

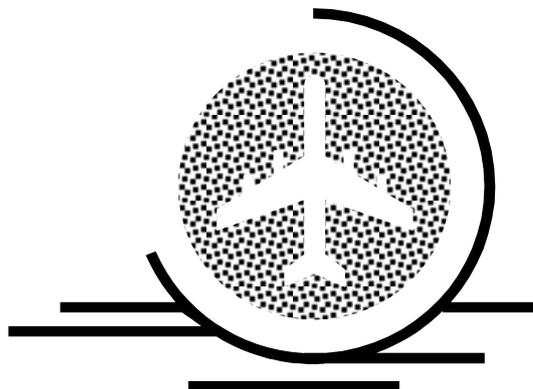


Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

В.Г. Козлов, В.С. Корогодов, А.С. Шостак

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебный практикум для студентов специальности 160905 –
“Техническая эксплуатация транспортного
радиооборудования”



ТОМСК 2006

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

В.Г. Козлов, В.С. Корогодов, А.С. Шостак

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Учебный практикум для студентов специальности 160905 –
“Техническая эксплуатация транспортного
радиооборудования”

2006

Рецензент: профессор кафедры КИПР, д.т.н. Татаринов В.Н.

Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР, к.т.н. Озёркин Д.В.

Козлов В.Г., Корогодов В.С., Шостак А.С.

Основы электродинамики и распространение радиоволн. Учебный практикум для студентов специальности 160905 – «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования».

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2006. – 172 с.

Приведены основные расчетные формулы, примеры решения типовых задач и многовариантные задачи для самостоятельной работы. Рекомендуется использовать решения типовых задач при изучении соответствующих разделов лекционного курса. Даны многовариантные задания для самостоятельных и контрольных работ. Учебный практикум составлен для студентов специальности 160905, но может быть использован и студентами других специальностей радиотехнического профиля очной, заочной и дистанционной формы обучения.

© Козлов В.Г., Корогодов В.С., Шостак А.С., 2006

© Кафедра КИПР Томского государственного
университета систем управления и
радиоэлектроники, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА.....	8
1.1 Основные формулы векторного анализа	8
1.2 Формулы с дифференциальными операциями первого порядка	10
1.3 Дифференциальные операции второго порядка	10
1.4 Дифференциальные операции в некоторых ортогональных системах координат.....	10
1.4.1 Обобщенная цилиндрическая система координат (u, v, z) ..	10
1.4.2 Декартова прямоугольная система координат (x, y, z)	11
1.4.3 Цилиндрическая система координат (r, ψ, z)	11
1.4.4 Сферическая система координат (R, θ, ψ)	12
1.4.5 Свойства векторных полей.....	12
1.4.6 Некоторые полезные на практике векторные тождества....	13
1.5 Радиус-вектор	13
1.6 Примеры на различные элементарные действия с векторами .	14
1.7 Примеры решения типовых задач	16
1.8 Задачи для самостоятельной работы.....	26
2 ТЕМА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА.....	29
2.1 Основные формулы электромагнетизма	29
2.2 Примеры решения типовых задач	32
2.3 Задачи для самостоятельной работы	56
3 ТЕМА 3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	64
3.1 Основные формулы.....	64
3.2 Примеры решения типовых задач	67
3.3 Задачи для самостоятельной работы.....	81
4 ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	85

4.1	Основные формулы.....	85
4.2	Примеры решения типовых задач	90
4.3	Задачи для самостоятельной работы.....	102
5	ТЕМА 5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ	109
5.1	Основные формулы.....	109
5.2	Примеры решения типовых задач	113
5.3	Задачи для самостоятельной работы.....	127
6	РАДИОВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ.....	131
6.1	Основные формулы.....	131
6.2	Примеры решения типовых задач	134
6.3	Задачи для самостоятельного решения.....	137
7	ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ	141
7.1	Основные формулы.....	141
7.2	Примеры решения типовых задач	150
7.3	Задачи для самостоятельного решения.....	156
8	КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН.....	162
8.1	Тема 1. Элементы векторного анализа.....	162
8.2	Тема 2. Основные положения теории электромагнетизма	163
8.3	Тема 3. Уравнения Максвелла	164
8.4	Тема 4. Плоские электромагнитные волны	166
8.5	Тема 5. Граничные условия для векторов электромагнитного поля	167
8.6	Тема 6. Радиоволны в материальных средах.....	168
8.7	Тема 7. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов	169
	СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	171

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум по курсу «Основы электродинамики и распространение радиоволн» содержит разработанные варианты практических занятий, построенных по единому принципу. В каждом его разделе вначале даются краткие теоретические сведения, затем приводятся подробные решения типовых задач и в заключение предлагаются многовариантные задания для самостоятельного решения каждым студентом. Цель данного практикума состоит в оказании помощи студентам в освоении лекционного курса и в выполнении контрольных работ. Для контроля знаний студентов составлены тесты по 7 темам лекционного курса.

Объем практических занятий предполагает 18 часов внеаудиторных (самостоятельных) и 18 часов аудиторных занятий, в том числе 6 часов на проведение 3^х контрольных работ.

По курсу «Основы электродинамики и распространение радиоволн» планируется 18 часов лабораторных и 36 часов лекционных занятий. Самостоятельная работа студентов по всем видам занятий составляет 68 часов.

Программа лекционного курса

Тема 1. Введение.

Цели и задачи дисциплины, организация обучения и самостоятельной работы студентов.

Место электромагнетизма в современной физической картине мира. Особенности диапазона СВЧ. Техника СВЧ и ее применение. Распространение радиоволн. Элементы векторной алгебры и векторного анализа.

Тема 2. Теория электромагнитного поля.

Электромагнитное поле и его математические модели. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома. Ток смещения. Закон электромагнитной индукции. Материальные уравнения электромагнитного поля. Поляризационные и сторонние токи.

Тема 3. Уравнения Максвелла.

Сводка уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла в интегральной форме. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Уравнения Максвелла для гармонических колебаний. Монохроматические поля. Комплексные амплитуды полей. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь. Энергетические соотношения в электромагнитном поле.

Тема 4. Распространение плоских однородных волн.

Плоские однородные электромагнитные волны. Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне. Плоские волны с эллиптической поляризацией. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.

Тема 5. Падение плоских однородных электромагнитных волн на плоскую границу раздела сред.

Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины.

Падение плоских однородных электромагнитных волн на плоскую границу раздела сред под произвольным углом. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом. Угол Брюстера.

Распространение плоских электромагнитных волн в средах с частотной дисперсией. Волны в диэлектриках и в проводящей среде. Плазма и ее электродинамические параметры. Распространение электромагнитных волн в плазме. Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости. Понятие групповой скорости.

Распространение плоских электромагнитных волн в анизотропных средах. Физический механизм анизотропии ферритов. Поперечное и продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите. Эффекты Коттона-Муттона и Фарадея.

Тема 6. Общие вопросы распространения радиоволн.

Классификация радиоволн по диапазону и способу распространения. Формулы идеальной радиопередачи и множитель ослабления. Определение области пространства, существенной при распространении радиоволн.

Распространение земных радиоволн. Расчет поля при поднятых антеннах в зоне прямой видимости. Интерференционная формула и квадратичная формула Введенского. Диаграммы направленности поднятых антенн. Расчет поля при низко расположенных антеннах. Структура поля вблизи поверхности Земли. Формула Шулейкина – Ван-дер-Поля.

Влияние тропосферы на распространение радиоволн. Строение тропосферы, её электрические параметры. Явление рефракции. Сверхрефракция. Тропосферные волноводы. Рассеяние радиоволн на тропосферных неоднородностях. Дальнее тропосферное распространение.

Влияние ионосферы на распространение радиоволн. Строение ионосферы. Физические причины образования в ионосфере ионизированных слоев. Критические и максимальные частоты. Влияние магнитного поля Земли на

распространение радиоволн в ионосфере. Особенности распространения в ионосфере волн различных диапазонов.

Распространение радиоволн на космических линиях связи. Системы спутниковой связи и их качественные показатели. Полосы частот в системах спутниковой радиосвязи. Шумы атмосферы, космические шумы и шумы приемных систем. Примеры систем спутниковой связи в России и за рубежом

Тема 7. .Особенности распространение радиоволн различных диапазонов.

Влияние электродинамических свойств земных покровов на распространение сверхдлинных, длинных и средних радиоволн. Особенности распространения коротких волн (зона молчания, ночные волны и дневные волны). Особенности распространения ультракоротких волн (радиорелейные линии связи, космическая связь).

1 ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1.1 Основные формулы векторного анализа

Понятие вектора как величины, характеризуемой (в отличие от скаляра) не только количеством, но и направлением в пространстве, соответствует многим физическим параметрам, например, сила, скорость и т.д.

Векторы \vec{A} , \vec{B} можно представить как $\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot A$ и $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot B$, где \vec{A}_0, \vec{B}_0 – единичные векторы (называемыми ортами), а A, B – абсолютные значения (модули) векторов \vec{A} , \vec{B} . Орты, соответствующие направлениям осей декартовой системы координат, будут обозначаться $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$. Таким образом, в проекциях на эти оси вектор \vec{A} запишется:

$$\vec{A} = \vec{x}_0 \cdot A_x + \vec{y}_0 \cdot A_y + \vec{z}_0 \cdot A_z, \quad (1.1)$$

Проекции A_x, A_y, A_z называются компонентами или составляющими вектора \vec{A} .

Сложение в векторной алгебре означает алгебраическое сложение компонентов векторов:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{x}_0(A_x + B_x) + \vec{y}_0(A_y + B_y) + \vec{z}_0(A_z + B_z), \quad (1.2)$$

Умножение вектора \vec{A} на число (скаляр) m есть вектор \vec{C} :

$$\vec{C} = m \cdot \vec{A} = \vec{x}_0 mA_x + \vec{y}_0 mA_y + \vec{z}_0 mA_z, \quad (1.3)$$

с новым абсолютным значением $C = |m|A$ (при $m > 0$ направление вектора \vec{C} совпадает с направлением вектора \vec{A}).

Скалярное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} определяется как:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \alpha = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z, \quad (1.4)$$

где α – угол между направлениями векторов. Как видно из (1.4), нулевое значение скалярного произведения имеет место и при неравных нулю исходных векторах \vec{A} и \vec{B} . Тогда эти вектора называются ортогональными: они направлены под прямым углом $\alpha = \pi/2$.

Векторное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} есть:

$$\begin{aligned} [\vec{A} \cdot \vec{B}] = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}_0 \cdot A \cdot B \sin \alpha = \vec{x}_0(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{y}_0(A_z B_x - A_x B_z) + \\ + \vec{z}_0(A_x B_y - A_y B_x) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где \vec{C}_0 – единичный вектор, направленный по нормали к плоскости векторов \vec{A} и \vec{B} , причем так, что \vec{A} , \vec{B} и \vec{C}_0 – образуют «правую тройку» векторов:

если смотреть вдоль \vec{C}_0 , то кратчайшее угловое расстояние между векторами \vec{A} и \vec{B} обозначенное α , будет соответствовать движению от \vec{A} к \vec{B} по часовой стрелке. Векторное произведение – некоммутативно, то есть сомножители нельзя переставлять местами, имея в виду сохранение результата:

$$[\vec{B} \cdot \vec{A}] = -[\vec{A} \cdot \vec{B}]. \quad (1.6)$$

Под векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} понимается скаляр $\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}]$. При этом:

$$\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}] = [\vec{A} \cdot \vec{B}]\vec{C} = [\vec{C} \cdot \vec{A}]\vec{B}, \quad (1.7)$$

то есть, важен циклический порядок следования перемножаемых векторов, при сохранении которого безразлично, какие именно два вектора из трех образуют векторное произведение. Коротко можно записать:

$$\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Двойное векторное произведение:

$$[\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.9)$$

Скалярные произведения, выделенные при помощи круглых скобок, по сути, являются числами (входят как числа), которые умножаются на вектор вне этих скобок.

Теорема Остроградского-Гаусса. Если произвольный вектор \vec{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны в объеме V и на ограничивающей этот замкнутый объем поверхности S , то:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV. \quad (1.10)$$

Теорема Стокса. Если произвольный вектор \vec{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны на поверхности S и на ограничивающем ее замкнутом контуре L , то:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}, \quad (1.11)$$

причем направление обхода контура L и поверхности S образуют правовинтовую систему.

Оператор Гамильтона (набла-оператор). Сведение разнообразных дифференциальных пространственных операций к простой и однотипной схеме осуществляется при помощи дифференциального оператора Гамильтона. В декартовой системе координат оператор Гамильтона раскрывается следующим образом:

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.12)$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – единичные векторы (орты) по осям x, y, z .

1.2 Формулы с дифференциальными операциями первого порядка

$$\begin{aligned}
 \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi - \text{вектор}; \\
 \text{div } \vec{A} &= (\nabla \vec{A}) - \text{скаляр}; \\
 \text{rot } \vec{A} &= [\nabla \vec{A}] - \text{вектор}; \\
 \text{grad } (\varphi + \psi) &= \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi; \\
 \text{div}(\vec{A} + \vec{B}) &= \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}; \\
 \text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) &= \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}; \\
 \text{grad } (\varphi \psi) &= \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi; \\
 \text{div}(\varphi \vec{A}) &= \vec{A} \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ div } \vec{A}; \\
 \text{div}[\vec{A} \vec{B}] &= \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}; \\
 \text{rot}(\varphi \vec{A}) &= [\text{grad } \varphi \vec{A}] + \varphi \text{ rot } \vec{A}.
 \end{aligned}$$

1.3 Дифференциальные операции второго порядка

$\text{div grad } \varphi = \nabla (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$ – оператор Лапласа (лапласиан) от скалярной функции φ ;

$$\begin{aligned}
 \text{div rot } \vec{A} &= \nabla [\nabla \vec{A}] = 0; \\
 \text{rot grad } \varphi &= [\nabla \nabla \varphi] = 0; \\
 \text{rot rot } \vec{A} &= \nabla [\nabla \vec{A}] - (\nabla \nabla \vec{A}) = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}; \\
 \nabla^2 \vec{A} &= \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} - \text{лапласиан от векторной функции } \vec{A}.
 \end{aligned}$$

1.4 Дифференциальные операции в некоторых ортогональных системах координат

1.4.1 Обобщенная цилиндрическая система координат (u, v, z)

$$\begin{aligned}
 \text{grad } \varphi &= \vec{u}_0 \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \vec{v}_0 \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \vec{z}_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad}_{\perp} \varphi + \vec{z}_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
 \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{h_v h_u} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_v) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div}_{\perp} \vec{A} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\
 \text{rot } \vec{A} &= \vec{u}_0 \left[\frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial A_v}{\partial z} \right] + \vec{v}_0 \left[\frac{\partial A_u}{\partial z} - \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial u} \right] + \vec{z}_0 \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_u) \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v}{h_u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u}{h_v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}_{\perp} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= \nabla_{\perp}^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \end{aligned}$$

Здесь $\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{z}_0$ – координатные орты в точке наблюдения; $h_u, h_v, (h_z = 1)$ – коэффициенты Ламе; $\operatorname{grad}_{\perp} \varphi, \operatorname{div}_{\perp} \varphi, \operatorname{div} \operatorname{grad}_{\perp} \varphi = \nabla_{\perp}^2 \varphi$ – дифференциальные операции по поперечным координатам u и v .

1.4.2 Декартова прямоугольная система координат (x, y, z)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \\ \nabla^2 \vec{A} &= \vec{x}_0 \nabla^2 A_x + \vec{y}_0 \nabla^2 A_y + \vec{z}_0 \nabla^2 A_z. \end{aligned}$$

1.4.3 Цилиндрическая система координат (r, ψ, z)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{r}_0 \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_{\psi}}{\partial z} \right] + \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\psi}) - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right); \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot A_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

1.4.4 Сферическая система координат (R, θ, ψ)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\varphi &= \bar{R}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial R} + \bar{\theta}_0 \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \bar{\psi}_0 \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}; \\ \operatorname{div}\bar{A} &= \frac{\partial A_R}{\partial R} + \frac{2}{R} \cdot A_R + \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}; \\ \operatorname{rot}\bar{A} &= \bar{R}_0 \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi} \right] + \bar{\theta}_0 \cdot \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \left[\frac{\partial A_R}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \sin\theta A_\psi) \right] + \\ &\quad + \bar{\psi}_0 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta} \right); \\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi &= \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}. \end{aligned}$$

1.4.5 Свойства векторных полей

Будем полагать, что вектор \bar{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны во всех точках поля. Тогда векторное поле \bar{A} задано однозначно, если известны его ротор и дивергенция, как функции пространственных координат:

$$\operatorname{rot}\bar{A} = F(R), \quad \operatorname{div}\bar{A} = f(R),$$

причем эти функции должны отличаться от нуля в ограниченной области пространства.

Векторное поле называется потенциальным, если $\bar{A} = -\operatorname{grad}\varphi$, где функцию φ именуют скалярным потенциалом поля \bar{A} . Введение знака минус вызвано тем обстоятельством, что в физических задачах принято направлять вектор \bar{A} в сторону убывания потенциала φ .

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля \bar{A} является равенство $\operatorname{rot}\bar{A} = 0$.

Векторное поле \bar{A} называется соленоидальным, если $\bar{A} = \operatorname{rot}\bar{C}$, где функцию \bar{C} именуют векторным потенциалом поля \bar{A} .

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля \bar{A} является равенство $\operatorname{div}\bar{A} = 0$.

1.4.6 Некоторые полезные на практике векторные тождества

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= 0; \\
 \operatorname{rot} \operatorname{grad} U &= 0; \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}; \\
 \operatorname{grad}(U \cdot V) &= U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U, \\
 \text{где } U \text{ и } V \text{ скалярные функции;} \\
 \operatorname{div}(U \cdot \vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} U; \\
 \operatorname{rot}(U \cdot \vec{A}) &= U \operatorname{rot} \vec{A} - [\vec{A} \operatorname{grad} U]; \\
 \operatorname{div}[\vec{A} \cdot \vec{B}] &= \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}.
 \end{aligned}$$

1.5 Радиус-вектор

Рассмотрим пример вектора, зависящего от точки пространства, в которой он рассматривается, то есть пример векторной функции \vec{r} . Это радиус-вектор:

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z, \quad (1.13)$$

который представляет собой направленный отрезок, соединяющий начало координат $O(0, 0, 0)$ с некоторой «текущей» точкой $M(x, y, z)$. Длина радиус-вектора $r = O \cdot M$ (его абсолютное значение) есть скалярная функция:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отрезок, соединяющий точки $P(x', y', z')$ и $M(x, y, z)$, изображается разностью их радиус-векторов:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{x}_0(x - x') + \vec{y}_0(y - y') + \vec{z}_0(z - z'). \quad (1.14)$$

Абсолютное значение этого вектора выражает расстояние между точками P и M :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (1.15)$$

Векторный дифференциал длины вектора \vec{r} из (1.13) запишется:

$$d\vec{r} = \vec{x}_0 dx + \vec{y}_0 dy + \vec{z}_0 dz. \quad (1.16)$$

Пусть задана векторная функция $\vec{v}(x, y, z)$, и соответствующее векторное поле описывается силовыми линиями. Будем считать, что $d\vec{l}$ есть векторный дифференциал силовой линии. Тогда он везде параллелен вектору $\vec{v} = \vec{x}_0 v_x + \vec{y}_0 v_y + \vec{z}_0 v_z$, то есть $d\vec{l} = k\vec{v}$ (k – коэффициент пропорциональности). Сравнивая представления $d\vec{l}$ и \vec{v} в декартовых координатах, получаем пропорцию:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (1.17)$$

из которой следуют дифференциальные уравнения, характеризующие силовые линии.

При изучении различных полей важную роль играет обратная величина расстояния между точками, определяемая согласно (1.15) как:

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}') = \psi(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (1.18)$$

Фиксируя точку $P(x', y', z')$, будем рассматривать эту величину как функцию $\psi(x, y, z)$, и вычислим ее градиент. Находим:

$$\text{grad}\psi = \frac{\vec{x}_0(x-x') + \vec{y}_0(y-y') + \vec{z}_0(z-z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}},$$

или

$$\text{grad}\psi = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.19)$$

В частности, когда точка $P(x', y', z')$ совпадает с началом координат $O(0, 0, 0)$, то есть $\vec{r}' = 0$, имеем:

$$\text{grad}\psi = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}_0}{r^2},$$

где \vec{r}_0 – орт радиального направления.

Если же фиксирована точка $M(x, y, z)$, то $\frac{1}{|r-r'|}$ есть функция $\psi(x', y', z')$. В этом случае $\text{grad}'\psi = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$, или если $M(x, y, z)$ совпадает с началом координат $O(0, 0, 0)$, то есть $\vec{r} = 0$, имеем:

$$\text{grad}'\psi = -\frac{\vec{r}'}{(r')^3} = -\frac{\vec{r}'_0}{(r')^2}.$$

1.6 Примеры на различные элементарные действия с векторами

Рассмотрим вектор $\vec{A} = 3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z}$.

а) Найти длину вектора \vec{A} .

Для квадрата вектора \vec{A} справедливо равенство: $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, где A_i – проекции вектора на соответствующие оси прямоугольной системы коор-

динат. Тогда $A^2 = |\vec{A}|^2 \cos^2 \alpha = 3^2 + 4^2 + 5^2$, откуда следует, что $A = \sqrt{50}$ – есть длина вектора \vec{A} .

б) Какова длина проекции вектора \vec{A} на плоскость xOy или $z = 0$?

Вектор, являющийся проекцией \vec{A} на плоскость xOy , это вектор $\vec{B} = 3\vec{x} + 4\vec{y}$; $B^2 = \vec{B}\vec{B}$; $B = 5$.

в) Построить вектор, лежащий в плоскости xOy , и перпендикулярный вектору \vec{A} .

Запишем этот вектор в виде $\vec{B} = B_x\vec{x} + B_y\vec{y}$ и обладающий свойством $\vec{A}\vec{B} = 0$, или $(3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z})(B_x\vec{x} + B_y\vec{y}) = 0$.

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z,$$

для нашего случая примет вид $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z})(B_x\vec{x} + B_y\vec{y}) = 3B_x + 4B_y = 0$ или $B_y/B_x = -3/4$. Последнее выражение есть уравнение прямой.

г) Построить единичный вектор \vec{B}_0 .

Для этого вектора $B_x^2 + B_y^2 = 1$, или

$$3B_x = -4B_y; \quad 9B_x^2 = 16B_y^2;$$

$$B_x = \frac{4}{5}; \quad B_y = -\frac{3}{5}$$

откуда

$$\vec{B}_0 = \frac{4}{5}\vec{x}_0 - \frac{3}{5}\vec{y}_0.$$

д) Найти скалярное произведение вектора \vec{A} на вектор $\vec{C} = 2\vec{x}_0$.

По определению $\vec{A} \cdot \vec{C} = A_x \cdot C_x + A_y \cdot C_y + A_z \cdot C_z = A_x \cdot C_x = 6$.

е) Выразить вектор \vec{A} и \vec{C} в системе отсчета, полученной из системы x, y, z поворотом на $\pi/2$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси z .

Новые единичные векторы $\vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0$ связаны со старыми $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ следующими соотношениями: $\vec{x}'_0 = \vec{y}_0$; $\vec{y}'_0 = -\vec{x}_0$; $\vec{z}'_0 = \vec{z}_0$.

Таким образом, все \vec{x} заменяем на $-\vec{y}'$; \vec{y} заменяем на \vec{x}' , получим:

$$\vec{A} = 4\vec{x}' - 3\vec{y}' + 5\vec{z}'; \quad \vec{C} = -2\vec{y}'.$$

ж) Найти скалярное произведение векторов \vec{A} и \vec{C} в штрихованной системе координат.

По определению $\vec{A}\vec{C} = A_y C_y = (-3)(-2) = 6$, точно такое же, как и в нештрихованной системе координат.

з) Найти векторное произведение $\vec{A} \times \vec{C}$.

$$\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10\vec{y} - 8\vec{z} = \vec{B}.$$

Образуя скалярное произведение, покажем, что новый вектор перпендикулярен как к \vec{A} , так и к \vec{C} :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 0;$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 0 = 0.$$

и) Найти вектор $\vec{B} = \vec{A} - \vec{C}$.

По определению:

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{C} &= (A_x - C_x) \cdot \vec{x} + (A_y - C_y) \cdot \vec{y} + (A_z - C_z) \cdot \vec{z} = \\ &= (3 - 2) \cdot \vec{x} + (4 - 0) \cdot \vec{y} + (5 - 0) \cdot \vec{z} = \vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z}. \end{aligned}$$

1.7 Примеры решения типовых задач

1.7.1 Два вектора единичной длины образуют угол $\varphi = 30^\circ$. Найти их скалярное произведение.

Решение: По определению скалярного произведения двух векторов имеем:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.7.2 Доказать, что векторы, имеющие начало в точке $A(-1; 1)$, а концы в точках $B(1; 2)$ и $C(0; -1)$, соответственно, перпендикулярны.

Решение: Предположим, что точки A , B и C лежат на плоскости xOy прямоугольной системы координат.

Обозначим вектор \overline{AB} через \vec{B} , а \overline{AC} через \vec{C} . Тогда:

$$\vec{B} = 2\vec{x} + \vec{y}; \quad \vec{C} = \vec{x} - 2\vec{y}.$$

Условием ортогональности является равенство нулю скалярного произведения векторов \vec{B} и \vec{C} .

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = B_x C_x + B_y C_y = 2 - 2 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

1.7.3 В декартовой системе координат проекции векторного поля \vec{A} постоянны в любой точке пространства: $A_x = A_0$, $A_y = B_0$, $A_z = 0$. Построить картину силовых линий векторного поля.

Решение: Поскольку одна из декартовых составляющих векторного поля отсутствует, силовые линии должны представлять собой семейство плоских кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости xOy . Вектор поля в любой точке касателен к силовой линии (см. (1.17)), откуда вытекает дифференциальное уравнение силовых линий:

$$\frac{dx}{A_0} = \frac{dy}{B_0},$$

являющееся следствием подобия двух прямоугольных треугольников с катетами dx , dy и A_0 , B_0 , соответственно. Откуда, общий интеграл уравнения силовых линий имеет вид:

$$y = \frac{B_0}{A_0} x + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Таким образом, силовые линии поля представляют собой однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом наклона к оси X , равным $\frac{B_0}{A_0}$.

1.7.4 Вычислить дивергенцию векторного произведения полей \vec{B} и \vec{A} .

Решение: Воспользуемся краткой записью с помощью оператора Гамильтона:

$$\operatorname{div}[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к приведенному векторному произведению можно применить обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \nabla_A[\vec{A} \cdot \vec{B}] + \nabla_B[\vec{A} \cdot \vec{B}].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, на которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. Учитывая все сказанное, имеем:

$$\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \vec{B}[\nabla_A \vec{A}] + \vec{A}[\nabla_B \cdot \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Знак минус обусловлен некоммутативностью векторного произведения.

1.7.5 Вычислить лапласиан функции $2a \ln \frac{1}{r}$, где $r^2 = x^2 + y^2$, $a = \text{const}$.

Решение: Заданная функция есть вектор на плоскости xOy , то есть мы имеем дело с лапласианом от векторной функции. Задачу решаем прямым дифференцированием. При этом учтем, что $\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y$ и, следовательно,

производные $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ от \vec{r} равны нулю.

$$\nabla^2 \left(2a \ln \frac{1}{r} \right) = 2a \nabla^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -2a \frac{1}{r^2} (\nabla^2 \vec{r}) = 0.$$

1.7.6 В декартовой системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную составляющую $A_y = 15x^2$. Проверить, является ли поле: а) соленоидальным; б) потенциальным.

Решение: Необходимым и достаточным условием потенциальности поля \vec{A} является равенство $\text{rot} \vec{A} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{x}_0(0-0) + \vec{y}_0(0-0) + \vec{z}_0(30x-0) = 30x \vec{z}_0 \neq 0, \end{aligned}$$

то есть поле не потенциальное.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля \vec{A} является равенство $\text{div} \vec{A} = 0$.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + \frac{\partial(15x^2)}{\partial y} + 0 = 0,$$

следовательно, поле соленоидальное.

Ответ: поле $A_y = 15x^2$ является соленоидальным.

1.7.7 Даны два векторных поля: $\vec{A} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 5\vec{z}_0$; $\vec{B} = -\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + 6\vec{z}_0$.

Рассчитать:

- Длину каждого вектора.
- Скалярное произведение.
- Определить угол между векторами.
- Найти направляющие косинусы каждого из векторов.
- Найти $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$.
- Найти векторное поле $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$. Показать, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

Решение:

а) Вычислим длины векторов:

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2};$$

$$B = |\vec{B}| = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}.$$

б) Вычислим скалярное произведение:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = -3 + 8 - 30 = -25.$$

в) Определим угол между векторами α . Так как по определению скалярного произведения:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \alpha,$$

то

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})}{A \cdot B} = \frac{-25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{41}} = -0.522$$

и

$$\alpha = \arccos(-0.522) = 123.5^\circ.$$

г) Вычислим направляющие косинусы каждого из векторов.

Для вектора \vec{A} :

$$\cos \alpha_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} = \frac{3}{7.071} = 0.42;$$

$$\cos \alpha_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \frac{4}{7.071} = 0.57;$$

$$\cos \alpha_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{-5}{7.071} = -0.7071.$$

Для вектора \vec{B} :

$$\cos \beta_x = \frac{B_x}{|\vec{B}|} = \frac{-1}{6.403} = -0.156;$$

$$\cos \beta_y = \frac{B_y}{|\vec{B}|} = \frac{2}{6.403} = 0.312;$$

$$\cos \beta_z = \frac{B_z}{|\vec{B}|} = \frac{6}{6.403} = 0.937.$$

д) Вычислим сумму $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$. При сложении векторов алгебраически складывают их компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= \vec{x}_0(A_x + B_x) + \vec{y}_0(A_y + B_y) + \vec{z}_0(A_z + B_z) = \\ &= \vec{x}_0(3 - 1) + \vec{y}_0(4 + 2) + \vec{z}_0(-5 + 6) = 2\vec{x}_0 + 6\vec{y}_0 + \vec{z}_0; \\ \vec{A} - \vec{B} &= \vec{x}_0(A_x - B_x) + \vec{y}_0(A_y - B_y) + \vec{z}_0(A_z - B_z) = \\ &= \vec{x}_0(3 + 1) + \vec{y}_0(4 - 2) + \vec{z}_0(-5 - 6) = 4\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 - 11\vec{z}_0. \end{aligned}$$

е) Вычислим векторное произведение $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$:

$$\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{x}_0(\vec{x}_0(24+10) + \vec{y}_0(5-18) + \vec{z}_0(6+4)A_yB_z - A_zB_y) + \vec{y}_0(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{z}_0(A_xB_y - A_yB_x) = \vec{x}_0(24+10) + \vec{y}_0(5-18) + \vec{z}_0(6+4) = 34\vec{x}_0 - 13\vec{y}_0 + 10\vec{z}_0$$

и покажем, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} , то есть что $(\vec{A} \cdot \vec{C}) = 0$ и что $(\vec{B} \cdot \vec{C}) = 0$. Действительно:

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = A_x \cdot C_x + A_y \cdot C_y + A_z \cdot C_z = 34 \cdot 3 + (-13) \cdot 4 + 10 \cdot (-5) = 0$$

и

$$(\vec{B} \cdot \vec{C}) = B_x \cdot C_x + B_y \cdot C_y + B_z \cdot C_z = 34 \cdot (-1) + (-13) \cdot 2 + 10 \cdot 6 = 0,$$

а при этом вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

1.7.8. Две материальные точки 1 и 2 движутся вдоль осей x и y соответственно со скоростями $v_1 = 2\vec{x}_0$ см/с и $v_2 = 3\vec{y}_0$ см/с. При $t = 0$ их координаты равны $x_1 = -3$ см; $y_1 = 0$ см; $x_2 = 0$ см; $y_2 = -3$ см.

а) Найдите вектор $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, выражающий положение материальной точки 2 относительно точки 1 как функции времени.

б) Когда и где расстояние между этими точками является наименьшим?

Решение:

а) Запишем выражение для радиусов-векторов точек 1 и 2 как функцию времени:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t=0) + \vec{v}_1 \cdot t = (-3 + 2t) \cdot \vec{x}_0,$$

где $v_1 = 2\vec{x}_0$, $\vec{r}_1(t=0) = -3\vec{x}_0$;

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(t=0) + \vec{v}_2 \cdot t = (-3 + 3t) \cdot \vec{y}_0,$$

где $v_2 = 3\vec{y}_0$, $\vec{r}_2(t=0) = -3\vec{y}_0$.

б) Расстояние между точками будет изменяться со временем, и его будет характеризовать длина вектора:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (3 - 2t)\vec{x}_0 + (-3 + 3t)\vec{y}_0,$$

которая равна

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{(2t-3)^2 + (3t-3)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}.$$

Чтобы найти в какой момент времени будет наименьшее расстояние между точками, продифференцируем выражение для $r(t)$ и приравняем его к нулю:

$$\frac{\partial r(t)}{\partial t} = 0.5 \cdot \frac{26t - 30}{\sqrt{13t^2 - 30t + 18}} = 0.$$

Откуда получим:

$$t = \frac{30}{26} = 1.15c.$$

Ответ: $\vec{r} = [(3-2t) \cdot \vec{x}_0 + (3t-3) \cdot \vec{y}_0]$ см; $t = 1.15$ с.

1.7.9. Докажите, что вектор \vec{a} перпендикулярен к вектору \vec{b} , если $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение.

Из равенства $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ следует, что $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$, то есть:

$$\vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Откуда следует, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Поскольку по определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$, то в рассматриваемом случае $\cos \alpha = 0$, а сам угол между векторами $\alpha = 90^\circ$, то есть вектор \vec{a} перпендикулярен к вектору \vec{b} .

1.7.10. Начало вектора в точке $A(2; 3)$; конец его в точке $B(-1; 4)$.

Разложить этот вектор по единичным векторам координатных осей.

Решение.

$$\overline{AB} = (-1-2)\vec{x}_0 + (4-3)\vec{y}_0 = -3\vec{x}_0 + \vec{y}_0.$$

Ответ: $\overline{AB} = -3\vec{x}_0 + \vec{y}_0$.

1.7.11. Доказать, что векторы, имеющие начало в точке $A(-1; 1)$, а концы в точках $B(1; 2)$ и $C(0; -1)$ соответственно, ортогональны.

Решение.

Запишем выражения для векторов:

$$\overline{AB} = (1+1)\vec{x}_0 + (2-1)\vec{y}_0 = 2\vec{x}_0 + \vec{y}_0;$$

$$\overline{AC} = (0+1)\vec{x}_0 + (-1-1)\vec{y}_0 = \vec{x}_0 - 2\vec{y}_0.$$

Запишем выражение для скалярного произведения векторов:

$$(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Ответ: векторы ортогональны, так как их скалярное произведение равно нулю.

1.7.12. Найти угол, который составляет винтовая линия $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = vt$ с ее осью (ось z). Здесь величина v численно равна линейной скорости вращательного движения $v = \omega \cdot r$.

Решение.

Запишем выражение для вектора касательной \overline{dr} :

$$\overline{dr} = dx \cdot \vec{x}_0 + dy \cdot \vec{y}_0 + dz \cdot \vec{z}_0 = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{y}_0 + v \cdot \vec{z}_0.$$

Запишем выражения для косинуса угла θ , который составляет винтовая линия с осью z для $|\vec{z}_0|$, для $(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)$ и для $|\vec{dr}|$, а затем вычислим $\cos\theta$ и θ :

$$\cos\theta = \frac{(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)}{|\vec{dr}| \cdot |\vec{z}_0|}; \quad |\vec{z}_0| = 1; \quad (\vec{dr} \cdot \vec{z}_0) = dr_z \cdot 1 = v;$$

$$|\vec{dr}| = \sqrt{(r \cdot \omega)^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)) + v^2} = \sqrt{(r \cdot \omega)^2 + v^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2};$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)}{|\vec{dr}| \cdot |\vec{z}_0|} = \frac{v}{v\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ.$$

Ответ: $\theta = 45^\circ$.

1.7.13. Вычислить лапласиан функции $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U)}{\partial r}$, если функция $U = U(x, y, z)$ – гармоническая, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение.

Запишем выражения для комплексной амплитуды гармонической функции $U = U(x, y, z)$ и для лапласиана функции $\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U)}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_0 \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}); \\ \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U_0 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}))}{\partial r} \right] = \\ &= U_0 \cdot \nabla^2 \left[\frac{1}{r} \cdot (2 \cdot r \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{r}^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot j \cdot \vec{k}) \right] = \\ &= U_0 \cdot \nabla^2 \left[(2 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right]. \end{aligned}$$

Запишем выражения для векторов \vec{r} и \vec{k} и для скалярного произведения $(\vec{k} \cdot \vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0; \\ \vec{k} &= k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0; \\ (\vec{k} \cdot \vec{r}) &= k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z. \end{aligned}$$

С учётом последнего выражения формула для лапласиана $\nabla^2 \varphi$ примет вид:

$$\nabla^2 \varphi = U_0 \cdot \nabla^2 \left\{ [2 + j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)] \cdot \exp(j \cdot k_x \cdot x) \cdot \exp(j \cdot k_y \cdot y) \cdot \exp(j \cdot k_z \cdot z) \right\}.$$

Лапласиан функции $\nabla^2 \varphi$ в декартовой системе координат равен:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Вычислим каждое слагаемое лапласиана функции отдельно:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (2 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) (3 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= U_0 \left\{ (j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (3 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= -U_0 \cdot k_x^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})
\end{aligned}$$

В силу симметрии функции относительно декартовой системы координат, имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -U_0 \cdot k_y^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}); \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -U_0 \cdot k_z^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}).
\end{aligned}$$

Вычислим лапласиан, суммируя три последних выражения для его слагаемых:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -U_0 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \\
&= -U_0 \cdot |\vec{k}|^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}).
\end{aligned}$$

Ответ: $\nabla^2 \varphi = -U_0 \cdot |\vec{k}|^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})$.

1.7.14. В декартовой системе координат скалярное поле φ имеет вид $\varphi = \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})$, где $j = \sqrt{-1}$; $\vec{k} = k_x \vec{x}_0 + k_y \vec{y}_0 + k_z \vec{z}_0$; \vec{r} – радиус-вектор; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орты. Найти выражения для $\text{grad } \varphi$ и $\nabla^2 \varphi$.

Решение.

Запишем выражения для векторов \vec{r} и \vec{k} , для скалярного произведения $(\vec{r} \cdot \vec{k})$ и для скалярного поля φ :

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0; \\
\vec{k} &= k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0; \\
(\vec{k} \cdot \vec{r}) &= k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z; \\
\varphi &= \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp[-j \cdot (k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)].
\end{aligned}$$

Найдём выражение для $\text{grad } \varphi$:

$$\begin{aligned}
\text{grad} \varphi &= \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\
&= -j \cdot k_x \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{x}_0 - j \cdot k_y \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{y}_0 - j \cdot k_z \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{z}_0 = \\
&= -j \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0) = -j \cdot \vec{k} \cdot \varphi.
\end{aligned}$$

Вычислим лапласиан:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \\ &= (-j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (-j \cdot k_y)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (-j \cdot k_z)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ &= -\exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -\vec{k}^2 \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Ответ: $\text{grad}\varphi = -j \cdot \vec{k} \cdot \varphi$; $\nabla^2\varphi = -\vec{k}^2 \cdot \varphi$.

1.7.15. В сферической системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную r -ю составляющую, причем $A_r = f(r)$. Какова должна быть функция $f(r)$ чтобы дивергенция поля \vec{A} обращалась тождественно в нуль? Построить картину силовых линий поля.

Решение.

Запишем выражение для r -ой составляющей дивергенции поля \vec{A} в сферической системе координат и приравняем её к нулю:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot f(r))}{\partial r} = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{\partial(r^2 \cdot f(r))}{\partial r} = 0, \quad r^2 \cdot f(r) = \text{const} = a \quad \text{и} \quad f(r) = \frac{a}{r^2}.$$

Другой вариант решения. Из выражения:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = 0$$

получим равенство:

$$\frac{\partial A_r}{A_r} = -\frac{2 \cdot \partial r}{r},$$

интегрирование которого даёт:

$$\ln A_r = -2 \ln r + \ln C \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{A_r \cdot r^2}{C}\right) = 0.$$

Это означает, что:

$$\left(\frac{A_r \cdot r^2}{C}\right) = 1 \quad \text{и} \quad f(r) = A_r = \frac{C}{r^2}.$$

Картина силовых линий поля $A_r = f(r)$ изображена на рисунке 1.1.

Ответ: $f(r) = A_r = \frac{C}{r^2}$, где C – константа.

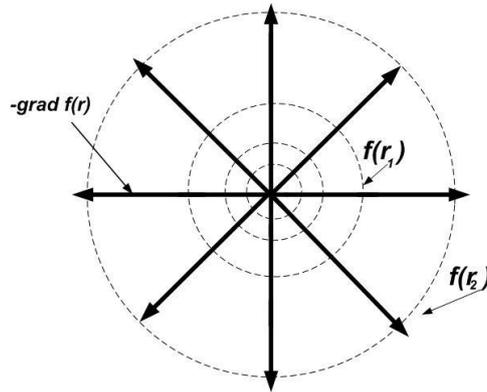


Рисунок 1.1 – Картина силовых линий поля

1.7.16. Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , характеризуемого следующими составляющими в цилиндрической системе координат: $A_r = \frac{10}{r^3}$, $A_\varphi = 0$, $A_z = 0$.

Решение.

Запишем выражение для дивергенции и ротора векторного поля \vec{A} в цилиндрической системе координат при $A_r = \frac{10}{r^3}$, $A_\varphi = 0$ и $A_z = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot A_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{10}{r^3} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{10}{r^3} = \frac{-3 \cdot 10}{r^4} + \frac{10}{r^4} = -\frac{20}{r^4}. \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{r}_0 \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right] + \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right] = \\ &= \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[-\frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{20}{r^4}$, $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

1.7.17. В сферической системе координат векторное поле $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$. Определить скалярное поле $\operatorname{div} \vec{A}$. Качественно построить картину силовых линий векторного поля.

Решение.

Запишем выражение для дивергенции векторного поля \vec{A} в сферической системе координат при $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{2r}{r} = 1 + 2 = 3.$$

Качественная картина силовых линий векторного поля $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$ изображена на рисунке 1.2.

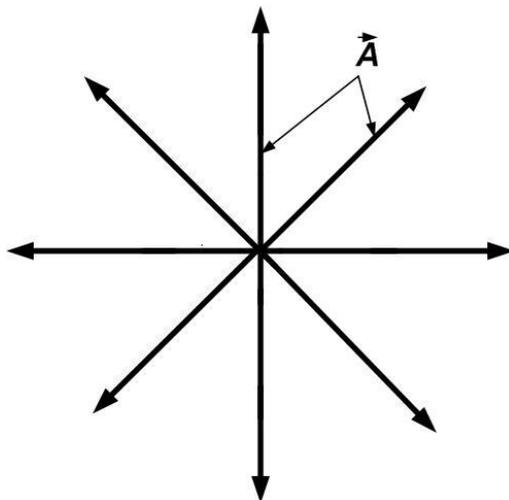


Рисунок 1.2 – Качественная картина силовых линий векторного поля

Ответ: $\text{div}\vec{A} = 3$.

1.8 Задачи для самостоятельной работы

1.8.1 В декартовой системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную составляющую A_z . Установить является ли поле соленоидальным или потенциальным.

Данные для решения задачи приведены в таблице 1.1 и зависят от номера варианта.

Таблица 1.1 – Данные для решения задачи

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_z	$5x+4$	$x+y^2$	$6\ln x$	$\sin^2 x$	$\cos 2y$	$3\text{tg} x$	$\text{ctg} y$	$x^y - y$	$x - y$	xy
Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A_z	$x - y^3$	$\ln(x/y)$	$\ln(xy)$	$x^3 + y^2$	$\ln(x^3 y)$	e^y	e^{y-x}	$\frac{1}{\cos x}$	$\text{tg} 2x$	x^y
Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A_z	$x^2 - y$	$\text{tg}(y/x)$	$\text{tg}(x^2 y)$	$\cos^2 y$	$\ln(x/y)$	$\text{tg} x$	$x^2 - 3$	$\frac{x^2 - 1}{x}$	$\ln 3x$	y^x

1.8.2 Даны два векторных поля:

$$\vec{A} = A_x \vec{x}_0 + A_y \vec{y}_0 + A_z \vec{z}_0; \quad \vec{B} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 6\vec{z}_0.$$

Рассчитать:

а) Длину каждого вектора.

б) Скалярное произведение.

в) Определить угол между векторами.

г) Найти направляющие косинусы каждого из векторов.

д) Найти $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$.

е) Найти векторное поле $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$. Показать, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

Данные для решения задачи приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 1.2 – Данные для решения задачи

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_x	+3	+4	-5	-6	+7	-2	+5	-7	+2	-1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_y	+5	+6	+7	-8	-1	-3	+3	+4	+5	-6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_z	+5	-4	-3	+2	+1	-6	-4	-2	+3	-7

1.8.3 Начало вектора в точке $B(2; 3)$; конец его в точке $A(A_x; A_y; A_z)$.

Разложить этот вектор по единичным векторам координатных осей. Данные для решения задачи приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.4 В декартовой системе координат скалярное поле φ задано выражением $\varphi = A_z$. Данные для решения задачи приведены в таблице 1.1 и зависят от номера варианта. Найти выражения для $\text{grad } \varphi$ и $\nabla^2 \varphi$.

1.8.5 В декартовой системе координат проекции векторного поля \vec{A} постоянны в каждой точке пространства. Значения A_x и A_y приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значение $A_z = 0$ для всех вариантов. Построить картину силовых линий поля.

1.8.6 Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , имеющего единственную составляющую в цилиндрической системе координат:

$A_r = \frac{a \cdot c}{r^N}$. Значения постоянных a , c и N приведены в таблице 1.3 и зависят от

номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.7 Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , имеющего единственную составляющую в сферической системе координат: $A_r = \frac{a \cdot c}{r^N}$. Значения постоянных a , c и N приведены в таблице 1.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 1.3 – Значения постоянных a , c и N

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	+3	+4	-5	-6	+7	-2	+5	-7	+2	-1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
c	+5	+6	+7	-8	-1	-3	+3	+4	+5	-6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
N	3	4	5	2.5	3.5	4.5	5.5	3.3	4.8	6

1.8.8 Задан потенциал $\varphi = x^2 - y^z$. Найти градиент потенциала в точке с координатами, значения которых ($x = a$, $y = c$, $z = N$) приведены в таблице 1.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.9 В декартовой системе координат плоское векторное поле описывается уравнением: $\vec{A} = -by \cdot \vec{x}_0 + cx \cdot \vec{y}_0$. Найти уравнение силовых линий векторного поля и построить картину этого поля. Значения постоянных b и c приведены в таблице 1.4 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 1.4 – Значения постоянных b и c

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b	3	4	5	6	7	2	5	7	2	1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
c	5	6	7	8	1	3	3	4	5	6

2 ТЕМА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

2.1 Основные формулы электромагнетизма

$$1. \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ – напряженность электрического поля [В/м],}$$

где \vec{F} – сила, действующая на единичный положительный заряд q_0 .

$$2. \vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}] \text{ – сила Лоренца,}$$

где \vec{v} – скорость переноса заряда q , \vec{B} – вектор магнитной индукции.

$$3. F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_a r_{12}^2} \text{ – закон Кулона,}$$

где r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2 , ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость;

$$\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0,$$

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, а ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость.

$$4. \vec{j}_{np} = \rho \vec{v} = \frac{q}{V} \vec{v} \text{ – плотность тока проводимости при переносе зарядов}$$

в вакууме или в электролитах (плотность тока переноса),

где $\rho = \frac{q}{V}$ – объёмная плотность заряда, \vec{v} – скорость переноса заряда.

$$5. \vec{j}_{np} = \sigma \cdot \vec{E} \text{ – закон Ома в дифференциальной форме,}$$

где σ – удельная проводимость среды (См/м); $\sigma = \frac{1}{\rho_{np}}$ – удельное сопротивление среды (Ом·м).

$$6. \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0 \text{ – закон сохранения заряда.}$$

$$7. \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}; \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a} \text{ – закон Гаусса в интегральной и дифференциальной форме, соответственно.}$$

альной форме, соответственно.

$$8. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I; \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \text{ – закон полного тока в интегральной и}$$

дифференциальной форме, соответственно, где \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля.

Поток $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ вектора \vec{j} плотности полного тока через замкнутую поверхность S равен полному току I через поверхность, а также равен циркуля-

ции $\oint_L \vec{H} d\vec{l}$ вектора \vec{H} по замкнутому контуру L , ограничивающему эту поверхность. Плотность \vec{j} полного тока – это сумма плотностей токов проводимости \vec{j}_{np} , смещения $\vec{j}_{см}$ и плотности поляризационного тока \vec{j}_n .

$$9. \vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ – плотность тока смещения.}$$

10. $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$; $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ – закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной форме, соответственно.

Здесь $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ – циркуляция вектора \vec{E} по замкнутому контуру L , ограничивающему замкнутую поверхность S ; $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ – поток вектора магнитной индукции \vec{B} через эту поверхность.

11. $\vec{D} = \tilde{\varepsilon}_a \cdot \vec{E}$; $\vec{B} = \tilde{\mu}_a \cdot \vec{H}$ – материальные уравнения для электрического и магнитного поля, соответственно, где $\tilde{\mu}_a$ и $\tilde{\varepsilon}_a$ – тензоры абсолютной магнитной и абсолютной диэлектрической проницаемостей для анизотропных тел.

12. Для изотропных тел с линейной зависимостью между \vec{D} и \vec{E} и между \vec{B} и \vec{H} :

$$\tilde{\mu}_a = \mu_a = \mu \cdot \mu_0, \quad \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0,$$

где μ_0 и ε_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума, а μ и ε – относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости вещества.

$$13. \vec{j}_n = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \text{ – плотность поляризационного тока,}$$

где $\vec{P} = N \cdot \vec{p}$ – вектор поляризованности, то есть электрический дипольный момент единицы объёма, N – концентрация молекулярных диполей $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$; \vec{l} – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда $-q$ молекулярного диполя к положительному заряду $+q$; длина l вектора \vec{l} – это расстояние между зарядами в диполе.

14. $\vec{E} = -grad \varphi_э$ – связь электростатического поля со скалярным электрическим потенциалом $\varphi_э$.

$$15. \nabla^2 \varphi_э = -\frac{\rho}{\tilde{\varepsilon}_a} \text{ – уравнение Пуассона.}$$

$$16. \nabla^2 \varphi_э = 0 \text{ – уравнение Лапласа.}$$

$$17. \varphi_э(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \vec{r}} \text{ – распределение потенциала точечного заряда в ваку-}$$

уме.

Здесь $\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$, r – расстояние между текущей координатой в пространстве и точечным зарядом q , а \vec{r}_0 – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором напряженности электростатического поля \vec{E} в текущей координате.

$$18. w_3 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \text{ – объемная плотность энергии электростатического поля.}$$

ля.

$$19. L = \frac{n\Phi}{I} \text{ – индуктивность катушки,}$$

где n – число витков, $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ – поток вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S внутри сердечника катушки, ориентированную перпендикулярно вектору магнитной индукции \vec{B} .

$$20. \vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \cdot \int \frac{d\vec{l}}{r} \text{ – векторный потенциал } \vec{A} \text{ линейного тока.}$$

Здесь интегрирование ведётся по контуру тока I ; $d\vec{l}$ – это вектор, равный по величине длине бесконечно малого отрезка dl проводника с током и ориентированный вдоль направления протекания тока I по участку dl ; r – расстояние от середины отрезка dl до точки, в которой вычисляется векторный потенциал \vec{A} .

21. Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \text{ или } \vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \text{rot} \int \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

$$22. R = \rho_{np} \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S} \text{ – электрическое сопротивление проводящей про-}$$

слойки толщиной l между взаимно параллельными плоскими пластинами с площадью S ; ρ_{np} – удельное электрическое сопротивление; σ – удельная электрическая проводимость.

$$23. R_{12} = \rho_{np} \cdot \int_a^b \frac{dr}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dr}{4\pi \cdot r^2} \text{ – сопротивление между обкладками сфе-}$$

рического конденсатора,

где a – радиус внутренней обкладки; b – радиус наружной обкладки.

24. $q = C \cdot U$ – зависимость величины заряда q от величины напряжения U на обкладках конденсатора и от электрической ёмкости C конденсатора.

$$25. W_{эл} = \frac{CU^2}{2} \text{ – энергия, накопленная конденсатором при приложении}$$

постоянного напряжения U .

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Точечный заряд $+q$ находится на расстоянии d от бесконечного водника, занимающего, условно, левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность зарядов, индуцированных зарядом $+q$ на поверхности проводника.

Решение.

Предположим, что на продолжении перпендикуляра, опущенного из $+q$ на поверхность проводника, находится на расстоянии d от этой поверхности заряд $-q$, затем мысленно устраним сам проводник. Тогда плоскость, совпадавшая ранее с поверхностью проводника, будет обладать требуемым потенциалом нуль, ибо все точки этой плоскости будут равно отстоять от равных по величине и противоположных по знаку зарядов $+q$ и $-q$. Стало быть, поле совокупности этих зарядов в правом полупространстве тождественно с некоторым полем заряда $+q$ и зарядов, индуцированных им на поверхности бесконечного проводника.

Таким образом, задача сведена к простой задаче определения поля двух точечных зарядов $+q$ и $-q$. В этом заключается суть метода конформных отображений.

Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена вправо и проходит через заряд $+q$, а плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью проводника. Расстояние произвольной точки P с координатами r и z от зарядов $+q$ и $-q$ будет равно соответственно:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (z - d)^2}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + (z + d)^2},$$

что следует из рассмотрения прямоугольных треугольников. Потенциал в правом полупространстве будет:

$$\varphi = \frac{l}{r_1} - \frac{l}{r_2}.$$

С другой стороны $E = -\text{grad } \varphi$ или, в нашем случае, $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. При $z = 0$ имеем:

$$E_z|_{z=0} = -q \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right]_{z=0} = -\frac{2qd}{R_1^3}.$$

С другой стороны, поскольку поле внутри проводника равно нулю, то:

$$E_z = 4\pi\sigma,$$

где σ – плотность поверхностного заряда. Откуда:

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi R_1^3}.$$

Очевидно, что на поверхности проводника индуцирован заряд $-q$. В этом можно убедиться непосредственным интегрированием $q = \int_V \sigma dV = -q$.

2.2.2 Заряд равномерно распределен на шаровой поверхности произвольного радиуса R . Определить скачок вектора \vec{E} при прохождении через заряженную поверхность шара.

Решение.

Вследствие симметрии поверхности шара вектор \vec{E} параллелен (или антипараллелен) \vec{R} и является функцией лишь от \vec{R}_0 . Для определенности, пусть заряд q распределен на шаровой поверхности с $R = a$. По теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$, при R меньше a имеем:

$$E_r \cdot 4\pi \cdot R^2 = 0.$$

При R больше a :

$$E_r \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Скачок вектора \vec{E} при прохождении через поверхность сферы равен:

$$E_e - E_i = \frac{q}{a^2} = 4\pi\sigma;$$

$$q = \sigma \cdot 4\pi a^2,$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

2.2.3 По бесконечно прямому полому круглому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Показать, что поле тока внутри цилиндра равно нулю.

Решение.

Направим ось z декартовой системы координат вдоль оси цилиндра. Тогда, в сечении $z = \text{const}$ будем иметь круг, внутри которого выберем произвольную точку P . Проведем через точку P две меридианные плоскости, пересекающие поверхность цилиндра на ряд прямоугольных полосок, параллельных оси z . Ширина двух противоположных полосок равна соответственно:

$$dS_1 = r_1 \cdot d\varphi \text{ и } dS_2 = r_2 \cdot d\varphi,$$

где r_1 и r_2 расстояние от точки пересечения меридианных плоскостей до образующей цилиндра, а $d\varphi$ — угол между ними. Сила тока, протекающего по этим полоскам, будет, очевидно, пропорциональна их ширине:

$$dJ_1 = k dS_1 = k r_1 \cdot d\varphi \text{ и } dJ_2 = k r_2 \cdot d\varphi.$$

Напряженность магнитного поля бесконечного прямоугольного тока на расстоянии r от его оси дается соотношением:

$$H = \frac{2J}{C \cdot r},$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от системы единиц измерения. Подставим токи, рассматриваемые в нашей задаче:

$$dH_1 = 2 \frac{dJ_1}{C \cdot r_1} = 2k \frac{r_1 \cdot d\varphi}{C \cdot r_1} = \frac{2kr_2 \cdot d\varphi}{C \cdot r_2} = dH_2.$$

Мы получили, что поля, возбуждаемые каждой из этих полосок тока в точке P , равны друг другу, но противоположно направлены. Следовательно, результирующее поле внутри цилиндра равно нулю.

2.2.4 Внутри сферической области радиусом a распределен электрический заряд с объемной плотностью ρ . Предполагая, что абсолютная диэлектрическая проницаемость внутренней и внешней области одинакова и равна ϵ_a , определить напряженность электрического поля и потенциал φ в заданной области.

Решение.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, справедливое для внутренней области $R \leq a$, и уравнением Лапласа для внешней области, $\nabla^2\varphi = 0$ при $R \geq a$.

С помощью этих уравнений задача приводится к интегрированию по объему V . Вследствие сферически симметричного распределения заряда (потенциал φ зависит только от расстояния R) в сферической системе координат с началом в центре шара получим:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right) = \begin{cases} -4\pi\rho, & \text{если } R \leq a; \\ 0, & \text{если } R \geq a. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0,$$

откуда

$$R^2 \frac{d\varphi}{dR} = C_1 \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dR} = \frac{C_1}{R^2},$$

где C_1 – неизвестная пока постоянная.

Разделяя переменные и проводя интегрирование, получим:

$$\varphi_e = -C_1 \frac{1}{R} + C_2 \quad \text{при } R \geq a,$$

где C_2 – также пока неизвестная постоянная.

Теперь рассмотрим второе уравнение:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho$$

или

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho R^2,$$

$$d \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho R^2 dR.$$

Интегрируя слева, и справа, получим:

$$R^2 \frac{d\varphi}{dR} = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R^3 + C_3$$

или

$$\frac{d\varphi}{dR} = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R + C_3,$$

$$d\varphi = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R dR + C_3 dR,$$

$$\varphi_i = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot \frac{R^2}{2} + C_3 R + C_4 \text{ при } R \leq a.$$

Следующим этапом решения является определение произвольных постоянных C_n :

1) При $R \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_q(\infty) = 0$, значит $C_2 = 0$.

2) Потенциал в центре заряженной сферы должен быть конечным, поэтому $C_3 = 0$.

Из этих условий получаем:

$$\varphi_e = -C_1 \frac{1}{R}; \quad \varphi_i = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{R^2}{2} + C_4,$$

откуда:

$$C_1 = -R \cdot \varphi_i(R); \quad C_4 = \varphi_i(R) + \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

При $R = a$ должны выполняться условия:

$$\varphi(a)_q = \varphi_i(a) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \right)_{R=a} = \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} \right)_{R=a}.$$

Второе условие означает, что нормальная составляющая вектора поля \vec{E} не должна испытывать скачка при прохождении через поверхность шара, так как поверхностная плотность заряда на поверхности шара равна нулю:

$$-\frac{C_1}{a} = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^2}{2} + C_4,$$

$$\frac{C_1}{a} = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot a,$$

откуда:

$$C_1 = -4\pi\rho \cdot \frac{a^3}{3}; \quad C_4 = 2\pi\rho \cdot a^2.$$

Таким образом:

$$\varphi_e = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^3}{R} \text{ при } R \geq a;$$

$$\varphi_i = -\frac{4\pi\rho}{6} (R^2 - 3a^2) \text{ при } R \leq a.$$

Для определения электростатического поля E_R воспользуемся соотношением:

$$E_R = -(\text{grad } \varphi)_R,$$

откуда:

$$E_R^e = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^3}{R^2} \cdot \vec{R}_0 = \frac{q}{R^3} \cdot \vec{R} \text{ при } R \geq a,$$

где $q = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot a^3$ – полный заряд в объеме; \vec{R}_0 – единичный вектор вдоль R ,

$$E_R^i = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot R \cdot \vec{R}_0 = q \frac{R}{a^3} \cdot \vec{R}_0 = q \frac{\vec{R}}{a^3} \text{ при } R \leq a.$$

2.2.5 Бесконечно протяженная полая призма, образованная металлическими стенками, ориентированна вдоль оси z . Три стенки, образующие желоб, заземлены и находятся под нулевым потенциалом. Оставшаяся, верхняя, стенка изолирована и имеет потенциал φ_3 . Найти функцию распределения, описывающую распределение потенциала внутри призмы.

Решение.

Данная задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y^2} = 0$$

внутри прямоугольной области с граничными условиями:

$$\varphi_3|_{x=a} = \varphi_3|_{x=0} = \varphi_3|_{y=0} = 0; \quad \varphi_3|_{y=b} = U_0.$$

Воспользуемся методом разделения переменных, и будем искать решение в виде произведения двух функций:

$$\varphi_3(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Подстановка решения в уравнение Лапласа дает:

$$\frac{X''}{x} + \frac{Y''}{y} = 0$$

или

$$\frac{X''}{x} = -k^2, \quad \frac{Y''}{y} = k^2,$$

где k – постоянная разделения.

Решения этих уравнений могут быть записаны в виде:

$$X(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx,$$

$$Y(y) = A_3 \text{ch } ky + A_4 \text{sh } ky.$$

Из граничных условий при $x = y = 0$ следует, что $A_1 = A_3 = 0$. Граничные условия при $x = a$, требуют выполнения равенства:

$$\sin ka = 0$$

или

$$k = \frac{n \cdot \pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда решение запишется в виде:

$$\varphi_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} \cdot y\right),$$

причем систему коэффициентов $\{C_n\}$ следует выбрать таким образом, чтобы удовлетворить оставшемуся граничному условию:

$$\varphi_3(x, y)_{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} \cdot y\right) = U_0.$$

Умножаем обе части этого равенства на функцию $\sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$ с произвольным целым m и проинтегрируем их по x в пределах от 0 до a . При этом воспользуемся свойством ортогональности системы тригонометрических функций:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) dx = \begin{cases} \frac{a}{2}, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Кроме того:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) dx = \begin{cases} \frac{2a}{m\pi}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому коэффициенты разложения потенциала:

$$C_m = \begin{cases} \frac{4U_0}{m\pi \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{a} b\right)}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Окончательная формула для потенциала имеет вид:

$$\varphi_3(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi y}{a}\right)}{(2k+1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi b}{a}\right)}, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots$$

2.2.6 В момент времени $t = 0$ скорость электрона $\vec{V} = 104\vec{x}$ м/с, а его радиус-вектор $\vec{r} = \vec{y}_0$ м. Определить радиус-вектор при $t = 0.1$ с. Внешние силы отсутствуют.

Решение:

1) Воспроизведём условия задачи, представленные в виде текста, на рисунке 2.1 в декартовой системе координат.

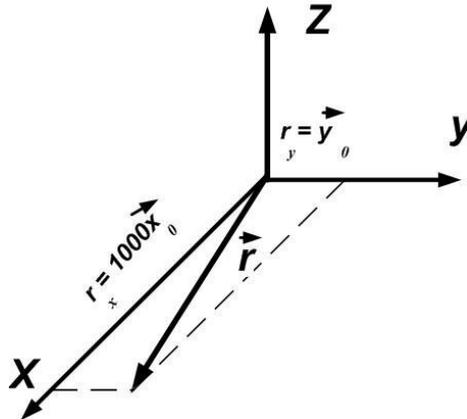


Рисунок 2.1 – Иллюстрация к решению задач 2.2.6

2) В общем виде радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ м, а в нашем случае: $z = 0$; $y = \vec{y}_0$ не меняется во времени; $x = \vec{V}t = 10^4 \vec{x}t = 10^4 \cdot 0.1\vec{x}_0 = 1000\vec{x}_0$.

С учётом этого:

$$\vec{r} = y\vec{y}_0 + 1000 \vec{x}_0.$$

Ответ: $\vec{r} = y\vec{y}_0 + 1000 \vec{x}_0$.

2.2.7 Чему равна полная электростатическая сила, действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, помещенного в центре квадрата со стороной a , если по углам квадрата расположены (по часовой стрелке) заряды q , $2q$, $-4q$ и $2q$.

Решение.

1) Воспроизведём условия задачи, представленные в виде текста, на рисунке 2.2.

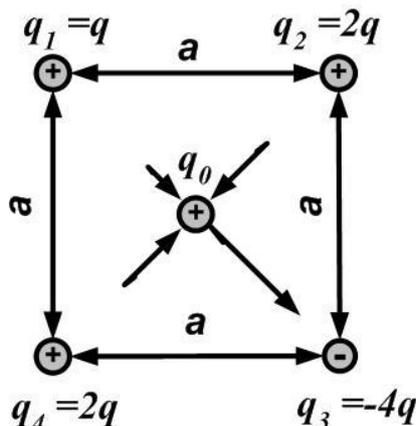


Рисунок 2.2 – Иллюстрация к решению задач 2.2.7

2) Сила \vec{F} , действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, как известно, называется напряжённостью электрического поля \vec{E} . Сила \vec{F} равна алгебраической сумме векторов сил ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ и \vec{F}_4) взаимодействия зарядов, расположенных по углам квадрата, и единичного положительного заряда $+q_0$:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_j = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

3) Длину F вектора силы \vec{F}_j можно определить по закону Кулона:

$$\vec{F}_j = \frac{q_j q_0}{4\pi\epsilon_a (r_{j,0})^2},$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $r_{j,0}$ – расстояние между единичным положительным зарядом $+q_0$ и зарядом q_j .

С учётом того, что согласно рисунку 2.2 силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, а также того, что $q_2 = q_3$ и $r_{2,0} = r_{3,0}$, по закону Кулона получим:

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= -\vec{F}_3; \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= 0.\end{aligned}$$

В этом случае выражение для вычисления вектора результирующей силы \vec{F} упростится:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

4) Из рисунка 2.2 видно, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 направлены вдоль одной и той же прямой и в одну и ту же сторону. С учётом этого, выражение для вычисления длины F вектора результирующей силы \vec{F} примет вид:

$$F = F_1 + F_3.$$

Из рисунка 2.2 также видно, что абсолютные величины $r_{j,0}$ расстояния между единичным положительным зарядом $+q_0$ и зарядами q_j одинаковы и равны половине длины диагонали квадрата:

$$r_{j,0} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad a (r_{j,0})^2 = \frac{a^2}{2}.$$

В результате по закону Кулона получим значение силы в Ньютонах $[H]$:

$$F = F_1 + F_3 = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_a \frac{a^2}{2}} + \frac{4q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_a \frac{a^2}{2}} = \frac{5q \cdot q_0}{2\pi\epsilon_a a^2} [H].$$

5) Длина вектора силы \vec{F} , действующей на единицу положительного заряда $+q_0$, то есть величина E вектора напряжённости электрического поля \vec{E} равна в Вольтах на метр (В/м):

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{5q}{2\pi\epsilon_a a^2}.$$

Ответ: $E = \frac{F}{q_0} = \frac{5q}{2\pi\epsilon_a a^2}$ [В/м].

2.2.8 Заряженная частица движется в направлении \vec{x} в пространстве, где имеется электрическое поле \vec{E}_y и перпендикулярное к нему магнитное поле с индукцией B_z со скоростью v_x . При каком условии результирующая сила F , действующая на эту частицу равняется нулю. Показать векторы $\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ на рисунке. Какова должна быть величина v_x , если $E_y = 3 \cdot 10^3$ В/м, а $B_z = 3 \cdot 10^2$ Тл.

Решение.

1) Запишем формулу для определения вектора силы Лоренца \vec{F}_L , действующей на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью \vec{v} при наличии электрического поля \vec{E} и магнитного поля с индукцией \vec{B} :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Покажем векторы $\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ на рисунке 2.3.

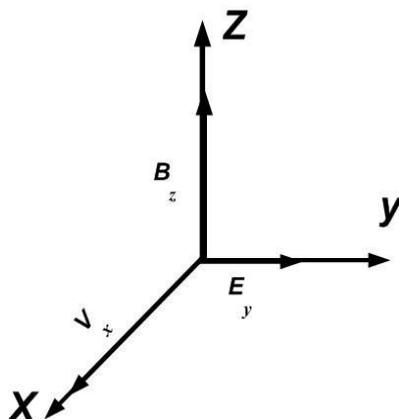


Рисунок 2.3 – Иллюстрация к решению задач 2.2.8

2) Запишем условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}] = 0 \text{ или } [\vec{v}\vec{B}] = -\vec{E}.$$

В матричной форме это условие для нашей задачи принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \vec{v}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = -E_y \cdot \vec{y}_0.$$

3) Раскрываем определитель и получаем:

$$-v_x \cdot B_z \cdot \vec{y}_0 = -E_y \cdot \vec{y}_0.$$

Откуда получаем в простом виде условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю:

$$v_x = \frac{E_y}{B_z} = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^5 \text{ м/с}.$$

Ответ: условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю $-v_x = 10^5$ м/с.

2.2.9 Пусть плоское силовое поле имеет потенциал $\varphi = \alpha \cdot x \cdot y$ (α – постоянная). Найти само поле и его силовые линии.

Решение.

Подставим заданное выражение для потенциала φ в формулу для определения напряжённости электрического поля \vec{E} и произведём операцию дифференцирования:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0\right) = -\alpha(y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0).$$

В полученном выражении имеются две проекции вектора напряжённости электрического поля \vec{E} :

$$E_x = -\alpha \cdot y \text{ и } E_y = \alpha \cdot x.$$

Подставим их в уравнение силовых линий \vec{E} для двухмерного поля:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Тогда получим:

$$-\frac{dx}{y\alpha} = -\frac{dy}{x\alpha} \text{ или } x \cdot dx = y \cdot dy.$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего выражения, находим:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + A \text{ или } x^2 = y^2 + C,$$

где A и $C = 2A$ – постоянные интегрирования.

Ответ: поле \vec{E} описывается выражением $\vec{E} = -\alpha(y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0)$, а его силовые линии – гиперболы, описываемые выражением $x^2 = y^2 + C$.

2.2.10 Бесконечно тонкий кольцевой проводник радиусом a несет полный заряд q . Определить скалярный потенциал φ_{Σ} и напряжённость электрического поля в точках на оси кольца. Исследовать характер зависимости напряжённости электрического поля от расстояния на оси кольца.

Решение.

Введем цилиндрическую систему координат, ось которой перпендикулярна плоскости кольца и проходит через центр окружности, образованной кольцом. Квадрат расстояния между точкой i на оси z и любой точкой кольца будет равен:

$$r_i^2 = a^2 + z^2,$$

а элементарный заряд dq , расположенный вблизи этой точки на элементарном отрезке в угловом секторе $d\varphi$ равен:

$$dq = \frac{q \cdot d\varphi}{2\pi}.$$

На рисунке 2.4 показано кольцо в разрезе и силы dF_i , действующие на единичный положительный заряд $+q_0$, находящийся в произвольной точке на оси кольца, при взаимодействии с элементарными зарядами dq , расположенными в диаметрально противоположных точках кольца.

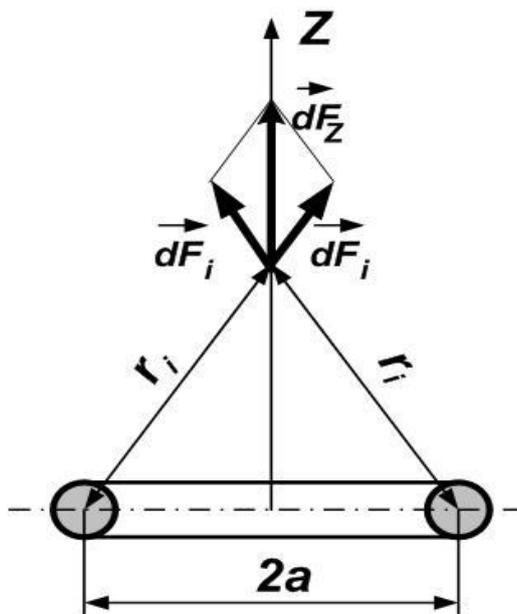


Рисунок 2.4 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.10 для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным (в этом случае направления и численные значения силы \vec{F} и напряжённости электрического поля \vec{E} совпадают)

Величина силы dF_i определяется по закону Кулона:

$$dF_i = \frac{dq \cdot q_0}{4\pi \epsilon_a r_i^2} = q \cdot d\varphi \frac{q_0}{8\pi^2 \epsilon_a (a^2 + z^2)}.$$

Составляющие силы dF_i , перпендикулярные оси z , при взаимодействии с элементарными зарядами dq , расположенными в диаметрально противоположных точках кольца, взаимно уничтожаются, так как они равны по величине и противоположны по направлению, а составляющие dF_z , параллельные оси z , складываются. Из рисунка 2.4 видно, что:

$$dF_z = dF_i \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = qz \cdot d\varphi \frac{q_0}{8\pi^2 \epsilon_a (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 до 2π , определяем величину силы F_z , действующей на единичный положительный заряд $+q_0$, находящийся в произвольной точке на оси кольца:

$$F_z = qz \cdot \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отсюда находим величину E_z вектора напряжённости электрического поля \vec{E} в Вольтах на метр [В/м]:

$$E_z = |\vec{E}| = \frac{F_z}{q_0} = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Потенциал в любой точке на оси кольца определяется следующим образом:

$$\varphi_{\text{Э}} = -\int E_z dz = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{d(a^2 + z^2)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Исследуем функцию E_z на экстремум, приравняв производную от неё к нулю:

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{q[(a^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(a^2 + z^2)^{1/2}]}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^3} = 0.$$

Числитель этой производной также равен нулю, а значит:

$$(a^2 + z^2)^{1/2} \cdot [(a^2 + z^2) - 3z^2] = 0.$$

Так как $(a^2 + z^2) \neq 0$, то $(a^2 - 2z^2) = 0$.

Отсюда получим координаты точек экстремума:

$$z = \pm a\sqrt{2}.$$

Из рисунка 2.4 видно, что при $z = 0$ сила $dF_z = 0$, а, следовательно, и напряжённость электрического поля $\vec{E} = 0$. Для изображённого на рисунке случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, направления и численные значения силы \vec{F} и напряжённости электрического поля \vec{E} совпадают, вектор напряжённости электрического \vec{E} направлен параллельно оси z . При $z < 0$ вектор напряжённости электрического поля \vec{E} направлен антипараллельно оси z , то есть $\vec{E} = E_z \cdot \vec{z}_0 < 0$. Таким образом, из анализа рисунка 2.4 следует, что для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, максимум будет при $z > 0$ ($z = a\sqrt{2}$), а минимум – при $z < 0$ ($z = -a\sqrt{2}$). К такому же выводу можно было бы прийти, исследовав вторую производную $\frac{d^2 E_z}{dz^2}$ в точках

экстремума. В точке максимума $\frac{d^2 E_z}{dz^2} < 0$, а в точке минимума $\frac{d^2 E_z}{dz^2} > 0$.

График зависимости напряжённости электрического поля \vec{E} от расстояния Z от центра кольца для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, изображён на рисунке 2.5.

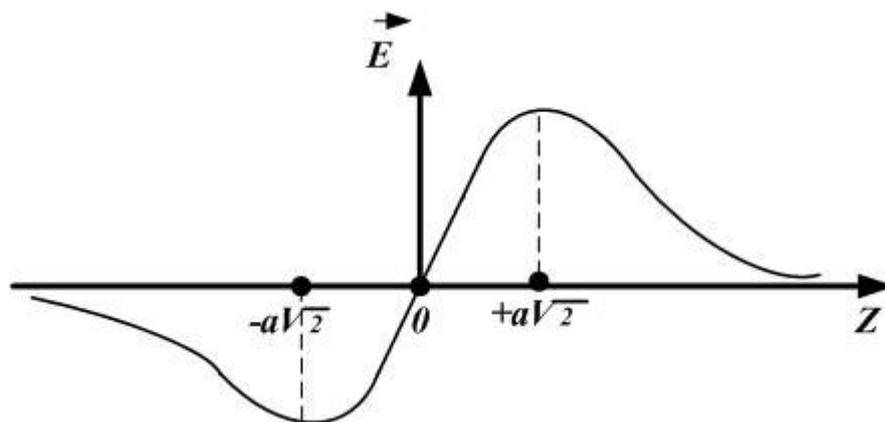


Рисунок 2.5 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.10: график зависимости напряжённости электрического поля \vec{E} от расстояния Z от центра кольца для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным

Ответ: скалярный потенциал $\varphi_{\text{Э}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$; напряжённость электрического поля в точках на оси кольца $E_z = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_a (a^2 + z^2)^{3/2}}$.

2.2.11 Постоянный ток I существует в бесконечно тонком линейном проводнике, неограниченно простирающемся вдоль оси z . Найти электрический векторный потенциал \vec{A} , удовлетворяющий соотношению $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ и напряжённость магнитного поля во всем пространстве.

Указание: Решение проводить удобно в цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с направлением тока.

Решение.

Первый вариант.

Запишем закон полного тока (первое уравнение Максвелла в интегральной форме):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

В силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси z . По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0,$$

а первое уравнения Максвелла приводится к выражению:

$$I = H_\varphi \cdot \int_0^{2\pi r} dl = H_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{B_\varphi \cdot 2\pi r}{\mu_a}.$$

Откуда:

$$B_{\varphi} = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = (\text{rot}\vec{A})_{\varphi} + \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Второй вариант.

Электрический векторный потенциал \vec{A} линейного тока определяется известным выражением:

$$\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}.$$

Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \text{rot} \int \frac{d\vec{l}}{r} = \text{rot} \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Величина B вектора магнитной индукции \vec{B} связана с величиной A векторного потенциала \vec{A} выражением (см. рисунок 2.6):

$$B = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{dl \cdot r \cdot \sin \varphi}{r^3}.$$

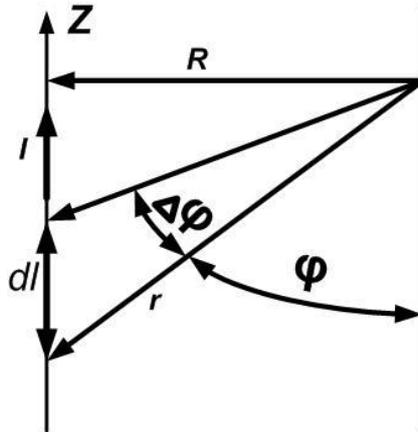


Рисунок 2.6 – Геометрические построения в задаче 2.2.11

С учётом того, что:

$$r = \frac{R}{\sin \varphi}$$

и

$$dl = \frac{r \cdot d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{R \cdot d\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

выражение для B примет окончательный вид:

$$B = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{\sin^3 \varphi \cdot R^2 d\varphi}{\sin^2 \varphi \cdot R^3} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi R} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = -\frac{I \cdot \mu_a}{4\pi R} (-1 - 1) = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi R}.$$

Здесь R – радиальная точка наблюдения.

Из окончательного вида выражения для величины B вектора магнитной индукции \vec{B} легко находим выражение для определения величины H напряженности магнитного поля:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi R}.$$

Ответ: величина напряжённости магнитного поля $H = \frac{I}{2\pi R}$. Выражения

для векторного потенциала \vec{A} : $\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$ и $B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$.

2.2.12 Индуктивная катушка представляет собой одиночный виток, размещенный на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала ($\mu \gg 1$) с размерами: внутренний диаметр равен $2a$, внешний $2b$, высота h (рисунок 2.7). Найти индуктивность катушки.

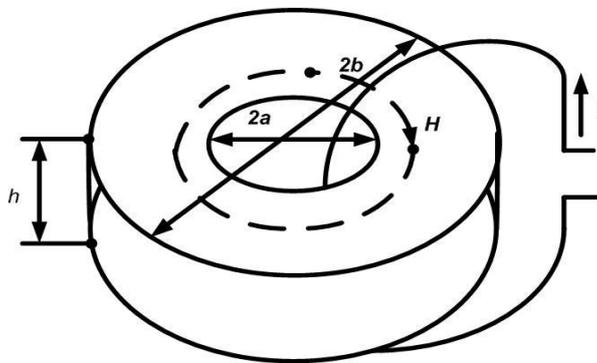


Рисунок 2.7 - Иллюстрация к решению задачи 2.2.12

Решение.

Согласно закону полного тока:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Для длинного линейного провода в силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности. По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0 = H,$$

а закон полного тока приводится к выражению:

$$H \cdot 2\pi \cdot R = I \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Поскольку $\mu \gg 1$, то потоком рассеяния можно пренебречь, силовые линии магнитного поля \vec{H} в кольцевом магнитопроводе близки по форме к окружности, и можно считать, что последнее приведённое выражение для H применимо и к нашей задаче. Запишем выражения для величины B вектора магнитной индукции \vec{B} и для магнитного потока Φ (потока вектора магнитной индукции) сквозь конечную поверхность S :

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I}{2\pi R},$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I \cdot h}{2\pi} \int_a^b \frac{dR}{R} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Так как по условию виток один ($n = 1$), то индуктивность катушки L и магнитный поток Φ витка связаны соотношением:

$$L = \frac{n\Phi}{I} = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ответ: величина индуктивности $L = \mu_0 \cdot \mu \cdot L = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2.2.13 Пространство между двумя металлическими сферами с радиусами $r_1 = a$ и $r_2 = b$ заполнено однородным проводящим веществом с удельной электрической проводимостью σ (сферический конденсатор). Определить электрическое сопротивление между обкладками такого конденсатора.

Решение.

Из закона Ома: когда площадь сечения тока S не зависит от длины пути тока l :

$$R_{12} = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \cdot S},$$

а, когда площадь сечения тока S зависит от длины пути тока l , но при фиксированном значении l плотность тока постоянна на поверхности S , то:

$$R_{12} = \rho \cdot \int_a^b \frac{dl}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dl}{S}.$$

В частности, сопротивление между обкладками сферического конденсатора:

$$R_{12} = \rho \cdot \int_a^b \frac{dr}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{r} \Big|_a^b = \frac{1/a - 1/b}{4\pi\sigma} = \frac{b-a}{4\pi\sigma \cdot ab}.$$

Ответ: сопротивление между обкладками конденсатора $R_{12} = \frac{b-a}{4\pi\sigma \cdot ab}$.

2.2.14 Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $a = 2$ см и $b = 5$ см, выполненные из металла (рисунок 2.8). Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет 5 В, потенциал наружного цилиндра равен нулю. Определить напряженность электрического поля на окружности $r = 4$ см.

Решение.

Напряженность электрического поля \vec{E} связана с потенциалом φ зависимостью:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

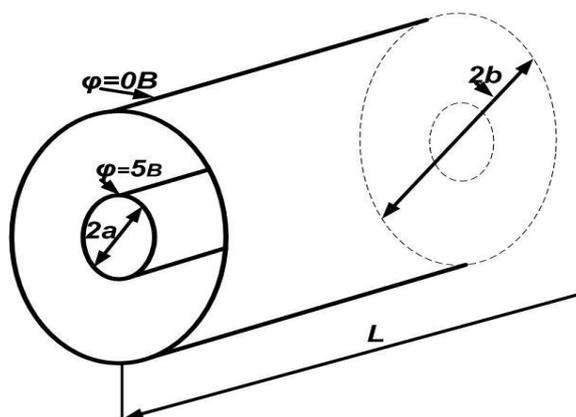


Рисунок 2.8 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.14

В силу симметрии цилиндров величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} равна проекции E_r в цилиндрической системе координат, а другие проекции равны нулю:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Интегрируя эту формулу, получаем выражение для напряжения U (разности потенциалов):

$$U = -\int E_r dr + C_1.$$

Чтобы получить формулу для E в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В силу симметрии цилиндров E_r не зависит от dS , поэтому:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r S = 2\pi r l E_r = \frac{q}{\epsilon_a},$$

$$E_r = \frac{q}{2\pi \epsilon_a r l} = \frac{C_2}{r},$$

где C_2 – постоянная:

$$C_2 = \frac{q}{2\pi \epsilon_a l}.$$

Подставим полученное выражение для E_r в формулу для U :

$$U = -\int E_r dr + C_1 = -\int \frac{C_2}{r} dr + C_1 = -C_2 \cdot \ln(r) + C_1.$$

Используя начальные условия для U , найдём значение постоянной C_1 .

1) При $r = 0.05$ м и $U = 0$ В:

$$0 = -C_2 \cdot \ln(0.05) + C_1 \quad \text{и} \quad C_1 = C_2 \cdot \ln(0.05).$$

2) При $r = 0.02$ м и $U = 5$ В:

$$5 = -C_2 \cdot \ln(0.02) + C_1 \quad \text{и} \quad 5 = -C_2 \cdot \ln(0.02) + C_2 \ln(0.05).$$

$$5 = C_2 \ln\left(\frac{0.05}{0.02}\right) + C_2 \ln(2.5); \quad C_2 = \frac{5}{\ln(2.5)} = 5.457;$$

$$C_1 = C_2 \cdot \ln(0.05) = 5.457 \cdot \ln(0.05) = -16.347 \text{ В.}$$

Запишем формулу для расчёта напряжения U и определим напряженность электрического поля E_r на окружности радиуса $r = 0.04$ м:

$$U = -5.457 \cdot \ln(r) - 16.347 \text{ В}; \quad E_r = \frac{C_2}{r} = \frac{5.457}{0.04} = 136.425 \text{ В/м.}$$

Ответ: напряженность электрического поля на окружности радиуса $r = 0.04$ м; $E_r = 136.425$ В/м.

2.2.15 Заряд q равномерно распределен по кольцу радиусом a . В центре кольца находится электрон, обладающий зарядом e и массой m . Электрон имеет возможность совершать малые колебания, перемещаясь вдоль оси кольца. Доказать, что движение электрона будет периодическим. Определить собственную частоту колебания электрона, считая, что его движение не сказывается на распределение зарядов по кольцу.

Решение.

В задаче 2.2.10 была получена формула для расчёта величины E_x вектора напряжённости электрического поля \vec{E}_x в Вольтах на метр (В/м):

$$E_x = |\vec{E}| \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a (a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Применим её. Поскольку $a \gg x$, то можно пренебречь x^2 по сравнению с a^2 :

$$E_x \cong \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a a^3}.$$

Выразим величину силы F , действующей на электрон, через величину напряжённости электрического поля E_x :

$$F = -eE_x = e \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a a^3} = -kx,$$

где $k = e \frac{q}{4\pi\epsilon_a a^3}$.

С другой стороны, величина силы F по второму закону Ньютона равна:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Приравняв правые части в найденных выражениях для величины силы F , получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

Введя обозначение:

$$\frac{k}{m} = \frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m} = \omega^2,$$

то есть:

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{0.5} = \left(\frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m}\right)^{0.5},$$

получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

описывающее гармонические колебания, решение которого имеет вид:

$$x = x \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Ответ: движение электрона будет периодическим и собственная частота колебания электрона ω равна:

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{0.5} = \left(\frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m}\right)^{0.5}.$$

2.2.16 По бесконечному цилиндрическому проводнику радиусом a протекает постоянный ток с плотностью j . Определить напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

Решение.

Запишем закон полного тока (первое уравнение Максвелла в интегральной форме):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

В силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси z . По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0,$$

а первое уравнения Максвелла приводится к выражению:

$$H_\varphi \cdot 2\pi r = I.$$

Выразив ток I как произведение плотности тока j на площадь поперечного сечения проводника S , по которой течёт ток, получим:

$$H_\varphi = \frac{j \cdot S}{2\pi r}.$$

С помощью полученного для напряжённости магнитного поля H_φ выражения найдём зависимость H_φ от кратчайшего расстояния r между точкой наблюдения и осью симметрии цилиндрического проводника для двух случаев.

1) Для напряжённости магнитного поля H_φ внутри проводника ($r \leq a$ и $S = \pi r^2$):

$$H_\varphi(r) = \frac{j \cdot S}{2\pi r} = \frac{j \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{j \cdot r}{2}.$$

2) Для напряжённости магнитного поля H_φ снаружи проводника ($r \geq a$ и $S = \pi a^2$):

$$H_\varphi(r) = \frac{j \cdot S}{2\pi r} = \frac{j \cdot \pi a^2}{2\pi r} = \frac{j \cdot a^2}{2r}.$$

Ответ: при $r \leq a$ имеем $H_\varphi = \frac{j \cdot r}{2}$, а при $r \geq a$ имеем $H_\varphi = \frac{j \cdot a^2}{2r}$.

2.2.17 По двум бесконечным прямолинейным проводникам, ориентированным вдоль оси z , протекают равные противоположно направленные токи I . Определить векторный потенциал магнитного поля \vec{A} во всём пространстве.

Решение.

Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом магнитного поля \vec{A} с помощью выражения:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

В задаче 2.2.11 мы вывели формулу для определения величины B вектора магнитной индукции \vec{B} для одиночного проводника, ориентированного вдоль оси z :

$$B = B_\varphi = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r}.$$

Так как векторы \vec{B} и $\text{rot}\vec{A}$ равны между собой, то равны и их проекции:

$$B_\varphi = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Так проводники, ориентированные вдоль оси z , бесконечны, то производная по координате z равна нулю $\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$ и

$$\frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Откуда для двух бесконечных прямолинейных проводников, ориентированных вдоль оси z , в которых протекают равные противоположно направленные токи I , получаем:

$$A_z = -|A| = -\frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Здесь r_1 и r_2 – кратчайшие расстояния от точки наблюдения до соответствующего проводника.

Ответ: векторный потенциал магнитного поля \vec{A} во всём пространстве описывается формулой: $A_z = -|A| = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

2.2.18 На каждой из трех бесконечно больших плоскостей $x = -a$, $x = 0$ и $x = a$ находится поверхностный заряд q , распределённый с равномерной плотностью (рисунок 2.9). Определить электрическое поле и потенциал для всего пространства, принимая $\phi = 0$ в точке $x = 0$.

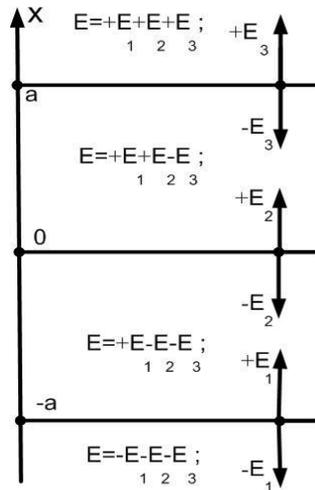


Рисунок 2.9 – Иллюстрация к задаче 2.2.18

Решение.

Чтобы получить формулу для величины E вектора напряженности электрического поля \vec{E} в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В этой задаче вектор напряженности электрического поля \vec{E} и вектор $d\vec{S}$ направлены вдоль оси x . Для этого случая закон Гаусса примет вид:

$$E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_a},$$

откуда:

$$E = \frac{q}{\epsilon_a \cdot S}.$$

На каждой стороне плоскости в создании напряженности электрического поля \vec{E} участвуют половина зарядов $q = \frac{q}{2}$, так как суммарный заряд на обеих сторонах плоскости равен q . Взаимная ориентация векторов напряженности электрического поля \vec{E} на разных полуплоскостях показана на рисунке 2.9.

1) В области пространства, где координата $x > a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 3E_1.$$

При этом:

$$E = \frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}.$$

Здесь $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхностная плотность заряда.

Определим выражение для потенциала в этой области:

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_a &= -\int_0^a E_a dl = -\frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_1(x) &= -\int_a^x E dl + \varphi(a) = \frac{3 \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} (a - x) - \frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} = \frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} - \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}. \end{aligned}$$

При определении выражения для потенциала мы учли, что вектора напряженности электрического поля \vec{E} и $d\vec{l}$ направлены вдоль оси x и поэтому вместо их скалярного произведения используем обычное произведение величин этих векторов: $E \cdot l$.

2) В области пространства, где координата $0 < x \leq a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 - E_3 = \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_2(x) &= -\int_0^x E dl = -\frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}. \end{aligned}$$

3) В области пространства, где координата $-a < x \leq 0$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = E_1 - E_2 - E_3 = -E_1 = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_3(x) = - \int_{-x}^0 E dl = \frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}.$$

4) В области пространства, где координата $x \leq -a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = -E_1 - E_2 - E_3 = -3E_1 = -\frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$E_{-a} = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi(-a) = - \int_{-a}^0 E_{-a} dl = \frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_4(x) = - \int_{-x}^{-a} E dl + \varphi(-a) = \frac{3 \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} (-a + x) + \frac{a \cdot \sigma}{\varepsilon_a} = -\frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} + \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}.$$

Ответ: 1) электрическое поле и потенциал при $x > a$:

$$E = \frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} - \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a};$$

2) при $0 < x \leq a$:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}.$$

3) при $-a < x \leq 0$:

$$E = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a};$$

4) при $x \leq -a$:

$$E = -\frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_4(x) = -\frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} + \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}.$$

2.2.19 Путём интегрирования уравнения Лапласа в сферических координатах, вычислить потенциал электростатического поля внутри и вне прово-

дующей сферы радиуса a , по поверхности которой равномерно распределён заряд q .

Решение.

Чтобы получить формулу для величины E вектора напряжённости электрического поля \vec{E} в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В этой задаче вектор напряжённости электрического поля \vec{E} и вектор $d\vec{S}$ в силу симметрии направлены вдоль оси r , причём поле \vec{E} не меняется по $d\vec{S}$, так как заряд q равномерно распределён по поверхности сферы.

Для этого случая закон Гаусса примет вид:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{охв}}}{\epsilon_a} \quad \text{и} \quad E_r = \frac{q_{\text{охв}}}{4\pi \epsilon_a r^2},$$

где $q_{\text{охв}}$ – величина заряда, охваченная сферой радиуса r .

1) вычислим потенциал электростатического поля $\varphi_{\text{нар}}(r)$ вне проводящей сферы, когда $r \geq a$ и $q_{\text{охв}} = q$:

$$\varphi_{\text{нар}}(r) = -\int \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r}.$$

2) вычислим потенциал электростатического поля $\varphi_{\text{внутр}}$ внутри проводящей сферы, когда $r < a$, $q_{\text{охв}} = 0$, $E_r = 0$ и $\varphi = \text{const}$:

$$\varphi_{\text{внутр}} = 0.$$

Ответ: потенциал электростатического поля равен:

$$\text{при } r \geq a: \varphi_{\text{нар}}(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_a r};$$

$$\text{при } r < a: \varphi_{\text{внутр}} = 0.$$

2.2.20 Покажите, что квадрат разности потенциалов $(\varphi_2 - \varphi_1)^2$ прямо пропорционален величине F силы, то есть порядок величины электростатических сил, действующих между телами, можно оценить по разности потенциалов. Найдите величину коэффициента пропорциональности k и его размерность [к] в системе СИ.

Решение.

1) Выразим размерность величины разности потенциалов $[(\varphi_2 - \varphi_1)]$ через размерность величины силы [F]:

$$[(\varphi_2 - \varphi_1)] = [E \cdot l] = \left[\frac{F \cdot l}{q} \right].$$

2) Выразим размерность величины квадрата разности потенциалов $[(\varphi_2 - \varphi_1)^2]$ через размерность величины силы $[F]$:

$$[(\varphi_2 - \varphi_1)^2] = \left[\frac{F \cdot l}{q} \right]^2 = [kF].$$

3) Из последнего выражения определим величину коэффициента пропорциональности k и его размерность $[k]$ в системе СИ:

$$[k] = \frac{[(\varphi_2 - \varphi_1)^2]}{[F]} = \left[\frac{F \cdot l^2}{q^2} \right] = \left[\frac{q^2}{4\pi\epsilon_a l^2} \cdot \frac{l^2}{q^2} \right] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \right];$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_a}.$$

Абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a в системе СИ имеет размерность фарад на метр $[\Phi/\text{м}]$, поэтому, согласно последней формуле, размерность $[k] = [\text{м}/\Phi]$.

Ответ: размерность $[k] = [\text{м}/\Phi]$, а величина k находится из формулы:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_a}.$$

2.3 Задачи для самостоятельной работы

2.3.1 Чему равна полная электростатическая сила, действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, помещенного в центре квадрата со стороной a , если по углам квадрата расположены (по часовой стрелке) заряды q_1, q_2, q_3 и q_4 , причём: $q_1 = q_3$, а $q_2 = nq_4$ (рисунок 2.10). Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.1 с исходными данными согласно варианту задания.

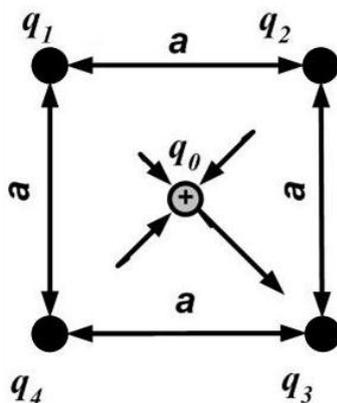


Рисунок 2.10 – Иллюстрация к задаче 2.3.1

Таблица 2.1 – Исходные данные к задаче 2.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q_1	$3q$	$2q$	$4q$	$6q$	$5q$	$-2q$	$-4q$	$-7q$	$-5q$	$-6q$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q_2	$2q$	$3q$	$5q$	$7q$	$4q$	$-3q$	$-7q$	$-4q$	$+5q$	$-2q$
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	5	-4	3	-2	5	-5	-2	3	-4	5

2.3.2 Заряженная частица движется в направлении \bar{x} в пространстве, где имеется электрическое поле E_y и перпендикулярное к нему магнитное поле с индукцией B_z со скоростью v_x . При каком условии результирующая сила F , действующая на эту частицу, равняется нулю. Какова должна быть величина v_x , если E_y и B_z известны. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.2 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.2 – Исходные данные к задаче 2.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y , кВ/м	1	1.5	2.2	3.4	5	1.6	4.7	2.8	3.6	3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_z , мТл	10	12	15	17	20	22	24	25	28	29

2.3.3 Индуктивная катушка представляет собой одиночный виток, размещенный на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала ($\mu \gg 1$) с размерами: внутренний диаметр равен $2a$, внешний $2b$, высота h . Найти индуктивность катушки (рисунок 2.11). Ниже приведена таблица 2.3 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.3 – Размеры сердечника и параметры магнитного материала

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{\mu}{100}$	20	32	53	34	15	26	17	28	35	40
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$(a = h)$, мм	2.5	3.6	4	4.5	6	5.2	3.8	3.5	5	5.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Отношение b/a	3.6	3.3	3	2.8	2.6	2.4	2.2	2	2.5	3.45

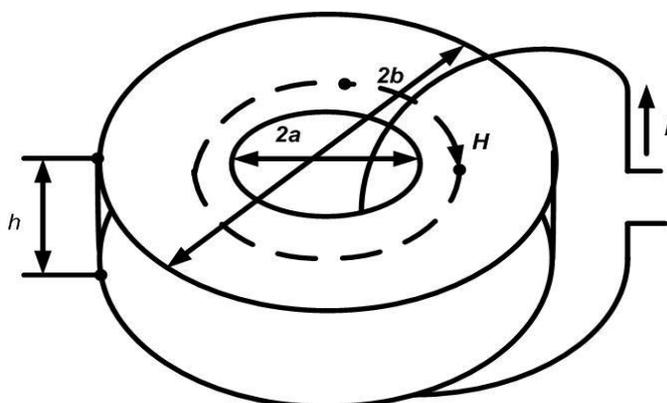


Рисунок 2.11 – Иллюстрация к задаче 2.3.3

2.3.4 Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами a и b , выполненные из металла. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет U , потенциал наружного цилиндра равен нулю. Определить напряженность электрического поля на окружности радиуса R (рисунок 2.12). Ниже приведена таблица 2.4 с исходными данными согласно варианту задания.

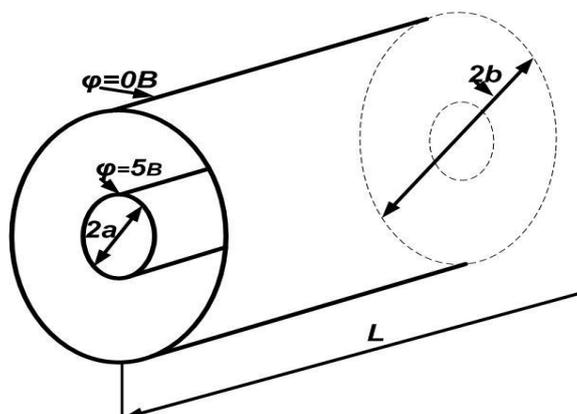


Рисунок 2.12 – Иллюстрация к задаче 2.3.4

Таблица 2.4 – Исходные данные к задаче 2.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b , см	5.5	4.6	5.4	6.5	6	5.2	7.8	8.5	9.5	9.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , см	4.5	3.6	4	5.5	4.6	4.2	5.8	6.5	8	8.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a , см	1.8	2	2.2	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5
U , В	8	12	22	25	28	32	35	24	15	18

2.3.5 Плоский конденсатор имеет размеры l и d и подключён к источнику питания с напряжением U . В зазор конденсатора введена пластина с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Пренебрегая краевыми эффектами определить силу F , стремящуюся втянуть пластину внутрь конденсатора (рисунок 2.13). Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.5 с исходными данными согласно варианту задания.

Примечание: система стремится к состоянию устойчивого равновесия, при котором электрическая энергия, запасённая в конденсаторе, достигает наибольшего значения, а свободная энергия системы «диэлектрик - обкладки конденсатора» наименьшего значения. Для достижения такого состояния диэлектрик втягивается между обкладками конденсатора до тех пор, пока электрическая ёмкость конденсатора не достигнет максимального значения. Считать, что сила F не распределена по объёму, а полностью приложена к центру тяжести диэлектрика.

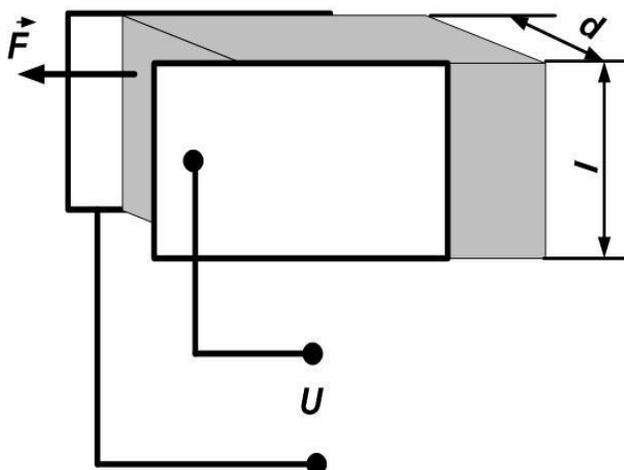


Рисунок 2.13 – Иллюстрация к задаче 2.3.5

Таблица 2.5 – Исходные данные к задаче 2.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	10	20	15	25	18	28	1.3	22	16	14
d , мм	1.8	2.4	2	3	2.3	3.3	1.9	2.9	1.9	1.9
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
U , В	15	18	25	30	35	40	29	25	15	37
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	5	6	7	8	9	10	3	2	4	7

2.3.6 Коаксиальный конденсатор состоит из двух длинных коаксиальных цилиндров с диаметрами $2a$ и $2b$, выполненных из металла. Длина конденсатора l . Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Вывести выражение для определения электрической ёмкости коаксиального конденсатора и вычислить численное значение этой ёмкости. Толщиной стенки наружного цилиндра и краевыми эффектами пренебречь. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.6 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.6 – Исходные данные к задаче 2.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a , мм	1	2	1.5	2.5	1.8	2.8	1.3	2.2	1.6	1.7
b , мм	1.8	2.4	2	3	2.3	3.3	1.9	2.9	1.9	2.1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	5	6	7	8	9	10	3	2	4	7
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	25	15	28

2.3.7 Коаксиальный конденсатор состоит из двух длинных коаксиальных цилиндров с диаметрами a и b , выполненных из металла. Длина конденсатора l . В пространство между цилиндрами частично введена трубка из ди-

электрика с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ (рисунок 2.14). Используя выражение для определения электрической ёмкости коаксиального конденсатора, выведенное при решении задачи 2.3.6 и пренебрегая краевыми эффектами, определить силу F , стремящуюся втянуть трубку внутрь конденсатора. Толщиной наружной стенки пренебречь. При решении использовать сведения, приведённые в примечании к задаче 2.3.5. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Исходные данные согласно варианту задания, соответствующие первой и второй цифрам номера варианта задания взять из таблиц к задаче 2.3.6, а данные, соответствующие третьей цифре задания приведены ниже в таблице 2.3.7.

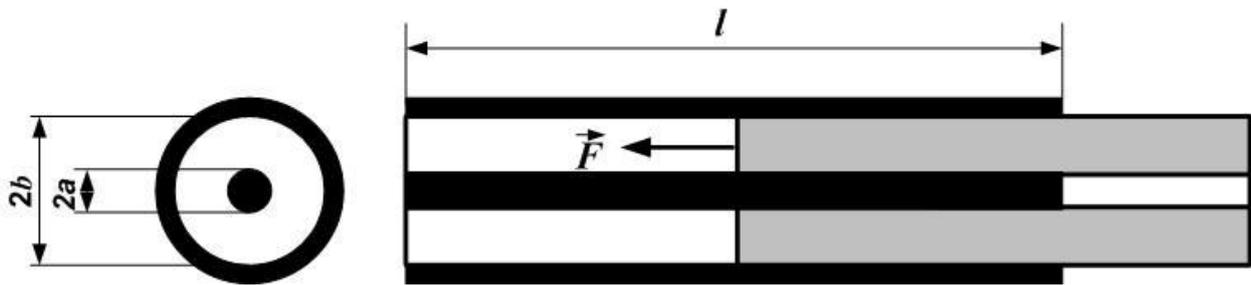


Рисунок 2.14 – Иллюстрация к задаче 2.3.7

Таблица 2.7 – Исходные данные к задаче 2.3.7

Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	40	27	25
U , В	15	18	25	30	35	40	29	35	40	29

2.3.8 Два одноимённых точечных заряда q и nq расположены на расстоянии l друг от друга. Найти на прямой, соединяющей эти заряды точку с нулевой напряжённостью и точку, в которой напряжённости создаваемые каждым зарядом равны и одинаково направлены. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.8 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.8 – Исходные данные к задаче 2.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	25	15	22
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	2.7	2.5	2.4	3.2	2.8	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6

2.3.9 В пространство между обкладками заряженного конденсатора заливается масло ($\epsilon = n \cdot \epsilon_0$). После заливки объём масла оказался в x раз меньше объёма между обкладками конденсатора. Рассчитать, как изменится энергия конденсатора после заливки, если конденсатор во время заполнения: а) остаётся присоединённым к источнику энергии; б) отсоединён от него. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.9 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.9 – Исходные данные к задаче 2.3.9

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x	2	3	4	5	6	4	3	6	5	2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	2.7	2.5	2.4	3.2	2.8	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6

2.3.10 В данной точке под углом φ накладываются два электрических поля, напряжённости которых n кВ/м и m кВ/м. Найти объёмную плотность энергии при $\epsilon = p \cdot \epsilon_0$. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.10 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.10 – Исходные данные к задаче 2.3.10

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	5.5	4.6	5.4	6.5	6	5.2	7.8	8.5	9.5	9.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	4.5	3.6	4	5.5	4.6	4.2	5.8	6.5	8	8.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1.8	2	2.2	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5
φ , рад	0.5	0.6	0.4	1.3	0.3	1.2	0.8	0.7	0.9	0.8

2.3.11 Шарик из проводящего материала радиуса $r = 3$ см помещён в начало декартовых координат. Шарик находится в воздухе и имеет заряд $Q = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл (рисунок 2.15). Потенциал поверхности шарика принят равным 50 В. Найти потенциал и напряжённость электрического поля в точках с координатами $A(r, 0, 0)$, $B(n \cdot r; 0; 0)$, $C(0; m \cdot r; p \cdot r)$, $D(n \cdot r; m \cdot r; p \cdot r)$. Координаты точек заданы в сантиметрах. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем.

вателем, и состоит из трёх цифр. Исходные данные согласно варианту задания приведены в таблице 2.10.

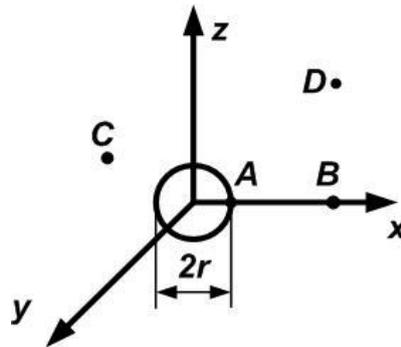


Рисунок 2.15 – Иллюстрация к задаче 2.3.11

2.3.12 По прямому цилиндрическому стальному проводу радиусом a протекает постоянный ток с силой I . Магнитная проницаемость материала провода μ . Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию внутри и вне проводника. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.11 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.11 – Исходные данные к задаче 2.3.12

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I , А	0.5	0.6	0.4	1.5	1.6	1.2	0.8	0.7	2.5	1.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	155	206	254	135	146	1422	168	245	180	240
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a , мм	1.8	2	2.	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5

3 ТЕМА 3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

3.1 Основные формулы

Для вакуума напряженность электрического поля \vec{E} и напряженность магнитного поля \vec{H} удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

которые в материальных средах должны быть дополнены материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Выражения для проекций вектора электрической индукции \vec{D} для анизотропной среды в декартовой системе координат имеют вид:

$$D_x = \varepsilon_{a11} \cdot E_x + \varepsilon_{a12} \cdot E_y + \varepsilon_{a13} \cdot E_z;$$

$$D_y = \varepsilon_{a21} \cdot E_x + \varepsilon_{a22} \cdot E_y + \varepsilon_{a23} \cdot E_z;$$

$$D_z = \varepsilon_{a31} \cdot E_x + \varepsilon_{a32} \cdot E_y + \varepsilon_{a33} \cdot E_z.$$

В эти выражения подставляют заданные значения компонентов тензора относительной диэлектрической проницаемости ε .

В расчетах обычно используют относительные проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}; \quad \mu = \frac{\mu_a}{\mu_0},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \cdot \pi}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

В материальных средах необходимо учитывать микроскопическую структуру вещества, что приводит к возникновению тока проводимости с объемной плотностью $\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}$, удовлетворяющей уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{j}_{np} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Здесь σ – удельная объемная проводимость вещества, ρ – плотность объемных зарядов.

Сумма плотностей тока смещения $\vec{j}_{CM} = \epsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, тока проводимости \vec{j}_{np} и стороннего тока $\vec{j}_{CT.Э}$ образует плотность полного тока $\vec{j}_{полн}$.

Для материальной среды уравнения Максвелла имеют более сложный вид, чем для вакуума из-за учёта явлений поляризации и намагничивания.

Если электромагнитное поле переменное во времени, то в материальной среде возникает ток поляризации с объемной плотностью $\vec{j}_n = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Здесь \vec{P} – вектор поляризованности, то есть электрический дипольный момент единицы объёма:

$$\vec{P} = k_{\text{Э}} \vec{E},$$

где $k_{\text{Э}} = \epsilon_a - \epsilon_0 = \epsilon_0(\epsilon - 1)$ – диэлектрическая восприимчивость, называемая также поляризуемостью.

Вектор поляризованности \vec{P} можно определить также через концентрацию N молекулярных диполей $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$:

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p},$$

где q – заряд, \vec{l} – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда $-q$ молекулярного диполя к положительному заряду $+q$, длина l вектора \vec{l} – это расстояние между зарядами в диполе.

Электрический дипольный момент \vec{P}_V области V можно выразить через вектор поляризованности \vec{P} :

$$\vec{P}_V = \vec{P} \cdot V.$$

В материальной среде вектор электрического смещения \vec{D} и векторное поле электрической поляризованности \vec{P} связаны соотношением $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, а первое уравнение Максвелла в переменном электромагнитном поле приобретает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э}.$$

В этой же среде вектор намагниченности \vec{M} , являющийся магнитным моментом единицы объёма вещества, и вектор магнитной индукции \vec{B} связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Тогда векторное уравнение Максвелла в материальной среде запишется в виде $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Третье и четвертое уравнение Максвелла имеют вид:

Третье и четвертое уравнение Максвелла имеют вид:

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Четвертое уравнение Максвелла свидетельствует о том, что в природе не существует магнитных зарядов. Иногда полезно ввести фиктивный сто-

ронный магнитный ток $\vec{j}_{CT.M}$, который придает симметричный вид уравнениям Максвелла.

В интегральной форме уравнения Максвелла имеют вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э} \right) d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_{CT.M} \right) d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV,$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

где $d\vec{l}$ – вектор, равный по величине dl , и совпадающий с направлением обхода контура в окрестности участка dl ; $d\vec{S}$ – вектор, равный по величине площади dS , направленный от внутренней поверхности S к наружной перпендикулярно площади S в окрестности dS .

Для гармонических электромагнитных полей уравнения Максвелла записывают относительно комплексных амплитуд соответствующих полей:

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \tilde{\mu}_a \vec{H} - \vec{j}_{CT.M},$$

$$\text{div} \vec{D} = \dot{\rho},$$

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$, $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$ есть величины комплексные.

Если потери энергии в среде связаны только с наличием токов проводимости, то:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - \frac{j \cdot \sigma}{\omega}, \quad \tilde{\mu}_a = \mu_a.$$

В технике вещества принято характеризовать с помощью тангенсов углов диэлектрических и магнитных потерь:

$$\text{tg} \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''_a}{\epsilon'_a}, \quad \text{tg} \delta_\mu = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}.$$

Объемная плотность энергии в любой точке пространства есть $\omega = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, удовлетворяющая закону сохранения энергии (теорема Пойнтинга):

$$- \text{div} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] + \sigma E^2 + j_{CT.Э} + j_{CT.M} \cdot \vec{H}.$$

Вектор Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ характеризует плотность потока мощности излучения.

Для полей, изменяющихся по гармоническому закону, удобно ввести комплексный вектор Пойнтинга $\vec{P} = \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$. Действительная часть этого вектора равна среднему потоку мощности излучения за период.

$\vec{P}_{КОЛ} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \exp(j2\omega t) \right\}$ – колеблющаяся часть $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга.

Электромагнитное поле должно удовлетворять лемме Лоренца:

$$\text{div} [\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_2] - \text{div} [\vec{E}_2 \cdot \vec{H}_1] = \vec{E}_2 \cdot \vec{j}_{СТ.1Э} - \vec{E}_1 \cdot \vec{j}_{СТ.2Э}.$$

Выражение для определения максимального удельного значения энергии $W_{\text{max.UD}}$ запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током – $W_{\text{max.UD}} = \frac{B_{\text{max}} H_{\text{max}}}{2} = \frac{B_{\text{max}}^2}{2\mu \cdot \mu_0}$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Показать, что уравнение непрерывности тока может быть получено из первого и третьего уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Решение.

Применим операцию div к первому уравнению:

$$\text{div rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{j}_{np}.$$

Из векторного анализа известно, что $\text{div rot} \vec{H} = 0$. Подставляя $\text{div} \vec{E}$ из второго уравнения, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0.$$

Ответ: уравнение непрерывности тока $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0$ может быть получено из первого и третьего уравнений Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np}$ и

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

3.2.2 Показать, что волновое уравнение электромагнитного поля следует из уравнений Максвелла.

Решение.

Выпишем первые два уравнения Максвелла, справедливых для вакуума в отсутствие сторонних источников:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Применим операцию rot ко второму уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}).$$

Из векторного анализа известно, что:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

Поскольку по условию задачи заряды отсутствуют, то из третьего уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ и:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}).$$

Подставим $\operatorname{rot} \vec{H}$ из первого уравнения:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Окончательно получим:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Теперь применим операцию rot к первому уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

откуда $\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$.

Ответ: волновое уравнение электромагнитного поля $\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ может быть получено из первого и второго уравнений

Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

3.2.3 Материальная среда характеризуется абсолютными проницаемостями $\tilde{\varepsilon}_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_0$. Получить дифференциальное уравнение второго порядка, которому должно удовлетворять векторное поле \vec{H} в данной неоднородной среде, если электромагнитный процесс гармонически изменяется во времени с частотой ω .

Решение.

Выпишем два первых уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

и применим операцию rot к первому уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = j\omega \operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \vec{E}).$$

Магнитная проницаемость среды неизменна в пространстве по условию задачи, поэтому $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Кроме того:

$$\operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \vec{E}) = \left[\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a \cdot \vec{E} \right] + \tilde{\epsilon}_a \cdot \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Из первого уравнения:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{j}{\omega \cdot \tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H},$$

тогда:

$$\operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \cdot \vec{E}) = \left[-\frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H}.$$

Окончательно получим:

$$\nabla^2 \vec{H} + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H} + \left[\frac{\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a}{\tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] = 0.$$

Ответ: полученное из уравнений Максвелла дифференциальное уравнение второго порядка, которому должно удовлетворять векторное поле \vec{H} в данной неоднородной среде, если электромагнитный процесс гармонически изменяется во времени с частотой ω , имеет вид

$$\nabla^2 \vec{H} + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H} + \left[\frac{\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a}{\tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] = 0.$$

3.2.4 В вакууме существует электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени. В некоторой точке пространства вектор $\vec{E} = 130 \cos 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{r}_x$. Определить плотность тока смещения в заданной точке.

Решение.

По определению ток смещения:

$$\vec{j}_{CM} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -0.556 \cdot \sin 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{i}_x.$$

Из решения видно, что в пространстве ток смещения и напряженность электрического поля параллельны, однако ток опережает по фазе напряженность поля на 90° .

Ответ: плотность тока смещения \vec{j}_{CM} в заданной точке равна $\vec{j}_{CM} = -0.556 \cdot \sin 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{i}_x$

3.2.5 В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды векторов поля: $\vec{E} = 35e^{j60^\circ} \cdot \vec{x}_0$; $\vec{H} = j4 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0$. Найти мгновенные значения векторов поля, а также среднее значение вектора Пойнтинга.

Решение.

Мгновенные значения связаны с комплексными амплитудами формулами:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= \operatorname{Re}(\vec{E}(r) \cdot e^{j\omega t}), \\ \vec{H}(r, t) &= \operatorname{Re}(\vec{H}(r) \cdot e^{j\omega t}),\end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= 35 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}, \\ \vec{H}(r, t) &= -4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \omega t \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м}.\end{aligned}$$

Для полей, гармонически изменяющихся во времени:

$$\vec{P}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] = 6.062 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: мгновенные значения векторов равны для напряжённости электрического поля $\vec{E}(r, t) = 35 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot \vec{x}_0$ В/м, для напряжённости магнитного поля $\vec{H}(r, t) = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \omega t \cdot \vec{y}_0$ А/м, а среднее значение вектора Пойнтинга \vec{P}_{cp} равно $\vec{P}_{cp} = 6.062 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{z}_0$ Вт/м².

3.2.6 Покажите, что векторное поле \vec{H} , изменяющееся во времени и в пространстве по закону $\vec{H} = 6x \cos \omega t \cdot \vec{x}_0 + 2e^{-2y} \sin \omega t \cdot \vec{x}_0$ не может быть полем магнитного вектора, который удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Решение.

Запишем четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Учитывая, что $\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}$ получим:

$$\operatorname{div} \vec{H}_x = \frac{d\vec{H}}{dx} = 0.$$

Для нашего же случая $\operatorname{div} \vec{H}_x = \frac{d\vec{H}}{dx} = 6 \cos \omega t \neq 0$, то есть заданное век-

торное поле \vec{H} не может быть полем магнитного вектора, так как не удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла в дифференциальной форме.

Ответ: заданное векторное поле \vec{H} не может быть полем магнитного вектора, так как не удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла в дифференциальной форме.

3.2.7 Покажите, что из четвертого уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в однородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция про-

странственных координат, вытекает следующее уравнение относительно вектора напряженности магнитного поля: $\operatorname{div} \vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad} \mu_a)$

Решение.

Запишем четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \vec{B} &= \mu_a \cdot \vec{H}; \\ \operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) &= 0. \end{aligned}$$

Используем векторное тождество:

$$\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{grad} \mu_a + \mu_a \operatorname{div} \vec{H}.$$

Подставим в это тождество $\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = 0$ и получим искомое выражение:

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad} \mu_a).$$

Ответ: из четвертого уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ и тождества $\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{grad} \mu_a + \mu_a \operatorname{div} \vec{H}$ следует, что $\operatorname{div} \vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad} \mu_a)$.

3.2.8 Известно, что некоторый электромагнитный процесс характеризуется тем, что все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z . Используя уравнения Максвелла, покажите, что при этом продольные проекции E_z и H_z векторов электромагнитного поля будут отсутствовать.

Решение.

Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Так как все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z , то:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = 0$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Из последнего выражения видно, что продольные проекции $\operatorname{rot} \vec{H}_z = 0$ и $D_z = 0$. В этом случае $E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_{az}} = 0$, то есть отсутствует продольная проекция E_z .

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Так как все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z , то:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Из последнего выражения видно, что продольные проекции $\operatorname{rot} \vec{E}_z = 0$ и $B_z = 0$. В этом случае $H_z = \frac{B_z}{\mu_{az}} = 0$, то есть отсутствует продольная проекция H_z .

Ответ: продольные проекции E_z и H_z векторов электромагнитного поля отсутствуют, то есть $E_z = 0$ и $H_z = 0$.

3.2.9 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = 28e^{j0.16}\vec{x}_0 - 105e^{-j1.2}\vec{y}_0 + 36e^{j2.3}\vec{z}_0$ (углы даны в радианах). Частота колебаний $f = 2$ МГц. Найдите мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени 0.1 мкс.

Решение.

Запишем выражение для круговой частоты:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 = 4\pi \cdot 10^6 \text{ рад/с.}$$

Запишем выражение зависимости вектора \vec{E} от времени:

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re} \left(\vec{E} \cdot e^{j\omega t} \right) = 28 \cos(4\pi \cdot 10^6 t + 0.16) \vec{x}_0 - 105 \cos(4\pi \cdot 10^6 t - 1.2) \vec{y}_0 + 36 \cos(4\pi \cdot 10^6 t + 2.3) \vec{z}_0.$$

Из последнего выражения найдём мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени $t = 0.1$ мкс $= 10^{-7}$ с:

$$\vec{E}(t = 10^{-7}) = 4.3\vec{x}_0 - 104.83\vec{y}_0 - 32.9\vec{z}_0.$$

Ответ: мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени 0.1 мкс равно $\vec{E}(t = 10^{-7}) = 4.3\vec{x}_0 - 104.83\vec{y}_0 - 32.9\vec{z}_0$.

3.2.10 Покажите, что электромагнитное поле с компонентами $E_x = E_y = 0$, $B_y = B_z = 0$, $E_z = \cos(y - ct)$, $B_x = \cos(y - ct)$ при определённом значе-

нии постоянной c удовлетворяет уравнениям Максвелла и определите это значение постоянной c .

Решение.

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_x = E_y = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Так как $E_z = \cos(y - ct)$ не зависит от x , то $\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0$ и второе уравнение Максвелла примет вид:

$$\vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Вычислим левую часть полученного уравнения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{x}_0 = \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial y} \vec{x}_0 = -\vec{x}_0 \sin(y - ct),$$

а затем правую часть этого уравнения:

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{x}_0 \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial t} = -\vec{x}_0 \cdot c \cdot \sin(y - ct).$$

Заданное по условию задачи поле удовлетворяет второму уравнению Максвелла, если равны правые части двух последних выражений, то есть при значении постоянной c равном единице ($c = 1$).

Запишем четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в декартовой системе координат при $B_y = B_z = 0$ и $B_x = \cos(y - ct)$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial x} = 0,$$

то есть заданное по условию задачи поле удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла.

Ответ: заданное по условию задачи поле удовлетворяет уравнениям Максвелла при значении постоянной c равном единице ($c = 1$).

3.2.11 В некоторой точке пространства вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 20\vec{y}_0$ В/м, в то время как вектор Пойнтинга $\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0$ Вт/м². Определить вектор напряженности магнитного поля \vec{H} .

Решение.

Запишем выражение для вектора Пойнтинга \vec{P} для случая, когда вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 20\vec{y}_0$:

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 20 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = 20H_z \vec{x}_0 - 20H_x \vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

С другой стороны, по условию задачи:

$$\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

Приравняем между собой правые части двух последних выражений для вектора Пойнтинга \vec{P} :

$$\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0 = 20H_z \vec{x}_0 - 20H_x \vec{z}_0$$

и проекции на оси координат этого вектора:

$$10\vec{x}_0 = 20H_z \vec{x}_0 \text{ и } 30\vec{z}_0 = 20H_x \vec{z}_0.$$

Из двух последних выражений получим искомые значения проекций вектора напряженности магнитного поля:

$$H_z = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ А/м} \quad \text{и} \quad H_x = \frac{30}{-20} = -1.5 \text{ А/м}$$

и формулу для вектора напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = -1.5\vec{x}_0 + 0.5\vec{z}_0 \text{ А/м.}$$

Ответ: выражение для вектора напряженности магнитного поля имеет вид $\vec{H} = -1.5\vec{x}_0 + 0.5\vec{z}_0 \text{ А/м.}$

3.2.12 В фиксированной точке пространства известны мгновенные значения векторов поля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$, где \vec{E}_0 и \vec{H}_0 – постоянные векторы. Найти среднее значение \vec{P}_{CP} и колеблющуюся часть $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга.

Решение.

Запишем выражения для среднего значения \vec{P}_{CP} и колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга \vec{P} в общем виде:

$$\vec{P}_{CP} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$$

и

$$\vec{P}_{КОЛ} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\left[\vec{E} \times \vec{H}\right] \exp(j2\omega t)\right\}.$$

Для условий, приведённых в задаче, в этих выражениях:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\varphi_1),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(j\varphi_2),$$

$$\vec{H}^* = \vec{H}_0 \exp(-j\varphi_2).$$

Запишем выражения для среднего значения \vec{P}_{CP} и колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга \vec{P} для условий, приведённых в задаче:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{cp} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_0 \exp(j\varphi_1) \times \vec{H}_0 \exp(-j\varphi_2)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \cdot \exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)] \} = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{P}_{КОЛ} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ [\vec{E}_0 \exp(j\varphi_1) \times \vec{H}_0 \exp(j\varphi_2)] \cdot \exp(j2\omega t) \} = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}$$

При этом $\bar{z}_0 \perp \vec{E}$ и $\bar{z}_0 \perp \vec{H}$.

Ответ: среднее значение вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_{CP} = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

колеблющаяся часть вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_{КОЛ} = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).$$

3.2.13 В диэлектрике с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2.4$ создано постоянное электрическое поле напряженностью $E = 200$ кВ/м. Определить электрический дипольный момент \vec{P}_V области диэлектрика объемом $V = 6$ см³.

Решение.

При решении задачи исходим из того, что электрический дипольный момент области \vec{P}_V выражается через вектор поляризованности \vec{P} , а вектор поляризованности связан с диэлектрической восприимчивостью $k_{\mathcal{E}}$ и с напряженностью электрического поля.

1) Вначале определим диэлектрическую восприимчивость $k_{\mathcal{E}}$, называемую также поляризуемостью:

$$k_{\mathcal{E}} = \varepsilon_a - \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) = \varepsilon_0(2.4 - 1) = 1.4 \cdot \varepsilon_0.$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8.842 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2) Затем определим вектор поляризованности \vec{P} , то есть электрический дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = k_{\mathcal{E}} \cdot \vec{E} = 1.4 \cdot 8.842 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^3 = 2.475 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{Ф/м}^2.$$

3) В заключение находим электрический дипольный момент области \vec{P}_V :

$$\vec{P}_V = \vec{P} \cdot V = 2.475 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 1.485 \cdot 10^{-11} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Ответ: электрический дипольный момент \vec{P}_V области диэлектрика объемом $V = 6$ см³ равен $1.485 \cdot 10^{-11}$ Кл·м.

3.2.14 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = 4.2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j1.2} \vec{z}_0$, $\vec{E} = 0.85 \cdot e^{j0.6} \vec{x}_0 - 1.3 \cdot e^{-j0.7} \vec{y}_0$. Определить комплексный вектор Пойнтинга \vec{P} и его среднее значение.

Решение.

Запишем выражения для комплексного \vec{P} и для среднего значения \vec{P}_{CP} вектора Пойнтинга \vec{P} в общем виде:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} [\vec{E} \times \vec{H}^*];$$

$$\vec{P}_{CP} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \operatorname{Re} \vec{P}.$$

Для условий, приведённых в задаче ($\vec{H} = 4.2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j1.2} \vec{z}_0$ и $\vec{E} = 0.85 \cdot e^{j0.6} \vec{x}_0 - 1.3 \cdot e^{-j0.7} \vec{y}_0$), выражения для комплексно сопряжённого значения комплексной амплитуды \vec{H}^* вектора напряённости магнитного поля и для комплексного вектора Пойнтинга \vec{P} примут вид:

$$\vec{H}^* = 4.2 \cdot 10^3 \exp(j1.2) \cdot \vec{z}_0;$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0.85 \exp(j0.6) & -1.3 \exp(-j0.7) & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \cdot 10^{-3} \exp(j1.2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \vec{x}_0 [-1.3 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3} \exp[j(1.2 - 0.7)]] - \vec{y}_0 [0.95 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3} \exp[j(0.6 + 1.2)]] \right\} =$$

$$= -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \exp(j0.5) - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} \exp(j1.8).$$

Для условий, приведённых в задаче, найдём выражения для среднего значения вектора Пойнтинга:

$$\vec{P}_{CP} = \operatorname{Re} \vec{P} = -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \cos(0.5) - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} \cos(1.8) =$$

$$= -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8776 - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} (-0.227) =$$

$$= -2.396 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 0.406 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0.$$

Ответ: $\vec{P} = -2.73 \cdot 10^{-3} e^{j0.5} \vec{x}_0 - 1.785 \cdot 10^{-3} e^{-j1.8} \cdot \vec{y}_0,$

$$\vec{P}_{CP} = -2.396 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 0.406 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0.$$

3.2.15 Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет компоненты $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 6.5$, $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$. В диэлектрике создано равномерное электрическое поле $\vec{E} = 2.51 \vec{x}_0 + 1.7 \vec{y}_0 + 9.2 \vec{z}_0$. Определить век-

тор электрической индукции \vec{D} и угол в пространстве между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Решение.

Запишем выражения для проекций вектора электрической индукции \vec{D} в общем виде в декартовой системе координат:

$$D_x = \varepsilon_{a11} \cdot E_x + \varepsilon_{a12} \cdot E_y + \varepsilon_{a13} \cdot E_z;$$

$$D_y = \varepsilon_{a21} \cdot E_x + \varepsilon_{a22} \cdot E_y + \varepsilon_{a23} \cdot E_z;$$

$$D_z = \varepsilon_{a31} \cdot E_x + \varepsilon_{a32} \cdot E_y + \varepsilon_{a33} \cdot E_z;.$$

Подставим в записанные выражения заданные значения компонентов тензора относительной диэлектрической проницаемости ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 6.5;$$

$$\varepsilon_{ij} = 0; i \neq j.$$

В результате получим:

$$D_x = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_x = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_x;$$

$$D_y = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y;$$

$$D_z = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_z = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_z.$$

Для заданного электрического поля $\vec{E} = 2.51\vec{x}_0 + 1.7\vec{y}_0 + 9.2\vec{z}_0$ имеем:

$$E_x = 2.51 \text{ В/м}; \quad E_y = 1.7 \text{ В/м}; \quad E_z = 9.2 \text{ В/м}.$$

Поэтому:

$$D_x = 6.5 \cdot 2.51 \varepsilon_0 = 16.32 \varepsilon_0;$$

$$D_y = 6.5 \cdot 1.7 \varepsilon_0 = 11.05 \varepsilon_0;$$

$$D_z = 6.5 \cdot 9.2 \varepsilon_0 = 59.8 \varepsilon_0.$$

Такой же результат, но более коротким путём можно получить, используя матричное исчисление:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.51 \\ 1.7 \\ 9.2 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 16.32 \\ 11.05 \\ 59.8 \end{pmatrix}.$$

Определим выражение для косинуса угла в пространстве ($\cos \varphi$) между векторами \vec{E} и \vec{D} , используя формулу для скалярного произведения:

$$(\vec{E} \cdot \vec{D}) = |\vec{E}| \cdot |\vec{D}| \cdot \cos \varphi = E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z.$$

Из этой формулы получим:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{(E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z)}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|}.$$

Для получения численного значения $\cos \varphi$ вычислим вначале модули $|\vec{E}|$ и $|\vec{D}|$ векторов \vec{E} и \vec{D} , а затем скалярное произведение $(\vec{E} \cdot \vec{D})$ этих векторов:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{2.51^2 + 1.7^2 + 9.2^2} = 9.687 \text{ В/м};$$

$$\begin{aligned}
|\vec{D}| &= \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{16.32^2 + 11.05^2 + 59.8^2} \cdot \varepsilon_0 = 62.963\varepsilon_0 \text{ Кл/м}^2; \\
(\vec{E} \cdot \vec{D}) &= E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z = \varepsilon_0 \cdot (2.51 \cdot 16.32 + 1.7 \cdot 11.05 + 9.2 \cdot 59.8) = \\
&= 609.896 \cdot \varepsilon_0 \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^3}; \\
\cos \varphi &= \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{(E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z)}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{609.896 \cdot \varepsilon_0}{9.687 \cdot 62.963 \cdot \varepsilon_0} = 0.99996; \\
\varphi &= \arccos(0.9996) = 0.5949^\circ.
\end{aligned}$$

Ответ: $\varphi = 0.5949^\circ$;

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (16.32\vec{x}_0 + 11.05\vec{y}_0 + 59.8\vec{z}_0) \text{ Кл/м}^2$$

или в матричной форме $\vec{D} = \begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{vmatrix} 16.32 \\ 11.05 \\ 59.8 \end{vmatrix} \text{ Кл/м}^2$.

3.2.16 В однородной проводящей среде с параметрами ε и σ в момент времени $t = 0$ создано начальное распределение плотности зарядов $\rho(x, y, z)$. Показать, что за счет токов проводимости в среде происходит экспоненциальное уменьшение плотности объемного заряда:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 \cdot \exp\left[-\frac{\sigma t}{\varepsilon \varepsilon_0}\right].$$

Оценить τ – характерное время релаксации этого процесса для типичного металла, у которого $\sigma_1 = 10^7$ См/м, а также для полупроводника, имеющего $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м.

Указание. Для решения используйте уравнение непрерывности тока.

Решение.

Запишем уравнение непрерывности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{\text{пр}}.$$

Выразим вектор плотности тока проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$ через вектор электрической индукции \vec{D} :

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \cdot \vec{D}}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

и подставим полученное выражение для вектора плотности тока проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$ в уравнение непрерывности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{\text{пр}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \text{div} \vec{D}.$$

Запишем третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

и, подставив выражение для $\operatorname{div} \vec{D}$ в полученное уравнение непрерывности тока, получим однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma \cdot \rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = 0.$$

Из математики известно, что решение такого уравнения имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{-\sigma \cdot t}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где τ – постоянная времени, определяемая по формуле:

$$\tau = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\sigma}.$$

Для $\sigma_1 = 10^7$ См/м имеем:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{10^7} = 8.85 \cdot 10^{-19} \cdot \varepsilon \text{ с},$$

а для $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{10^{-3}} = 8.85 \cdot 10^{-9} \cdot \varepsilon \text{ с}.$$

Ответ: $\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{-\sigma \cdot t}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$

для $\sigma_1 = 10^7$ См/м: $\tau_1 = 8.85 \cdot 10^{-19} \cdot \varepsilon \text{ с},$

для $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м: $\tau_2 = 8.85 \cdot 10^{-9} \cdot \varepsilon \text{ с}.$

3.2.17 Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью 7.7 г/см^3 и имеет массу 2 кг. Амплитудное значение магнитной индукции 2.1 Тл, относительная магнитная проницаемость стали $\mu = 200$. Найти максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током.

Решение.

Запишем выражение для определения максимального удельного значения энергии $W_{\max. \text{УД}}$, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током:

$$W_{\max. \text{УД}} = \frac{B_{\max} \cdot H_{\max}}{2} = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0}.$$

Поскольку энергия W_{\max} , запасаемая в сердечнике, распределена по объёму сердечника V практически равномерно, то:

$$W_{\max} = W_{\max.\text{уд}} \cdot V = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0} \cdot V = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0} \cdot \frac{m}{\rho} =$$
$$= \frac{2^2 \cdot 2}{2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} \cdot 7.7 \cdot 10^3} = 2.279 \quad \text{Дж.}$$

Ответ: максимальное удельное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током, $W_{\max.\text{уд}}$ равно 2.279 Дж.

3.3 Задачи для самостоятельной работы

3.3.1 Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью $\rho = 7.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и имеет массу m . Амплитудное значение магнитной индукции B_m , относительная магнитная проницаемость стали μ . Найти максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током. Значения μ , m и B_m приведены в таблице 3.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.1 – Исходные данные к задаче 3.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	150	200	300	400	500	600	700	800	900	950
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m , кг	2.2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.7	0.6	0.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_m , Тл	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

3.3.2 Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет компоненты $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$, $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$. В диэлектрике создано равномерное электрическое поле $\vec{E} = E_x \cdot \vec{x}_0 + E_y \cdot \vec{y}_0 + E_z \cdot \vec{z}_0$. Определить вектор электрической индукции \vec{D} и угол в пространстве между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Значения ϵ , E_x , E_y и E_z приведены в таблице 3.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.2 – Исходные данные к задаче 3.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	9.5
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y	2.2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	2.7	2.6	2.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_z	9	8	7.6	6.5	3.4	4.2	5.4	3.6	2.8	4
ε	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.3 В диэлектрике с относительной проницаемостью ε создано постоянное электрическое поле напряженностью E [кВ/м]. Определить электрический дипольный момент области диэлектрика объемом V [см³]. Значения E [кВ/м], ε и V [см³] приведены в таблице 3.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.3 – Исходные данные к задаче 3.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , кВ/м	150	200	300	400	500	600	700	800	900	950
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
V , см ³	2.2	1.8	6	4.5	3.4	11.2	12.7	15.6	17.8	11.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.4 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0 + E_z e^{j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$ (углы даны в радианах). Частота колебаний f [МГц]. Найдите мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени τ [мкс]. Значения f , τ , φ_x , φ_y , φ_z , E_x , E_y и E_z приведены в таблице 3.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.4 – Исходные данные к задаче 3.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x , В/м	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95
E_y , В/м	-25	-40	-45	-28	-27	-37	-58	-28	-39	-36
E_z , В/м	55	70	100	74	84	49	37	95	20	42
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
τ , мкс	0.1	0.08	0.16	0.12	0.04	0.12	0.07	0.06	0.05	0.03
f , МГц	0.25	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	2.7	2.6	2.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ_x	-0.2	1.25	-1.4	-1.5	1.45	-1.2	-0.2	-1.0	-0.8	1.15
φ_y	0.28	0.25	-1.0	-1.2	0.45	-0.3	-1.0	-0.1	1.32	-0.3
φ_z	-1.2	-1.1	0.45	0.55	-0.4	1.4	0.35	2.15	-0.4	0.65

3.3.5 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = H_z e^{-j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$, $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0$. Определить комплексный вектор Пойнтинга и его среднее значение. Значения E_x , E_y , φ_x , φ_y , φ_z , H_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах.

Таблица 3.5 – Исходные данные к задаче 3.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H_z , мА/м	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.6 В фиксированной точке пространства известны мгновенные значения векторов поля $\vec{E} = \vec{E}_y \cos(\omega t + \varphi_y)$, $\vec{H} = \vec{H}_z \cos(\omega t + \varphi_z)$, где \vec{E}_y и \vec{H}_z – постоянные векторы. Найти среднее значение и колеблющуюся часть вектора Пойнтинга. Значения E_y , H_z , φ_y , φ_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах.

3.3.7 В некоторой точке пространства вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = E_y \cdot \vec{y}_0$ В/м, в то время как вектор Пойнтинга $\vec{P} = P_x \cdot \vec{x}_0 + P_z \cdot \vec{z}_0$ Вт/м². Определить вектор напряженности магнитного поля. Значения E [В/м], P_x [Вт/м²] и P_z [Вт/м²] приведены в таблице 3.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число

Таблица 3.6 – Исходные данные к задаче 3.3.7

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , В/м	50	20	30	40	55	60	70	80	45	35
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P_x , Вт/м ²	15	20	35	45	40	16	22	18	24	41
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P_z , Вт/м ²	24	15	16	11	14	33	18	17	13	15

3.3.8 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = H_z e^{-j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$, $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0$. Значения E_x , E_y , φ_x , φ_y , φ_z , H_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах. Записать выражение для колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга, построить график зависимости $\vec{P}_{КОЛ}(t)$ для участка времени t от 0 до $\frac{1}{f}$, определить среднее значение колеблющейся части вектора Пойнтинга за период $T = \frac{1}{f}$.

4 ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1 Основные формулы

В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \gamma^2 \vec{H} = 0,$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \cdot \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$ – комплексный коэффициент распространения; β – коэффициент фазы, или волновое число; α – коэффициент ослабления.

Частное решение уравнения Гельмгольца описывает однородную плоскую волну:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_1(0) \cdot e^{j\gamma z} + \vec{E}_2(0) \cdot e^{-j\gamma z}.$$

Здесь временная зависимость $e^{j\omega t}$ опущена.

Если величины $\tilde{\epsilon}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ известны, то β и α находятся с помощью известных формул для комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} = \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j \cdot \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа; квадратные корни $\sqrt{\frac{r+a}{2}}$ и $\sqrt{\frac{r-a}{2}}$ следует считать положительными.

Поскольку $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon\epsilon_0(1 - jtg\delta_\epsilon)$, а $\mu_a = \mu_0$ – для большинства веществ, то:

$$\gamma = \beta - ja = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'_a} \cdot \sqrt{1 - jtg\delta_\epsilon}.$$

Величина тангенса угла диэлектрических потерь $tg\delta_\epsilon$:

$$tg\delta_\epsilon = \frac{\sigma}{2\pi f \cdot \epsilon}.$$

Условно считают, что если $tg\delta \geq 100$, то среда является металлом, а если $tg\delta \leq 0.01$, то она является диэлектриком.

Выражение для характеристического сопротивления Z_c материальной среды с малыми электрическими потерями при $\mu_a \neq \mu_0$ с учётом того, что при $tg\delta_\epsilon \ll 1$ и $\delta_\epsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства:

$$tg\delta_\epsilon \approx \delta_\epsilon \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\epsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\epsilon}{2} \right)$$

имеет вид:

$$Z_C = 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j \cdot \operatorname{tg}\delta_\varepsilon}} \approx 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right).$$

Когда $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon > 1$, то коэффициент ослабления α рассчитывают по формуле для металлоподобной среды:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi f \cdot \mu_a \cdot \sigma}{2}}.$$

Расстояние, на котором фаза изменяется на 2π радиан, называется длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

Плоскость равных фаз или волновой фронт при любых t удовлетворяет соотношению $\omega t - \beta z = \text{const}$.

Волновой фронт перемещается с фазовой скоростью:

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega t - \text{const}}{\beta} \right) = \frac{\omega}{\beta}.$$

Длина волны в материальной среде λ_d может быть выражена через фазовую скорость v_ϕ и частоту f :

$$\lambda_d = \frac{v_\phi}{f}.$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления при $\mu = 1$ могут быть выражены следующими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}}{2} \right)^{1/2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} - 1}{2} \right)^{1/2},$$

откуда $\alpha = \beta \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \right)$.

Формулы для вычисления фазовой скорости и длины волны в материальной среде при $\mu = 1$ имеют вид:

$$v_\phi = \frac{\sqrt{2} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} \right)^{1/2}};$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda_0}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} \right)^{1/2}}.$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют коэффициентом преломления $n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для плоской волны комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} связаны характеристическим сопротивлением среды:

$$Z_c = \omega \cdot \frac{\mu_a}{\gamma} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}},$$

так что $\dot{E} = Z_c \cdot \dot{H}$.

При $\mu_a = \mu_0$:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot (1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{-1/4} \cdot e^{j \frac{\delta_\varepsilon}{2}} \text{ Ом.}$$

Для вакуума: $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$.

Тогда:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0};$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0};$$

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом};$$

Для магнитоэлектрика ($\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$):

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Диэлектрик с малыми потерями ($\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$).

Поскольку $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$, то $\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \cong 1 - j \operatorname{tg} \frac{\delta_\varepsilon}{2} \approx 1 - j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Тогда:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon} = \omega \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c},$$

$$\alpha \approx \omega \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2c} = \beta \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2},$$

$$Z_c \approx \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2} \right).$$

Проводящие среды ($\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \cdot \frac{\sigma}{\omega}$ — являются функцией частоты).

Если $\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon_a$, то среда называется металлоподобной:

$$\tilde{\varepsilon}_{am} = -j \cdot \frac{\sigma}{\omega}.$$

$$\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{am} \cdot \mu_{am}} = \sqrt{j\omega_{am} \cdot \sigma \cdot \mu_{am}}.$$

Так как главное значение квадратного корня из мнимой единицы:

$$\sqrt{j} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}},$$

то:

$$\gamma_m = \sqrt{\omega\mu_{ам} \cdot \frac{\sigma}{2}} \cdot (1+j),$$

откуда:

$$\beta_m = \alpha_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}{2}}.$$

$$v_{\phi m} = \frac{\omega}{\beta_m} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_{ам} \cdot \sigma}};$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta_m} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}}.$$

$$Z_{см} = \sqrt{\frac{\mu_{ам}}{\tilde{\epsilon}_{ам}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{ам}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{ам}}{\sigma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Расстояние, на котором волна затухает в e раз, называется скин-слоем:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}}.$$

Поскольку уравнения Максвелла линейны, любая комбинация их частных решений также является решением. В частности, если $\dot{E}_x \vec{i}_x$ и $\dot{E}_y \vec{i}_y$ – решения исходных уравнений, то:

$$\dot{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 + \dot{E}_y \cdot \vec{y}_0$$

также есть решение уравнения Максвелла.

В зависимости от соотношения между фазами и амплитудами \dot{E}_x и \dot{E}_y в каждой точке пространства конец вектора \vec{E} будет перемещаться по эллипсу с различным отношением и ориентацией его полуосей.

Линейно поляризованная волна представляет собой один из предельных случаев эллиптически поляризованной волны. Вторым предельным случаем имеет место при равенстве амплитуд исходных полей и сдвиге фаз между ними, равном 90° – волна с круговой поляризацией, $\vec{E} = \dot{E}(\vec{x}_0 \pm j \cdot \vec{y}_0)$. Знак плюс соответствует волне с правой круговой поляризацией, у которой вектор вращается по часовой стрелке, если смотреть в направлении против распространения волны. Знак минус соответствует волне с левой круговой поляризацией, когда направление вращения обратное.

Любая волна с линейной поляризацией может быть представлена суммой двух волн с круговой поляризацией. Например, при линейной поляризации вдоль оси x имеем:

$$\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+ = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 + jy)$, $E_x = E_m = E$, $\vec{E}_- = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 - jy)$.

При эллиптической поляризации комплексные амплитуды:

$$\dot{E}_x = E_{0x} \cdot \exp(j\varphi_x); \quad \dot{E}_y = E_{0y} \cdot \exp(j\varphi_y).$$

Ось эллипса повёрнута относительно оси x на угол α , который отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{z}_0 . Величину угла α находят с помощью выражения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|}.$$

Отношение длины большой полуоси эллипса a к длине малой оси b называют коэффициентом эллиптичности $k_{ЭЛ}$. Этот коэффициент можно рассчитать по формуле:

$$k_{ЭЛ} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2 \sin \Delta\varphi} \left[\frac{E_{0x}}{E_{0y}} + \frac{E_{0y}}{E_{0x}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\varphi} \right].$$

Вектор Пойнтинга (среднюю плотность потока мощности) $\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$ удобно выражать через напряженность какого-либо одного поля:

$$\vec{\Pi}_{cp} = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right) \cdot \vec{i}_z = \frac{|\dot{H}|^2}{2} \cdot \operatorname{Re}(Z_c) \cdot \vec{i}_z.$$

Для сред с потерями:

$$\Pi_{cp} = \Pi_{cp}(0) \cdot e^{-2\alpha z}.$$

Погонное затухание выражается в дБ/м:

$$\Delta = 20 \lg \left[\frac{E(0)}{E(l=1)} \right] = 10 \lg \frac{\Pi(0)}{\Pi(l=1)},$$

которое связано с коэффициентом ослабления α соотношением:

$$\Delta = 8.69\alpha.$$

При распространении на расстояние l затухание волны в децибелах (дБ) равно:

$$k_{дБ} = \Delta \cdot l.$$

Для нахождения вида сигнала необходимо пользоваться спектральным или операторным методом. Если известно Фурье-преобразование сигнала

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \text{ в плоскости } z = 0, \text{ то можно найти сигнал для любых}$$

значений z , используя обратное преобразование:

$$S(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{-j\omega z} \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

При этом групповая скорость узкополосного сигнала $S(t, z)$ дается соотношением:

$$v_{gp} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2.4$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 10^{-1}$, $\mu = 1$. Определить фазовую скорость, длину волны и коэффициент ослабления.

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$, то:

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \left(1 - j \frac{\operatorname{tg} \delta_\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}{8} \right).$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} (1 + 0.125 \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon), \\ \alpha &= 0.5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 1.622 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Фазовая скорость волны будет:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} (1 + 0.125 \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon)} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.94 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Теперь находим длину волны:

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = 0.194 \text{ м}.$$

Ответ: фазовая скорость $v_\phi = 1.94 \cdot 10^8$ м/с, длина волны $\lambda = 0.194$ м и коэффициент ослабления $\alpha = 1.622 \text{ м}^{-1}$.

4.2.2 Вычислить фазовую скорость, коэффициент ослабления и глубину проникновения поля для плоской волны с частотой 10 МГц, распространяющейся в металле с параметрами $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м, $\mu = 1$.

Решение.

В реальных металлах плотность токов проводимости значительно больше токов смещения, поэтому:

$$\gamma \approx \omega \sqrt{\mu_0 \left(-j \cdot \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \sigma \cdot \mu_0}{2}} \cdot (1 - j),$$

откуда:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \sigma \cdot \mu_0}{2}} = 44.43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1},$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = 1.414 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = 22.5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 22.5 \text{ мкм}.$$

Ответ: фазовая скорость $v_{\phi} = 1.414 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, глубина проникновения поля $d = 22.5 \text{ мкм}$ и коэффициент ослабления $\alpha = 44.43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$.

4.2.3 Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2.25$, $\text{tg } \delta_{\varepsilon} = 0.01$, $\mu = 1$. Амплитуда электрического поля в плоскости $z = 0$ равна 100 В/м . Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости $z = 1 \text{ м}$.

Решение.

Плотность потока мощности определяется выражением:

$$P_{cp}(Z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \text{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) \cdot e^{-2\alpha z}.$$

Таким образом, необходимо вычислить Z_c и α :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5 j \text{tg} \delta_{\varepsilon}} \approx 251.32 \text{ Ом}.$$

$$\alpha = 0.5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \cdot \text{tg} \delta_{\varepsilon} = 0.5 \frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot \omega}{c} \cdot \text{tg} \delta_{\varepsilon} \approx 0.157 \text{ м}^{-1}.$$

Подставляя Z_c и α в $P_{cp}(z)$ получим:

$$P_{cp}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{120\pi} \cdot e^{-2\alpha z} = P_{cp}(z = 1 \text{ м}) = 14.38 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: средняя плотность потока мощности в плоскости $z = 1 \text{ м}$ $P_{cp}(z = 1 \text{ м}) = 14.38 \text{ Вт/м}^2$.

4.2.4 Считая заданными значения фазовых скоростей для левой $v_{\text{л}}$ и правой $v_{\text{пр}}$ круговой поляризации, определить угол поворота плоскости поляризации волны на участке пути длиной L для электромагнитной волны с заданной частотой ω .

Решение.

Линейно поляризованную волну, имеющую в плоскости $z = 0$ вид:

$$\vec{E} = E_{0x} \cdot \vec{i}_x$$

можно представить как сумму двух волн с правой и левой поляризацией:

$$\vec{E}_{np} = \frac{E_{0x}}{2} (\vec{i}_x + j\vec{i}_y), \quad \vec{E}_l = \frac{E_{0x}}{2} (\vec{i}_x - j\vec{i}_y).$$

Волновое число $\beta = \frac{\omega}{v_{\phi}}$. Тогда:

$$\dot{E}_{np}(z) = E_{o,np} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v_{np}}z}; \quad \dot{E}_l(z) = E_{o,l} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v_l}z}.$$

В любой плоскости $z \neq 0$ сумма этих волн будет представлять собой волну с линейной поляризацией. Координатные составляющие этих волн равны:

$$\vec{E}_x(z) = \frac{E_{0x}}{2} (e^{-j\beta_{np} \cdot z} + e^{-j\beta_l \cdot z}), \quad \vec{E}_y(z) = j \frac{E_{0x}}{2} (e^{-j\beta_{np} \cdot z} - e^{-\beta_l \cdot z}).$$

Суммарный вектор \vec{E} образует некоторый угол φ с осью x , который зависит от z :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega z}{2} \left(\frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_{np}} \right) \right],$$

или на отрезке длиной L :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega L}{2} \left(\frac{v_{np} - v_l}{v_{np} \cdot v_l} \right) \right].$$

Если различие скоростей v_{np} и v_l мало, то:

$$\varphi \approx \frac{\omega L}{2} \cdot \frac{v_{np} - v_l}{v^2} = \pi \frac{L}{\lambda} \cdot \delta v,$$

где v – среднее значение скорости; δv – относительная разность распространения; $\lambda = \frac{v}{f}$ – длина волны в среде.

Ответ: угол поворота плоскости поляризации волны на участке пути длиной L : $\varphi = \pi \frac{L}{\lambda} \cdot \delta v$.

4.2.5 Среднее значение плотности потока мощности плоской электромагнитной волны в вакууме составляет 5 Вт/м^2 . Определить амплитудные значения x -й проекции вектора напряженности электрического поля и y -й проекции вектора магнитного поля.

Решение.

Для среды без потерь:

$$P_{cp}(z) = \frac{|E_x|^2}{2} \cdot \frac{1}{Z_c} = \frac{|H_y|^2}{2} \cdot Z_c,$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$. Откуда:

$$E_x = \sqrt{P_{cp} \cdot 240\pi} = 61.4 \text{ В/м.}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{2P_{cp}}{Z_c}} = 0.16 \text{ А/м.}$$

Ответ: амплитудные значение x -й проекции вектора напряженности электрического поля $E_x = 61.4$ В/м и y -й проекции вектора магнитного поля $H_y = 0.16$ А/м.

4.2.6 Доказать принципиальную невозможность существования чисто продольных электромагнитных волн, которые имели бы лишь нулевые проекции E_z и H_z , не зависящие от поперечных координат x и y .

Решение.

Задачу решим двумя способами.

Первый способ решения.

Непосредственно воспользуемся двумя первыми уравнениями Максвелла. Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \vec{j} = 0.$$

В полученном выражении плотность тока равна нулю ($\vec{J} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$),

так как проекции E_z и H_z по условию задачи не зависят от поперечных координат x и y , и производные по этим координатам равны нулю. Значит вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 0$ В/м.

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ В/м}^2.$$

В полученном выражении производная от вектора магнитной индукции по времени равна нулю ($-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ В/м²), то есть магнитное поле и связанное с ним электрическое поле не меняются во времени. Отсюда следует, что электромагнитная волна, которая всегда связана с изменением полей во времени, отсутствует.

Второй способ решения.

Запишем выражение для вектора Пойнтинга \vec{P} при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \sin \alpha = E_z \cdot H_z \cdot \sin 0 = 0 \text{ Вт/м}^2.$$

Равенство вектора Пойнтинга \vec{P} нулю обозначает, что переноса энергии чисто продольной электромагнитной волной нет, а значит, не может быть и самой чисто продольной электромагнитной волны.

4.2.7 Плоская гармоническая волна с частотой $f = 80$ МГц, распространяясь в некоторой материальной среде без потерь, имеет длину волны $\lambda = 0.5$ м. Вычислите фазовую скорость этой волны.

Решение.

Запишем выражение для длины волны в материальной среде, содержащее фазовую скорость и частоту f :

$$\lambda_{\phi} = \frac{v_{\phi}}{f}.$$

Из этого выражения получим:

$$v_{\phi} = \lambda_{\phi} \cdot f = 0.5 \cdot 80 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_{\phi} = 4 \cdot 10^7$ м/с.

4.2.8 Плоская волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты z , имеет комплексную амплитуду $\dot{V}_{+}(z) = 200 \cdot e^{-\gamma z}$ В, где $\gamma = 0.8 + j0.5$ м⁻¹. Частота волнового процесса $f = 8 \cdot 10^4$ Гц. Вычислите мгновенное значение функции $V(z, t)$ в плоскости $z = 5$ м при $t = 10^{-4}$ с.

Решение.

Запишем выражение для плоской волны, распространяющейся в сторону увеличения координаты z , и имеющей комплексную амплитуду $\dot{V}_{+}(z) = 200 \cdot e^{-\gamma z}$ В:

$$V(z) = V_m \cos(\omega t - \beta z) \cdot \exp(-\alpha z).$$

Так как:

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.8 + j0.5 \text{ м}^{-1},$$

то:

$$\alpha = 0.8 \text{ м}^{-1}; \quad \beta = 0.5 \text{ м}^{-1}.$$

С учётом этого в плоскости с координатой $z = 5$ м в момент времени $t = 10^{-4}$ с имеем:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_m \cos(\omega t - \beta z) \cdot \exp(-\alpha z) = \\ &= 200 \cdot \cos(6.28 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} - 0.5 \cdot 5) \cdot \exp(0.8 \cdot 5) = 2.461 \text{ В.} \end{aligned}$$

Ответ: в плоскости с координатой $z = 5$ м в момент времени $t = 10^{-4}$ с $V(z) = 2.461$ В.

4.2.9 Погонное затухание Δ однородной плоской волны составляет 45 дБ/м. Определите, на каком расстоянии z амплитуда волны уменьшится в $k = 10^6$ раз.

Решение.

Запишем выражения для затухания однородной плоской волны

$$\begin{aligned} k_{\text{дБ}} &= \Delta \cdot z; \\ k_{\text{дБ}} &= 20 \cdot \lg k = 20 \cdot \lg 10^6 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ дБ.} \end{aligned}$$

Из этих выражений получим:

$$z = \frac{k_{\partial B}}{\Delta} = \frac{120}{45} = 2.66 \text{ м.}$$

Ответ: амплитуда волны уменьшится в $k = 10^6$ раз при $z = 2.66$ м.

4.2.10 Найдите характеристическое сопротивление Z_c материальной среды с параметрами $\varepsilon = 4$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 7$.

Решение.

Запишем выражение для характеристического сопротивления Z_c материальной среды с электрическими потерями с учётом того, что при $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$ и $\delta_\varepsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$ и

$$\frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\varepsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} Z_c &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - jt\text{g}\delta_\varepsilon}} \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) = \\ &= 377 \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \left(1 + j \frac{10}{2} \cdot 10^{-3}\right) = 498 + j2.49 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Ответ: характеристическое сопротивление среды при $\varepsilon = 4$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10 \cdot 10^{-3}$ и $\mu = 7$ равно $Z_c = 498 + j2.49$ Ом.

4.2.11 В среде с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 0$, $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряённости электрического поля которой в плоскости $z = 0$ $\vec{E} = (0.5\vec{x}_0 + 0.2\vec{y}_0)$ В/м. Определить комплексную амплитуду вектора напряённости магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты z .

Решение.

Вычислим характеристическое сопротивление среды для плоской электромагнитной волны при $\varepsilon = 4$, $\sigma = 0$, $\mu = 1$:

$$Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{4}} = 188.5 \text{ Ом.}$$

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат для плоской электромагнитной волны ($E_z = 0$,

$$H_z = 0, B_z = 0, \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0):$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{d(B_x \cdot \vec{x}_0 + B_y \cdot \vec{y}_0)}{dt}.$$

Из равенства проекций векторного уравнения видно, что величины $B_x = \mu_a \cdot H_x$ и H_x зависят от E_y , а $B_y = \mu_a \cdot H_y$ и H_y зависят от E_x . С учётом этого получим искомые значения проекций вектора напряжённости магнитного поля:

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_c} = -\frac{0.2}{188.5} = -1.06 \cdot 10^{-3} \text{ А/м};$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_c} = \frac{0.5}{188.5} = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$$

и формулу для комплексной амплитуды напряжённости магнитного поля:

$$\vec{H} = H_x \cdot \vec{x}_0 + H_y \cdot \vec{y}_0 = -1.06 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 2.65 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м.}$$

Ответ: комплексная амплитуда напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = -1.06 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 2.65 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м.}$$

4.2.12 Определить комплексную амплитуду вектора напряжённости электрического поля плоской электромагнитной волны в металле с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м на частотах 10 кГц и 1 МГц, если в заданной точке пространства комплексная амплитуда вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H} = 25\vec{y}_0$ А/м.

Решение.

Запишем выражение для характеристического сопротивления в металле $Z_{C.M}$:

$$Z_{C.M} = 120\pi \sqrt{\frac{j\omega \cdot \mu_a}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{2\sigma}} \cdot (1+j) = \sqrt{\frac{\pi f \cdot \mu_a}{\sigma}} \cdot (1+j) \text{ Ом.}$$

Определим величины этого сопротивления для частот 10 кГц ($Z_{C.M}(10^4$ Гц)) и 1 МГц ($Z_{C.M}(10^6$ Гц)):

$$Z_{C.M}(10^4 \text{ Гц}) = \sqrt{\frac{3.14 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^7}} \cdot (1+j) = 2.565 \cdot 10^{-5} \cdot (1+j) \text{ Ом,}$$

$$Z_{C.M}(10^6 \text{ Гц}) = \sqrt{\frac{3.14 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^7}} \cdot (1+j) = 2.565 \cdot 10^{-4} \cdot (1+j) \text{ Ом.}$$

По условиям нашей задачи $\vec{H} = \dot{H}_y \cdot \vec{y}_0 = 25\vec{y}_0$ А/м, а в предыдущей задаче из равенства проекций векторов во втором уравнении Максвелла было показано, что для плоской электромагнитной волны величина $+\dot{E}_x$ связана с величиной $-\dot{H}_y$. С учётом этого запишем выражение для комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля этой волны $\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0$ и определим величины этой амплитуды для заданных частот:

$$\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 = -Z_c \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0.$$

$$\vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -Z_{c.m} (10^4) \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0 = -2.565 \cdot 10^{-5} (1+j) \cdot 25 \cdot \vec{x}_0 = -641.3 \cdot 10^{-6} (1+j) \cdot \vec{x}_0;$$

$$\vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -Z_{c.m} (10^6) \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0 = -2.565 \cdot 10^{-4} (1+j) \cdot 25 \cdot \vec{x}_0 = -641.3 \cdot 10^{-5} (1+j) \cdot \vec{x}_0.$$

По формуле Эйлера:

$$(1+j) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \exp(j45^\circ)$$

С учётом этого:

$$\vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-6} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м};$$

$$\vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-5} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}.$$

Ответ: значения комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля равны:

$$\text{для частоты } 10 \text{ кГц } \vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-6} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м};$$

$$\text{для частоты } 1 \text{ МГц } \vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-5} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}.$$

4.2.13 Диэлектрический материал на частоте 10 ГГц обладает параметрами $\varepsilon = 3.38$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10^{-4}$, $\mu = 1$. Определить длину волны λ , коэффициент ослабления α и характеристическое сопротивление такой среды Z_C .

Решение.

Определим длину волны в диэлектрике:

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3.38 \cdot 1} \cdot 10^{10}} = 1.63 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Запишем выражения для характеристического сопротивления Z_C и коэффициента ослабления α материальной среды с электрическими потерями с учётом того, что при $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$ и $\delta_\varepsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$ и

$$\frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\varepsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2} \right).$$

$$\begin{aligned}
 Z_c &= 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-jtg\delta_\varepsilon}} \approx 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) = \\
 &= 377\sqrt{\frac{1}{3.38}} \cdot \left(1 + j\frac{10^{-4}}{2}\right) = 204.9 + j1.024 \cdot 10^{-2} \text{ Ом.} \\
 \alpha &\approx \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon} \cdot \delta_\varepsilon}{2c} = \frac{6.28 \cdot 10^{10} \sqrt{3.38} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1.924 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: длина волны $\lambda = 1.63 \cdot 10^{-2}$ м; характеристическое сопротивление $Z_c = 204.9 + j1.024 \cdot 10^{-2}$ Ом, а коэффициент ослабления $\alpha = 1.924 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$.

4.2.14 Во сколько раз уменьшится амплитуда плоской волны с частотой 2 МГц при распространении в среде с параметрами $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м на пути в 1 м.

Решение.

Определим величину тангенса угла диэлектрических потерь $tg \delta_\varepsilon$:

$$tg \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{2\pi f \cdot \varepsilon_a} = \frac{10^{-3}}{6.28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.885 \cdot 10^{-11} \cdot 2} = 4.98.$$

Так как $tg \delta_\varepsilon > 1$, то коэффициент ослабления α рассчитываем по формуле для металлоподобной среды:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi f \cdot \mu_a \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{6.28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 12.56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}{2}} = 8.88 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

Вычисляем, во сколько раз уменьшится амплитуда плоской волны на пути $z = 1$ м:

$$\frac{E_0}{E(z)} = \exp(\alpha z) = \exp(8.88 \cdot 10^{-2} \cdot 1) = 1.093.$$

Ответ: амплитуда плоской волны на пути $z = 1$ м уменьшится в 1.093 раза.

4.2.15 Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в 10^4 раз на частотах 50 Гц и 50 МГц. Электрофизические характеристики меди $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ См/м, $\mu_a = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Решение.

Уменьшение амплитуды плоской волны на пути z в $n = 10^4$ раз описывается выражением:

$$\frac{E_0}{E(z)} = \exp(\alpha z) = n = 10^4.$$

Подставляя в это выражение формулу для определения коэффициента ослабления:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \cdot \mu_a \sigma},$$

получим расчётное соотношение для определения толщины медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в $n = 10^4$ раз:

$$z = \frac{\ln(n)}{\alpha} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{\pi f \cdot \mu_a \sigma}}.$$

На частоте 50 Гц:

$$z(50 \text{ Гц}) = \frac{\ln(10^4)}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}} = 0.0868 \text{ м} = 8.68 \text{ см}.$$

На частоте 50 МГц:

$$z(50 \cdot 10^6 \text{ Гц}) = \frac{\ln(10^4)}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}} = 0.0868 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 86.8 \text{ мкм}.$$

Ответ: Толщины медного экрана для заданных частот равны: $z(50 \text{ Гц}) = 8.68 \text{ см}$; $z(50 \cdot 10^6 \text{ Гц}) = 86.8 \text{ мкм}$.

4.2.16 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , в плоскости $z = 0$, равна $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$. Определить вид поляризации, если $\varphi = 60^\circ$.

Решение.

Запишем выражение для компонент комплексной амплитуды вектора напряженности заданного электрического поля $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$:

$$E_x = E_0; \quad E_y = E_0 \cdot \exp(j\varphi).$$

С другой стороны, при эллиптической поляризации:

$$E_x = E_{0x} \cdot \exp(j\varphi_x); \quad E_y = E_0 \cdot \exp(j\varphi).$$

Сравнивая приведённые выражения, получаем:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0; \quad \varphi_x = 0^\circ; \quad \varphi_y = 60^\circ.$$

Определим ориентацию эллипса относительно оси x , используя формулу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|}.$$

В этой формуле угол α отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{z}_0 . В нашем случае вращение левое, так как $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$, а в случае, когда в скобках подобного выражения вместо знака «+» стоит «-» – вращение правое.

Вычислим $\operatorname{tg} 2\alpha$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|} = \frac{2E_0E_0}{|E_0^2 - E_0^2|} = \infty.$$

При $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$; $2\alpha = 90^\circ$, а $\alpha = 45^\circ$.

Коэффициент эллиптичности, равный отношению осей эллипса a/b , находим по формуле:

$$k_{\text{эл}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2 \sin \Delta\varphi} \left[\frac{E_{0x}}{E_{0y}} + \frac{E_{0y}}{E_{0x}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\varphi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \sin 60^\circ} \left[1 + 1 + \sqrt{(1-1)^2 + 4 \cos^2 60^\circ} \right] = \frac{1 + \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

Ответ: поляризация эллиптическая с левым вращением вектора \vec{E} ; большая ось эллипса образует угол 45° с осью x , $K_{\text{эл}} = \sqrt{3}$.

4.2.17 Две плоские электромагнитные волны с левой и правой круговой поляризацией в плоскости $z = 0$ имеют векторы напряженности электрического поля: $\vec{E}_l = E_0(\vec{x}_0 - j\vec{y}_0)e^{j\varphi_l}$; $\vec{E}_{np} = E_0(\vec{x}_0 + j\vec{y}_0)e^{j\varphi_{np}}$. Определить вид поляризации суммарного поля, если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_l - \varphi_{np} = 45^\circ$.

Решение.

Запишем выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля при линейной поляризации вдоль оси поляризации x :

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; \quad E_x = E_m = E, \quad (*)$$

где $\vec{E}_+ = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 + jy)$, а $\vec{E}_- = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 - jy)$.

В нашем случае:

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_{np} = E_0 \left\{ \exp[j(\varphi_{np} + 45^\circ)] + \exp(j\varphi_{np}) \right\} = E_0 \exp(j\varphi_{np}) \left[\exp(j45^\circ) + 1 \right].$$

Совместим ось x' с направлением 45° . Тогда:

$$\vec{E} = E_0 \exp(j\varphi_{np}) \left[\exp(j0^\circ) + 1 \right] = 2E_0 \exp(j\varphi_{np}).$$

$$E = \text{Re } \vec{E} = 2E_0 \cos(\varphi_{np}) = E_m. \quad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**) видим, что поляризация линейная, вектор \vec{E} образует угол 45° с осью x .

Ответ: поляризация линейная, вектор \vec{E} образует угол 45° с осью x .

4.2.18 Однородная плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Вектор Пойнтинга волны лежит в плоскости x, z и образует угол φ с осью z . Найти расстояние вдоль z , на котором фаза волны изменится на 360° , если частота колебаний равна 100 МГц, а угол $\varphi = 60^\circ$.

Решение.

Изобразим ориентацию вектора Пойнтинга в декартовой системе координат на рисунке 4.1.

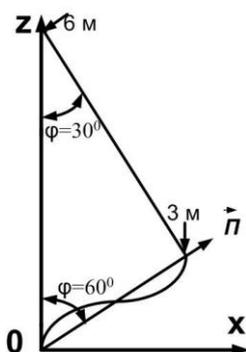


Рисунок 4.1 – Иллюстрация к задаче 4.2.17

Вычислим длину волны в вакууме:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ м.}$$

Из рисунка 4.1 видно пересечение фронта волны, на котором фаза волны изменится на 360° , с осью z . С помощью этого рисунка находим выражение для расстояния вдоль оси z , на котором фаза волны изменится на 360° :

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\sin(30^\circ)} = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ м.}$$

Ответ: 6 м.

4.2.19 В среде с параметрами $\epsilon = 2.25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 100 В/м. Определить плотность потока мощности, переносимой волной в направлении распространения.

Решение.

Запишем выражение для расчёта величины плотности потока мощности, переносимой волной в направлении распространения:

$$P = \frac{E_m^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right).$$

Определим величину характеристического сопротивления:

$$Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \sqrt{\frac{1}{2.25}} = 251.3 \text{ Ом.}$$

Определим величину плотности потока мощности:

$$P = \frac{E_m^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) = \frac{10^4}{2} \cdot \frac{1}{251.3} = 19.894 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: величина плотности потока мощности $P = 19.894 \text{ Вт/м}^2$.

4.2.20 В среде с показателем преломления, зависящим от частоты, распространяются два узкополосных радиоимпульса с несущими частотами 10 и 20 ГГц. Определить разность времен запаздывания импульсов на расстоянии

100 км от точки, где они совпадают по времени, если закон изменения показателя преломления записывается в виде $n(\omega) = 10^{-10} \omega$.

Решение.

Определим зависимость скорости распространения от частоты для закона изменения показателя преломления $n(\omega) = 10^{-10} \omega$:

$$v(\omega) = \frac{c}{n} = \frac{c}{10^{-10} \omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-10} \cdot 6.28 f} = 0.478 \cdot 10^{18} f^{-1} \text{ м/с.}$$

Определим разность времён запаздывания импульсов на расстоянии 100 км от точки, где они совпадают по времени:

$$\begin{aligned} \Delta\tau = \tau_1 - \tau_2 &= S \left(\frac{1}{v_2(\omega)} - \frac{1}{v_1(\omega)} \right) = S \cdot 10^{-18} \cdot \frac{1}{0.478} (f_1 - f_2) = \\ &= 10^5 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{10^{10}}{0.478} (2 - 1) = 2.092 \text{ мс.} \end{aligned}$$

Ответ: импульс с несущей частотой 10 ГГц будет опережать второй импульс с несущей частотой 20 ГГц на 2.092 мс.

4.3 Задачи для самостоятельной работы

4.3.1 Плоская волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты z , имеет комплексную амплитуду $V_+(z) = 200e^{-\gamma z}$ В, где $\gamma = \alpha + j\beta$ м⁻¹. Частота волнового процесса $f = f_0$, кГц. Вычислите мгновенное значение функции $V(z, t)$ в плоскости $z = z_0$ при $t = t_0$ мс, погонное затухание Δ в дБ/м и фазовую скорость. Значения α [м⁻¹], β [м⁻¹], f_0 , z_0 и t_0 приведены в таблице 4.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.2 Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в n раз на частотах f_1 [Гц] и f_2 [МГц]. Значения n , f_1 [Гц] и f_2 [МГц] приведены в таблице 4.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.1 – Исходные данные к задаче 4.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\alpha, \text{ м}^{-1}$	0.4	0.2	0.15	0.28	0.56	1.2	1.4	0.85	0.9	0.3
$\beta, \text{ м}^{-1}$	0.3	0.6	0.4	0.35	0.48	0.4	1	1.3	0.6	0.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f = f_0, \text{ кГц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$z_0, \text{ м}$	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4
$t_0, \text{ мс}$	22	18	24	15	14	11	17	16	18	12

Таблица 4.2 – Исходные данные к задаче 4.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$2.6 \cdot 10^5$	$3.7 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^5$	$2.9 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f_1, \text{ Гц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f_2, \text{ МГц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83

4.3.3 Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с параметрами ε , $\sigma = 0$, $\mu = 1$ и имеет в плоскости $z = 0$ комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = (E_x \cdot \vec{x}_0 + E_y \cdot \vec{y}_0)$ В/м. Определить характеристическое сопротивление среды и комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты z . Значения ε , E_x и E_y приведены в таблице 4.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.3 – Исходные данные к задаче 4.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x , В/м	1.2	1.8	0.4	0.5	3.4	1.1	2.7	0.6	0.8	0.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y , В/м	2.2	0.8	0.6	0.4	1.4	2.1	0.7	0.5	1.8	1.3

4.3.4 Плоская электромагнитная волна распространяется вертикально вниз и падает на водную поверхность с параметрами: ε_a [нФ/м], σ [См/м], $\mu = 1$. Длина волны в воздухе λ . Определить: является ли среда металлоподобной для данной частоты, длину волны в воде, а также изменённую скорость распространения волны в воде. На какую длину волны необходимо настроить приёмник под водой для принятия сигнала, если шкала приёмника проградуирована в длинах волн: на длину волны в воздухе или длину волны в воде. Значения ε_a [нФ/м], σ [См/м] и λ [м] приведены в таблице 4.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.5 Плоская электромагнитная волна распространяется в условиях задачи 4.3.4. Величина напряжённости электрического поля E [мкВ/м] на глубине x [м] равна $E = E_m \cos \omega t$ В/м. Определить величину напряжённости магнитного поля H на поверхности воды. Значения ε_a [нФ/м], σ [См/м] и λ [м] приведены в таблице 4.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число, а значения E (В/м) и x (м) в таблице 4.5.

Таблица 4.4 – Исходные данные к задаче 4.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_a , нФ/м	0.6	0.78	0.65	0.7	0.58	0.64	0.73	0.56	0.68	0.71
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.9	1.05	1.14	1.0	0.95	0.88	0.97	1.07	0.93	0.88
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	400	430	450	470	490	510	530	550	580	380

Таблица 4.5 – Исходные данные к задаче 4.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x , м	1	2	3	4	3.5	1.4	2.7	1.6	1.8	2.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , мкВ/м	1.2	1.8	0.4	0.5	3.4	1.1	2.7	0.6	0.8	0.3

4.3.6 Диэлектрический материал на частоте f [ГГц] обладает параметрами ϵ , $\text{tg } \delta_\epsilon$, $\mu = 1$. Определить длину волны, коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление такой среды. Значения ϵ , $\text{tg } \delta_\epsilon$, f [ГГц] приведены в таблице 4.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.7 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны эллиптической поляризации, распространяющейся вдоль оси z , в плоскости $z = 0$, равна $\vec{E} = E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{x}_0 + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{y}_0$. По заданным значениям E_{0x} , E_{0y} и $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ определить параметры эллиптической поляризации: направление вращения вектора \vec{E} , ориентацию осей эллипса и коэффициент эллиптичности. Значения E_{0x} [В/м], E_{0y}/E_{0x} и $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ приведены в таблице 4.7 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.6 – Исходные данные к задаче 4.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{tg\delta_\varepsilon}{10000}$	0.9	1.0	1.2	1.1	2.9	0.5	0.7	1.6	0.3	0.8
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	16	13	15	17	19	12	20	23	11	8

Таблица 4.7 – Исходные данные к задаче 4.3.7

Первая циф- ра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_{0x} , В/м	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая циф- ра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{E_{0x}}{E_{0y}}$	0.9	1.05	1.14	1.3	0.95	0.88	0.97	1.07	0.93	0.88
Третья циф- ра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\Delta\varphi^\circ$	36	53	45	30	15	25	20	23	10	40

4.3.8 Найдите характеристическое сопротивление Z_C материальной среды с параметрами ε , $tg \delta_\varepsilon$, μ . Значения ε , $tg \delta_\varepsilon$ приведены в таблице 4.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значения μ приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Исходные данные к задаче 4.3.8

Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	16	13	15	17	10	12	20	23	11	8

4.3.9 Определить комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны в металле с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м, на частотах f_1 и f_2 , если в заданной точке пространства комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля $\vec{H} = H_y \cdot \vec{y}_0$ А/м. Значения H_y [А/м], f_1 [кГц] и f_2/f_1 приведены в таблице 4.9 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.9 – Исходные данные к задаче 4.3.9

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H_y , А/м	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f_1 , кГц	36	53	45	30	15	25	20	23	10	40
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{f_2}{f_1}$	80	50	45	90	75	25	20	65	70	60

4.3.10 Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , с относительной магнитной проницаемостью μ и с удельной проводимостью σ . Определить параметры волны: α , β , γ , Z_c , v_ϕ и λ для значений частоты: 10^5 Гц, 10^8 Гц, 10^{10} Гц. Условно считая, что если $\text{tg}\delta \geq 100$, то среда является металлом, а если $\text{tg}\delta \leq 0.01$, то она является диэлектриком, определить для какой из указанных частот среду можно считать металлом, а для какой диэлектриком. Значения ϵ , μ и σ приведены в таблице 4.10 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.10 – Исходные данные к задаче 4.3.10

Первая цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ	72	81	68	75	93	74	87	64	78	83
Вторая цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	1.6	1.5	1.4	1.3	1.55	1.25	1.2	1.6	1.0	1.45
Третья цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.2	0.3	45	0.1	0.09	0.2	0.3	0.06	0.07	0.08

5 ТЕМА 5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ

5.1 Основные формулы

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$, σ и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны.

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентом отражения:

$$R_E = \frac{E_{omp}}{E_{nad}}; \quad R_H = \frac{H_{omp}}{H_{nad}}$$

и коэффициентом преломления (прохождения):

$$T_E = \frac{E_{np}}{E_{nad}}; \quad T_H = \frac{H_{np}}{H_{nad}}.$$

Для среднего значения плотности потока мощности:

$$R_{\Pi} = \frac{\Pi_{omp}}{\Pi_{nad}}; \quad T_{\Pi} = \frac{\Pi_{np}}{\Pi_{nad}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то:

$$R_E = \frac{(Z_{C2} - Z_{C1})}{(Z_{C2} + Z_{C1})}; \quad T_E = \frac{2Z_{C2}}{(Z_{C1} + Z_{C2})},$$

где Z_C – характеристическое сопротивление среды, соответственно первой и второй:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}}.$$

Если в формулах для характеристического сопротивления учесть, что для диэлектриков с потерями:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \cdot \epsilon_0 (1 - jtg\delta_\epsilon),$$

то выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик примет вид

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon} \cdot (1 - jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}.$$

Здесь $tg\delta_\epsilon = \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \approx \delta_\epsilon$.

Плоскость, содержащая вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к границе раздела, называют плоскостью падения.

Из граничных условий следует, что углы падения φ , отражения φ_0 и преломления φ_n связаны законом зеркального отражения $\varphi = \varphi_0$ и законом Снелля:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Если вектор \vec{E} лежит в плоскости падения, то:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi_n - Z_{C1} \cos \varphi]}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]},$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]}.$$

Если вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения, то:

$$R_E^{\perp} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_n]}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]},$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]}.$$

Для диэлектрических сред, у которых $\mu = 1$, коэффициенты R и T удобно представить в виде:

$$R_E^{\perp} = \frac{-\sin(\varphi - \varphi_n)}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad R_E^{\parallel} = \frac{-\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_n)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_n)};$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad T_E^{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n) \cos(\varphi - \varphi_n)}.$$

При $\varphi + \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, $R_E^{\parallel} = 0$. Угол падения, в этом случае называется углом Брюстера:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Если при $\varepsilon_2 \cdot \mu_2 < \varepsilon_1 \cdot \mu_1$ угол падения φ будет равен или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{ПВО}$, равного:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}},$$

то преломлённой волны в общепринятом смысле не существует (явление полного внутреннего отражения). Коэффициенты отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице, а будет изменяться только их фаза:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\},$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

Коэффициенты преломления \dot{T}_E^{\parallel} и \dot{T}_E^{\perp} при явлении полного внутреннего отражения не равны нулю:

$$\dot{T}_E^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}};$$

$$\dot{T}_E^{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

В этом случае поле $\dot{E}_{\text{ПП}}$, прошедшее во вторую среду, представляет собой неоднородную плоскую волну, быстро убывающую при удалении от границы раздела и называемую поверхностной волной:

$$\dot{E}_{\text{ПП}} = \dot{T} \cdot \dot{E}_{\text{ПАД}} \exp \left\{ \beta_1 \left[z \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)} - jx \cdot \sin \varphi \right] \right\},$$

где z и x – текущие координаты в плоскости падения: z – перпендикулярна, а x – параллельна границе раздела.

Глубина проникновения поверхностной волны в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \operatorname{ch} \alpha},$$

где:

$$\operatorname{ch} \alpha = \sin \psi = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \frac{n_2}{n_1},$$

ψ – комплексный угол преломления, $\beta_2 = \frac{\omega}{v_{\phi}}$ – коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2.

Фазовая скорость поверхностной волны находится из выражения:

$$v_{\phi.нов} = \frac{\omega}{\beta_{нов}},$$

где $\beta_{нов} = \beta_2 ch\alpha = \beta_2 \frac{n_2}{n_1} = \beta_1$.

Для металлоподобных сред справедливо граничное условие Леонтовича:

$$\vec{E}_\tau = Z_{см} [\vec{H} \cdot \vec{i}_n] \quad \text{или} \quad |\dot{E}| = |Z_{см} \cdot \dot{H}_\tau|,$$

где \vec{i}_n – единичный вектор нормали к поверхности металлоподобной среды, направленный внутрь;

$$Z_{см} = \sqrt{\frac{j\mu_a \omega}{\sigma}};$$

\dot{H}_τ – касательная к поверхности среды составляющая вектора напряженности магнитного поля.

На границе раздела должны выполняться следующие граничные условия:

$$\mu_{a1} \cdot H_{1n} = \mu_{a2} \cdot H_{2n}; \quad \varepsilon_{a1} \cdot E_{1n} = \varepsilon_{a2} \cdot E_{2n};$$

для нормальных составляющих и

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

для касательных составляющих электромагнитного поля.

Суммарная величина напряженности магнитного поля на границе раздела металла и среды:

$$H_\Sigma = 2H_{пад}.$$

Амплитуда вектора плотности электрического тока на границе раздела металла и среды:

$$j_{ПОВ.Э} = [\vec{i}_{ПОВ} \times \vec{H}_\Sigma],$$

где $\vec{i}_{ПОВ}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь толщиной l при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1-\varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1+\varepsilon)tg\theta},$$

где выражение для угла θ :

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\varepsilon\mu}}{c}.$$

Для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн) амплитуда определяется из выражения:

$$\vec{E} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

$$E_\tau = 0; \quad H_n = 0.$$

Выразим фазовую скорость v_ϕ через продольное число $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, которое играет роль коэффициента фазы:

$$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \cdot \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

Здесь $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Для немагнитного диэлектрика без потерь формулы для коэффициента отражения R имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi}; \quad R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Показатель преломления n при падении волны из вакуума:

$$n = \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}.$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры: $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.1$ См/м. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц. Полагая, что амплитуда напряженности электрического поля падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна 1 В/м, записать выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны.

Решение.

Выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик с потерями имеет вид:

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2}}.$$

Воспользуемся приближением – при $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$:

$$\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \approx 1 - 0.5 \cdot j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon,$$

так как $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{2}{9} \ll 1$.

Тогда для коэффициента отражения получим:

$$\dot{R}_E = -\frac{8+j}{10-j} = -0.8e^{-j0.025},$$

а

$$\dot{T}_E = 1 - \dot{R}_E = \frac{2}{10-j} = 0.2e^{j0.1}.$$

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля отраженной волны будет:

$$\dot{E}_{omp} = \dot{R}_E \cdot \dot{E}_{nad} = -0.8e^{-j0.025} e^{j\beta_0 Z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, найдем:

$$E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z).$$

Ответ: Комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц: $\dot{R}_E = -0.8e^{-j0.025}$ и $\dot{T}_E = 0.2e^{j0.1}$, выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны $E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z)$.

5.2.2 Измерение комплексного коэффициента отражения \dot{R}_E от диэлектрика с неизвестными параметрами ε и μ на частоте 1 ГГц дает величину $\dot{R}_E = -0.5e^{-j0.09}$. Определить параметры диэлектрика ε , $\text{tg } \delta_\varepsilon$, σ , если известно, что $\mu = 1$ и волна падает на диэлектрик нормально.

Решение.

Комплексный коэффициент отражения от границы раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon \varepsilon_0 (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)$, $\mu = 1$ запишется:

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}},$$

откуда

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}.$$

Поскольку \dot{R}_E задано через показательную функцию, то и правую часть выразим через показательную функцию $a + jb = re^{j\varphi}$. Так как $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$, то $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$, $\text{arctg}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ и

$$(1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon) e^{-j \cdot \text{arctg}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} e^{-j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

Приняв указанные приближённые равенства, получим:

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} \cdot e^{j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

С другой стороны $\dot{R}_E = -|R| \cdot e^{-j\psi}$ ($|R| = 0.5$; $\psi = 0.09$), тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} &= \frac{1 + |R| \cdot e^{-i\psi}}{1 - |R| \cdot e^{-i\psi}} = \frac{1 + |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)}{1 - |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)} = \\ &= \frac{1 + |R| \cdot \cos \psi - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{1 - |R| \cdot \cos \psi + j \cdot |R| \cdot \sin \psi} = \frac{(1 + |R| \cdot \cos \psi) - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{(1 - |R| \cdot \cos \psi) + j \cdot |R| \cdot \sin \psi}. \end{aligned}$$

Приравнивая модули и фазы обеих частей, окончательно получим:

$$\frac{\delta_\varepsilon}{2} = -\operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 + |\dot{R}| \cos \psi} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 - |\dot{R}| \cos \psi} \right); \quad (*)$$

$$\varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|R| \cos \psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|R| \cos \psi}. \quad (**)$$

Кроме того:

$$\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \approx \delta_\varepsilon. \quad (***)$$

Подставляя $\psi = 0.09$ и $|R| = 0.5$, из соотношения (*) получим $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon = 0.12$. Затем из соотношения (**) вычислим $\varepsilon = 9.0$. В заключение из соотношения (***) найдём $\sigma = 0.06$ См/м.

Ответ: параметры диэлектрика: $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0.12$, $\varepsilon = 9.0$, $\sigma = 0.06$ См/м.

5.2.3 Амплитудное значение напряженности электрического поля падающей из вакуума волны $E_{x,\text{пад}} = 250$ В/м. Относительная диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon = 3.2$. Найти модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн.

Решение.

Модули усредненных векторов Пойнтинга (Вт/м²) будут:

$$P_{\text{пад}} = \frac{E_{x,\text{пад}}^2}{2} \cdot Z_0,$$

где Z_0 – характеристическое сопротивление вакуума, $Z_0 = 120\pi$;

$$P_{\text{отр}} = \frac{(R \cdot E_{x,\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_0,$$

и

$$P_{\text{пр}} = \frac{(T \cdot E_{x,\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_{C2},$$

где $Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Входящие в формулы R и T для рассматриваемого случая будут:

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = -0.283; \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = 0.717.$$

Тогда $P_{\text{пад}} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{отр}} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{пр}} = 76.2 \text{ Вт/м}^2$.

Ответ: модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн равны $P_{\text{пад}} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{отр}} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{пр}} = 76.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.4 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом $\varphi = 60^\circ$ на границу раздела с диэлектриком, имеющим $\varepsilon = 3.8$, $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны $E_{m,\text{пад}} = 0.4 \text{ В/м}$. Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

Решение.

По определению, характеристическое сопротивление среды есть коэффициент пропорциональности между $E_{m,x}$ и $H_{m,y}$:

$$Z_C = \frac{E_{m,x}}{H_{m,y}}.$$

Для отраженной волны $Z_C = Z_0 = 120\pi$, а для прошедшей:

$$Z_C = Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тогда:

$$H_{m,\text{отр}} = |R_{\perp}| \cdot \frac{E_{m,\text{пад}}}{Z_0};$$

$$H_{m,\text{пр}} = |T_{\perp}| \cdot \frac{E_{m,\text{пад}}}{Z_{C2}}.$$

В рассматриваемой задаче:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}};$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Окончательно получим:

$$H_{m,\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}; \quad H_{m,\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}.$$

Ответ: амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн равны: $H_{m,\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$; $H_{m,\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$.

5.2.5 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 = 3.4$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2, имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения $\varphi = 45^\circ$, частота поля $f = 35 \text{ ГГц}$.

Решение.

По условию задачи угол полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3.4}}\right) = 32.8^\circ.$$

Поскольку угол падения $\varphi > \varphi_{\text{ПВО}}$, неоднородные плоские волны в среде 2 действительно возникают.

Из закона Снелля $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1}$ комплексный угол преломления будет

$\sin \psi = \sqrt{3.4} \sin \varphi = 1.3$, откуда получаем уравнение относительно параметра α ($\psi = 90^\circ + j\alpha$). Учтем, что $\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha$ и воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = 1.3.$$

Это трансцендентное уравнение относительно α преобразуем к виду:

$$e^{-2\alpha} - 2.6e^{-\alpha} + 1 = 0.$$

Это есть квадратное уравнение относительно $e^{-\alpha}$, имеющее два корня x_1 и x_2 , из которых выбираем больший, что следует из конечности решения при $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом $\alpha = 0.756$, или $\psi = \frac{\pi}{2} + j0.756$.

Коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} = 733 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент фазы поверхностной волны:

$$\beta_{\text{пов}} = \beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha = 952.9 \text{ м}^{-1},$$

откуда фазовая скорость:

$$v_{\text{ф.пов}} = \frac{\omega}{\beta_{\text{пов}}} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Глубина проникновения поля в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha} = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: фазовая скорость и глубина проникновения неоднородной плоской волны равны: $v_{\text{ф.пов}} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ и $d = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

5.2.6 На идеально проводящую плоскость из воздуха по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности 230 Вт/м^2 . Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела.

Решение.

Для условий, приведённых в задаче, запишем выражения для вычисления величины среднего значения вектора Пойнтинга:

$$P_{CP} = \frac{H_{y.m}^2}{2} \cdot \operatorname{Re} Z_c.$$

Из этого выражения получим формулу для вычисления величины напряженности магнитного поля $H_{\text{пад}}$ падающей электромагнитной волны:

$$H_{\text{пад}} = H_{y.m} = \sqrt{\frac{2P_{CP}}{\operatorname{Re} Z_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 230}{377}} = 1.105 \text{ А/м.}$$

Вычислим суммарную величину напряженности магнитного поля на границе раздела:

$$H_{\Sigma} = 2H_{\text{пад}} = 2 \cdot 1.105 = 2.21 \text{ А/м.}$$

Амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела находим по формуле:

$$j_{\text{пов.э}} = [\vec{i}_{\text{пов}} \times \vec{H}_{\Sigma}] = 1 \cdot 2.21 = 2.21 \text{ А/м.}$$

В последней формуле $\vec{i}_{\text{пов}}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела. Взаимная ориентация векторов показана на рисунке 5.1.

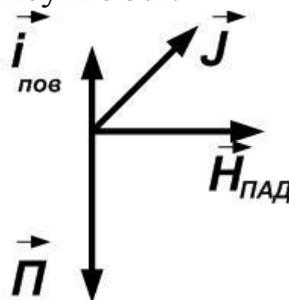


Рисунок 5.1 – Иллюстрация к задаче 5.2.6

Ответ: амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела $j_{\text{пов.э}} = 2.21 \text{ А/м.}$

5.2.7 Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство с параметрами $\varepsilon = 9.5$, $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}} = 30 \text{ Вт/м}^2$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика.

Решение.

Запишем формулы для расчёта величин плотностей потока мощности плоской волны, прошедшей внутрь диэлектрика, и падающей плоской волны:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} \quad \text{и} \quad P_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{пад}}^2}{2Z_0}.$$

Затем начнём вычислять численные значения величин, входящих в эти формулы. Вначале для условий $\varepsilon = 9.5$ и $\mu = 1$, приведённых в задаче, опреде-

лим величину характеристического сопротивления идеального диэлектрического полупространства, у которого удельная проводимость $\sigma = 0$:

$$Z_{c2} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{9.5}} = 122.4 \text{ Ом},$$

напряженности электрического поля падающей волны:

$$E_{\text{пад}} = \sqrt{2Z_0 P_{\text{пад}}} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 30} = 150.4 \text{ В/м},$$

и коэффициента преломления (прохождения) плоской электромагнитной волны, падающей по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство:

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = \frac{2}{1 + \sqrt{9.5}} = 0.49.$$

В заключение определим величины напряженности электрического поля прошедшей волны:

$$E_{\text{пр}} = T_E \cdot E_{\text{пад}} = 0.49 \cdot 150.4 = 73.7 \text{ В/м}$$

и плотности потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} = \frac{73.7^2}{2 \cdot 122.4} = 22.2 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: плотность потока мощности, прошедшей внутрь диэлектрика $P_{\text{пр}} = 22.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.8 На границу раздела между диэлектриком без потерь с параметрами $\varepsilon_2 = 4.6$, $\mu_2 = 1.1$ и вакуумом падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной.

Решение.

Представим падающую плоскую электромагнитную волну, имеющую круговую поляризацию как сумму двух волн линейной поляризации. У одной из этих волн вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения (параллельная поляризация), а у другой он перпендикулярен плоскости падения (перпендикулярная поляризация). Если поляризация параллельная, то при некотором значении угла падения, называемого углом Брюстера φ_B , коэффициент отражения R_E^{\parallel} равен нулю и отражатся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера.

Приравняем выражение в виде дроби при $\varphi = \varphi_B$ для R_E^{\parallel} к нулю:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B]}{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} + Z_{c1} \cos \varphi_B]} = 0.$$

Эта дробь равна нулю, когда равен нулю её числитель:

$$Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B = 0.$$

С другой стороны, по формуле Снелля (при $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) имеем:

$$\frac{\sin \varphi_{nB}}{\sin \varphi_B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Преобразуя два последних выражения, получим равенства:

$$\sin^2 \varphi_{nB} = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2};$$

$$\cos^2 \varphi_{nB} = \left(\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \right)^2 \cos^2 \varphi_B = \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \mu_2} \cos^2 \varphi_B = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \cos^2 \varphi_B.$$

Сложение левых и правых частей этих равенств позволяет исключить угол преломления Брюстера φ_{nB} и получить уравнение с одним неизвестным – углом падения Брюстера φ_B :

$$1 = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{\varepsilon_2 \cos^2 \varphi_B}{\mu_2}.$$

Подставив в это уравнение:

$$\sin^2 \varphi_B = 1 - \cos^2 \varphi_B,$$

находим выражение для определения косинуса угла падения Брюстера, вычисляем величину $\cos \varphi_B$, а затем и сам угол Брюстера φ_B :

$$\varepsilon_2 \cdot \mu_2 = \sin^2 \varphi_B + \varepsilon_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_B; \quad \varepsilon_2 \cdot \mu_2 - 1 = \cos^2 \varphi_B (\varepsilon_2^2 - 1);$$

$$\cos \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{\varepsilon_2^2 - 1}} = \sqrt{\frac{4.6 \cdot 1.1 - 1}{4.6^2 - 1}} = 0.448; \quad \varphi_B = \arccos(0.448) = 63^\circ 20'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\varphi_B = 63^\circ 20'$.

5.2.9 Пластина толщиной $d = 1.4$ см выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами $\varepsilon = 2.1$, $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля $f = 12$ ГГц.

Решение.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon)tg\theta}.$$

Вначале запишем выражение для угла θ и вычислим этот угол, а затем определим коэффициент отражения R и его модуль $|R|$:

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\varepsilon \mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} =$$

$$= \frac{6.28 \cdot 1.4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2.1 \cdot 1}}{3 \cdot 10^8} = 5.096 \text{ рад} = 292.116^\circ = -67.854^\circ.$$

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \theta} = \frac{j(1 - 2.1)(-2.455)}{2\sqrt{2.1} + j(1 + 2.1) \cdot (-2.455)} =$$

$$= \frac{j2.7}{2.89 - j7.61} = \frac{-2.7}{7.61 + j2.89} = \frac{-2.7 \exp(-j \arctg 0.38)}{\sqrt{8.35 + 57.9}} = -0.33 \exp(-j20^\circ).$$

Модуль коэффициента отражения равен: $|R| = 0.33$.

Ответ: коэффициент отражения $R = -0.33 \exp(-j20^\circ)$, а его модуль $|R| = 0.33$.

5.2.10 Найти условия, при которых плоская электромагнитная волна будет распространяться путем отражений от двух безграничных пластин идеального металла, расположенных в вакууме параллельно друг другу на расстоянии a , если угол падения равен φ . Для каких значений λ_0 возможно распространение волны в такой структуре при заданном a ?

Решение. Рассмотрим задачу (рисунок 5.2), например, для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн). Для этих волн, комплексная амплитуда определяется из выражения:

$$\dot{\vec{E}} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

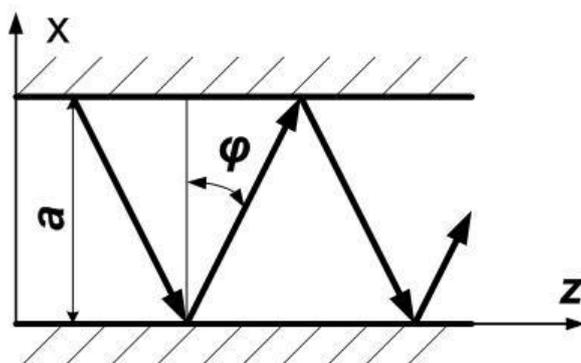


Рисунок 5.2 – Иллюстрация к задаче 5.2.10

Из выражения для $\dot{\vec{E}}$ находим E_z :

$$E_z = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(gx) \exp(-jhz).$$

Запишем граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

а) $E_z(x = 0) = E_z = 0$;

$$\text{б) } E_z(x=a) = E_\tau = 0.$$

Из условия б) получим:

$$E_z(x=a) = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(ga) \exp(-jhz) = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\sin(ga) = 0; \quad ga = \frac{2\pi \cos \varphi \cdot a}{\lambda_0} = n \cdot \pi,$$

где n может быть нулём или принимать любые целочисленные значения.

Из последнего выражения находим:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a}.$$

Поскольку $\cos \varphi \leq 1$, то и $\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1$, то есть:

$$\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1; \quad \lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}.$$

Ответ: $\lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}$, где n – целое число.

5.2.11 Определить скорость движения фазового фронта вдоль зазора между двумя параллельными бесконечными пластинами идеального металла (см. задачу 5.2.10). Изобразить зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 для нескольких значений n . Объяснить полученный результат.

Решение.

Выразим фазовую скорость v_Φ через продольное число $h = \beta_0 \sin \varphi$, которое играет (см. задачу 5.2.10) роль коэффициента фазы:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

При выводе выражения для v_Φ использовались соотношения $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ и

$$\frac{\omega}{\beta_0} = \frac{2\pi f \lambda_0}{2\pi} = \frac{fc}{f} = c.$$

Подставив в формулу для фазовой скорости v_Φ выражение для $\cos \varphi$, полученное в предыдущей задаче:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a},$$

находим зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 :

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

Зависимости v_ϕ от λ_0 для $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ приведены на рисунке 5.3.

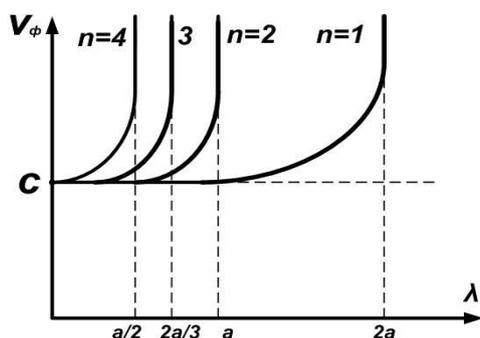


Рисунок 5.3 – Иллюстрация к задаче 5.2.11

Согласно двум последним приведенным формулам, с ростом длины волны λ_0 фазовая скорость v_ϕ и $\cos \phi$ также возрастают, а угол падения ϕ уменьшается. Когда длина волны λ_0 достигает некоторого значения, называемого критической длиной волны $\lambda_{кр}$, фазовая скорость v_ϕ устремляется к бесконечности, а угол падения ϕ становится равным нулю. Как видно из рисунка 5.3, при угле падения $\phi = 0$, когда $\lambda_0 \geq \lambda_{кр}$, распространение волны вдоль продольной оси z прекращается.

Критическая длина волны $\lambda_{кр}$ с ростом n уменьшается.

Ответ: скорость движения фазового фронта $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}$.

5.2.12 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность плавленого кварца ($\varepsilon \approx 3.75$). Определить угол падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

Решение.

Углом падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную, является угол падения Брюстера ϕ_B , при котором коэффициент отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации равен нулю и отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера. Для немагнитного диэлектрика без потерь этот угол определяют по формуле:

$$\phi_B = \arctg \sqrt{\varepsilon} = \arctg \sqrt{3.75} = \arctg 1.936 = 62^\circ 50'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\phi_B = 62^\circ 50'$.

5.2.13 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума под углом ϕ на границу раздела со средой, показатель прелом-

ления которой равен 1.531. Найти вид поляризации отраженной волны для углов падения 0° , 45° , $56^\circ 51'$.

Решение. При решении этой задачи используем формулы для определения коэффициентов отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения). Для немагнитного диэлектрика без потерь эти формулы имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi};$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Величину относительной диэлектрической проницаемости для подстановки в эти формулы определяем через показатель преломления n :

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}; \quad \varepsilon = n^2 = 1.531^2 = 2.334.$$

1. Для $\varphi = 0^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}; \quad R_E^{\perp} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как для $\varphi = 0^\circ$ $R_E^{\parallel} = R_E^{\perp}$, то отраженная волна при этих условиях будет с круговой поляризацией.

2) Для $\varphi = 45^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.334 - 0.5} - 2.334 \cdot 0.707}{\sqrt{2.334 - 0.5} + 2.334 \cdot 0.707} = 0.092;$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}} = \frac{0.707 - \sqrt{2.334 - 0.5}}{0.707 + \sqrt{2.334 - 0.5}} = -0.315.$$

Так как для $\varphi = 45^\circ$ $R_E^{\perp} \neq R_E^{\parallel}$, то отраженная волна при этих условиях будет иметь эллиптическую поляризацию с отношением длин осей эллипса:

$$\frac{R_E^{\perp}}{R_E^{\parallel}} = \frac{0.315}{0.092} = 3.42.$$

3. Для $\varphi = 56^\circ 51'$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} - 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'}{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'} = 0.$$

Поскольку для $\varphi = 56^{\circ}51'$ $R_E'' = 0$, то отраженная плоская волна параллельной поляризации отсутствует, а угол $\varphi = 56^{\circ}51'$ является углом Брюстера. При этом отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

Ответ: $\varphi = 0^{\circ}$ – поляризация круговая; $\varphi = 45^{\circ}$ – поляризация эллиптическая с отношением осей 3.42; $\varphi = 56^{\circ}51'$ – отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

5.2.14 Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами $\varepsilon = 2.25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$, падает под углом 45° на границу раздела между средой и вакуумом. Определить коэффициент отражения для волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей.

Решение.

Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\varepsilon_{пл} = \varepsilon = 2.25$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 2.25} = 1.5.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{ПВО}$:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{1.5} = \arcsin 0.666 = 41.18'.$$

Угол падения $\varphi = 45^{\circ} > \varphi_{ПВО} = 41.18'$. В этом случае преломлённой волны в общепринятом смысле не существует. Падающая волна полностью отражается внутрь среды. Коэффициенты отражения R_E'' волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице. Будет изменяться только фаза коэффициентов отражения:

$$\dot{R}_E'' = -\exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\};$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

В нашем случае ($\varepsilon_1 = 2.25$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varphi = 45^\circ$) получим:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{2.25}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = -\exp(j73^\circ 40');$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = \exp(j36^\circ 40').$$

Ответ: Коэффициенты отражения для волн, поляризованных в плоскости падения (R_E^{\parallel}) и перпендикулярно ей (R_E^{\perp}) равны: $\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp(j73^\circ 40')$; $\dot{R}_E^{\perp} = \exp(j36^\circ 40')$.

5.2.15 Плоская электромагнитная волна распространяется в безграничной плоскопараллельной пластине диэлектрика с $\varepsilon_{\text{пл}}$ под углом θ к границе раздела с вакуумом. При каких условиях волна не будет покидать пластину.

Решение.

Волна не будет покидать пластину, когда угол падения $\varphi = 90^\circ - \theta$ будет равным или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi \geq \varphi_{\text{ПВО}}$. Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пл}}$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon_{\text{пл}}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}.$$

Ответ: волна не будет покидать пластину при выполнении неравенств $90^\circ - \theta \geq \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}$ или $\sin(90^\circ - \theta) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}$.

5.3 Задачи для самостоятельной работы

5.3.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из воздуха на границу раздела со средой, имеющей параметры: σ , ε , $\mu = 1$. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте f . Полагая, что амплитуда магнитной индукции падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна B_m , записать выражения для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны. Значения σ , ε , f и B_m приведены в таблице 5.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче 5.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.15	0.2	0.3	0.04	0.5	0.6	0.03	0.08	0.09	0.07
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
f , МГц	32	48	56	45	64	72	77	96	68	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_m , Тл	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

5.3.2 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом φ на границу раздела с диэлектриком, имеющим ε , $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей волны равна H . Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн. Значения φ , ε и H приведены в таблице 5.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.3 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2 имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения φ будет больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$ в n раз, частота поля f . Значения n , ε и f приведены в таблице 5.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.2 – Исходные данные к задаче 5.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , рад	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.8	0.9	0.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H , А/м	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

Таблица 5.3 – Исходные данные к задаче 5.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

5.3.4 Плоская электромагнитная волна падает по нормали к поверхности раздела из диэлектрического полупространства с параметрами ε_1 , $\mu = 1$ на диэлектрическое полупространство с параметрами ε_2 , $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}}$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика через поверхность раздела. Значения ε_1 , ε_2 и $P_{\text{пад}}$ приведены в таблице 5.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.5 Пластина толщиной d выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами ε , $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля f . Значения d , ε и f приведены в таблице 5.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.4 – Исходные данные к задаче 5.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_2	3.2	3.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{пад}}, \text{Вт/м}^2$	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

Таблица 5.5 – Исходные данные к задаче 5.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$d, \text{см}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	14	13	16	15	17	12.5	14	16	18	10

5.3.6 Из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ϵ_1, μ_1 в диэлектрическую область 2 без потерь с параметрами ϵ_2, μ_2 под углом к границе раздела падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной. Значения $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2$ и μ_2 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.7 На идеально проводящую плоскость из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ϵ_1, μ_1 по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности $P_{\text{ср}}$. Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела. Значения ϵ_1 и μ_1 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значения $P_{\text{ср}}$ приведены в таблице 5.7.

Таблица 5.6 – Исходные данные к задаче 5.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_2	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ_1	1.15	1.2	1.3	1.45	1.25	1.36	1.18	1.16	1.12	1.23
μ_2	1.1	1.25	1.35	1.4	1.15	1.26	1.28	1.28	1.19	1.1

Таблица 5.7 – Исходные данные к задаче 5.3.7

Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{CP}, \text{Вт/м}^2$	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3

5.3.8 Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей плоской электромагнитной волны равна H . Волна падает из вакуума по направлению нормали к поверхности раздела на границу раздела с металлом, параметры которого равны σ и $\mu = 1$. Вычислите амплитуду вектора напряженности электрического поля на поверхности раздела, если частота поля f . Значения H , σ и f приведены в таблице 5.8 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.8 – Исходные данные к задаче 5.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$H, \text{А/м}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{\sigma}{10^7}, \text{См/м}$	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	4	3	6	5	7	2.5	1.4	1.6	1.8	2

6 РАДИОВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ

6.1 Основные формулы

Отношение плотностей тока смещения и тока проводимости в данной среде, выраженное в комплексной форме:

$$\frac{\dot{j}_{CM}}{\dot{j}_{PP}} = \frac{j\omega\varepsilon_a \dot{E}}{\sigma \dot{E}} = j \frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma}. \quad (6.1)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость среды:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (6.2)$$

Углы падения φ , отражения φ_o и преломления φ_{Π} связаны следующими зависимостями:

$$\varphi = \varphi_o; \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{\Pi}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6.3)$$

где $n_1 = \frac{c}{v_1}$ – показатель преломления первой среды; $n_2 = \frac{c}{v_2}$ – показатель преломления второй среды.

Концентрация молекул в тропосфере N_M падает с увеличением высоты. Это приводит к снижению диэлектрической проницаемости воздуха ε , а значит, и его показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$. Показатель преломления воздуха в пределах тропосферы мало отличается от единицы при любых условиях. В инженерных расчетах применяют *индекс преломления* N :

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \quad (6.4)$$

В среднем значение N колеблется в пределах от 250 до 450, в зависимости от пункта наблюдения на поверхности Земли. При увеличении высоты h индекс преломления тропосферы падает практически по линейному закону со скоростью $\frac{dN}{dh} = -40 \text{ км}^{-1}$. Формула справедлива в интервале высот, не превышающих несколько километров.

Непостоянство показателя преломления с высотой вызывает искривление луча, это явление называется *атмосферной рефракцией*. Чертеж приведен на рисунке 6.1. Слой неоднородного воздуха представлен в виде двух соприкасающихся однородных слоев 1 и 2 с показателями преломления n_1 и n_2 причем $n_2 < n_1$. Углы падения φ и преломления φ_{Π} связаны между собой формулой (6.3):

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{\Pi}} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.5)$$

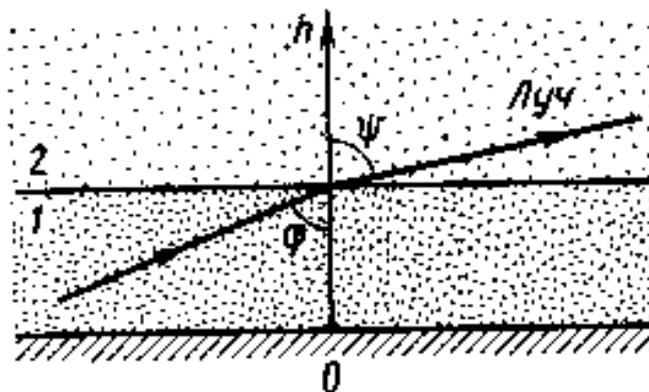


Рисунок 6.1 – Атмосферная рефракция

Легко видеть, что в рассматриваемом случае $\psi > \varphi$, т.е. луч в неоднородной по высоте тропосфере *искривляется в сторону земной поверхности*.

Относительная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления слоя ионосферы, имеющего электронную концентрацию N_e при частоте f , записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 - 80.8 \frac{N_e}{f^2} = 1 - \frac{f_{nl}}{f}; \\ n &= \sqrt{1 - \left(\frac{f_{nl}}{f}\right)^2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $f_{nl} = 8.98\sqrt{N_e}$ – плазменная частота в Гц; N_e в эл/м³; f в Гц.

Полубесконечный плазменный слой полностью отражает все электромагнитные волны, частоты которых не превосходят критической частоты $f_{кр}$, численно совпадающей с плазменной частотой $f_{пл}$.

При падении плоской волны на полубесконечную плазму под произвольным углом φ , который отсчитывается от направления нормали к границе раздела плазма-воздух. В общем случае в плазме возникает преломленная волна, угол преломления ψ может быть найден из закона Снелля:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{пл}} = n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{nl}}{f}\right)^2}. \quad (6.7)$$

Если $f < f_{пл}$, то правая часть равенства (6.7) становится мнимой, это означает, что угол преломления $\varphi_{пл}$ оказывается комплексным. Вся мощность падающей волны при этом отражается от границы раздела назад в воздушную среду.

Если $f > f_{пл}$ (плазма прозрачна для электромагнитных волн), то преломленная волна в плазме принципиально может существовать. Однако следует учитывать, что показатель преломления плазмы n_2 является действительным числом, но всегда меньше единицы. Поэтому в данном случае ($\varphi_{пл} > \varphi$) возможно явление полного внутреннего отражения, когда $\varphi_{пл} = 90^\circ$, так как пре-

ломленная волна перестает быть обычной плоской волной [1]. Критическим углом падения $\varphi_{кр}$ плоской волны на однородный плазменный слой называют такой угол падения φ , при котором возникает полное внутреннее отражение от границы раздела (рисунок 6.2). В соответствие с формулой (6.7):

$$\varphi_{кр} = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{f_{нл}}{f}\right)^2}. \quad (6.8)$$

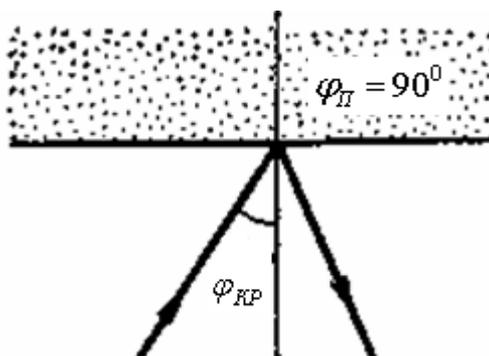


Рисунок 6.2 – Падение плоской волны на плазменное полупространство под критическим углом

Если $\varphi \geq \varphi_{кр}$, то падающая из воздуха плоская волна целиком отражается от полубесконечного плазменного слоя; если же $\varphi < \varphi_{кр}$, то падающая волна частично преломляется внутрь плазмы.

Минимально применимая волна:

$$\lambda_{\min} = \lambda_{кр} \cdot \sin \Delta, \quad (6.9)$$

где $\lambda_{кр}$ – критическая длина волны отражающего слоя; Δ – угол наклона луча к земной поверхности.

Максимально применимая частота (МПЧ) в соответствии с (6.7) удовлетворяет уравнению:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{нл}}{f_{\max}}\right)^2},$$

откуда:

$$f_{\max} = \frac{f_{нл}}{\cos \varphi}.$$

При отсутствии потерь за счет среды распространения связь мощности, излучаемой на одном конце радиолинии ($P_{прд}$), и мощности, поступающую на вход приемника ($P_{пр}$) на другом конце радиолинии, выражается формулой идеальной радиосвязи:

$$P_{пр} = P_{прд} D_{прд} D_{пр} \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2, \quad (6.10)$$

где $D_{\text{прд}}$ – коэффициент направленного действия передающей антенны (КНД); $D_{\text{пр}}$ – коэффициент направленного действия приемной антенны, R – расстояние между передатчиком и приемником.

$$D_{\text{пр(прд)}} = \frac{4\pi S_{\text{пр(прд)}}}{\lambda^2}, \quad (6.11)$$

где $S_{\text{пр(прд)}}$ – эффективная площадь раскрыва приемной (передающей) антенны.

В радиоканале на входе приемника неизбежно присутствует шум, эффективная мощность которого:

$$P_{\text{ш}} = kT_{\text{ш}}\Delta f, \quad (6.12)$$

где k – постоянная Больцмана, $T_{\text{ш}}$ – шумовая температура приемника, приведенная к его входу, Δf – полоса пропускания приемника.

Расстояние прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции (геометрический горизонт):

$$R_{\text{ГОР}} = 3.57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ км}, \quad (6.13)$$

где h_1, h_2 – высоты передающей и приемной антенн в м.

Расстояние прямой видимости при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт):

$$R_{\text{РЕФ}} = 4.12(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ км}. \quad (6.14)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Определить значение частоты, при котором в сухой почве с параметрами $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости становятся одинаковыми.

Решение.

В соответствие с формулой (6.2):

$$\text{Re } \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon \varepsilon_0 = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{36\pi} = 4.42 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Отсюда искомая частота:

$$\omega = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{10^{-3}}{4.42 \cdot 10^{-11}} = 2.26 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$$

или

$$f = 3.6 \text{ МГц}.$$

Таким образом, на волнах длинноволнового и средневолнового диапазонов сухая почва может рассматриваться как металлоподобная среда с потерями.

6.2.2 Известно, что на уровне земной поверхности значение индекса преломления $N_0 = 300$. Найти относительную диэлектрическую проницаемость воздуха ε на земле и на высоте $h = 3$ км.

Решение.

Формула для определения ε в соответствии с (6.4):

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{N}{10^6}\right)^2.$$

Индекс преломления на высоте 3 км:

$$N = N_0 - \left(\frac{dN}{dh}\right)h = 300 - 40 \cdot 3 = 180.$$

Подставляя в формулу для определения ε , находим, что:

$$\varepsilon(h = 0) = 1.0006 \quad \text{и} \quad \varepsilon(h = 3 \text{ км}) = 1.00036.$$

6.2.3 Оценить эффект атмосферной рефракции для конкретных условий, описанных в задаче 6.2.2. Реальный неоднородный слой заменить двумя однородными слоями с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1.0006$ и $\varepsilon_2 = 1.00036$. Положить угол падения $\varphi = 70^\circ$.

Решение.

Используя полученные в задаче 6.2.2 значения индексов преломления $N_0 = 300$ и $N = 180$, находим показатели преломления обоих слоев по формуле:

$$n = 10^{-6}N + 1,$$

откуда $n_1 = 1.0003$ и $n_2 = 1.00018$.

Подставив эти результаты в формулу (6.5), находим угол преломления:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\sin 70^\circ}{0.99958}\right) = 70^\circ 4'.$$

Если путь, проходимый волной в тропосфере достаточно протяжен (10 км), то угловая ошибка в $4'$ приведет к погрешности в определении координаты цели около 11 м.

6.2.4 Плоская волна падает на слой E ионосферы с электронной плотностью $N_e = 10^{11} \text{ м}^{-3}$ под углом $\varphi = 60^\circ$. Определить наибольшее значение частоты f_{\max} , при котором еще наблюдается полное внутреннее отражение от слоя.

Решение.

Для данного ионосферного слоя плазменная частота:

$$f_{ni} = 8.98\sqrt{10^{11}} = 2.84 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 2.84 \text{ МГц}.$$

Заданный угол падения станет критическим на частоте f_{\max} , которая удовлетворяет уравнению:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2.84 \cdot 10^6}{f_{\max}}\right)^2}.$$

Решив это уравнение, получаем $f_{\max} = 5.68$ МГц.

Вывод: при наклонном падении плазменный слой способен отражать колебания более высоких частот, чем при вертикальном зондировании.

6.2.5 Ионосферный слой F с концентрацией электронов $N_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ располагается на высоте $h = 400$ км от поверхности Земли. Найти наивысшее значение частоты поля f_{\max} , которое еще обеспечивает полное отражение электромагнитной волны от этого слоя.

Решение.

В соответствии с рисунком 6.3, можно заметить, что угол падения волны на слой φ будет наибольшим в том случае, когда луч падающей волны AC направлен по касательной к земной поверхности, проведенной в точке A , где размещен передатчик. Так как $OA = OB = a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км (радиус Земли), то $BC = h = 400$ км (высота слоя F), а треугольник OAC прямоугольный, то:

$$\sin \varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{6370}{6770} = 0.941, \quad \varphi = 70^\circ.$$

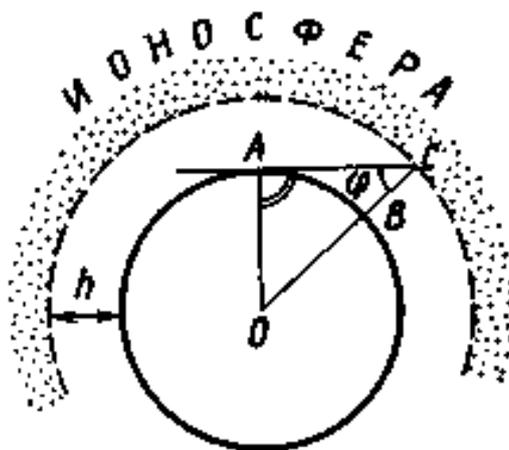


Рисунок 6.3 – Иллюстрация к задаче 6.2.5

Плазменная частота слоя $f_{\text{пл}} = 8.98$ МГц. Поэтому искомая частота есть корень уравнения:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{8.98}{f_{\max}}\right)^2} = \sin \varphi = 0.941,$$

из которого находим, что $f_{\max} = 27$ МГц. Все волны с более высокими частотами ни при каких условиях не могут отражаться от ионосферы.

6.2.6 Космическая линия связи имеет протяженность 400 км. Мощность передатчика 80 Вт, длина волны 3 см. Антенны передатчика и приемника идентичны и представляют собой параболические зеркала диаметром 1 м. Определить мощность, поступающую на вход приемника.

Решение.

Геометрическая площадь каждой антенны $S = 0.785 \text{ м}^2$, эффективная площадь $S_{\text{эф}} = 0.54S = 0.424 \text{ м}^2$. В соответствии с (6.11) значение КНД каждой антенны:

$$D = \frac{12.56 \cdot 0.424}{0.03^2} = 5900.$$

Подставив полученные цифры в (6.10), получим мощность на входе приемника радиолинии $P_{\text{пр}} = 10^{-9} \text{ Вт}$.

6.2.7 Космическая радиолиния снабжена антеннами и передатчиком, описанными в условиях задачи 6.2.6, используется приемник с шумовой температурой 150 К. Линия предназначена для передачи телевизионного изображения среднего качества и имеет полосу пропускания шириной 4 МГц. Вычислить длину трассы R , при которой мощность принятого сигнала в 10 раз превышает мощность шума, т.е. отношение сигнал/шум $C_{\text{с/ш}} = \frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{ш}}} = 10$.

Решение.

В рассматриваемой системе мощность шума, приведенная ко входу приемника:

$$P_{\text{ш}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 150 \cdot 4 \cdot 10^6 = 8.28 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}.$$

Чтобы реализовать заданное отношение сигнал/шум, мощность принятого сигнала приемником $P_{\text{пр}}$ должна составить $8.28 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}$.

Уравнение идеальной радиосвязи (6.10) можно разрешить относительно искомой длины трассы R и получить:

$$R = \frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{прд}} D_{\text{пр}} D_{\text{прд}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив в формулу соответствующие значения параметров, находим, что $R = 4.38 \cdot 10^5 \text{ км}$. Рассматриваемая радиолиния способна обеспечить передачу телевизионных сигналов в пределах орбиты Луны.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

6.3.1 Определить отношение плотности тока смещения к плотности тока проводимости в морской воде ($\epsilon_a = 80\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 8 \text{ См/м}$) для волн с частотами $f = 10^4$; 10^6 ; 10^8 Гц .

6.3.2 Сравните отношения плотностей токов смещения и проводимости в морской воде ($\epsilon_a = 80\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 8 \text{ См/м}$) и сухой почве ($\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0.001 \text{ См/м}$) при частоте $f = 10^8 \text{ Гц}$.

6.3.3 Электромагнитные волны с амплитудой напряженности электрического поля $E_{\text{м.пад}} = 1 \text{ мВ/м}$, распространяясь в диэлектрике ($\epsilon = 2.5$, $\mu = \mu_0$, σ

= 0), падают на плоскую поверхность идеального проводника. Определить максимальные амплитуды напряженностей полей.

6.3.4 Выразить комплексную относительную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}$ через длину волны λ , измеряемую в метрах.

6.3.5 Для частоты $f = 600$ МГц определить комплексную относительную диэлектрическую проницаемость среды $\tilde{\epsilon}$, имеющую относительную проницаемость $\epsilon = 50$ и удельную проводимость $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ См/м. Каково соотношение между токами смещения и проводимости в данной среде?

6.3.6 Покажите, что сухая почва на частоте 300 МГц может рассматриваться как диэлектрическая среда с потерями.

6.3.7 Определить критическую длину волны слоя ионосферы с электронной концентрацией $N_e = 2.5 \cdot 10^9$ м⁻³.

6.3.8 Слой ионосферы имеет концентрацию электронов $N_e = 1.5 \cdot 10^{12}$ м⁻³. Каковы показатели преломления ионосферы n для частот $f = 2$ МГц и 7 МГц?

6.3.9 Какой электронной концентрации ионизированного слоя соответствует критическая длина волны 30 м?

6.3.10 На слой ионосферы F_2 с критической длиной волны $\lambda_{кр} = 30$ м падают электромагнитные волны под различными углами. Определите минимально применимую длину волны λ_{min} при отвесном падении ($\Delta = 90^\circ$) и при углах наклона лучей $\Delta = 60^\circ, 30^\circ, 10^\circ$.

6.3.11 Рассмотрите задачу об атмосферной рефракции в плоскостойкой среде, образованной соприкасающимися слоями без потерь толщиной d каждый. Слои имеют убывающие по высоте показатели преломления $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$. Известным считается угол падения на первый слой из вакуума.

6.3.12 На полубесконечную плазменную среду падает плоская электромагнитная волна с частотой, в 1.5 раза превышающей плазменную частоту. Найдите значение критического угла падения на такую среду.

6.3.13 Передающий конец космической радиoliniи снабжен передатчиком мощностью 10 Вт и зеркальной параболической антенной с площадью 100 м². Аналогичная по конструкции приемная антенна имеет площадь 30 м². Рабочая длина волны 7.5 см. Приемник с полосой пропускания 1 МГц имеет шумовую температуру 120 К. Определите предельную длину радиoliniи, при которой отношение сигнал/шум на входе приемника будет не ниже 10 дБ.

6.3.14 На сколько сократится длина линии, рассмотренной в задаче 6.3.13, если полосу пропускания приемника расширить до 10 МГц?

6.3.15 Спроектируйте линию КВ-связи длиной 1200 км, работающую за счет отражения радиоволн от слоя F ионосферы. Концентрация электронов в слое $1.5 \cdot 10^{12}$ м⁻³, высота слоя 260 км.

6.3.16 Найдите предельную длину трассы с прямой видимостью между антенной Останкинского телецентра ($h = 500$ м) и антенной коллективного приема телевидения, расположенной на крыше жилого дома ($h = 40$ м).

6.3.17 Передающая и приемная антенны имеют высоты $h_1 = h_2 = 10$ м. Определить расстояние R прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции и при наличии нормальной атмосферной рефракции.

6.3.18 Определить расстояние прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции и наличии нормальной атмосферной рефракции, если высота передающей антенны $h_1 = 100$ м, а приемной – $h_2 = 10$ м.

6.3.19 Высота расположения передающей телевизионной антенны равна h_1 [м], расстояние между телецентром и пунктом приема равно R [км]. Определите необходимую высоту расположения приемной антенны для обеспечения приема телевизионного сигнала в случаях отсутствия и присутствия атмосферной рефракции.

Значения h_1 и R приведены в таблице 6.1 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 6.1 – Исходные данные к задаче 6.3.19

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_1 , м	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , км	40	43	46	49	52	55	58	62	66	70

6.3.20 Определить электронную концентрацию ионосферного слоя N_e [м^{-3}], при которой наблюдается отражение волны при зондировании на частоте f [МГц] при угле падения φ [°].

Значения f и φ приведены в таблице 6.2 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

6.3.21 Какова максимально применимая частота (МПЧ) при зондировании слоя ионосферы с электронной концентрацией N_e [м^{-3}] при угле падения луча φ [°].

Значения N_e [м^{-3}] и φ приведены в таблице 6.3 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

6.3.22 Передающий конец космической радиолинии снабжен параболической антенной площадью 400 м^2 . Приемная параболическая антенна имеет площадь 36 м^2 . Рабочая длина волны равна 10 см. Мощность передатчика составляет 10 Вт. Определите предельную длину радиолинии, при которой отношение сигнал/шум на входе приемника будет не ниже 10 дБ, если приемник имеет полосу пропускания Δf , шумовую температуру T .

Значения Δf [МГц] и T [К] приведены в таблице 6.4 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 6.2 – Исходные данные к задаче 6.3.20

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , МГц	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	8.5
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , °	0	9	18	27	38	45	54	63	72	80

Таблица 6.3 – Исходные данные к задаче 6.3.21

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
N_e , м ⁻³	10^8	$5 \cdot 10^8$	10^9	$5 \cdot 10^9$	10^{10}	$5 \cdot 10^{10}$	10^{11}	$5 \cdot 10^{11}$	10^{12}	$2 \cdot 10^{12}$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , °	80	72	63	54	45	36	27	18	9	0

Таблица 6.4 – Исходные данные к задаче 6.3.22

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Δf , МГц	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
T , К	200	180	160	140	135	130	125	120	115	110

7 ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ

7.1 Основные формулы

В свободном пространстве ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$) амплитуда напряженности электрического поля в точке наблюдения (точке приема):

$$E_{0\max} = \frac{\sqrt{60G_1P_1'}}{r}, \quad (7.1)$$

где G_1 – коэффициент усиления передающей антенны относительно изотропного излучателя; P_1' – мощность, подводимая к передающей антенне; R – расстояние от точки передачи до точки приема.

При расчете радиолиний в диапазоне сверхдлинных (СДВ), длинных (ДВ), средних (СВ) и коротких волн пользуются не амплитудным, а действующим значением напряженности поля, которое в условиях свободного пространства (7.1):

$$E_{0Д} = \frac{E_{0\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30G_1P_1'}}{R}. \quad (7.2)$$

Если к вертикальному электрическому вибратору, расположенному на идеально проводящей плоскости ($\sigma = \infty$), подвести такую же мощность, как и в случае его расположения в свободном пространстве, то за счет распределения излученной мощности только в верхнем полупространстве плотность потока мощности возрастет в 2 раза, а напряженность поля в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со свободным пространством, т.е. $E_{\inftyД} = \sqrt{2}E_{0Д}$ или с учетом (7.2):

$$E_{\inftyД} = \frac{\sqrt{60G_1P_1'}}{R} \quad (7.3)$$

Сверхдлинные и длинные волны до расстояний 300...400 км распространяются преимущественно как поверхностные. При таких расстояниях действующее значение напряженности поля, создаваемое вертикальным электрическим вибратором, установленным на Земле, можно вычислять с помощью формулы:

$$E_{\text{зм.д}} = E_{\inftyД} \cdot V_{\text{зм}}(\rho), \quad (7.4)$$

где $E_{\inftyД}$ – действующее значение напряженности поля над идеально проводящей плоскостью; $V_{\text{зм}}(\rho)$ – модуль множителя ослабления, показывающий во сколько раз напряженность поля над реальной Землей меньше напряженности поля над идеально проводящей плоскостью, при прочих равных условиях. Если E выразить в мВ/м, P_1' в кВт, R в км, то формула (7.4) приобретает следующий вид:

$$E_{3M.д} = \frac{245\sqrt{P'_1 \cdot G_1}}{R} V_{3M}(\rho) \text{ [мВ/м]}. \quad (7.5)$$

Формула для множителя ослабления $V_{3M}(\rho)$ без вывода дается в [10]:

$$V_{3M}(\rho) = \left| 1 - j \cdot \sqrt{\pi \rho} e^{-\rho} - 2e^{-\rho} \sqrt{\rho} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{-x^2} dx \right|, \quad (7.6)$$

где ρ – параметр, называемый численным расстоянием (безразмерная величина):

$$2\rho \approx \frac{\pi R}{\lambda \sqrt{\varepsilon_{3M}^2 + (60\lambda\sigma_{3M})^2}}. \quad (7.7)$$

Формула (7.4), в которой $V_{3M}(\rho)$ определяется формулой (7.6) с учетом формулы (7.7) называется формулой Шулейкина – Ван-дер-Поля. Кривые зависимости множителя ослабления V_{3M} от численного расстояния ρ приведены на рисунке 7.1.

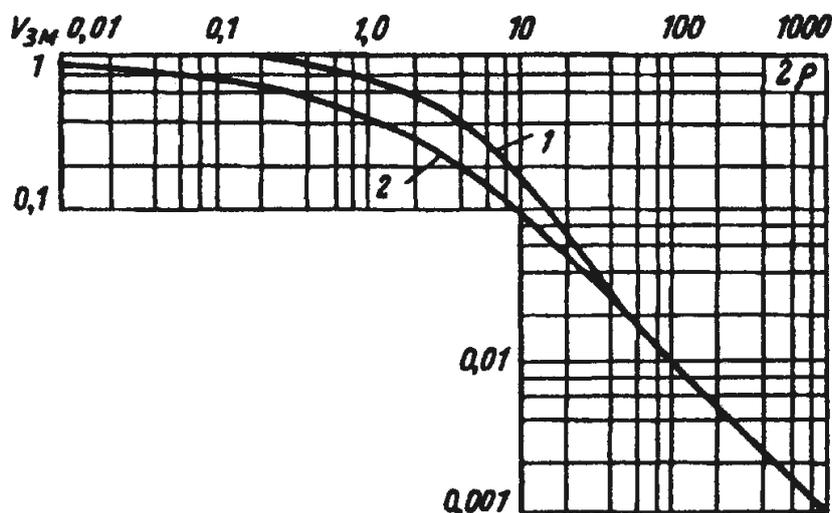


Рисунок 7.1 – Зависимость множителя ослабления V_{3M} от численного расстояния ρ

Кривая 1 относится к случаю $60\lambda\sigma_{3M} \gg \varepsilon_{3M}$, что характерно для длинных (сверхдлинных волн) и хорошо проводящих почв. Кривая 2 соответствует $60\lambda\sigma_{3M} \ll \varepsilon_{3M}$, что справедливо для коротких волн и плохо проводящих волн.

Сравнение расчетов по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля, справедливых для плоской Земли, и точной дифракционной формулы Фока показывает, что приближение плоской Земли справедливо для расстояний:

$$R < 7 \cdot 10^3 \cdot \lambda^{1/3}. \quad (7.8)$$

При этом ошибка вычисления напряженности поля, связанная с неучетом сферичности Земли, не превышает 10%.

На расстояниях свыше 400 км в диапазонах СДВ и ДВ необходимо учитывать влияние отраженной от ионосферы волны. Расчет напряженности поля

в этом случае сводится к решению распространения радиоволн в сферическом волноводе, образованном поверхностью земли и нижней границей ионосферы. Так как формулы, полученные в результате строго решения, сложны, то инженерный расчет напряженности поля в диапазоне СДВ и ДВ производят по эмпирическим формулам. Обычно ведут расчеты по формуле Остина:

$$E_D \left[\frac{мВ}{м} \right] = \frac{300\sqrt{P}}{R} \cdot V_{СФ.ЗМ} = \frac{120\pi \cdot h_D \cdot I_D}{\lambda \cdot R} \cdot V_{СФ.ЗМ}, \quad (7.9)$$

где P – излучаемая мощность, [кВт]; R – расстояние между передатчиком и пунктом приема, [км]; h_D – действующая высота антенны, [м]; I_D – действующее значение тока у основания антенны, [А]; λ – длина волны, [м]; $V_{СФ.ЗМ}$ – функция ослабления для сферической Земли, которая определяется выражением:

$$V_{СФ.ЗМ} = \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot e^{-\frac{0.0014R}{\lambda^{0.6}}}. \quad (7.10)$$

В (7.10) λ и R выражены в км, а центральный угол $\theta [рад] = \frac{R}{a_{ЗМ}}$, $a_{ЗМ}$ –

радиус Земли.

Для расчета напряженности поля средних волн днем (напряженность поля поверхностной волны) широко применяются графики Международного Консультативного Комитета по Радио (МККР), которые представляют результат расчета напряженности поля по дифракционным формулам для разных проводимостей подстилающей поверхности. На рисунке 7.2 приведены такие графики для почвы с параметрами: $\varepsilon_{ЗМ} = 4$, $\sigma_{ЗМ} = 10^{-3}$ См/м.

Значения напряженности поля, приведенные на графиках, соответствуют излученной мощности 1 кВт и короткой вертикальной передающей антенне (элементарному вибратору), стоящей на поверхности идеальной Земли. Реально напряженность поля, определенную из графика, следует умножить на $\sqrt{G_1 P'_1}$, где P'_1 – мощность, подводимая к передающей антенне, [кВт]; G_1 – коэффициент усиления передающей антенны в направлении вдоль Земли, вычисленный по отношению к элементарному электрическому вибратору, расположенному на идеальной Земле.

В ночное время кроме земной волны необходимо учитывать наличие волны, отраженной от ионосферы. Напряженность поля ионосферной волны $E_{и}$ [мкВ/м] рекомендуют определять, используя результаты статистической обработки измерений, проведенных на Европейском континенте [10]:

$$E_{и} = \frac{10233}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{G_1 P'_1} \cdot \exp\left(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda^{-0.26} \cdot R\right), \quad (7.11)$$

где P'_1 выражена в киловаттах, а все длины – в километрах.

В [10] приводятся многочисленные графики, позволяющие внести поправку на время суток, уровень солнечной активности, ДН антенны и др.

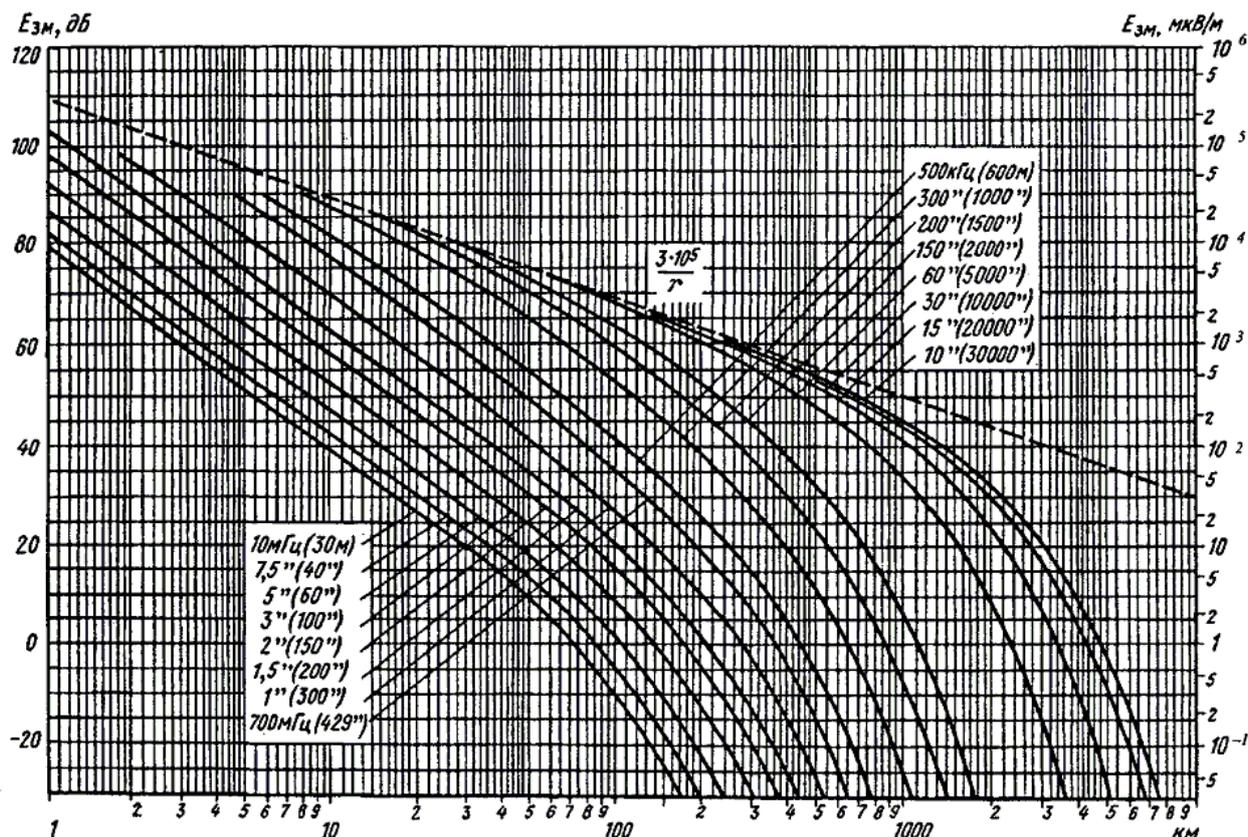


Рисунок 7.2 – Зависимость напряженности поля для почвы

Ослабление поля на коротковолновых (КВ) радиоприемах вызвано расхождением волны, поглощением в ионосфере, отражением от поверхности Земли и другими причинами.

Одним из основных методов расчета напряженности поля является метод, предложенный А.Н. Казанцевым [10]. Наибольшую точность этот метод обеспечивает при расчете трасс, проходящих в средних широтах.

В соответствии с указанным методом действующее значение напряженности поля в точке приема:

$$E_D = \frac{\sqrt{30P_1'G_1(\Delta)}}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+R_{OTR}}{2} \cdot R_{OTR}^{n-1} \cdot \exp(-\Gamma_{II}). \quad (7.12)$$

Поясним структуру этой формулы.

Первый множитель соответствует полю в свободном пространстве. Здесь P_1' – мощность, подводимая к передающей антенне; $G_1(\Delta)$ – коэффициент усиления передающей антенны относительно изотропного излучателя с учетом влияния Земли, т.е. $G_1(\Delta) = G_{1max}F^2(\Delta)$, где $F(\Delta)$ – нормированная ДН передающей антенны в вертикальной плоскости с учетом влияния Земли; Δ – угол возвышения траектории волны; R – путь, проходимый волной от точки передачи до точки приема.

Второй множитель $\left(\frac{1}{2}\right)$ соответствует уменьшению поля (или мощности) на 6 дБ. Из них 3 дБ А.Н. Казанцев относит за счет того, что приемная

антенна имеет линейную поляризацию, а волна в процессе отражения от ионосферы приобретает эллиптическую (а иногда и круговую) поляризацию. Другие 3 дБ обусловлены тем, что волна в ионосфере расщепляется на обыкновенную и необыкновенную; необыкновенная составляющая сильно поглощается, а для приема оказывается полезной только половина излученной мощности.

Третий множитель $\frac{1+R_{OTP}}{2}$ (R_{OTP} – коэффициент отражения) учитывает

влияние отраженной от Земли волны в месте расположения приемной антенны. Если бы приемная антенна B (рисунок 7.3) находилась на оптимальной высоте h_2 над земной поверхностью, то волны 1 и 2 имели бы одинаковую фазу в точке приема и результирующее поле (при горизонтальной поляризации) имело бы значение $(1 + R_{OTP})E_0$, где E_0 – поле прямой волны 1. В реальных условиях вследствие колебаний высоты отражающего слоя обеспечить оптимальное сложение волн 1 и 2 не удастся, и А.Н. Казанцев берет среднее значение коэффициента, учитывающего влияние отраженной от Земли волны, а именно $\frac{1+R_{OTP}}{2}$. Обычно выбирают среднее значение R_{OTP} порядка 0.8.

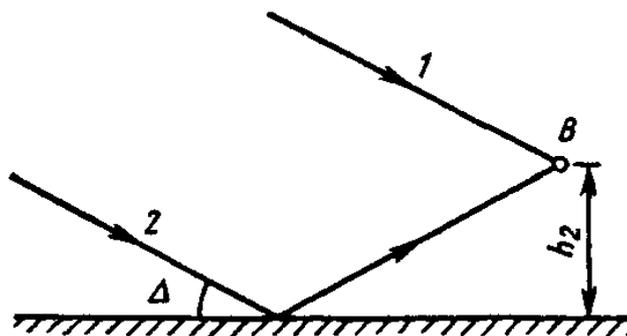


Рисунок 7.3 – Влияние отраженной от Земли волны в месте расположения приемной антенны

Четвертый множитель R_{OTP}^{n-1} учитывает дополнительные потери при отражении от Земли в промежуточных точках в случае многоскачкового распространения. Здесь n – число отражений от ионосферы. На односкачковых линиях (с одним отражением от ионосферы) $n = 1$ и $R_{OTP}^{n-1} = 1$.

Наконец, пятый множитель $\exp(-\Gamma_{и})$ учитывает поглощение в ионосфере.

Полный интегральный коэффициент поглощения $\Gamma_{и}$ определяется как сумма поглощения в тех слоях ионосферы, которые волна проходит (неотклоняющее поглощение), и поглощения в отражающем слое ионосферы (отклоняющее поглощение). В литературе имеется обширная информация для определения $\Gamma_{и}$ в зависимости от различных параметров радиотрассы.

При проектировании радиолинии необходимо учитывать не только диапазонные особенности распространения радиоволн, но шумовые характе-

ристики радиотрасс и технические характеристики антенн, радиоприемных и радиопередающих устройств. В качестве примеров рассмотрим расчет космической радиолинии и наземной радиолинии декаметрового диапазона [11].

Первым шагом при проектировании космической системы радиосвязи является расчет радиолинии: спутниковый ретранслятор – наземная станция или абонентский терминал.

Исходными данными для такого расчета являются:

- протяженность линии радиотрассы – прямого луча – между антеннами спутника и наземной станцией, т.е. значения R ;

- выбор диапазона частот или длины волны λ ;

- выбор типа антенн и определение их параметров (эффективной площади антенны S_A , коэффициента усиления антенны $G = \frac{4\pi S_A}{\lambda^2}$);

- определение затухания в атмосфере Земли $V_{\text{ТР}}$ с помощью таблиц или графиков в зависимости от длины волны λ ;

- определение затухания в антенно-фидерных трактах спутниковой и наземной радиостанций $V_{\text{Фид}}$;

- определение требуемой полосы пропускания радиоприемника по промежуточной полосе $\Delta f_{\text{ПР}}$, исходя из заданной скорости передачи сообщения, выбранного метода модуляции и нестабильности частоты сигналов несущей и гетеродина;

- определение требуемого соотношения сигнал-шум на входе блока обработки сигнала радиоприемника $C_{\text{С/Ш}}$;

- расчет реальной чувствительности радиоприемника.

Реальная чувствительность радиоприемника, определяемая мощностью радиосигнала на его входе для получения требуемого соотношения сигнал-шум $C_{\text{С/Ш}}$ на выходе линейной части приемника с учетом шумов канала радиосвязи и собственных шумов устройства, определяется в виде [11]:

$$P_{\text{ПРМ}} = kT_0 \Delta f C_{\text{С/Ш}} \frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0} \quad [\text{Вт}], \quad (7.13)$$

где $kT_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц – спектральная плотность шума при стандартной температуре $T_0 = 290$ К;

$T_{\text{ШЛ}}$ – эквивалентная температура шума линии связи;

$T_{\text{Ш.ПРМ}}$ – эквивалентная температура шума приемника, пересчитанная к его входу;

$\Delta f_{\text{ПР}}$ – полоса пропускания тракта промежуточной частоты до блока обработки сигнала [Гц].

Та же чувствительность приемника, выпаженная в децибелах относительно мощности в 1 Вт:

$$P_{\text{ПРМ.дБ}} = 10 \lg P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10 \lg \Delta f [\text{кГц}] + 10 \lg C_{\text{С/Ш}} + 10 \lg \left(\frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0} \right) \quad [\text{дБ Вт}]. \quad (7.14)$$

В формулах (7.13) и (7.14) значение температуры шумов канала радиосвязи $T_{\text{шл}}(f)$, обусловленной радиоизлучением Галактики и атмосферным поглощением, можно определить с помощью графиков, приведенных на рисунке 7.4.

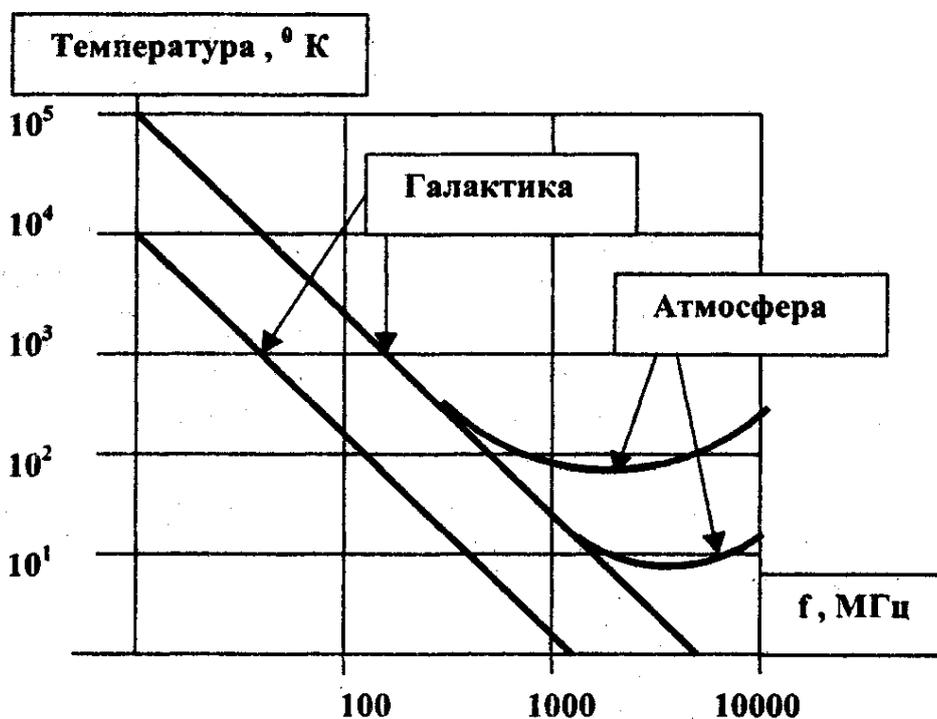


Рисунок 7.4 – Значение температуры шумов канала радиосвязи

Конечная цель расчета радиоприемника состоит в определении мощности радиопередатчика, обеспечивающей устойчивую радиосвязь при передаче требуемого объема информации с заданной скоростью.

Предположим, что точечный источник равномерно излучает сигнал мощностью $P_{\text{изл}}$ по всей сфере. Тогда на расстоянии R на площадке размером S_A мощность сигнала составит:

$$P_C = \frac{P_{\text{изл}} S_A}{4\pi R^2}. \quad (7.15)$$

Заменив P_C на реальную чувствительность радиоприемника $P_{\text{прм}}$, а $P_{\text{изл}}$ на произведение $P_{\text{пер}} G_{\text{ант}}$, получим из (7.15) с учетом коэффициентов потерь в тропосфере и фидере ($B_{\text{тр}}$ и $B_{\text{фид}}$) следующую формулу по определению требуемой мощности радиопередатчика:

$$P_{\text{пер}} = \frac{4\pi R^2 P_{\text{прм}} B_{\text{тр}} B_{\text{фид}}}{G_{\text{пер}} S_{\text{прм}}}, \quad (7.16)$$

где $S_{\text{прм}}$ – площадь приемной антенны.

При неизменной площади передающей ($S_{\text{пер}}$) и приемной ($S_{\text{прм}}$) антенн (с учетом $G_A = \frac{4\pi S_A}{\lambda^2}$) преобразуем (7.16) к виду:

$$P_{\text{ПЕР}} = \frac{R^2 \lambda^2 P_{\text{ПРМ}} B_{\text{ТР}} B_{\text{ФИД}}}{S_{\text{ПЕР}} S_{\text{ПРМ}}}. \quad (7.17)$$

При неизменном значении коэффициентов усиления антенн формула (7.17) примет вид:

$$P_{\text{ПЕР}} = \frac{(4\pi)^2 R^2 P_{\text{ПРМ}} B_{\text{ТР}} B_{\text{ФИД}}}{\lambda^2 G_{\text{ПЕР}} G_{\text{ПРМ}}}. \quad (7.18)$$

Для проведения расчетов значения параметров, входящих в формулы (7.16) – (7.18), целесообразнее выразить в децибелах. Тогда, например, формула (7.16) примет вид:

$$P_{\text{ПЕР.дБ}} = 10 \lg P_{\text{ПЕР}} = 71 + 20 \lg R[\text{км}] + 10 \lg P_{\text{ПРМ}} + 10 \lg(B_{\text{ТР}} B_{\text{ФИД}}) - 10 \lg G_{\text{ПЕР}} - 10 \lg S_{\text{ПРМ}}. \quad (7.19)$$

Перепишем формулу чувствительности радиоприемника в децибелах относительно 1 Вт (7.14) в следующем виде:

$$P_{\text{ПРМ.дБ}} = 10 \lg P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10 \lg \Delta f[\text{кГц}] + 10 \lg C_{\text{СШ}} + 10 \lg K_T \text{ [дБ Вт]}, \quad (7.20)$$

где $K_T = \frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0}$ – реальный коэффициент шума (с учетом шума линии радиосвязи).

При работе в декаметровом (КВ) диапазоне волн и использовании в качестве антенн четвертьволновых вибраторов расчет проводится по методике, разработанной академиком Б.А. Введенским [11]. В основе такой методики лежат две формулы, позволяющие рассчитать линию УКВ радиосвязи не только в пределах прямой видимости, но и за линией радиогоризонта. Расстояние до линии радиогоризонта для идеальной модели Земли, т.е. шара радиусом 6370 км:

$$R_{\text{ГОР}} = 3.57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ [км]}, \quad (7.21)$$

где $h_1; h_2$ – высота поднятия антенн в пунктах приема и передачи сигнала [м].

Напряженность электрического поля в точке приема при четвертьволновом вертикальном вибраторе в месте излучения сигнала:

$$E = \frac{90 \cdot h_1 h_2 \sqrt{P_1}}{\lambda R^2 K_p K_3} \text{ [мкВ/м]}, \quad (7.22)$$

где P_1 – излучаемая мощность [Вт]; λ – длина волны [м]; R – протяженность радиолинии [км]; $K_p > 1$ – коэффициент дополнительных потерь, учитывающий затухание сигнала вдоль трассы распространения волны за счет атмосферы и разного рода препятствий – зданий и иных сооружений; K_3 – коэффициент загоризонтной радиосвязи.

Значение K_p определяется экспериментально для разных трасс распространения радиоволн при определенной частоте сигнала. Согласно проведенным измерениям в г. Москве при частоте 40 МГц значение K_p колеблется в пределах 5...10.

При использовании декаметрового диапазона волн можно выделить три зоны приема: ближнюю, среднюю и дальнюю.

Ближней будем называть зону приема в пределах прямой радиовидимости, т.е. в теоретической модели распространения радиоволн при $R \leq R_{ГОР}$.

В средней зоне, лежащей за линией радиогоризонта и ориентировочно ограниченной пределами $R_{ГОР} \leq R \leq (2...3)R_{ГОР}$, прием сигнала возможен за счет явлений дифракции и рефракции, приводящих к искривлению луча и распространению поверхностной волны, огибающей Землю.

В дальней зоне, лежащей за пределами $R \gg R_{ГОР}$, прием сигнала возможен за счет пространственной волны и ионосферной рефракции, что позволяет удлинить трассу радиоприема до 3000...4000 км.

В радиосвязи декаметрового диапазона используются ближняя и средняя зоны приема, в загоризонтной радиолокации – средняя и дальняя. Следует иметь в виду, что деление зон приема на ближнюю и среднюю зоны в реальных условиях достаточно условно, поскольку в ближней зоне ($R \leq R_{ГОР}$) из-за рельефа местности и разного рода строений, особенно в условиях города, радиовидимость между пунктами связи может отсутствовать, а прием основываться на явлениях дифракции, т.е. огибании поверхностной радиоволной препятствий. Будем, однако, для определенности считать, что в формуле (7.22) в ближней зоне, т.е. при $R \leq R_{ГОР}$, коэффициент $K_3 = 1$, а все дополнительные потери в радиотрассе учитывать за счет коэффициента K_p . В средней зоне, т.е. при $R_{ГОР} \leq R \leq (2...3)R_{ГОР}$, возникают дополнительные потери, учитываемые с помощью коэффициента загоризонтной радиосвязи:

$$K_3 = \left(\frac{R}{R_{ГОР}} \right)^n, \quad (7.23)$$

где $n > 1$ – показатель степени, зависящий от многих факторов, в том числе, рельефа местности, состояния атмосферы и частоты сигнала. Согласно экспериментальным данным для диапазона частот 30...40 МГц значение $n = 1.5...3$. Поскольку значение n возрастает с повышением частоты сигнала, то при загоризонтной радиосвязи более предпочтителен диапазон 27...58 МГц, чем 146...174 МГц.

При вертикальном четвертьволновом вибраторе в месте приема мощность сигнала на входе радиоприемника с входным сопротивлением 50 Ом [11]:

$$P_{ПП} = \left(\frac{E^2 \lambda^2}{800} \right) \cdot 10^{-12} \text{ [Вт]}. \quad (7.24)$$

Подставив (7.22) в (7.24), получим:

$$P_{ПП} = \frac{10P_1 h_1^2 h_2^2}{R^4 K_p^2 K_3^2} \cdot 10^{-12} \text{ [Вт]}. \quad (7.25)$$

Согласно (7.25) при антеннах – вертикальных четвертьволновых вибраторах на обоих концах радиолинии – мощность принимаемого сигнала не зависит от длины волны и с расстоянием уменьшается по закону $\frac{1}{R^4}$.

Выразим (7.25) в децибелах относительно уровня в 1 Вт:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -110 + 10 \cdot \lg P_1 + 20 \cdot \lg(h_1 h_2) - 40 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg K_p - 20 \cdot \lg K_3 \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.26)$$

В частности, при мощности $P_1 = 10$ Вт и $K_p = 10$ Вт из (7.26) имеем:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -120 + 20 \cdot \lg(h_1 h_2) - 40 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg K_3 \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.27)$$

Значение $P_{\text{ПР.дБ}}$, вычисленное по (7.27), должно превышать реальную чувствительность приемника $U_{\text{ч. ПР}}$ [мкВ] при входном сопротивлении 50 Ом, определяемую как:

$$P_{\text{ч. ПР.дБ}} \text{ [дБ Вт]} = -137 + 20 \cdot \lg U_{\text{ч. ПР}}. \quad (7.27, a)$$

При чувствительности $U_{\text{ч. ПР}} = 1$ мкВ значение $P_{\text{ч. ПР.дБ}} \text{ [дБ Вт]} = -137$ дБ Вт.

При чувствительности $U_{\text{ч. ПР}} = 0.1$ мкВ значение $P_{\text{ч. ПР.дБ}} \text{ [дБ Вт]} = -157$ дБ Вт.

На линии радиогоризонта при $P_1 = 10$ Вт, $K_p = 10$ и $K_3 = 1$ из (7.27) с учетом (7.21) получим:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -142 + 40 \lg \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.138)$$

При получении (7.28) использовано очевидное соотношение:

$$20 \cdot \lg(h_1 h_2) = 40 \cdot \lg \sqrt{h_1 h_2}.$$

Согласно (7.28), например, при $h_1 = 10$ м и $h_2 = 20$ м имеем: $P_{\text{ПР.дБ}} = 131.3$ дБ Вт, т.е. уровень сигнала в точке приема $R_{\text{ГОР}} = 27.2$ км соответствует чувствительности приемника в 2 мкВ. Следовательно, при реально достижимой чувствительности радиоприемника 0.1 мкВ запас уровня сигнала в точке приема превышает 20 дБ. Такое превышение сигнала позволяет организовать радиосвязь не только в области до радиогоризонта, но и за его пределами. Как показали экспериментальные исследования, при частоте 40 МГц дальность линии радиосвязи превышает значение $R_{\text{ГОР}}$ в 2...4 раза, т.е. при умеренной высоте подъема антенн в 10...20 м может достигать 50... 100 км.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Найти действующее значение напряженности электрического поля, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 25$ кВт и коэффициентом усиления (коэффициентом направленного действия) 1.5 на расстоянии $R = 300$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне $\lambda = 3000$ м. Расчет поля произвести для случая рас-

пространения радиоволн над почвой с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м по формуле (7.5) и графику (рисунок 7.1).

Решение.

По формуле (7.7) вычисляем численное расстояние 2ρ :

$$2\rho \approx \frac{\pi \cdot r}{\lambda \sqrt{\varepsilon_{3M}^2 + (60\lambda \cdot \sigma_{3M})^2}} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^3 \sqrt{16 + 60^2 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0.01^2}} \approx 0.18.$$

Так как $60\sigma\lambda \gg \varepsilon$, то, воспользовавшись рисунком 7.1, находим $V_{3M}(\rho) \approx 0.95$. Действующее значение поля найдем по формуле (7.5):

$$E_{3M.д} = \frac{245 \sqrt{P'_1 \cdot G_1}}{R} \cdot V_{3M}(\rho) = \frac{245 \sqrt{25 \cdot 1.5}}{300} \cdot 0.95 = 4.8 \text{ [мВ/м]}.$$

7.2.2 Вычислить напряженность поля на расстоянии $R = 2000$ км по данным задачи 7.2.1, приняв радиус Земли $a_{3M} = 6370$ км.

Решение.

Так как при распространении длинных (СДВ) волн в основном определяется потерями при отражении от ионосферы и почти не зависит от свойств земной поверхности, над которой распространяются волны, действующее значение напряженности поля определяем по формуле Остина (7.9).

Для этого находим центральный угол θ :

$$\theta_{РАД} \approx \frac{R}{a} = \frac{2000}{6370} = 0.314 \quad \text{или} \quad \theta \approx 18^\circ.$$

Находим множитель функции ослабления (7.10):

$$\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} = \sqrt{\frac{0.314}{0.309}} = 1.008.$$

Вычисляем второй множитель функции ослабления:

$$e^{-\frac{0.0014}{\lambda^{0.6}} \cdot R} = 0.16.$$

Затем находим $V_{СФ.3M} = 1.008 \cdot 0.16 \approx 0.16$.

Действующее значение напряженности поля находим по (7.9):

$$E_{д} = \frac{300 \sqrt{P}}{R} \cdot V_{СФ.3M} = \frac{300 \sqrt{25}}{2000} \cdot 0.16 = 0.12 \text{ [мВ/м]}.$$

7.2.3 Найти действующее значение напряженности электрического поля в ночные часы, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 12$ кВт и коэффициентом усиления $G_1 = 1$ на расстоянии $R = 1500$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне $\lambda = 900$ м. Расчет поля произвести для случая распространения радиоволн над почвой с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м.

Решение.

Расчет произведем по формуле (7.11), учитывающей земную и отраженную от ионосферы волну.

$$E_{и.д} = \frac{10233}{\sqrt{R}} \sqrt{G_1 P_1'} \cdot \exp(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda^{-0.26} \cdot R);$$

$$E_{и.д} = \frac{10233}{\sqrt{1500}} \sqrt{12 \cdot 1} \cdot \exp(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot 0.9^{-0.26} \cdot 1500) = 915.2 \cdot 0.232 \approx 230 \text{ мкВ/м.}$$

7.2.4 Определить зависимости расстояния прямой видимости [км] при отсутствии атмосферной рефракции (геометрический горизонт) и при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт) в зависимости от высоты поднятия антенн в точках передачи и приема – h_1, h_2 [м]. Расчеты проводить по формулам 6.13 и 6.14.

Решение.

Ниже приведен листинг программы расчета (MathCAD 2001) и графики зависимости (рисунок 7.5) расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции. Расчеты проведены для трех значений высоты h_2 (5, 15 и 30 м), высота h_1 изменялась в пределах 0...100 км.

$$\begin{aligned} h_1 &:= 0, 10.. 100 & h_2 &:= 5 & R1(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ & & h_2 &:= 15 & R2(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ & & h_2 &:= 30 & R3(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \end{aligned}$$

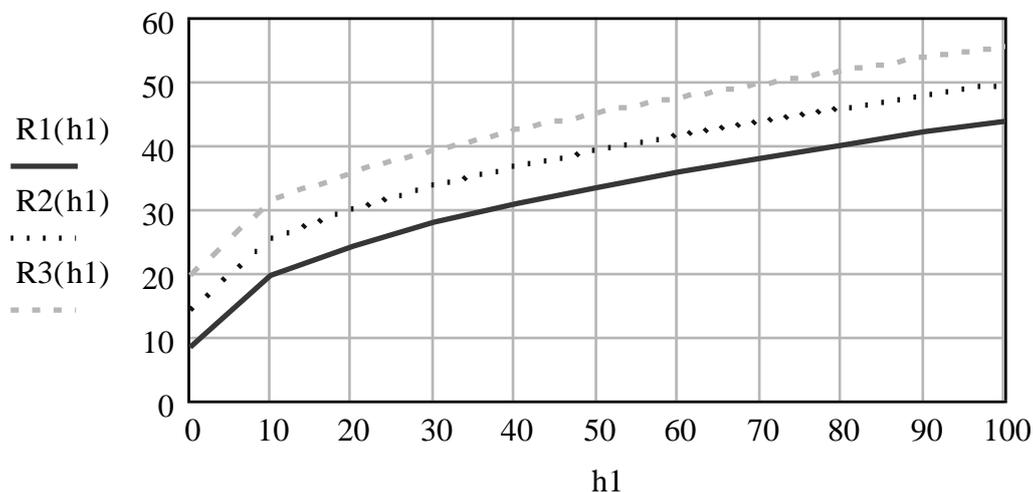


Рисунок 7.5 - Зависимости расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции

Ниже приведен листинг программы расчета (MathCAD 2001) и графики зависимости (рисунок 7.6) расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции (геометрический горизонт) $R2(h_1)$ и при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт) $R1(h_1)$. Расчеты проведены для высоты $h_2 = 15$ м, высота h_1 изменялась в пределах 0...100 км.

$$h_1 := 0, 10.. 100 \quad R_1(h_1) := 4.2 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$$

$$h_2 := 15 \quad R_2(h_1) := 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$$

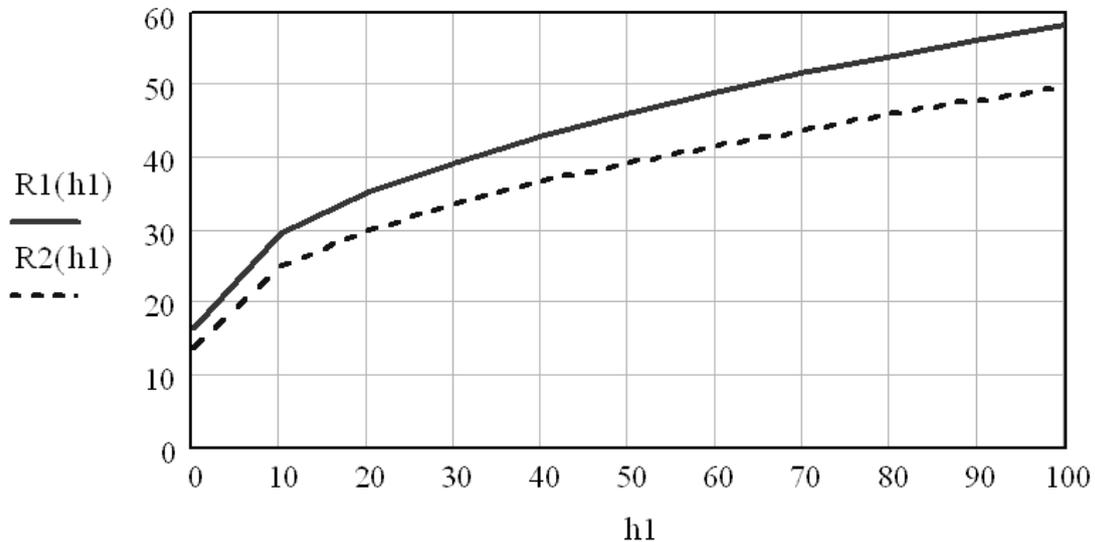


Рисунок 7.6 - Графики зависимости расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции и при нормальной атмосферной рефракции

7.2.5 Определить зависимости требуемой мощности радиопередатчика на линии радиогоризонта в зависимости от высоты поднятия четвертьволновых антенн над уровнем Земли при трех значениях $P_{\text{ПР}}$ дБ. При расчетах использовать формулы (7.22 – 7.28).

Решение.

В составленной программе (нижеследующий листинг MathCAD 2001) введены обозначения:

- $P(h_1)$, $P(h_2)$, $P(h_3)$ – требуемая мощность радиопередатчика P_1 , дБ Вт;
- K_p – коэффициент дополнительных потерь K_p ;
- K_z – коэффициент загоризонтной радиосвязи K_z ;
- P_r – чувствительность радиоприемника $P_{\text{ПР}}$ дБ;
- h_1 , h_2 – высота поднятия антенны над уровнем Земли h_1 , h_2 , м;
- R – протяженность радиотрассы R , км.

На рисунке 7.7 представлены графики зависимости мощности радиопередатчика [дБ Вт] от высоты поднятия антенны h_1 при $h_2 = \text{const} = 20$ м.

$$K_p := 10 \quad K_z := 1 \quad h_2 := 20$$

$$Pr := \begin{pmatrix} -130 \\ -140 \\ -150 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN} = 1$$

$$h_1 := 0, 10.. 100$$

$$F(h_1) := 40 \cdot \log\left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1 \cdot h_2}}\right)$$

$$P_1(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_1 + F(h_1)$$

$$P_2(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_2 + F(h_1)$$

$$P_3(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_3 + F(h_1)$$

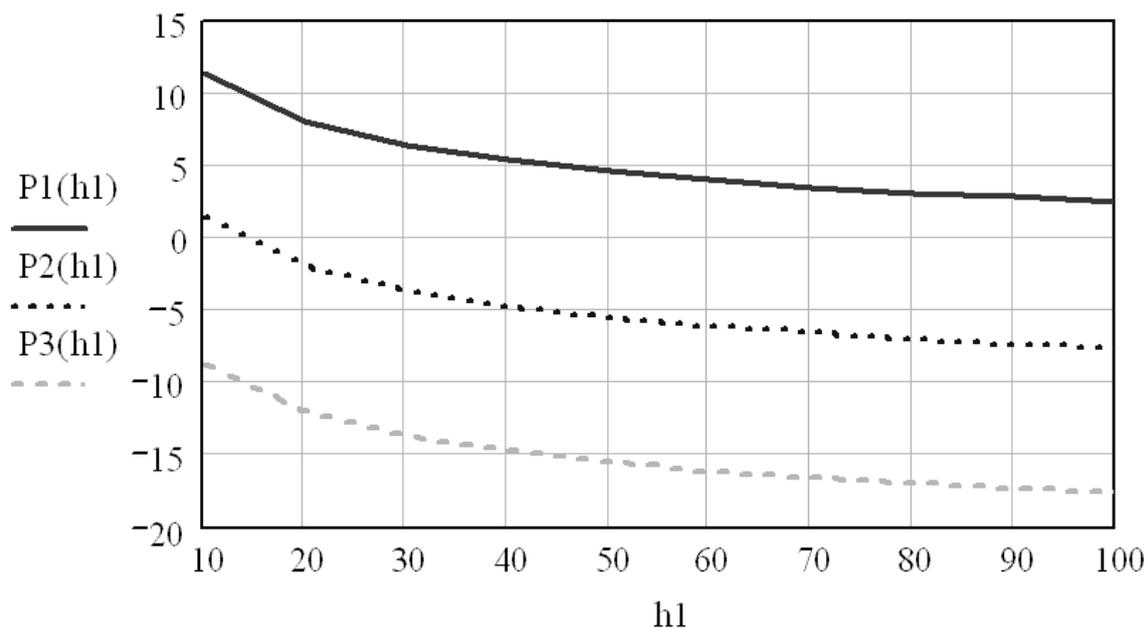


Рисунок 7.7 – Зависимости $P_1(h_1)$ при $h_2 = 20$ м для трех значений чувствительности радиоприемника P_{r1} , P_{r2} , P_{r3} [дБ Вт]

7.2.6 Произвести расчет линии космической радиосвязи по формулам (7.19) – (7.20) при следующих исходных условиях:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... $R = 1000$ км;
- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f = 40$ кГц;
- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700$ К;
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500$ К;
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}} = 10$;
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}} = 3$ дБ;
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2$ дБ;
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 10$;
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.1$ м².

Решение.

Согласно (7.19) определим реальную чувствительность радиоприемника спутникового ретранслятора:

$$P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10 \cdot \lg 40 + 10 \cdot \lg 10 + 10 \cdot \lg 4 = -174 + 16 + 10 + 6 = -142 \text{ дБ Вт.}$$

Согласно (7.20) мощность радиопередатчика наземного абонента:

$$P_{\text{ПЕР}} = 71 + 20 \cdot \lg 1000 - 142 + 2 + 3 - 10 \cdot \lg 10 - 10 \cdot \lg 0.1 = -6 \text{ дБ Вт}$$

или $P_{\text{ПЕР}} = 0.25 \text{ Вт.}$

Как видно из приведенного примера, для радиосвязи наземного абонента со спутником в виду работы прямым лучом достаточно мощность радиопередатчика с весьма малой мощностью в 250 мВт.

Листинг программы по расчету космической линии радиосвязи согласно (7.19) приведен ниже. В программе приняты следующие обозначения:

- P1(R), P2(R), P3(R) – требуемая мощность радиопередатчика $P_{\text{ПЕР}}$, дБ Вт;

- Pr – чувствительность радиоприемника $P_{\text{ПРМ}}$, дБ Вт;

- R – протяженность радиотрассы R, км;

- Bt – потери в тропосфере $B_{\text{ТР}}$, дБ;

- Bf – потери в фидере $B_{\text{Фид}}$, дБ;

- Ga – коэффициент усиления передающей антенны $G_{\text{ПЕР}}$;

- S – площадь приемной антенны $S_{\text{ПРМ}}$, м².

$$\begin{array}{l} R := 500, 750.. 20000 \quad \text{ORIGIN}:= 1 \\ Bt := 3 \quad S := 0.1 \quad Bf := 2 \quad Ga := 10 \end{array} \quad Pr := \begin{pmatrix} -137 \\ -142 \\ -157 \end{pmatrix}$$

$$P1(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_1$$

$$P2(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_2$$

$$P3(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_3$$

На рисунке 7.8 приведены зависимости $P_{\text{ПЕР.дБ}}(R)$ при трех значениях чувствительности радиоприемника: -137, -142, -157 дБ Вт. Графики позволяют проследить, как меняется требуемая мощность спутникового передатчика в зависимости от протяженности радиотрассы и параметров антенн, чувствительности радиоприемника, затухания в атмосфере и за счет фидера.

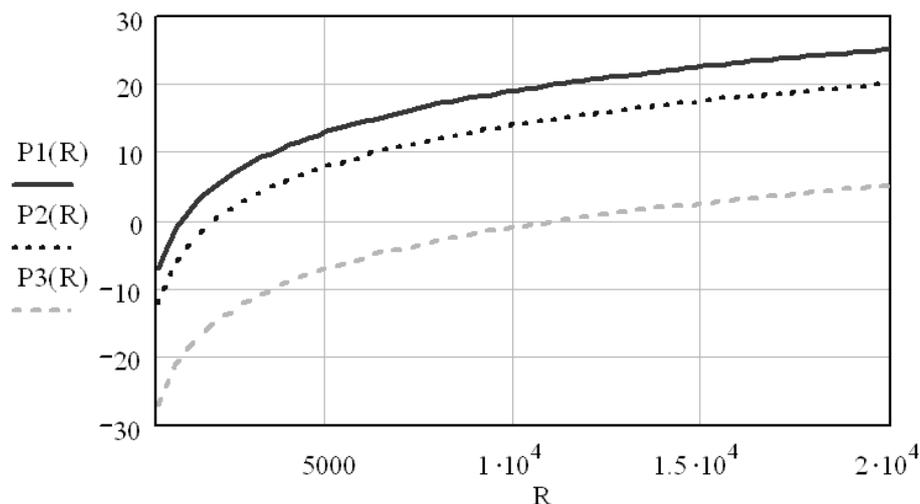


Рисунок 7.8 – Зависимости $P_{\text{пер.дБ}}(R)$ при трех значениях чувствительности радиоприемника

7.3 Задачи для самостоятельного решения

7.3.1 Найти действующее значение напряженности электрического поля, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 25$ кВт и коэффициентом усиления $G_1 = 1.5$ на расстоянии $R = 300$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [м]. Расчет поля произвести для случая распространения радиоволн над почвой с параметрами ϵ , σ [См/м].

Значения λ , ϵ и σ приведены в таблице 7.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.2 Вычислить напряженность поля на расстоянии R [км] по данным задачи 7.2.1, приняв радиус Земли $a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км.

Значения P'_1 , r и λ приведены в таблице 7.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.3 Вычислить действующее значение напряженности поля, создаваемое вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью P'_1 [кВт] и коэффициентом направленного действия 1.5 на расстоянии R [км] от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [км]. Принять радиус Земли $a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км.

Значения P'_1 , r и λ приведены в таблице 7.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.1 – Исходные данные к задаче 7.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	25	20	15	10	9	8	7	6	5	4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	2	0.6	0.2	0.8	0.06	0.4	0.2	0.08	0.02	0.01

Таблица 7.2 – Исходные данные к задаче 7.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	80	60	50	40	30	20	10	5	2
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , км	300	250	200	180	160	140	120	100	90	80

Таблица 7.3 – Исходные данные к задаче 7.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	80	60	50	40	30	20	10	5	2
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 1000$, км	16	14	12	10	8	6	4	2	1.5	1

7.3.4 Найти действующее значение напряженности электрического поля в ночные часы, создаваемое вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью P'_1 [кВт] и коэффициентом усиления $G_1 = 1$ на расстоянии R [км] от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [м].

Значения P'_1 , R и λ приведены в таблице 7.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.4 – Исходные данные к задаче 7.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$	$1.1 \cdot 10^2$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	90	80	70	60	55	25	30	40	50
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$r \cdot 1000$, км	1.1	1.3	1.5	1.7	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1

7.3.5 Определить зависимость расстояния прямой видимости R [км] в зависимости от высоты поднятия антенн в точках передачи и приема h_1, h_2 [м]: $R = K(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$.

Значения K, h_1 и h_2 приведены в таблице 7.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.5 – Исходные данные к задаче 7.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
K	3.57	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.05	4.1	4.15	4.2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$h_1, \text{ м}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$h_2, \text{ м}$	1...20	2...30	3...40	4...50	5...60	5...50	4...40	3...30	2...20	1...40

7.3.6 Определить зависимости требуемой мощности радиопередатчика на линии радиогоризонта в зависимости от высоты поднятия четвертьволновых антенн (h_1, h_2) над уровнем Земли при чувствительности радиоприемника $P_{\text{ПРМ}}$ [дБ Вт]. При расчетах считать, что коэффициент дополнительных потерь $K_p = 10$, а коэффициент загоризонтной радиосвязи $K_3 = 1$. Для решения задачи использовать формулы (7.13) – (7.18).

Значения $P_{\text{ПРМ}}, h_1$ и h_2 приведены в таблице 7.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.7 Произвести расчет реальной чувствительности радиоприемника спутникового ретранслятора линии при следующих исходных условиях:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... $R, \text{ км}$;
- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f, \text{ кГц}$;
- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700 \text{ К}$;
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500 \text{ К}$;
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}}$;
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}} = 3 \text{ дБ}$;
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2 \text{ дБ}$;
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 10$;
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.1 \text{ м}^2$.

Значения R , Δf и $C_{С/Ш}$ приведены в таблице 7.7 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.6 – Исходные данные к задаче 7.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{ПРМ}$, дБ Вт	120	125	130	135	140	145	150	152	154	156
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_1 , м	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_2 , м	1...20	2...30	3...40	4...50	5...60	5...50	4...40	3...30	2...20	1...40

Таблица 7.7 – Исходные данные к задаче 7.3.7

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 10^3$, км	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Δf , кГц	10	20	30	35	40	45	50	55	60	70
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$C_{С/Ш}$	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15

7.3.8 Определить требуемую мощность бортового спутникового радиопередатчика в зависимости от протяженности радиотрассы, чувствительности радиоприемника и коэффициенте потерь в атмосфере по следующим данным:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... R , км;

- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f = 40$ кГц;
- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700$ К;
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500$ К;
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}} = 10$;
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}}$, дБ;
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2$ дБ;
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 1$;
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.5$ м².

Значения R , $P_{\text{ПРМ}}$ и $B_{\text{ТР}}$ приведены в таблице 7.8 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.8 – Исходные данные к задаче 7.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 10^3$, км	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{ПРМ}}$, дБ Вт	120	125	129	132	134	137	140	143	146	153
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$B_{\text{ТР}}$, дБ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

8 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

8.1 Тема 1. Элементы векторного анализа

1.1 Величина работы, которую совершает сила \vec{F} на прямолинейном пути \vec{S} , есть: *a)* вектор; *б)* скаляр; *в)* не определена.

1.2 Скалярное произведение двух векторов равно нулю, если вектора: *a)* коллинеарны; *б)* ортогональны; *в)* единичные.

1.3 Векторное произведение двух векторов равно нулю, если вектора: *a)* компланарны; *б)* ортогональны; *в)* единичные.

1.4 Производная от вектора $\vec{A}(t)$ есть: *a)* отрезок соединяющий концы векторов $\vec{A}(t)$ и $\vec{A}(t + dt)$; *б)* перпендикуляр к векторам $\vec{A}(t)$ и $\vec{A}(t + dt)$; *в)* касательная к линии L описываемой вектором $\vec{A}(t)$;

1.5 Если вектор \vec{C} постоянный (не зависит от t), то производная от вектора вида $\frac{d}{dt}[f(t)\vec{C}]$ оказывается: *a)* перпендикулярна вектору $\vec{A} = F(t) \cdot \vec{C}$; *б)* параллельна вектору \vec{A} ; *в)* в общем случае ответ и не *a)*, и не *б)*.

1.6 Из второго закона Ньютона следует, что: *a)* работу производит лишь тангенциальная составляющая силы; *б)* работу производит лишь нормальная составляющая силы; *в)* обе составляющие силы искривляют траекторию.

1.7 Градиент скалярной функции всегда есть: *a)* вектор; *б)* скаляр; *в)* зависит от выбранной системы координат.

1.8 Дивергенция векторного поля всегда есть: *a)* вектор; *б)* скаляр; *в)* зависит от выбранной системы координат.

1.9 Дивергенция векторного поля это: *a)* количество силовых линий, начинающихся в бесконечно малом объеме; *б)* поток поля \vec{A} через поверхность этого объема; *в)* скорость изменения проекции вектора вдоль соответствующей координаты.

1.10 Ротор векторного поля есть: *a)* новое векторное поле; *б)* псевдовектор; *в)* циркуляция поля по замкнутому контуру.

8.2 Тема 2. Основные положения теории электромагнетизма

2.1 Векторное поле $\vec{A}(x, y, z)$ задано однозначно, если: а) известна $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)$; б) известен $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)$; в) известны $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)$ и $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)$.

2.2 Необходимым и достаточным условием потенциальности поля является: а) $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)=0$; б) $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)=0$; в) $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)=0$ и $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)=0$.

2.3 Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля являются: а) $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)=0$; б) $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)=0$; в) $\operatorname{div}\vec{A}(x, y, z)=0$ и $\operatorname{rot}\vec{A}(x, y, z)=0$.

2.4 Из формулы для силы Лоренца следует, что фокусировку пучка заряженных частиц можно осуществить: а) электрическим полем; б) магнитным полем; в) необходимо использовать оба поля.

2.5 Увеличить кинетическую энергию пучка заряженных частиц можно: а) электрическим полем; б) магнитным полем; в) необходимо использовать оба поля.

2.6 Собственными токами электромагнитного поля являются: а) ток проводимости; б) ток смещения; в) поляризационный ток.

2.7 Ток генератора есть: а) сторонний ток; б) собственный ток; в) ток проводимости.

2.8 Если в выбранной точке пространства $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то: а) магнитные силовые линии замкнуты; б) векторное поле \vec{B} нигде не имеет источников; в) магнитные заряды в природе отсутствуют.

2.9 Электромагнитное поле в магнитодиэлектрике определено, если известны: а) абсолютная диэлектрическая проницаемость; б) абсолютная магнитная проницаемость; в) относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость.

2.10 В средах, в которых вектора \vec{D} и \vec{E} , либо вектора \vec{B} и \vec{H} являются не коллинеарными, диэлектрическая, либо магнитная проницаемости являются: а) тензорами; б) функциями координат; в) независимыми от координат.

8.3 Тема 3. Уравнения Максвелла

3.1 Предпочтительнее пользоваться уравнениями Максвелла в интегральной форме, если: *а)* известно в явном виде уравнение контура, охватывающего электромагнитное поле; *б)* известны в явном виде уравнения контура и поверхности, через которую проходят силовые линии; *в)* известны в явном виде уравнения контура, поверхности и объема, содержащего электрические заряды.

3.2 Принцип суперпозиции электромагнитных полей заключается в том, что: *а)* общее решение уравнений Максвелла есть сумма частных решений; *б)* общее решение есть сумма частных решений помноженных на произвольные постоянные коэффициенты a_i , где i – номер частного решения; *в)* общее решение есть произведение частных решений.

3.3 Мгновенное значение вектора, гармонически изменяющегося во времени, есть: *а)* реальная часть от комплексной амплитуды; *б)* реальная часть самого вектора; *в)* мнимая часть самого вектора.

3.4 Амплитуды двух гармонически изменяющихся во времени векторов имеют вид $\vec{E}_1 = E_0 \cdot \vec{i}_x$ и $\vec{E}_2 = jE_0 \cdot \vec{i}_x$. Из условия следует, что: *а)* вектора параллельны орту \vec{i}_x ; *б)* образуют в пространстве угол 90° ; *в)* вектор \vec{E}_2 опережает вектор \vec{E}_1 по фазе на четверть периода.

3.5 Вектор Пойнтинга для гармонического процесса имеет вид:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \cdot \vec{H}^* \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \cdot \vec{H}^* \right\} \cdot e^{j2\omega t},$$

где: *а)* первое слагаемое есть колеблющаяся часть мощности, а второе – усредненная за период плотность потока мощности; *б)* первое слагаемое есть усредненная за период плотность потока мощности, а второе – колеблющаяся часть мощности, среднее значение которой за период равно 0; *в)* оба слагаемых описывают плотность потока мощности переносимой электромагнитным полем.

3.6 Из четвертого уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ следует, что магнитных зарядов в природе не существует. Однако при расчете, например, антенн вводят сторонний магнитный ток j_{CT} с целью: *а)* придания симметричного вида первого и второго уравнений Максвелла; *б)* если известно решение для вектора \vec{E} , то автоматическая запись решения для вектора \vec{H} осуществляется путем простой замены $\varepsilon \leftrightarrow \mu_a$, $j_{CT}^{\partial} \leftrightarrow j_{CT}^M$; *в)* доказательства дуальности (двойственности) электромагнитного процесса.

3.7 Введение стороннего магнитного тока позволяет: *а)* доказать лемму Лоренца; *б)* не позволяет доказать лемму Лоренца; *в)* лемма Лоренца не имеет отношения к магнитному току.

3.8 Для того, чтобы найти мгновенное значение поля в методе комплексных амплитуд, необходимо: *а)* домножить реальную часть на показательную функцию вида $\exp(-j\omega t)$; *б)* домножить реальную часть на показательную функцию вида $\exp(j\omega t)$; *в)* поделить на показательную функцию вида $\exp(j\omega t)$.

3.9 Действительная часть диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_a = \varepsilon'_a + j\varepsilon''_a$) определяется: *а)* процессами поляризации в веществе; *б)* потерями на Джоулево тепло; *в)* процессами распространения волны в веществе.

3.10 Тангенс угла диэлектрических потерь определяется только: *а)* величиной мнимой части диэлектрической проницаемости; *б)* величиной действительной части диэлектрической проницаемости; *в)* отношением мнимой части к действительной части диэлектрической проницаемости.

8.4 Тема 4. Плоские электромагнитные волны

4.1 Математической моделью однородной плоской волны является функция: а) $A(z, t) = A_m \cos(\omega t - \beta z)$; б) $A(z, t) = \operatorname{Re}\{A_m e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$; в) $A(z, t) = \operatorname{Re}\{\dot{A}_m e^{-j\beta z}\}$.

4.2 Мгновенные значения функции $A(z, t)$ определяется аргументами: а) (x, y, z, t) ; б) (x, y, t) ; в) (z, t) .

4.3 Колебания в точке с координатой $Z > 0$ запаздывает по фазе на величину: а) βz радиан; б) $(\omega t - \beta z)$ радиан; в) ωt радиан.

4.4 Плоскостью равных фаз или волновым фронтом называется плоскость: а) перпендикулярная оси Z ; б) плоскость, удовлетворяющая при любых t уравнению $\omega t - \beta z = \text{const}$; в) плоскость XOY (волна распространяется вдоль оси z).

4.5 Процесс распространения электромагнитной волны характеризуется коэффициентом распространения $\gamma = \alpha + j\beta$, где α – коэффициент ослабления, β – коэффициент фазы. Волновой процесс осуществляется, если: а) γ – комплексное число; б) γ – мнимое число; в) γ – действительное число.

4.6 Электромагнитная волна является плоской однородной волной только в случае, если: а) $E_x \neq 0, E_y = E_z = 0$; б) отличная от нуля проекция E_x удовлетворяет уравнению $-\frac{\partial E_x}{\partial X} = \frac{\partial E_x}{\partial Y} = 0$; в) $E_y \neq 0, E_x = E_z = 0$ и

$$\frac{\partial E_y}{\partial X} = \frac{\partial E_y}{\partial Y} = 0.$$

4.7 В однородной плоской волне векторы \vec{E} и \vec{H} : а) перпендикулярны; б) $\vec{E} \perp \vec{H}$ и перпендикулярны оси распространения Z ; в) ориентированны произвольно.

4.8 Волна называется правополяризованной, если: а) $E_x = E_{m1} \cos \omega t$; б) $E_x = E_{m1} \cos \omega t, E_y = E_{m2} \sin \omega t$; в) $E_x = E_{m1} \cos \omega t, E_y = -E_{m2} \sin \omega t$.

4.9 Комплексный характер характеристического сопротивления среды означает, что: а) среда с потерями на Джоулево тепло; б) среда с потерями, вектора \vec{E} и \vec{H} колеблются не синфазно; в) имеется сдвиг фаз между векторами \vec{E} и \vec{H} , пропорциональный тангенсу угла диэлектрических потерь.

4.10 Волновой вектор \vec{k} плоской волны образует одинаковый угол θ с положительными направлениями осей x, y, z декартовой системы координат. Каков этот угол? **Ответ:** а) 30° ; б) 45° ; в) 57.74° .

8.5 Тема 5. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

5.1 Нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред: *а)* претерпевают скачок; *б)* непрерывны; *в)* не определены.

5.2 Касательные составляющие векторов напряженности магнитного поля: *а)* непрерывны; *б)* претерпевают скачок; *в)* непрерывны, если проводимость σ границы раздела конечна.

5.3 На границе раздела идеального проводника плотность поверхностного электрического тока численно равна: *а)* касательной проекции вектора напряженности магнитного поля; *б)* касательной проекции вектора магнитной индукции; *в)* нормальной проекции вектора магнитной индукции.

5.4 Нормальные составляющие векторов электрического смещения на границе раздела двух сред: *а)* непрерывны; *б)* претерпевают скачок; *в)* непрерывны, если на границе отсутствуют электрические заряды.

5.5 Нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела: *а)* претерпевают скачок; *б)* непрерывны; *в)* претерпевают скачок, если на границе отсутствуют электрические заряды.

5.6 Касательные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела двух сред: *а)* непрерывны; *б)* претерпевают скачок; *в)* претерпевают скачок только на границе идеального проводника.

5.7 Силовые линии электрического вектора подходят к поверхности идеального проводника: *а)* по нормали; *б)* по касательной; *в)* угол преломления всегда равен нулю.

5.8 Если диэлектрическая проницаемость второй среды стремится к бесконечности то, независимо от ориентации электрического поля в первой среде, на границе раздела двух сред имеет место только: *а)* нормальная; *б)* касательная; *в)* обе составляющие электрического поля.

5.9 Граничные условия имеют место только: *а)* в окрестности выделенной точки на поверхности; *б)* на всей поверхности раздела; *в)* на всей поверхности раздела, исключая особые точки.

5.10 Вектор нормали к границе раздела берется со знаком плюс, если: *а)* восстановлен к внешней границе; *б)* восстановлен к внутренней границе; *в)* всегда.

8.6 Тема 6. Радиоволны в материальных средах

6.1 Неоднородной изотропной средой являются среды с материальными константами вида: *а)* $\varepsilon_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_0$; *б)* $\varepsilon_a(x, y, z)$, $\mu_a(x, y, z)$; *в)* $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a(x, y, z)$.

6.2 В земной атмосфере приближение геометрической оптики справедливо для волн радиодиапазона: *а)* диапазона ДВ; *б)* диапазона СВ; *с)* диапазона УКВ.

6.3 Метод геометрической оптики не учитывает такого явления, как: *а)* интерференцию; *б)* лучевую картину поля; *в)* дифракцию радиоволн.

6.4 Поверхностный слой Земли является: *а)* полупроводником; *б)* диэлектриком; *в)* имеет электрические свойства металла.

6.5 Диэлектрическая проницаемость тропосферы претерпевает пространственные и временные изменения. Причиной таких изменений является: *а)* магнитное поле Земли; *б)* гравитационное поле Земли; *в)* тепловое поле Земли.

6.6 Какая часть атмосферы Земли является дисперсионной средой: *а)* стратосфера; *б)* ионосфера; *в)* тропосфера.

6.7 Плотность атмосферы ростом высоты уменьшается, т.е. $n_0 \geq n(z)$, где n_0 показатель преломления у поверхности Земли. Плоская волна, падающая на границу слоя под углом θ_0 , будет: *а)* распространяться прямолинейно; *б)* угол θ будет уменьшаться с увеличением z ; *в)* угол θ будет увеличиваться.

6.8 Явление поворота луча имеет место, если: *а)* $\theta = 0$; *б)* $n(z_n) = n_0 \sin \theta_0$; *в)* $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, где θ_0 – угол падения волны на границу слоя, $n(z_n)$ – показатель преломления на высоте z_n , n_0 – показатель преломления у поверхности Земли.

6.9 Тропосферная волноводная рефракция – это: *а)* отрицательная рефракция; *б)* критическая рефракция; *в)* положительная рефракция.

6.10 Критическая частота ионосферного слоя определяется: *а)* концентрацией ионов; *б)* концентрацией электронов; *в)* концентрацией нейтральных молекул.

6.11 Максимально применимая частота (МПЧ) зависит от: *а)* мощности излучения $P_{\text{и}}$; *б)* от критической (плазменной) частоты $f_{\text{пл}}$; *в)* от угла падения волны на границу слоя θ_0 .

6.12 Диэлектрическую проницаемость тропосферы можно рассчитать, если известны: *а)* давление газа; *б)* давление водяных паров (абсолютная влажность воздуха); *в)* температура.

8.7 Тема 7. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов

7.1 Для устойчивой КВ связи в зависимости от состояния ионосферы возникает необходимость смены рабочих частот f_p . При этом определяют максимальную частоту (МЧ) $f_{MЧ}$, максимально применимую частоту (МПЧ) $f_{МПЧ}$, наименьшую применимую частоту (НПЧ) $f_{НПЧ}$ и оптимально рабочую частоту (ОРЧ) $f_{ОРЧ}$. Рабочую частоту f_p выбирают, исходя из условия: а) $f_{НПЧ} \leq f_p \leq f_{МПЧ}$; б) $f_{НПЧ} \leq f_p \leq f_{ОРЧ}$; в) $f_p = f_{ОРЧ}$.

7.2 Радиолинии УКВ работают в условиях прямой видимости. Опытным путем установлено, что длина радиотрассы несколько больше, причиной тому является: а) дифракция; б) рефракция; в) интерференция.

7.3 В каких районах ионосферные магнитные бури вызывают наиболее сильное нарушение КВ связи (от нескольких часов до нескольких суток):

а) в районе экватора; б) в приполярных районах; в) в районах низких широт.

7.4 В диапазоне КВ прием сопровождается непрерывными изменениями уровня сигнала во времени (замираниями). Самой эффективной мерой борьбы с замираниями является: а) применение приемника с повышенным динамическим диапазоном; б) прием на разнесенные в пространстве антенны; в) использование в приемнике системы АРУ.

7.5 По какой формуле ведется расчет радиолинии (СДВ, ДВ, СВ) при низко расположенных антеннах: а) по интерференционной формуле Б.А. Введенского; б) по квадратичной формуле Б.А. Введенского; в) по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля.

7.6 Расчет КВ радиолинии земным лучом дает наибольшую дальность R в случае, если радиолиния расположена: а) над почвой средней влажности (поверхность гладкая); б) над пустыней; в) над морем.

7.7 Внутренний радиус мертвой зоны КВ радиолинии определяется электрическими свойствами: а) подстилающей среды; б) тропосферы; в) ионосферы.

7.8 В результате своеобразных вспышек активности Солнца происходят нарушения КВ связи, причиной этому являются воздействующие на атмосферу Земли: а) рентгеновское излучение; б) потоки заряженных частиц; в) ультрафиолетовое излучение.

7.9 В зоне приема ионосферных волн может наблюдаться явление перекрестной модуляции: при настройке приемника на частоту f может прослушиваться передача другого, мощного передатчика, при этом несущая частота мешающего передатчика f_M не входит в полосу пропускания приемника. Явление перекрестной модуляции характерно для радиоволн диапазона:

а) средних волн; б) коротких волн; в) длинных волн.

7.10 На космических радиополосах, как правило, используются частоты из диапазона 1...10 ГГц. Нижняя частота этого диапазона (1 ГГц) выбрана, исходя из уровня шумов: *а)* космического происхождения; *б)* шумов нагретой земной атмосферы; *в)* радиоизлучением земной поверхности.

7.11 На космических радиополосах, как правило, используются частоты из диапазона 1...10 ГГц. Верхняя частота этого диапазона (10 ГГц) выбрана, исходя из уровня шумов: *а)* космического происхождения; *б)* шумов нагретой земной атмосферы; *в)* радиоизлучением земной поверхности.

7.12 Интенсивность радиоизлучения атмосферы при изменении угла возвышения (угла места Δ) радиополосы в пределах от 0 до 90^0 : *а)* увеличивается; *б)* уменьшается; *в)* остается неизменным

7.13 Интенсивность радиоизлучения поверхности Земли при изменении угла возвышения (угла места Δ) радиополосы в пределах от 0 до 90^0 : *а)* увеличивается; *б)* уменьшается; *в)* остается неизменным

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Никольский В.В. Математический аппарат электродинамики. Учебное пособие. – М.: МИРЭА, 1973.
3. Мисюркеев И.В. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Просвещение, 1975.
4. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. С.И. Баскакова. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Зайцев И.А., Лурье А.Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. – М.: ГЭИ, 1961.
6. Говорков В.А., Купалян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1963.
7. Фуско В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование. – М.: Радио и связь, 1990.
8. Корогодов В.С. Техническая электродинамика. Сборник задач. – Томск: ТУСУР, 2001.
9. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1967.
10. Ерохин Г.А. Антенно - фидерные устройства и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия - Телеком, 2004.
11. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+MathCAD. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001.
12. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. Электромагнитные поля и волны. – Томск: ТУСУР, 2005.
13. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. Распространение радиоволн. – Томск: ТУСУР, 2005.