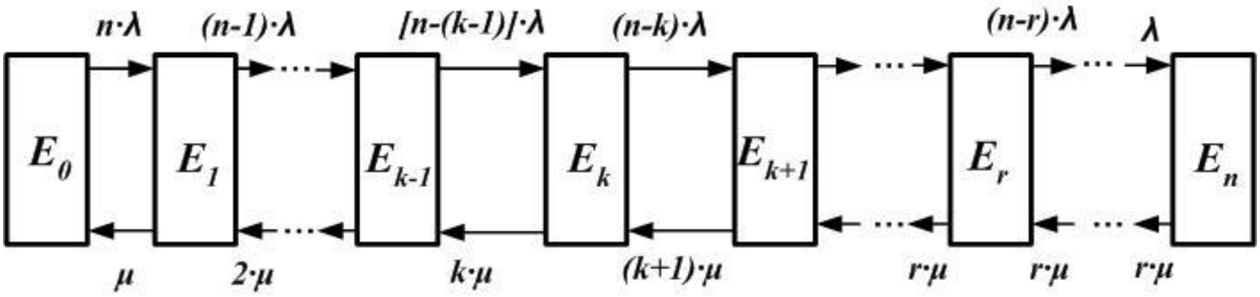
В.Г. Козлов

Теория массового обслуживания

Учебное пособие для студентов специальности 210201 - Проектирование и технология радиоэлектронных средств



ТОМСК 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

В.Г. Козлов

Теория массового обслуживания

Учебное пособие для студентов специальности 210201 - Проектирование и технология радиоэлектронных средств

2012

Рецензент:
профессор кафедры «Конструирования и производства радиоаппаратуры», д.т.н. Татаринов В. Н.

Технический редактор:
доцент кафедры КИПР, к.т.н. Озеркин Д.В.

Козлов В. Г.
Теория массового обслуживания. Учебное пособие для студентов специальности 210201 - проектирование и технология радиоэлектронных средств. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 57 с.

В данной книге изложен лекционный материал по теории массового обслуживания и приведены примеры и многовариантные задачи по расчёту систем массового обслуживания для использования на практических занятиях. Пособие предназначено для дистанционного, заочного, и очного обучения студентов специальности 210201 - проектирование и технология радиоэлектронных средств. Возможно применение пособия для изучения вопросов теории массового обслуживания студентами всех специальностей радиотехнического профиля.

© Козлов Виталий Григорьевич, 2012
© Кафедра КИПР Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В данной книге изложен лекционный материал по теории массового обслуживания и приведены примеры и многовариантные задачи по расчёту систем массового обслуживания для использования на практических занятиях. Пособие предназначено для дистанционного, заочного, и очного обучения студентов специальности 210201 – проектирование и технология одиоэлектронных средств. Возможно применение пособия для изучения вопросов теории массового обслуживания студентами всех специальностей радиотехнического профиля

1 Основные понятия теории массового обслуживания

1.1 Общие положения

Теория массового обслуживания (ТМО) изучает статические характеристики систем массового обслуживания (СМО). СМО – это совокупность однородных обслуживающих устройств (приборов, мастерских, линий связи, ремонтников, обслуживающего персонала и т. д.), называемых каналами обслуживания. Однородность каналов заключается в их способности обслужить (удовлетворить) заявку с одинаковыми среднестатистическими временными характеристиками. Термин «массовый» предполагает многократную повторяемости ситуаций (много заявок, длительное функционирование системы и т.п.). Заявки поступают в СМО в случайные моменты времени. Длительность обслуживания и промежутки между обслуживаниями являются также случайными величинами. По этой причине ТМО является разделом теории вероятностей и все расчёты по отношению к конкретным единичным событиям носят вероятностный характер. Иногда можно экспериментально определить статистические характеристики СМО путём проб и последовательных приближений. Когда это невозможно или невыгодно используют расчёты математических моделей СМО, в которых имеет место случайный характер изменения входных воздействий, а в редких случаях и параметров системы. Преобразуя случайные величины с помощью формул ТМО, получают вполне определенные неслучайные значения параметров управления (например, необходимое число каналов обслуживания, обеспечивающих заданные статические характеристики).

Примерами СМО могут служить сборочные цеха, ремонтные мастерские, станции технического обслуживания, инженерно-авиационная служба, восстанавливаемая резервированная аппаратура, телефонные станции, все виды связи, все виды транспорта (вместе с билетными кассами) и т. д.

Основные задачи ТМО в определении пропускной способности и статических характеристик СМО.

Пропускная способность СМО определяется числом обслуженных заявок в единицу времени и зависит от числа каналов, быстродействия каждого канала, от вида и от интенсивности потока событий.

Поток событий – это последовательность наступления событий во времени. Если поток заявок неравномерный, то в СМО возникают очереди заявок, когда их много и простои каналов обслуживания, когда их мало. Например, сельскохозяйственная авиация простаивает зимой, а летом возникают очереди заявок на её использование, в местах отдыха очередь заявок на путёвки в определённые сезоны и простой гостиничных комплексов в неудобное для отдыхающих время и т. д. Для минимизации потерь нужно иметь аналитические соотношения, связывающие две группы критериев. Первая группа характеризует степень удовлетворения потока заявок, а отрая степень использования каналов обслуживания. Находятся оптимальные соотношения между длиной очереди и количеством каналов обслуживания, между средним временем простоя и средним временем пребывания заявки в СМО и т. д. Для экономической оценки качества СМО можно использовать полную среднюю стоимость потерь при её эксплуатации в единицу времени [3]:

$$Г = C_1 \cdot v + C_2 \cdot p ,$$

где v — среднее число заявок в очереди; p — среднее число свободных каналов обслуживания; C_1- стоимость ожидания одной заявки в единицу времени; C_2 — стоимость простоя одного канала в единицу времени.

1.2 Классификация СМО

Приведём классификацию СМО по различным признакам.

По признаку потерь заявок на обслуживание СМО подразделяются на три типа: *с отказами, с ожиданием и смешанного типа.*

В *СМО с отказами* заявки обслуживаются немедленно, если каналы свободны, или получат отказ и теряются, если все каналы заняты. Пример такой СМО – телефонная сеть. Именно работы по исследованию телефонных сетей положили начало ТМО.

В *СМО с чистым ожиданием* все заявки выстраиваются в очередь, если каналы *заняты*. Одна из таких систем изображена на рисунке 1.1. Как видно из рисунка первопричину входного потока возникших заявок (независимо от их физической природы) называют источником заявок. СМО состоит из накопителя возникших заявок, находящихся в очереди, и узла их обслуживания, состоящего из каналов обслуживания. Из рисунка также видно, что выходной поток обслуженных заявок по виду отличен от входного потока заявок, возникших в источнике.

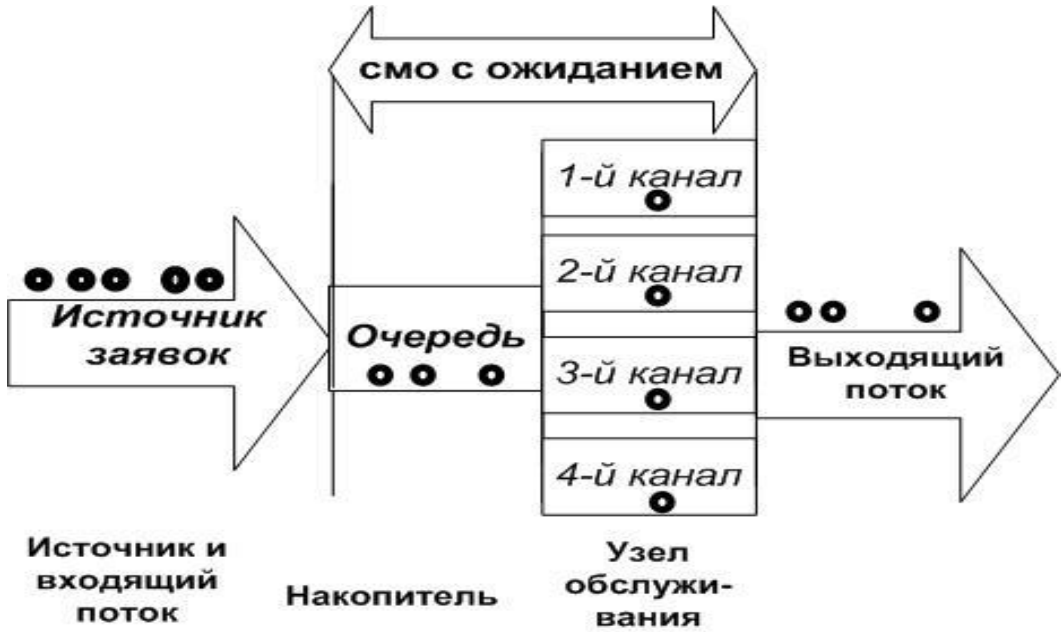


Рисунок 1.1- Структурная схема четырёхканальной СМО с ожиданием

В таблице 1.1 приведены некоторые примеры СМО с ожиданием.

Для того чтобы показать разнообразие схем СМО с ожиданием на рисунке 1.2 приведена структурная схема пятиканальной СМО с ожиданием с двумя очередями и с тремя входящими потоками. На её входе потоки могут характеризоваться различными законами распределения вероятностей. Например, в мастерскую на ремонт поступают изделия из трёх организаций, причём число изделий, поступающих в единицу времени, изменяется в зависимости от того, с какого предприятия они поступают. В этом случае все входящие потоки заменяют одним, для которого закон распределения вероятностей вычисляется или определяется путём измерений.

Наличие нескольких очередей разной длины может быть вызвано преимуществами (привелегиями) одного источника по отношению к другим. Например, изделия с оборонного предприятия могут обслуживать в короткой очереди или вне очереди. Очередь, в которой требования располагаются в порядке поступления, называют *упорядоченной*. Совокупность отношений порядка и преимуществ (привелегий) называют *дисциплиной ожидания.*

Для появления очереди достаточно того, чтобы поступление требований и (или) обслуживание происходили в нерегулярные промежутки времени. При регулярном потоке очередь возникает и теоретически возрастает до бесконечности лишь в случае, когда интенсивность потока заявок λ *(1/час)* больше интенсивности потока обслуживания μ *(1/час).*

В *СМО смешанного типа* имеются ограничения на время пребывания заявки в системе или на длину очереди. При невыполнении требуемого ограничения заявка покидает СМО необслуженной.

По числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки СМО делят на *одноканальные и многоканальные.*

В зависимости от характера потоков и процессов, протекающих в СМО их делят на *марковские и немарковские.*

Процесс, протекающий в системе называют *марковским* (или процессом без последствия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система вошла в это состояние.

Таблица 1.1 Примеры СМО с ожиданием [12, 13]

Виды требований	Сущность обслуживания	Каналы обслуживания (приборы)
Самолёты	Посадка, взлёт	Взлётно-посадочные полосы
Суда	Разгрузка	Причалы
Отказы машин	Ремонт	механики, мастерские
Наработка при эксплуатации	Техническое обслуживание по наработке	Станции технического обслуживания, механики
Старение при эксплуатации	Техническое обслуживание по состоянию	Станции технического обслуживания, механики
Транспорт	Обеспечение безопасности движения	Светофоры, семафоры, маяки, прожектора и т.д.
Прибытие транспорта	Досмотр	Таможенники
Сообщения	Расшифровка	Декодеры
Клиенты	Товарные операции	Склады
Покупатели	Продажа товаров	Продавцы

Рисунок 1.2- Структурная схема пятиканальной СМО с ожиданием с двумя очередями и с тремя входящими потоками [12]

Рассмотрим простой пример [6] марковской СМО. Имеется техническое устройство X, состоящее из n элементов (деталей) типа a и из m элементов типа b, обладающих разной долговечностью. Эти элементы в случайные моменты времени и независимо друг от друга могут выходить из строя. Исправная работа каждого элемента необходима для работы устройства в целом. Время безотказной работы элемента — случайная величина, распределенная по показательному закону; для элементов типа a и b интенсивности отказов этого закона различны и равны соответственно λ_a и λ_b. В случае отказа устройства обнаруженный неисправный элемент после ремонта заменяется отремонтированным. Время, потребное для восстановления (ремонта) устройства, распределено по показательному закону с интенсивностью восстановления μ_a (если вышел из строя элемент типа а) и μ_b (если вышел из строя элемент типа b). Процесс, протекающий в данной СМО, это марковский процесс с непрерывным временем и конечным множеством состояний:

E_0 - состояние, когда все элементы исправны и СМО работает, E_1 - неисправен элемент типа a и СМО ремонтируется, E_2 - неисправен элемент типа b и СМО ремонтируется. Схема возможных переходов дана на рисунке 1.3. Предполагается, что детали могут выходить из строя только во время работы системы и что выход из строя одновременно двух или более деталей практически невозможен.

Так как время безотказной работы каждого элемента имеет показательный закон распределения (для краткости будем говорить показательное время), то момент отказа каждого элемента в будущем не зависит от того, сколько времени он уже работал (когда поставлен). Поэтому вероятность того, что в будущем система останется в состоянии E_0 или уйдет из него, не зависит от «предыстории» процесса. Предположим теперь, что в момент t_0 система находится в состоянии E_1 (неисправен элемент типа *а).* Так как время ремонта тоже показательное, вероятность окончания ремонта в любое время после t_0 не зависит от того, когда начался ремонт и когда были поставлены остальные (исправные) элементы. Таким образом, и процесс и, как следствие, СМО являются марковскими.

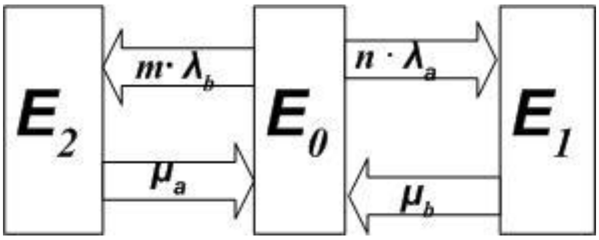


Рисунок 1.3- Структурная схема возможных переходов из одного состояния в другое для заданного примера простой марковской СМО

Показательное распределение времени работы элемента и показательное распределение времени ремонта - существенные условия, без которых процесс не был бы марковским. Предположим, что время исправной работы элемента распределено не по показательному закону, а по закону равномерной плотности на участке (t_l, t_2). Это значит, что каждый элемент с гарантией работает время t_l, а на участке от t_l до t_2 может выйти из строя в любой момент с одинаковой плотностью вероятности. Предположим, что в какой-то момент времени t_0 элемент работает исправно. Очевидно, вероятность того, что элемент выйдет из строя на каком-то участке времени в будущем, зависит от того, насколько давно поставлен элемент, т. е. зависит от предыстории, и процесс не будет марковским. Аналогично обстоит дело и с распределением времени ремонта t_p: если оно не показательное и элемент в момент t_0 ремонтируется, то оставшееся время ремонта зависит от того, когда он начался; процесс снова не будет марковским. Аналитическому исследованию поддаются только частные типы немарковских СМО — полумарковские, линейчатые и др.

СМО делят на однофазные и *многофазные* (при последовательном процессе обслуживания заявки несколькими приборами).

Если обслуженная заявка покидает СМО, то СМО называют *открытыми*, а если снова поступает на обслуживание в СМО, то *замкнутыми.*

Рассмотренные выше СМО являются *одиночными*, а сложные комбинации из них образуют *сети СМО*.

1.3 Математическое описание потоков событий

Для любой СМО основным фактором, определяющим протекающие в ней процессы, является поток заявок, поступающих на вход СМО. Важно также уметь описывать потоки на входах каналов обслуживания и выходной поток обслуженных заявок. В этом разделе приведено математическое описание различных потоков событий.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

*Плотностью (*интенсивностью*) потока* называется среднее число событий в единицу времени.

Регулярным потоком событий называется поток, в котором события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени

$$\tau_i = t_i - t_{i-1} = T = const \,. \qquad (1.2)$$

Рекуррентным потоком является поток, для которого все функции распределения интервалов между событиями совпадают:

$$F_i(\tau) = F(\tau), \qquad (1.3)$$

то есть все интервалы между событиями подчиняются одному и тому же закону распределения.

Поток событий называется потоком *без последействия*, если вероятность появления на любом участке времени того или другого числа событий не зависит от того, какое число событий попало на другие, не пересекающиеся с данным участки. Например, поток отказов при испытании партии невосстанавливаемых однотипных изделий является потоком *без последействия.* Поток отказов при испытании партии восстанавливаемых однотипных изделий может оказаться потоком с *последействием,* так как при восстановлении испытываемых изделий могут ухудшится показатели безотказности, например уменьшится средняя наработка на отказ. В этом случае вероятность отказа на данном отрезке времени увеличивается с ростом числа отказов (и восстановлений) на предшествующих отрезках времени. Поток деталей, сходящих с конвейера также, является потоком с последствием (детали выходят не раньше, чем истечёт предшествующий интервал времени обслуживания $\tau_{обсл}$).

Поток событий называется ординарным, если вероятность появления на элементарном участке *Δ t* двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Стационарность потока означает, что вероятность попадания любых событий в промежуток от времени t до времени $t+\Delta t$ не зависит от t, а зависит только от длины участка Δt.

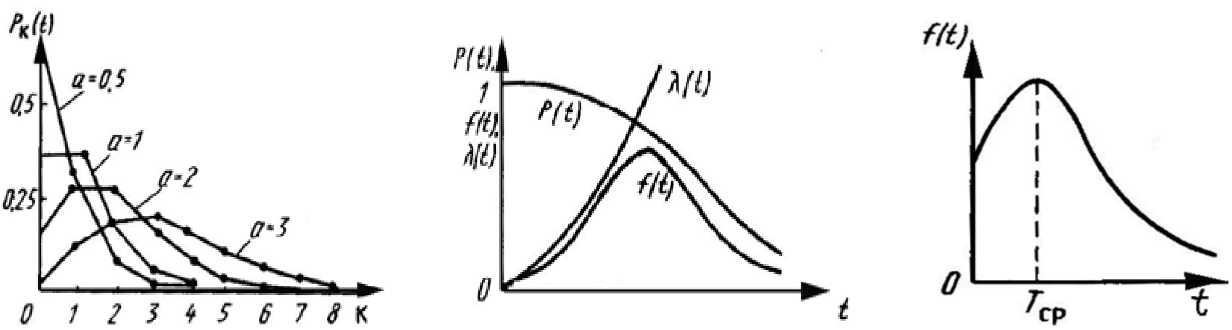
Ординарный поток событий без последействия называется пуассоновским.

Дискретная случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$, а вероятность того, что $X = k$, выражается формулой

$$P(X= k)= P_k = (a^k e^{-a})/ k! \ , \qquad (1.4)$$

где $a > 0$ — параметр закона Пуассона.

Математическое *ожидание* и дисперсия случайной величины X,



а) б)

Рисунок 1.4- Распределения, используемые при расчётах СМО и надёжности: *а* - распределение Пуассона при различных значениях параметра *а* (математического ожидание случайной величины *k*); *б* - зависимости вероятности безотказной работы *P*(*t*), интенсивности отказов *λ*(*t*) и частоты отказов *f*(*t*) для нормального распределения времени безотказной работы; *в* - зависимость частоты отказов *f*(*t*) для усечённого нормального распределения времени безотказной работы [13]

распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона а:

$$m_x = a; \ D_x = a. \qquad (1.5)$$

Вид распределение Пуассона при различных значениях параметра *а* показан на рисунке 1.4, *а*.

Если события образуют *пуассоновский* поток, то число событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0+\tau)$, распределено по закону Пуассона (1.4), где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt \ ; \qquad (1.6)$$

Если события образуют *пуассоновский* поток, то число событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0+\tau)$, распределено по закону

Пуассона (1.4), где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda (t)dt\,; \tag{1.5}$$

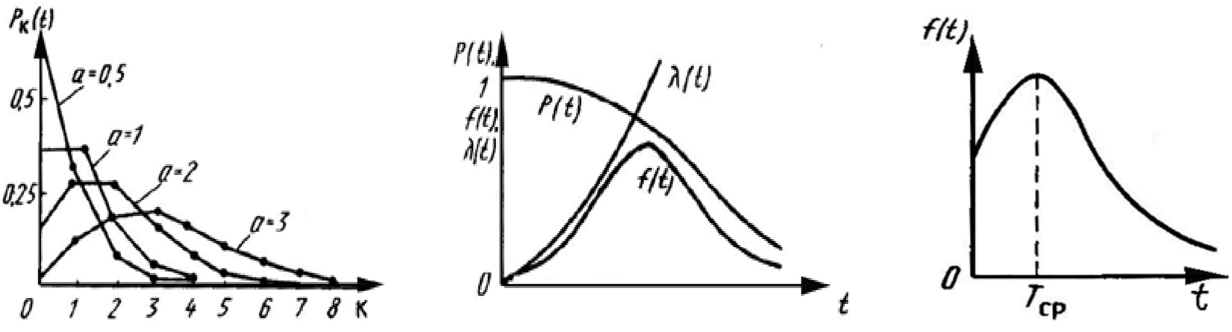
$\lambda\ (t)$- плотность потока.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона а:

$$m_x = a;\ D_x = a. \tag{1.6}$$

Вид *распределения*Пуассона при различных значениях параметра a показан на рисунке 1.4, *а*.

Если $\lambda\ (t) = const$, *пуассоновский поток* называется «стационар-



а) *б)*

Рисунок 1.4- Распределения, используемые при расчётах СМО и надёжности: *а* - распределение Пуассона при различных значениях параметра *a* (математического ожидание случайной величины k); *б* - зависимости вероятности безотказной работы $P(t)$, интенсивности отказов $\lambda(t)$ и частоты отказов $f(t)$ для нормального распределения времени безотказной работы; *в* - зависимость частоты отказов $f(t)$ для усечённого нормального распределения времени безотказной работы [13]

ным пуассоновским» или *простейшим потоком*. Распределение Пуассона используют для оценки надёжности ремонтируемых изделий с простейшим потоком отказов.

Среднее число *событий* (отказов) в интервале [0 .. t] для простейшего потока

$$a = \lambda \cdot t. \tag{1.7}$$

Параметр *простейшего* потока отказов

$$\omega(t) = \lambda, \tag{1.8}$$

то есть *совпадает* с интенсивностью отказов экспоненциального распределения вероятности безотказной работы. При экспоненциальном распределении вероятности безотказной работы

$$P(k=0, t)= P_0(t) = (a^k e^{-a})/ k! = e^{-a} = e^{-\lambda \cdot t}$$

расстояние *T* между *двумя* соседними событиями есть непрерывная случайная величина, распределенная по показательному закону, с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} = 0 \text{ при } t < 0, \\ = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \text{ при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

В теории надёжности *T* это наработка на отказ для восстанавливаемых и наработка до отказа для не восстанавливаемых изделий, $\lambda(t)$ называют интенсивностью отказов, а $f(t)$ - частотой отказов.

При показательном законе наработки на отказ поток отказов системы, определяемый как сумма *N* простейших потоков отказов элементов системы, также является простейшим и имеет суммарную интенсивность

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i. \quad (1.10)$$

При этом должно выполняться условие, что доля каждого элемента в формировании общего потока отказов мала [13].

Для случайной величины *T*, распределенной по показательному закону,

$$m_t = 1/\lambda; \; D_t = 1/\lambda^2. \quad (1.11)$$

Пример 1.1 [2] Транспортное средство проходит техническое обслуживание (ТО). Число неисправностей, обнаруженных во время ТО, распределяется по закону Пуассона с параметром *a.* Если неисправностей не обнаружено, то ТО продолжается в среднем 2 часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем ещё пол часа. Если обнаружено больше двух неисправностей, то транспортное средство ставится на профилактический ремонт в среднем на четыре часа. Определить закон распределения среднего времени ТО *T* транспортного средства и его математическое ожидание *M[T]*.

Решение.

Вероятность того, что $X = k$, для закона Пуассона выражается формулой (1.4)

$$P(X= k, t)= P_k(k, t) = (a^k e^{-a})/ k!.$$

Учтём также, что

$$P(X= k_i >2, t=6)=1- P(k_i =0, t=2) - P(k_i =1, t=2{,}5) - P(k_i =2, t=3).$$

Определим зависимость $P(X= k_i, t=t_i)$ в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2- Расчёты к примеру 1.1

t_i, *час*	2	2,5	3	6
k_i	0	1	2	$m_i > 2$
$P(X=k_i, t=t_i)$	e^{-a}	ae^{-a}	$e^{-a}a^2/2$	$1-e^{-a}(1+a+a^2/2)$

Определим математическое ожидание $M[T]$ среднего времени ТО T транспортного средства :

$$M[T]=\sum_{0}^{3} t_i \cdot P(X=k_i, t=t_i)=e^{-a}(2+2{,}5a+3a^2/2)+6[1-e^{-a}(1+a+a^2/2)]=$$

$$=6-e^{-a}(4+3{,}5a+1{,}5a^2).$$

Ответ: $M[T]=6-e^{-a}(4+3{,}5a+1{,}5a^2)$.

Пример 1.2 Радиолокационная станция (РЛС) за 10000 часов работы в среднем выходит из строя 10 раз. Определить вероятность выхода из строя РЛС за 100 часов работы, если отказы распределены по закону Пуассона.

Решение.

По формуле 1.7 среднее число событий (отказов) в интервале [0 .. t] для простейшего потока

$$a=\lambda \cdot t.$$

Откуда следует, что

$$\lambda = a(t)/t = a(t=10000)/10000 = a(t=100)/100$$

или

$$a(t=100)=a(t=10000)/100=10/100=0{,}1.$$

По формуле 1.4 для закона Пуассона определим вероятность того, что за время $t=100$ часов не произойдёт ни одного отказа ($X=m=0$)

$$P(X=k=0, a=0{,}1)=(a^k e^{-a})/k! = (0{,}1^0 e^{-0{,}1})/0! = e^{-0{,}1}.$$

Определим вероятность выхода из строя РЛС за 100 часов работы

$$Q=1-P(X=k=0, a=0{,}1)=1-e^{-0{,}1}=0{,}0958.$$

Ответ: $Q=0{,}0958$.

Плотность распределения наработки до отказа $f(t)$ потока отказов на отрезке времени где постепенные (износовые) отказы происходят намного чаще чем внезапные отказы в большинстве практических ситуаций хорошо описывается нормальным законом- законом Гаусса (*рисунок 1.4, б*). При отрицательных значениях величины наработки до отказа t плотность распределения наработки до отказа $f(t)$ равна нулю

$$f(t)=0, \quad t \le 0; \qquad (1.12)$$

В этом случае количественные показатели надёжности имеет смысл рассматривать только при усеченном гауссовском распределении, когда плотность распределения наработки до отказа равна [14]

$$f(t) = c \cdot \exp\left[-\frac{(t - T_0)^2}{2\sigma^2} \right], \qquad (1.13)$$

где σ^2 и T_0 – соответственно дисперсия и среднее значение (математическое ожидание) случайной величины t, а c - постоянная усеченного нормального распределения, равная

$$c = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sigma\left(1 + \Phi\left[T_0 / \left(\sigma\sqrt{2}\right) \right]\right)}, \qquad (1.14)$$

которая находится из условия нормировки $\int\limits_0^\infty f(t)dt = 1;$

$\Phi\left(T_0 / \left(\sigma\sqrt{2}\right)\right) = \Phi(t)$ - табулированные значения интеграла вероятности (нормированной функции Лапласа), приведённые в таблице 1.3:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \exp\left(-t^2/2\right) dt. \qquad (1.15)$$

Таблица 1.3 - Интегральная функция Лапласа $P_Д(t) = 2\Phi(t)$ [11, 14]

$\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ и $\Phi(-t) = -\Phi(t)$

t	**$P_Д(t)$**	**t**	**$P_Д(t)$**	**t**	**$P_Д(t)$**
0.00	0.0000	0.75	0.5467	1.50	0.8864
0.05	0.0399	0.80	0.5763	1.55	0.8789
0.10	0.0797	0.85	0.6047	1.60	0.8904
0.15	0.1192	0.90	0.6319	1.65	0.9011
0.20	0.1585	0.95	0.6579	1.70	0.9109
0.25	0.1974	1.00	0.6827	1.75	0.9199
0.30	0.2357	1.05	0.7063	1.80	0.9281
0.35	0.2737	1.10	0.7287	1.85	0.9357
0.40	0.3108	1.15	0.7419	1.90	0.9426
0.45	0.3473	1.20	0.7699	1.95	0.9488
0.50	0.3829	1.25	0.7887	2.00	0.9545
0.55	0.4177	1.30	0.8064	2.25	0.9756
0.60	0.4515	1.35	0.8230	2.50	0.9876
0.65	0.4843	1.40	0.8385	3.00	0.9973
0.70	0.5161	1.45	0.8529	4.00	0.9999

Нормированная функция Лапласа является нечётной.

$$\Phi(-t) = -\Phi(t). \tag{1.16}$$

Вероятность безотказной работы системы определяется по формуле

$$P(t) = \frac{1-\Phi\left[(t-T_0)/(\sigma\sqrt{2})\right]}{1+\Phi\left[T_0/(\sigma\sqrt{2})\right]}. \tag{1.17}$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$, с учётом выражений (1.13) и (1.17), определяют по формуле

$$\lambda(t) = f(t)/P(t) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma}\cdot\frac{\exp\left[-(t-T_0)^2/(2\sigma^2)\right]}{1-\Phi\left[(t-T_0)/(\sigma\sqrt{2})\right]}. \tag{1.18}$$

Среднюю наработку до отказа определяют по формуле [14]

$$T_{1\text{стат ус}} = T_0 + \sigma\cdot f_1(T_0\ /\ \sigma), \tag{1.19}$$

где $f_1(T_0 / \sigma)$ имеет тот же физический смысл, что и $f(t)$ [см. формулу (1.13)].

Непосредственно нормальный закон распределения для расчета показателей безотказности может применяться только в случае, если

$$T_0 >> \sigma. \tag{1.20}$$

В этом случае постоянная c и средняя наработка до отказа $T_{1\text{стат}}$ равны

$$c = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}), \quad T_{1\text{стат}} = T_0. \tag{1.21}$$

Безусловная вероятность отказа изделия на временном интервале от t_1 до t_2 в этом случае равна [11]

$$Q(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \left[1/(\sigma\sqrt{2\pi})\right]\int_{t_1}^{t_2}\exp\left(\frac{-(t_2-T_0)^2}{2\sigma^2}\right)dt = \\ = \Phi\left[(t_2-T_0)/\sigma\right]-\Phi\left[(t_1-T_0)/\sigma\right]. \tag{1.22}$$

Если условие (1.20) не выполняется, то нормальная плотность распределения (1.13) не является односторонней, т.е. она отлична от нуля и при $t < 0$. При $T_{1\text{стат}} >> \sigma$ этот недостаток практически не сказывается, так как в этом случае частью кривой распределения при $t < 0$ можно пренебречь. Однако если условие (3.20) не выполняется, то использование нормального распределения может привести к заметным погрешностям. Поэтому на практике используют усеченное нормальное распределение (*рисунок 1.4, в*). Для этого отсекают часть кривой распределения при $t < 0$ и вводят с нормирующий множитель c, рассчитываемый по формуле (1.14) чтобы сохранить условия нормирования плотности вероятности [11].

Пример 1. 3[14].

Известно, что исследуемая неремонтируемая РЭС имеет нормальное распределение наработки до отказа с параметрами $T_0 = 520$ *ч и* $\sigma = 150$ *ч.* Требуется определить вероятность безотказной работы РЭС при наработке t = *400 ч* и ее интенсивность отказов.

Решение.

Из (1.17) следует, что

$$P(t)=\frac{1-\Phi\left[(t-T_0)/(\sigma\sqrt{2})\right]}{1+\Phi\left[T_0/(\sigma\sqrt{2})\right]}=\frac{1-\Phi\left[(400-520)/(150\sqrt{2})\right]}{1+\Phi\left[520/(150\sqrt{2})\right]}=$$

$$=(1+0{,}2157)/(1+0{,}4229)=0{,}814.$$

Значения функций Лапласа $\Phi(\boldsymbol{t})$ =0,5$\cdot P_Д(t)$ находим из *таблицы 7.6,* приведенной в разделе 7: Ф(0,5657) = 0,2157 и Ф(2,4513) = 0,4929. Знак плюс в числителе $P(t)$ появился потому, что функция $\Phi(t)$ нечетная, т.е. Ф(-0,5657) = -0,2157. Из (1.18) следует, что

$$\lambda(t)=f(t)/P(t)=\frac{\left(\sqrt{2/\pi}/\sigma\right)\cdot\exp\left[-(t-T_0)^2/(2\sigma^2)\right]}{1-\Phi\left[(t-T_0)/(\sigma\sqrt{2})\right]}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2/\pi}/150\right)\cdot\exp\left[-(400-520)^2/(2\cdot150^2)\right]}{1-\Phi\left[(400-520)/(150\sqrt{2})\right]}=$$

$$=(0{,}7981\cdot0{,}7262)/(150\cdot0{,}7843)=4{,}926\cdot10^{-3}\ 1/\text{час}.$$

Потоком Пальма (потоком с ограниченным последействием) называется ординарный поток событий, у которого промежутки между соседними событиями представляют собой независимые случайные величины (рисунок 5, а).

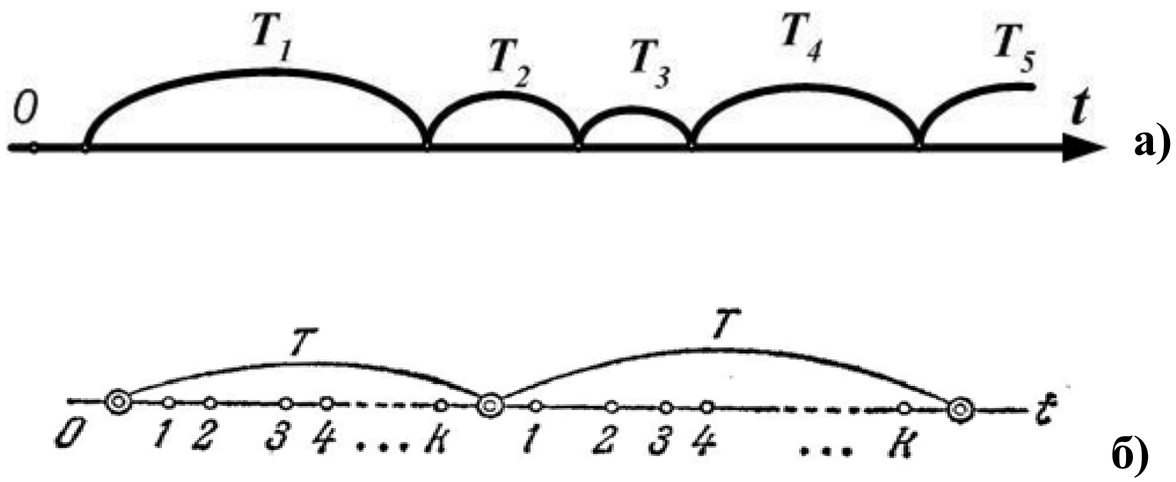


Рисунок 1.5- Потоки Пальма (а) и Эрланга k-го порядка (б).

Если эти случайные величины распределены одинаково, то поток Пальма называется *стационарным*. Рассмотренный ранее простейший поток, то есть стационарный пуассоновский поток, когда $\lambda(t)=const$, является потоком Пальма. Нестационарный же пуассоновский поток потоком Пальма не является, поскольку в нём закон распределения промежутков между событиями зависит от места $t=t_0$, где этот промежуток начинается, так как интенсивность отказов $\lambda(t)$ зависит от времени t. Докажем это. Пусть, например, интенсивность отказов нестационарного пуассоновского потока линейно возрастает со временем по закону

$$\lambda(t)=a+b\cdot t\,. \tag{1.23}$$

Тогда плотность распределения времени между событиями нестационарного пуассоновского потока в интервале $t_0 \dots t$ не зависит от предшествующих моменту t_0 событий, но зависит от величины t_0 и равна [6]

$$f(t_0 \dots t)=\left[a+b(t_0+t)\right]\exp\left(-at-b\cdot t_0\cdot t-b\cdot t^2/2\right). \tag{1.24}$$

Начало промежутка времени между событиями нестационарного пуассоновского потока T_{k+1} совпадает с концом соседнего промежутка T_k, значит длины этих промежутков зависимы.

Рассмотрим пример потока Пальма. Пусть интегральная схема (ИС) в вычислителе работает до отказа, после наступления которого она мгновенно заменяется новой ИС. Отдельные экземпляры ИС выходят из строя независимо друг от друга.В этом случае поток отказов является потоком Пальма. Если при этом плотность времени работы ИС подчиняется показательному закону, то поток Пальма переходит в простейший поток.

Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков СМО. Если на систему поступает какой-то поток заявок, то он этой системой разделяется на два: поток обслуженных и поток необслуженных заявок. Поток необслуженных заявок часто поступает на какую-либо другую СМО, поэтому представляет интерес изучить его свойства. Основной в теории выходных потоков является *теорема Пальма,* которую мы сформулируем без доказательства.

Пусть на СМО поступает *поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ (не обслуживается), Если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток необслуженных заявок является также потоком типа Пальма.*

В частности, если входной поток заявок будет простейшим, то поток необслуженных заявок, не будучи простейшим, будет все же иметь ограниченное последействие, то есть *потоком Пальма* [6].

Большую роль в создании ТМО на первичном этапе её развития сыграл датский учёный и сотрудник Копенгагенской телефонной компании А. К. Эрланг (1878- 1929). Некоторые из его работ, в частности, были посвящены математическому описанию потоков заявок в телефонии. Один вид потоков событий, а также некоторые уравнения, описывающие СМО названы именем Эрланга [1].

Потоком Эрланга k-го порядка называется поток событий, получаемый из простейшего путем операции «разрежения», когда выбрасывают из потока k точек подряд, а сохраняют только *(k+1)-ю* (рисунок 1.5, б). Простейший поток есть поток Эрланга нулевого порядка [2]. Поток Эрланга является частным случаем потока Пальма .

Промежуток *времени T* между двумя соседними событиями в потоке Эрланга *k-го* порядка есть неотрицательная случайная величина с плотностью распределения

$$f_k(t) = \lambda (\lambda t)^k exp(-\lambda t) / k! \qquad (t > 0) \qquad (1.25)$$

(закон Эрланга) и функцией распределения

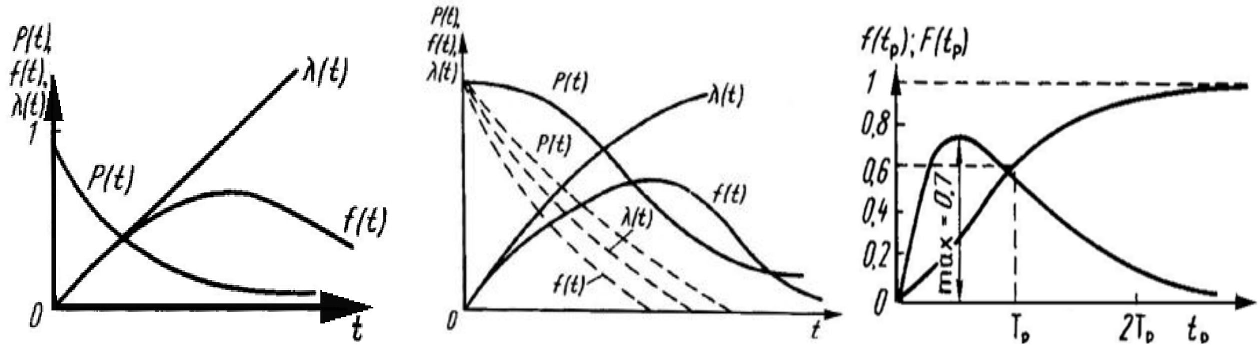
$$F_k(t) = P(T < t) = 1 - exp(-\lambda t) \sum_{s=0}^{k} (\lambda t)^s / s! \qquad (t > 0). \qquad (1.26)$$

При $k = 0$ (простейший поток) получаем

$$f_0(t) = \lambda\, exp(-\lambda t) \qquad (t > 0) \qquad (1.27)$$

(показательный закон).

Как плотность распределения $f_k(t)$, так и функцию распределения $F_k(t)$ для закона Эрланга любого порядка можно вычислять, пользуясь таблицами пуассоновского распределения, приведёнными в справочной литературе, пример в [2]. При увеличении порядка k потока Эрланга (и одновременном уменьшении масштаба по оси $0,t$ делением на $k+1$) поток Эрланга приближается к регулярному.



а) б) в)

Рисунок.1.6 -Зависимости вероятности безотказной работы $P(t)$, интенсивности отказов $\lambda(t)$, частоты отказов $f(t)$ и накопленной частоты отказов $F(t_р)$ [4]:

а - при распределении времени безотказной работы *t* по закону Релея;

б - при распределении времени безотказной работы *t* по закону Вейбулла: – – – $b < 1$, ——— $b > 1$; *в* - при распределении времени ремонта *t*р по закону Эрланга 1-го порядка.

В случаях, когда поиск отказов проводится вручную, закон распределения времени текущего ремонта отличен от показательного закона (1.9) и, как правило, время ремонта $t_р$ распределено по закону Эрланга 1-го порядка (*рисунок 1.6, в*) [11]:

$$f(t_р) = (4 \cdot t_р / T_р^2) \cdot \exp(-2 \cdot t_р / T_р); \qquad (1.26)$$

$$F(t_р) = 1 - (1 + 2 \cdot t_р / T_р) \cdot \exp(-2 \cdot t_р / T_р), \qquad (1.27)$$

где $T_р$ – среднее время ремонта.

Для распределения Эрланга среднеквадратическое отклонение $\sigma_р \approx 0{,}7\ T_р$.

Если аппаратура модульного типа и ремонт осуществляется заменой модуля, то имеет место показательный закон (1.9) распределения времени текущего ремонта

$$f(t_р) = (1 / T_р) \cdot \exp(-t_р / T_р); \qquad (1.28)$$

$$F(t_р) = 1 - \exp(-t_р / T_р), \qquad (1.29)$$

Для показательного закона распределения среднеквадратическое отклонение $\sigma_р = T_р$.

Промежуток времени T между двумя соседними событиями в *потоке Релея* есть неотрицательная случайная величина с плотностью распределения

$$f(t) = (t / C^2) \cdot \exp[- t^2 / 2C^2]. \qquad (1.30)$$

Распределение времени безотказной работы по закону Релея (*рисунок 1.6, а*) достаточно полно описывает поведение ряда изделий с явно выраженным эффектом старения и износа. Зависимости вероятности безотказной работы $P(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$ для этого закона определяются выражениями [11]:

$$P(t) = \exp[- t^2 / 2C^2]; \qquad (1.31)$$

$$\lambda(t) = t / C^2; \qquad (1.32)$$

$$T_1 = C/\sqrt{0{,}5\pi}, \qquad (1.33)$$

где C – параметр распределения.

Промежуток времени T между двумя соседними событиями в *потоке Вейбулла* (*рисунок 1.6, б*) есть неотрицательная случайная величина с плотностью распределения

$$f(t) = \lambda_0 \cdot b \cdot t^{\,b-1} \cdot \exp[-\lambda_0 \cdot t^b]. \qquad (1.34)$$

Распределение Вейбулла достаточно хорошо описывает распределение отказов в объектах, содержащих большое количество однотипных неремонтируемых элементов (ЭВП, полупроводниковые приборы, микромодули и др.). Зависимости вероятности безотказной работы $P(t)$ и интенсивности отказов$\lambda(t)$ для этого закона определяются выражениями [11]:

$$P(t) = \exp[-\lambda_0 \cdot t^b], \quad t \geq 0; \;\; \lambda_0 > 0; \;\; b > 0; \qquad (1.35)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 \cdot b \cdot t^{\,b-1}; \qquad (1.36)$$

$$T_1 = \lambda_0^{-1/b} \cdot \Gamma(1 + 1/b), \qquad (1.37)$$

где $\Gamma(1 + 1 / b)$ - табулированная полная гамма-функция.

Часто поведение РЭА в начале эксплуатации хорошо описывается законом распределения *Вейбулла* с $b < 1$, на основном участке времени эксплуатации- показательным распределением, а на третьем участке постепенных отказов - нормальным распределением, распределением Релея или распределением Вейбулла с $b > 1$. Для стратегии ТО по состоянию особенно важно определение поведения РЭА в начале третьего участка эксплуатации.

Как было *доказано* в разделе 1.2 показательное распределение времени работы элемента и показательное распределение времени ремонта - существенные условия, без которых процесс не был бы марковским.

Поэтому СМО с распределением времени работы или времени ремонта по законам Вейбулла, Гаусса и Релея не являются марковскими и при их математическом моделировании возникают значительные трудности. При этих распределениях вероятность того, что элемент выйдет из строя на каком-то участке времени в будущем, зависит от того, насколько давно поставлен элемент, т. е. зависит от предыстории. Трудности моделирования немарковских СМО могут быть преодолены при использовании метода статистических испытаний математических моделей СМО (метода Монте-Карло). В этом методе используются компьютерные модели с генераторами случайных чисел, причём каждый из генераторов может выдавать числа в случайной временной последовательности, соответствующей заданному вероятностному распределению. К сожалению, в настоящее время не так много компьютерных систем моделирования, использующих метод Монте-Карло, но такие системы есть (например, система схемотехнического моделирования Micro- Cap 7.0). Как уже упоминалось, аналитическому исследованию поддаются только частные типы немарковских СМО - полумарковские, линейчатые и др.

Следует отметить, что характеристики СМО слабо зависят от вида закона распределения времени обслуживания, а зависят, главным образом, от его среднего значения. Поэтому в ТМО чаще всего пользуются допущением, что время обслуживания распределено по показательному закону

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

2.1 Общие сведения о применении теории массового обслуживания для определения статистических характеристик технического обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) изучает статистические характеристики систем массового обслуживания. **Система массового обслуживания** (СМО) – это совокупность однородных обслуживающих устройств (приборов, мастерских и т.д.), называемых каналами обслуживания. Примерами СМО могут служить сборочные цеха, ремонтные мастерские, инженерно-авиационная служба, восстанавливаемая резервированная аппаратура, телефонные станции, все виды транспорта (вместе с билетными кассами) и т.д.

Основными элементами СМО, определяющими их пропускную способность, являются: число каналов обслуживания, быстродействие каждого канала и поток событий (заявок на обслуживание, поток обслуженных заявок и т.д.).

По признаку потерь заявок на обслуживание СМО подразделяются на три типа: **с отказами, с ожиданием и смешанного типа**.

В **СМО с отказами** заявки обслуживаются немедленно, если каналы свободны, или получают отказ и теряются, если все каналы заняты. Пример такой СМО – телефонная сеть. В **СМО с ожиданием** (например, в системах ремонта техники) все заявки выстраиваются в очередь, если каналы заняты. В **СМО смешанного типа** имеются **ограничения на время пребывания заявки в системе или на длину очереди**. При невыполнении требуемого ограничения заявка покидает СМО необслуженной.

По числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки, СМО делят **на одноканальные и многоканальные**.

Если обслуженная заявка покидает СМО, то СМО называют **открытыми**, а если снова поступает на обслуживание в СМО, то **замкнутыми**.

При выполнении практической работы мы исследуем **замкнутую многоканальную СМО с ожиданием**, наиболее подходящую для описания процесса эксплуатации техники, в частности, для расчета характеристик ТО и показателей надежности резервируемой аппаратуры в зависимости от числа каналов и их производительности.

Пусть СМО с ожиданием содержит n работающих приборов и r каналов обслуживания. При одном отказе прибора получается одна заявка. Поток отказов порождает поток заявок, которые немедленно удовлетворяются обслуживанием, а когда все r каналов обслуживания заняты, заявки выстраиваются в очередь. В этом случае $r \le k < n$, где k – число отказов приборов. Требуется найти вероятности пребывания системы в состоянии $P_k(t)$ в любой момент времени t для различных значений k. Вероятность $P_k(t)$ − это вероятность состояния системы, при котором k приборов отказали, из них r приборов обслуживаются, а остальные $(k – r)$ стоят в очереди. Найденные значения $P_k(t)$ позволяют рассчитать все критерии, характеризующие степень удовлетворения потока заявок и степень использования каналов обслуживания. Предполагается, что вероятность безотказной работы любого прибора изменяется во времени по экспоненциальному закону $P(t) = \exp(–\lambda t)$, причём интенсивность отказов (поступления заявок) λ не зависит от времени. Если до момента t прибор был исправен, то вероятность отказа $P_{ОТК}(\Delta t)$ в малом промежутке времени Δt, следующем за временем t, для нашего случая определяется приближенным выражением:

$$P_{ОТК}(\Delta t) \approx \lambda\Delta t, \text{ при } \lambda\Delta t << 1. \qquad (2.1)$$

По аналогии определяется вероятность завершения обслуживания заявки к моменту $t + \Delta t$, поступившей в момент t на обслуживание:

$$P_{ОБС}(\Delta t) \approx \mu\Delta t, \text{ при } \mu\Delta t << 1. \qquad (2.2)$$

В (2.2) μ − это интенсивность восстановления (обслуживания, ремонта) в одном канале. Граф изменения состояний замкнутой многоканальной СМО с ожиданием представлен на рисунке 2.1.

Рисунок 2.1 – Граф изменения состояний замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Под термином **техническое состояние** E_k понимают совокупность подверженных изменению в процессе производства или эксплуатации свойств объекта, характеризуемую в определённый момент признаками, установленными технической документацией.

На рисунке 2.1 введены следующие обозначения:

- E_k – техническое состояние СМО, при котором k из n работающих приборов находятся в состоянии неработоспособности;
- r – число каналов обслуживания;
- λ [$ч^{-1}$] – интенсивность поступления заявок, равная интенсивности отказов одного прибора;
- μ [$ч^{-1}$] – интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале.

Указанная СМО может использоваться как система технического обслуживания не только приборов, но и транспорта (парки самолетов, автомобилей и т.п.).

Академик А.Н.Колмогоров сформулировал инженерное правило составления дифференциальных уравнений по виду графа или по виду схемы состояний [1, 4]:

«Производная от вероятности пребывания системы в любой момент времени в состоянии k равна алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов в k-ое состояние (или из k-ого состояния) на вероятность того состояния, откуда совершается переход в k-ое состояние. Причем, тем слагаемым, которым соответствуют уходящие стрелки из k-ого состояния, приписывается знак «минус», а входящим – «плюс».

Анализ графа (рисунок 2.1) позволяет вывести дифференциальное уравнение для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_k\ t}{dt} = \ n-k+1\ \cdot\lambda\cdot P_{k-1}\ t\ -\left[\ n-k\ \cdot\lambda+k\cdot\mu\right]\cdot P_k\ t\ +\ k+1\ \cdot\mu\cdot P_{k+1}\ t\ . \tag{2.3}$$

Для установившегося режима $\frac{dP_k\ t}{dt}=0$, так как P_k в этом случае не меняется во времени, и уравнение для вероятности состояний примет вид:

$$(n-k+1)\cdot\lambda\cdot P_{k-1} + [(n-k)\cdot\lambda + k\cdot\mu]\cdot P_k + (k+1)\cdot\mu\cdot P_{k+1} = 0. \tag{2.4}$$

Решение уравнения для вероятностей в этом случае дает результат:

$$P_k = A_k\cdot P_0, \tag{2.5}$$

где P_0 – вероятность того, что работают все приборы.

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_k A_k}; \tag{2.6}$$

$$A_k = \frac{n!}{2^{k-2}\cdot 2!\cdot (n-k)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k. \qquad (2.7)$$

Для проверки правильности расчета P_k используется нормировочное отношение:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1. \qquad (2.8)$$

Суммарная погрешность расчета P_k находится из выражения:

$$\delta_\Sigma = 1 - \sum_{k=0}^{n} P_k\,. \qquad (2.9)$$

Полученные выражения для P_k (вероятностей пребывание системы в состоянии k) позволяют с помощью схемы для определения статических характеристик СМО, изображенной на рисунке 2.2, определять эти характеристики [1]:

$$\underbrace{\overbrace{S_0\ S_1\ S_2 \ldots\ S_{k-1}\ S_k\ S_{k+1} \ldots\ S_2}^{\bar{Z}} \ldots\ \overbrace{S_n}^{N_{ож}}}_{K}$$

Рисунок 2.2 – Схема определения статических характеристик СМО

а) среднее количество заявок в каналах обслуживания, то есть среднее количество каналов занятых на ремонте:

$$\bar{Z} = \sum_{k=0}^{r} k\cdot P_k + \sum_{k=r+1}^{n} r\cdot P_k\,, \qquad (2.10)$$

где первое слагаемое характеризует отсутствие очереди, а второе – очередь;

б) пропускная способность:

$$M = \frac{\bar{Z}}{T_{\text{В}}} = \bar{Z}\cdot\mu, \qquad (2.11)$$

где $T_{\text{В}}$ − среднее время восстановления одного прибора, величина обратная интенсивности восстановления;

в) среднее число заявок, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и в очереди на обслуживание):

$$K = \sum_{k=0}^{n} k\cdot P_k = n - \bar{Z}\cdot\frac{\mu}{\lambda}; \qquad (2.12)$$

г) среднее число заявок, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = \sum_{k=r+1}^{n} (k - r) \cdot P_k = n - \overline{Z} \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right); \qquad (2.13)$$

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок:

$$R_{\text{ПР}} = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P_k\,; \qquad (2.14)$$

е) среднее относительное время простоя каждого канала СМО из-за отсутствия заявок:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{R_{\text{ПР}}}{r} \ \text{при}\ r > 1; \qquad (2.15)$$

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявок в очереди на обслуживание:

$$T_{\text{ОЖ}} = \frac{N_{\text{ОЖ}}}{n}\,; \qquad (2.16)$$

з) среднее относительное значение времени пребывание заявок в очереди и в канале обслуживания:

$$T_{\text{ОБС}} = \frac{K}{n}; \qquad (2.17)$$

и) при определении минимального количества каналов обслуживания $r_{\min}$, обеспечивающего отсутствие очереди на обслуживание, используют неравенство:

$$r_{\min} \geq \frac{n \cdot \lambda}{\lambda + \mu} = n \cdot K_{\text{П}} = n \cdot (1 - K_{\text{Г}}), \qquad (2.18)$$

где $K_{\text{П}}$ и $K_{\text{Г}}$ – коэффициенты простоя и готовности, соответственно.

2.2 Пример использования ТМО для расчета характеристик технического обслуживания замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Дана СМО, состоящая из n = 9 работающих приборов и r = 3 каналов обслуживания. Интенсивность поступления заявок, равная интенсивности отказов одного прибора, λ = 0.1671 [ч$^{-1}$], а интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале μ = 0.3 [ч$^{-1}$]. Требуется определить:

а) среднее количество заявок $\overline{Z}$, занятых в каналах обслуживания, то есть занятых каналов на ремонте;

б) пропускную способность M;

в) среднее число заявок K, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и стоящих в очереди на обслуживание);

г) среднее число заявок $N_{ОЖ}$, находящихся в очереди на обслуживание;

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок $R_{ПР}$;

е) среднее относительное время простоя каждого канала обслуживания из-за отсутствия заявок $T_{ПР}$;

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди на обслуживание $T_{ОЖ}$;

з) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди и в канале обслуживания $T_{ОБС}$;

и) потребное количество каналов, обеспечивающее отсутствие очереди $r_{ОПТ}$.

Решение:

а) находим вспомогательные коэффициенты $A_к$ при $1 \le k \le n$:

$$A_к = \frac{n!}{r^{k-r} \cdot r! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k;$$

$A_1 = 7.52$; $A_2 = 11.169$; $A_3 = 14.516$; $A_4 = 16.171$;
$A_5 = 15.012$; $A_6 = 11.149$; $A_7 = 6.21$; $A_8 = 2.306$; $A_9 = 0.428$;

б) определим вспомогательную величину P_0 (вероятность того, что в системе исправно работают все приборы):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} A_k} = 0.012;$$

в) находим вероятность нахождения системы в k-ом состоянии, т.е. в состоянии, когда k приборов отказали ($1 \le k \le n$):

$$P_k = A_k \cdot P_0;$$

$P_1 = 0.088$; $P_2 = 0.131$; $P_3 = 0.17$; $P_4 = 0.189$;
$P_5 = 0.176$; $P_6 = 0.13$; $P_7 = 0.073$; $P_8 = 0.027$; $P_9 = 5.009 \cdot 10^{-3}$.

Проверка правильности решения:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1;$$

г) находим среднее количество заявок в каналах обслуживания:

$$\bar{Z} = \sum_{k=0}^{r} (P_k \cdot k) + \sum_{k=r+1}^{n} r \cdot P_k; \quad \bar{Z} = 2.658;$$

д) находим пропускную способность M:

$$M = \bar{Z} \cdot \mu; \quad M = 0.797;$$

е) находим среднее количество заявок находящихся в СМО (в каналах и в очереди):

$$K = n - \bar{Z} \cdot \frac{\mu}{\lambda}; \quad K = 4.227;$$

ж) находим среднее количество заявок, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = n - z \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right); \; N_{\text{ОЖ}} = 1.569;$$

з) находим среднее количество простаивающих каналов из-за отсутствия заявок:

$$R_{\text{ПР}} = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) \cdot P_k \,; \quad R_{\text{ПР}} = 0.343;$$

и) находим среднее относительное время простоя из-за отсутствия заявок:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{R_{\text{ПР}}}{r}\,; \quad T_{\text{ПР}} = 0.114;$$

к) находим среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди:

$$T_{\text{ОЖ}} = \frac{N_{\text{ОЖ}}}{n}\,; \quad T_{\text{ОЖ}} = 0.174;$$

л) находим среднее относительное значение времени пребывания заявки в СМО:

$$T_{\text{ОБС}} = \frac{K}{n}; \quad T_{\text{ОБС}} = 0.47;$$

м) определяем коэффициент готовности:

$$K_{\Gamma} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,; \quad K_{\Gamma} = 0.642;$$

н) находим потребное количество каналов, необходимых для обеспечения отсутствия очереди:

$$r_{\text{ОПТ}} \geq \frac{n \cdot \lambda}{\lambda + \mu}; \; r_{\text{ОПТ}} \geq 3.22.$$

Принимаем $r_{\text{ОПТ}} = 4$, то есть равным ближайшему целому числу большему 3.22.

2.3 Индивидуальные задания для расчета на практических занятиях характеристик технического обслуживания замкнутой многоканальной СМО с ожиданием

Цель работы: обучить студентов применению методики по определению статистических характеристик технического обслуживания применительно к замкнутой системе массового обслуживания с ожиданием. Методика базируется на использовании программного комплекса MathCAD.

Задание.

Дана СМО, состоящая из n работающих приборов и r каналов обслуживания. Интенсивность поступления заявок (интенсивность отказов одного прибора) равна λ, а интенсивность обслуживания (восстановления или ремонта) в одном канале равна μ.

Определить:

а) среднее количество заявок $\bar{Z}$, занятых в каналах обслуживания, то есть занятых каналов на ремонте;

б) пропускную способность M;

в) среднее число заявок K, находящихся в СМО (как в каналах обслуживания, так и стоящих в очереди на обслуживание);

г) среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание;

д) среднее число простаивающих каналов обслуживания из-за отсутствия заявок $R_{\text{ПР}}$;

е) среднее относительное время простоя каждого канала обслуживания из-за отсутствия заявок $T_{\text{ПР}}$;

ж) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди на обслуживание $T_{\text{ОЖ}}$;

з) среднее относительное значение времени пребывания заявки в очереди и в канале обслуживания $T_{\text{ОБС}}$;

и) потребное количество каналов, обеспечивающее отсутствие очереди $r_{\text{ОПТ}}$.

Численные значения исходных величин для расчёта индивидуальных заданий даны в таблице 2.1 и зависит от номера варианта.

Таблица 2.1 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуальных заданий с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	8	9	10	11	12	11	10	9	8	10
r	2	3	2	3	2	2	3	2	3	2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ, [ч$^{-1}$]	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Выражение для определения λ: $x = \frac{\mu \cdot r}{\lambda \cdot \ n - r}$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.75

2.4 Этапы выполнения индивидуального расчетного задания замкнутой многоканальной СМО с ожиданием и содержание отчета по заданию

1. Подготовиться к ответу на контрольные вопросы и получить у преподавателя допуск к выполнению задания.

2. Используя номер варианта задания, выданный преподавателем, выполнить расчет задания по пункту 2.3.

Содержание отчета по расчетному заданию.

1. Цель работы.

2. Письменный ответ на контрольные вопросы, указанные преподавателем.

3. Расчёт индивидуального задания.

4. Заключение – выводы по результатам работы.

2.5 Перечень контрольных вопросов, которые могут быть заданы во время защиты отчёта по работе

1. Какие разновидности СМО упоминаются в описании к лабораторной работе и в чём особенности этих СМО?

2. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют замкнутую многоканальную СМО с ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?

3. Что изучает теория массового обслуживания?

4. Что называют системой массового обслуживания?

5. Что такое техническое состояние СМО?

3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ И С ОТКАЗАМИ

3.1 Общие сведения о СМО с ожиданием и с отказами

По признаку потерь заявок на обслуживание СМО подразделяются на три типа: с отказами, с ожиданием и смешанного типа. В СМО с отказами заявки обслуживаются немедленно, если каналы свободны, или получат отказ и теряются, если все каналы заняты. В СМО с ожиданием (например, в системах ремонта техники) все заявки выстраиваются в очередь, если каналы заняты. В СМО смешанного типа имеются ограничения на время пребывания заявки в системе или на длину очереди. При невыполнении требуемого ограничения заявка покидает СМО необслуженной. Если обслуженная заявка покидает СМО, то СМО называют открытыми, а если снова поступает на обслуживание в СМО, то замкнутыми. По числу каналов обслуживания, которые могут одновременно обслуживать входные заявки СМО делят на одноканальные и многоканальные.

Для сокращенного наименования СМО используют обозначения вида $A/B/n/m$, где A указывает распределение интервалов между событиями; B – распределение времени обслуживания; n – число каналов; m – количество мест в очереди. Показательное распределение обозначим буквой M; Эрланговского порядка k – E_k; постоянное время обслуживания или регулярный поток – D; распределение обслуживания общего, неконкретизируемого типа – G [3]. В СМО с чистым ожиданием $m = \infty$, а в СМО с отказами $m = 0$. Таким образом, одноканальную СМО с чистым ожиданием, с простейшим потоком на входе, с интенсивностью λ и экспоненциальным временем обслуживания с показателем μ обозначают $M/M/1/\infty$, а многоканальную СМО такого же типа с числом каналов n – $M/M/n/\infty$. Многоканальную СМО с ожиданием смешанного типа, с ограничением на длину очереди, с простейшим потоком на входе и показательным законом распределения времени обслуживания обозначают $M/M/n/m$.

3.2 Общие сведения об открытой одноканальной СМО с ожиданием

Работу открытой одноканальной СМО с ожиданием можно проиллюстрировать с помощью графа переходов системы из одного состояния E_n в другое (рисунок 3.1). Как упоминалось в описании к практическому занятию 2.1, под термином **техническое состояние** E_n понимают совокупность подверженных изменению в процессе производства или эксплуатации свойств объекта, характеризуемую в определённый момент признаками, установленными технической документацией. В техническом состоянии E_n в СМО находится n заявок на обслуживание. На рисунке 3.1стрелки обозначают вероятности переходов системы из одного состояния E_n в другое.

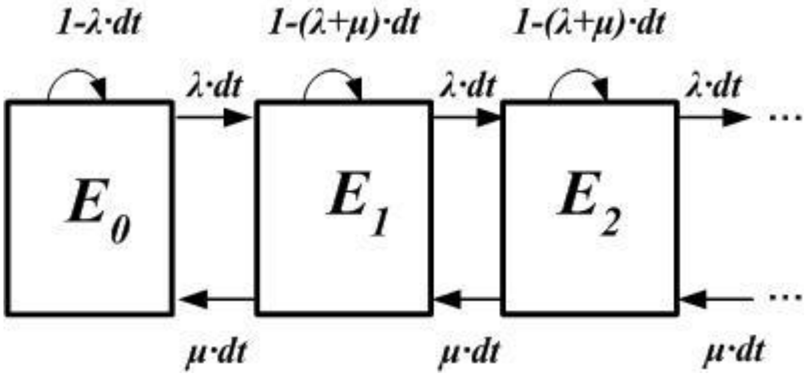


Рисунок 3.1 – Граф переходов открытой одноканальной СМО с ожиданием из одного состояния E_n в другое

Вероятности P_{nn} того, что система не изменит свое состояние E_n, не влияют на вероятности состояний. Поэтому на графах переходов обычно указывают только вероятности переходов типа $P_{n,n+1}$ и $P_{n,n-1}$, и только интенсивности переходов (рисунок 3.2). Такой граф называется схемой гибели и размножения.

Составим дифференциальные уравнения по виду графа состояний, изображённого в виде схемы гибели и размножения, по инженерному правилу А.Н. Колмогорова:

«Производная от вероятности пребывания системы в любой момент времени в состоянии k равна алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов в k-ое состояние (или из k-ого состояния) на вероятность того состояния, откуда совершается переход в k-ое состояние. Причем, тем слагаемым, которым соответствуют уходящие стрелки из k-ого состояния, приписывается знак «минус», а входящим – «плюс».

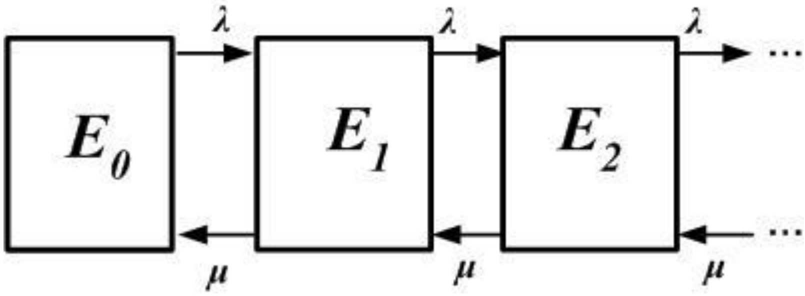


Рисунок 3.2– Граф переходов открытой одноканальной СМО с ожиданием из одного состояния E_n в другое, изображённый в виде схемы гибели и размножения

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t); \qquad (3.1)$$

………………………………..

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu) \cdot P_n(t) + \mu \cdot P_{n+1}(t). \qquad (3.2)$$

Для стационарного режима:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \qquad (3.3)$$

и система дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных уравнений:

$$0 = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \qquad (3.4)$$

$$0 = \lambda \cdot P_0 - (\lambda + \mu) \cdot P_1 + \mu \cdot P_2. \qquad (3.4, а)$$

……………………………..

$$0 = \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n + \mu \cdot P_{n+1}. \qquad (3.5)$$

Откуда $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_0$; $P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot P_0$ и $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$.

Учитывая, что:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \qquad (3.6)$$

получаем:

$$1 = P_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}, \qquad (3.7)$$

$$P_0 = 1 - \alpha = 1 - \frac{\lambda}{\mu}; \qquad (3.8)$$

$$P_n = (1 - \alpha) \cdot \alpha^n; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.9)$$

Параметр $\alpha = \lambda/\mu$ выражает среднее число заявок, приходящихся на среднее время обслуживания одной заявки, то есть степень насыщения в системе и называется загрузкой или коэффициентом использования СМО. Для одноканальных СМО при $\alpha > 1$ установившегося режима не существует, и очередь растет неограниченно. Получим статистические характеристики открытой одноканальной СМО с ожиданием [28].

Среднее чисто заявок в системе:

$$K = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = (1 - \alpha) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \alpha^n = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \qquad (3.10)$$

Среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов:

$$\bar{Z} = P_{n>0} = 1 - P_0 = \alpha. \qquad (3.11)$$

Среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = K - \bar{Z} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} - \alpha = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha}. \qquad (3.12)$$

3.3 Общие сведения об открытой многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания

Для такой СМО заявки на обслуживание, поступающие на вход системы и заставшие все каналы обслуживания занятыми, встают в очередь. По количеству мест очередь не имеет ограничений. Но заявка, простоявшая некоторое время в очереди и не получившая обслуживание, покидает очередь с интенсивностью ухода ν. Время ожидания распределено экспоненциально со средним сроком ожидания:

$$\bar{t}_{\text{ОЖ}} = \frac{1}{\nu}. \tag{3.13}$$

При $\nu \to \infty$ многоканальная СМО смешанного типа, с ограниченным временем ожидания, с числом каналов обслуживания s переходит в многоканальную СМО с отказами, а при $\nu \to 0$ – в многоканальную чистую СМО с ожиданием. Это позволяет использовать приведённые в данном разделе формулы для СМО смешанного типа при расчёте других СМО указанных выше типов, в зависимости от численного значения ν.

Расчёт проводим по методике, изложенной в пункте 3.2 для открытой одноканальной СМО с ожиданием. По инженерному правилу А.Н.Колмогорова по виду графа состояний, изображённого на рисунке 3.3 в виде схемы гибели и размножения, составим систему дифференциальных уравнений. Для стационарного режима система этих дифференциальных уравнений преобразуется в систему линейных уравнений из-за того, что $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$. Из линейных уравнений методом подстановки, учитывая, что $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ получим выражения для вероятностей P_n состояний n [28]:

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot P_0; \quad 0 \le n \le s; \tag{3.14}$$

$$P_n = \frac{\alpha^s}{s!} \cdot \frac{\lambda^{n-s}}{(s\cdot\mu+\nu)\cdot\ldots\cdot\left[s\cdot\mu+(n-s)\cdot\nu\right]} \cdot P_0; \quad s \le n; \tag{3.15}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^s}{s!}\cdot\sum_{n=s}^{\infty}\frac{\lambda^{n-s}}{(s\cdot\mu+\nu)\cdot\ldots\cdot\left[s\cdot\mu+(n-s)\cdot\nu\right]}\right]^{-1}. \tag{3.16}$$

Непосредственное пользование формулой (3.16) затруднено тем, что в неё входит бесконечная сумма. Однако члены этой суммы быстро убывают [32]. При приближенном вычислении вероятности P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание в сумме $\sum_{n=s}^{\infty}$ формулы (4.34) достаточно ограничиться первыми десятью членами. Здесь стационарный режим существует всегда: ряд P_n при $s < n$ сходится. Приведём статистические характереристики многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания [28].

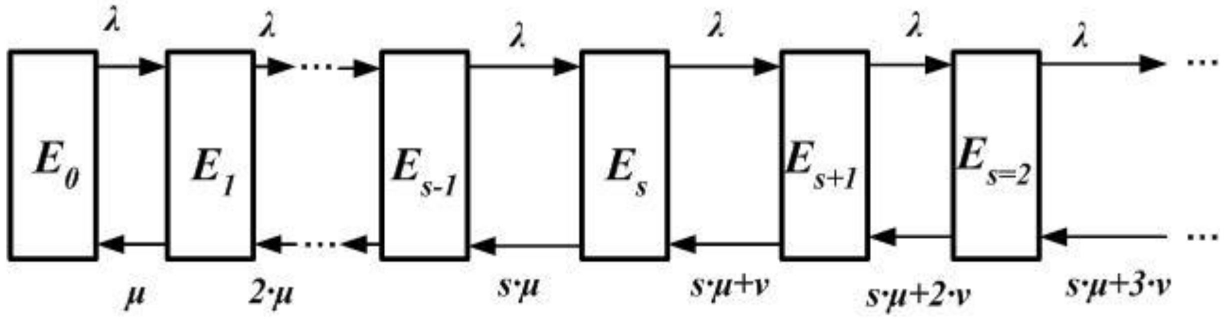


Рисунок 3.3 – Граф переходов многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания, изображённый в виде схемы гибели и размножения

Вероятность отказа для данной системы не имеет смысла.

Среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание:

$$N_{\text{ОЖ}} = \sum_{n=s+1}^{\infty} n-s \ \cdot P_n . \qquad (3.17)$$

В сумме $\sum\limits_{n=s+1}^{\infty}$ формулы (3.17) также достаточно ограничится первыми десятью членами.

Абсолютная пропускная способность:

$$M = \lambda - \nu \cdot N_{\text{ОЖ}}, \qquad (3.18)$$

где $\nu \cdot N_{\text{ОЖ}}$ – заявки, ушедшие из очереди в единицу времени.

Относительная пропускная способность:

$$q = \frac{M}{\lambda} = 1 - \frac{\nu}{\lambda} \cdot N_{\text{ОЖ}} . \qquad (3.19)$$

Среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов:

$$\bar{Z} = \frac{M}{\mu} = \alpha - \frac{\nu}{\mu} \cdot N_{\text{ОЖ}} . \qquad (3.20)$$

3.4 Общие сведения об открытой многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди

Для такой СМО (рисунок 3.4) заявка, заставшая все n каналов занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок; если же число заявок в очереди равно m (больше m оно быть не может), то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему не обслуженной. Остальные допущения – о простейшем потоке заявок и о показательном распределении времени обслуживания – оставим прежними.

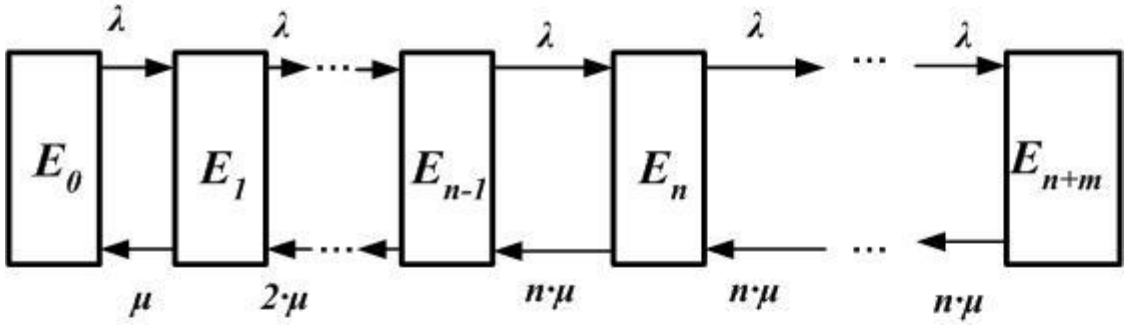


Рисунок 3.4 – Граф переходов многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди, изображённый в виде схемы гибели и размножения

В данном случае число состояний системы будет конечно, так как общее число заявок, связанных с системой, не может превышать (n + m) (n обслуживаемых и m стоящих в очереди). Расчёт проводим по методике, изложенной в пункте 3.2 для открытой одноканальной СМО с ожиданием. Не останавливаясь на этом решении, приведем только окончательные формулы для определения вероятностей P_k состояний k, когда очередь отсутствует, и вероятностей P_{n+s} состояний (n + s), когда имеется очередь [32].

$$P_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}; \quad 0 \le k \le n; \qquad (3.21)$$

$$P_{n+s} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s}; \quad 1 \le s \le m. \qquad (3.22)$$

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной (формула (3.22)), равна вероятности P_{n+m} того, что в очереди уже стоят m заявок.

Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{n+m}. \qquad (3.23)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$M = \lambda\cdot q. \qquad (3.24)$$

Средняя доля времени, которое система будет простаивать, равна вероятности P_0 (формула (3.16)).

Характеристики открытой многоканальной СМО с отказами можно определить по формуле (3.21) при m = 0 и формулам (3.23), (3.24).

3.5 Индивидуальные задания для расчета на практических занятиях характеристик технического обслуживания открытых многоканальных СМО с ожиданием и с отказами

Цель работы: обучить студентов применению методики определения статистических характеристик технического обслуживания открытых СМО с использованием программного комплекса MathCAD на примерах:

а) одноканальной СМО с ожиданием;

б) многоканальной СМО с ожиданием;

в) многоканальной СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания;

г) многоканальной СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди и с отказами.

Задание *1*

Дана открытая система массового обслуживания смешанного типа с ограниченным ожиданием, имеющая n каналов обслуживания. Интенсивность потока заявок на обслуживание, поступающих в СМО, равна λ [ч$^{-1}$]. Интенсивность выполнения заявок (интенсивность восстановления) равна μ [ч$^{-1}$], а отношение $\lambda/\mu < n$. Значения n, λ [ч$^{-1}$], μ [ч$^{-1}$] и ν [ч$^{-1}$] приведены в таблице 3.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Определить следующие статистические характеристики СМО для трёх значений средней длительности ожидания $T_{\text{ОЖ}}$: когда $0 < T_{\text{ОЖ}} = 1/\nu < \infty$; когда $T_{\text{ОЖ}} = 0$ (чистая СМО с отказами) и когда $T_{\text{ОЖ}} = \infty$ (чистая СМО с ожиданием):

- вероятность P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание;

- вероятность наличия очереди на обслуживание $P_{\text{ОЧ}} = 1 - \sum_{n=0}^{s} P_n$;

- среднее число $\bar{Z}$ занятых каналов;

- среднее число заявок $N_{\text{ОЖ}}$, находящихся в очереди на обслуживание;

- абсолютн X ую пропускную способность;

- *относительную* пропускную способность.

Расчёты *провести* с использованием программного комплекса MathCAD.

Таблица 3.1 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуального задания №1 с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ, ч$^{-1}$ **μ, ч$^{-1}$**	10 3	8 2.3	7 1.5	9 2.5	6 1.8	7 2	8 1.9	9 3	12 3	6 2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	6	7	6	7	7	5	5	6	5	4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ν, ч$^{-1}$	3.5^{-1}	4^{-1}	5^{-1}	6^{-1}	5^{-1}	7^{-1}	6.5^{-1}	5.5^{-1}	4.5^{-1}	4^{-1}

Задание *2*

Дана открытая **система** массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди. Число каналов СМО n, максимальное число заявок в очереди m, поток заявок простейший, время обслуживания распределено по показательному закону. Интенсивность потока заявок λ [ч$^{-1}$], а средняя длительность обслуживания заявок $T_{\text{ОБС}}$. Значения λ [ч$^{-1}$], $T_{\text{ОБС}}$ [ч], n и m приведены в таблице 3.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Определить следующие статистические характеристики СМО для случая, когда все каналы обслуживания исправно работают и для случая, когда один из каналов не работает:

- вероятность P_0 простоя СМО из-за отсутствия заявок на обслуживание;
- вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной;
- абсолютную пропускную способность;
- относительную пропускную способность.

Определить эти же характеристики, но для открытой многоканальной СМО с отказами (при $m = 0$).

Расчёты провести с использованием программного комплекса MathCAD.

3.6 Этапы выполнения индивидуальных расчетных заданий открытых многоканальных СМО с ожиданием и с отказами и содержание отчета по заданиям

1. Подготовиться к ответу на контрольные вопросы, и получить у преподавателя допуск к выполнению лабораторного задания.

2. Используя номер варианта задания, выданный преподавателем, выполнить расчеты по пункту 3.5.

Содержание отчета.

1. Цель работы.

2. Письменный ответ на контрольные вопросы, указанные преподавателем.

3. Расчёт индивидуального задания.

4. Заключение – выводы по результатам работы.

Таблица 3.2 – Численные значения исходных величин для расчёта индивидуального задания №2 с использованием программного комплекса MathCAD

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ, ч$^{-1}$ **$T_{ОБС}$, ч**	1 4	3 1.5	2 2.8	3 2	2 2.5	1 3.5	2 2.2	1 4.5	3 1.8	3 2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	3	4	5	4	3	5	4	5	4	5
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m	2	2	4	2	2	3	2	3	2	3

3.7 Перечень **контрольных** вопросов, которые могут быть заданы во время защиты отчёта по работе

1. Какие **разновидности** открытых СМО упоминаются в описании к лабораторной работе и в чём особенности этих СМО?

2. Какими **статистическими** характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО с чистым ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?

3. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди, и каковы выражения для их расчёта?

4. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с ограниченным ожиданием, и каковы выражения для их расчёта?

5. Какими статистическими характеристиками технического обслуживания характеризуют открытую многоканальную СМО смешанного типа с отказами, и каковы выражения для их расчёта?

6. Какова формулировка инженерного правила составления дифференциальных уравнений по виду графа или по виду схемы состояний?

4 РАСЧЕТ ПЕРИОДИЧНОСТИ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

4.1 Основные соотношения между периодом профилактических работ и средней продолжительностью технического обслуживания

При сокращении промежутка времени между очередными техническими обслуживаниями РЭО повышается его надёжность за счет своевременного проведения контрольно-регулировочных работ. При этом увеличивается общее время профилактики в течение года и соответственно уменьшается продолжительность работы оборудования за этот отрезок времени по прямому назначению. Оптимальным периодом проведения профилактических работ можно считать период $\tau_{\text{ТО}}$ между профилактиками, при котором величина коэффициента простоя $K_{\text{П}}$ принимает наименьшее значение. Величину коэффициента простоя находим из выражения:

$$K_{\text{П}} = \frac{T_{\text{П}}}{T_{\text{П}} + T_{\text{ОП}}}, \qquad (4.1)$$

где $T_{\text{ОП}}$ – среднее время нахождения объекта в работоспособном состоянии между двумя соседними по времени профилактиками;

$$T_{\text{П}} = \tau_{\text{ТО}} + T_{\text{ТО}} - T_{\text{ОП}} \qquad (4.2)$$

– среднее время нахождения объекта в неработоспособном состоянии; $T_{\text{ТО}}$ – средняя продолжительность профилактики (технического обслуживания).

Как показано в [2] при $T_{\text{П}} \approx T_{\text{ТО}}$ оптимальный период проведения профилактических работ можно рассчитывать по формуле:

$$\tau_{\text{ТО}} = \sqrt{\frac{2T_{\text{ТО}}}{\lambda_{\text{П}}}}, \qquad (4.3)$$

где $\lambda_{\text{П}}$ – интенсивность отказов при проведении профилактик.

Для случая экспоненциального распределения отказов:

$$\tau_{\text{ТО}} = \sqrt{2T_{\text{ТО}}T_{\text{ОП}}}, \qquad (4.4)$$

где $T_{\text{ОП}}$ – наработка объекта между двумя соседними по времени профилактиками.

Для аппаратуры, которая часть времени работает, имея при этом интенсивность отказов $\lambda_{\text{Р}}$, а другую часть времени хранится в выключенном состоянии, имея интенсивность отказов $\lambda_{\text{ХР}}$, величину $\lambda_{\text{П}}$ находят из выражения:

$$\lambda_{\text{П}} = K_{\text{И}}\lambda_{\text{Р}} + (1 - K_{\text{И}})\lambda_{\text{ХР}}, \qquad (4.5)$$

где $K_И$ – коэффициент эффективности эксплуатации, равный вероятности нахождения аппаратуры во включенном состоянии в произвольный момент времени:

$$K_И = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_k}, \tag{4.6}$$

где t_i – время работы аппаратуры при i-ом включении; n – число её включений за календарное время t_k.

Таким образом, при $K_И < 1$ выражение (4.3) для определения оптимального периода проведения профилактических работ примет с учетом (4.5) вид:

$$\tau_{ТО} = \sqrt{\frac{2T_{ТО}}{K_И \lambda_Р + (1 - K_И)\lambda_{ХР}}}. \tag{4.7}$$

Обычно величиной $\lambda_{ХР} = (10^{-3}\ldots10^{-2})\lambda_Р$, пренебрегают по сравнению с $\lambda_Р$. В этом случае выражение (4.7) упрощается:

$$\tau_{ТО} = \sqrt{\frac{2T_{ТО}}{K_И \lambda_Р}}. \tag{2.8}$$

Использование в аппаратуре современных интегральных микросхем и цифровой обработки информации повышает её надёжность и стабильность. Для этой аппаратуры оптимальный период проведения профилактических работ $\tau_{ТОС}$ как показывает опыт, оказывается большим, чем такой же период $\tau_{ТО}$ аппаратуры в обычном исполнении:

$$\tau_{ТОС} = K_{СТ}\tau_{ТО}, \tag{4.9}$$

где $K_{СТ} \geq 1$ – поправочный коэффициент для учета стабильности параметров аппаратуры, определяемый по результатам эксплуатации или специальных испытаний для каждого типа аппаратуры.

Для аппаратуры одноразового действия профилактика проводится во время хранения, величина коэффициента эффективности эксплуатации $K_И$ близка к нулю и формула (4.7) для вычисления $\tau_{ТО}$ упрощается:

$$\tau_{ТО} = \sqrt{\frac{2T_{ТО}}{\lambda_{ХР}}}. \tag{4.10}$$

Средняя продолжительность ТО определяется из выражения:

$$T_{ТО} = \sum_{i=1}^{m} T_{ТОi}, \tag{4.11}$$

где $T_{ТОi}$ – среднее время i-ой операции; m – число операций при одной профилактике.

Отсутствие простоя характеризуют с помощью коэффициента готовности, равного вероятности того, что объект окажется работоспособным в произвольный момент времени, кроме периодов плановых ремонтов, плановых ТО и других плановых мероприятий, прерывающих эксплуатацию объекта по назначению.

Коэффициент готовности при проведении профилактики:

$$K_{\text{ГП}} = \frac{T_{\text{ОП}}}{T_{\text{ОП}} + T_{\text{П}}}. \tag{4.12}$$

Часто в задачах принимают, что среднее время нахождения объекта в неработоспособном состоянии $T_{\text{П}}$ равно среднему времени ТО ($T_{\text{П}} \approx T_{\text{ТО}}$) или что оно равно среднему времени ремонта ($T_{\text{П}} \approx T_{\text{Р}}$).

Коэффициент готовности при отсутствии профилактики:

$$K_{\text{Г}} = \frac{T_{\text{О}}}{T_{\text{О}} + T_{\text{Р}}}, \tag{4.13}$$

где $T_{\text{О}}$ – среднее время нахождения объекта в работоспособном состоянии при отсутствии профилактических работ.

Безотказность транспортного радиоэлектронного оборудования, относящегося к восстанавливаемым изделиям многократного циклического применения, характеризуют коэффициентом оперативной готовности $K_{\text{ОГ}}(t)$, равным вероятности того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени $t_{\text{Р}}$. При экспоненциальном законе вероятности безотказной работы:

$$K_{\text{ОГ}}\ t\ = K_{\text{Г}} e^{-\lambda_{\text{Р}} t}. \tag{4.14}$$

Коэффициент готовности характеризует готовность объекта к применению по назначению только в отношении его работоспособности в произвольный момент времени. Коэффициент же оперативной готовности характеризует надёжность объекта, необходимость применения которого возникает в произвольный момент времени, после которого требуется безотказная работа в течение заданного интервала времени.

Коэффициент оперативной готовности при проведении профилактики

$$K_{\text{ОГП}} = K_{\text{ГП}} e^{-\lambda_{\text{РП}} t}, \tag{4.15}$$

где $\lambda_{\text{РП}}$ – интенсивность отказов при наличии профилактических работ.

4.2 Примеры расчета периодичности и продолжительности профилактических работ

Пример 4.1. Передатчик работает в субботу и воскресенье по 4 ч в сутки, а в остальные дни – по 6 ч в сутки. Длительность профилактических работ по отдельным узлам передатчика в среднем составляют: по антенно-фидерному тракту – 1.5 ч, по остальным высокочастотным узлам – 2.5 ч, по блоку питания – 1 ч. Интенсивность отказов передатчика при проведении профилактических работ $\lambda_{\text{Р}} = 2 \cdot 10^{-3}$ ч$^{-1}$. Определить оптимальный период профилактических работ. Отказами в выключенном состоянии пренебречь.

Решение:

а) с помощью выражения (4.6) вычислим коэффициент эффективности эксплуатации:

$$K_{\text{И}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{t_k} = \frac{4+4+6+6+6+6+6}{7 \cdot 24} = 0.226;$$

б) с помощью выражения (4.11) находим среднюю продолжительность ТО:

$$T_{\text{ТО}} = \sum_{i=1}^{m} T_{\text{ТО}i} = 1.5 + 2.5 + 1 = 5 \text{ ч};$$

в) по формуле (4.8) определим оптимальный период профилактических работ:

$$\tau_{\text{ТО}} = \sqrt{\frac{2T_{\text{ТО}}}{K_{\text{И}}\lambda_{\text{Р}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{0.226 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 148.7 \text{ ч}.$$

Ответ: оптимальный период профилактических работ $\tau_{\text{ТО}}$ = 148.7 ч.

Пример 4.2. Наработка на отказ бортового радиолокатора при экспоненциальном законе надежности и без проведения профилактических работ составила T_0 = 300 ч. При проведении профилактических работ длительностью $T_{\text{ТО}}$ = 5 ч наработка на отказ составила 900 ч. Среднее время ремонта $T_{\text{Р}}$ = 6 ч. Коэффициент интенсивности эксплуатации $K_{\text{И}}$ = 0.25. Интенсивность отказов в выключенном состоянии $\lambda_{\text{ХР}} = 2 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$. Определить оптимальный период проведения профилактических работ, а также коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности для t = 2 ч без профилактики и при проведении профилактики.

Решение:

а) экспоненциальное распределение применяется не только к неремонтируемым объектам, но и к ремонтируемым объектам с простейшими потоками отказов; с учетом этого находим интенсивность отказов радиолокатора без проведения профилактических работ:

$$\lambda_{\text{Р}} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{300} = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$$

и при проведении профилактических работ:

$$\lambda_{\text{РП}} = \frac{1}{T_{\text{ОП}}} = \frac{1}{900} = 1.11 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1};$$

б) находим оптимальный период проведения профилактических работ по формуле (4.7):

$$\tau_{\text{ТО}} = \sqrt{\frac{2T_{\text{ТО}}}{K_{\text{И}}\lambda_{\text{РП}} + (1 - K_{\text{И}})\lambda_{\text{ХР}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{0.25 \cdot 1.11 \cdot 10^{-3} + 0.75 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 189.3 \text{ ч};$$

в) находим коэффициенты готовности, равные вероятности того, что объект окажется работоспособным в произвольный момент времени, кроме периодов плановых ремонтов, плановых ТО и других плановых мероприятий, прерывающих эксплуатацию объекта по назначению:

1) коэффициент готовности без проведения профилактики:

$$K_{\text{Г}} = \frac{T_{\text{О}}}{T_{\text{О}} + T_{\text{Р}}} = \frac{300}{300+6} = 0.98;$$

2) коэффициент готовности при проведении профилактики:

$$K_{\text{ГП}} = \frac{T_{\text{ОП}}}{T_{\text{ОП}} + T_{\text{Р}}} = \frac{900}{900+6} = 0.993;$$

г) находим коэффициенты оперативной готовности, равные вероятности того, что объект окажется работоспособным в произвольный момент времени, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени:

1) коэффициент оперативной готовности без проведения профилактики:

$$K_{\text{ОГ}} = K_{\text{Г}} e^{-\lambda_{\text{Р}} t} = 0.98 e^{-3.33 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 0.973;$$

2) коэффициент оперативной готовности при проведении профилактики:

$$K_{\text{ОГП}} = K_{\text{ГП}} e^{-\lambda_{\text{РП}} t} = 0.993 e^{-1.1 \cdot 10^{-3} \cdot 2} = 0.991.$$

Ответ: оптимальный период проведения профилактических работ $\tau_{\text{ТО}}$ = 189.3 ч; коэффициенты готовности без проведения профилактики $K_{\text{Г}}$ = 0.98, а при проведении профилактики $K_{\text{ГП}}$ = 0.993; коэффициенты оперативной готовности без проведения профилактики $K_{\text{ОГ}}$ = 0.973, а при проведении профилактики $K_{\text{ОГП}}$ = 0.991.

Пример 4.3. Для посадки на планеты с высокой температурой поверхности (больше 500°С) разработана специальная приёмо-передающая телевизионная система, которая незадолго до посадки охлаждается, затем работает на поверхности планеты менее получаса, после чего из-за сильного разогрева переходит в неработоспособное состояние. В системе используются современные высокостабильные интегральные схемы и цифровая обработка информации. Интенсивность отказов системы при охлаждении $\lambda_{\text{ХР}} = 3 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$. Длительность профилактических работ по отдельным узлам системы в среднем составляют: по антенно-фидерному тракту – 2 ч, по приёмному тракту – 1.5 ч и по передающему тракту – 3 ч. По результатам испытаний получено численное значение поправочного коэффициента, учитывающего высокую стабильность параметров станции, $K_{\text{СТ}}$ = 1.5. Определить оптимальный период проведения профилактических работ.

Решение:

а) находим среднюю продолжительность ТО:

$$T_{\text{ТО}} = \sum_{i=1}^{m} T_{\text{ТО}i} = 2 + 1.5 + 3 = 6.5 \text{ ч};$$

б) определяем оптимальный период проведения профилактических работ для аппаратуры одноразового действия:

$$\tau_{\text{ТО}} = \sqrt{\frac{2T_{\text{ТО}}}{\lambda_{\text{ХР}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.5}{3 \cdot 10^{-6}}} = 2082 \text{ ч};$$

в) определяем оптимальный период проведения профилактических работ с учётом поправочного коэффициента $K_{\text{СТ}}$:

$$\tau_{\text{ТОС}} = K_{\text{СТ}} \tau_{\text{ТО}} = 1.5 \cdot 2082 = 3123 \text{ ч}.$$

Ответ: оптимальный период проведения профилактических работ $\tau_{\text{ТОС}} = 3123$ ч.

4.3 Задачи расчета периодичности и продолжительности профилактических работ

Задача 4.1. Передатчик, установленный на патрульной машине, для обеспечения скрытности передвижения машины работает в среднем t_1 мин за t_2 ч календарного времени. Длительности работ по отдельным узлам передатчика в среднем составляют: по антенно-фидерному тракту – T_{01} ч, по высокочастотным цепям передатчика – T_{02} ч, по низкочастотным цепям – T_{03} часов. Интенсивность отказов в выключенном состоянии $\lambda_{\text{ХР}}$. Наработка на отказ без проведения профилактических работ составила T_0 часов при экспоненциальном законе распределения. При проведении профилактических работ наработка на отказ составила $T_{\text{ОП}}$. Среднее время ремонта $T_{\text{Р}}$. Определить оптимальный период проведения профилактических работ, а также коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности для времени t без профилактики и с профилактикой. Численные значения исходных величин для расчета даны в таблице 2.1 и зависят от номера варианта.

Задача 4.2. На шар-зонд, запускаемый в атмосферу, помещают специальное радиопередающее устройство одноразового действия. Длительности профилактических работ по отдельным узлам этого устройства в среднем составляют: по антенно-фидерному тракту – T_{01} ч, по передающему тракту – T_{02} ч, по модулю преобразования параметров в электрические сигналы – T_{03} ч. Интенсивность отказов устройства при хранении $\lambda_{\text{ХР}}$. Определить оптимальный период проведения профилактических работ. Численные значения исходных величин для расчета даны в таблице 2.2 и зависят от номера варианта.

Задача 4.3. Специализированное вычислительное устройство, входящее в состав самолетной РЛС, выполнено на современных стабильных и высоконадежных интегральных схемах. Коэффициент интенсивности эксплуатации этого устройства равен $K_{\text{И}}$, средняя продолжительность ТО равна $T_{\text{ТО}}$, а интенсивность отказов при проведении профилактики $\lambda_{\text{П}}$. По результатам испытаний получено численное значение коэффициента, учитывающего высокую стабильность параметров устройства $K_{\text{СТ}}$. Определить оптимальный период проведения профилактических работ. Численные значения исходных величин для расчета даны в таблице 2.3 и зависят от номера варианта. Интенсивностью отказов при хранении пренебречь.

Таблица 4.1 – Исходные данные для задачи 4.1

Первая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_1, **мин**	1	2	3	4	4	3	5	7	7
t_2, **ч**	1	3	2	5	3	5	2	3	5
Вторая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_{01}, **час**	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5	1	0.5	1.5
T_{02}, **час**	2	3	4	3	4	2	2	3	3
T_{03}, **час**	1	1.5	2	1	2	1.5	0.5	2	1
$\lambda_{ХР}$, **ч**$^{-1}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-5}$	$3\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-5}$	$4.5\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$	$2.5\cdot10^{-5}$	$1.5\cdot10^{-5}$
Третья цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_0	200	260	320	350	250	280	300	380	220
$T_{ОП}$	380	450	490	640	380	550	480	600	415
$T_Р$	5	6	7	8	9	6	5	4	8
t	2	3	4	5	3.5	8	6	3.5	4.5

Таблица 4.2 – Исходные данные для задачи 4.2

Первая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_{01}, **ч**	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
λ_{XP}, **ч**$^{-1}$	$5{\cdot}10^{-5}$	$4{\cdot}10^{-5}$	$3{\cdot}10^{-5}$	$2{\cdot}10^{-5}$	$6{\cdot}10^{-5}$	$5.5{\cdot}10^{-5}$	$4.5{\cdot}10^{-5}$	$3.5{\cdot}10^{-5}$	$2.5{\cdot}10^{-5}$
Вторая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_{02}, **ч**	4	3	2	1	5	6	7	8	9
Третья цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T_{03}, **ч**	5	4	3	3.5	4.5	2.5	3	4	5

Таблица 4.3 – Исходные данные для задачи 4.3

Первая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$K_{И}$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.17	0.22	0.12	0.28	0.3
$K_{СТ}$	1.5	1.7	1.9	2.1	1.45	1.55	1.65	1.75	1.85
Вторая цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_{ТО}$, **час**	5	6	7	8	9	8.5	7.5	6.5	5.5
Третья цифра № варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_{XP}, **ч**$^{-1}$	$5{\cdot}10^{-5}$	$6{\cdot}10^{-5}$	$7{\cdot}10^{-5}$	$3{\cdot}10^{-5}$	$1{\cdot}10^{-5}$	$1.5{\cdot}10^{-5}$	$2.5{\cdot}10^{-5}$	$3.5{\cdot}10^{-5}$	$4.5{\cdot}10^{-5}$

5 РАСЧЁТ РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ

5.1 Основные формулы для расчёта ремонтопригодности

В начале расчёта ремонтопригодности определяют условную вероятность отказа элементов i-ой группы при простейшем потоке отказов:

$$q_i = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j}, \tag{5.1}$$

где λ_i – интенсивность отказов элементов i-ой группы; m – число групп элементов в аппаратуре.

Затем находят среднее время ремонта:

$$T_{\text{Р}} = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot T_{\text{Р}i}, \tag{5.2}$$

где $T_{\text{Р}i}$ – активное время ремонта при отказе элемента i-ой группы.

Это время слагается из среднего время поиска неисправного элемента t_{0i}, среднего времени замены элемента $t_{\text{З}i}$ и среднего времени проверки исправности аппаратуры после замены отказавшего элемента $t_{\text{ПР}i}$:

$$T_{\text{Р}i} = t_{0i} + t_{\text{З}i} + t_{\text{ПР}i}. \tag{5.3}$$

По точности и достоверности метод расчета оценок времени ремонта зависит от закона распределения времени ремонта. Как правило, это распределение экспоненциальное или Эрланга. Средняя продолжительность ремонта определяется по формуле:

$$T_{\text{Р}i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} T_{\text{Р}i}}{n}, \tag{5.4}$$

где $T_{\text{Р}i}$ – среднее время ремонта при i-ом отказе; n – число отказов.

Эта формула менее точна, чем формула (5.2), так как в ней все отказы считают равновероятными. Если аппаратура модульного типа и ремонт производят заменой модуля, то закон распределения времени ремонта – экспоненциальный:

$$f\left(t_{\text{Р}}\right) = \frac{1}{T_{\text{Р}}} \exp\left(-\frac{t_{\text{Р}}}{T_{\text{Р}}}\right). \tag{5.5}$$

При экспоненциальном распределении верхнюю $T_{\text{РВ}}$ и нижнюю $T_{\text{РН}}$ границы времени ремонта находят из выражений:

$$T_{\text{РН}} = T_{\text{Р}} \cdot r_2, \tag{5.6}$$

$$T_{\text{РВ}} = T_{\text{Р}} \cdot r_1. \tag{5.7}$$

Коэффициенты r_1 и r_2, связанные с квантилями распределения χ^2 Пирсона, можно определить из таблицы 5.1 в зависимости от значений n и доверительной вероятности $P(\in)$.

Таблица 5.1 – Значения коэффициентов r_1 и r_2

№	Вероятность $P(\in)$							
	r_1				r_2			
	0.99	**0.95**	**0.9**	**0.8**	**0.99**	**0.95**	**0.9**	**0.8**
2	13.5	5.63	3.77	2.42	0.3	0.42	0.51	0.67
4	4.35	2.93	2.29	1.74	0.4	0.52	0.6	0.73
6	3.36	2.29	1.9	1.54	0.46	0.57	0.65	0.76
8	2.75	2.01	1.72	1.43	0.5	0.61	0.6	0.78
10	2.42	1.83	1.61	1.37	0.53	0.64	0.7	0.8
15	2.01	1.62	1.46	1.28	0.59	0.68	0.74	0.83
20	1.81	1.51	1.37	1.24	0.63	0.72	0.77	0.85
50	1.43	1.28	1.21	1.14	0.74	0.8	0.84	0.89
100	1.28	1.19	1.14	1.09	0.8	0.86	0.88	0.92
250	1.17	1.11	1.09	1.0	0.87	0.9	0.92	0.95
500	1.11	1.08	1.06	1.04	0.89	0.92	0.94	0.96

При поиске отказов вручную время текущего ремонта, как правило, распределено по закону Эрланга:

$$f\ t_{\text{Р}}\ = \left(\frac{4t_{\text{Р}}}{T_{\text{Р}}^2}\right)\exp\left(\frac{-2t_{\text{Р}}}{T_{\text{р}}}\right). \tag{5.8}$$

При распределении Эрланга:

$$T_{\text{РН}} = T_{\text{Р}}/\delta_2, \tag{5.9}$$

$$T_{\text{РВ}} = T_{\text{Р}}/\delta_1. \tag{5.10}$$

Значение коэффициентов δ_1 и δ_2 можно определить из таблицы 5.2 в зависимости от значений n и доверительной вероятности $P(\in)$.

Таблица 5.2 – Значение коэффициентов δ_1 и δ_2

N	Вероятность $P(\in)$							
	δ_1				δ_2			
	0.99	**0.95**	**0.9**	**0.8**	**0.99**	**0.95**	**0.9**	**0.8**
4	0.362	0.500	0.581	0.700	2.00	1.64	1.47	1.28
8	0.464	0.620	0.688	0.785	1.66	1. 43	1.34	1.20
10	0.473	0.650	0.713	0.813	1.53	1.35	1.29	1.19
15	0.570	0.700	0.766	0.850	1.43	1.30	1.23	1.15
20	0.629	0.740	0.800	0.870	1.37	1.26	1.20	1.13
30	0.697	0.788	0.835	0.892	1.30	1.22	1.16	1.11
50	0.765	0.830	0.870	0.916	1.23	1.17	1.13	1.08
100	0.835	0.880	0.910	0.940	1.16	1.12	1.09	1.06
250	0.895	0.923	0.944	0.962	1.10	1.07	1.06	1.04
500	0.928	0.950	0.960	0.974	1.07	1.05	1.04	1.03

5.2 Примеры расчета ремонтопригодности

Пример 5.1. Из-за возникших в системе $n = 10$ отказов на восстановление работоспособности было затрачено 20 ч. Определить доверительный интервал параметра $T_{\text{Р}}$ с доверительной вероятностью $P(\in) = 0.95$ при экспоненциальном распределении времени ремонта.

Решение:

а) определяем среднюю продолжительность ремонта:

$$T_{\text{Р}i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{\text{Р}i}}{n} = \frac{20}{10} = 2 \text{ ч};$$

б) по таблице 5.1 определяем при $n = 10$ и $P(\in) = 0.95$ $r_1 = 1.83$ и $r_2 = 0.64$, а затем по формулам (5.6) и (5.7) определяем доверительные границы и интервал $I\in$ изменения:

$$T_{\text{РН}} = T_{\text{Р}} \cdot r_2 = 2 \cdot 0.64 = 1.28 \text{ ч};$$

$$T_{\text{РВ}} = T_{\text{Р}} \cdot r_1 = 2 \cdot 1.83 = 3.66 \text{ ч};$$

$$I\in = 1.28 \ldots 3.66 \text{ ч}.$$

Ответ: доверительный интервал $I\in = 1.28\ldots3.66$ ч.

Пример 5.2. Имеется непрерывно работающая двухканальная линия связи. Интенсивность отказа λ и время ремонта канала имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 10^{-2}$ ч$^{-1}$ и интенсивностью ремонта $\mu = 1$ ч$^{-1}$. Определить среднее значение суммарного времени ремонта линии и доверительный интервал $I\in$ с вероятностью $P(\in) = 0.99$ за время эксплуатации 2000 ч. Для восстановления имеется одна бригада. Вероятность отказа двух каналов одновременно $P_{1,2} = 0.25$. Ремонт отказавшего канала требует выключения всей линии.

Решение:

а) находим наработку на отказ одного канала:

$$T_0 = 1/\lambda = 1/10^{-2} = 100 \text{ ч};$$

б) находим количество отказов в одном из каналов (n_1 или n_2), суммарное количество отказов в каналах (n_Σ) и количество отказов одновременно в двух каналах ($n_{1,2}$):

$$n_1 = n_2 = t/T_0 = 2000/100 = 20;$$

$$n_\Sigma = n_2 + n_1 = 20 + 20 = 40;$$

$$n_{1,2} = n_\Sigma \cdot P_{12} = 40 \cdot 0.25 = 10;$$

в) находим среднее время ремонта:

25% всех отказавших изделий ($n_{1,2}$) восстанавливаются поочередно за время:

$$T_{P12} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{1} = 2 \text{ ч}.$$

Остальные 75% отказавших изделий ($N_1 = n_\Sigma - n_{1,2} = 40 - 10 = 30$) восстанавливаются за время:

$$T_{\text{Р}1} = 1/\mu = 1/1 = 1 \text{ ч}.$$

Среднее время ремонта линии:

$$T_{\text{Р}} = \frac{T_{\text{Р}1} N_1 + T_{\text{Р}12} n_{12}}{n_\Sigma} = \frac{1 \cdot 30 + 2 \cdot 10}{40} = \frac{50}{40} = 1.25 \text{ ч};$$

г) по таблице 5.1 определяем для $n = 40$ и $P(\in) = 0.99$, что $r_1 = 1.5$ и $r_2 = 0.71$, а затем по формулам (5.6) и (5.7) определяем доверительные границы и интервал $I\in$ изменения времени ремонта $T_{\text{Р}}$:

$$T_{\text{РН}} = T_P \cdot r_2 = 1.25 \cdot 0.71 = 0.89 \text{ ч};$$

$$T_{\text{РВ}} = T_P \cdot r_1 = 1.25 \cdot 1.5 = 1.88 \text{ ч};$$

$$I\in = 0.89 \ldots 1.88 \text{ ч}.$$

Ответ: среднее значение суммарного времени ремонта линии $T_{\text{Р}} = 1.25$ ч; доверительный интервал $I\in = 0.89\ldots1.88$ ч.

Пример 5.3. При эксплуатации устройства было зарегистрировано $n = 30$ отказов. Данные по распределению отказов по группам элементов и времени, затраченному на ремонт, приведены в таблице 2.6. Найти среднее время ремонта устройства и доверительный интервал при $P(\in) = 0.9$, если распределение времени ремонта подчиняется закону Эрланга.

Таблица 5.3 – Исходные данные для примера 5.3

Группы элементов	**Количество отказов по группе n_i**	**Вес отказов по группе $P_i = n_i/n$**	**Время ремонта $T_{\text{P}i}$, мин**	**Суммарное время ремонта по группе $T_{\Sigma i}$, мин**
Полупроводниковые приборы	6	0.2	80; 59; 108; 45; 73; 91	456
Электровакуумные приборы	10	0.333	56; 36; 44; 42; 33; 32; 23; 75; 61; 28	430
Микромодули	4	0.14	26; 34; 19; 23	102
Резисторы и конденсаторы	7	0.23	60; 73; 91; 58; 44; 82; 54	462
Прочие элементы	3	0.1	125; 133; 108	366

Решение:

а) определяем среднее время ремонта:

- для полупроводниковых приборов:

$$T_{\text{P}1} = 456/6 = 76 \text{ мин};$$

- для электровакуумных приборов (ЭВП):

$$T_{\text{P}2} = 430/10 = 43 \text{ мин};$$

- для микромодулей:

$$T_{\text{P}3} = 102/4 = 25.5 \text{ мин};$$

- для резисторов и конденсаторов:

$$T_{\text{P}4} = 462/7 = 66 \text{ мин};$$

- для прочих элементов:

$$T_{\text{P}5} = 366/3 = 122 \text{ мин};$$

б) рассчитаем среднее время ремонта устройства:

$$T_{\text{P}} = \sum_{i=1}^{5} T_{\text{P}i} P_i ,$$

где $T_{\text{P}i}$ – среднее время ремонта элементов i-ой группы; P_i – вес (вероятность) отказов по группам элементов.

Подставляя числовые данные, получим:

$T_P = (76{\cdot}0.2 + 43{\cdot}0.33 + 25.5{\cdot}0.14 + 66{\cdot}0.23 + 122{\cdot}0.1) \approx 60$ мин;

в) по таблице 5.2 при $n = 30$ и $P(\in) = 0.9$ находим $\delta_1 = 0.835$ и $\delta_2 = 1.22$ и с учётом формул (2.24) и (2.25) находим нижнюю и верхнюю доверительные границы времени ремонта T_P и доверительный интервал $I\in$ времени ремонта:

$$T_{PH} = T_P/\delta_2 = 60/1.22 = 49.18 \text{ мин};$$
$$T_{PB} = T_P/\delta_1 = 60/0.835 = 71.86 \text{ мин};$$
$$I\in = 49.18\ldots71.86 \text{ мин}.$$

Ответ: среднее время ремонта устройства $T_P = 60$ мин; доверительный интервал $I\in = 49.18\ldots71.86$ мин.

5.3 Задачи по расчёту ремонтопригодности

Задача 5.1. На испытание было поставлено $N = 50$ ремонтируемых устройств. За время испытаний отказало n устройств. Время ремонта T_{Pi} в часах составило: $T_{P1} = 4$; $T_{P2} = 3.7$; $T_{P3} = 3.9$; $T_{P4} = 5.2$; $T_{P5} = 3.4$; $T_{P6} = 3.2$; $T_{P7} = 4.7$; $T_{P8} = 4.2$; $T_{P9} = 4.5$; $T_{P10} = 5.3$; $T_{P11} = 3.1$; $T_{P12} = 4.4$; $T_{P13} = 4.8$; $T_{P14} = 3.8$; $T_{P15} = 4.6$. Определить доверительный интервал времени ремонта T_P с доверительной вероятностью $P(\in)$ при заданном законе распределения времени ремонта. Численные значения исходных величин для расчёта даны в таблице 5.4 и зависят от номера варианта. При расчёте использовать первые n цифр T_{Pi}.

Таблица 5.4 – Исходные данные для задачи 5.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Время ремонта распределено по:	закону Эрланга				экспоненциальному закону				
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{P(\in)}$	0.8	0.9	0.95	0.99	0.8	0.9	0.95	0.99	0.8
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{n}$	4	5	6	7	8	9	10	12	15

Задача 2.5. Определить объём испытаний n при условии, что оценка среднего времени ремонта с вероятностью $P(\in)$ не отличалась бы от верхней доверительной границы более чем в k раз при заданном законе распределения времени ремонта. Вид закона и численные значения исходных величин для расчёта даны в таблице 5.5 и зависят от номера варианта.

Таблица 5.5 – Исходные данные для задачи 5.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Время ремонта распределено по:	экспоненциальному закону				закону Эрланга				
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\in)$	0.8	0.9	0.95	0.99	0.8	0.9	0.95	0.99	0.8
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.65	1.75

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Коваленко Н. Н. Введение в теорию массового обслуживания.- М.: Наука, 1987.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. - М.: Наука,1973.
3. Салмина Н. Ю. Моделирование систем. - Томск: ТУСУР, 2002.
4. Павленко К.И. Основы эксплуатации РЭО летательных аппаратов. – М.: Военное издательство, 1988.
5. Шевченко Н. Ю. Моделирование систем массового обслуживания.- Томск: ТУСУР, 1998.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.- М.: Наука, 2000.
7. Давыдов П.С. Техническая диагностика радиоэлектронных устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1988.
8. Сборник задач по теории вероятностей математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А. А. Свешникова. -М.: Наука,1970.
9. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания.- М.: Сов. Радио, 1962.
10. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания.- М.: Физматгиз, 1963.
11. Леонов А.И., Дубровский Н.Ф. Основы технической эксплуатации бытовой РЭА. – М.: Легпромбытиздат, 1991.
12. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. - М.: Сов. Радио, 1962.
13. Козлов В. Г. Теория надёжности. - Томск: ТУСУР, 2004.
14. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надёжности ЭВА, - М.: Радио и связь, 1983.