(-j\beta)z' . \quad (3.53)$$

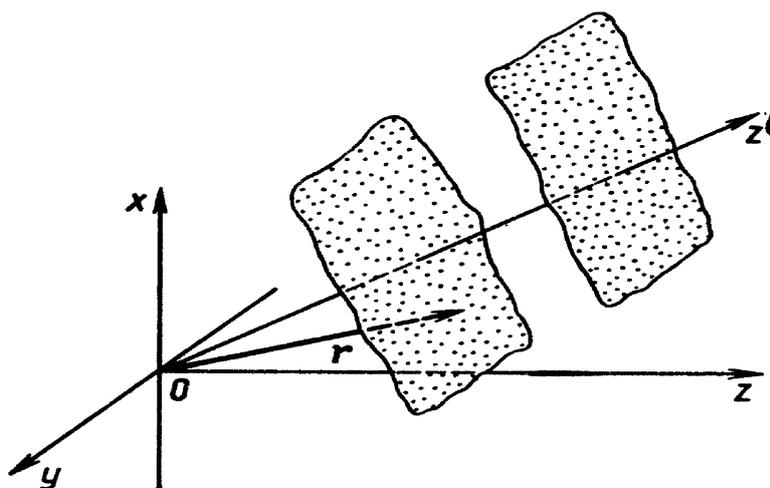


Рисунок 3.11 – Распространение плоской волны в произвольном направлении

Волновые фронты в данном случае имеют вид бесконечных плоскостей, удовлетворяющих уравнению вида  $z' = \text{const}$ . Требуется выразить величину  $z'$  через исходные координаты  $x, y, z$ . Для этого заметим, что  $z'$  является проекцией на ось распространения любого радиуса-вектора  $r'$ , который проведен из начала координат, а его конец расположен на волновом фронте. Математически это записывается так:

$$z' = \vec{r} \vec{i}'_z . \quad (3.54)$$

Используя координаты  $x, y, z$ , имеем:

$$\vec{r} = x\vec{i}_x + y\vec{i}_y + z\vec{i}_z ,$$

$$\vec{i}'_z = \xi\vec{i}_x + \eta\vec{i}_y + \zeta\vec{i}_z ,$$

где  $\xi = (z', x)$ ;  $\eta = (z', y)$ ;  $\zeta = (z', z)$  – направляющие косинусы единичного вектора  $\vec{i}'_z$ . Отсюда, используя формулу (3.54), представим зависимость (3.53) следующим образом:

$$\vec{E} \sim \exp[-j\beta(x\xi + y\eta + z\zeta)] .$$

Легко проверить, что все использованные ранее выражения комплексных амплитуд векторов поля, соответствующих однородным плоским волнам

в материальных средах без потерь, являются частными случаями последней формулы  $\bar{E}$ .

В теоретических исследованиях часто используют лаконичную векторную запись соотношения вида  $\bar{E}$ . Для этого вводят так называемый волновой вектор  $\bar{k}$ , определяя его следующим образом:

$$\bar{k} = \beta(\xi \bar{i}_x + \eta \bar{i}_y + \zeta \bar{i}_z).$$

Так как, по определению,  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ , то модуль волнового вектора равен коэффициенту фазы плоской волны:  $|\bar{k}| = \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Непосредственно видно,

что вектор  $\bar{k}$  ориентирован вдоль оси распространения  $z'$ . Формула для  $\bar{E}$  приобретает, таким образом, следующий вид:

$$\dot{\bar{E}} \sim \exp(-j\bar{k}\bar{r}).$$

В физике модуль волнового вектора однородной плоской волны называют также волновым числом.

### 3.3 Граничные условия для векторов электромагнитного поля

#### 3.3.1 Задача о граничных условиях

Задача о граничных условиях для векторов электромагнитного поля выглядит следующим образом. Пусть имеется некоторая граница раздела  $S$  (рисунок 3.12) между средой 1 с электродинамическими параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $\mu_{a1}$ ,  $\sigma_1$  и средой 2, у которой соответствующие параметры равны  $\epsilon_{a2}$ ,  $\mu_{a2}$ ,  $\sigma_2$ . Выделим на поверхности  $S$  произвольную точку  $P$ , предполагая, что в некоторой физически малой окрестности этой точки, относящейся к области 1, электромагнитное поле задано. Требуется отыскать поле в такой же окрестности выделенной точки, которая принадлежит области 2.

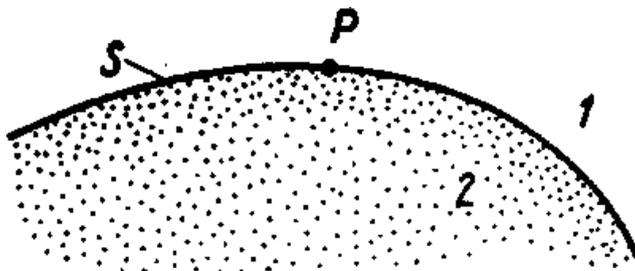
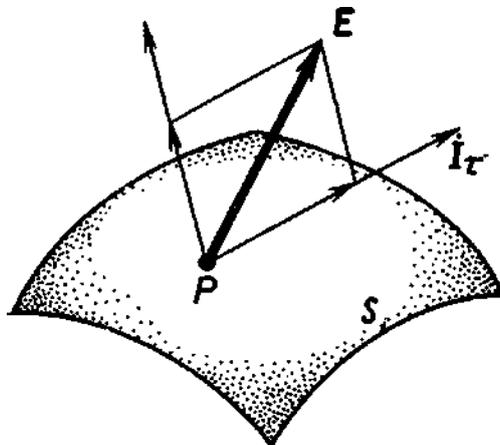


Рисунок 3.12 – Точка на границе раздела сред двух материальных сред

Для решения поставленной задачи векторы электромагнитного поля в окрестности точки  $P$  принято разлагать на касательные (тангенциальные) и нормальные составляющие. Например, вектор  $\bar{E}$  на границе раздела (рисунок 3.13) можно представить в виде:

$$\vec{E} = E_\tau \vec{i}_\tau + E_n \vec{i}_n. \quad (3.55)$$

Здесь  $\vec{i}_\tau$ ,  $\vec{i}_n$  – единичные векторы (орты) касательного и нормального направлений. Эти векторы лежат в плоскости, образованной вектором  $\vec{E}$  и нормалью к границе раздела, проведенной в точке  $P$ .

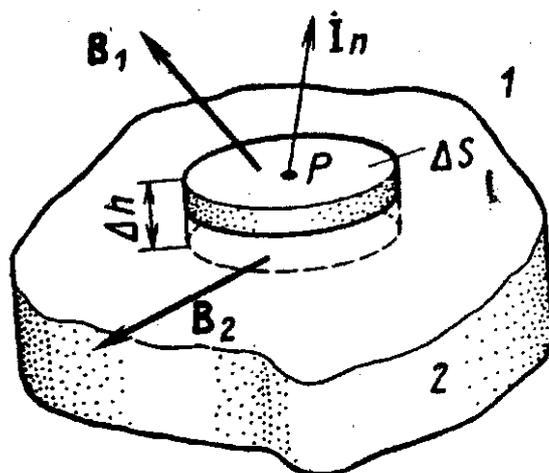


**Рисунок 3.13 – Разложение векторов поля на нормальную и касательную составляющие**

Далее свойства касательных и нормальных составляющих векторов поля на границе раздела будут рассмотрены по отдельности.

### 3.3.2 Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля

Обозначим через  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  векторные поля магнитной индукции в средах 1 и 2 соответственно. Выделим в окрестности точки  $P$  цилиндрический объем (рисунок 3.14) с основаниями площадью  $\Delta S$  и с высотой образующей  $\Delta h$ .



**Рисунок 3.14 – К выводу граничных условий для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля**

Пусть этот объем настолько мал, что поля  $\bar{B}_1$  и  $\bar{B}_2$  можно считать неизменными в пределах оснований цилиндра.

Обратим внимание на то, что единичный вектор нормали к границе раздела параллелен вектору элементарной площадки на верхнем основании цилиндра и антипараллелен такому же вектору на нижнем основании. Тогда поток вектора магнитной индукции через полную поверхность цилиндра запишется следующим образом:

$$\int_{S_{\Sigma}} \bar{B} d\bar{S} \approx \bar{B}_1 \bar{i}_n \Delta \bar{S} - \bar{B}_2 \bar{i}_n \Delta \bar{S} + \text{поток через боковую поверхность}. \quad (3.56)$$

Это приближенное равенство в пределе становится точным, если  $\Delta S$  стремится к нулю. Если же одновременно устремить к нулю высоту воображаемого цилиндра  $\Delta h$ , то поток вектора магнитной индукции через боковую поверхность окажется бесконечно малым. Следовательно:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_{\Sigma}} \bar{B} d\bar{S} = \bar{B}_1 \bar{i}_n \Delta \bar{S} - \bar{B}_2 \bar{i}_n \Delta \bar{S}. \quad (3.57)$$

Так как имеет место закон неразрывности магнитных силовых линий, то левая часть равенства (3.57) всегда обращается в нуль. Отсюда следует, что:

$$\bar{B}_1 \bar{i}_n \Delta \bar{S} - \bar{B}_2 \bar{i}_n \Delta \bar{S} = 0, \quad (3.58)$$

или, что то же самое:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.59)$$

Полученный результат формулируется следующим образом: нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред *непрерывны*. Используя материальное уравнение  $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ , соотношение (3.59) можно записать относительно нормальных составляющих векторов напряженности магнитного поля:

$$\mu_{a1} H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}. \quad (3.60)$$

Итак, если магнитные проницаемости граничащих сред не одинаковы, то нормальные составляющие векторов  $\bar{H}$  на границе раздела *претерпевают некоторый скачок*.

### 3.3.3 Граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля

Методика вывода данных граничных условий и соответствующий рисунок полностью аналогичны тем, которые использовались в пункте 3.3.2. Однако если для магнитного поля всегда выполнялось равенство  $\text{div} \bar{B} = 0$ , то в случае электрического поля справедливо уравнение  $\text{div} \bar{D} = \rho$ . Поэтому возможны два случая.

1) Поверхностный электрический заряд на границе раздела отсутствует.

Суммарный заряд внутри малой цилиндрической области (рисунок 3.14) при этом равен нулю. В соответствии с теоремой Гаусса:

$$\int_{S_{\Sigma}} \bar{D} d\bar{S} = 0, \quad (3.61)$$

откуда следует, что:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (3.62)$$

и соответственно:

$$\varepsilon_{a1} E_{1n} = \varepsilon_{a2} E_{2n}. \quad (3.63)$$

Таким образом, при отсутствии поверхностных электрических зарядов нормальные составляющие векторов электрического смещения на границе раздела двух сред *непрерывны* вне зависимости от параметров этих сред. В то же время нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела *претерпевают скачок*, величина которого зависит от отношения диэлектрических проницаемостей.

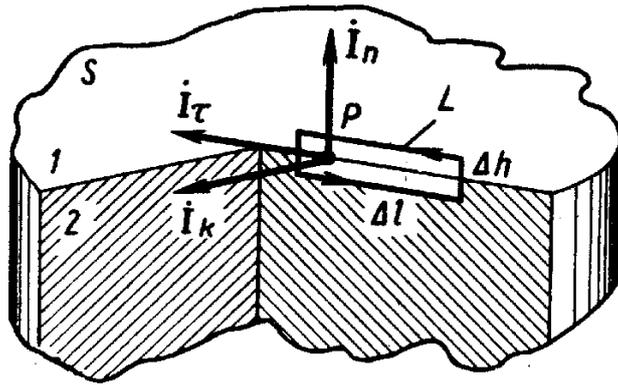
2) На границе раздела сред равномерно распределен электрический поверхностный заряд с удельной плотностью  $\sigma_{\text{ПОВ}}$ .

Несомненно, что в этом случае уменьшение высоты воображаемого цилиндра  $\Delta h$  (рисунок 3.15) никак не влияет на величину заряда, заключенного внутри этой области. Применяв интегральную формулировку закона Гаусса, можно записать формулу, аналогичную соотношению (3.57):

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_{\Sigma}} \bar{D} d\bar{S} = \bar{D}_1 \bar{i}_n \Delta S - \bar{D}_2 \bar{i}_n \Delta S = \sigma_{\text{ПОВ}} \Delta S, \quad (3.64)$$

откуда:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{ПОВ}}. \quad (3.65)$$



**Рисунок 3.15 – К выводу граничных условий для касательных составляющих векторов электромагнитного поля**

Из выражения (3.65) следует, что при наличии на границе электрических зарядов нормальная составляющая вектора электрического смещения испытывает скачок на величину плотности поверхностного электрического заряда. Физически это обусловлено тем, что заряд, располагающийся на поверхности, создает собственное электрическое поле, ориентированное в про-

странстве таким образом, что по одну сторону границы это поле складывается внешним полем, а по другую – вычитается.

### 3.3.4 Граничные условия для касательных составляющих векторов магнитного поля

Задача о взаимосвязи касательных составляющих вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред решается на основе интегральной формулировки закона полного тока для некоторого малого контура  $L$  (рисунок 3.15), проведенного в окрестности точки  $P$  таким образом, что одна его половина проходит в среде 1, а другая – в среде 2.

Введем в точке  $P$  три взаимно ортогональных единичных вектора:  $\bar{i}_\tau$ ,  $\bar{i}_n$ ,  $\bar{i}_k$ . Два первых, по-прежнему, являются ортами касательного и нормального направлений. Вектор  $\bar{i}_k$  направлен по нормали к плоскости, образованной векторами  $\bar{i}_\tau$  и  $\bar{i}_n$ , будучи параллелен границе раздела.

Выделим в окрестности точки  $P$  малый прямоугольный контур  $L$  со сторонами  $\Delta l$  и  $\Delta h$ . Будем считать, что на контуре задано такое направление обхода, что с конца единичного вектора  $\bar{i}_k$  движение наблюдается против хода стрелки часов.

Вообще говоря, в обеих областях пространства, разделяемых границей  $S$ , протекают некоторые токи, в частности токи проводимости и токи смещения с объемными плотностями  $\bar{j}_{PP}$  и  $\bar{j}_{CM}$ , соответственно. Применим к рассматриваемому контуру закон полного тока, причем, как и в пункте 3.3.2, будем считать, что длины сторон контура столь малы, что в его пределах векторы поля  $\bar{H}$  неизменны. В результате получим:

$$\begin{aligned} \int_L \bar{H} d\bar{l} &= \bar{H}_{1\tau} \Delta l - \bar{H}_{2\tau} \Delta l + \text{интегралы по боковым сторонам} = \\ &= (\bar{j}_{PP} \bar{i}_k + \bar{j}_{CM} \bar{i}_k) \Delta l \Delta h. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Здесь следует по отдельности рассмотреть два случая.

1) Числовые значения электродинамических параметров обеих граничащих сред конечны. Из данного условия непосредственно следует вывод о конечности значений векторов плотности токов проводимости и смещения. Выполним предельный переход, устремляя высоту контура  $\Delta h$  к нулю. Очевидно, что при этом линейный интеграл от поля  $\bar{H}$  по боковым сторонам контура будет стремиться к нулю. Из-за конечности векторов плотности токов проводимости и смещения будем иметь:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\bar{j}_{PP} \bar{i}_k + \bar{j}_{CM} \bar{i}_k) \Delta l \Delta h = 0. \quad (3.67)$$

Обращение в нуль правой части равенства (3.66) означает, что:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \bar{H}_{1\tau} \bar{i}_\tau \Delta l + \bar{H}_{2\tau} \bar{i}_\tau \Delta l, \quad (3.68)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (3.69)$$

Таким образом, на границе раздела двух сред с конечными значениями электродинамических параметров касательные составляющие векторов напряженности магнитного поля непрерывны. Однако касательные составляющие векторов магнитной индукции на границе раздела в общем случае претерпевают разрыв:

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}}. \quad (3.70)$$

2) Проводимость одной из граничащих сред неограниченно велика. Положим для определенности, что  $\sigma_2 = \infty$ . Это предположение делает формулу (3.66) неприменимой. Дело в том, что при бесконечно большой проводимости среды электромагнитное поле в ней должно отсутствовать; наличие сколь угодно малого поля  $\bar{E}$  приводило бы к протеканию тока проводимости с бесконечно большой плотностью, а это физически невозможно. В данном случае токи проводимости могут протекать лишь по поверхностной «пленке» исчезающе малой толщины, так что предельный переход вида (3.67) все же дает отличный от нуля результат.

Для математического описания явлений на поверхности идеального проводника вводят понятие вектора плотности поверхностного электрического тока. Принцип введения этого векторного поля показан на рисунке 3.16. Прежде всего, проводят единичный вектор  $\bar{i}_\eta$ , касательный к линиям тока в выбранной точке поверхности. Затем находят ток  $\Delta i$ , протекающий поперек отрезка  $\Delta l$ , перпендикулярного вектору  $\bar{i}_\eta$ . Тогда вектор плотности поверхностного электрического тока можно определить посредством равенства:

$$\bar{j}_{\text{пов.э}} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} \bar{i}_\eta. \quad (3.71)$$

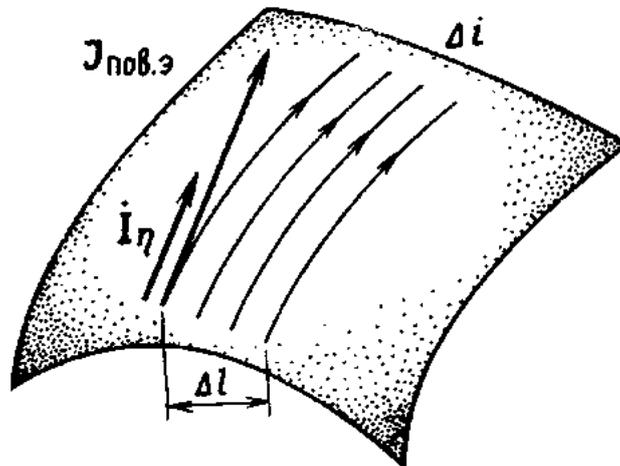


Рисунок 3.16 – К введению понятия плотности поверхностного электрического тока

Теперь формулу (3.66) можно записать в виде:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_L \bar{H} d\bar{l} = \bar{j}_{\text{ПОВ.Э}} \bar{i}_k \Delta l. \quad (3.72)$$

Далее следует учесть, что в силу уравнений Максвелла внутри идеального проводника обращается в нуль не только электрическое, но и магнитное поле. Иными словами,  $\bar{H}_2 = 0$  и из формулы (3.72) следует, что:

$$\bar{H}_1 \bar{i}_k = \bar{j}_{\text{ПОВ.Э}} \bar{i}_k. \quad (3.73)$$

Равенство (3.73) позволяет решить важную для практики задачу – определить плотность поверхностного тока  $\bar{j}_{\text{ПОВ.Э}}$  по заданной напряженности магнитного поля  $\bar{H}_1$  на границе раздела между обычной средой, например воздухом, и идеальным проводником. Для удобства несколько преобразуем формулу (3.73), учтя, что тройка единичных векторов  $\bar{i}_\tau$ ,  $\bar{i}_n$ ,  $\bar{i}_k$  связана очевидным соотношением:

$$\bar{i}_\tau = -[\bar{i}_n \bar{i}_k]. \quad (3.74)$$

Подставив это равенство в (3.73), получим:

$$\bar{j}_{\text{ПОВ.Э}} = [\bar{i}_n \bar{H}_1]. \quad (3.75)$$

Таким образом, поверхностный электрический ток на границе идеального проводника протекает в направлении, перпендикулярном вектору  $\bar{H}_1$ , который существует в обычной среде. Плотность поверхностного электрического тока численно равна касательной проекции вектора напряженности магнитного поля.

### 3.3.5 Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля

Методика решения данной задачи полностью совпадает с той, которая применялась в пункте 3.3.4. Отличие состоит лишь в том, что здесь вместо закона полного тока следует воспользоваться законом электромагнитной индукции. Соответственно для контура  $L$ , изображенного на рисунке 3.15, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_L \bar{E} d\bar{l} &= \bar{E}_{1\tau} \Delta l - \bar{E}_{2\tau} \Delta l + \text{интегралы по боковым сторонам} = \\ &= - \left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) \bar{i}_k \Delta l \Delta h. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Функция  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  в правой части последней формулы при любых электродинамических параметрах граничащих сред принимает конечные значения. Поэтому предельный переход при  $\Delta h \rightarrow 0$  дает:

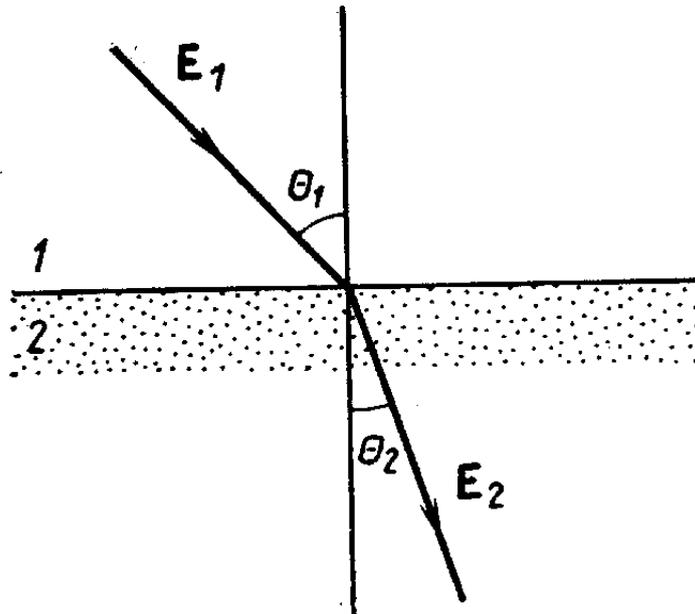
$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_L \bar{E} d\bar{l} = \bar{E}_1 \bar{i}_\tau \Delta l - \bar{E}_2 \bar{i}_\tau \Delta l = 0, \quad (3.77)$$

откуда:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_{a1}} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_{a2}}. \quad (3.78)$$

Таким образом, касательные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела двух сред непрерывны. В то же самое время касательные составляющие векторов электрического смещения в общем случае претерпевают скачок.

Пример. Имеется плоская граница раздела двух сред с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рисунок 3.17). В первой среде силовые линии вектора  $\bar{E}$  образуют угол  $\theta_1$  с направлением нормали. Найти ориентацию силовых линий поля  $\bar{E}$  во второй среде.



**Рисунок 3.17 – Явление «преломления» силовых линий электрического вектора на границе раздела двух сред**

Вспользуемся граничными условиями:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n},$$

или:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2, \\ \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \theta_2,$$

откуда:

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{tg} \theta_1 \right].$$

Отметим, что если  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ , то  $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  независимо от ориентации электрического поля в первой среде.

Рассмотрим отдельно частный случай, когда средой 2 (см. рисунок 3.14) является идеальный проводник. Здесь, как уже указывалось, всегда  $\bar{E}_2 = 0$ . Поэтому на основании равенства (3.78) граничное условие для касательной составляющей вектора напряженности электрического поля на поверхности идеального проводника принимает вид:

$$E_\tau = 0. \quad (3.79)$$

В соответствии с этим условием силовые линии электрического вектора должны подходить к поверхности идеального проводника *по направлению нормали*.

Понятие «идеальный проводник» есть результат абстракции. На поверхности реального проводника (например, металла) некоторая касательная составляющая электрического вектора, безусловно, имеется. Однако она весьма мала по сравнению с нормальной составляющей и, как будет показано в дальнейшем, в ряде практически значимых случаев эту составляющую можно с полным основанием не учитывать.

В заключение отметим, что принцип перестановочной двойственности электромагнитных полей, позволяет обобщить формулу (3.75) на тот случай, когда вдоль границ раздела протекает воображаемый поверхностный магнитный ток с плотностью  $\bar{j}_{\text{ПОВ.М}}$  (В/м). Легко видеть, что при этом:

$$\bar{j}_{\text{ПОВ.М}} = -[\bar{i}_n \bar{E}_1] = [\bar{E}_1 \bar{i}_n]. \quad (3.80)$$

Данным соотношением часто пользуются в теории антенн, мысленно заменяя распределение напряженности поля  $\bar{E}$  вдоль излучающей поверхности эквивалентным распределением поверхностного магнитного тока.

## 4 НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД [1-4]

### 4.1 Нормальное падение электромагнитной волны на идеально проводящую поверхность

Рассмотрим следующую простейшую ситуацию. Пусть на бесконечную идеально проводящую плоскость по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль оси  $z$  декартовой системы координат (рисунок 4.1). Из рисунка видно, что присутствие на поверхности идеального проводника лишь поля падающей волны с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}_{\text{пад}}$  не может обеспечить выполнения граничного условия  $E_{\tau} = 0$ . Для выполнения этого условия необходимо, чтобы в полупространстве  $z < 0$  существовала отраженная волна с амплитудой, в точности равной амплитуде падающей волны. При  $z = 0$  должно иметь место равенство:

$$\vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{отр}} = 0. \quad (4.1)$$

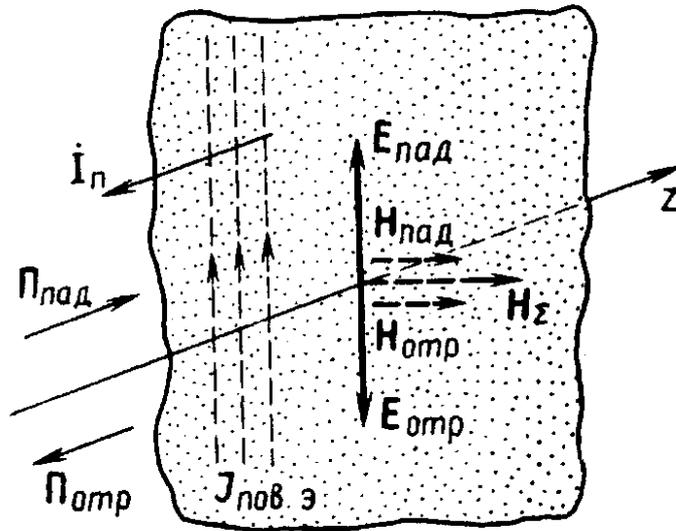


Рисунок 4.1 – Векторы поля при нормальном падении плоской волны на идеально проводящую поверхность

Чтобы определить суммарное магнитное поле на поверхности идеального проводника, следует учесть, что вектор Пойнтинга отраженной волны  $\vec{P}_{\text{отр}}$  ориентирован вдоль отрицательного направления оси  $z$ . Поскольку модули векторов  $\vec{H}_{\text{пад}}$  и  $\vec{H}_{\text{отр}}$  равны, в плоскости  $z = 0$  модуль суммарного вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}_{\Sigma} = \vec{H}_{\text{пад}} + \vec{H}_{\text{отр}}$  в два раза больше модуля каждого слагаемого. Таким образом, получен существенный резуль-

тат – на поверхности идеального проводника напряженность суммарного магнитного поля в два раза превышает напряженность магнитного поля падающей электромагнитной волны:

$$\bar{H}_{\Sigma} = 2\bar{H}_{\text{пад}}. \quad (4.2)$$

Зная модуль и ориентацию вектора суммарной напряженности магнитного поля, можно определить вектор плотности поверхностного электрического тока по формуле:

$$\vec{j}_{\text{ПОВ.Э}} = [\vec{i}_n \bar{H}_{\Sigma}]. \quad (4.3)$$

Из рисунка 4.1 видно, что поверхностный электрический ток протекает в направлении вектора  $\bar{E}$  падающей волны, а его амплитуда равна удвоенной амплитуде вектора напряженности магнитного поля этой волны.

Понятно, что идеально проводящая плоскость полностью экранирует одно полупространство от другого. Поэтому при  $z > 0$  все составляющие векторов электромагнитного поля обращаются в нуль.

#### 4.2 Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство

Предположим, что полупространство  $z < 0$  прямоугольной декартовой системы координат (область 1) представляет собой вакуум ( $\epsilon_a = \epsilon_0$ ;  $\mu_a = \mu_0$ ;  $\sigma = 0$ ), в то время как полупространство  $z > 0$  – произвольный магнитодиэлектрик с параметрами  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\sigma_a$  (область 2 на рисунке 4.2).

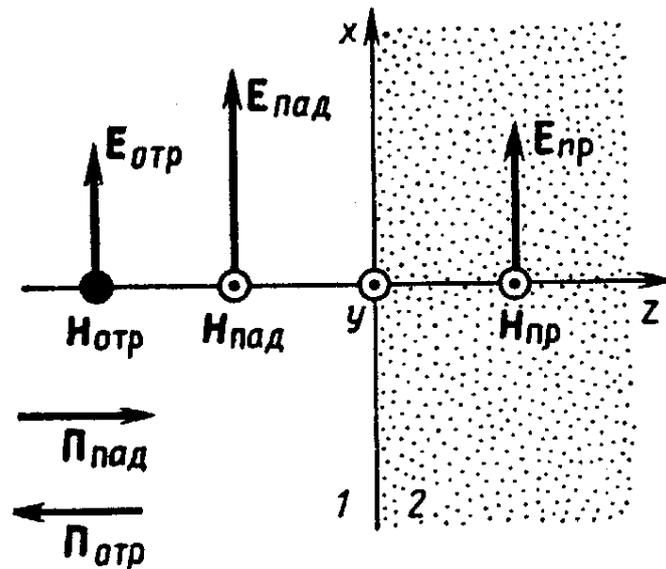


Рисунок 4.2 – Векторы поля при нормальном падении плоской волны на диэлектрическое полупространство

Пусть в области 1 вдоль положительного направления оси  $z$  распространяется плоская гармоническая волна, которая называется *падающей*. Для

этой волны известны комплексные амплитуды векторов  $\dot{\vec{E}}_{ПАД}$  и  $\dot{\vec{H}}_{ПАД}$ , ориентированные в пространстве так, как показано на рисунке 4.2:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_{ПАД} &= \dot{E}_{x.ПАД} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_x, \\ \dot{\vec{H}}_{ПАД} &= \frac{1}{Z_0} \dot{E}_{x.ПАД} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Здесь  $\beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  – коэффициент фазы плоской волны с заданной частотой в вакууме,  $Z_0 = 377$  Ом – характеристическое сопротивление вакуума.

Естественно предположить, что в рассматриваемой электродинамической системе помимо падающей существуют еще две волны:

- отраженная волна, комплексные амплитуды векторов поля которой имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_{ОТР} &= \dot{E}_{x.ОТР} e^{j\beta_1 z} \vec{i}_x, \\ \dot{\vec{H}}_{ОТР} &= -\frac{1}{Z_0} \dot{E}_{x.ОТР} e^{j\beta_1 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Знак «минус» вектора  $\dot{\vec{H}}_{ОТР}$  обусловлен тем, что вектор Пойнтинга отраженной волны  $\vec{P}_{ОТР}$  направлен в сторону уменьшения координаты  $z$ ;

- прошедшая (преломленная) волна, характеризуемая комплексными амплитудами векторов:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_{ПР} &= \dot{E}_{x.ПР} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_x, \\ \dot{\vec{H}}_{ПР} &= \frac{1}{Z_{C2}} \dot{E}_{x.ПР} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Здесь  $\beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$  и  $Z_{C2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$  – соответственно коэффициент фазы и характеристическое сопротивление плоской электромагнитной волны в среде 2.

При записи формулы (4.6) предполагается, что область 2 простирается неограниченно вдоль полуоси  $z > 0$ . Кроме того, считается, что электромагнитные волны, распространяясь в области 2, испытывают некоторое затухание. В соответствии с этими предположениями в области 2 отсутствует отраженная волна, распространяющаяся в отрицательном направлении оси  $z$ .

Поставим задачу найти соотношения между комплексными амплитудами векторов электромагнитного поля падающей, отраженной и прошедшей волн. Для этого воспользуемся тем, что на границе раздела, т.е. в плоскости  $z = 0$ , обязаны выполняться граничные условия: касательные составляющие суммарных векторов напряженности электрического и магнитного полей должны быть непрерывны:

$$\dot{\vec{E}}_{1\tau} = \dot{\vec{E}}_{2\tau}; \quad \dot{\vec{H}}_{1\tau} = \dot{\vec{H}}_{2\tau}.\quad (4.7)$$

На основании формул (4.4) - (4.6) последние соотношения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{x.ПАД} + \dot{E}_{x.ОТР} &= \dot{E}_{x.ПР}, \\ \frac{\dot{E}_{x.ПАД}}{Z_0} - \frac{\dot{E}_{x.ОТР}}{Z_0} &= \frac{\dot{E}_{x.ПР}}{Z_{C2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Введем коэффициент отражения по электрическому полю  $R$  и коэффициент прохождения по электрическому полю  $T$ , определив данные величины как отношения комплексных амплитуд соответствующих электрических полей к комплексной амплитуде вектора напряженности электрического поля падающей волны на границе раздела:

$$R = \frac{\dot{E}_{x.ОТР}}{\dot{E}_{x.ПАД}}; \quad T = \frac{\dot{E}_{x.ПР}}{\dot{E}_{x.ПАД}}. \quad (4.9)$$

Разделив левые и правые части равенств (4.8) на величину  $\dot{E}_{x.ПАД}$ , приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $R$  и  $T$ :

$$\begin{aligned} 1 + R &= T, \\ 1/Z_0 - R/Z_0 &= T/Z_{C2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

откуда:

$$\begin{aligned} R &= \frac{Z_{C2} - Z_0}{Z_{C2} + Z_0}, \\ T &= \frac{2Z_{C2}}{Z_{C2} + Z_0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, коэффициенты отражения и прохождения электромагнитной волны при нормальном падении на диэлектрическое полупространство полностью определяются характеристическими сопротивлениями граничащих сред.

Важный частный случай – нормальное падение плоской волны на немагнитный диэлектрик без потерь ( $\mu = 1, \sigma = 0$ ). Из формулы (4.11) следует, что в этом случае коэффициенты  $R$  и  $T$  действительны:

$$\begin{aligned} R &= (1 - \sqrt{\epsilon}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\epsilon}}, \\ T &= \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Следует обратить внимание на то, что если  $\epsilon > 1$ , то  $R < 1$ . Это означает, что на границе раздела комплексная амплитуда электрического вектора отраженной волны сдвинута по фазе на  $180^\circ$  относительно комплексной амплитуды электрического вектора падающей волны.

Пример. Амплитудное значение напряженности электрического поля падающей волны  $\dot{E}_{x.ПД} = 250 \frac{В}{м}$ . Относительная диэлектрическая проницаемость материала  $\varepsilon = 3.2$ . Найти модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн.

Применив формулу (4.12), имеем  $R = -0.283$ ,  $T = 0.717$ . Характеристическое сопротивление диэлектрика  $Z_{C2} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = 211 \text{ Ом}$ . Модули усредненных векторов Пойнтинга ( $\text{Вт/м}^2$ ):

$$P_{ПД} = \frac{E_{x.ПД}^2}{2Z_0} = 82.9; \quad P_{ОТР} = \frac{(RE_{x.ПД})^2}{2Z_0} = 6.6;$$

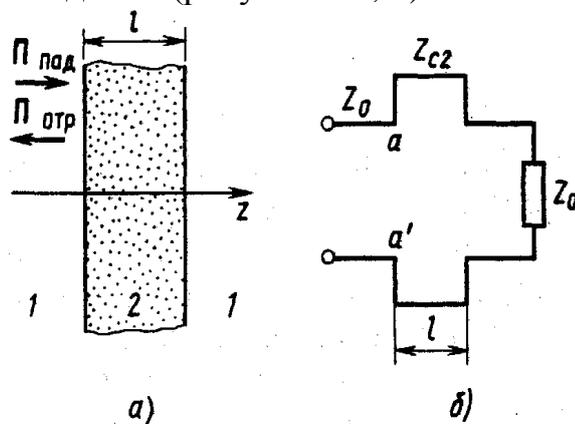
$$P_{ПР} = \frac{(TE_{x.ПД})^2}{2Z_{C2}} = 76.2.$$

Легко заметить, что в рассматриваемом случае почти вся мощность электромагнитной волны поступает из вакуума в диэлектрик.

### 4.3 Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины.

Следует отметить, что формулы вида (4.12) встречаются в теории распределенных радиотехнических цепей при решении задачи об отражении волн от стыка двух линий передачи с волновыми сопротивлениями  $Z_0$  и  $Z_{C2}$  в условиях, когда вторая линия нагружена на свое волновое сопротивление и поэтому находится в согласованном режиме.

Отсюда, как следствие, вытекает возможность рассчитать коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от диэлектрического слоя толщиной  $l$  при нормальном падении (рисунок 4.3, а).



**Рисунок 4.3 – Нормальное падение плоской волны на диэлектрический слой**

Моделью такой электродинамической системы служит сочленение полубесконечной линии передачи, имеющей волновое сопротивление  $Z_0$ , с отрезком линии длиной  $l$ , имеющим волновое сопротивление  $Z_{C2}$  (рисунок 4.3, б). Справа данный отрезок нагружен на сопротивление  $Z_0$ , которое учитывает влияние полубесконечного пространства правее диэлектрического слоя.

Будем полагать, что слой выполнен из диэлектрика без потерь с заданным параметром  $\varepsilon$ . Воспользуемся тем, что входное сопротивление в сечении  $a - a'$  для волны, распространяющейся слева направо:

$$Z_{BX} = \frac{Z_0 + jZ_{C2}tg\vartheta}{1 + j\frac{Z_0}{Z_{C2}}tg\vartheta} = Z_0 \frac{1 + j\frac{tg\vartheta}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 + j\sqrt{\varepsilon}tg\vartheta}, \quad (4.13)$$

где  $\vartheta = \beta_2 l = 2\pi/\lambda_2$  – электрическая толщина слоя на рабочей частоте, измеряемая в радианах. Тогда, используя формулу:

$$R = \frac{Z_{BX} - Z_0}{Z_{BX} + Z_0},$$

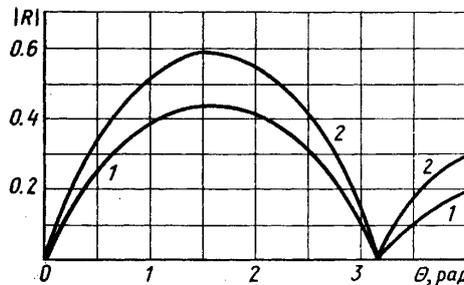
после несложных преобразований находим выражение для коэффициента отражения от пластины:

$$R = \frac{j(1-\varepsilon)tg\vartheta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1+\varepsilon)tg\vartheta}. \quad (4.14)$$

На рисунке 4.4 изображены графики зависимости модуля коэффициента отражения:

$$|R| = \frac{(\varepsilon - 1)tg\vartheta}{\sqrt{4\varepsilon + (1 + \varepsilon)^2 tg^2 \vartheta}} \quad (4.15)$$

от параметра  $\vartheta$  при двух различных значениях диэлектрической проницаемости слоя. Следует обратить внимание на то, что коэффициент отражения плоских волн от диэлектрического слоя является частотно зависимым. С этим обстоятельством приходится считаться, например, при создании радиопрозрачных диэлектрических покрытий для антенных систем.



$$1 - \varepsilon = 2.56; 2 - \varepsilon = 3.8$$

**Рисунок 4.4. Зависимость модуля коэффициента отражения от электрической толщины слоя**

#### 4.4 К вопросу о создании неотражающих сред

Практическая радиотехника настойчиво выдвигает проблему разработки таких искусственных материальных сред, которые не отражали бы электромагнитных волн. Такими материалами, например, покрывают стены безэховых камер – замкнутых помещений, в которых испытывают антенны СВЧ диапазона.

Формула (4.11) устанавливает, что коэффициент отражения от границы раздела равен нулю только в том случае, когда  $Z_{C2} = Z_0$ . Данное равенство эквивалентно условию:

$$\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}. \quad (4.16)$$

До сих пор нет эффективного метода синтеза таких сред, для которых соотношение (4.11) выполнялось бы в достаточно широком диапазоне частот.

Говоря о создании неотражающих покрытий, следует иметь в виду, что увеличение меры затухания волн в среде, т.е. рост угла потерь  $\delta$ , ведет не к уменьшению, а к возрастанию модуля коэффициента отражения. Действи-

тельно, чем больше значение угла  $\delta = \arctg \left[ \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \right]$ , тем значительнее модуль

комплексной диэлектрической проницаемости среды. Поэтому при  $\delta \rightarrow 90^\circ$  имеем  $\lim Z_{C2} = 0$ . Следовательно,  $\lim R = -1$ , т.е. среда с бесконечно высоким затуханием ведет себя как идеальный отражатель.

Практический способ создания неотражающих покрытий заключается в использовании эффекта многократных отражений. Рассмотрим, например, среду со значительными потерями, поверхность которой выполнена ребристой (рисунок 4.5). При наклонном падении плоской электромагнитной волны внутри пазов структуры происходят многократные отражения, каждое из которых сопровождается рассеянием части энергии волны. В результате амплитуда отраженной волны оказывается значительно меньше амплитуды падающего поля.

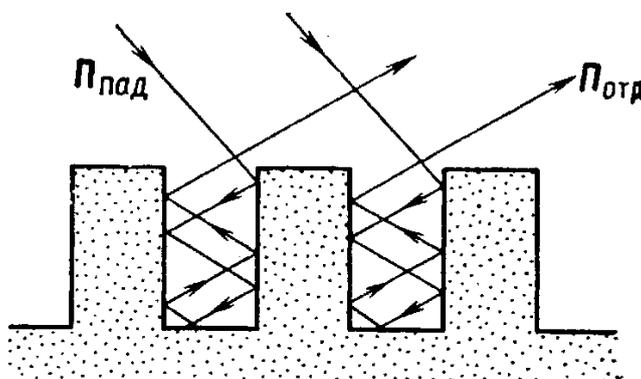


Рисунок 4.5 – Неотражающее покрытие с ребристой поверхностью

## 5 ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ [1-4]

### 5.1 Общий случай падения электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство

Рассмотрим общий случай, когда плоская электромагнитная волна, распространяясь в среде 1, падает на границу раздела со средой 2 под некоторым углом падения  $\varphi$ , который лежит в пределах  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ . Геометрия данной задачи и ориентация координатных осей показаны на рисунке 5.1.

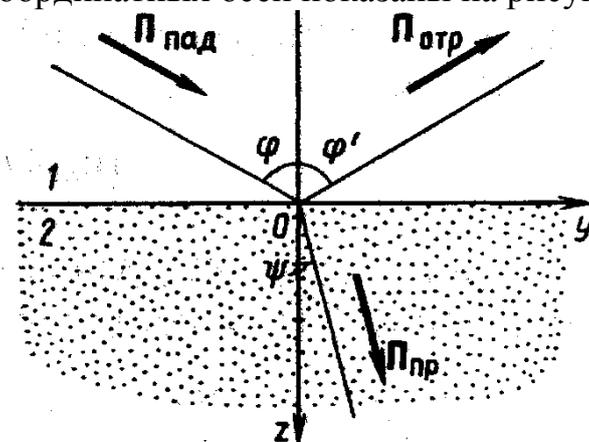


Рисунок 5.1 – Падение плоской волны под произвольным углом

Анализируя электромагнитные поля в данной системе, естественно ввести три волны – падающую, отраженную и преломленную. Векторы Пойнтинга всех перечисленных волн лежат в одной плоскости, называемой *плоскостью падения*.

Чтобы записать выражения комплексных амплитуд векторов соответствующих электромагнитных полей, следует вспомнить, что вектор  $\vec{P}_{\text{ПАД}}$  образует с положительными направлениями осей  $y$  и  $z$  углы  $90^\circ - \varphi$  и  $\varphi$ , соответственно (рисунок 5.1). Поскольку  $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ , комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны может быть представлена следующим образом:

$$\vec{E}_{\text{ПАД}}(y, z) = \dot{E}_{m, \text{ПАД}} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \quad (5.1)$$

где  $\dot{E}_{m, \text{ПАД}}$  – произвольный амплитудный множитель.

Если через  $\varphi'$  и  $\psi$  обозначить углы, показанные на рисунке 5.1 и называемые соответственно *углами отражения* и *преломления*, то комплексные амплитуды любых составляющих векторов  $\vec{E}$  отраженной и преломленной волн можно записать так:

$$\vec{E}_{\text{ОТР}}(y, z) = \dot{E}_{m, \text{ОТР}} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')}, \quad (5.2)$$

$$\dot{E}_{ПП}(y, z) = \dot{E}_{m.ПП} e^{-j\beta_2(y \sin \psi + z \cos \psi)}. \quad (5.3)$$

На границе раздела, т.е. в плоскости  $z$  должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}; \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}; \quad . \quad (5.4)$$

Из формул (5.2) - (5.4) получаем, например:

$$\dot{E}_{\tau.ПАД} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi} + \dot{E}_{\tau.ОТР} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi'} = \dot{E}_{\tau.ПП} e^{-j\beta_2 y \sin \psi}. \quad (5.5)$$

Поскольку все точки на границе раздела равноправны, соотношение (5.5) должно выполняться тождественно относительно переменной  $y$ . Для этого необходимо, чтобы показатели всех экспоненциальных функций, входящих в формулу (5.5), были одинаковыми при всех значениях  $y$ . Отсюда вытекают два тождества:

$$\varphi = \varphi', \quad (5.6)$$

$$\sin \varphi / \sin \psi = \beta_2 / \beta_1 \quad (5.7)$$

Равенство (5.6) – это известный из элементарной физики закон, согласно которому угол падения волны равен углу отражения.

Соотношение (5.7), также доказываемое в элементарной теории волновых процессов, называют законом Снелля.

Естественно, что при стремлении угла падения  $\varphi$  к нулю угол преломления  $\psi$  стремится к такому же пределу. Поэтому, если падение волны близко к нормальному, закон Снелля следует понимать в предельном смысле.

Поскольку коэффициенты фазы плоских волн в обеих средах вычисляются по одной и той же формуле вида  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ , соотношение (5.7) можно записать так, что в него войдут лишь электродинамические параметры граничащих сред, а рабочая частота  $\omega$  будет исключена. Для этого введем безразмерную величину  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ , называемую показателем преломления физической среды. Если, например,  $n_2 > n_1$  то говорят, что оптическая плотность второй среды больше, чем первой. Введя показатели преломления граничащих сред в формулу закона Снелля, получим:

$$\sin \varphi / \sin \psi = n_2 / n_1 \quad (5.8)$$

Рассмотренные выше закономерности справедливы безотносительно к ориентации векторов поля по отношению к плоскости падения. Более тщательный анализ показывает, что из-за векторного характера электромагнитного поля ряд явлений, возникающих при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела, существенно связан с взаимной ориентацией плоскости поляризации и плоскости падения. Поэтому рассмотрим два основных случая.

## 5.2 Перпендикулярная поляризация

Перпендикулярная поляризация характерна тем, что плоскость поляризации, содержащая направление вектора  $\vec{E}$ , перпендикулярна плоскости падения (рисунок 5.2).

Пусть  $\dot{E}_{\text{пад}}$ ,  $\dot{E}_{\text{отр}}$ ,  $\dot{E}_{\text{пр}}$ , – комплексные амплитуды векторов напряженности электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн, существующие в плоскости  $z = 0$  при произвольном фиксированном значении координаты  $y$ . Граничные условия относительно электрических векторов запишутся весьма просто:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}. \quad (5.9)$$

При записи граничных условий относительно векторов напряженности магнитного поля следует учесть, прежде всего, что их касательные составляющие получаются путем умножения модулей векторов  $\vec{H}$  на косинусы соответствующих углов (рисунок 5.2). Далее, удобно выразить векторы  $\vec{H}$  через векторы  $\vec{E}$ , используя понятие характеристического сопротивления среды. Таким образом, условие непрерывности касательных составляющих векторов напряженности магнитного поля в плоскости  $z = 0$  принимает вид:

$$\frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) = \frac{\dot{E}_{\text{пр}}}{Z_{c2}} \cos \psi. \quad (5.10)$$

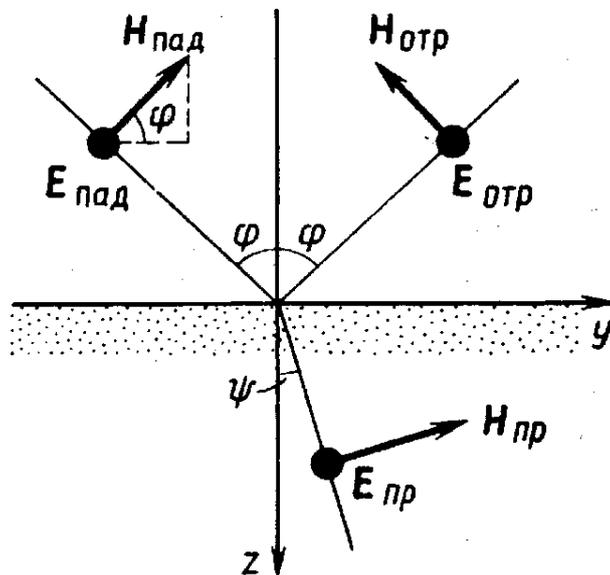


Рисунок 5.2 – Случай перпендикулярной поляризации

Введем в рассмотрение коэффициент отражения  $R_{\perp}$  и коэффициент преломления  $T_{\perp}$  по электрическому полю (нижний значок указывает, что эти величины относятся к случаю перпендикулярной поляризации):

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{ОТР}}}{\dot{E}_{\text{ПАД}}}; \quad T_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{ПР}}}{\dot{E}_{\text{ПАД}}}. \quad (5.11)$$

Теперь формулы (5.9) и (5.10) можно объединить, получив в результате систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $R_{\perp}, T_{\perp}$ :

$$\begin{aligned} 1 + R_{\perp} &= T_{\perp}; \\ \frac{\cos \varphi}{Z_{C1}}(1 - R_{\perp}) &= \frac{T_{\perp}}{Z_{C2}} \cos \psi. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Решение системы (5.12) имеет следующий вид:

$$R_{\perp} = \frac{Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \psi}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \psi}, \quad (5.13)$$

$$T_{\perp} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \psi}. \quad (5.14)$$

Чтобы пользоваться формулами (5.13) и (5.14), необходимо, задавшись некоторым значением угла падения  $\varphi$ , предварительно вычислить угол преломления  $\psi$  на основании закона Снелля.

На практике часто приходится вычислять коэффициенты отражения и преломления плоских волн для частного случая, когда средой 1 служит вакуум или воздух ( $\varepsilon = 1, \mu = 1$ ), а средой 2 – немагнитный ( $\mu = 1$ ) диэлектрик без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . При этом формулы (5.13) и (5.14) удастся объединить с законом Снелля, записав их в виде:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}, \quad (5.15)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.16)$$

Пример. Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом  $\varphi = 60^\circ$  на границу раздела с диэлектриком, имеющим параметры  $\varepsilon = 3.8, \mu = 1$ . Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны  $E_{m.\text{ПАД}} = 0.4$  В/м. Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

По формулам (5.15) - (5.16) находим, что  $R_{\perp} = -0.555, T_{\perp} = 0.455$ .

Характеристическое сопротивление диэлектрика:

$$Z_{C2} = 377 / \sqrt{\varepsilon} = 193 \text{ Ом}.$$

Тогда:

$$H_{m.\text{ОТР}} = |R_{\perp}| \cdot \frac{E_{m.\text{ПАД}}}{Z_0} = 5.9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{А}}{\text{м}},$$

$$H_{m.ПР} = T_{\perp} \cdot \frac{E_{m.ПАД}}{Z_{C2}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \frac{A}{м}$$

### 5.3 Параллельная поляризация

Параллельная поляризация характеризуется тем, что векторы  $\vec{E}$  всех трех волн – падающей, отраженной и преломленной – параллельны плоскости падения (рисунок 5.3).

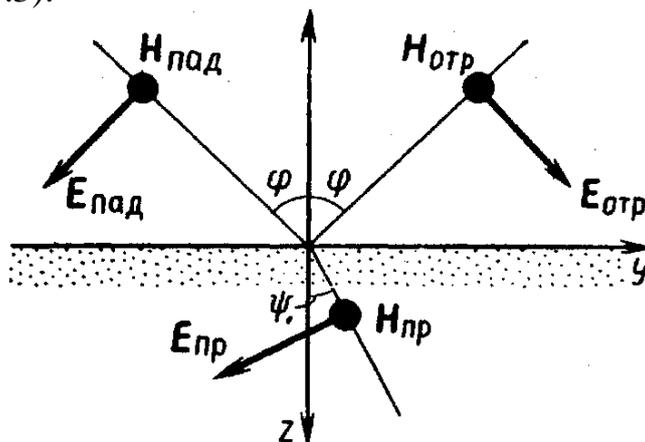


Рисунок 5.3 – Параллельная поляризация

По аналогии со случаем перпендикулярной поляризации можно записать граничные условия непрерывности касательных составляющих векторов электромагнитного поля. Данные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{ПАД} + \dot{E}_{ОТР}) \cos \varphi &= \dot{E}_{ПР} \cos \psi; \\ (\dot{E}_{ПАД} - \dot{E}_{ОТР}) / Z_{C1} &= \dot{E}_{ПР} / Z_{C2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Введем коэффициент отражения  $R_0$  и коэффициент преломления  $T_0$  по электрическому полю (нижний значок указывает на то, что данные величины относятся к случаю параллельной поляризации). Разделив обе части равенств (5.17) на комплексную амплитуду  $\dot{E}_{ПАД}$ , получаем следующую систему уравнений относительно неизвестных  $R_0$  и  $T_0$ :

$$\begin{aligned} (1 + R_0) \cos \varphi &= T_0 \cos \psi; \\ (1 + R_0) / Z_{C1} &= T_0 / Z_{C2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

откуда:

$$R_0 = \frac{Z_{C2} \cos \psi - Z_{C1} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \psi + Z_{C1} \cos \varphi}, \quad (5.19)$$

$$T_0 = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{Z_{C2} \cos \psi + Z_{C1} \cos \varphi}. \quad (5.20)$$

Если средой 2 служит немагнитный диэлектрик с относительной проницаемостью  $\varepsilon$ , формулы (5.20) и (5.21) приводятся к виду, более удобному для инженерных расчетов:

$$R_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi}, \quad (5.21)$$

$$T_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi}. \quad (5.22)$$

Конкретные графики зависимостей  $R_0(\varphi)$  и  $T_0(\varphi)$ , полученные в соответствии с данными формулами, изображены на рисунке 5.4. Следует обратить внимание на то, что монотонно возрастающая функция  $R_0(\varphi)$  при некотором значении угла падения ( $\varphi$ ) изменяет знак, проходя через нуль.

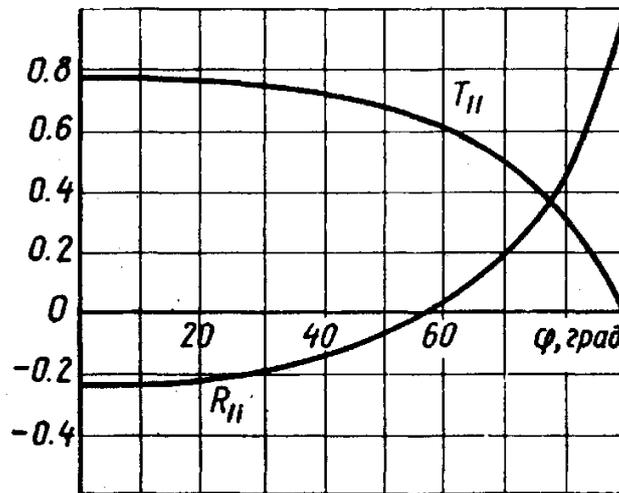


Рисунок 5.4 – Зависимость  $R_0$ ,  $T_0$  от угла падения  $\varphi$  при  $\varepsilon_2 = 2.56$

#### 5.4 Угол Брюстера

Так принято называть угол падения, при котором падающая волна полностью, без отражения, переходит через границу раздела двух материальных сред.

Из выражений (5.13) и (5.19) следует, что угол Брюстера  $\varphi_B$  удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$Z_{C2} \cos \varphi_B - Z_{C1} \cos \psi_B = 0 \quad (5.23)$$

при перпендикулярной поляризации, либо:

$$Z_{C2} \cos \psi_B - Z_{C1} \cos \varphi_B = 0 \quad (5.24)$$

при параллельной поляризации. Здесь под  $\psi_B$  подразумевается угол преломления, соответствующий углу падения  $\varphi_B$ .

Рассмотрим типичный случай, когда обе граничащие среды являются немагнитными диэлектриками ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ), причем оптическая плотность

второй среды больше, чем первой ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ). Из этих предположений следует, что  $Z_{C1} > Z_{C2}$ . Кроме того, в силу закона Снелля имеет место неравенство  $\varphi > \psi$ , т.е.  $\cos \varphi < \cos \psi$ .

Обращаясь к уравнениям (5.23) и (5.24), видим, что первое из этих уравнений в рамках сделанных предположений не имеет решений. Таким образом, явление Брюстера при падении плоской электромагнитной волны на немагнитный диэлектрик может наблюдаться лишь при параллельной поляризации падающей волны.

Удобную формулу для вычисления угла Брюстера можно получить из соотношения (5.21). Действительно, угол  $\varphi_B$  служит корнем уравнения:

$$\varepsilon \cdot \cos \varphi_B = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi_B},$$

откуда легко находим:

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon}. \quad (5.25)$$

Явление Брюстера используется в технике. Так, пластина из диэлектрика, установленная под углом Брюстера по отношению к направлению распространения падающей волны, при правильном выборе поляризации не создает отражений. В то же время эта пластина может играть роль конструктивного элемента какого-либо прибора, обеспечивая, например, его вакуумное уплотнение.

## 5.5 Полное внутреннее отражение

Обратившись вновь к формулировке закона Снелля (5.8):

$$\sin \varphi / \sin \psi = n_2 / n_1,$$

заметим, что могут представиться два случая:

1. Оптическая плотность среды 2 превосходит оптическую плотность среды 1, т.е.  $n_2 > n_1$ . При этом всегда  $\psi < \varphi$ , а поскольку угол падения  $\varphi$  лежит в интервале  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ , преломленная волна существует при любом угле падения.

2. Среда 2 оптически менее плотна по сравнению со средой 1, т.е.  $n_2 < n_1$ . В этом случае всегда  $\psi > \varphi$  и поэтому найдется такое значение угла падения, при котором преломленная волна будет распространяться параллельно границе раздела под углом  $\psi = 90^\circ$ . Данное критическое значение угла падения называют углом полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin(n_2/n_1) \quad (5.26)$$

При углах падения  $\varphi > \varphi_{ПВО}$  преломленной волны в обычном смысле не существует; энергия падающей волны полностью отражается внутрь среды с большей оптической плотностью.

Явление полного внутреннего отражения широко используется в оптике, например для изменения направления пучка лучей при помощи призмы.

Подобные же устройства находят применение в коротковолновой части СВЧ-диапазона (на частотах выше 50 ГГц).

На рисунке 5.5 показан отрезок световодного волокна, по которому распространяется световая волна.

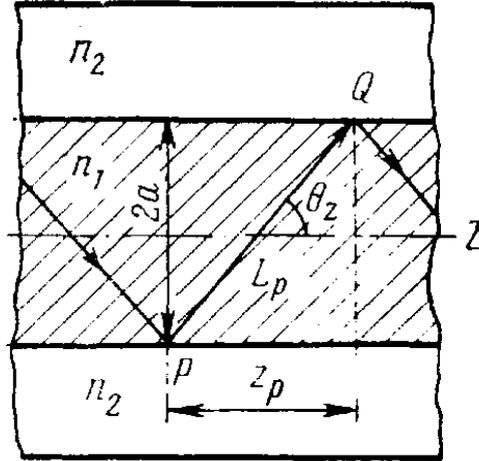


Рисунок 5.5 – Световая волна в оптическом волокне

Луч, падающий извне на торец, распространяется по сердечнику световода под углом  $\theta_z$  к его оси, причем  $0 \leq \theta_z \leq \theta_c$ , где  $\theta_c$  – угол полного внутреннего отражения меридионального луча в световоде на границе сердечника ( $n_1$ ) с оболочкой ( $n_2$ ), причем  $n_1 > n_2$ . Зигзагообразная траектория такого луча представляет собой совокупность прямолинейных отрезков, таких как отрезок  $PQ = L_p$ . Проекция  $PQ$  на ось  $z$  световода – полупериод, величина которого  $Z_p = L_p \cos \theta_z$ . Число  $N$  полупериодов  $Z_p$  вдоль пути распространения луча на расстояние  $Z$  равно  $Z/Z_p$ . Обозначая через  $v_G = c/n_1$  скорость распространения излучения по световоду, можно определить, например, время  $t_z$  распространения по световоду излучения на расстояние  $Z$ :

$$L_p = \frac{2a}{\sin \theta_z}; \quad t_z = \frac{Z}{Z_p} \frac{L_p}{v_G} = \frac{Z}{c} \frac{n_1}{\cos \theta_z} \dots$$

## 5.6 Неоднородные плоские волны

Приведенный анализ явления полного внутреннего отражения является неполным, поскольку не позволяет ответить на вопрос о том, что происходит при углах падения  $\varphi$ , превышающих угол  $\varphi_{\text{ПВО}}$ .

Обратимся к формуле (5.8), предполагая, что  $n_2 < n_1$ , можно заметить, что в этом случае при  $\varphi > \varphi_{\text{ПВО}}$  величина  $\sin \psi$  должна быть больше единицы. Если угол преломления является действительным, такая ситуация невозможна. Однако известно, что синус, рассматриваемый как функция комплексного аргумента, может принимать любые, в том числе сколь угодно большие, действительные значения. В соответствии с этим *формально* будем считать, что при  $\varphi > \varphi_{\text{ПВО}}$  угол преломления  $\psi$ , достигший значения  $90^\circ$  при  $\varphi = \varphi_{\text{ПВО}}$ , получает мнимые приращения, так что  $\varphi = 90^\circ - j \operatorname{sh} \alpha$ . Легко проверить, что при этом:

$$\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha; \quad \cos \psi = -j \operatorname{ch} \alpha. \quad (5.27)$$

Итак, концепция комплексного угла преломления позволяет удовлетворить закону Снелля в области углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения. Подставив выражения (5.27) в формулу (5.3), находим зависимость комплексной амплитуды электрического вектора преломленной волны от пространственных координат:

$$\dot{E}_{\text{ПП}}(y, z) = \dot{E}_{m.\text{ПП}} e^{-j\beta_2 y \operatorname{ch} \alpha} e^{-\beta_2 z \operatorname{sh} \alpha}. \quad (5.28)$$

По математической форме данное соотношение весьма напоминает выражение для комплексной амплитуды плоской волны, распространяющейся в среде с потерями. Однако имеется и принципиальная разница, так как в соответствии с выражением (5.28) волна распространяется вдоль координаты  $y$ , в то время как экспоненциальное уменьшение амплитуды волны происходит вдоль координаты  $z$ . Подобные процессы называют *неоднородными плоскими волнами*.

С физической точки зрения рассматриваемая неоднородная плоская волна распространяется вдоль границы раздела, как бы «прилипая» к ней, т.е. с резким уменьшением амплитуды при удалении точки наблюдения от границы раздела по направлению нормали. Указанная особенность дает основание называть *такие волновые процессы поверхностными волнами*.

На первый взгляд может показаться, что понятие плоской волны, распространяющейся под комплексным углом по отношению к некоторой выбранной оси, довольно искусственно. Однако, по существу, такая расширенная трактовка математической модели волнового процесса совершенно правомерна. Дело в том, что функция вида (5.28) является одним из частных решений уравнения Гельмгольца, приняв во внимание, что  $\operatorname{sh}^2 \alpha = \operatorname{ch}^2 \alpha - 1$ .

Следует отметить, что фазовая скорость волн в оптически менее плотной среде стремится к величине, свойственной более плотной среде.

Остановимся на вопросе о глубине проникновения волн в среду 2 при полном внутреннем отражении. Из формулы (5.28) следует, что расстояние вдоль координаты  $z$ , на котором амплитуда поля уменьшается в  $e = 2.718\dots$  раза, есть  $d = \frac{1}{\beta_2 c h \alpha}$ .

Таким образом, электромагнитное поле в менее плотной среде 2 практически существует лишь в поверхностном слое, толщина которого порядка одной длины волны. Существенно, что с ростом угла падения  $\varphi$  замедление становится более интенсивным, а глубина проникновения поля в менее плотную среду сокращается.

## 6 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ [1-4]

### 6.1 Волны в хорошо проводящей среде

Частотная дисперсия имеет место в тех случаях, когда фазовая скорость, а, вообще говоря, и коэффициент ослабления волны зависят от частоты. В данном разделе изучаются некоторые практически важные диспергирующие среды. Показано, что частотная дисперсия фазовой скорости ведет к ряду интересных физических эффектов, наблюдаемых при распространении электромагнитных волн со сложным спектральным составом.

Частотная дисперсия при распространении волн наблюдается всякий раз, когда хотя бы один из электродинамических параметров  $\tilde{\epsilon}_a$ ,  $\mu_a$  зависит от частоты. Действительно, в этом случае коэффициент распространения  $\gamma$  связан с частотой нелинейным образом и поэтому фазовая скорость  $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$  называется частотно-зависимой. По этой причине частотная дисперсия фазовой скорости свойственна любой проводящей среде, у которой даже при постоянстве абсолютной магнитной проницаемости  $\mu_a$  абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}$  является функцией частоты.

Говорят, что на заданной частоте  $\omega$  материальная среда является хорошо проводящей (металлоподобной), если выполняется неравенство:

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \epsilon_a. \quad (6.1)$$

Физически это означает, что в такой среде плотность токов проводимости значительно превышает плотность как токов смещения, так и поляризационных токов.

На частотах радиодиапазона условие (6.1) с большим запасом выполняется для любых металлов. Так, известно, что медь имеет параметры  $\epsilon_a = \epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi = 8.84 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ . На частоте 30 ГГц  $\lambda = 1 \text{ см}$  абсолютная диэлектрическая проницаемость меди:

$$\tilde{\epsilon}_a = 8.84 \cdot 10^{-12} - j3.02 \cdot 10^{-4} \text{ Ф/м}.$$

Видно, что мнимая часть диэлектрической проницаемости меди на семь десятичных порядков превосходит действительную.

Очевидно, что чем ниже частота, тем ближе проводящая среда по своим электродинамическим свойствам к идеальному проводнику. На достаточно низких частотах многие неидеальные диэлектрики, а также полупроводники

становятся металлоподобными. Например, для сухой почвы с параметрами  $\varepsilon = 4$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м на частоте 1 МГц имеем  $\tilde{\varepsilon}_a = 3.54 \cdot 10^{-11} - j3.18 \cdot 10^{-10}$  Ф/м.

Таким образом, в радиовещательном диапазоне частот сухая почва ведет себя как хорошо проводящая среда. Это свойство позволяет в ряде случаев значительно упростить расчет полей электромагнитных волн, распространяющихся над поверхностью Земли.

Итак, комплексную диэлектрическую проницаемость хорошо проводящей среды можно приближенно считать чисто мнимой:

$$\tilde{\varepsilon}_{aM} = -j \cdot \sigma / \omega. \quad (6.2)$$

Найдем коэффициент распространения однородных плоских электромагнитных волн в такой среде. По общему правилу:

$$\gamma_M = \alpha_M + j\beta_M = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{aM}\mu_{aM}} = \sqrt{j\omega\mu_{aM}\sigma}. \quad (6.3)$$

Так как главное значение квадратного корня из мнимой единицы:

$$\sqrt{j} = \exp(j \cdot \pi/4) = (1 + j)/\sqrt{2},$$

то формула (6.3) приобретает вид:

$$\gamma_M = (1 + j)\sqrt{\omega\mu_{aM} \cdot \sigma/2}. \quad (6.4)$$

Таким образом, в металлоподобной среде коэффициенты фазы и ослабления численно равны:

$$\beta_M = \alpha_M = \sqrt{\omega\mu_{aM} \cdot \sigma/2}. \quad (6.5)$$

Зависимость этих величин от частоты говорит о том, что в хорошо проводящей среде имеется ярко выраженная частотная дисперсия.

На основании формулы (6.5) находим фазовую скорость:

$$v_{\phi M} = \omega / \beta_M = \sqrt{2\omega / (\mu_{aM}\sigma)} \quad (6.6)$$

и длину волны в металлоподобной среде:

$$\lambda_M = 2\pi / \beta_M = 2\pi\sqrt{2 / (\omega\mu_{aM}\sigma)}. \quad (6.7)$$

Пример. Найти фазовую скорость и длину волны в меди на частоте 100 МГц, полагая, что  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$  См/м,  $\mu_{aM} = \mu_0 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Воспользовавшись формулами (6.6) и (6.7), получаем:

$$v_{\phi M} = \sqrt{\frac{10^8}{5.7}} = 4188.5 \frac{м}{с}; \quad \lambda_M = \frac{1}{\sqrt{5.7 \cdot 10^8}} = 4.19 \cdot 10^{-5} м.$$

Следует обратить внимание на то, что на частотах радиодиапазона фазовая скорость плоских волн в металле существенно меньше, чем в вакууме.

С ростом частоты фазовая скорость однородных плоских волн в хорошо проводящей среде увеличивается.

Чтобы найти характеристическое сопротивление металлоподобной среды, следует воспользоваться общей формулой:

$$Z_{C.M} = \sqrt{\frac{\mu_{aM}}{\tilde{\varepsilon}_{aM}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{aM}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{aM}}{\sigma}} \exp(j45^\circ). \quad (6.8)$$

Комплексность характеристического сопротивления указывает на то, что в хорошо проводящей среде вектор напряженности электрического поля сдвинут по фазе относительно вектора напряженности магнитного поля на угол  $45^\circ$ . Видно также, что в данном случае характеристическое сопротивление зависит от частоты.

Конкретный расчет показывает, что модуль сопротивления  $Z_{С.М}$  в практически интересных случаях намного меньше характеристического сопротивления вакуума. Так, для типичного металла с параметрами  $\mu_{aM} = \mu_0$ ,  $\sigma = 3 \cdot 10^7$  См/м на частоте 1 МГц величина  $Z_{С.М} = 5.13 \cdot 10^{-4} \exp(j45^\circ)$  Ом.

Как известно, в среде с потерями амплитуда плоских электромагнитных волн изменяется вдоль координаты распространения  $z$  по закону  $\exp(-\alpha z)$ . Расстояние  $d$ , на котором амплитуда плоских волн уменьшается в  $e = 2.718$  раза по сравнению с начальной, называют глубиной проникновения или толщиной поверхностного слоя. В рассматриваемом нами случае эта величина удовлетворяет очевидному соотношению  $\alpha_M d = 1$ . Отсюда, воспользовавшись формулой (6.5), получаем  $d = \frac{1}{\alpha_M} = \frac{\lambda_M}{2\pi}$ . Таким образом, приходим к еще одному определению: материальная среда является металлоподобной, если поле однородной плоской волны затухает в ней на расстоянии, *меньшем длины волны*.

Формула для вычисления толщины поверхностного слоя такова:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{aM} \sigma}}. \quad (6.9)$$

Глубина проникновения электромагнитных волн в хорошо проводящую среду уменьшается с ростом частоты и удельной проводимости.

Расчет по формуле (6.9) показывает, что для металлов на частотах СВЧ-диапазона величина  $d$  весьма мала. Так, для меди ( $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$  См/м) на частоте 10 ГГц имеем  $d = 10$  мкм. Отсюда следует практически важный вывод о том, что на токоведущие поверхности целесообразно наносить тонкий (толщиной 10 – 20 мкм) слой хорошо проводящего металла, обычно серебра. Такое покрытие позволяет просто и сравнительно дешево уменьшать тепловые потери в элементах СВЧ устройств.

## 6.2 Плазма и ее электродинамические параметры

К числу материальных сред, в которых распространение электромагнитных волн сопровождается частотной дисперсией, относится *плазма*. В узком смысле так называют ионизированный газ, состоящий из положительно и отрицательно заряженных частиц, а также из нейтральных атомов и молекул.

Плазма часто встречается в природе и технике. В частности Земля окружена плазменной оболочкой – ионосферой, располагающейся на высотах 100 – 500 км. Ионосфера решающим образом влияет на распространение радиоволн в земных условиях. Плазменные свойства присущи межпланетной и межзвездной среде. В разнообразных приборах и устройствах приходится иметь дело с плазмой газового разряда, а также с плазмой, образуемой носителями заряда в металлах и полупроводниках.

Одно из основных свойств плазмы заключается в ее *квазинейтральности* – если в плазме мысленно выделить некоторую замкнутую область, то электрический заряд внутри нее в среднем всегда равен нулю, несмотря на то, что из-за теплового движения заряженных частиц наблюдаются быстрые флуктуации суммарного заряда вокруг среднего значения. Таким образом, локальную плотность плазмы можно описывать одним параметром – электронной концентрацией  $N_e$  ( $\text{м}^{-3}$ ), которая равна среднему числу электронов в единице объема. Данный параметр существенно варьируется в средах различной физической природы. Например, для земной ионосферы типично значение  $N_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ . Концентрация электронов в плазме проводящих твердых тел значительно выше, здесь  $N_e = 10^{26} \text{ м}^{-3}$ .

Заряженные частицы плазмы движутся под действием сил электромагнитного поля. Это приводит к поляризации среды, так что диэлектрическая проницаемость плазмы отличается от проницаемости вакуума. Рассматривая электронно-ионную плазму, следует учитывать, что масса иона на несколько порядков превышает массу электрона. Поэтому ионы практически неподвижны и в первом приближении не влияют на электродинамические свойства такой среды.

Простейший способ анализа свойств плазмы основан на том, что составляют и решают дифференциальное уравнение, описывающее движение в пространстве некоторого отдельно взятого типичного электрона. Это уравнение, записанное на основании второго закона Ньютона, имеет вид:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\bar{r}}{dt} = e\bar{E}, \quad (6.10)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор отклонения электрона от того положения в пространстве, которое он занимал при отсутствии поля;  $e$ ,  $m$  – заряд и масса электрона;  $\nu$  – так называемая частота соударений электрона с нейтральными частицами,  $\text{с}^{-1}$ .

Первое слагаемое в левой части представляет собой силу инерции. Второе слагаемое в рамках выбранного нами модельного (феноменологического) подхода характеризует силу «внутреннего трения», которая действует на электрон. Действительно, при неупругих соударениях с нейтральными частицами электрон  $\nu$  раз в секунду теряет порции импульса по  $m \frac{d\bar{r}}{dt}$  каждая.

Наконец, правая часть уравнения (6.10) описывает силу, действующую на электрон со стороны внешнего электрического поля.

Скорости, приобретаемые электроном, полагают достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь силой, возникающей под действием магнитного поля.

Предположим, что внешнее поле  $\bar{E}$  изменяется во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . Тогда, подставив в уравнение (6.10) функции  $\bar{r}$  и  $\bar{E}$ , выраженные через соответствующие комплексные амплитуды, т.е.:

$$\bar{r} = \text{Re}[\dot{\bar{r}} \exp(j\omega t)], \quad \bar{E} = \text{Re}[\dot{\bar{E}} \exp(j\omega t)],$$

получаем:

$$m(-\omega^2 + j\omega\nu)\dot{\bar{r}} = e\dot{\bar{E}},$$

или

$$\dot{\bar{r}} = \frac{e\dot{\bar{E}}}{m\varepsilon_0(-\omega^2 + j\omega\nu)}. \quad (6.11)$$

Отсюда находим комплексную амплитуду вектора поляризованности:

$$\dot{\bar{P}} = N_e \dot{\bar{r}}$$

и вектора электрического смещения:

$$\dot{\bar{D}} = \varepsilon_0 \dot{\bar{E}} + \dot{\bar{P}},$$

которая описывается выражением:

$$\dot{\bar{D}} = \varepsilon_0 \left[ 1 - \frac{N_e e^2}{m(\omega^2 - j\omega\nu)} \right] \dot{\bar{E}}. \quad (6.12)$$

На основании последней формулы находим относительную диэлектрическую проницаемость плазменной среды:

$$\varepsilon = 1 - \frac{N_e e^2}{m\varepsilon_0(\omega^2 - j\omega\nu)}. \quad (6.13)$$

В соответствии с формулами (6.12) и (6.13) диэлектрическая проницаемость плазмы существенным образом зависит от частоты приложенного электромагнитного поля. Как следствие, процесс распространения электромагнитных волн в плазме сопровождается частотной дисперсией. Физическая причина дисперсии – инерционность процесса перемещения электронов плазмы под действием переменного поля.

### 6.3 Распространение электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме

Расчет частоты соударений в плазменной среде – сложная задача, решаемая методами кинетической теории газов. Анализ показывает, что во многих интересных для радиотехники ситуациях основные параметры, определяющие частоту соударений, такие, как температура электронного газа и средняя

длина пробега электрона между двумя последовательными столкновениями, оказываются такими, что на рабочей частоте  $\omega$  выполняется неравенство:

$$\omega \gg \nu. \quad (6.14)$$

Это позволяет приближенно считать, что в формулах (6.12) и (6.13)  $\nu = 0$ . Если такая упрощенная модель справедлива, то говорят о *бесстолкновительной плазме*, относительная диэлектрическая проницаемость которой:

$$\varepsilon = 1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} \quad (6.15)$$

действительна и меньше единицы на любых частотах.

Из равенства (6.15) непосредственно следует, что величина  $\varepsilon$  обращается в нуль на так называемой *плазменной частоте*:

$$\omega_{ПЛ} = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0}}, \quad (6.16)$$

которую иногда называют также *ленгмюровской частотой* по имени американского физика И. Ленгмюра (1881 – 1957).

Подставив в (6.16) числовые значения  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $\varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$  Ф/м, получаем формулу для практических расчетов:

$$\omega_{ПЛ} = 54.41 \sqrt{N_e} c^{-1} \quad (6.17)$$

или

$$f_{ПЛ} = 8.98 \sqrt{N_e} \text{ Гц}. \quad (6.18)$$

Часто на практике концентрация электронов такова, что плазменная частота лежит в радиодиапазоне. Так, для земной ионосферы с типичным значением  $N_e \sim 10^{12} \text{ м}^{-3}$  частота  $f_{ПЛ} = 9$  МГц.

Изучая распространение плоских электромагнитных волн в бесстолкновительной плазме, следует по отдельности рассмотреть два случая:

1. Концентрация электронов  $N_e$  сравнительно невелика, так что выполняется неравенство  $\omega > \omega_{ПЛ}$ . Говорят, что при этом имеет место распространение волн в *докритической плазме*.

2. Параметр  $N_e$  велик настолько, что имеет место обратное неравенство  $\omega < \omega_{ПЛ}$ . В данном случае принято говорить об электромагнитных процессах в *закритической плазме*.

**Докритическая плазма.** Представив выражение (6.15) в виде:

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{\omega_{ПЛ}}{\omega} \right)^2,$$

на основании формулы для  $\gamma$  плоской волны ( $\gamma = j\omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a} = \alpha + j\beta$ ) находим коэффициент распространения плоской электромагнитной волны в плазме:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\beta_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{ПЛ}}{\omega} \right)^2},$$

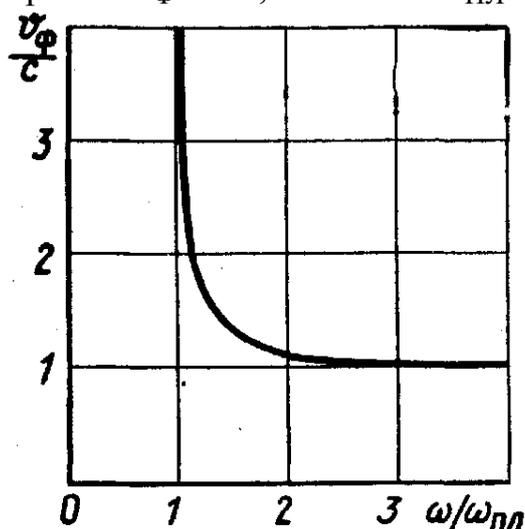
где  $\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  – коэффициент фазы плоской волны в вакууме. Ясно, что в рассматриваемом случае коэффициент ослабления  $\alpha = 0$ , в то время как коэффициент фазы:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{ПЛ}}}{\omega}\right)^2}. \quad (6.19)$$

Отсюда непосредственно вытекает формула для расчета фазовой скорости плоской электромагнитной волны в бесстолкновительной плазме:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{ПЛ}}}{\omega}\right)^2}}. \quad (6.20)$$

Кривая, характеризующая частотную дисперсию фазовой скорости в докритической плазме, изображена на рисунке 6.1. Следует отметить, что здесь фазовая скорость плоских электромагнитных волн всегда больше скорости волн в вакууме, причем  $v_\phi \rightarrow \infty$ , если  $\omega \rightarrow \omega_{\text{ПЛ}}$ .



**Рисунок 6.1 – Частотная зависимость фазовой скорости в докритической плазме**

Характеристическое сопротивление докритической бесстолкновительной плазмы также зависит от частоты. Действительно, здесь:

$$Z_C(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{ПЛ}}}{\omega}\right)^2}},$$

где  $Z_0 = 377$  Ом. В плазме рассматриваемого вида характеристическое сопротивление  $Z_C$  действительно (векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются во времени синфазно) и превышает величину  $Z_0$ .

**Пример.** Концентрация электронов в бесстолкновительной плазме  $N_e = 2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$ . Найти частоту  $f$  электромагнитного поля, при которой характеристическое сопротивление данной плазмы составляет 600 Ом.

Уравнение относительно частоты:

$$600 = \frac{377}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{ПЛ}}{\omega}\right)^2}}$$

имеет положительный корень:

$$\omega = \frac{\omega_{ПЛ}}{\sqrt{1 - \left(\frac{377}{600}\right)^2}}.$$

Отсюда  $\omega = 3.128 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  или  $f = 4.978 \text{ МГц}$ .

Вывод о том, что в бесстолкновительной плазме  $v_{\Phi} > c$ , требует некоторого пояснения, поскольку, согласно теории относительности, скорость света в вакууме  $c$  является предельно возможной в природе. Однако при этом имеется в виду скорость движения материальных объектов, измеренная в некоторой инерциальной системе координат. Рассматриваемая же нами фазовая скорость представляет собой скорость перемещения в пространстве воображаемых математических объектов – волновых фронтов. Естественно, что ограничения, налагаемые принципом относительности, не распространяются на величину фазовой скорости, которая может быть сколь угодно велика.

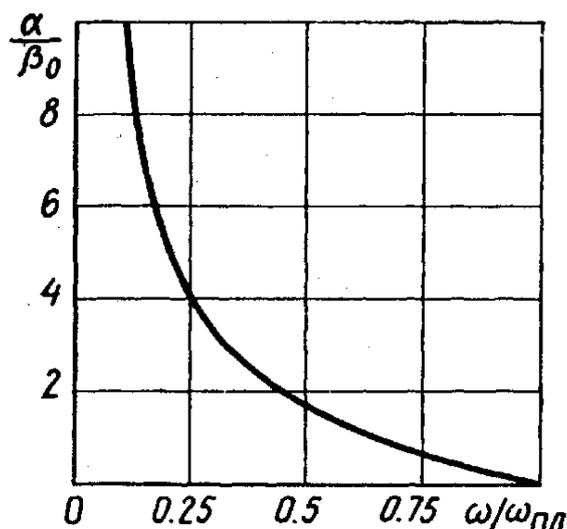
**Закритическая плазма.** Если  $\omega < \omega_{ПЛ}$ , то коэффициент распространения плоской электромагнитной волны в плазме оказывается действительным:

$$\alpha(\omega) = \beta_0 \sqrt{(\omega_{ПЛ}/\omega)^2 - 1}; \rightarrow \rightarrow \beta(\omega) = 0.$$

Амплитуда поля вдоль произвольно выбранной оси  $z$  уменьшается по мере распространения в соответствии с законом  $\exp(-\alpha z)$ . Поскольку коэффициент фазы  $\beta$  в закритической плазме равен нулю, волновой процесс в данной среде фактически отсутствует – начальные фазы колебаний при любых  $z$  одинаковы в каждый момент времени. Формально это означает, что фазовая скорость плоских электромагнитных волн в закритической плазме неограниченно велика.

Ослабление амплитуды поля в плазме рассматриваемого вида обусловлено не переходом части энергии в теплоту, а чисто фазовым эффектом: колеблющиеся электроны плазмы возбуждают вторичные волны, которые, интерферируя с полем падающей волны, стремятся его компенсировать.

График частотной зависимости нормированного коэффициента ослабления изображен на рисунке 6.2. Обращает на себя внимание резкое увеличение коэффициента ослабления при уменьшении рабочей частоты.



**Рисунок 6.2 – Частотная зависимость нормированного коэффициента ослабления в бесстолкновительной плазме**

Ослабление амплитуды электромагнитных волн в закритической плазме во многих случаях оказывает существенное влияние на работу земных и космических радиолиний.

Пример. Вычислить ослабление электромагнитных волн в плазменной оболочке толщиной  $d = 0.03$  м при концентрации электронов  $N_e = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  на частоте  $f = 15$  МГц.

Здесь плазменная частота  $f = 8.98\sqrt{N_e} = 8.98 \text{ ГГц}$ . Отношение  $f_{\text{пл}}/f$ , т.е. закритический режим распространения выражен достаточно резко. Коэффициент фазы плоской волны с указанной частотой в вакууме  $\beta_0 = 0.314 \text{ м}^{-1}$ . Коэффициент ослабления волны в плазме:

$$\alpha = \beta_0 \sqrt{(f_{\text{пл}}/f)^2 - 1} = 188.5 \text{ м}^{-1}.$$

В логарифмических единицах погонное ослабление:

$$\Delta_{\text{ПОГ}} = 8.686 \alpha = 1637 \text{ дБ/м}.$$

Отсюда ослабление волн в плазменном слое:

$$\Delta_{\text{СЛ}} = -\Delta_{\text{ПОГ}} d = -42.9 \text{ дБ}.$$

Таким образом, если  $E_{m\text{ВХ}}$  и  $E_{m\text{ВЫХ}}$  – амплитуды напряженности электрического поля на входе и выходе слоя, то:

$$\frac{E_{m\text{ВХ}}}{E_{m\text{ВЫХ}}} = 10^{42.9/20} = 288.$$

Проведенный ориентировочный расчет свидетельствует о возможности существенного ослабления амплитуды волн в слое закритической плазмы.

Поскольку диэлектрическая проницаемость закритической плазмы отрицательна, характеристическое сопротивление подобной среды оказывается чисто мнимым:

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} = \frac{-jZ_0}{\sqrt{(\omega_{\text{ПЛ}}/\omega)^2 - 1}}. \quad (6.21)$$

Знак правой части последнего равенства указывает на то, что характеристическое сопротивление закритической плазменной среды является емкостным.

Подводя итог, можно констатировать, что слой бесстолкновительной плазмы ведет себя подобно *фильтру верхних частот*, пропуская на выход колебания с частотами  $\omega > \omega_{\text{ПЛ}}$  и эффективно ослабляя спектральные составляющие с частотами  $\omega < \omega_{\text{ПЛ}}$ .

#### 6.4 Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости.

Зависимость фазовой скорости плоских электромагнитных волн от частоты служит причиной ряда явлений, наблюдаемых при распространении радиоволн.

Для того чтобы упростить анализ и сделать его результаты более наглядными, будем рассматривать материальные среды без затухания, подобные бесстолкновительной плазме на частотах выше плазменной. Предположим, что в плоскости  $z = 0$ , которая рассматривается как «вход» волновой системы, некоторые внешние источники возбуждают однородную плоскую электромагнитную волну. Данная волна распространяется в материальной среде с известным законом дисперсии  $\beta(\omega)$  в сторону увеличения координаты  $z$ . Будем считать, что электрический вектор данной волны имеет единственную отличную от нуля проекцию  $E_x$ .

Ранее изучались волны с гармоническим (синусоидальным или косинусоидальным) законом изменения мгновенных значений поля во времени. Теперь обратимся к более общему случаю, когда сигнал  $E_x(0, t)$  на входе волновой системы представляет собой импульсное колебание, существующее лишь на конечном отрезке времени, называемом длительностью импульса  $\tau_{\text{И}}$ .

Разложим сигнал  $E_x(0, t)$  на элементарные гармонические колебания, представив его интегралом Фурье:

$$E_x(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.22)$$

в который входит спектральная плотность:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(0, t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.23)$$

Среда, в которой распространяются волны, считается линейной. Поэтому на основании принципа суперпозиции частные решения уравнений Макс-

велла могут любым образом складываться, вновь образуя в совокупности некоторое решение уравнений электромагнитного поля. В рассматриваемом нами случае такими частными решениями служат гармонические волны со всевозможными частотами  $\omega$  и исчезающе малыми амплитудами; уровни этих амплитуд пропорциональны функции  $|S(\omega)|$ . Спектральная плотность, вообще говоря, принимает комплексные значения; ее аргумент описывает частотную зависимость начального фазового сдвига отдельных элементарных волн.

Каждая элементарная волна, распространяясь в среде без затухания и с частотной дисперсией, характеризуется тем, что мгновенные значения гармонических колебаний в плоскости с координатой  $z$  запаздывают на  $\beta(\omega)z$  радиан по отношению к колебаниям на входе, т.е. при  $z = 0$ . Другими словами, функция:

$$K(j\omega) = \exp[-j\beta(\omega)z]. \quad (6.24)$$

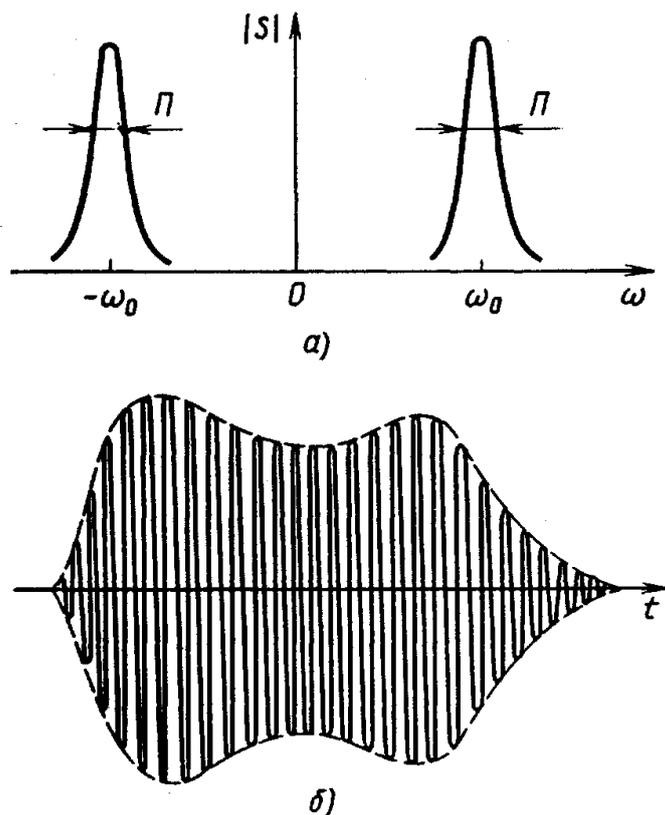
должна рассматриваться как частотный коэффициент передачи некоторого воображаемого линейного четырехполюсника, который преобразует входной сигнал  $E_x(0, t)$  в выходной сигнал  $E_x(z, t)$ . Итак, мгновенное значение выбранной проекции электрического вектора в плоскости с фиксированной координатой  $z$  дается выражением:

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega)z]} d\omega. \quad (6.25)$$

В равной мере аналогичные выражения можно записать и для других проекций векторов поля, например для  $H_y(z, t)$ .

**Распространение узкополосных сигналов.** Формула (6.25) служит полным и однозначным решением, однако конкретное вычисление интеграла может оказаться весьма трудным из-за того, что переменная интегрирования входит в аргумент экспоненциальной функции нелинейным образом. Задача существенно упрощается в том случае, когда колебание  $E_x(0, t)$  на входе среды оказывается узкополосным сигналом. Как известно, спектральная плотность такого сигнала концентрируется в окрестности некоторой центральной частоты  $\omega_0$ , так что если  $\Pi$  – ширина спектра сигнала, измеренная на каком-либо произвольном уровне, то отношение  $\frac{\Pi}{\omega_0} \ll 1$  (рисунок 6.3, а). Времен-

ная диаграмма типичного узкополосного сигнала (рисунок 6.3, б) имеет вид квазигармонической кривой, у которой текущая амплитуда и начальная фаза изменяются гораздо медленнее, чем высокочастотное заполнение вида  $\cos \omega_0 t$ .



а) частотная зависимость модуля спектральной плотности;

б) временная диаграмма сигнала

**Рисунок 6.3 – Узкополосный сигнал**

Простейшим сигналом рассматриваемого класса, на примере которого удастся, тем не менее, изучить ряд важных явлений, является *узкополосная группа*:

$$E_x(0, t) = E_m \cos \omega_1 t + E_m \cos \omega_2 t,$$

т.е. сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами; частоты этих колебаний:

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega; \quad \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$$

расположены симметрично относительно центральной частоты  $\omega_0$ .

По аналогии с формулой (6.25) запишем математическую модель сигнала в плоскости  $z > 0$ , возникающего при подаче на вход волновой системы узкополосной группы:

$$E_x(z, t) = E_m \cos[\omega_1 t - \beta(\omega_1)z] + E_m \cos[\omega_2 t - \beta(\omega_2)z]. \quad (6.26)$$

В дальнейшем будем предполагать, что имеет место случай, так называемой, слабой дисперсии, когда в пределах малой (в относительном смысле) окрестности частоты  $\omega_0$  дисперсионная характеристика среды  $\beta(\omega_0)$  достаточно точно описывается двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0). \quad (6.27)$$

Производную  $\frac{d\beta}{d\omega}$  следует вычислять при  $\omega = \omega_0$ , обозначим эту производную для краткости как  $\beta_0'$ . После элементарных математических преобразований находим:

$$E_x(z, t) = 2E_m \cos[\Delta\omega(t - \beta_0'z)] \cos[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]. \quad (6.28)$$

**Понятие групповой скорости.** Займемся анализом полученной формулы. При фиксированном  $z$  мгновенные значения поля изменяются во времени как квазигармонический сигнал вида  $2E_m \cos(\Delta\omega t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \psi)$ . Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  – некоторые постоянные числа. Сомножитель  $\cos(\Delta\omega t + \varphi)$  определяет закон изменения медленной огибающей процесса; сомножитель  $\cos(\omega_0 t + \psi)$  описывает быстрое высокочастотное заполнение. Подобные процессы в физике принято называть *биениями*.

Из формулы (6.28) можно сделать вывод о том, что как медленная огибающая узкополосной группы, так и быстрое заполнение распространяются в пространстве волнообразно (рисунок 6.4). При этом скорость распространения высокочастотного заполнения равна фазовой скорости гармонической плоской волны с центральной частотой  $\omega_0$ :

$$v_\phi = \frac{\omega_0}{\beta(\omega_0)}. \quad (6.29)$$

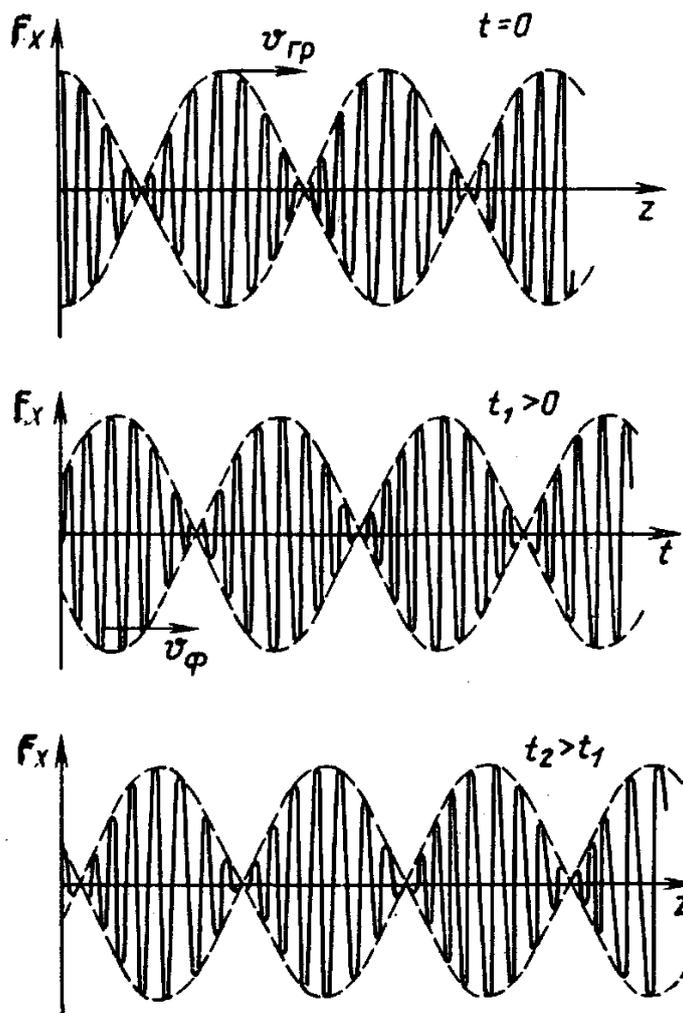
Однако скорость перемещения в пространстве медленной огибающей, получившая название *групповой скорости*:

$$v_{GP} = \frac{1}{\beta_0'} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (6.30)$$

в диспергирующей среде, как правило, не равна фазовой скорости. Если обратиться конкретно к случаю бесстолкновительной плазмы, для которой закон частотной дисперсии задан формулой (6.19), то, вычислив производную  $\frac{d\beta}{d\omega}$ , на основании выражения (6.30) получаем простую формулу для групповой скорости:

$$v_{GP} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_{III}}{\omega} \right)^2}. \quad (6.31)$$

Прибегая к понятию групповой скорости, удастся приемлемо точно рассчитать скорость волнообразного распространения в диспергирующей среде любого достаточно узкополосного импульсного колебания. Более определенно, групповая скорость служит хорошей приближенной оценкой скорости распространения радиоимпульса, спектр которого отличен от нуля лишь в пределах частотного интервала, где производная  $\frac{d\beta}{d\omega}$  может считаться постоянной.



**Рисунок 6.4 – Пространственное распределение поля узкополосной группы в три последовательных момента времени**

Пример. В бесстолкновительной плазме (ионосфере) с электронной концентрацией  $N_e = 2 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$  одну и ту же трассу длиной  $L = 150 \text{ км}$  проходят два прямоугольных радиоимпульса одинаковой длительности  $\tau_{\text{И}} = 100 \text{ мкс}$ . Несущие частоты импульсов  $f = 15 \text{ МГц}$  и  $f = 28 \text{ МГц}$ , соответственно. Определить величину  $\Delta t$  – разность времен прохождения этой трассы данными импульсами.

Спектральная плотность первого радиоимпульса концентрируется в окрестности частоты  $15 \text{ МГц}$ . Ширина спектра этого импульса, оцениваемая как частотный интервал между первыми нулями спектральной диаграммы,  $\Delta f \approx \frac{2}{\tau_{\text{И}}} = 20 \text{ кГц}$ . Второй импульс имеет спектр такой же ширины, сосредоточенный в окрестности частоты  $28 \text{ МГц}$ . Достаточная малость относительной ширины спектра  $\frac{\Delta f}{f_{0,1;0,2}} \approx 20 \text{ кГц}$  позволяет считать, что скорости распространения импульсов равны соответствующим групповым скоростям. Вычис-

лив предварительно ленгмюровскую частоту  $f_{\text{ПЛ}} = 12.7$  МГц, на основании (6.31) получаем:

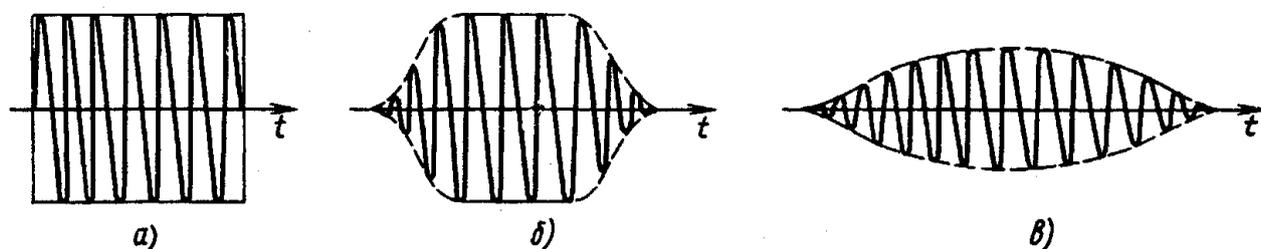
$$v_{\text{ГР1}} = c \sqrt{1 - \left( \frac{f_{\text{ПЛ}}}{f_{01}} \right)^2} = 1.596 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$v_{\text{ГР2}} = c \sqrt{1 - \left( \frac{f_{\text{ПЛ}}}{f_{02}} \right)^2} = 2.674 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отсюда  $\Delta t = L(v_{\text{ГР1}}^{-1} - v_{\text{ГР2}}^{-1}) = 378 \text{ мкс}$ , что почти в четыре раза превышает длительность импульсов.

Искажения импульсных сигналов при распространении в диспергирующей среде. Используя понятие групповой скорости, можно в ряде случаев ответить на вопрос о том, сколь ощутимы искажения импульсного сигнала из-за частотной зависимости скоростей распространения отдельных спектральных составляющих.

Реальный импульсный сигнал не является простой узкополосной группой, а состоит из целого набора таких групп, каждая из которых распространяется в пространстве со своей групповой скоростью. Пока длина трассы распространения  $L$  достаточно мала, разность времен прихода этих групп в точку приема существенно меньше длительности импульса  $\tau_{\text{И}}$ , так что искажения принятого сигнала невелики (рисунок 6.5). С ростом длины  $L$  эта разность возрастает, что ведет к заметному «расплыванию» импульса на выходе.



а) колебание на входе; б) колебание на выходе при слабых искажениях;  
в) колебание на выходе при сильных искажениях

**Рисунок 6.5 – Процесс «расплывания» импульсных сигналов в диспергирующей среде**

Пусть  $f_{\text{В}}$ ,  $f_{\text{Н}}$  – соответственно верхняя и нижняя частота в пределах спектральной полосы передаваемого радиоимпульса. Данным частотам отвечают скорости высокочастотной и низкочастотной групп  $v_{\text{ГР.В}}$  и  $v_{\text{ГР.Н}}$ . Эффект «расплывания» импульса проявляется ярко в том случае, когда одна из упомянутых групп запаздывает относительно другой на время порядка  $\tau_{\text{И}}$ .

Пример. В бесстолкновительной плазме с параметром  $f_{\text{ПЛ}} = 1.6$  МГц распространяется радиоимпульс, имеющий несущую частоту  $f_0 = 32$  МГц и эффективную ширину спектра  $\Delta f = 1.6$  МГц. Качественно сравнить дисперси-

онные искажения данного колебания, наблюдаемые при длинах трассы  $L = 1$  км и  $L = 100$  км.

Как и ранее, будем приближенно полагать, что энергия радиоимпульса сосредоточена в пределах главного лепестка спектральной диаграммы. Поэтому в данном случае  $f_B = f_0 + \Delta f/2 = 32.8$  МГц,  $f_H = f_0 - \Delta f/2 = 31.2$  МГц.

По формуле (6.31) находим:

$$v_{ГР.В} = c \sqrt{1 - \left(\frac{6.5}{32.8}\right)^2} = 0.980c,$$

$$v_{ГР.Н} = c \sqrt{1 - \left(\frac{6.5}{31.2}\right)^2} = 0.978c.$$

Длительность импульса, оцениваемая по ширине спектра:

$$\tau_H = \frac{1}{\Delta f} = 0.625 \text{ мкс}.$$

Разность времен распространения двух крайних групп:

$$\Delta t = L(v_{ГР.В}^{-1} - v_{ГР.Н}^{-1})$$

составляет 7.3 нс, если  $L = 1$  км и 0.73 мкс, если  $L = 100$  км.

**Вывод.** Так как в первом случае  $\Delta t \ll \tau_H$ , то дисперсионными искажениями при короткой трассе можно обоснованно пренебречь. При длинной трассе  $\Delta t \approx \tau_H$ , так что эффект «расплывания» импульса будет вполне заметным.

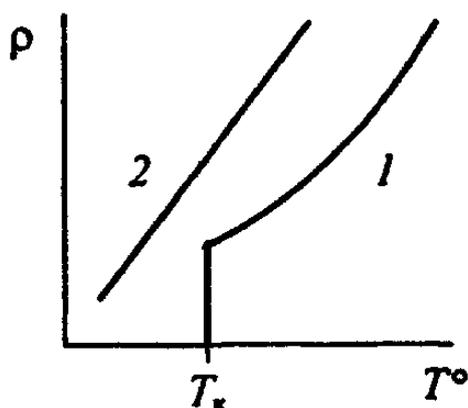
Отметим в заключение, что дисперсия фазовой скорости волн наблюдается не только в плазменной среде, но и в разнообразных искусственных электродинамических системах, таких, как волноводы.

## 7 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ [2,5]

### 7.1 Сверхпроводимость

Особое состояние проводящей среды, возникающее при понижении температуры до некоторой критической, при которой удельное сопротивление среды становится равным нулю с одновременным скачкообразным изменением ее магнитных и тепловых свойств, называют сверхпроводимостью.

При плавном понижении температуры переход из нормального состояния в сверхпроводящее происходит скачком. Этот переход иллюстрируется кривой 1 на рисунке 7.1. По оси абсцисс откладывается температура  $T$ ; по оси ординат – удельное сопротивление  $\rho$ . Кривая 2 – иллюстрация зависимости  $\rho = f(T)$  для обычного проводника.



1 – сверхпроводник; 2 – обычный проводник

**Рисунок 7.1 – Зависимость удельного сопротивления от температуры**

Удельное сопротивление  $\rho$  при переходе от обычного к сверхпроводящему состоянию уменьшается на 14...17 порядков по сравнению с удельным сопротивлением меди при нормальной температуре.

Изучение свойств проводящих сред при низких температурах началось после того, как в 1908 г. в лаборатории нидерландского физика Х. Камерлинг-Онесса в Лейдене был получен жидкий гелий, температура конденсации которого при нормальном давлении составляла 4.1 К. Само явление сверхпроводимости (СП) было открыто в 1911 г., когда Камерлинг-Онесс обнаружил, что при температуре 4 К удельное сопротивление ртути скачком упало до значения меньшего  $10^{-23}$  Ом·см.

Различают низкотемпературную (НТ) и высокотемпературную (ВТ) сверхпроводимости. Низкотемпературная СП наблюдается у относительно плохих проводников, таких как ртуть, ниобий, олово, свинец и сплавы последних, а также у сплавов ниобия с германием, ванадия с галлием и др. СП

наблюдается у них при различных температурах в области 3.7...22.3 К (грубо говоря, при температуре жидкого гелия). У металлов с высокой проводимостью (медь, серебро и др.) СП не обнаружена.

Высокотемпературная СП обнаружена в 1986 г. у металлооксидной керамики при температуре 93...100 К и выше (грубо говоря, при температуре жидкого азота).

Явление НТ СП физически состоит в том, что при низких температурах электронное облако в металле (его называют также электронной жидкостью), взаимодействуя с ионами решетки, так изменяет ее периодическую структуру, что электрон оказывается как бы окруженным облаком положительных зарядов и вследствие этого не отталкивается от другого электрона из-за проявления кулоновских сил, а притягивается к нему. При этом вся электронная система оказывается как бы связанным электронным коллективом, в котором электроны с противоположными спинами попарно образуют связанные (куперовские) пары. Элементы этих пар могут быть удалены друг от друга на расстояния, во много раз превышающие период кристаллической решетки.

Куперовские пары могут находиться в состоянии с одинаковой энергией, при этом частоты их волновых функций будут равны. Эти пары можно рассматривать как совокупность сильно связанных друг с другом осцилляторов, частоты которых одинаковы, а фазы волновых функций синхронизированы. На рисунке 7.2 качественно показано, как изменяется состояние вещества в зависимости от температуры  $T$  и напряженности магнитного поля  $H$ . Кривая имеет вид параболы. Она отделяет сверхпроводящую фазу от нормальной. Таким образом, переход при низких температурах из состояния СП в состояние нормальной проводимости может быть осуществлен при неизменной  $T < T_K$  путем изменения напряженности магнитного поля в образце.

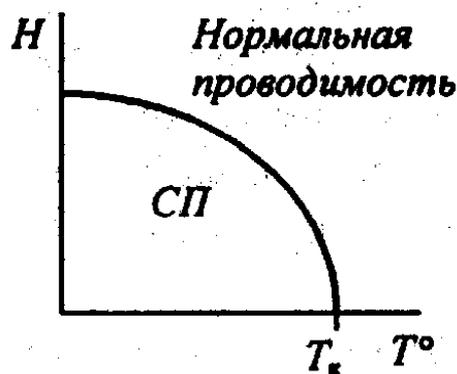


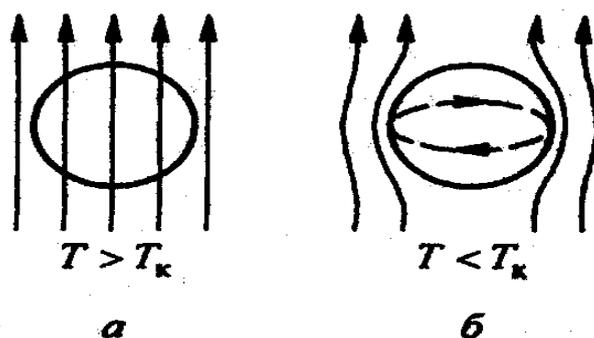
Рисунок 7.2 – Влияние температуры  $T$  и напряженности  $H$

Сверхпроводники по своим магнитным и электрическим свойствам могут быть трех родов.

## 7.2 Сверхпроводники первого рода

Сверхпроводниками первого рода называют такие, по толще которых не может проходить магнитный поток. В то же время по ним может проходить электрический ток, при котором в сверхпроводнике не возникает критическая напряженность поля (при возникновении ее вещество переходит из состояния СП в обычное). Напряженность определяется по закону полного тока. Низкотемпературные сверхпроводники первого рода представляют собой обычно чистые металлы без примесей, например ниобий ( $T_K = 9.22$  К), олово ( $T_K = 3.72$  К), свинец ( $T_K = 7.72$  К). Таким образом, как уже говорилось, в сверхпроводники первого рода внешнее магнитное поле не проникает. Это показано в опыте В. Мейснера и Р. Оксенфельда.

**Сверхпроводники первого рода в магнитном поле.** В 1933 г. Мейснером и Оксенфельдом был проведен опыт, который показал, что сверхпроводники – это не только проводники с чрезвычайно большой (бесконечно большой) проводимостью, но и вещества, у которых имеют место необычные магнитные свойства. Опыт состоял в следующем. Во внешнее постоянное магнитное поле при  $T < T_K$  был помещен шарик из олова (или свинца); магнитные силовые линии проходили через шарик в соответствии с рисунком 7.3, а. Если температуру образца  $T$  сделать меньше критической ( $T < T_K$ ), то образец из обычного состояния переходит в сверхпроводящее. При этом магнитное поле вытесняется из шарика, так что магнитные силовые линии будут теперь как бы обтекать шарик, не заходя внутрь его (рисунок 7.3, б). (Если такой же опыт проделать с обычным проводником, у которого  $\rho > 0$  при понижении температуры, то магнитный поток в нем сохранится неизменным).



а) проводник; б) сверхпроводник

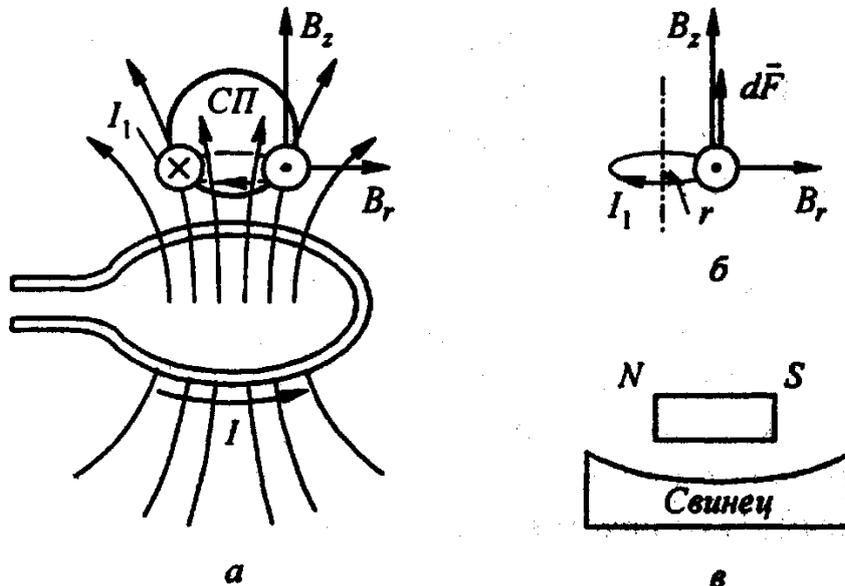
**Рисунок 7.3 – Магнитное поле**

Вытеснение магнитного потока из шарика (шарик был из сверхпроводника первого рода) объясняется тем, что в поверхностном слое шарика на глубине всего около  $10^{-5}$  см возникает поверхностный постоянный ток, незатухающий по числовому значению (показан пунктиром на рисунке 7.3, б), не испытывающий сопротивления и образующий свое собственное магнитное поле, направленное встречно внешнему магнитному полю. Наложение внеш-

него и внутреннего магнитных полей приводит к тому, что результирующее магнитное поле в образце будет отсутствовать.

Можно сказать, что сверхпроводник ведет себя в магнитном поле как идеальный диамагнетик.

Рисунок 7.4, а иллюстрирует применение эффекта Мейсснера и Оксенфельда для устойчивого парения (левитации) сверхпроводящего (СП) тела (шарика) над круговым витком с током  $I$ . Вес шарика уравновешен подъемной силой, возникающей при взаимодействии поверхностного тока по шарика с радиальной составляющей индукции  $B$  на поверхности тела, создаваемой витком с током  $I$ . На узкую полоску сверхпроводящего тела с поверхностным током  $I_1$  действует сила  $dF = I_1 B_z 2\pi r$  (рисунок 7.4, б). Эффект парения обратим. Рисунок 7.4, в иллюстрирует опыт В.К.Аркадьева (1945 г.): постоянный магнит парит над ванной со свинцом, охлажденным жидким гелием.



а), б) СП шарик над витком с током; в) магнит над СП свинцом

Рисунок 7.4 – Эффект левитации

### 7.3 Уравнение Лондонов

В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны предложили систему уравнений для макроскопического описания СП первого рода в электромагнитном поле. Прежде чем записать эти уравнения, отметим, что при температурах выше критической электронная жидкость в проводнике обладает и нормальными и сверхпроводящими свойствами. В соответствии с этим плотность тока обусловлена и нормальными (индекс «н») и сверхпроводящими (индекс «с») свойствами электронов.

Нормальная плотность тока  $\vec{j}_n$  в некоторой точке связана с напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  в этой точке законом Ома:

$$\vec{j}_n = \sigma_H \vec{E}. \quad (7.1)$$

Здесь  $\sigma_H$  – проводимость электронной жидкости, связанная с нормальными свойствами электронов.

Плотность тока, обусловленная сверхпроводящими свойствами электронов,  $\bar{j}_C$ , может быть выражена через заряд электрона  $e$ , скорость движения электронов в электронном облаке  $\bar{v}_C$  и число электронов  $n_C$ , проходящих через единицу поверхности:

$$\bar{j}_C = en_C \bar{v}_C. \quad (7.2)$$

С учетом тока смещения  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  первое уравнение Максвелла можно записать в виде:

$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 \left( \bar{j}_C + \bar{j}_H + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right). \quad (7.3)$$

Ток смещения ничтожно мал по сравнению с  $\bar{j}_C$  и  $\bar{j}_H$ , поэтому его в дальнейшем учитывать не будем. При понижении температуры ниже критической электроны теряют свои свойства в отношении нормальной проводимости и увеличивают свои сверхпроводящие свойства. Поэтому уравнение (7.3) для состояния СП запишем так:

$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{j}_C. \quad (7.4)$$

Сила  $e\bar{E}$ , действующая на электрон, равна произведению массы электрона  $m$  на его ускорение  $\frac{d\bar{v}_C}{dt}$ , т.е.:

$$m \frac{d\bar{v}_C}{dt} = e\bar{E}. \quad (7.5)$$

Если во второе уравнение Максвелла  $\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$  подставить  $\bar{E}$  из (7.1), а значение  $\bar{v}_C$  взять из (7.2), то будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{e^2 n_C} \text{rot} \bar{j}_C + \bar{B} \right) = 0.$$

Лондоны предположили, что выражение в скобках равно нулю, т.е.:

$$\text{rot} \bar{j}_C = -\frac{e^2 n_C}{m} \bar{B}. \quad (7.6)$$

Уравнения (7.4) и (7.6) получены из уравнений Максвелла для сверхпроводящей среды. Их в литературе называют уравнениями Лондонов.

#### 7.4 Сверхпроводящее тело в постоянном магнитном поле.

Возьмем ротор от обеих частей уравнений (7.4):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \bar{j}_C.$$

В правую часть полученного уравнения подставим (7.6). Имеем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{B} - \nabla^2 \bar{B} = \mu_0 \left( -\frac{e^2 n_c}{m} \bar{B} \right). \quad (7.7)$$

Учитывая, что  $\operatorname{div} \bar{B} = 0$ , получим:

$$\nabla^2 \bar{B} = \mu_0 \left( \frac{e^2 n_c}{m} \bar{B} \right). \quad (7.8)$$

Решим уравнение (7.8) для случая, когда в постоянное во времени магнитное поле помещено сверхпроводящее тело первого рода. Положим, что индукция внешнего магнитного поля  $\bar{B}$  параллельна поверхности этого тела, что тело имеет плоскую границу (случай плоской одномерной задачи). Тогда (рисунок 7.5, а) поле будет функцией одной координаты. Индукцию в сверхпроводящем теле при  $z = 0$  обозначим  $\bar{B}(0)$ . Кроме того, обозначим:

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 n_c e^2}. \quad (7.9)$$

В литературе  $\lambda_L$  получила название *лондоновской длины*.

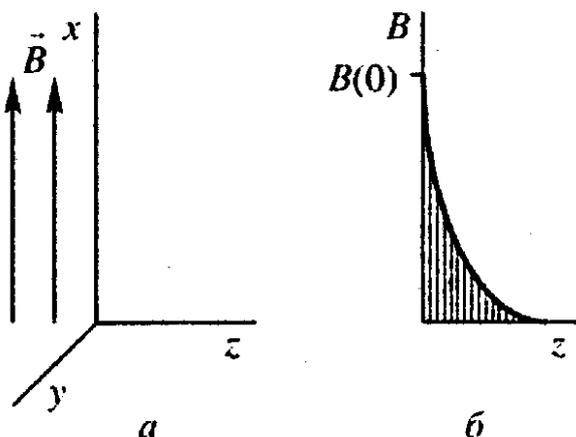
Тогда уравнение (7.8) для модуля  $B$  запишем так:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B. \quad (7.10)$$

Учитывая граничное условие и протяженность тела в направлении оси  $z$ , запишем решение уравнения (7.10):

$$B = B(0) e^{-z/\lambda_L}, \quad (7.11)$$

т.е. постоянное магнитное поле в направлении координаты  $z$  затухает по экспоненте рисунок 7.5, б.



**Рисунок 7.5 – Магнитное поле в СП**

Коэффициент  $\lambda_L$  имеет смысл глубины проникновения постоянного во времени поля в среду СП. На глубине  $z = \lambda_L$  индукция снизится по сравнению с индукцией на поверхности тела в  $e = 2.7182$  раза.

Если подставить значения  $\mu_0$ ,  $m$ ,  $n_C$ ,  $e$  в формулу (7.9), то, например для олова, при  $T = 0$  К  $\lambda_L = 5.1 \cdot 10^{-6}$  см, т.е. магнитное поле проникает в сверхпроводник первого рода на ничтожную глубину, а в толще его магнитное поле отсутствует.

Плотность сверхпроводящего тока определим по (7.4):

$$\vec{j}_C = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B}; \quad \vec{v}_C = \vec{j} \frac{dB_x}{dz}; \quad \vec{v}_C = \left( -\frac{1}{\lambda_L \mu_0} \right) B(0) e^{-z/\lambda_L}.$$

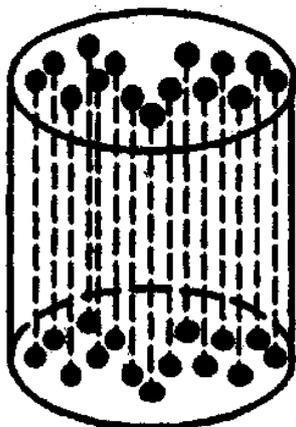
Теория Лондонов справедлива качественно. Экспериментальное и теоретическое значения  $\lambda_L$  различаются в 2...3 раза. В дальнейшем современная микроскопическая теория низкотемпературной СП была создана в 1957 г. Дж. Бардиным, Л. Купером и Дж. Шриффером – теория БКШ (название теории по первым буквам фамилий авторов).

## 7.5 Сверхпроводники второго рода.

Сверхпроводники второго рода обладают таким свойством: если их поместить во внешнее магнитное поле, то в некоторой области значений индукции внешнего поля ( $B_{K1} < B < B_{K2}$ ) оно частично проникает в толщу проводника за счет того, что в нем образуются тонкие нити магнитных потоков, расположенных по внешнему магнитному полю (рисунок 7.6). Эти нити в сечении сверхпроводника расположены по углам равносторонних треугольников.

По каждой нити проходит обычно один квант магнитного потока  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ , где

$h$  – постоянная Планка, а  $e$  – заряд электрона; числовое значение  $\Phi_0$  равно  $2.07 \cdot 10^{-15}$  Вб.



**Рисунок 7.6 – Магнитные нити в СП второго рода**

Каждая магнитная нить окружена вращающимися вокруг нее электронами, которые создают в ней магнитное поле. Магнитные нити находятся в

состоянии нормальной проводимости, а вещество между нитями – в состоянии сверхпроводимости.

Если интенсивность внешнего магнитного поля увеличивать при  $B > B_{K1}$ , то число магнитных нитей растет, нити сближаются и при некоторой  $B = B_{K2}$ , когда расстояние между нитями становится равным приблизительно  $10^{-4}$  см, сверхпроводящее состояние образца разрушается, и он целиком переходит в нормальное проводящее состояние.

Состояние образца, когда у него сочетаются сверхпроводящие области с областями нормальной проводимости, называют смешанным состоянием или шубниковской фазой (по имени русского физика Л.В. Шубникова).

Если вдоль сверхпроводника второго рода пропустить ток от внешнего источника (так называемый транспортный ток, он пойдет по областям СП), то вследствие механического взаимодействия тока с нитями магнитного потока последние придут в движение и нитевидная структура разрушится. Таким образом, по толще сверхпроводников второго рода в отличие от сверхпроводников первого рода может проходить магнитный поток, но не может проходить транспортный ток.

Низкотемпературные сверхпроводники второго рода изготавливают из сплавов металлов, например, из сплава свинца с висмутом (чистый свинец – сверхпроводник первого рода).

## 7.6 Сверхпроводники третьего рода

Низкотемпературные сверхпроводники третьего рода (или жесткие проводники) так же, как и сверхпроводники второго рода, изготавливают из сплавов металлов, но образцы должны иметь крупные неоднородности.

В этом случае магнитные нити, о которых шла речь в предыдущем параграфе, как бы закрепляются на неоднородностях (это явление называется *пиннингом*). При этом если по сверхпроводнику пропускать небольшой транспортный ток, то магнитные нити благодаря их закреплению не приходят в движение и структура не разрушается. Если транспортный ток увеличивать, то при достижении им некоторого критического значения нити магнитных потоков сорвутся с закреплений и весь образец перейдет в состояние нормальной проводимости.

Значение критического тока зависит от размера и количества неоднородностей в сверхпроводнике (причем неоднородности не должны быть точечными), температуры, интенсивности внешнего магнитного поля и механической обработки, которой подвергается образец. Таким образом, по сверхпроводникам третьего рода при выполнении определенных условий могут проходить и магнитный поток, и транспортный ток.

## 7.7 Высокотемпературная сверхпроводимость

Как уже говорилось, низкотемпературная СП наблюдается при температурах в диапазоне 3.7...22.3 К (сплав ниобия с германием  $Nb_3Ge$ ). Во всех случаях в качестве охладителя нужен жидкий гелий.

Открытие СП при относительно высоких температурах 93...100 К (температура жидкого азота) в металлооксидной керамике явилось как бы вторым рождением СП, очень важным в экономическом отношении, так как жидкий азот примерно в 200 раз дешевле жидкого гелия. Основой для изготовления металлооксидной керамики служат тонкодисперсионные порошки, содержащие такие компоненты, как барий, лантан, иттрий, медь, кислород, скандий, стронций, фтор и др.

В настоящее время общепринятого объяснения физического механизма ВТ СП в металлооксидной керамике нет. Предложено три теории: биполярная, экситонная, магнитная.

Согласно биполярной теории основную роль выполняют новые частицы – биполяроны. Они отличны от куперовских пар, которые исчезают при переходе сверхпроводника в нормальное состояние. Биполяроны ведут себя как газ независимых частиц, которые при некоторой критической температуре «конденсируются» и переходят в когерентное состояние, подобно тому, как переходит в сверхтекучее состояние жидкий гелий.

Экситонная теория ВТ СП в металлооксидной керамике объясняет объединение электронов в пары влиянием квазичастиц экситонов, которые, как и кванты колебаний смещений решетки – фононы, существуют в конденсированной среде.

Расчеты зон существования и масс спаренных частиц и при биполярной и при экситонной теориях дают существенные расхождения с результатами экспериментов.

Магнитная теория высокотемпературной сверхпроводимости основана, грубо говоря, на магнитных флуктуациях конгломерата спаренных частиц.

Несмотря на то, что механизм ВТ СП пока окончательно не установлен, практические работы по созданию эффективной технологии изготовления пленок, проволоки и лент из мелкозернистой металлокерамики ведутся весьма интенсивно. Как для НТ СП, так и для ВТ СП существуют определенные проблемы: поддержание стабильности свойств в отношении критической температуры  $T_K$ , значения транспортного тока, уменьшения влияния старения, хрупкости, радиационного облучения и других факторов. Исследуются вопросы создания сплошных (не зернистых) ВТ СП.

## 7.8 Применение сверхпроводников

Наиболее широко применяются сверхпроводники в сверхмощных магнитах, которые могут создавать магнитные поля с индукцией в 10 и даже 20 Тл. Такие магниты используют в физике элементарных частиц, в термоядерном синтезе, при создании магнитогидродинамических генераторов, магнитных насосов и других устройств. Так как сопротивление обмоток этих магнитов равно нулю, то тепловая энергия в обмотках при протекании постоянного тока не выделяется, и при работе энергия расходуется лишь на получение жидкого гелия, а в перспективе – жидкого азота, в котором находится магнит.

Уже существуют поезда на магнитной подушке (левитирующие поезда). Поезд висит над рельсами на высоте 20...30 см и перемещается без трения о рельсы. Созданы образцы бесшумных морских судов с двигателями реактивного типа (проводником является морская вода в канале судна, а магнитное поле создается сверхпроводящим магнитом). Обсуждаются проекты шоссейных дорог для левитирующих автомобилей.

Явление сверхпроводимости применяется также в радиотехнике, вычислительной и измерительной технике, в трансформаторо- и электромашиностроении. Если объемный резонатор поместить в жидкий гелий, то потери в стенках резонатора становятся ничтожно малыми, вследствие чего добротность его возрастает в тысячи раз.

В основу принципа действия сверхчувствительных магнитометров положен эффект квантования магнитного потока в сверхпроводниках второго рода.

Интенсивно идут работы по созданию сверхпроводящих силовых кабелей с жилами из ниобия или свинца.

Однако в настоящее время основное применение ВТ СП металлокерамики – в микроэлектронике и вычислительной технике. Охлаждение до температуры жидкого азота снижает также уровень шумов в радиотехнических и радиоэлектронных схемах.

При применении сверхпроводников особое значение придается надежному функционированию системы подачи жидкого гелия (азота).

## 8 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ [1-4]

### 8.1 Общие свойства феррита

Ферритами называют особую группу веществ, которые одновременно обладают магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами диэлектриков ( $\epsilon = 5 \dots 20$ ). В отличие от ферромагнитных металлов ферриты имеют весьма малую удельную проводимость ( $\sigma = 10^{-6} \dots 10^{-4} \text{См/м}$ ), и электромагнитные волны распространяются через них с небольшим затуханием. Совокупность целого ряда ценных свойств обуславливает широкое применение ферритов в радиотехнике.

В ненамагниченном состоянии феррит, как и любой другой ферромагнетик, представляет собой конгломерат большого числа областей, магнитные моменты которых ориентированы в различных направлениях. Под воздействием переменного электромагнитного поля магнитные моменты этих областей отклоняются от первоначального положения в направлении вектора  $\vec{H}$ . В результате этого появляется суммарный магнитный момент единицы объема (т.е. вектор магнитной поляризации), совпадающий по направлению с вектором напряженности внешнего поля, поскольку магнитная восприимчивость и связанная с ней магнитная проницаемость являются скалярными величинами. Поэтому свойства ненамагниченного феррита для переменных полей любого направления оказываются одинаковыми, и распространение электромагнитных волн в нем происходит точно так же, как и в любой другой изотропной среде.

### 8.2 Физический механизм анизотропии ферритов. Уравнение движения намагниченности

Ферриты представляют собой твердые вещества, подобные керамике. Их получают искусственно, проводя высокотемпературное спекание оксида железа с соединением какого-либо двухвалентного металла, например Zn, Ba, Sr и т.д. Условная химическая формула феррита имеет вид  $M_n(\text{Fe}_2\text{O}_3)_n$ , где символом M обозначен ион двухвалентного металла.

При комнатной температуре электроны всех атомов, входящих в кристаллическую решетку феррита, прочно удерживаются обменными силами. Поэтому концентрация электронов в зоне проводимости весьма мала и ферриты в отличие от металлов проявляют четко выраженные свойства изолятора.

Классические представления, основанные на понятии молекулярных токов, недостаточны для объяснения электромагнитных явлений в ферритах.

Приходится использовать квантово-механические понятия. Квантовая теория магнетизма веществ основана на том факте, что последний электрон в оболочке иона двухвалентного металла обладает магнитным и механическим моментами, или, как говорят в физике, такой электрон имеет спин.

Как известно, характеристикой тела, находящегося во вращательном движении, служит момент импульса.

Рассмотрим вращающуюся материальную точку массой  $m$ , имеющую скорость  $\bar{v}$  (рисунок 8.1). Если через  $\bar{r}$  обозначить радиус-вектор точки относительно центра вращения, то, по определению, момент импульса данной точки относительно центра вращения:

$$\bar{L} = [\bar{r}(m\bar{v})]. \quad (8.1)$$

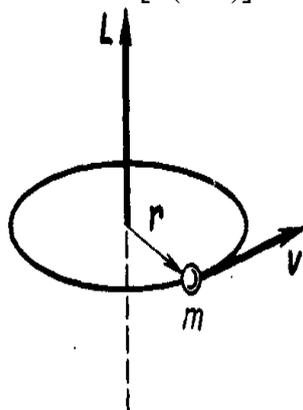


Рисунок 8.1 – Вектор момента количества движения

Ясно, что вектор  $\bar{L}$  перпендикулярен плоскости орбиты точки.

Если на точку действует некоторая сила  $\bar{F}$ , то справедлив закон Ньютона:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}). \quad (8.2)$$

Векторно умножив левую и правую части равенства (8.2) на радиус-вектор  $\bar{r}$ , получим:

$$[\bar{r}\bar{F}] = \frac{d}{dt}[\bar{r}(m\bar{v})]. \quad (8.3)$$

Величину:

$$\bar{K} = [\bar{r}\bar{F}] \quad (8.4)$$

называют моментом силы относительно выбранной оси вращения. Воспользовавшись этим понятием, можно переписать уравнение (8.3) таким образом:

$$\bar{K} = \frac{d}{dt}\bar{L}. \quad (8.5)$$

Пусть имеется некоторое материальное тело конечных размеров. Если это тело может силовым образом взаимодействовать с постоянным магнитным полем, то говорят, что оно обладает некоторым магнитным моментом  $\bar{m}$ . Данный вектор имеет физическую размерность  $A/m^2$  и перпендикулярен

плоскости воображаемого элементарного витка с током. В квантовой механике установлена числовая связь между магнитным моментом электрона  $\bar{m}$  и его моментом импульса  $\bar{L}$ . Теоретически и экспериментально показано, что:

$$\bar{m} = -\gamma\bar{L}, \quad (8.6)$$

где  $\gamma$  – величина, равная отношению заряда электрона к его массе, и называется гиромагнитным отношением электрона. Отрицательный знак в формуле (8.6) указывает на то, что в пространстве векторы  $\bar{m}$  и  $\bar{L}$  антипараллельны.

Уравнение движения намагниченности. Предположим теперь, что образец феррита помещен в постоянное магнитное поле  $\bar{H}_0$ , ориентированное произвольным образом и называемое подмагничивающим полем. В курсе физики доказывается, что любая система, обладающая магнитным моментом, стремится занять такое положение, чтобы векторы  $\bar{m}$  и  $\bar{H}_0$  стали параллельными. При таком положении потенциальная энергия магнитной системы оказывается минимальной.

Можно показать, что момент силы, действующей на систему в магнитном поле:

$$\bar{K} = \mu_0[\bar{m}\bar{H}_0]. \quad (8.7)$$

Подставив это выражение в формулу (8.5) и учитывая соотношение (8.6), приходим к дифференциальному уравнению, которое описывает динамику вектора магнитного момента электрона:

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = -\mu_0\gamma[\bar{m}\bar{H}_0]. \quad (8.8)$$

Предположим, что в единице объема феррита содержится  $N$  элементарных магнитных систем (валентных электронов). Тогда, введя вектор намагниченности  $\bar{M} = \bar{m}N$ , из (8.8) получаем уравнение движения намагниченности:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\mu_0\gamma[\bar{M}\bar{H}_0]. \quad (8.9)$$

Частота ферромагнитного резонанса. Пусть для определенности постоянное подмагничивающее поле  $\bar{H}_0$  ориентировано вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, так что  $\bar{H}_0 = H_0\bar{i}_z$ . Вектор намагниченности является суммой составляющих по трем пространственным осям:

$$\bar{M} = M_x\bar{i}_x + M_y\bar{i}_y + M_z\bar{i}_z. \quad (8.10)$$

Подставив это разложение в (8.9), получаем систему трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= -\mu_0\gamma H_0 M_y, \\ \frac{dM_y}{dt} &= \mu_0\gamma H_0 M_x, \\ \frac{dM_z}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (8.11)$$

которая описывает свободное движение вектора намагниченности в феррите, происходящее без внешних возбуждающих сил.

Следует заметить, что в системе (8.11) третье уравнение, по сути дела, никак не связано с первыми двумя и просто означает, что  $M_S = \text{const}$ . В теории ферритов часто приближенно считают, что продольная (вдоль поля  $\vec{H}_0$ ) проекция  $M_S$  равна, так называемой, намагниченности насыщения (от английского, saturation – насыщение). Это означает, что все элементарные магнитные моменты ионов ориентированы вдоль направления подмагничивающего поля. Значения  $M_S$  оказываются различными у ферритов разных марок и приводятся в справочниках по радиотехническим материалам.

Обращаясь теперь к системе двух первых уравнений из (8.11), дополним ее некоторыми начальными условиями:

$$M_x|_{t=0} = M_{x0}; \quad M_y|_{t=0} = M_{y0},$$

где  $M_{x0}$  и  $M_{y0}$  – произвольные постоянные величины, характеризующие состояние вещества при  $t = 0$ . Совокупность уравнений (8.11) и начальных условий образует, так называемую, задачу Коши для рассматриваемых линейных дифференциальных уравнений. Подобные задачи встречаются в теории цепей, где они описывают процессы собственных колебаний.

Продифференцировав первое уравнение из (8.11) по времени и воспользовавшись вторым уравнением, можно исключить неизвестную  $M_y$  и получить уравнение второго порядка относительно проекции  $M_x$ :

$$\frac{d^2 M_x}{dt^2} + \omega_p^2 M_x = 0. \quad (8.12)$$

Входящий сюда параметр  $\omega_p = \mu_0 \gamma H_0$  называют частотой ферромагнитного резонанса.

Уравнение (8.12) представляет собой хорошо известное уравнение гармонического осциллятора, которое в физике описывает свободные колебания в динамических системах второго порядка без потерь. Будем искать решение этого уравнения как сумму двух гармонических слагаемых с не известными пока амплитудными коэффициентами:

$$M_x(t) = A \cos \omega_p t + B \sin \omega_p t. \quad (8.13)$$

Прямая подстановка убеждает в том, что выражение (8.13) действительно служит решением уравнения (8.12).

В соответствии с первым уравнением из системы (8.11):

$$M_y = -\frac{1}{\omega_p} \frac{dM_x}{dt} = A \sin \omega_p t - B \cos \omega_p t. \quad (8.14)$$

Подставив значение  $t = 0$  в равенства (8.13) и (8.14), а также используя начальные условия, находим, что  $A = M_{x0}$ ,  $B = M_{y0}$  и поэтому:

$$\begin{aligned} M_x(t) &= M_{x0} \cos \omega_p t - M_{y0} \sin \omega_p t, \\ M_y(t) &= M_{x0} \sin \omega_p t + M_{y0} \cos \omega_p t. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Чтобы, уяснить физический смысл полученного результата, заметим, что:

$$M_x^2 + M_y^2 = M_{x0}^2 + M_{y0}^2 = \text{const}, \quad (8.16)$$

т.е. при свободных колебаниях вектор  $\bar{M}$  перемещается в пространстве таким образом, что его конец описывает окружность постоянного радиуса (рисунок 8.2). Из рисунка видно, что вектор  $\bar{M}$  всегда параллелен образующей конуса с высотой  $M_S$ . Вращение вектора происходит с резонансной частотой, а направление вращения зависит от начальных условий.

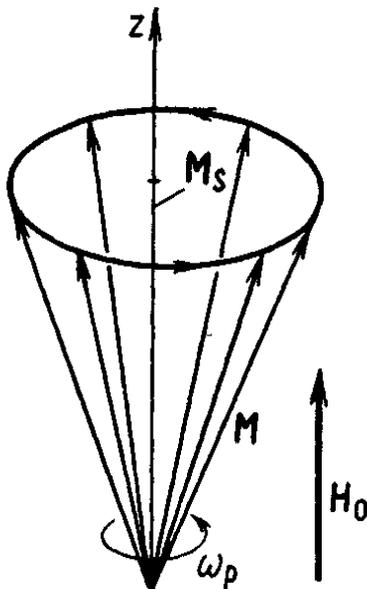


Рисунок 8.2 – Свободное движение вектора

Движения такого вида часто встречаются в природе. Примерами могут служить круговое движение грузика, подвешенного на нерастяжимой нити, а также вращательное движение оси волчка, наблюдаемое в том случае, если внезапно возникает сила, действующая перпендикулярно оси вращения. В теории гироскопов такое движение волчка называют прецессией. По аналогии говорят, что рассмотренное явление в намагниченном феррите является свободной прецессией вектора намагниченности.

Частота  $\omega_p$  зависит от напряженности подмагничивающего поля  $\bar{H}_0$  и может оказаться весьма высокой. Например, если индукция подмагничивающего поля  $B_0 = 1.5$  Тл (такое поле можно создать с помощью мощного постоянного магнита), то:

$$\omega_p = \mu_0 \gamma H_0 = \gamma B_0 = 2.64 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \text{ или } f_p = 4.2 \cdot 10^{10} \text{ Гц} = 42 \text{ ГГц.}$$

Этой частоте соответствует длина волны  $\lambda_0 = 7.14$  мм, т.е. собственные колебания вектора намагниченности происходят в миллиметровом диапазоне.

Влияние затухания. Физически ясно, что амплитуда свободных колебаний вектора намагниченности с течением времени должна уменьшаться из-за неизбежных потерь, как показано на рисунке 8.3. Было предложено описы-

вать потери в намагниченной среде, введя дополнительные члены в уравнения движения:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= -\omega_p M_y - \frac{M_x}{T}, \\ \frac{dM_y}{dt} &= \omega_p M_x - \frac{M_y}{T}.\end{aligned}\quad (8.17)$$

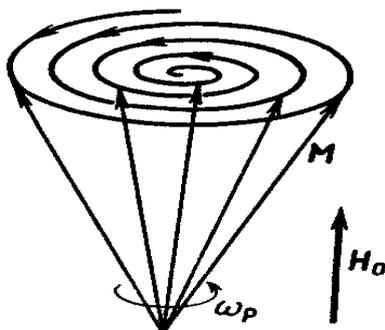


Рисунок 8.3 – Влияние потерь на  $\bar{M}$

Уравнения вида (8.17) называют уравнениями Блоха. Входящий в них параметр  $T$  представляет собой время релаксации свободных колебаний вектора намагниченности. Значения  $T$  находят экспериментально, изучая, например, отклик среды на внешнее воздействие вида короткого импульса или снимая амплитудно-частотную характеристику системы.

Недостаток уравнений Блоха состоит в том, что они введены чисто феноменологически, без обсуждения физического механизма возникновения потерь в феррите. Более последовательным оказывается подход, основанный на векторном уравнении движения намагниченности в форме Ландау-Лифшица:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -\mu_0 \gamma [\bar{M}\bar{H}_0] - \mu_0 \alpha \frac{[\bar{M}[\bar{M}\bar{H}_0]]}{M^2}.\quad (8.18)$$

Второе слагаемое правой части обычно называют диссипативным членом уравнения; параметр  $\alpha$  определяют экспериментально.

### 8.3 Тензор магнитной проницаемости намагниченного феррита

Рассмотрим случай, когда в однородной бесконечно протяженной ферритовой среде помимо постоянного магнитного поля с вектором напряженности  $\bar{H}_0$  существует высокочастотное магнитное поле  $\bar{H}_1$ , гармонически изменяющееся во времени с частотой  $\omega$ . Полагая, что вектор  $\bar{H}_0$  ориентирован вдоль оси  $z$ , запишем суммарное магнитное поле:

$$\bar{H} = H_0 \bar{i}_z + \bar{H}_1.\quad (8.19)$$

Если феррит находится в режиме насыщения, то соответствующий вектор намагниченности будет иметь вид:

$$\bar{M} = M_S \bar{i}_z + \bar{M}_1, \quad (8.20)$$

где  $\bar{M}_1$  – переменная составляющая вектора намагниченности, вызванная наличием высокочастотного магнитного поля.

В дальнейшем будем рассматривать часто встречающийся на практике случай малого высокочастотного сигнала, когда выполняются следующие неравенства:

$$\frac{H_1}{H_0} \ll 1; \quad \frac{M_1}{M_0} \ll 1.$$

Ставится задача на основе уравнения движения вектора намагниченности найти связь между векторами  $\bar{H}_1$  и  $\bar{M}_1$ . Чтобы упростить решение, воспользуемся приближением малого сигнала, пренебрегая в правой части уравнения движения произведением малых величин вида  $M_1 H_1$ , которое имеет второй порядок малости. Подставив соотношения (8.19) и (8.20) в правую часть исходного уравнения (8.9) и используя комплексную форму представления гармонических полей, будем иметь:

$$j\omega \dot{\bar{M}}_1 = -\mu_0 \gamma [\dot{\bar{M}}_1 \dot{\bar{H}}_0] - \mu_0 \gamma [\dot{\bar{M}}_S \dot{\bar{H}}_1]. \quad (8.21)$$

Если записать векторные произведения в координатном виде и произвести упомянутое выше упрощение, то векторное уравнение (8.21) окажется эквивалентным системе двух скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} j\omega \dot{\bar{M}}_{1x} &= -\omega_p \dot{\bar{M}}_{1y} + \omega_S \dot{\bar{H}}_{1y}, \\ j\omega \dot{\bar{M}}_{1y} &= -\omega_p \dot{\bar{M}}_{1x} + \omega_S \dot{\bar{H}}_{1x}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\omega_p = \mu_0 \gamma \bar{H}_0$  – уже встречавшаяся ранее частота ферромагнитного резонанса (частота свободной прецессии вектора намагниченности феррита);  $\omega_S = \mu_0 \gamma \bar{M}_S$  – вспомогательный расчетный параметр, имеющий размерность частоты. Отметим, что система (8.22) содержит только два уравнения, так как из (8.21) следует, что в первом приближении высокочастотная часть продольной проекции вектора намагниченности  $\dot{\bar{M}}_{1z}$  обращается в нуль.

Предположим, что проекции переменного магнитного вектора  $\dot{\bar{H}}_{1x}$  и  $\dot{\bar{H}}_{1y}$  тем или иным образом заданы. Тогда равенства (8.22) становятся системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных амплитуд  $\dot{\bar{M}}_{1x}$  и  $\dot{\bar{M}}_{1y}$ . Решение этой системы имеет следующий вид:

$$\dot{\bar{M}}_{1x} = -\frac{\omega_p \omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{\bar{H}}_{1x} - \frac{j\omega \omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{\bar{H}}_{1y},$$

$$\dot{\vec{M}}_{1y} = \frac{j\omega\omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{\vec{H}}_{1x} - \frac{\omega_p\omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2} \dot{\vec{H}}_{1y}. \quad (8.23)$$

Безразмерные коэффициенты в правых частях равенств (8.23) по своему физическому смыслу соответствуют введенной ранее магнитной восприимчивости. Используя обозначения:

$$k_M = \frac{\omega_p\omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2}; \quad k' = \frac{\omega\omega_S}{\omega^2 - \omega_p^2}, \quad (8.24)$$

запишем полную систему уравнений, связывающих между собой проекции высокочастотного магнитного поля  $\dot{\vec{H}}_1$  и высокочастотной намагниченности  $\dot{\vec{M}}_1$ , возбуждаемой этим полем:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{M}}_{1x} &= -k_M \dot{\vec{H}}_{1x} - jk'_M \dot{\vec{H}}_{1y} + 0 \cdot \dot{\vec{H}}_{1z}, \\ \dot{\vec{M}}_{1y} &= jk'_M \dot{\vec{H}}_{1x} - k_M \dot{\vec{H}}_{1y} + 0 \cdot \dot{\vec{H}}_{1z}, \\ \dot{\vec{H}}_{1z} &= 0 \cdot \dot{\vec{H}}_{1x} + 0 \cdot \dot{\vec{H}}_{1y} + 0 \cdot \dot{\vec{H}}_{1z}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Система уравнений (8.25) дает возможность образовать таблицу из девяти чисел (отличными от нуля оказываются лишь четыре):

$$\vec{k}_M = \begin{pmatrix} -k_M & -jk'_M & 0 \\ jk'_M & -k_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

которую называют тензором магнитной восприимчивости намагниченного феррита. С математической точки зрения таблица (8.26) представляет собой матрицу: закон образования декартовых проекций вектора  $\dot{\vec{M}}_1$  соответствует обычным правилам умножения матрицы  $\vec{k}_M$  на вектор-столбец  $\dot{\vec{H}}_1$ .

Воспользовавшись введенным ранее определением, можно выразить вектор высокочастотной магнитной индукции  $\dot{\vec{B}}_1$  через напряженность магнитного поля  $\dot{\vec{H}}_1$  и намагниченность  $\dot{\vec{M}}_1$ :

$$\dot{\vec{B}}_1 = \mu_0 (\dot{\vec{H}}_1 + \dot{\vec{M}}_1). \quad (8.27)$$

Учитывая, что комплексные амплитуды связаны между собой тензором магнитной восприимчивости  $\vec{k}_M$ , соотношение (8.27) можно также представить в тензорном виде:

$$\dot{\vec{B}}_1 = \mu_0 \vec{\mu} \dot{\vec{H}}_1, \quad (8.28)$$

где  $\vec{\mu}$  – тензор относительной магнитной проницаемости намагниченного феррита, представляемый следующей матрицей:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -j\mu' & 0 \\ j\mu' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

Связь между компонентами обоих тензоров такова:

$$\mu = 1 - k_M; \quad \mu' = k'_M. \quad (8.30)$$

Материальные среды с тензором магнитной проницаемости вида (8.29) называют гиротропными средами. Данный термин подчеркивает связь механизма возникновения анизотропии магнитных свойств с прецессией вектора намагниченности. В литературе тензор вида (8.29) часто называют тензором Полдера. Перечислим его основные свойства.

При отсутствии потерь в веществе диагональные компоненты тензора Полдера действительные, а внедиагональные – чисто мнимые, причем всегда  $\mu_{ij} = \mu_{ji}^*$ .

Отличные от нуля компоненты зависят от напряженности подмагничивающего поля и от частоты колебаний. Последнее означает, что намагниченный феррит является материальной средой с частотной дисперсией фазовой скорости.

На частоте ферромагнитного резонанса компоненты тензора Полдера испытывают разрыв. Это связано с тем, что примененная нами модель не учитывает эффекта затухания прецессии из-за потерь. Поэтому, строго говоря, полученные результаты справедливы лишь на частотах, не слишком близких к частоте ферромагнитного резонанса.

#### 8.4 Уравнения Максвелла в гиротропной среде

Проследим, как изменяется форма записи уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные процессы в материальной среде с гиротропными свойствами. Как уже отмечалось, будем полагать, что относительная диэлектрическая проницаемость вещества  $\varepsilon$  – обычная скалярная величина, в то время как относительная магнитная проницаемость  $\tilde{\mu}$  – тензор, задаваемый формулой (8.29). Запишем систему из двух первых уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд напряженностей полей:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}, \quad (8.31)$$

$$\text{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \tilde{\mu}_0 \dot{\vec{H}}. \quad (8.32)$$

Здесь для простоты считается, что сторонние электрические и магнитные токи отсутствуют, т.е. данные уравнения описывают свободные колебания поля в магнитно-анизотропной среде.

Переходя к координатной форме записи, отсюда имеем следующие системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x,$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{H}}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\vec{H}}_x}{\partial z} = -j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_y, \quad (8.33)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\vec{H}}_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_z.$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_y}{\partial z} = -j\omega \mu_0 \mu \dot{\vec{H}}_x - \omega \mu_0 \mu' \dot{\vec{H}}_y,$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}_z}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial z} = -\omega \mu_0 \mu' \dot{\vec{H}}_x, \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\vec{E}}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_0 \dot{\vec{H}}_z.$$

Таким образом, конфигурация электромагнитного поля в гиротропной среде может оказаться весьма сложной. Поэтому сделаем в дальнейшем ряд упрощающих предположений относительно геометрических особенностей решаемых задач. Это, прежде всего, касается выбора направления распространения волн по отношению к ориентации вектора постоянного подмагничивающего поля. Будет показано, что в гиротропной среде наблюдаются специфические волновые эффекты, не свойственные простым изотропным средам и делающие гиротропные материалы весьма ценными с точки зрения возможности создания устройств СВЧ-диапазона.

## 8.5 Поперечное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите

Рассмотрим идеализированную задачу о распространении однородной плоской электромагнитной волны в неограниченной гиротропной среде при условии, что волна распространяется в направлении, перпендикулярном вектору постоянного подмагничивающего поля  $\vec{H}_0$ . Для краткости будем говорить, что при этом происходит поперечное распространение волны.

Пусть по-прежнему вектор  $\vec{H}_0$  ориентирован вдоль положительного направления оси  $z$ . Предположим, что плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $x$ , так что все проекции векторов поля имеют комплексные амплитуды, пропорциональные множителю  $\exp(-j\beta x)$ , где  $\beta$  – некоторый коэффициент фазы (продольное волновое число). Будем считать также, что электромагнитное поле однородно в любой плоскости, параллельной плоскости  $YOZ$ , и поэтому  $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ .

Предположим вначале, что магнитный вектор плоской волны имеет единственную отличную от нуля проекцию  $\dot{\vec{H}}_z$ , в то время как  $\dot{\vec{H}}_x = \dot{\vec{H}}_y = 0$ .

Тогда из первого уравнения системы (8.33) следует, что  $\dot{\vec{E}}_x = 0$ , а из третьего уравнения той же системы вытекает, что  $\dot{\vec{E}}_z = 0$ . Таким образом, волновой процесс характеризуется лишь двумя комплексными амплитудами  $\dot{\vec{H}}_z$  и  $\dot{\vec{E}}_y$ , которые удовлетворяют системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{\vec{H}}_z}{dx} &= -j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}_y, \\ \frac{d\dot{\vec{E}}_y}{dx} &= -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}}_z.\end{aligned}\quad (8.35)$$

Заметим, что здесь использованы символы не частных, а обыкновенных производных, так как векторы поля зависят лишь от координаты  $x$ .

Если теперь из уравнений (8.35) исключить одно неизвестное, скажем  $\dot{\vec{E}}_y$ , продифференцировав первое уравнение по  $x$ , то приходим к уравнению Гельмгольца:

$$\frac{d^2\dot{\vec{H}}_z}{dx^2} + \omega^2\varepsilon_a\mu_0\dot{\vec{H}}_z = 0. \quad (8.36)$$

Одно из линейно независимых решений такого уравнения описывает однородную плоскую волну, которая распространяется в сторону увеличения координаты  $x$ :

$$\dot{\vec{H}}_z = \dot{\vec{H}}_m e^{-j\beta x}, \quad (8.37)$$

где  $\dot{\vec{H}}_m$  – произвольный амплитудный коэффициент;  $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}$  – коэффициент фазы. Такую волну, ничем не отличающуюся от плоской электромагнитной волны в однородной изотропной среде с электродинамическими параметрами  $\varepsilon_a$  и  $\mu_0$ , называют обыкновенной волной.

Рассмотрим теперь другую электромагнитную волну, также распространяющуюся в поперечном направлении вдоль координаты  $x$ , но с иной поляризацией, а именно будем считать, что электрический вектор такой волны имеет единственную отличную от нуля проекцию  $E_z$ . В этом случае из третьего уравнения системы (8.34) следует, что  $\dot{\vec{H}}_z = 0$ . Кроме того, в соответствии с первым уравнением данной системы проекции  $\dot{\vec{H}}_x$  и  $\dot{\vec{H}}_y$  связаны линейным соотношением:

$$j\omega\dot{\vec{H}}_x + \mu'\dot{\vec{H}}_y = 0 \Rightarrow \dot{\vec{H}}_x = j\frac{\mu'}{\mu}\dot{\vec{H}}_y. \quad (8.38)$$

Обратившись ко второму уравнению из (8.34), с учетом равенства (8.38) имеем:

$$\frac{d\dot{\vec{H}}_z}{dx} = j\omega\mu_0\left(\mu - \frac{\mu'^2}{\mu}\right)\dot{\vec{H}}. \quad (8.39)$$

В то же время третье уравнение из системы (8.34) при сделанных предположениях можно записать так:

$$\frac{d\dot{\vec{H}}_y}{dx} = j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}_z. \quad (8.40)$$

Объединяя формулы (8.39) и (8.40), приходим к уравнению Гельмгольца:

$$\frac{d^2\dot{\vec{H}}_y}{dx^2} + \beta^2\dot{\vec{H}}_y = 0,$$

решение которого описывает однородную плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Коэффициент фазы данной волны:

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}\sqrt{\mu - \frac{\mu'^2}{\mu}} \quad (8.41)$$

определяется числовыми значениями компонентов тензора Полдера. Такая волна помимо поперечной составляющей магнитного вектора с проекцией  $\dot{\vec{H}}_y$  имеет продольную составляющую с проекцией  $\dot{\vec{H}}_x$  и поэтому в соответствии с нашей классификацией является волной  $H$ -типа. Ее принято называть необыкновенной волной.

Фазовые скорости обыкновенной и необыкновенной волн в общем случае различны, что приводит к интересной особенности волнового процесса в гиротропной среде. Предположим, что на слой намагниченного феррита толщиной  $l$  из вакуума падает плоская электромагнитная волна в направлении, перпендикулярном направлению подмагничивающего поля (рисунок 8.4). Если плоскость поляризации волны ориентирована произвольным образом, то в общем случае вектор  $\vec{E}$  падающей волны имеет составляющую  $\vec{E}_1$ , перпендикулярную подмагничивающему полю, и составляющую  $\vec{E}_2$ , которая направлена вдоль вектора  $\vec{H}_0$ . На основании вышеизложенного ясно, что составляющая  $\vec{E}_1$  возбуждает в феррите обыкновенную, а составляющая  $\vec{E}_2$  – необыкновенную волну. Фазовые скорости этих двух пространственно-ортогональных волн различны. Поэтому в полупространстве за пластиной обыкновенная и необыкновенная волны оказываются сдвинутыми по фазе. Складываясь, эти две волны образуют однородную плоскую волну с вращающейся эллиптической поляризацией. В частном случае, когда фазовый сдвиг составляет  $90^\circ$ , а амплитуды обеих волн равны, поляризация прошедшей волны будет круговой.

Описанное здесь явление преобразования поляризационных характеристик плоской волны в слое гиротропной среды при поперечном распространении получило название эффекта Коттон - Мутона.

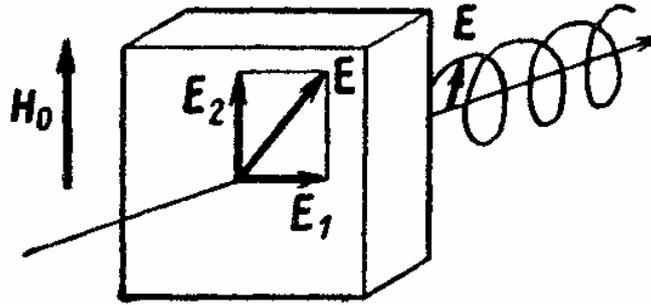


Рисунок 8.4 – Эффект Коттон - Мутона

### 8.6 Продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите

Рассмотрим теперь другой случай, когда плоская электромагнитная волна распространяется в неограниченной гиротропной среде вдоль направления постоянного подмагничивающего поля. При этом все проекции векторов поля будут зависеть от продольной координаты  $z$  по закону  $\exp(\pm j\beta z)$ ; выбор знака аргумента комплексной экспоненты диктуется выбором одного из двух возможных направлений движения волновых факторов. Будем по-прежнему считать, что волны однородны в поперечной плоскости и поэтому  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ . Отсюда в соответствии с последними уравнениями из систем

(8.33) и (8.34) находим, что  $\dot{\vec{E}}_z = \dot{\vec{H}}_z = 0$ , т.е. рассматриваемые решения уравнений Максвелла обязательно являются чисто поперечными  $T$ -волнами.

Воспользуемся общей системой уравнений Максвелла (3.33) и (8.34) для гиротропной среды и перепишем ее с учетом отмеченных здесь особенностей:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\vec{H}}_y}{dz} &= -j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}_x, & \frac{d\dot{\vec{H}}_x}{dz} &= j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}_y, \\ \frac{d\dot{\vec{E}}_y}{dz} &= j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_x + \omega\mu_0\mu'\dot{\vec{H}}_y, & \frac{d\dot{\vec{E}}_x}{dz} &= \omega\mu_0\mu'\dot{\vec{H}}_x - j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_y. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Данная система содержит не два, а четыре независимых уравнения и непосредственно свести ее к уравнению Гельмгольца не удастся. Поэтому попытаемся сократить число искомых переменных, продифференцировав почленно первое уравнение и объединив его с четвертым, а затем продифференцировав второе уравнение и выразив производную  $\frac{d\dot{\vec{E}}_y}{dz}$  через правую часть равенства в третьем уравнении. В результате приходим к эквивалентной си-

стеме двух дифференциальных уравнений второго порядка которые, введя обозначение  $\beta_\phi^2 = \omega^2 \varepsilon_\phi \mu_0$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \dot{\vec{H}}_y}{dz^2} &= -j\beta_\phi^2 \mu' \dot{\vec{H}}_x - \beta_\phi^2 \mu \dot{\vec{H}}_y, \\ \frac{d^2 \dot{\vec{H}}_x}{dz^2} &= -\beta_\phi^2 \mu \dot{\vec{H}}_x + j\beta_\phi^2 \mu' \dot{\vec{H}}_y.\end{aligned}\quad (8.43)$$

Будем искать решения этих уравнений в виде произведений некоторых постоянных комплексных чисел и функций вида  $\exp(\pm j\beta z)$ , где  $\beta$  – пока не известный коэффициент фазы:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_x &= \dot{\vec{H}}_{x0} \exp(\mp j\beta z), \\ \dot{\vec{H}}_y &= \dot{\vec{H}}_{y0} \exp(\mp j\beta z).\end{aligned}\quad (8.44)$$

Верхние знаки соответствуют плоской волне, распространяющейся вдоль положительного направления вектора  $\dot{\vec{H}}_0$ , а нижние – волне противоположного направления. Воспользовавшись правилом дифференцирования экспоненциальных функций, из (8.43) получаем систему двух однородных алгебраических уравнений относительно амплитудных коэффициентов составляющих магнитного вектора по двум взаимно ортогональным поперечным осям:

$$\begin{aligned}j\beta_\phi^2 \mu' \dot{\vec{H}}_{x0} + (\beta_\phi^2 \mu - \beta^2) \dot{\vec{H}}_{y0} &= 0, \\ (\beta_\phi^2 \mu - \beta^2) \dot{\vec{H}}_{x0} - j\beta_\phi^2 \mu' \dot{\vec{H}}_{y0} &= 0.\end{aligned}\quad (8.45)$$

Чтобы эти уравнения были совместными, необходимо потребовать обращения в нуль определителя данной системы:

$$\beta_\phi^4 - (\beta_\phi^2 - \beta^2)^2 = 0.\quad (8.46)$$

Получено алгебраическое уравнение четвертой степени относительно неизвестного коэффициента фазы  $\beta$ , которое имеет четыре корня. Процедура решения элементарна – извлекая квадратный корень, имеем  $\mp \beta_\phi^2 \mu' = \beta_\phi^2 \mu - \beta^2$ , откуда:

$$\beta = \pm \beta_\phi \sqrt{\mu \mp \mu'}.\quad (8.47)$$

Выбрав для определенности знак «+» перед правой частью последнего равенства, который соответствует волнам, распространяющимся в сторону возрастания координаты  $z$ , подставим величину  $\beta$  в любое, скажем первое, уравнение из системы (8.45). Сократив на общие множители, получим:

$$j\dot{\vec{H}}_{x0} \pm \dot{\vec{H}}_{y0} = 0$$

или

$$\dot{\vec{H}}_{y0} = \mp j\dot{\vec{H}}_{x0}.\quad (8.48)$$

Как известно, плоская электромагнитная волна с двумя ортогональными пространственными компонентами, сдвинутыми по фазе на угол  $90^\circ$ , пред-

ставляет собой волну, поляризованную, по кругу. Таким образом, установлено, что при продольном распространении волн в намагниченном феррите существуют две независимые моды:

1) поляризованная по кругу волна с левым направлением вращения, у которой  $\dot{\vec{H}}_{y0} = -\dot{\vec{H}}_{x0}$  и коэффициент фазы:

$$\beta_L = \beta_\Phi \sqrt{\mu - \mu'}; \quad (8.49)$$

2) аналогичная волна с правым направлением вращения, у которой коэффициент фазы:

$$\beta_{PP} = \beta_\Phi \sqrt{\mu + \mu'}. \quad (8.50)$$

Теперь предположим, что в какой-либо плоскости, скажем при  $z = 0$ , одновременно возбуждены обе моды с одинаковыми амплитудами. Тогда в этой плоскости комплексная амплитуда суммарного магнитного вектора:

$$\dot{\vec{H}}(0) = \dot{H}_{x0} \vec{i}_x + j \dot{H}_{x0} \vec{i}_y + \dot{H}_{x0} \vec{i}_x - j \dot{H}_{x0} \vec{i}_y = 2 \dot{H}_{x0} \vec{i}_x$$

ориентирована вдоль оси  $x$  и отвечает линейно поляризованной волне.

Учтем, что обе моды с круговой поляризацией, из которых складывается такая волна, распространяются с разными фазовыми скоростями, и поэтому в поперечной плоскости с произвольной координатой  $z$  магнитный вектор имеет комплексную амплитуду:

$$\dot{\vec{H}}(z) = \dot{H}_{x0} \left( e^{-j\beta_{PP}z} \vec{i}_x + j e^{-j\beta_{PP}z} \vec{i}_y + e^{-j\beta_L z} \vec{i}_x - j e^{-j\beta_L z} \vec{i}_y \right).$$

Правую часть данного равенства можно преобразовать с помощью формул Эйлера и получить следующие результаты.

1. Коэффициент фазы результирующей плоской волны равен среднеарифметическому значению коэффициентов фазы обеих мод с круговой поляризацией:

$$\beta = (\beta_{PP} + \beta_L) \cdot 0.5. \quad (8.51)$$

2. Обе декартовы проекции результирующего магнитного вектора колеблются во времени синфазно, так что при любом  $z$  суммарная волна имеет линейную поляризацию. Если в начальной плоскости с координатой  $z = 0$  магнитный вектор волны ориентирован вдоль оси  $x$ , то при  $z = l$  окажется повернутым относительно оси  $x$  на угол:

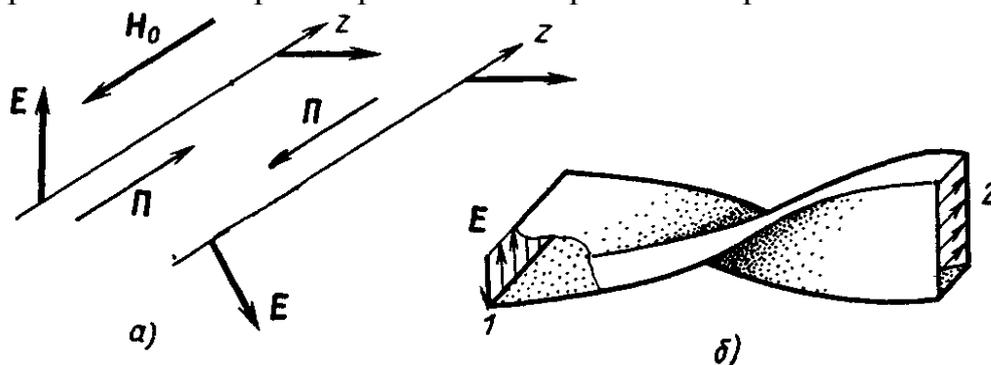
$$\Phi(l) = \frac{\beta_{PP} - \beta_L}{2}. \quad (8.52)$$

Явление поворота плоскости поляризации электромагнитной волны в гиротропной среде при ее распространении вдоль постоянного подмагничивающего поля называют эффектом Фарадея.

Интересной и практически важной особенностью процесса продольного распространения электромагнитных волн в намагниченном феррите является взаимный характер поворота плоскости поляризации. Дело в том, что знак угла  $\Phi$ , вычисляемого по формуле (8.52), будет одним и тем же для волн, распространяющихся в противоположных направлениях, поскольку правополяризованная прямая волна полностью эквивалентна левополяризованной об-

ратной, и наоборот. Таким образом, если, например, вектор  $E$  при распространении вдоль подмагничивающего поля поворачивается против движения стрелки часов, то при обратном распространении этот вектор будет поворачиваться в таком же самом направлении (рисунок 8.5, *a*).

В противоположность этому отрезок скрученного прямоугольного волновода (рисунок 8.5, *б*) осуществляет взаимный (обратимый) поворот плоскости поляризации. При распространении волн от входа 1 к выходу 2 и в обратном направлении вектор поворачивается в разные стороны.



*a*) – в продольно намагниченном феррите;  
*б*) – в скрученном прямоугольном волноводе

**Рисунок 8.5 – Вращение плоскости поляризации электромагнитного поля**

Указанная особенность волновых процессов в продольно намагниченном феррите позволяет создавать волноводные вентили – невзаимные развязывающие устройства, которые практически без ослабления пропускают волны от генератора к нагрузке и эффективно поглощают отраженные волны.

Отметим, что анизотропия электродинамических свойств наблюдается не только в намагниченных ферритах, но и в ионосферной плазме, находящейся в постоянном магнитном поле Земли. Это приводит к ряду физических эффектов (вращение плоскости поляризации, расщепление падающей волны на обыкновенную и необыкновенную и т.д.). Такие эффекты существенно влияют на распространение радиоволн КВ-диапазона, особенно во время ионосферно-магнитных бурь, часто происходящих в приполярных областях.

## 8.7 Физические основы применения ферритов на СВЧ. Взаимные и невзаимные функциональные устройства [3]

Атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов. Каждый электрон вращается по некоторой орбите вокруг ядра, одновременно вращаясь вокруг своей собственной оси. Поскольку электрон – заряженная частица, то его перемещение по замкнутой траектории эквивалентно протеканию тока в контуре, поэтому орбиту каждого электрона можно рассматривать как элементарную рамку с током. Под влиянием тока, протекающего по рамке, в окружающем пространстве

возникает постоянное магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны плоскости рамки. Этому магнитному полю соответствует орбитальный магнитный момент электрона. Кроме этого, при вращении электрона вокруг своей оси возникает спиновый магнитный момент.

Электрон обладает определенной массой, поэтому каждый электрон может рассматриваться в первом приближении как волчок (гироскоп) с массой  $m$ , вращающийся вокруг центра атома и одновременно вокруг собственной оси. Это обуславливает наличие у электрона двух механических моментов количества движения: орбитального и спинового.

Полный магнитный и механический моменты атома есть геометрические суммы соответственно магнитных и механических спиновых и орбитальных моментов всех электронов в атоме. Магнитный момент ядра примерно на три порядка меньше магнитного момента электрона, поэтому влиянием магнитного момента ядра можно пренебречь.

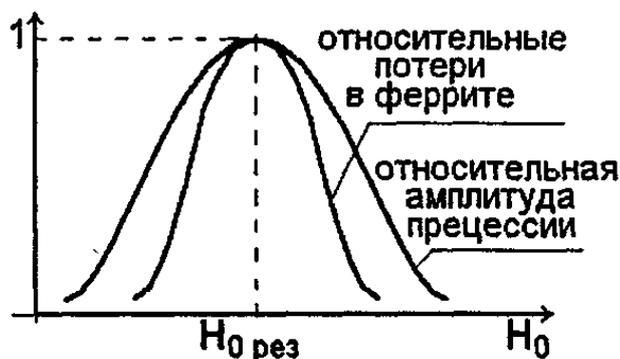
Исследования вещества показали, что у *большинства атомов наблюдается антипараллельная ориентация спиновых магнитных моментов у любых соседних двух электронов на орбите, т.е. суммарный магнитный момент этих атомов близок к нулю*. Исключение составляют металлы переходных групп (группа железа, палладия, платины и др.), у которых наблюдается параллельная ориентация спиновых магнитных моментов у части электронов на орбите. Например, у атома железа на предпоследней орбите находятся четыре электрона с параллельными спинами, у атома кобальта – три и т.д. В постоянном магнитном поле атомы этих металлов ведут себя подобно стрелке компаса: их магнитные моменты ориентируются параллельно приложенному полю.

Принцип действия ферритовых устройств диапазона СВЧ основан на взаимодействии магнитного поля электромагнитной волны с нескомпенсированными магнитными моментами атомов. Чтобы такое взаимодействие стало возможным, электромагнитная волна должна проникать в вещество и распространяться в нем. В проводники электромагнитные волны почти не проникают. Эту трудность можно устранить, если использовать не ферромагнитные металлы, а обладающие свойствами диэлектриков химические соединения таких металлов (обычно железа) с другими элементами. Подобные магнитные диэлектрики, называемые ферритами, имеют достаточно высокое удельное сопротивление.

Экспериментальные исследования показали, что в ферритах вклад орбитальных моментов в общий момент обычно мал, поэтому магнитные свойства ферритов определяются в основном спиновыми магнитными моментами атомов.

Как было показано выше, относительные потери в феррите приводят к затуханию свободной прецессии. Если на частоте  $\omega_0$  свободной прецессии передавать прецессирующим электронам энергию, равную теряемой ими, то прецессия станет незатухающей. Роль такого источника, компенсирующего

потери и поддерживающего свободную прецессию, может выполнять электромагнитная волна с круговой поляризацией магнитного поля, если направление и частота вращения вектора  $\dot{\vec{H}}_m$  совпадают с направлением и частотой свободной прецессии (рисунок 8.6). Такой волной и является волна с вектором  $\dot{\vec{H}}_m$  на частоте  $\omega = \omega_0 = \gamma \dot{H}_0$  – случай продольного намагничивания (см. раздел 8.6).



**Рисунок 8.6 – Влияние внешнего намагничивающего поля  $H_0$**

Знак «+» в верхнем индексе вектора  $\dot{\vec{H}}_m^+$  означает, что это волна круговой поляризации с правосторонним вращением (по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления постоянного магнитного поля). Если частота волны с вектором  $\dot{\vec{H}}_m^+$  отличается от  $\omega_0$ , то магнитное поле волны препятствует стремлению магнитного момента электрона прецессировать с частотой  $\omega_0$ . Поэтому амплитуда прецессии при  $\omega \neq \omega_0$  меньше, чем при  $\omega = \omega_0$ . Но на поддержание прецессии с меньшей амплитудой необходимо затратить меньшую энергию.

Следовательно, при  $\omega = \omega_0$  амплитуда прецессии магнитного момента наибольшая и величины затухания, испытываемого волной наибольшая, и волна с вектором  $\dot{\vec{H}}_m^+$  испытывает в феррите максимальное поглощение. На рисунке 8.6 показана зависимость амплитуды с вектором  $\dot{\vec{H}}_m^+$  от величины внешнего намагничивающего поля.

Явление резкого увеличения затухания, испытываемого электромагнитной волной с вектором  $\dot{\vec{H}}_m^+$ , при напряженности внешнего магнитного поля

$H_{0 \text{ рез}} = \frac{\omega}{\gamma}$  получило название продольного ферромагнитного резонанса. Кру-

говую частоту  $\omega_0$ , на которой это затухание происходит, называют круговой частотой продольного ферромагнитного резонанса.

Совершенно по-иному взаимодействует феррит с волной с вектором  $\dot{\vec{H}}_m^-$ . Вектор  $\dot{\vec{H}}_m^-$  вращается в сторону, противоположную направлению вращения свободной прецессии. Поэтому независимо от частоты электромагнитного поля и величины напряженности внешнего магнитного поля, амплитуда

прецессии оказывается малой, и соответственно будет мало затухание, испытываемое волной в феррите.

На рисунке 8.7 показана зависимость  $\frac{\mu^+}{\mu_0}$  и  $\frac{\mu^-}{\mu_0}$  от величины  $H_0$ . График  $\frac{\mu^+}{\mu_0}$  вблизи  $H_0 = H_{0 \text{ рез}}$  построен с учетом того, что при наличии потерь в феррите вектор  $\vec{B}_m^+$  в области резонанса не стремится к бесконечности, а лишь достигает максимального значения.

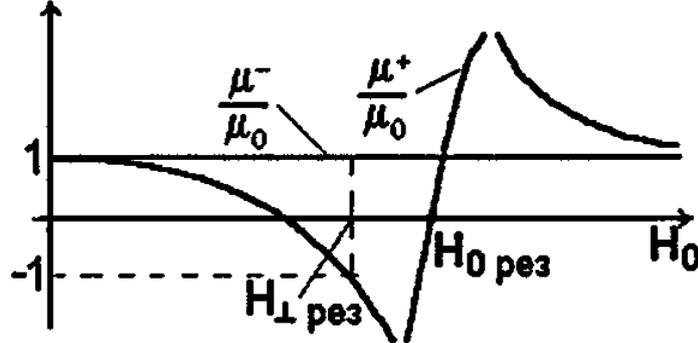


Рисунок 8.7 – Зависимость  $\frac{\mu^+}{\mu_0}$  и  $\frac{\mu^-}{\mu_0}$  от величины  $H_0$

При поперечном намагничивании феррита (см. пункт 8.5) кроме обыкновенной волны существует еще и необыкновенная волна. Для необыкновенной волны вектор  $\vec{H}_M$  с коэффициентом фазы  $\beta_{x1} = \omega\sqrt{\epsilon\mu_\perp}$  ( $\mu_\perp = \frac{\mu^2 - \mu'^2}{\mu} = \frac{2\mu^+\mu^-}{\mu^+ + \mu^-}$ ) лежит в плоскости  $XOY$ , перпендикулярной вектору  $\vec{H}_0$ , и имеет при  $\mu \neq \mu'$  эллиптическую поляризацию. Вектор  $\vec{E}_M$  этой волны параллелен  $\vec{H}_0$ . Эта волна является волной типа  $H$ , поскольку имеет составляющую  $\vec{H}_{Mx}$ , параллельную направлению распространения волны (оси  $X$ ).

Рассмотрим некоторые свойства  $H$ -волны в феррите, имеющей коэффициент фазы  $\beta_{x1}$ . В реальных ферритах диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной  $\tilde{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - tg\delta)$ , обычно  $\epsilon'' \ll \epsilon'$ . Если пренебречь магнитными потерями в феррите, то

$$\beta_{x1} = \omega\sqrt{\mu_\perp}\sqrt{\epsilon' - j\epsilon''} \approx \omega\sqrt{\mu_\perp}\epsilon' \left[ 1 - \frac{j\epsilon''}{2\epsilon'} \right] = \omega\sqrt{\epsilon'\mu_\perp} - j\omega\sqrt{\epsilon'\mu_\perp} \frac{tg\delta}{2}.$$

графиков рисунка 8.7,  $\mu^- \approx \mu_0$ , поэтому при  $\mu^+ = -\mu_0$  величина  $\mu_\perp \rightarrow \infty$ . При этом бесконечно возрастает мнимая часть коэффициента распространения  $\beta_{x1}$ . Это означает, что распространяющаяся в феррите волна интенсивно затухает. Это явление называется поперечным резонансом. Отметим, что в рассматриваемом случае затухание волны не связано с явлением ферромагнитно-

го резонанса, который наблюдается в продольно намагниченных ферритах, а объясняется бесконечно большим значением магнитной проницаемости  $\mu_{\perp}$  феррита и наличием диэлектрических потерь в нем. Более детальный анализ показывает, что вблизи точки поперечного резонанса резко возрастают не только диэлектрические, но и магнитные потери. Из графиков (рисунок 8.7) видно, что отрицательным значениям  $\mu^{+}$  соответствуют значения напряженности внешнего поля  $\bar{H}_0$ , меньшие резонансной величины  $H_{0 \text{ РЕЗ}}$ . Значит, поперечный резонанс возникает при более низких значениях  $H_{\perp \text{ РЕЗ}}$  намагничивающего поля, чем продольный. Формулу для  $H_{0 \text{ РЕЗ}}$  можно получить из условия  $\mu = 0$ , при котором  $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$ :

$$H_{\perp \text{ РЕЗ}} = \sqrt{H_{0 \text{ РЕЗ}}^2 + M_0^2} - M_0.$$

Эффект смещения поля в продольно и поперечно намагниченных ферритах. При  $\mu^{+} < 0$  (рисунок 8.7) коэффициент фазы  $\beta_z^{+}$  становится чисто мнимым, что соответствует стоячим волнам с экспоненциально убывающей вдоль оси  $Z$  амплитудой. Поэтому при  $\mu^{+} < 0$  распространение волн с вектором  $\dot{H}_m^{+}$  в продольно намагниченной среде становится невозможным. Если ферритовая среда имеет конечные размеры в поперечном сечении (продольно намагниченный ферритовый цилиндр, пластина и т.д.), то волна с вектором  $\dot{H}_m^{+}$  из феррита вытесняется и распространяется вне ферритовой среды вдоль границы феррит-воздух. В то же время волна с вектором  $\dot{H}_m^{-}$  нормально распространяется в ферритовой среде, поскольку  $\mu^{-} \approx \mu_0$ . Это явление получило название *эффект смещения поля*.

Аналогичное явление имеет место в поперечно намагниченном феррите для  $H$ -волны, когда  $\mu_{\perp} < 0$  или  $\mu^{+} < 0$ .

Таким образом, эффект смещения поля имеет место в продольно и поперечно намагниченных ферритах:

$$H_0 > H_{0 \text{ РЕЗ}} - M_0. \quad (8.53)$$

Ферритовые вентили. Наибольшее распространение в технике СВЧ получили следующие типы вентиляй: резонансные, вентили на «смещении поля» и предельные.

Резонансные вентили. Принцип действия таких вентиляй основан на явлении поперечного резонанса. Рассмотрим конструкцию резонансного вентиля на основе прямоугольного волновода, работающего в одноволновом режиме (рисунок 8.8). Чтобы стал понятен принцип действия этого вентиля, рассмотрим изменение во времени магнитного поля волны  $H_{10}$  в некотором продольном сечении, параллельном плоскости  $XOY$ . Поскольку продольной осью в данном случае (см. рисунок 8.8) является ось  $Y$ , а не ось  $Z$ , то составляющие напряженности магнитного поля волны  $H_{10}$ , бегущей вдоль положительного направления оси  $Y$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_{mx} &= \frac{j\beta a}{\pi} H_{0y} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta y), \\ \dot{\vec{H}}_{my} &= H_{0y} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(j\beta y).\end{aligned}\quad (8.54)$$

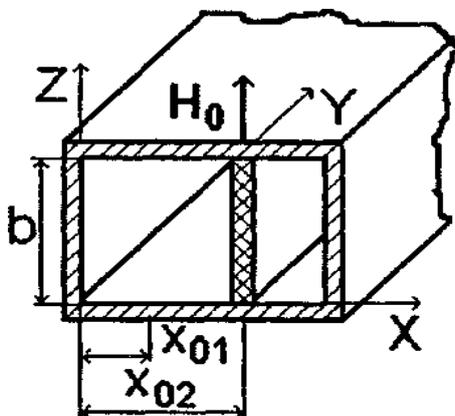


Рисунок 8.8 – Резонансный вентиль

Как следует из (8.54), составляющие  $H_{mx}$  и  $H_{my}$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , а их модули зависят от координаты  $x$ , направленной вдоль широкой стенки волновода –  $a$ . В общем случае модули этих составляющих не равны, поэтому поляризация магнитного поля эллиптическая. Вблизи боковых стенок волновода (при  $x = 0$  и  $x = a$ ) и в центре широких стенок (при  $x = a/2$ ) магнитное поле волны  $H_{10}$  имеет линейную поляризацию, поскольку в этих точках одна из составляющих вектора напряженности магнитного поля обращается в нуль. В тех сечениях, где  $|\dot{\vec{H}}_{mx}| = |\dot{\vec{H}}_{my}|$ , поляризация магнитного поля будет круговой. Так как составляющая  $\dot{\vec{H}}_{my}$  при переходе через точку  $x = a/2$  меняет знак, то во всех сечениях при  $0 < x < a/2$  вектор  $\dot{\vec{H}}_m$  вращается по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси  $Z$ , а в сечениях при  $a/2 < x < a$  – против часовой стрелки.

Приравняв модули составляющих магнитного поля, получаем следующее выражение:

$$\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x_0}{a}\right) \right| = \frac{\pi}{\beta a} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1}},$$

позволяющее определить значение координаты  $x_0$ , при которой  $\dot{\vec{H}}_m$  имеет круговую поляризацию. Записанное уравнение для  $0 < x < a$  имеет два решения: для средней частоты диапазона одноволновой работы волновода имеем  $x_{01} \approx a/4$  и  $x \approx 3a/4$ . Помещаем в сечение с координатой  $x_{02}$  тонкую ферритовую пластину и намагничиваем ее внешним постоянным магнитным полем,

направленным вдоль оси  $Z$ ,  $\bar{H}_0 = H_0 \bar{i}_z$  (см. рисунок 8.8). В этом случае в сечении с координатой  $x_{01}$  поляризация магнитного поля волны  $H_{01}$  такая же, как у вектора  $\dot{H}_m^+$ , а в сечении с координатой  $x_{02}$  – как у вектора  $\dot{H}_m^-$ . Изменим направление движения волны в волноводе на противоположное (обратная волна). Для нее в (8.54) следует заменить  $\beta$  на  $(-\beta)$ , т.е. изменение направления распространения волны по волноводу изменяет на противоположное направление вращения вектора магнитного поля волны в точках волновода. Поэтому обратная волна в сечении с координатой  $x_{01}$  будет иметь поляризацию, совпадающую с поляризацией поля  $\dot{H}_m^-$ , а в сечении с координатой  $x_{02}$  – с поляризацией поля  $\dot{H}_m^+$ .

Если величину намагничивающего поля  $H_0$  выбрать так, чтобы на заданной частоте выполнялось равенство  $H_{\perp PE3} = \sqrt{H_{0PE3}^2 + M_0^2} - M_0$ , что соответствует поперечному резонансу в ферритовой пластине, то для прямой волны феррит представляет диэлектрик с магнитной проницаемостью  $\mu^- \approx \mu_0$ . Поэтому прямая волна проходит отрезок волновода с ферритовой пластиной без существенных потерь. Напротив, обратная волна, имеющая поляризацию магнитного поля, совпадающую с  $\bar{H}^+$  в месте расположения феррита, будет интенсивно затухать в феррите. Поскольку  $x_{01}$  и  $x_{02}$  зависят от частоты, то с повышением частоты сечение с круговой поляризацией магнитного поля смещается в сторону ближайшей узкой стенки, а при понижении частоты – к центру волновода. При этом ферритовая пластина оказывается в сечении с эллиптической поляризацией магнитного поля волны, что приводит к увеличению затухания для прямой волны и к уменьшению затухания для обратной.

Для ослабления зависимости структуры поля в волноводе от частоты в волновод вводят пластину из диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью, а тонкую ферритовую пластину наклеивают на диэлектрик (рисунок 8.9, *a*).

При этом значительная часть энергии, распространяющаяся по волноводу, проходит через область, где размещена диэлектрическая пластина. Благодаря этому зависимость структуры поля от частоты, характерная для обычного волновода, становится менее выраженной. Одновременно возрастает концентрация поля в ферритовой пластине, что приводит к существенному увеличению затухания обратной волны на единицу длины по сравнению с ферритовой пластиной без диэлектрика (см. рисунок 8.8). Использование диэлектрической пластины расширяет рабочий диапазон вентиля и увеличивает вентиляльный эффект на единицу длины, что позволяет сократить длину вентиля. Толщина диэлектрической пластины, ее положение в волноводе, параметры диэлектрика подбирают так, чтобы на границе, где расположен феррит, поляризация магнитного поля волны была близка к круговой. Концы диэлектрической пластины заостряют для уменьшения отражений от вентиля.

Конструкция резонансного вентиля, где для создания намагничивающего поля использован постоянный магнит, показана на рисунке 8.9, *а*. Такая конструкция успешно используется при малой и средней мощности, переносимой волнами по волноводу.

При сравнительно высокой передаваемой мощности используют иную конструкцию (рисунок 8.9, *б*). Это связано с тем, что в резонансном вентиле практически вся мощность обратной волны рассеивается в феррите, что приводит к его нагреву. При чрезмерном нагреве, поскольку феррит плохо проводит тепло, может произойти отклеивание ферритовой пластины и даже ее разрушение. Поэтому в конструкции вентиля для высокого уровня мощности используют две ферритовые пластины, наклеиваемые непосредственно на широкие стенки волновода (рисунок 8.9, *б*). В случае необходимости используют воздушное принудительное или жидкостное охлаждение волновода.

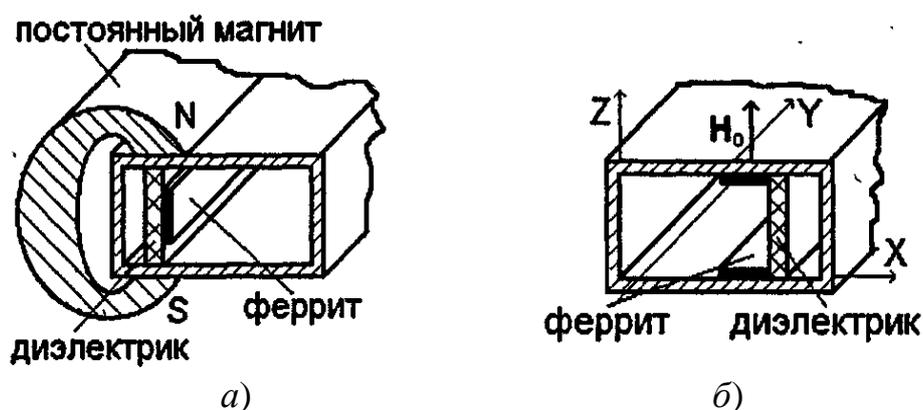


Рисунок 8.9 – Конструкции резонансных вентиляей

Резонансные вентиля можно построить на коаксиальной или полосковых линиях передачи. *ТЕМ*-волна, основной тип волны в таких линиях, не имеет продольной составляющей магнитного поля. В связи с этим в таких линиях отсутствуют точки с круговой поляризацией магнитного поля, что мешает созданию резонансного вентиля.

Поэтому обязательным предварительным условием реализации резонансного вентиля является получение в таких линиях областей с круговой или близкой к ней поляризацией магнитного поля распространяющейся волны. Основным способом создания круговой поляризации является частичное заполнение поперечного сечения линии диэлектриком с большой диэлектрической проницаемостью. На рисунке 8.10, *а*, *б* приведены поперечные сечения конструкций резонансного вентиля на коаксиальной линии и на симметричной полосковой линии соответственно. В отрезке линии с диэлектриком возникает гибридная волна, имеющая кроме поперечной и продольную составляющую магнитного поля. При определенных условиях, подобрав степень заполнения линии диэлектриком; его форму и величину диэлектрической проницаемости, можно добиться того, что поляризация магнитного поля волны станет вблизи ферритовых пластин круговой. Поскольку отсутствует дисперсия основной волны в таких линиях, резонансные вентиля на подоб-

ных линиях работают в широкой полосе частот (удаётся получить даже октавную полосу).

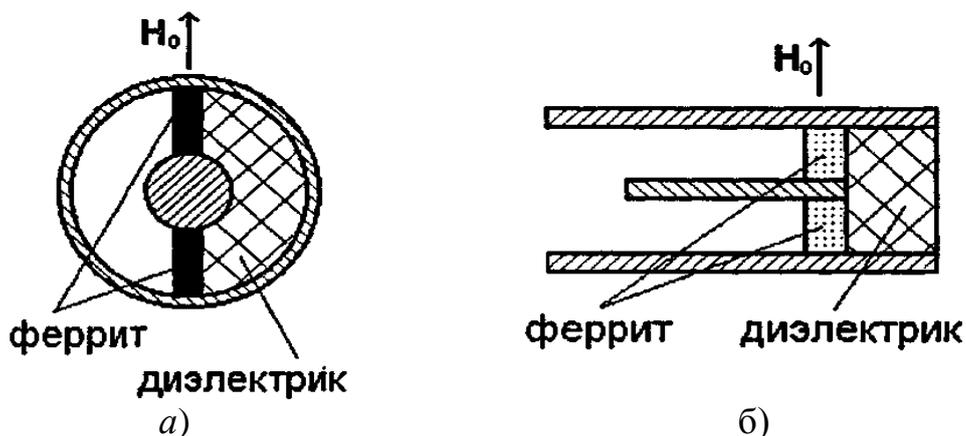


Рисунок 8.10 – Резонансный вентиль на основе коаксиальной (а) и полосковой линии передачи (б)

Общим недостатком резонансных вентиляей являются сравнительно большие габариты и масса, что в значительной степени определяется размерами постоянного магнита, поскольку для обеспечения поперечного резонанса в феррите требуется большое намагничивающее поле.

Вентили на «смещении поля». Такие вентили выгодно отличаются от резонансных меньшими габаритами и массой, поскольку согласно (8.53) величина намагничивающего поля в них в 1.5...2 раза меньше, чем в резонансных.

Принцип действия основан на явлении смещения поля, существующем в линиях передачи, содержащих намагниченные ферритовые элементы. В прямоугольный волновод помещается достаточно толстая ферритовая пластина, как показано на рисунке 8.11.

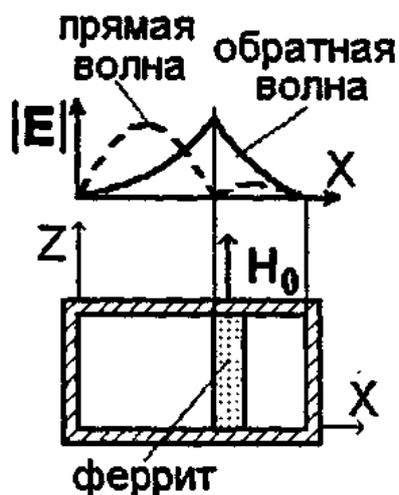


Рисунок 8.11 – Вентили на «смещении поля»

Пластина намагничивается внешним постоянным магнитным полем  $H_0$ , направленным вдоль оси  $Z$ . Обратная волна, распространяющаяся по волноводу в направлении, противоположном направлению оси  $Y$ , в феррите имеет поляризацию магнитного поля, совпадающую с  $\bar{H}^+$ . Магнитная проницаемость феррита для этой волны равна  $\mu^+$ . Для намагничивающих полей  $H_0$ , удовлетворяющих (8.54),  $\mu^+ < 0$  и обратная волна не может распространяться в феррите. Она вытесняется из него и распространяется в виде поверхностной волны вдоль границы феррит-воздух. Распределение амплитуды вектора  $\bar{E}$  обратной волны в поперечной плоскости волновода с ферритом показано на рисунке 8.11. Прямая волна, распространяющаяся по волноводу вдоль оси  $Y$ , в феррите имеет поляризацию магнитного поля, совпадающую с  $\bar{H}^-$ , поэтому магнитная проницаемость феррита для этой волны равна  $\mu^- \approx \mu$ . Однако ее структура в волноводe с ферритом достаточно сильно отличается от структуры волны  $H_{10}$ . Подбирая толщину ферритовой пластины и величину намагничивающего поля, добиваются для прямой волны распределения поля в поперечной плоскости, показанного на рисунке 8.11. В этом случае для образования вентиля достаточно на левую грань ферритовой пластины нанести тонкую поглощающую пленку, поглощающую обратную волну намного сильнее, чем прямую. На рисунке 8.12 изображена конструкция волноводного вентиля на «смещении поля».

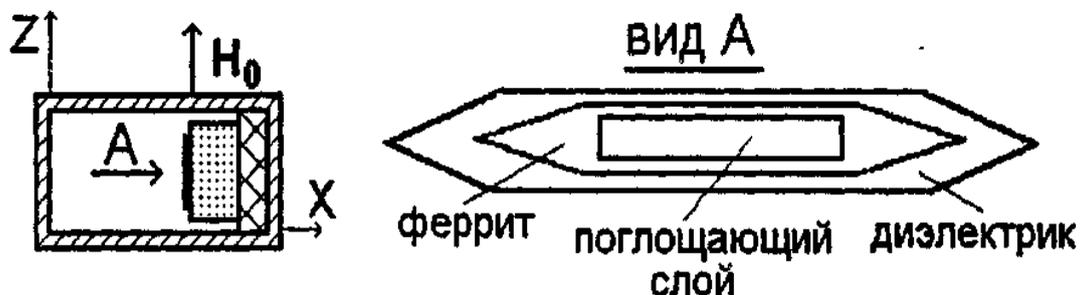
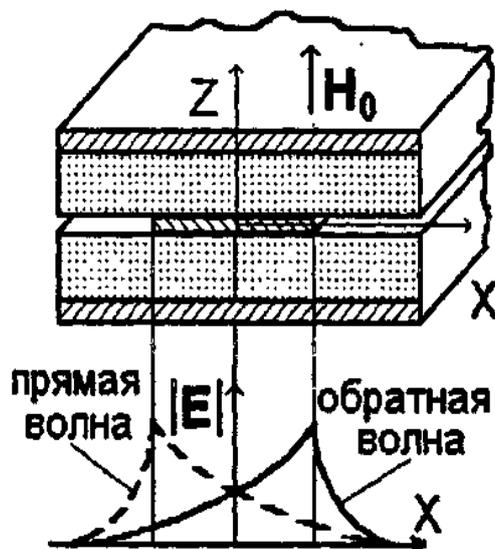


Рисунок 8.12 – Конструкция волноводного вентиля на «смещении поля»

Ферритовая пластина с согласующими скосами приклеивается к стенке волновода. Поглощающий слой, как правило, напыляется на феррит. Поскольку мощность обратной волны рассеивается в поглощающем слое, уровень рабочей мощности такого вентиля определяется качеством поглощающего слоя. Использование термостабильных нихромовых или оксидных поглощающих пленок позволяет применять такие вентили не только при низких, но и при средних уровнях передаваемой через вентиль мощности.

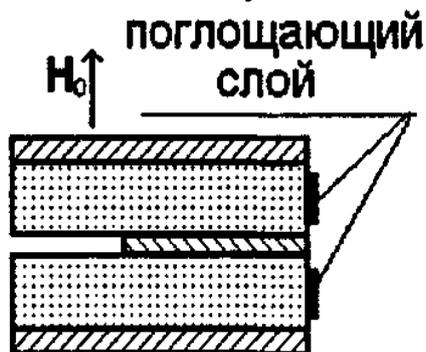
Эффект смещения поля существует и в полосковых линиях, полностью заполненных поперечно намагниченным ферритом. На рисунке 8.13. показано поперечное сечение симметричной полосковой линии. В этом случае в области намагничивающих полей, где  $\mu^+ < 0$ , прямая и обратная волны вытесняются из линии с ферритом. Однако если для прямой волны максимум элект-

трического поля смещается к левому краю полоски, то для обратной – к правому (рисунок 8.13).



**Рисунок 8.13 – Поперечное сечение симметричной полосковой линии**

На рисунке 8.14 показана конструкция вентиля на «смещении поля», построенная на основе симметричной полосковой линии. В данном случае используются ферритовые пластины с согласующими скосами, на правые боковые поверхности (по рисунку) которых нанесены поглощающие пленки. При этом обратная волна при прохождении вентиля будет испытывать большое затухание за счет рассеяния мощности в пленках, а прямая волна будет проходить через ventиль с небольшим затуханием.

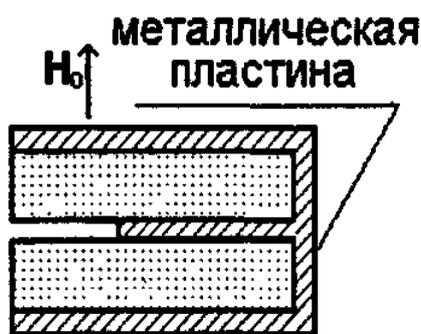


**Рисунок 8.14 – Конструкция вентиля на «смещении поля»**

Вентили на «смещении поля» отличаются простотой конструкции, надежностью и компактностью. Однако они работают при сравнительно низких уровнях мощности.

Предельные вентили. Принцип действия таких вентиляей основан на явлении невзаимной предельности, существующей в линиях передачи, заполненных поперечно намагниченными ферритами. Например, если вблизи правых (по рисунку 8.15) боковых поверхностей ферритовых пластин разместить

металлическую пластину, имеющую контакт как с полоской, так и с экранирующими пластинами линии (рисунок 8.15), то образуется *Ш*-образная полосковая линия. Если параметры феррита и величину намагничивающего поля подобрать так, чтобы в линии с ферритом возник эффект смещения поля (см. рисунок 8.15), то в *Ш*-образной линии с намагниченным ферритом прямая волна, имеющая незначительное поле вблизи боковой металлической пластины, будет распространяться с небольшим затуханием. Обратная волна, имеющая максимум поля в месте расположения металлической пластины, распространяться по *Ш*-образной линии с ферритом не сможет, т.е. для обратной волны *Ш*-образная линия является предельной. Используя согласующие элементы (например, реактивные шлейфы) на входе и выходе *Ш*-образной линии с намагниченным ферритом, можно обеспечить полное рассеяние энергии отраженной волны в феррите и почти полное прохождение прямой волны через вентиль.



**Рисунок 8.15 – *Ш*-образная полосковая линия. Предельный вентиль**

На рисунке 8.15 показана конструкция предельного вентиля на симметричной полосковой линии. Для согласования подводящих линий (симметричные полосковые линии) с *Ш*-образной линией, заполненной ферритом, использованы реактивные разомкнутые на конце шлейфы (отрезки симметричной полосковой линии). За счет конечной проводимости феррита и металлических проводников *Ш*-образной линии удастся рассеять энергию обратной волны.

Аналогичное явление существует и в прямоугольном волноводе, частично заполненном намагниченным ферритом. Это позволяет построить предельный вентиль на основе прямоугольного волновода.

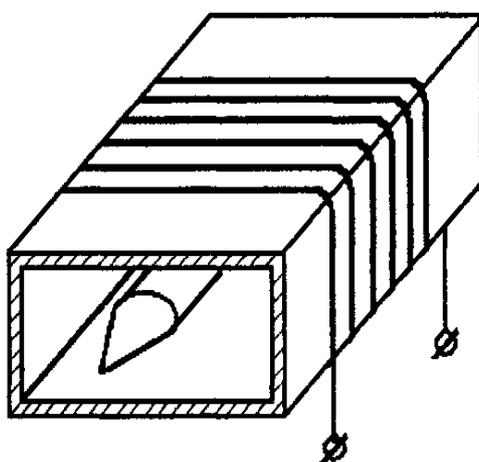
Основное достоинство предельного вентиля по сравнению с резонансным и вентилем «на смещении поля» заключается в возможности получения больших затуханий обратной волны на единицу длины линии с ферритом (на 1 см удается получить затухание обратной волны более 30...40 дБ). Это позволяет создавать весьма малогабаритные конструкции вентиляей, обладающих малым весом и высокой надежностью.

Ферритовые фазовращатели. В настоящее время разработано большое число различных фазовращателей, использующих эффекты в линиях передачи с намагниченными ферритами. В таких устройствах регулировка фазы

осуществляется за счет изменения величины внешнего постоянного магнитного поля, что приводит к изменению магнитной проницаемости феррита и, следовательно, к изменению фазовой скорости распространяющейся по ферриту волны.

Ферритовые фазовращатели делятся на взаимные и невзаимные. *Фазовый сдвиг, вносимый взаимным фазовращателем, не зависит от направления распространения волны в нем. Невзаимный фазовращатель вносит фазовый сдвиг, зависящий от направления распространения волны.*

Рассмотрим невзаимный фазовращатель на основе прямоугольного волновода (см. рисунок 8.16). Как и в случае резонансного вентиля, тонкая ферритовая пластина помещается в сечение с круговой поляризацией магнитного поля волны  $H_{10}$  и намагничивается постоянным магнитным полем, направленным вдоль оси  $Z$ .



**Рисунок 8.16 – Фазовращатель на основе прямоугольного волновода**

Однако величина  $H_0$  выбирается так, чтобы избежать значительного поглощения волны  $H_{10}$  в феррите. При этом по отношению к прямой и обратной волнам, имеющим поляризацию, совпадающую с поляризацией  $\bar{H}^-$  и  $\bar{H}^+$  соответственно, намагниченный феррит ведет себя как среда с разной магнитной проницаемостью  $\mu^-$  и  $\mu^+$ . В результате чего коэффициенты распространения прямой и обратной волн оказываются разными в отрезке волновода с ферритом, имеющем длину  $l$ . При этом прямая волна, пройдя такой отрезок, получит фазовый сдвиг  $\varphi^- = \beta^- l$ , а обратная волна –  $\varphi^+ = \beta^+ l$ . Разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi^- - \varphi^+$  называется *невзаимным фазовым сдвигом*. Обычно в регулируемых фазовращателях используют вместо постоянных магнитов электромагниты. Плавно изменяя ток в обмотке электромагнита, удается плавно менять вносимый фазовый сдвиг.

Аналогично строятся конструкции невзаимных фиксированных или регулируемых ферритовых фазовращателей на основе коаксиальной или полосковой линии.

Применение невзаимных ферритовых фазовращателей в фазированных антенных решетках, работающих как в передающем режиме, так и в приемном, вызывает определенные трудности, связанные с необходимостью специального переключения фазовращателей с режима передачи на режим приема.

Поэтому, как правило, в схемах питания таких антенн используют взаимные ферритовые фазовращатели. Широко применяемая на практике конструкция взаимного фазовращателя показана на рисунке 8.16. Круглый ферритовый стержень с согласующими скосами размещается вдоль оси прямоугольного волновода. Снаружи на волновод помещается управляющая обмотка электромагнита, создающего внешнее магнитное поле. Поскольку и прямая, и обратная волны на оси волновода имеют линейную поляризацию магнитного поля, то вносимый фазовый сдвиг не зависит от направления распространения волны по волноводу, а зависит от величины тока в обмотке, марки феррита и его геометрических размеров.

Циркуляторы. Y-циркулятор. Волноводный Y-циркулятор представляет собой *H*-плоскостное Y-сочленение прямоугольных волноводов, в центре которого помещен ферритовый цилиндр (рисунок 8.17).

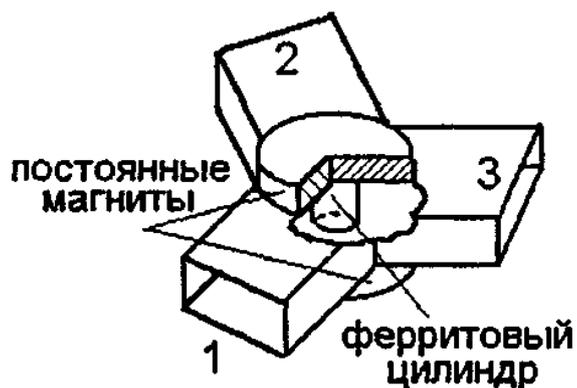


Рисунок 8.17 – Волноводный Y-циркулятор

Все прямоугольные волноводы, образующие плечи тройника, рассчитаны на одноволновый режим работы. Внешнее магнитное поле, создаваемое постоянным магнитом (как показано на рисунке), либо электромагнитом, ориентировано параллельно оси цилиндра.

Высота ферритового цилиндра обычно равна высоте волновода, но иногда используют ферриты несколько меньшей высоты. В Y-циркуляторах, предназначенных для работы на высоком уровне мощности, для улучшения отвода тепла ферритовый цилиндр разрезают на две цилиндрические части, каждая из которых приклеивается к соответствующей широкой стенке волновода в центре *H*-сочленения. Принцип действия Y-циркулятора заключается в следующем. Предположим, что в плече 1 циркулятора возбуждена волна  $H_{10}$ , распространяющаяся в направлении ферритового цилиндра. В результате дифракции волны на цилиндре возникают две волны, одна из которых (левая) обегает ферритовый цилиндр по часовой стрелке, а другая (правая) – против

часовой стрелки (рисунок 8.18, *a*). Как было показано при рассмотрении резонансного ферритового вентиля, направления вращения вектора магнитного поля волны  $H_{10}$  в правой относительно центра половине волновода и в его левой половине противоположны. Поэтому магнитная проницаемость ферритового цилиндра для волн, обтекающих его справа и слева, различна. Это обуславливает различие коэффициентов распространения для левой ( $\beta^+$ ) и правой ( $\beta^-$ ) волн, т.е. проходя одинаковый путь  $l$  вдоль поверхности цилиндра, волны получают разный фазовый сдвиг  $\varphi^+ = \beta^+l$  и  $\varphi^- = \beta^-l$  соответственно.

В результате на поверхности ферритового цилиндра устанавливается стоячая волна. При заданной частоте путем подбора марки феррита и его диаметра можно добиться, чтобы по окружности цилиндра укладывалась одна волна с двумя узлами (рисунок 8.18, *б*). Положение узлов и пучностей этой волны зависит от величины намагничивающего поля  $H_0$ , поскольку при изменении  $H_0$  изменяются  $\beta^+$  и  $\beta^-$  для волн, обтекающих феррит слева и справа. Величину  $H_0$  подбирают так, чтобы один из узлов стоячей волны напряженности электрического поля располагался напротив плеча 3, как показано на рисунке 8.18, *б*. В этом случае волна  $H_{10}$  в плече 3 не возбуждается, а возбуждаются волны высшего типа, например, волна  $H_{20}$ . Поэтому мощность в плечо 3 не ответвляется. Поскольку пучность электрического поля стоячей волны на феррите находится вблизи средней линии волновода плеча 2, то в плече 2 возбуждается волна  $H_{10}$ , и энергия из плеча 1 практически полностью проходит в плечо 2.

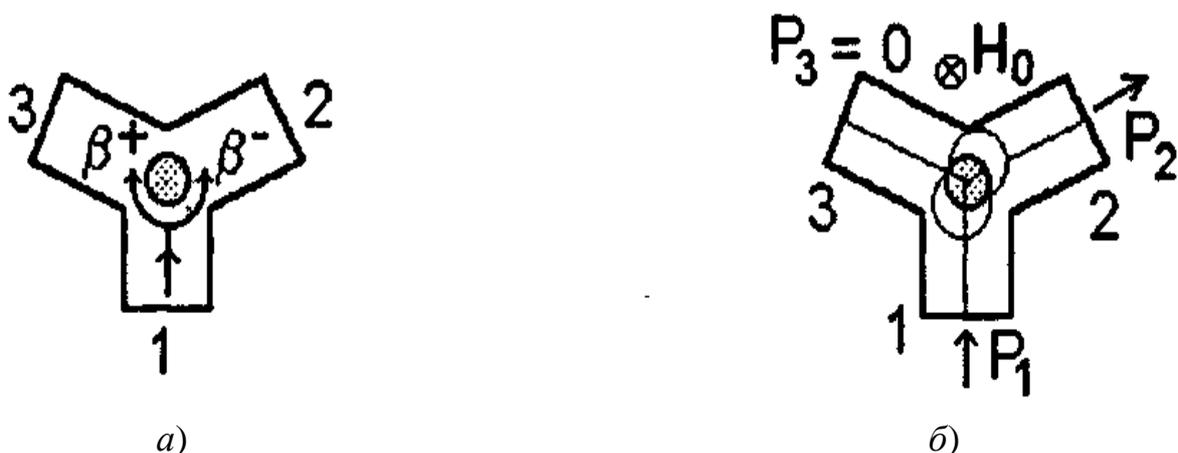


Рисунок 8.18 – Принцип действия Y-циркуляторов

Аналогично можно показать, что при возбуждении плеча 2 вся энергия поступает в плечо 3, и т.д. При изменении направления внешнего магнитного поля направление циркуляции меняется на обратное  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Это связано с изменением фазовых сдвигов, получаемых волнами, обтекающими феррит слева и справа: для «левой» волны будет сдвиг  $\varphi^-$ , а для «правой»  $\varphi^+$ . При

этом на поверхности феррита возникает стоячая волна, у которой узел электрического поля располагается напротив плеча 2.

Основными параметрами реальных циркуляторов являются: развязка между плечами (1 и 3)  $L_{PA3} = 10 \lg \left( \frac{P_2}{P_3} \right)$  [дБ]; вносимые потери при передаче

мощности от генератора в нагрузку (из плеча 1 в плечо 2)  $L_{BH} = 10 \lg \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$  [дБ]

и согласование со стороны каждого из плеч циркулятора, характеризуемое коэффициентом стоячей волны (КСВ).

Как показывают анализ и эксперимент, частотные характеристики Y-циркулятора имеют резонансный характер (рисунок 8.19, а). При этом  $L_{PA3}$  связаны с КСВ на входе каждого плеча: чем больше КСВ, тем меньше  $L_{PA3}$  и больше  $L_{BH}$ . Отметим, что  $L_{BH}$  для циркулятора складывается из тепловых потерь в феррите и стенках тройника и потерь за счет отражения от входа. Конструкция, показанная на рисунке 8.17, позволяет получить  $L_{PA3} > 20$  дБ в полосе 3...5% от средней частоты  $f_0$ . Для увеличения рабочей полосы частот расширяют полосу согласования циркулятора на входе. Для этого используют согласующий трансформатор, выполненный в виде диэлектрического кольца, надеваемого на ферритовый цилиндр (рисунок 8.19, б).

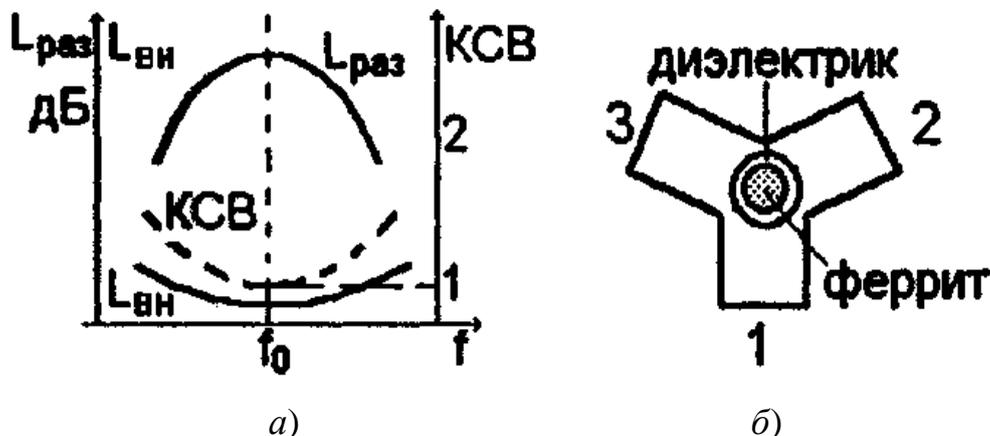


Рисунок 8.19 – Основные параметры реальных Y-циркуляторов

На рисунке 8.20 показана конструкция микрополоскового Y-циркулятора.

В центре микрополоскового Y-сочленения располагается металлический диск, под которым в подложке размещен ферритовый диск, намагниченный вдоль своей оси (на рисунке 8.20 магнитная система не показана). Обычно диаметр металлического диска либо равен, либо несколько меньше диаметра ферритового диска. Наиболее простой конструкция такого Y-циркулятора получается, если в качестве подложки микрополосковой линии используется ненамагниченный феррит. В этом случае для образования циркулятора с по-

мощью внешнего магнита намагничивают часть подложки под металлическим диском. При этом целостность подложки не нарушается.

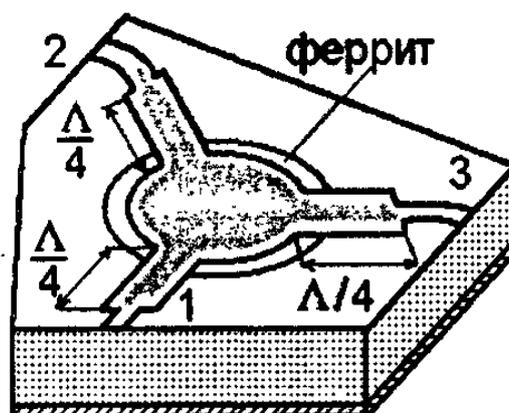


Рисунок 8.20 – Конструкция Y-циркулятора

Принцип действия циркулятора (рисунок 8.20) такой же, как и в случае волноводного Y-циркулятора. Расширение рабочей полосы частот циркулятора обычно обеспечивают, включая во все плечи согласующие четвертьволновые трансформаторы. Отметим, что из всех видов циркуляторов, существующих в настоящее время, Y-циркуляторы получили наибольшее распространение, что объясняется простотой их конструкции, малыми размерами и весом, а также возможностью использования в интегральных схемах.

**СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 558 с.
2. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
3. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
4. Красюк Н.П., Дымович Н.Д. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1974. – 536 с.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – Москва: Изд. «Гардарики», 2003. – 317 с.
6. Савельев В.И. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Апрель. АСТ, 2002. – 336 с.
7. Савельев В.И. Курс общей физики. Волны и оптика. – М.: Апрель. АСТ, 2002. – 256 с.
8. Ерохин Г.А., Чернышев О.В., Козырев Н.Д., Кочержевский В.Г. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 368 с.
9. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1975. – 244 с.