

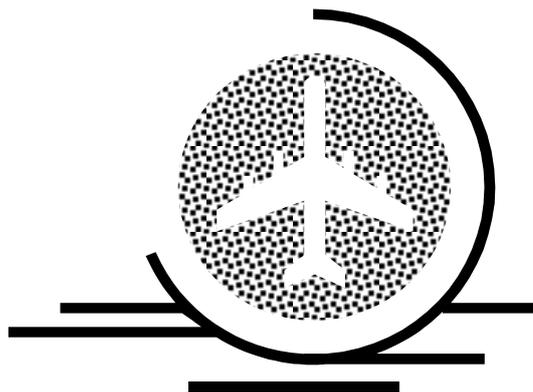


Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

В.Г. Козлов, В.С. Корогодов, А.С. Шостак

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебный практикум для студентов специальности 210201 –
“Проектирование и технология электронных средств”



ТОМСК 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

В.Г. Козлов, В.С. Корогодов, А.С. Шостак

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебный практикум для студентов специальности 210201 –
“Проектирование и технология электронных средств”

2012

Рецензент: профессор кафедры КИПР, д.т.н. Татаринов В.Н.

Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР, к.т.н. Озёркин Д.В.

Козлов В.Г., Корогодов В.С., Шостак А.С.

Техническая электродинамика. Учебный практикум для студентов специальности 210201 "Проектирование и технология радиоэлектронных средств"

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. – 158 с.

Приведены основные расчетные формулы, примеры решения типовых задач и многовариантные задачи для самостоятельной работы. Рекомендуется использовать решения типовых задач при изучении соответствующих разделов лекционного курса. Даны многовариантные задания для самостоятельных и контрольных работ. Учебный практикум составлен для студентов специальности 210201, но может быть использован и студентами других специальностей радиотехнического профиля очной, заочной и дистанционной формы обучения.

© Козлов В.Г., Корогодов В.С., Шостак А.С., 2012

© Кафедра КИПР Томского государственного
университета систем управления и
радиоэлектроники, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА.....	8
1.1 Основные формулы векторного анализа	8
1.2 Формулы с дифференциальными операциями первого порядка	10
1.3 Дифференциальные операции второго порядка	10
1.4 Дифференциальные операции в некоторых ортогональных системах координат.....	10
1.4.1 Обобщенная цилиндрическая система координат (u, v, z) ..	10
1.4.2 Декартова прямоугольная система координат (x, y, z)	11
1.4.3 Цилиндрическая система координат (r, ψ, z)	11
1.4.4 Сферическая система координат (R, θ, ψ)	12
1.4.5 Свойства векторных полей.....	12
1.4.6 Некоторые полезные на практике векторные тождества....	13
1.5 Радиус-вектор	13
1.6 Примеры на различные элементарные действия с векторами .	14
1.7 Примеры решения типовых задач	16
1.8 Задачи для самостоятельной работы.....	26
2 ТЕМА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА.....	29
2.1 Основные формулы электромагнетизма	29
2.2 Примеры решения типовых задач	32
2.3 Задачи для самостоятельной работы	56
E_y , кВ/м	57
l , мм	60
a , мм	60
3 ТЕМА 3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	64
3.1 Основные формулы.....	64

3.2	Примеры решения типовых задач	67
3.3	Задачи для самостоятельной работы.....	81
4	ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	85
4.1	Основные формулы.....	85
4.2	Примеры решения типовых задач	90
4.3	Задачи для самостоятельной работы.....	102
5	ТЕМА 5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ	109
5.1	Основные формулы.....	109
5.2	Примеры решения типовых задач	113
5.3	Задачи для самостоятельной работы.....	127
6	ТЕМА 6. ВОЛНОВОДЫ	131
7	ТЕМА 7. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ	142
	ТЕМА 8. УСТРОЙСТВА С КВАЗИ - Т - ВОЛНАМИ	149
8	СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	158

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум по курсу «Основы электродинамики и распространение радиоволн» содержит разработанные варианты практических занятий, построенных по единому принципу. В каждом его разделе вначале даются краткие теоретические сведения, затем приводятся подробные решения типовых задач и в заключение предлагаются многовариантные задания для самостоятельного решения каждым студентом. Цель данного практикума состоит в оказании помощи студентам в освоении лекционного курса и в выполнении контрольных работ. Для контроля знаний студентов составлены тесты по 7 темам лекционного курса.

Объем практических занятий предполагает 18 часов внеаудиторных (самостоятельных) и 18 часов аудиторных занятий, в том числе 6 часов на проведение 3^х контрольных работ.

По курсу «Основы электродинамики и распространение радиоволн» планируется 18 часов лабораторных и 36 часов лекционных занятий. Самостоятельная работа студентов по всем видам занятий составляет 68 часов.

Программа лекционного курса

Тема 1. Введение.

Цели и задачи дисциплины, организация обучения и самостоятельной работы студентов.

Место электромагнетизма в современной физической картине мира. Особенности диапазона СВЧ. Техника СВЧ и ее применение. Распространение радиоволн. Элементы векторной алгебры и векторного анализа.

Тема 2. Теория электромагнитного поля.

Электромагнитное поле и его математические модели. Плотность тока проводимости. Дифференциальная форма закона Ома. Ток смещения. Закон электромагнитной индукции. Материальные уравнения электромагнитного поля. Поляризационные и сторонние токи.

Тема 3. Уравнения Максвелла.

Сводка уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла в интегральной форме. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Уравнения Максвелла для гармонических колебаний. Монохроматические поля. Комплексные амплитуды полей. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Угол диэлектрических потерь. Энергетические соотношения в электромагнитном поле.

Тема 4. Распространение плоских однородных волн.

Плоские однородные электромагнитные волны. Волновой характер переменного электромагнитного поля. Уравнение Гельмгольца. Плотность потока мощности в плоской электромагнитной волне. Плоские волны с эллиптической поляризацией. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля. Граничные условия для нормальных составляющих векторов электромагнитного поля.

Тема 5. Падение плоских однородных электромагнитных волн на плоскую границу раздела сред.

Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на диэлектрический слой конечной толщины.

Падение плоских однородных электромагнитных волн на плоскую границу раздела сред под произвольным углом. Падение плоской электромагнитной волны на диэлектрическое полупространство под произвольным углом. Угол Брюстера.

Распространение плоских электромагнитных волн в средах с частотной дисперсией. Волны в диэлектриках и в проводящей среде. Плазма и ее электродинамические параметры. Распространение электромагнитных волн в плазме. Распространение импульсов в средах с частотной дисперсией фазовой скорости. Понятие групповой скорости.

Распространение плоских электромагнитных волн в анизотропных средах. Физический механизм анизотропии ферритов. Поперечное и продольное распространение электромагнитных волн в намагниченном феррите. Эффекты Коттона-Муттона и Фарадея.

Тема 6. Общие вопросы распространения радиоволн.

Классификация радиоволн по диапазону и способу распространения. Формулы идеальной радиопередачи и множитель ослабления. Определение области пространства, существенной при распространении радиоволн.

Распространение земных радиоволн. Расчет поля при поднятых антеннах в зоне прямой видимости. Интерференционная формула и квадратичная формула Введенского. Диаграммы направленности поднятых антенн. Расчет поля при низко расположенных антеннах. Структура поля вблизи поверхности Земли. Формула Шулейкина – Ван-дер-Поля.

Влияние тропосферы на распространение радиоволн. Строение тропосферы, её электрические параметры. Явление рефракции. Сверхрефракция. Тропосферные волноводы. Рассеяние радиоволн на тропосферных неоднородностях. Дальнее тропосферное распространение.

Влияние ионосферы на распространение радиоволн. Строение ионосферы. Физические причины образования в ионосфере ионизированных слоев. Критические и максимальные частоты. Влияние магнитного поля Земли на

распространение радиоволн в ионосфере. Особенности распространения в ионосфере волн различных диапазонов.

Распространение радиоволн на космических линиях связи. Системы спутниковой связи и их качественные показатели. Полосы частот в системах спутниковой радиосвязи. Шумы атмосферы, космические шумы и шумы приемных систем. Примеры систем спутниковой связи в России и за рубежом

Тема 7. .Особенности распространение радиоволн различных диапазонов.

Влияние электродинамических свойств земных покровов на распространение сверхдлинных, длинных и средних радиоволн. Особенности распространения коротких волн (зона молчания, ночные волны и дневные волны). Особенности распространения ультракоротких волн (радиорелейные линии связи, космическая связь).

1 ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1.1 Основные формулы векторного анализа

Понятие вектора как величины, характеризуемой (в отличие от скаляра) не только количеством, но и направлением в пространстве, соответствует многим физическим параметрам, например, сила, скорость и т.д.

Векторы \vec{A} , \vec{B} можно представить как $\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot A$ и $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot B$, где \vec{A}_0, \vec{B}_0 – единичные векторы (называемыми ортами), а A, B – абсолютные значения (модули) векторов \vec{A}, \vec{B} . Орты, соответствующие направлениям осей декартовой системы координат, будут обозначаться $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$. Таким образом, в проекциях на эти оси вектор \vec{A} запишется:

$$\vec{A} = \vec{x}_0 \cdot A_x + \vec{y}_0 \cdot A_y + \vec{z}_0 \cdot A_z, \quad (1.1)$$

Проекции A_x, A_y, A_z называются компонентами или составляющими вектора \vec{A} .

Сложение в векторной алгебре означает алгебраическое сложение компонентов векторов:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{x}_0(A_x + B_x) + \vec{y}_0(A_y + B_y) + \vec{z}_0(A_z + B_z), \quad (1.2)$$

Умножение вектора \vec{A} на число (скаляр) m есть вектор \vec{C} :

$$\vec{C} = m \cdot \vec{A} = \vec{x}_0 mA_x + \vec{y}_0 mA_y + \vec{z}_0 mA_z, \quad (1.3)$$

с новым абсолютным значением $C = |m|A$ (при $m > 0$ направление вектора \vec{C} совпадает с направлением вектора \vec{A}).

Скалярное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} определяется как:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \alpha = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z, \quad (1.4)$$

где α – угол между направлениями векторов. Как видно из (1.4), нулевое значение скалярного произведения имеет место и при неравных нулю исходных векторах \vec{A} и \vec{B} . Тогда эти вектора называются ортогональными: они направлены под прямым углом $\alpha = \pi/2$.

Векторное произведение векторов \vec{A} и \vec{B} есть:

$$\begin{aligned} [\vec{A} \cdot \vec{B}] = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}_0 \cdot A \cdot B \sin \alpha = \vec{x}_0(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{y}_0(A_z B_x - A_x B_z) + \\ + \vec{z}_0(A_x B_y - A_y B_x) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где \vec{C}_0 – единичный вектор, направленный по нормали к плоскости векторов \vec{A} и \vec{B} , причем так, что \vec{A}, \vec{B} и \vec{C}_0 – образуют «правую тройку» векторов:

если смотреть вдоль \vec{C}_0 , то кратчайшее угловое расстояние между векторами \vec{A} и \vec{B} обозначенное α , будет соответствовать движению от \vec{A} к \vec{B} по часовой стрелке. Векторное произведение – некоммутативно, то есть сомножители нельзя переставлять местами, имея в виду сохранение результата:

$$[\vec{B} \cdot \vec{A}] = -[\vec{A} \cdot \vec{B}]. \quad (1.6)$$

Под векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов \vec{A} , \vec{B} и \vec{C} понимается скаляр $\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}]$. При этом:

$$\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}] = [\vec{A} \cdot \vec{B}]\vec{C} = [\vec{C} \cdot \vec{A}]\vec{B}, \quad (1.7)$$

то есть, важен циклический порядок следования перемножаемых векторов, при сохранении которого безразлично, какие именно два вектора из трех образуют векторное произведение. Коротко можно записать:

$$\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}] = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Двойное векторное произведение:

$$[\vec{A}[\vec{B} \cdot \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (1.9)$$

Скалярные произведения, выделенные при помощи круглых скобок, по сути, являются числами (входят как числа), которые умножаются на вектор вне этих скобок.

Теорема Остроградского-Гаусса. Если произвольный вектор \vec{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны в объеме V и на ограничивающей этот замкнутый объем поверхности S , то:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV. \quad (1.10)$$

Теорема Стокса. Если произвольный вектор \vec{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны на поверхности S и на ограничивающем ее замкнутом контуре L , то:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}, \quad (1.11)$$

причем направление обхода контура L и поверхности S образуют правовинтовую систему.

Оператор Гамильтона (набла-оператор). Сведение разнообразных дифференциальных пространственных операций к простой и однотипной схеме осуществляется при помощи дифференциального оператора Гамильтона. В декартовой системе координат оператор Гамильтона раскрывается следующим образом:

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.12)$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – единичные векторы (орты) по осям x, y, z .

1.2 Формулы с дифференциальными операциями первого порядка

$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$ – вектор;

$\text{div } \vec{A} = (\nabla \vec{A})$ – скаляр;

$\text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}]$ – вектор;

$\text{grad } (\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi$;

$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$;

$\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$;

$\text{grad } (\varphi \psi) = \psi \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ grad } \psi$;

$\text{div}(\varphi \vec{A}) = \vec{A} \text{ grad } \varphi + \varphi \text{ div } \vec{A}$;

$\text{div}[\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B}$;

$\text{rot}(\varphi \vec{A}) = [\text{grad } \varphi \vec{A}] + \varphi \text{ rot } \vec{A}$.

1.3 Дифференциальные операции второго порядка

$\text{div grad } \varphi = \nabla (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$ – оператор Лапласа (лапласиан) от скалярной функции φ ;

$\text{div rot } \vec{A} = \nabla [\nabla \vec{A}] = 0$;

$\text{rot grad } \varphi = [\nabla \nabla \varphi] = 0$;

$\text{rot rot } \vec{A} = [\nabla [\nabla \vec{A}]] = \nabla (\nabla \vec{A}) - (\nabla \nabla \vec{A}) = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$;

$\nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ – лапласиан от векторной функции \vec{A} .

1.4 Дифференциальные операции в некоторых ортогональных системах координат

1.4.1 Обобщенная цилиндрическая система координат (u, v, z)

$$\text{grad } \varphi = \vec{u}_0 \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \vec{v}_0 \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \vec{z}_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad}_{\perp} \varphi + \vec{z}_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h_v h_u} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_v) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div}_{\perp} \vec{A} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{u}_0 \left[\frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial A_v}{\partial z} \right] + \vec{v}_0 \left[\frac{\partial A_u}{\partial z} - \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial u} \right] + \vec{z}_0 \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u A_u) \right];$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{h_u h_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v}{h_u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u}{h_v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}_{\perp} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= \nabla_{\perp}^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \end{aligned}$$

Здесь $\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{z}_0$ – координатные орты в точке наблюдения; $h_u, h_v, (h_z = 1)$ – коэффициенты Ламе; $\operatorname{grad}_{\perp} \varphi, \operatorname{div}_{\perp} \varphi, \operatorname{div} \operatorname{grad}_{\perp} \varphi = \nabla_{\perp}^2 \varphi$ – дифференциальные операции по поперечным координатам u и v .

1.4.2 Декартова прямоугольная система координат (x, y, z)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right); \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \\ \nabla^2 \vec{A} &= \vec{x}_0 \nabla^2 A_x + \vec{y}_0 \nabla^2 A_y + \vec{z}_0 \nabla^2 A_z. \end{aligned}$$

1.4.3 Цилиндрическая система координат (r, ψ, z)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi &= \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{r}_0 \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_{\psi}}{\partial z} \right] + \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\psi}) - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right); \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot A_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

1.4.4 Сферическая система координат (R, θ, ψ)

$$\begin{aligned} grad\varphi &= \bar{R}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial R} + \bar{\theta}_0 \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \bar{\psi}_0 \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}; \\ div\vec{A} &= \frac{\partial A_R}{\partial R} + \frac{2}{R} \cdot A_R + \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}; \\ rot\vec{A} &= \bar{R}_0 \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi} \right] + \bar{\theta}_0 \cdot \frac{1}{R \sin\theta} \cdot \left[\frac{\partial A_R}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \sin\theta A_\psi) \right] + \\ &\quad + \bar{\psi}_0 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R \cdot A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta} \right); \\ div grad\varphi &= \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}. \end{aligned}$$

1.4.5 Свойства векторных полей

Будем полагать, что вектор \vec{A} и его первые частные производные однозначны и непрерывны во всех точках поля. Тогда векторное поле \vec{A} задано однозначно, если известны его ротор и дивергенция, как функции пространственных координат:

$$rot\vec{A} = F(R), \quad div\vec{A} = f(R),$$

причем эти функции должны отличаться от нуля в ограниченной области пространства.

Векторное поле называется потенциальным, если $\vec{A} = -grad\varphi$, где функцию φ именуют скалярным потенциалом поля \vec{A} . Введение знака минус вызвано тем обстоятельством, что в физических задачах принято направлять вектор \vec{A} в сторону убывания потенциала φ .

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля \vec{A} является равенство $rot\vec{A} = 0$.

Векторное поле \vec{A} называется соленоидальным, если $\vec{A} = rot\vec{C}$, где функцию \vec{C} именуют векторным потенциалом поля \vec{A} .

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля \vec{A} является равенство $div\vec{A} = 0$.

1.4.6 Некоторые полезные на практике векторные тождества

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= 0; \\
 \operatorname{rot} \operatorname{grad} U &= 0; \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}; \\
 \operatorname{grad}(U \cdot V) &= U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U, \\
 \text{где } U \text{ и } V &\text{ скалярные функции;} \\
 \operatorname{div}(U \cdot \vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} U; \\
 \operatorname{rot}(U \cdot \vec{A}) &= U \operatorname{rot} \vec{A} - [\vec{A} \operatorname{grad} U]; \\
 \operatorname{div}[\vec{A} \cdot \vec{B}] &= \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}.
 \end{aligned}$$

1.5 Радиус-вектор

Рассмотрим пример вектора, зависящего от точки пространства, в которой он рассматривается, то есть пример векторной функции \vec{r} . Это радиус-вектор:

$$\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z, \quad (1.13)$$

который представляет собой направленный отрезок, соединяющий начало координат $O(0, 0, 0)$ с некоторой «текущей» точкой $M(x, y, z)$. Длина радиус-вектора $r = O \cdot M$ (его абсолютное значение) есть скалярная функция:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отрезок, соединяющий точки $P(x', y', z')$ и $M(x, y, z)$, изображается разностью их радиус-векторов:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{x}_0(x - x') + \vec{y}_0(y - y') + \vec{z}_0(z - z'). \quad (1.14)$$

Абсолютное значение этого вектора выражает расстояние между точками P и M :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (1.15)$$

Векторный дифференциал длины вектора \vec{r} из (1.13) запишется:

$$d\vec{r} = \vec{x}_0 dx + \vec{y}_0 dy + \vec{z}_0 dz. \quad (1.16)$$

Пусть задана векторная функция $\vec{v}(x, y, z)$, и соответствующее векторное поле описывается силовыми линиями. Будем считать, что $d\vec{l}$ есть векторный дифференциал силовой линии. Тогда он везде параллелен вектору $\vec{v} = \vec{x}_0 v_x + \vec{y}_0 v_y + \vec{z}_0 v_z$, то есть $d\vec{l} = k\vec{v}$ (k – коэффициент пропорциональности). Сравнивая представления $d\vec{l}$ и \vec{v} в декартовых координатах, получаем пропорцию:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (1.17)$$

из которой следуют дифференциальные уравнения, характеризующие силовые линии.

При изучении различных полей важную роль играет обратная величина расстояния между точками, определяемая согласно (1.15) как:

$$\psi(\vec{r}, \vec{r}') = \psi(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (1.18)$$

Фиксируя точку $P(x', y', z')$, будем рассматривать эту величину как функцию $\psi(x, y, z)$, и вычислим ее градиент. Находим:

$$\text{grad}\psi = \frac{\vec{x}_0(x-x') + \vec{y}_0(y-y') + \vec{z}_0(z-z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}},$$

или

$$\text{grad}\psi = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.19)$$

В частности, когда точка $P(x', y', z')$ совпадает с началом координат $O(0, 0, 0)$, то есть $\vec{r}' = 0$, имеем:

$$\text{grad}\psi = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}_0}{r^2},$$

где \vec{r}_0 – орт радиального направления.

Если же фиксирована точка $M(x, y, z)$, то $\frac{1}{|r-r'|}$ есть функция $\psi(x', y', z')$. В этом случае $\text{grad}'\psi = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$, или если $M(x, y, z)$ совпадает с началом координат $O(0, 0, 0)$, то есть $\vec{r} = 0$, имеем:

$$\text{grad}'\psi = -\frac{\vec{r}'}{(r')^3} = -\frac{\vec{r}'_0}{(r')^2}.$$

1.6 Примеры на различные элементарные действия с векторами

Рассмотрим вектор $\vec{A} = 3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z}$.

а) Найти длину вектора \vec{A} .

Для квадрата вектора \vec{A} справедливо равенство: $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, где A_i – проекции вектора на соответствующие оси прямоугольной системы коор-

динат. Тогда $A^2 = |\vec{A}||\vec{A}| \cos \alpha = 3^2 + 4^2 + 5^2$, откуда следует, что $A = \sqrt{50}$ – есть длина вектора \vec{A} .

б) Какова длина проекции вектора \vec{A} на плоскость xOy или $z = 0$?

Вектор, являющийся проекцией \vec{A} на плоскость xOy , это вектор $\vec{B} = 3\vec{x} + 4\vec{y}$; $B^2 = \vec{B}\vec{B}$; $B = 5$.

в) Построить вектор, лежащий в плоскости xOy , и перпендикулярный вектору \vec{A} .

Запишем этот вектор в виде $\vec{B} = B_x\vec{x} + B_y\vec{y}$ и обладающий свойством $\vec{A}\vec{B} = 0$, или $(3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z})(B_x\vec{x} + B_y\vec{y}) = 0$.

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z,$$

для нашего случая примет вид $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z})(B_x\vec{x} + B_y\vec{y}) = 3B_x + 4B_y = 0$ или $B_y/B_x = -3/4$. Последнее выражение есть уравнение прямой.

г) Построить единичный вектор \vec{B}_0 .

Для этого вектора $B_x^2 + B_y^2 = 1$, или

$$3B_x = -4B_y; \quad 9B_x^2 = 16B_y^2;$$

$$B_x = \frac{4}{5}; \quad B_y = -\frac{3}{5}$$

откуда

$$\vec{B}_0 = \frac{4}{5}\vec{x}_0 - \frac{3}{5}\vec{y}_0.$$

д) Найти скалярное произведение вектора \vec{A} на вектор $\vec{C} = 2\vec{x}_0$.

По определению $\vec{A} \cdot \vec{C} = A_x \cdot C_x + A_y \cdot C_y + A_z \cdot C_z = A_x \cdot C_x = 6$.

е) Выразить вектор \vec{A} и \vec{C} в системе отсчета, полученной из системы x, y, z поворотом на $\pi/2$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси z .

Новые единичные векторы $\vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0$ связаны со старыми $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ следующими соотношениями: $\vec{x}'_0 = \vec{y}_0$; $\vec{y}'_0 = -\vec{x}_0$; $\vec{z}'_0 = \vec{z}_0$.

Таким образом, все \vec{x} заменяем на $-\vec{y}'$; \vec{y} заменяем на \vec{x}' , получим:

$$\vec{A} = 4\vec{x}' - 3\vec{y}' + 5\vec{z}'; \quad \vec{C} = -2\vec{y}'.$$

ж) Найти скалярное произведение векторов \vec{A} и \vec{C} в штрихованной системе координат.

По определению $\vec{A}\vec{C} = A_y C_y = (-3)(-2) = 6$, точно такое же, как и в нештрихованной системе координат.

з) Найти векторное произведение $\vec{A} \times \vec{C}$.

$$\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10\vec{y} - 8\vec{z} = \vec{B}.$$

Образуя скалярное произведение, покажем, что новый вектор перпендикулярен как к \vec{A} , так и к \vec{C} :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 10 - 5 \cdot 8 = 0;$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 0 = 0.$$

и) Найти вектор $\vec{B} = \vec{A} - \vec{C}$.

По определению:

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{C} &= (A_x - C_x) \cdot \vec{x} + (A_y - C_y) \cdot \vec{y} + (A_z - C_z) \cdot \vec{z} = \\ &= (3 - 2) \cdot \vec{x} + (4 - 0) \cdot \vec{y} + (5 - 0) \cdot \vec{z} = \vec{x} + 4\vec{y} + 5\vec{z}. \end{aligned}$$

1.7 Примеры решения типовых задач

1.7.1 Два вектора единичной длины образуют угол $\varphi = 30^\circ$. Найти их скалярное произведение.

Решение: По определению скалярного произведения двух векторов имеем:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.7.2 Доказать, что векторы, имеющие начало в точке $A(-1; 1)$, а концы в точках $B(1; 2)$ и $C(0; -1)$, соответственно, перпендикулярны.

Решение: Предположим, что точки A , B и C лежат на плоскости xOy прямоугольной системы координат.

Обозначим вектор \overline{AB} через \vec{B} , а \overline{AC} через \vec{C} . Тогда:

$$\vec{B} = 2\vec{x} + \vec{y}; \quad \vec{C} = \vec{x} - 2\vec{y}.$$

Условием ортогональности является равенство нулю скалярного произведения векторов \vec{B} и \vec{C} .

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = B_x C_x + B_y C_y = 2 - 2 = 0.$$

Что и требовалось доказать.

1.7.3 В декартовой системе координат проекции векторного поля \vec{A} постоянны в любой точке пространства: $A_x = A_0$, $A_y = B_0$, $A_z = 0$. Построить картину силовых линий векторного поля.

Решение: Поскольку одна из декартовых составляющих векторного поля отсутствует, силовые линии должны представлять собой семейство плоских кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости xOy . Вектор поля в любой точке касателен к силовой линии (см. (1.17)), откуда вытекает дифференциальное уравнение силовых линий:

$$\frac{dx}{A_0} = \frac{dy}{B_0},$$

являющееся следствием подобия двух прямоугольных треугольников с катетами dx , dy и A_0 , B_0 , соответственно. Откуда, общий интеграл уравнения силовых линий имеет вид:

$$y = \frac{B_0}{A_0} x + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Таким образом, силовые линии поля представляют собой однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом наклона к оси X , равным $\frac{B_0}{A_0}$.

1.7.4 Вычислить дивергенцию векторного произведения полей \vec{B} и \vec{A} .

Решение: Воспользуемся краткой записью с помощью оператора Гамильтона:

$$\operatorname{div}[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к приведенному векторному произведению можно применить обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \nabla_A[\vec{A} \cdot \vec{B}] + \nabla_B[\vec{A} \cdot \vec{B}].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, на которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. Учитывая все сказанное, имеем:

$$\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}] = \vec{B}[\nabla_A \vec{A} \cdot] + \vec{A}[\nabla_B \cdot \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}.$$

Знак минус обусловлен некоммутативностью векторного произведения.

1.7.5 Вычислить лапласиан функции $2a \ln \frac{1}{r}$, где $r^2 = x^2 + y^2$, $a = \text{const}$.

Решение: Заданная функция есть вектор на плоскости xOy , то есть мы имеем дело с лапласианом от векторной функции. Задачу решаем прямым дифференцированием. При этом учтем, что $\vec{r} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y$ и, следовательно,

производные $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ от \vec{r} равны нулю.

$$\nabla^2 \left(2a \ln \frac{1}{r} \right) = 2a \nabla^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -2a \frac{1}{r^2} (\nabla^2 \vec{r}) = 0.$$

1.7.6 В декартовой системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную составляющую $A_y = 15x^2$. Проверить, является ли поле: а) соленоидальным; б) потенциальным.

Решение: Необходимым и достаточным условием потенциальности поля \vec{A} является равенство $\text{rot} \vec{A} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{x}_0(0-0) + \vec{y}_0(0-0) + \vec{z}_0(30x-0) = 30x \vec{z}_0 \neq 0, \end{aligned}$$

то есть поле не потенциальное.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля \vec{A} является равенство $\text{div} \vec{A} = 0$.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + \frac{\partial(15x^2)}{\partial y} + 0 = 0,$$

следовательно, поле соленоидальное.

Ответ: поле $A_y = 15x^2$ является соленоидальным.

1.7.7 Даны два векторных поля: $\vec{A} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 5\vec{z}_0$; $\vec{B} = -\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + 6\vec{z}_0$.

Рассчитать:

а) Длину каждого вектора.

б) Скалярное произведение.

в) Определить угол между векторами.

г) Найти направляющие косинусы каждого из векторов.

д) Найти $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$.

е) Найти векторное поле $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$. Показать, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

Решение:

а) Вычислим длины векторов:

$$A = |\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2};$$

$$B = |\vec{B}| = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}.$$

б) Вычислим скалярное произведение:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = -3 + 8 - 30 = -25.$$

в) Определим угол между векторами α . Так как по определению скалярного произведения:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \alpha,$$

то

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})}{A \cdot B} = \frac{-25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{41}} = -0.522$$

и

$$\alpha = \arccos(-0.522) = 123.5^\circ.$$

г) Вычислим направляющие косинусы каждого из векторов.

Для вектора \vec{A} :

$$\cos \alpha_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} = \frac{3}{7.071} = 0.42;$$

$$\cos \alpha_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \frac{4}{7.071} = 0.57;$$

$$\cos \alpha_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{-5}{7.071} = -0.7071.$$

Для вектора \vec{B} :

$$\cos \beta_x = \frac{B_x}{|\vec{B}|} = \frac{-1}{6.403} = -0.156;$$

$$\cos \beta_y = \frac{B_y}{|\vec{B}|} = \frac{2}{6.403} = 0.312;$$

$$\cos \beta_z = \frac{B_z}{|\vec{B}|} = \frac{6}{6.403} = 0.937.$$

д) Вычислим сумму $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$. При сложении векторов алгебраически складывают их компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= \vec{x}_0(A_x + B_x) + \vec{y}_0(A_y + B_y) + \vec{z}_0(A_z + B_z) = \\ &= \vec{x}_0(3 - 1) + \vec{y}_0(4 + 2) + \vec{z}_0(-5 + 6) = 2\vec{x}_0 + 6\vec{y}_0 + \vec{z}_0; \\ \vec{A} - \vec{B} &= \vec{x}_0(A_x - B_x) + \vec{y}_0(A_y - B_y) + \vec{z}_0(A_z - B_z) = \\ &= \vec{x}_0(3 + 1) + \vec{y}_0(4 - 2) + \vec{z}_0(-5 - 6) = 4\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 - 11\vec{z}_0. \end{aligned}$$

е) Вычислим векторное произведение $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$:

$$\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{x}_0(\vec{x}_0(24+10) + \vec{y}_0(5-18) + \vec{z}_0(6+4)A_yB_z - A_zB_y) + \vec{y}_0(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{z}_0(A_xB_y - A_yB_x) = \vec{x}_0(24+10) + \vec{y}_0(5-18) + \vec{z}_0(6+4) = 34\vec{x}_0 - 13\vec{y}_0 + 10\vec{z}_0$$

и покажем, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} , то есть что $(\vec{A} \cdot \vec{C}) = 0$ и что $(\vec{B} \cdot \vec{C}) = 0$. Действительно:

$$(\vec{A} \cdot \vec{C}) = A_x \cdot C_x + A_y \cdot C_y + A_z \cdot C_z = 34 \cdot 3 + (-13) \cdot 4 + 10 \cdot (-5) = 0$$

и

$$(\vec{B} \cdot \vec{C}) = B_x \cdot C_x + B_y \cdot C_y + B_z \cdot C_z = 34 \cdot (-1) + (-13) \cdot 2 + 10 \cdot 6 = 0,$$

а при этом вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

1.7.8. Две материальные точки 1 и 2 движутся вдоль осей x и y соответственно со скоростями $v_1 = 2\vec{x}_0$ см/с и $v_2 = 3\vec{y}_0$ см/с. При $t = 0$ их координаты равны $x_1 = -3$ см; $y_1 = 0$ см; $x_2 = 0$ см; $y_2 = -3$ см.

а) Найдите вектор $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, выражающий положение материальной точки 2 относительно точки 1 как функции времени.

б) Когда и где расстояние между этими точками является наименьшим?

Решение:

а) Запишем выражение для радиусов-векторов точек 1 и 2 как функцию времени:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t=0) + \vec{v}_1 \cdot t = (-3 + 2t) \cdot \vec{x}_0,$$

где $v_1 = 2\vec{x}_0$, $\vec{r}_1(t=0) = -3\vec{x}_0$;

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_2(t=0) + \vec{v}_2 \cdot t = (-3 + 3t) \cdot \vec{y}_0,$$

где $v_2 = 3\vec{y}_0$, $\vec{r}_2(t=0) = -3\vec{y}_0$.

б) Расстояние между точками будет изменяться со временем, и его будет характеризовать длина вектора:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = (3 - 2t)\vec{x}_0 + (-3 + 3t)\vec{y}_0,$$

которая равна

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{(2t-3)^2 + (3t-3)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}.$$

Чтобы найти в какой момент времени будет наименьшее расстояние между точками, продифференцируем выражение для $r(t)$ и приравняем его к нулю:

$$\frac{\partial r(t)}{\partial t} = 0.5 \cdot \frac{26t - 30}{\sqrt{13t^2 - 30t + 18}} = 0.$$

Откуда получим:

$$t = \frac{30}{26} = 1.15c.$$

Ответ: $\vec{r} = [(3-2t) \cdot \vec{x}_0 + (3t-3) \cdot \vec{y}_0]$ см; $t = 1.15$ с.

1.7.9. Докажите, что вектор \vec{a} перпендикулярен к вектору \vec{b} , если $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение.

Из равенства $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ следует, что $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$, то есть:

$$\vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Откуда следует, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Поскольку по определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$, то в рассматриваемом случае $\cos \alpha = 0$, а сам угол между векторами $\alpha = 90^\circ$, то есть вектор \vec{a} перпендикулярен к вектору \vec{b} .

1.7.10. Начало вектора в точке $A(2; 3)$; конец его в точке $B(-1; 4)$.

Разложить этот вектор по единичным векторам координатных осей.

Решение.

$$\overline{AB} = (-1-2)\vec{x}_0 + (4-3)\vec{y}_0 = -3\vec{x}_0 + \vec{y}_0.$$

Ответ: $\overline{AB} = -3\vec{x}_0 + \vec{y}_0$.

1.7.11. Доказать, что векторы, имеющие начало в точке $A(-1; 1)$, а концы в точках $B(1; 2)$ и $C(0; -1)$ соответственно, ортогональны.

Решение.

Запишем выражения для векторов:

$$\overline{AB} = (1+1)\vec{x}_0 + (2-1)\vec{y}_0 = 2\vec{x}_0 + \vec{y}_0;$$

$$\overline{AC} = (0+1)\vec{x}_0 + (-1-1)\vec{y}_0 = \vec{x}_0 - 2\vec{y}_0.$$

Запишем выражение для скалярного произведения векторов:

$$(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Ответ: векторы ортогональны, так как их скалярное произведение равно нулю.

1.7.12. Найти угол, который составляет винтовая линия $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = vt$ с ее осью (ось z). Здесь величина v численно равна линейной скорости вращательного движения $v = \omega \cdot r$.

Решение.

Запишем выражение для вектора касательной \overline{dr} :

$$\overline{dr} = dx \cdot \vec{x}_0 + dy \cdot \vec{y}_0 + dz \cdot \vec{z}_0 = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{y}_0 + v \cdot \vec{z}_0.$$

Запишем выражения для косинуса угла θ , который составляет винтовая линия с осью z для $|\vec{z}_0|$, для $(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)$ и для $|\vec{dr}|$, а затем вычислим $\cos\theta$ и θ :

$$\cos\theta = \frac{(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)}{|\vec{dr}| \cdot |\vec{z}_0|}; \quad |\vec{z}_0| = 1; \quad (\vec{dr} \cdot \vec{z}_0) = dr_z \cdot 1 = v;$$

$$|\vec{dr}| = \sqrt{(r \cdot \omega)^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t) + \sin^2(\omega \cdot t)) + v^2} = \sqrt{(r \cdot \omega)^2 + v^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2};$$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{dr} \cdot \vec{z}_0)}{|\vec{dr}| \cdot |\vec{z}_0|} = \frac{v}{v\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ.$$

Ответ: $\theta = 45^\circ$.

1.7.13. Вычислить лапласиан функции $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U)}{\partial r}$, если функция $U = U(x, y, z)$ – гармоническая, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение.

Запишем выражения для комплексной амплитуды гармонической функции $U = U(x, y, z)$ и для лапласиана функции $\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U)}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_0 \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}); \\ \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot U_0 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}))}{\partial r} \right] = \\ &= U_0 \cdot \nabla^2 \left[\frac{1}{r} \cdot (2 \cdot r \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{r}^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot j \cdot \vec{k}) \right] = \\ &= U_0 \cdot \nabla^2 \left[(2 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right]. \end{aligned}$$

Запишем выражения для векторов \vec{r} и \vec{k} и для скалярного произведения $(\vec{k} \cdot \vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0; \\ \vec{k} &= k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0; \\ (\vec{k} \cdot \vec{r}) &= k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z. \end{aligned}$$

С учётом последнего выражения формула для лапласиана $\nabla^2 \varphi$ примет вид:

$$\nabla^2 \varphi = U_0 \cdot \nabla^2 \left\{ [2 + j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)] \cdot \exp(j \cdot k_x \cdot x) \cdot \exp(j \cdot k_y \cdot y) \cdot \exp(j \cdot k_z \cdot z) \right\}.$$

Лапласиан функции $\nabla^2 \varphi$ в декартовой системе координат равен:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Вычислим каждое слагаемое лапласиана функции отдельно:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (2 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ j \cdot k_x \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) (3 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= U_0 \left\{ (j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (3 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} = \\
&= -U_0 \cdot k_x^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})
\end{aligned}$$

В силу симметрии функции относительно декартовой системы координат, имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -U_0 \cdot k_y^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}); \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -U_0 \cdot k_z^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}).
\end{aligned}$$

Вычислим лапласиан, суммируя три последних выражения для его слагаемых:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -U_0 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \\
&= -U_0 \cdot |\vec{k}|^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}).
\end{aligned}$$

Ответ: $\nabla^2 \varphi = -U_0 \cdot |\vec{k}|^2 \cdot \exp(j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (4 + j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})$.

1.7.14. В декартовой системе координат скалярное поле φ имеет вид $\varphi = \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})$, где $j = \sqrt{-1}$; $\vec{k} = k_x \vec{x}_0 + k_y \vec{y}_0 + k_z \vec{z}_0$; \vec{r} – радиус-вектор; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орты. Найти выражения для $\text{grad } \varphi$ и $\nabla^2 \varphi$.

Решение.

Запишем выражения для векторов \vec{r} и \vec{k} , для скалярного произведения $(\vec{r} \cdot \vec{k})$ и для скалярного поля φ :

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0; \\
\vec{k} &= k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0; \\
(\vec{k} \cdot \vec{r}) &= k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z; \\
\varphi &= \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp[-j \cdot (k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)].
\end{aligned}$$

Найдём выражение для $\text{grad } \varphi$:

$$\begin{aligned}
\text{grad } \varphi &= \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\
&= -j \cdot k_x \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{x}_0 - j \cdot k_y \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{y}_0 - j \cdot k_z \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{z}_0 = \\
&= -j \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x \cdot \vec{x}_0 + k_y \cdot \vec{y}_0 + k_z \cdot \vec{z}_0) = -j \cdot \vec{k} \cdot \varphi.
\end{aligned}$$

Вычислим лапласиан:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \\ &= (-j \cdot k_x)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (-j \cdot k_y)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) + (-j \cdot k_z)^2 \cdot \exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) = \\ &= -\exp(-j \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = -\vec{k}^2 \cdot \varphi.\end{aligned}$$

Ответ: $\text{grad}\varphi = -j \cdot \vec{k} \cdot \varphi$; $\nabla^2\varphi = -\vec{k}^2 \cdot \varphi$.

1.7.15. В сферической системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную r -ю составляющую, причем $A_r = f(r)$. Какова должна быть функция $f(r)$ чтобы дивергенция поля \vec{A} обращалась тождественно в нуль? Построить картину силовых линий поля.

Решение.

Запишем выражение для r -ой составляющей дивергенции поля \vec{A} в сферической системе координат и приравняем её к нулю:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot f(r))}{\partial r} = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{\partial(r^2 \cdot f(r))}{\partial r} = 0, \quad r^2 \cdot f(r) = \text{const} = a \quad \text{и} \quad f(r) = \frac{a}{r^2}.$$

Другой вариант решения. Из выражения:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = 0$$

получим равенство:

$$\frac{\partial A_r}{A_r} = -\frac{2 \cdot \partial r}{r},$$

интегрирование которого даёт:

$$\ln A_r = -2 \ln r + \ln C \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{A_r \cdot r^2}{C}\right) = 0.$$

Это означает, что:

$$\left(\frac{A_r \cdot r^2}{C}\right) = 1 \quad \text{и} \quad f(r) = A_r = \frac{C}{r^2}.$$

Картина силовых линий поля $A_r = f(r)$ изображена на рисунке 1.1.

Ответ: $f(r) = A_r = \frac{C}{r^2}$, где C – константа.

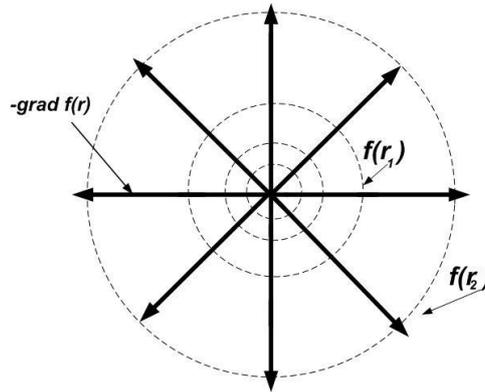


Рисунок 1.1 – Картина силовых линий поля

1.7.16. Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , характеризуемого следующими составляющими в цилиндрической системе координат: $A_r = \frac{10}{r^3}$, $A_\varphi = 0$, $A_z = 0$.

Решение.

Запишем выражение для дивергенции и ротора векторного поля \vec{A} в цилиндрической системе координат при $A_r = \frac{10}{r^3}$, $A_\varphi = 0$ и $A_z = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot A_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{10}{r^3} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{10}{r^3} = \frac{-3 \cdot 10}{r^4} + \frac{10}{r^4} = -\frac{20}{r^4}. \\ \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{r}_0 \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right] + \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right] = \\ &= \vec{\psi}_0 \cdot \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} \right] + \vec{z}_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[-\frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right] = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{20}{r^4}$, $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$.

1.7.17. В сферической системе координат векторное поле $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$. Определить скалярное поле $\operatorname{div} \vec{A}$. Качественно построить картину силовых линий векторного поля.

Решение.

Запишем выражение для дивергенции векторного поля \vec{A} в сферической системе координат при $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2}{r} A_r = \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{2r}{r} = 1 + 2 = 3.$$

Качественная картина силовых линий векторного поля $\vec{A} = r \cdot \vec{r}_0$ изображена на рисунке 1.2.

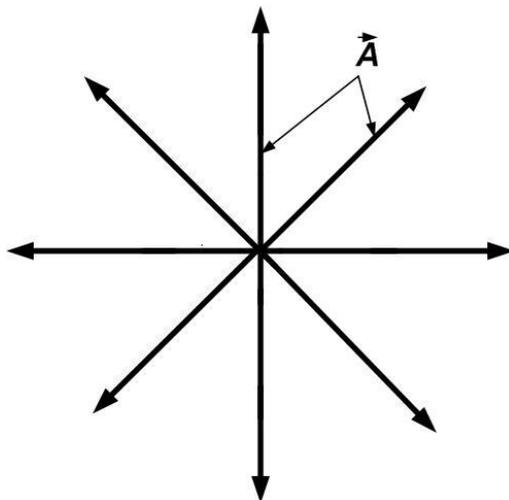


Рисунок 1.2 – Качественная картина силовых линий векторного поля

Ответ: $\text{div}\vec{A} = 3$.

1.8 Задачи для самостоятельной работы

1.8.1 В декартовой системе координат векторное поле \vec{A} имеет единственную составляющую A_z . Установить является ли поле соленоидальным или потенциальным.

Данные для решения задачи приведены в таблице 1.1 и зависят от номера варианта.

Таблица 1.1 – Данные для решения задачи

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_z	$5x+4$	$x+y^2$	$6\ln x$	$\sin^2 x$	$\cos 2y$	$3\text{tg} x$	$\text{ctg} y$	$x^y - y$	$x - y$	xy
Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A_z	$x - y^3$	$\ln(x/y)$	$\ln(xy)$	$x^3 + y^2$	$\ln(x^3 y)$	e^y	e^{y-x}	$\frac{1}{\cos x}$	$\text{tg} 2x$	x^y
Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A_z	$x^2 - y$	$\text{tg}(y/x)$	$\text{tg}(x^2 y)$	$\cos^2 y$	$\ln(x/y)$	$\text{tg} x$	$x^2 - 3$	$\frac{x^2 - 1}{x}$	$\ln 3x$	y^x

1.8.2 Даны два векторных поля:

$$\vec{A} = A_x \vec{x}_0 + A_y \vec{y}_0 + A_z \vec{z}_0; \quad \vec{B} = 3\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 6\vec{z}_0.$$

Рассчитать:

а) Длину каждого вектора.

б) Скалярное произведение.

в) Определить угол между векторами.

г) Найти направляющие косинусы каждого из векторов.

д) Найти $\vec{A} + \vec{B}$ и разность $\vec{A} - \vec{B}$.

е) Найти векторное поле $\vec{C} = [\vec{A} \cdot \vec{B}]$. Показать, что вектор \vec{C} ортогонален векторам \vec{A} и \vec{B} .

Данные для решения задачи приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 1.2 – Данные для решения задачи

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_x	+3	+4	-5	-6	+7	-2	+5	-7	+2	-1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_y	+5	+6	+7	-8	-1	-3	+3	+4	+5	-6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A_z	+5	-4	-3	+2	+1	-6	-4	-2	+3	-7

1.8.3 Начало вектора в точке $B(2; 3)$; конец его в точке $A(A_x; A_y; A_z)$.

Разложить этот вектор по единичным векторам координатных осей. Данные для решения задачи приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.4 В декартовой системе координат скалярное поле φ задано выражением $\varphi = A_z$. Данные для решения задачи приведены в таблице 1.1 и зависят от номера варианта. Найти выражения для $\text{grad } \varphi$ и $\nabla^2 \varphi$.

1.8.5 В декартовой системе координат проекции векторного поля \vec{A} постоянны в каждой точке пространства. Значения A_x и A_y приведены в таблице 1.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значение $A_z = 0$ для всех вариантов. Построить картину силовых линий поля.

1.8.6 Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , имеющего единственную составляющую в цилиндрической системе координат:

$A_r = \frac{a \cdot c}{r^N}$. Значения постоянных a , c и N приведены в таблице 1.3 и зависят от

номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.7 Определить дивергенцию и ротор векторного поля \vec{A} , имеющего единственную составляющую в сферической системе координат: $A_r = \frac{a \cdot c}{r^N}$. Значения постоянных a , c и N приведены в таблице 1.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 1.3 – Значения постоянных a , c и N

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	+3	+4	-5	-6	+7	-2	+5	-7	+2	-1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
c	+5	+6	+7	-8	-1	-3	+3	+4	+5	-6
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
N	3	4	5	2.5	3.5	4.5	5.5	3.3	4.8	6

1.8.8 Задан потенциал $\varphi = x^2 - y^z$. Найти градиент потенциала в точке с координатами, значения которых ($x = a$, $y = c$, $z = N$) приведены в таблице 1.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

1.8.9 В декартовой системе координат плоское векторное поле описывается уравнением: $\vec{A} = -by \cdot \vec{x}_0 + cx \cdot \vec{y}_0$. Найти уравнение силовых линий векторного поля и построить картину этого поля. Значения постоянных b и c приведены в таблице 1.4 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 1.4 – Значения постоянных b и c

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b	3	4	5	6	7	2	5	7	2	1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
c	5	6	7	8	1	3	3	4	5	6

2 ТЕМА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

2.1 Основные формулы электромагнетизма

$$1. \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ – напряженность электрического поля [В/м],}$$

где \vec{F} – сила, действующая на единичный положительный заряд q_0 .

$$2. \vec{F}_L = q \cdot \vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}] \text{ – сила Лоренца,}$$

где \vec{v} – скорость переноса заряда q , \vec{B} – вектор магнитной индукции.

$$3. F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_a r_{12}^2} \text{ – закон Кулона,}$$

где r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2 , ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость;

$$\epsilon_a = \epsilon \cdot \epsilon_0,$$

где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, а ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость.

$$4. \vec{j}_{np} = \rho \vec{v} = \frac{q}{V} \vec{v} \text{ – плотность тока проводимости при переносе зарядов}$$

в вакууме или в электролитах (плотность тока переноса),

где $\rho = \frac{q}{V}$ – объёмная плотность заряда, \vec{v} – скорость переноса заряда.

$$5. \vec{j}_{np} = \sigma \cdot \vec{E} \text{ – закон Ома в дифференциальной форме,}$$

где σ – удельная проводимость среды (См/м); $\sigma = \frac{1}{\rho_{np}}$ – удельное сопротивление среды (Ом·м).

$$6. \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0 \text{ – закон сохранения заряда.}$$

$$7. \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}; \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a} \text{ – закон Гаусса в интегральной и дифференциальной форме, соответственно.}$$

альной форме, соответственно.

$$8. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I; \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \text{ – закон полного тока в интегральной и}$$

дифференциальной форме, соответственно, где \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля.

Поток $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ вектора \vec{j} плотности полного тока через замкнутую поверхность S равен полному току I через поверхность, а также равен циркуля-

ции $\oint_L \vec{H} d\vec{l}$ вектора \vec{H} по замкнутому контуру L , ограничивающему эту поверхность. Плотность \vec{j} полного тока – это сумма плотностей токов проводимости \vec{j}_{np} , смещения $\vec{j}_{см}$ и плотности поляризационного тока \vec{j}_n .

$$9. \vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ – плотность тока смещения.}$$

10. $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$; $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ – закон электромагнитной индукции в интегральной и дифференциальной форме, соответственно.

Здесь $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ – циркуляция вектора \vec{E} по замкнутому контуру L , ограничивающему замкнутую поверхность S ; $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ – поток вектора магнитной индукции \vec{B} через эту поверхность.

11. $\vec{D} = \tilde{\varepsilon}_a \cdot \vec{E}$; $\vec{B} = \tilde{\mu}_a \cdot \vec{H}$ – материальные уравнения для электрического и магнитного поля, соответственно, где $\tilde{\mu}_a$ и $\tilde{\varepsilon}_a$ – тензоры абсолютной магнитной и абсолютной диэлектрической проницаемостей для анизотропных тел.

12. Для изотропных тел с линейной зависимостью между \vec{D} и \vec{E} и между \vec{B} и \vec{H} :

$$\tilde{\mu}_a = \mu_a = \mu \cdot \mu_0, \quad \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0,$$

где μ_0 и ε_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума, а μ и ε – относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости вещества.

$$13. \vec{j}_n = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \text{ – плотность поляризационного тока,}$$

где $\vec{P} = N \cdot \vec{p}$ – вектор поляризованности, то есть электрический дипольный момент единицы объёма, N – концентрация молекулярных диполей $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$; \vec{l} – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда $-q$ молекулярного диполя к положительному заряду $+q$; длина l вектора \vec{l} – это расстояние между зарядами в диполе.

14. $\vec{E} = -grad \varphi_э$ – связь электростатического поля со скалярным электрическим потенциалом $\varphi_э$.

$$15. \nabla^2 \varphi_э = -\frac{\rho}{\tilde{\varepsilon}_a} \text{ – уравнение Пуассона.}$$

$$16. \nabla^2 \varphi_э = 0 \text{ – уравнение Лапласа.}$$

$$17. \varphi_э(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ – распределение потенциала точечного заряда в вакууме.}$$

уме.

Здесь $\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$, r – расстояние между текущей координатой в пространстве и точечным зарядом q , а \vec{r}_0 – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором напряженности электростатического поля \vec{E} в текущей координате.

18. $w_3 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ – объемная плотность энергии электростатического поля.

19. $L = \frac{n\Phi}{I}$ – индуктивность катушки,

где n – число витков, $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ – поток вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S внутри сердечника катушки, ориентированную перпендикулярно вектору магнитной индукции \vec{B} .

20. $\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$ – векторный потенциал \vec{A} линейного тока.

Здесь интегрирование ведётся по контуру тока I ; $d\vec{l}$ – это вектор, равный по величине длине бесконечно малого отрезка dl проводника с током и ориентированный вдоль направления протекания тока I по участку dl ; r – расстояние от середины отрезка dl до точки, в которой вычисляется векторный потенциал \vec{A} .

21. Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \text{ или } \vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \text{rot} \int \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

22. $R = \rho_{np} \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}$ – электрическое сопротивление проводящей прослойки толщиной l между взаимно параллельными плоскими пластинами с площадью S ; ρ_{np} – удельное электрическое сопротивление; σ – удельная электрическая проводимость.

23. $R_{12} = \rho_{np} \cdot \int_a^b \frac{dr}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dr}{4\pi \cdot r^2}$ – сопротивление между обкладками сферического конденсатора,

где a – радиус внутренней обкладки; b – радиус наружной обкладки.

24. $q = C \cdot U$ – зависимость величины заряда q от величины напряжения U на обкладках конденсатора и от электрической ёмкости C конденсатора.

25. $W_{эл} = \frac{CU^2}{2}$ – энергия, накопленная конденсатором при приложении постоянного напряжения U .

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Точечный заряд $+q$ находится на расстоянии d от бесконечного водника, занимающего, условно, левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность зарядов, индуцированных зарядом $+q$ на поверхности проводника.

Решение.

Предположим, что на продолжении перпендикуляра, опущенного из $+q$ на поверхность проводника, находится на расстоянии d от этой поверхности заряд $-q$, затем мысленно устраним сам проводник. Тогда плоскость, совпадавшая ранее с поверхностью проводника, будет обладать требуемым потенциалом нуль, ибо все точки этой плоскости будут равно отстоять от равных по величине и противоположных по знаку зарядов $+q$ и $-q$. Стало быть, поле совокупности этих зарядов в правом полупространстве тождественно с некоторым полем заряда $+q$ и зарядов, индуцированных им на поверхности бесконечного проводника.

Таким образом, задача сведена к простой задаче определения поля двух точечных зарядов $+q$ и $-q$. В этом заключается суть метода конформных отображений.

Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направлена вправо и проходит через заряд $+q$, а плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью проводника. Расстояние произвольной точки P с координатами r и z от зарядов $+q$ и $-q$ будет равно соответственно:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (z - d)^2}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + (z + d)^2},$$

что следует из рассмотрения прямоугольных треугольников. Потенциал в правом полупространстве будет:

$$\varphi = \frac{l}{r_1} - \frac{l}{r_2}.$$

С другой стороны $E = -\text{grad } \varphi$ или, в нашем случае, $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. При $z = 0$ имеем:

$$E_z|_{z=0} = -q \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + d)^2}} \right]_{z=0} = -\frac{2qd}{R_1^3}.$$

С другой стороны, поскольку поле внутри проводника равно нулю, то:

$$E_z = 4\pi\sigma,$$

где σ – плотность поверхностного заряда. Откуда:

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi R_1^3}.$$

Очевидно, что на поверхности проводника индуцирован заряд $-q$. В этом можно убедиться непосредственным интегрированием $q = \int_V \sigma dV = -q$.

2.2.2 Заряд равномерно распределен на шаровой поверхности произвольного радиуса R . Определить скачок вектора \vec{E} при прохождении через заряженную поверхность шара.

Решение.

Вследствие симметрии поверхности шара вектор \vec{E} параллелен (или антипараллелен) \vec{R} и является функцией лишь от R_0 . Для определенности, пусть заряд q распределен на шаровой поверхности с $R = a$. По теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$, при R меньше a имеем:

$$E_r \cdot 4\pi R^2 = 0.$$

При R больше a :

$$E_r \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Скачок вектора \vec{E} при прохождении через поверхность сферы равен:

$$E_e - E_i = \frac{q}{a^2} = 4\pi\sigma;$$

$$q = \sigma \cdot 4\pi a^2,$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

2.2.3 По бесконечно прямому полому круглому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Показать, что поле тока внутри цилиндра равно нулю.

Решение.

Направим ось z декартовой системы координат вдоль оси цилиндра. Тогда, в сечении $z = \text{const}$ будем иметь круг, внутри которого выберем произвольную точку P . Проведем через точку P две меридианные плоскости, пересекающие поверхность цилиндра на ряд прямоугольных полосок, параллельных оси z . Ширина двух противоположных полосок равна соответственно:

$$dS_1 = r_1 \cdot d\varphi \text{ и } dS_2 = r_2 \cdot d\varphi,$$

где r_1 и r_2 расстояние от точки пересечения меридианных плоскостей до образующей цилиндра, а $d\varphi$ — угол между ними. Сила тока, протекающего по этим полоскам, будет, очевидно, пропорциональна их ширине:

$$dJ_1 = k dS_1 = k r_1 \cdot d\varphi \text{ и } dJ_2 = k r_2 \cdot d\varphi.$$

Напряженность магнитного поля бесконечного прямоугольного тока на расстоянии r от его оси дается соотношением:

$$H = \frac{2J}{C \cdot r},$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от системы единиц измерения. Подставим токи, рассматриваемые в нашей задаче:

$$dH_1 = 2 \frac{dJ_1}{C \cdot r_1} = 2k \frac{r_1 \cdot d\varphi}{C \cdot r_1} = \frac{2kr_2 \cdot d\varphi}{C \cdot r_2} = dH_2.$$

Мы получили, что поля, возбуждаемые каждой из этих полосок тока в точке P , равны друг другу, но противоположно направлены. Следовательно, результирующее поле внутри цилиндра равно нулю.

2.2.4 Внутри сферической области радиусом a распределен электрический заряд с объемной плотностью ρ . Предполагая, что абсолютная диэлектрическая проницаемость внутренней и внешней области одинакова и равна ϵ_a , определить напряженность электрического поля и потенциал φ в заданной области.

Решение.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, справедливое для внутренней области $R \leq a$, и уравнением Лапласа для внешней области, $\nabla^2\varphi = 0$ при $R \geq a$.

С помощью этих уравнений задача приводится к интегрированию по объему V . Вследствие сферически симметричного распределения заряда (потенциал φ зависит только от расстояния R) в сферической системе координат с началом в центре шара получим:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\varphi}{dR} \right) = \begin{cases} -4\pi\rho, & \text{если } R \leq a; \\ 0, & \text{если } R \geq a. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = 0,$$

откуда

$$R^2 \frac{d\varphi}{dR} = C_1 \text{ или } \frac{d\varphi}{dR} = \frac{C_1}{R^2},$$

где C_1 – неизвестная пока постоянная.

Разделяя переменные и проводя интегрирование, получим:

$$\varphi_e = -C_1 \frac{1}{R} + C_2 \text{ при } R \geq a,$$

где C_2 – также пока неизвестная постоянная.

Теперь рассмотрим второе уравнение:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho$$

или

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho R^2,$$

$$d \left(R^2 \cdot \frac{d\varphi}{dR} \right) = -4\pi\rho R^2 dR.$$

Интегрируя слева, и справа, получим:

$$R^2 \frac{d\varphi}{dR} = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R^3 + C_3$$

или

$$\frac{d\varphi}{dR} = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R + C_3,$$

$$d\varphi = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot R dR + C_3 dR,$$

$$\varphi_i = -\frac{4\pi}{3} \rho \cdot \frac{R^2}{2} + C_3 R + C_4 \text{ при } R \leq a.$$

Следующим этапом решения является определение произвольных постоянных C_n :

1) При $R \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_q(\infty) = 0$, значит $C_2 = 0$.

2) Потенциал в центре заряженной сферы должен быть конечным, поэтому $C_3 = 0$.

Из этих условий получаем:

$$\varphi_e = -C_1 \frac{1}{R}; \quad \varphi_i = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{R^2}{2} + C_4,$$

откуда:

$$C_1 = -R \cdot \varphi_i(R); \quad C_4 = \varphi_i(R) + \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{R^2}{2}.$$

При $R = a$ должны выполняться условия:

$$\varphi(a)_q = \varphi_i(a) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial R} \right)_{R=a} = \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} \right)_{R=a}.$$

Второе условие означает, что нормальная составляющая вектора поля \vec{E} не должна испытывать скачка при прохождении через поверхность шара, так как поверхностная плотность заряда на поверхности шара равна нулю:

$$-\frac{C_1}{a} = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^2}{2} + C_4,$$

$$\frac{C_1}{a} = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot a,$$

откуда:

$$C_1 = -4\pi\rho \cdot \frac{a^3}{3}; \quad C_4 = 2\pi\rho \cdot a^2.$$

Таким образом:

$$\varphi_e = -\frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^3}{R} \text{ при } R \geq a;$$

$$\varphi_i = -\frac{4\pi\rho}{6} (R^2 - 3a^2) \text{ при } R \leq a.$$

Для определения электростатического поля E_R воспользуемся соотношением:

$$E_R = -(\text{grad } \varphi)_R,$$

откуда:

$$E_R^e = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot \frac{a^3}{R^2} \cdot \vec{R}_0 = \frac{q}{R^3} \cdot \vec{R} \text{ при } R \geq a,$$

где $q = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot a^3$ – полный заряд в объеме; \vec{R}_0 – единичный вектор вдоль R ,

$$E_R^i = \frac{4\pi\rho}{3} \cdot R \cdot \vec{R}_0 = q \frac{R}{a^3} \cdot \vec{R}_0 = q \frac{\vec{R}}{a^3} \text{ при } R \leq a.$$

2.2.5 Бесконечно протяженная полая призма, образованная металлическими стенками, ориентированна вдоль оси z . Три стенки, образующие желоб, заземлены и находятся под нулевым потенциалом. Оставшаяся, верхняя, стенка изолирована и имеет потенциал φ_3 . Найти функцию распределения, описывающую распределение потенциала внутри призмы.

Решение.

Данная задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y^2} = 0$$

внутри прямоугольной области с граничными условиями:

$$\varphi_3|_{x=a} = \varphi_3|_{x=0} = \varphi_3|_{y=0} = 0; \quad \varphi_3|_{y=b} = U_0.$$

Воспользуемся методом разделения переменных, и будем искать решение в виде произведения двух функций:

$$\varphi_3(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Подстановка решения в уравнение Лапласа дает:

$$\frac{X''}{x} + \frac{Y''}{y} = 0$$

или

$$\frac{X''}{x} = -k^2, \quad \frac{Y''}{y} = k^2,$$

где k – постоянная разделения.

Решения этих уравнений могут быть записаны в виде:

$$X(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx,$$

$$Y(y) = A_3 \text{ch } ky + A_4 \text{sh } ky.$$

Из граничных условий при $x = y = 0$ следует, что $A_1 = A_3 = 0$. Граничные условия при $x = a$, требуют выполнения равенства:

$$\sin ka = 0$$

или

$$k = \frac{n \cdot \pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда решение запишется в виде:

$$\varphi_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} \cdot y\right),$$

причем систему коэффициентов $\{C_n\}$ следует выбрать таким образом, чтобы удовлетворить оставшемуся граничному условию:

$$\varphi_3(x, y)_{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a} \cdot y\right) = U_0.$$

Умножаем обе части этого равенства на функцию $\sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$ с произвольным целым m и проинтегрируем их по x в пределах от 0 до a . При этом воспользуемся свойством ортогональности системы тригонометрических функций:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) dx = \begin{cases} \frac{a}{2}, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Кроме того:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) dx = \begin{cases} \frac{2a}{m\pi}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому коэффициенты разложения потенциала:

$$C_m = \begin{cases} \frac{4U_0}{m\pi \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{a} b\right)}, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Окончательная формула для потенциала имеет вид:

$$\varphi_3(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi y}{a}\right)}{(2k+1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi b}{a}\right)}, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots$$

2.2.6 В момент времени $t = 0$ скорость электрона $\vec{V} = 104\vec{x}$ м/с, а его радиус-вектор $\vec{r} = \vec{y}_0$ м. Определить радиус-вектор при $t = 0.1$ с. Внешние силы отсутствуют.

Решение:

1) Воспроизведём условия задачи, представленные в виде текста, на рисунке 2.1 в декартовой системе координат.

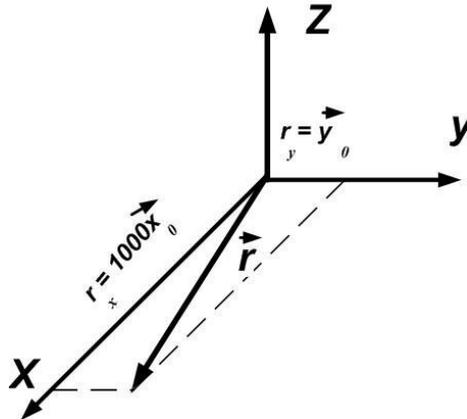


Рисунок 2.1 – Иллюстрация к решению задач 2.2.6

2) В общем виде радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ м, а в нашем случае: $z = 0$; $y = \vec{y}_0$ не меняется во времени; $x = \vec{V}t = 10^4 \vec{x}t = 10^4 \cdot 0.1\vec{x}_0 = 1000\vec{x}_0$.

С учётом этого:

$$\vec{r} = y\vec{y}_0 + 1000 \vec{x}_0.$$

Ответ: $\vec{r} = y\vec{y}_0 + 1000 \vec{x}_0$.

2.2.7 Чему равна полная электростатическая сила, действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, помещенного в центре квадрата со стороной a , если по углам квадрата расположены (по часовой стрелке) заряды q , $2q$, $-4q$ и $2q$.

Решение.

1) Воспроизведём условия задачи, представленные в виде текста, на рисунке 2.2.

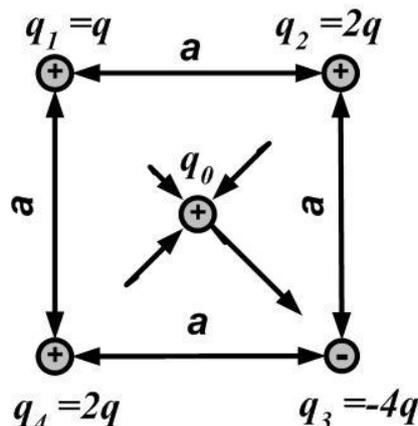


Рисунок 2.2 – Иллюстрация к решению задач 2.2.7

2) Сила \vec{F} , действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, как известно, называется напряжённостью электрического поля \vec{E} . Сила \vec{F} равна алгебраической сумме векторов сил ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ и \vec{F}_4) взаимодействия зарядов, расположенных по углам квадрата, и единичного положительного заряда $+q_0$:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_j = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

3) Длину F вектора силы \vec{F}_j можно определить по закону Кулона:

$$\vec{F}_j = \frac{q_j q_0}{4\pi\epsilon_a (r_{j,0})^2},$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $r_{j,0}$ – расстояние между единичным положительным зарядом $+q_0$ и зарядом q_j .

С учётом того, что согласно рисунку 2.2 силы \vec{F}_2 и \vec{F}_3 направлены по одной прямой, но в противоположные стороны, а также того, что $q_2 = q_3$ и $r_{2,0} = r_{3,0}$, по закону Кулона получим:

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= -\vec{F}_3; \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= 0.\end{aligned}$$

В этом случае выражение для вычисления вектора результирующей силы \vec{F} упростится:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

4) Из рисунка 2.2 видно, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 направлены вдоль одной и той же прямой и в одну и ту же сторону. С учётом этого, выражение для вычисления длины F вектора результирующей силы \vec{F} примет вид:

$$F = F_1 + F_3.$$

Из рисунка 2.2 также видно, что абсолютные величины $r_{j,0}$ расстояния между единичным положительным зарядом $+q_0$ и зарядами q_j одинаковы и равны половине длины диагонали квадрата:

$$r_{j,0} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad a (r_{j,0})^2 = \frac{a^2}{2}.$$

В результате по закону Кулона получим значение силы в Ньютонах $[H]$:

$$F = F_1 + F_3 = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_a \frac{a^2}{2}} + \frac{4q \cdot q_0}{4\pi\epsilon_a \frac{a^2}{2}} = \frac{5q \cdot q_0}{2\pi\epsilon_a a^2} [H].$$

5) Длина вектора силы \vec{F} , действующей на единицу положительного заряда $+q_0$, то есть величина E вектора напряжённости электрического поля \vec{E} равна в Вольтах на метр (В/м):

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{5q}{2\pi\epsilon_a a^2}.$$

Ответ: $E = \frac{F}{q_0} = \frac{5q}{2\pi\epsilon_a a^2}$ [В/м].

2.2.8 Заряженная частица движется в направлении \vec{x} в пространстве, где имеется электрическое поле \vec{E}_y и перпендикулярное к нему магнитное поле с индукцией B_z со скоростью v_x . При каком условии результирующая сила F , действующая на эту частицу равняется нулю. Показать векторы $\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ на рисунке. Какова должна быть величина v_x , если $E_y = 3 \cdot 10^3$ В/м, а $B_z = 3 \cdot 10^2$ Тл.

Решение.

1) Запишем формулу для определения вектора силы Лоренца \vec{F}_L , действующей на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью \vec{v} при наличии электрического поля \vec{E} и магнитного поля с индукцией \vec{B} :

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

Покажем векторы $\vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$ на рисунке 2.3.

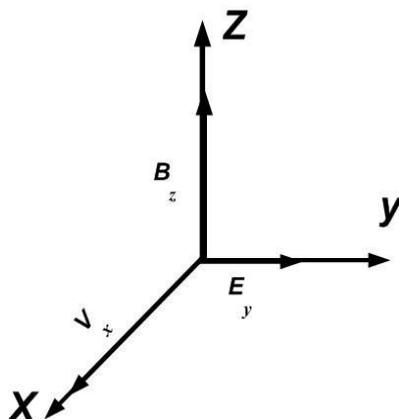


Рисунок 2.3 – Иллюстрация к решению задач 2.2.8

2) Запишем условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}] = 0 \text{ или } [\vec{v}\vec{B}] = -\vec{E}.$$

В матричной форме это условие для нашей задачи принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \vec{v}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = -E_y \cdot \vec{y}_0.$$

3) Раскрываем определитель и получаем:

$$-v_x \cdot B_z \cdot \vec{y}_0 = -E_y \cdot \vec{y}_0.$$

Откуда получаем в простом виде условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю:

$$v_x = \frac{E_y}{B_z} = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^5 \text{ м/с}.$$

Ответ: условие, при котором результирующая сила F , действующая на частицу, равняется нулю $-v_x = 10^5$ м/с.

2.2.9 Пусть плоское силовое поле имеет потенциал $\varphi = \alpha \cdot x \cdot y$ (α – постоянная). Найти само поле и его силовые линии.

Решение.

Подставим заданное выражение для потенциала φ в формулу для определения напряжённости электрического поля \vec{E} и произведём операцию дифференцирования:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0\right) = -\alpha(y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0).$$

В полученном выражении имеются две проекции вектора напряжённости электрического поля \vec{E} :

$$E_x = -\alpha \cdot y \text{ и } E_y = \alpha \cdot x.$$

Подставим их в уравнение силовых линий \vec{E} для двухмерного поля:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Тогда получим:

$$-\frac{dx}{y\alpha} = -\frac{dy}{x\alpha} \text{ или } x \cdot dx = y \cdot dy.$$

Проинтегрировав правую и левую части последнего выражения, находим:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + A \text{ или } x^2 = y^2 + C,$$

где A и $C = 2A$ – постоянные интегрирования.

Ответ: поле \vec{E} описывается выражением $\vec{E} = -\alpha(y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0)$, а его силовые линии – гиперболы, описываемые выражением $x^2 = y^2 + C$.

2.2.10 Бесконечно тонкий кольцевой проводник радиусом a несет полный заряд q . Определить скалярный потенциал φ_{Σ} и напряжённость электрического поля в точках на оси кольца. Исследовать характер зависимости напряжённости электрического поля от расстояния на оси кольца.

Решение.

Введем цилиндрическую систему координат, ось которой перпендикулярна плоскости кольца и проходит через центр окружности, образованной кольцом. Квадрат расстояния между точкой i на оси z и любой точкой кольца будет равен:

$$r_i^2 = a^2 + z^2,$$

а элементарный заряд dq , расположенный вблизи этой точки на элементарном отрезке в угловом секторе $d\varphi$ равен:

$$dq = \frac{q \cdot d\varphi}{2\pi}.$$

На рисунке 2.4 показано кольцо в разрезе и силы dF_i , действующие на единичный положительный заряд $+q_0$, находящийся в произвольной точке на оси кольца, при взаимодействии с элементарными зарядами dq , расположенными в диаметрально противоположных точках кольца.

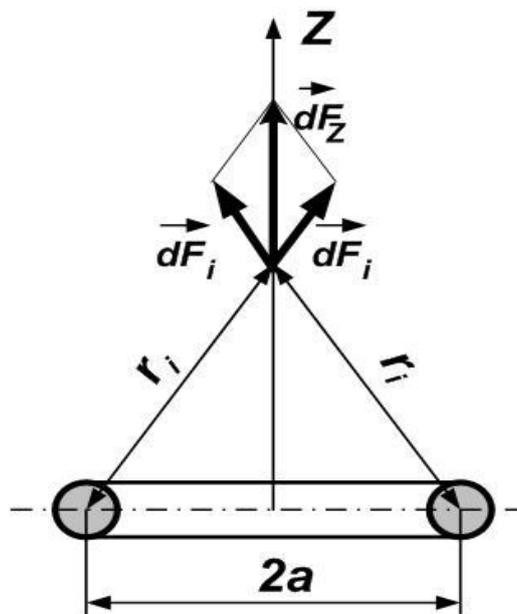


Рисунок 2.4 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.10 для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным (в этом случае направления и численные значения силы \vec{F} и напряжённости электрического поля \vec{E} совпадают)

Величина силы dF_i определяется по закону Кулона:

$$dF_i = \frac{dq \cdot q_0}{4\pi \epsilon_a r_i^2} = q \cdot d\varphi \frac{q_0}{8\pi^2 \epsilon_a (a^2 + z^2)}.$$

Составляющие силы dF_i , перпендикулярные оси z , при взаимодействии с элементарными зарядами dq , расположенными в диаметрально противоположных точках кольца, взаимно уничтожаются, так как они равны по величине и противоположны по направлению, а составляющие dF_z , параллельные оси z , складываются. Из рисунка 2.4 видно, что:

$$dF_z = dF_i \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = qz \cdot d\varphi \frac{q_0}{8\pi^2 \epsilon_a (a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 до 2π , определяем величину силы F_z , действующей на единичный положительный заряд $+q_0$, находящийся в произвольной точке на оси кольца:

$$F_z = qz \cdot \frac{q_0}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отсюда находим величину E_z вектора напряжённости электрического поля \vec{E} в Вольтах на метр [В/м]:

$$E_z = |\vec{E}| = \frac{F_z}{q_0} = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Потенциал в любой точке на оси кольца определяется следующим образом:

$$\varphi_{\text{Э}} = -\int E_z dz = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{d(a^2 + z^2)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Исследуем функцию E_z на экстремум, приравняв производную от неё к нулю:

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{q[(a^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(a^2 + z^2)^{1/2}]}{4\pi\epsilon_a(a^2 + z^2)^3} = 0.$$

Числитель этой производной также равен нулю, а значит:

$$(a^2 + z^2)^{1/2} \cdot [(a^2 + z^2) - 3z^2] = 0.$$

Так как $(a^2 + z^2) \neq 0$, то $(a^2 - 2z^2) = 0$.

Отсюда получим координаты точек экстремума:

$$z = \pm a\sqrt{2}.$$

Из рисунка 2.4 видно, что при $z = 0$ сила $dF_z = 0$, а, следовательно, и напряжённость электрического поля $\vec{E} = 0$. Для изображённого на рисунке случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, направления и численные значения силы \vec{F} и напряжённости электрического поля \vec{E} совпадают, вектор напряжённости электрического \vec{E} направлен параллельно оси z . При $z < 0$ вектор напряжённости электрического поля \vec{E} направлен антипараллельно оси z , то есть $\vec{E} = E_z \cdot \vec{z}_0 < 0$. Таким образом, из анализа рисунка 2.4 следует, что для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, максимум будет при $z > 0$ ($z = a\sqrt{2}$), а минимум – при $z < 0$ ($z = -a\sqrt{2}$). К такому же вы-

воду можно было бы прийти, исследовав вторую производную $\frac{d^2 E_z}{dz^2}$ в точках

экстремума. В точке максимума $\frac{d^2 E_z}{dz^2} < 0$, а в точке минимума $\frac{d^2 E_z}{dz^2} > 0$.

График зависимости напряжённости электрического поля \vec{E} от расстояния Z от центра кольца для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным, изображён на рисунке 2.5.

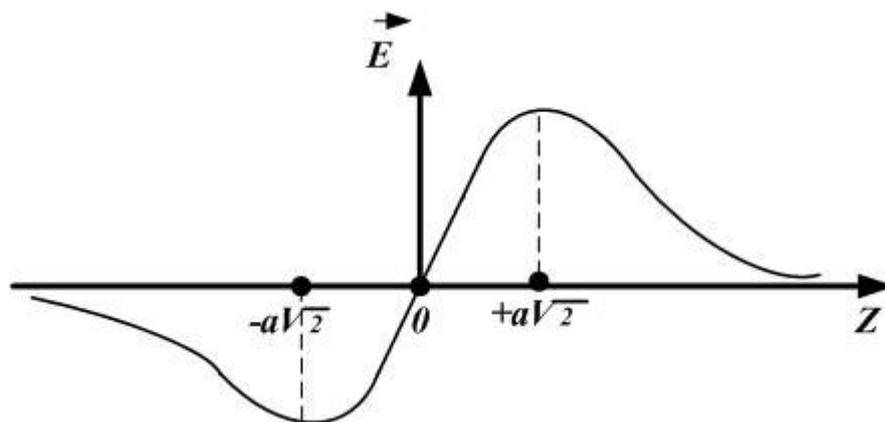


Рисунок 2.5 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.10: график зависимости напряжённости электрического поля \vec{E} от расстояния Z от центра кольца для случая, когда электростатический заряд q на кольцевом проводнике является положительным

Ответ: скалярный потенциал $\varphi_{\text{Э}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a} \cdot \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$; напряжённость электрического поля в точках на оси кольца $E_z = \frac{q \cdot z}{4\pi\epsilon_a (a^2 + z^2)^{3/2}}$.

2.2.11 Постоянный ток I существует в бесконечно тонком линейном проводнике, неограниченно простирающемся вдоль оси z . Найти электрический векторный потенциал \vec{A} , удовлетворяющий соотношению $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ и напряжённость магнитного поля во всем пространстве.

Указание: Решение проводить удобно в цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с направлением тока.

Решение.

Первый вариант.

Запишем закон полного тока (первое уравнение Максвелла в интегральной форме):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

В силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси z . По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0,$$

а первое уравнения Максвелла приводится к выражению:

$$I = H_\varphi \cdot \int_0^{2\pi r} dl = H_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{B_\varphi \cdot 2\pi r}{\mu_a}.$$

Откуда:

$$B_{\varphi} = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = (\text{rot}\vec{A})_{\varphi} + \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Второй вариант.

Электрический векторный потенциал \vec{A} линейного тока определяется известным выражением:

$$\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}.$$

Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \text{rot} \int \frac{d\vec{l}}{r} = \text{rot} \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Величина B вектора магнитной индукции \vec{B} связана с величиной A векторного потенциала \vec{A} выражением (см. рисунок 2.6):

$$B = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{dl \cdot r \cdot \sin \varphi}{r^3}.$$

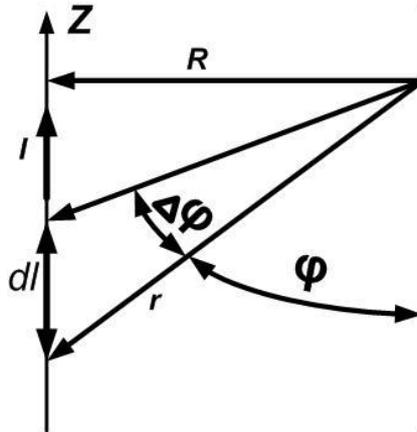


Рисунок 2.6 – Геометрические построения в задаче 2.2.11

С учётом того, что:

$$r = \frac{R}{\sin \varphi}$$

и

$$dl = \frac{r \cdot d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{R \cdot d\varphi}{\sin^2 \varphi},$$

выражение для B примет окончательный вид:

$$B = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{\sin^3 \varphi \cdot R^2 d\varphi}{\sin^2 \varphi \cdot R^3} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi R} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = -\frac{I \cdot \mu_a}{4\pi R} (-1 - 1) = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi R}.$$

Здесь R – радиальная точка наблюдения.

Из окончательного вида выражения для величины B вектора магнитной индукции \vec{B} легко находим выражение для определения величины H напряженности магнитного поля:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi R}.$$

Ответ: величина напряжённости магнитного поля $H = \frac{I}{2\pi R}$. Выражения

для векторного потенциала \vec{A} : $\vec{A} = \frac{I \cdot \mu_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$ и $B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$.

2.2.12 Индуктивная катушка представляет собой одиночный виток, размещенный на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала ($\mu \gg 1$) с размерами: внутренний диаметр равен $2a$, внешний $2b$, высота h (рисунок 2.7). Найти индуктивность катушки.

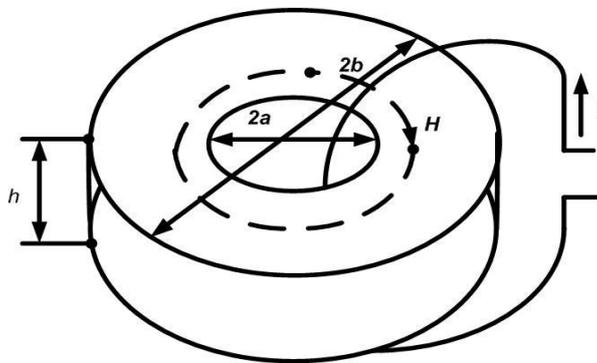


Рисунок 2.7 - Иллюстрация к решению задачи 2.2.12

Решение.

Согласно закону полного тока:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

Для длинного линейного провода в силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности. По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0 = H,$$

а закон полного тока приводится к выражению:

$$H \cdot 2\pi \cdot R = I \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Поскольку $\mu \gg 1$, то потоком рассеяния можно пренебречь, силовые линии магнитного поля \vec{H} в кольцевом магнитопроводе близки по форме к окружности, и можно считать, что последнее приведённое выражение для H применимо и к нашей задаче. Запишем выражения для величины B вектора магнитной индукции \vec{B} и для магнитного потока Φ (потока вектора магнитной индукции) сквозь конечную поверхность S :

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I}{2\pi R},$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I \cdot h}{2\pi} \int_a^b \frac{dR}{R} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Так как по условию виток один ($n = 1$), то индуктивность катушки L и магнитный поток Φ витка связаны соотношением:

$$L = \frac{n\Phi}{I} = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ответ: величина индуктивности $L = \mu_0 \cdot \mu \cdot L = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2.2.13 Пространство между двумя металлическими сферами с радиусами $r_1 = a$ и $r_2 = b$ заполнено однородным проводящим веществом с удельной электрической проводимостью σ (сферический конденсатор). Определить электрическое сопротивление между обкладками такого конденсатора.

Решение.

Из закона Ома: когда площадь сечения тока S не зависит от длины пути тока l :

$$R_{12} = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \cdot S},$$

а, когда площадь сечения тока S зависит от длины пути тока l , но при фиксированном значении l плотность тока постоянна на поверхности S , то:

$$R_{12} = \rho \cdot \int_a^b \frac{dl}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dl}{S}.$$

В частности, сопротивление между обкладками сферического конденсатора:

$$R_{12} = \rho \cdot \int_a^b \frac{dr}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{r} \Big|_a^b = \frac{1/a - 1/b}{4\pi\sigma} = \frac{b-a}{4\pi\sigma \cdot ab}.$$

Ответ: сопротивление между обкладками конденсатора $R_{12} = \frac{b-a}{4\pi\sigma \cdot ab}$.

2.2.14 Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $a = 2$ см и $b = 5$ см, выполненные из металла (рисунок 2.8). Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет 5 В, потенциал наружного цилиндра равен нулю. Определить напряженность электрического поля на окружности $r = 4$ см.

Решение.

Напряженность электрического поля \vec{E} связана с потенциалом φ зависимостью:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

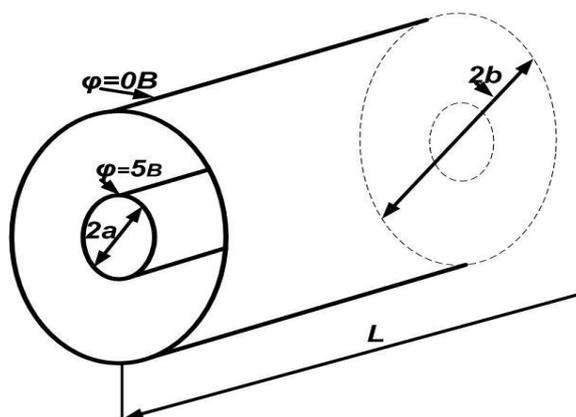


Рисунок 2.8 – Иллюстрация к решению задачи 2.2.14

В силу симметрии цилиндров величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} равна проекции E_r в цилиндрической системе координат, а другие проекции равны нулю:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Интегрируя эту формулу, получаем выражение для напряжения U (разности потенциалов):

$$U = -\int E_r dr + C_1.$$

Чтобы получить формулу для E в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В силу симметрии цилиндров E_r не зависит от dS , поэтому:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r S = 2\pi r l E_r = \frac{q}{\epsilon_a},$$

$$E_r = \frac{q}{2\pi \epsilon_a r l} = \frac{C_2}{r},$$

где C_2 – постоянная:

$$C_2 = \frac{q}{2\pi \epsilon_a l}.$$

Подставим полученное выражение для E_r в формулу для U :

$$U = -\int E_r dr + C_1 = -\int \frac{C_2}{r} dr + C_1 = -C_2 \cdot \ln(r) + C_1.$$

Используя начальные условия для U , найдём значение постоянной C_1 .

1) При $r = 0.05$ м и $U = 0$ В:

$$0 = -C_2 \cdot \ln(0.05) + C_1 \quad \text{и} \quad C_1 = C_2 \cdot \ln(0.05).$$

2) При $r = 0.02$ м и $U = 5$ В:

$$5 = -C_2 \cdot \ln(0.02) + C_1 \quad \text{и} \quad 5 = -C_2 \cdot \ln(0.02) + C_2 \ln(0.05).$$

$$5 = C_2 \ln\left(\frac{0.05}{0.02}\right) + C_2 \ln(2.5); \quad C_2 = \frac{5}{\ln(2.5)} = 5.457;$$

$$C_1 = C_2 \cdot \ln(0.05) = 5.457 \cdot \ln(0.05) = -16.347 \text{ В.}$$

Запишем формулу для расчёта напряжения U и определим напряженность электрического поля E_r на окружности радиуса $r = 0.04$ м:

$$U = -5.457 \cdot \ln(r) - 16.347 \text{ В}; \quad E_r = \frac{C_2}{r} = \frac{5.457}{0.04} = 136.425 \text{ В/м.}$$

Ответ: напряженность электрического поля на окружности радиуса $r = 0.04$ м; $E_r = 136.425$ В/м.

2.2.15 Заряд q равномерно распределен по кольцу радиусом a . В центре кольца находится электрон, обладающий зарядом e и массой m . Электрон имеет возможность совершать малые колебания, перемещаясь вдоль оси кольца. Доказать, что движение электрона будет периодическим. Определить собственную частоту колебания электрона, считая, что его движение не сказывается на распределение зарядов по кольцу.

Решение.

В задаче 2.2.10 была получена формула для расчёта величины E_x вектора напряжённости электрического поля \vec{E}_x в Вольтах на метр (В/м):

$$E_x = |\vec{E}| \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a (a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Применим её. Поскольку $a \gg x$, то можно пренебречь x^2 по сравнению с a^2 :

$$E_x \cong \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a a^3}.$$

Выразим величину силы F , действующей на электрон, через величину напряжённости электрического поля E_x :

$$F = -eE_x = e \frac{q \cdot x}{4\pi\epsilon_a a^3} = -kx,$$

где $k = e \frac{q}{4\pi\epsilon_a a^3}$.

С другой стороны, величина силы F по второму закону Ньютона равна:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Приравняв правые части в найденных выражениях для величины силы F , получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0.$$

Введя обозначение:

$$\frac{k}{m} = \frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m} = \omega^2,$$

то есть:

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{0.5} = \left(\frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m}\right)^{0.5},$$

получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

описывающее гармонические колебания, решение которого имеет вид:

$$x = x \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Ответ: движение электрона будет периодическим и собственная частота колебания электрона ω равна:

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{0.5} = \left(\frac{eq}{4\pi\epsilon_a a^3 m}\right)^{0.5}.$$

2.2.16 По бесконечному цилиндрическому проводнику радиусом a протекает постоянный ток с плотностью j . Определить напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

Решение.

Запишем закон полного тока (первое уравнение Максвелла в интегральной форме):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I.$$

В силу угловой симметрии силовых линий напряжённости магнитного поля \vec{H} и их замкнутости, эти линии представляют собой окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси z . По этой причине:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\varphi = \text{const} \neq 0,$$

а первое уравнения Максвелла приводится к выражению:

$$H_\varphi \cdot 2\pi r = I.$$

Выразив ток I как произведение плотности тока j на площадь поперечного сечения проводника S , по которой течёт ток, получим:

$$H_\varphi = \frac{j \cdot S}{2\pi r}.$$

С помощью полученного для напряжённости магнитного поля H_φ выражения найдём зависимость H_φ от кратчайшего расстояния r между точкой наблюдения и осью симметрии цилиндрического проводника для двух случаев.

1) Для напряжённости магнитного поля H_φ внутри проводника ($r \leq a$ и $S = \pi r^2$):

$$H_\varphi(r) = \frac{j \cdot S}{2\pi r} = \frac{j \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{j \cdot r}{2}.$$

2) Для напряжённости магнитного поля H_φ снаружи проводника ($r \geq a$ и $S = \pi a^2$):

$$H_\varphi(r) = \frac{j \cdot S}{2\pi r} = \frac{j \cdot \pi a^2}{2\pi r} = \frac{j \cdot a^2}{2r}.$$

Ответ: при $r \leq a$ имеем $H_\varphi = \frac{j \cdot r}{2}$, а при $r \geq a$ имеем $H_\varphi = \frac{j \cdot a^2}{2r}$.

2.2.17 По двум бесконечным прямолинейным проводникам, ориентированным вдоль оси z , протекают равные противоположно направленные токи I . Определить векторный потенциал магнитного поля \vec{A} во всём пространстве.

Решение.

Вектор магнитной индукции \vec{B} связан с векторным потенциалом магнитного поля \vec{A} с помощью выражения:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

В задаче 2.2.11 мы вывели формулу для определения величины B вектора магнитной индукции \vec{B} для одиночного проводника, ориентированного вдоль оси z :

$$B = B_\varphi = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r}.$$

Так как векторы \vec{B} и $\text{rot} \vec{A}$ равны между собой, то равны и их проекции:

$$B_\varphi = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Так проводники, ориентированные вдоль оси z , бесконечны, то производная по координате z равна нулю $\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0$ и

$$\frac{I \cdot \mu_a}{2\pi r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Откуда для двух бесконечных прямолинейных проводников, ориентированных вдоль оси z , в которых протекают равные противоположно направленные токи I , получаем:

$$A_z = -|A| = -\frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Здесь r_1 и r_2 – кратчайшие расстояния от точки наблюдения до соответствующего проводника.

Ответ: векторный потенциал магнитного поля \vec{A} во всём пространстве описывается формулой: $A_z = -|A| = \frac{I \cdot \mu_a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

2.2.18 На каждой из трех бесконечно больших плоскостей $x = -a$, $x = 0$ и $x = a$ находится поверхностный заряд q , распределённый с равномерной плотностью (рисунок 2.9). Определить электрическое поле и потенциал для всего пространства, принимая $\phi = 0$ в точке $x = 0$.

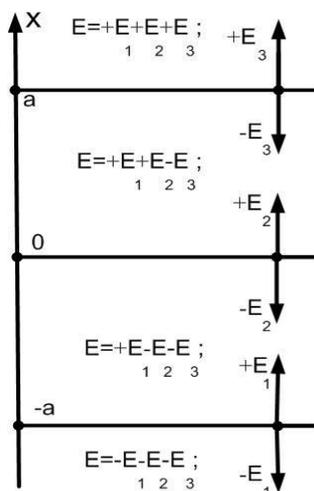


Рисунок 2.9 – Иллюстрация к задаче 2.2.18

Решение.

Чтобы получить формулу для величины E вектора напряженности электрического поля \vec{E} в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В этой задаче вектор напряженности электрического поля \vec{E} и вектор $d\vec{S}$ направлены вдоль оси x . Для этого случая закон Гаусса примет вид:

$$E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_a},$$

откуда:

$$E = \frac{q}{\epsilon_a \cdot S}.$$

На каждой стороне плоскости в создании напряженности электрического поля \vec{E} участвуют половина зарядов $q = \frac{q}{2}$, так как суммарный заряд на обеих сторонах плоскости равен q . Взаимная ориентация векторов напряженности электрического поля \vec{E} на разных полуплоскостях показана на рисунке 2.9.

1) В области пространства, где координата $x > a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 3E_1.$$

При этом:

$$E = \frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}.$$

Здесь $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхностная плотность заряда.

Определим выражение для потенциала в этой области:

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_a &= -\int_0^a E_a dl = -\frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_1(x) &= -\int_a^x E dl + \varphi(a) = \frac{3 \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} (a - x) - \frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} = \frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} - \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}. \end{aligned}$$

При определении выражения для потенциала мы учли, что вектора напряженности электрического поля \vec{E} и $d\vec{l}$ направлены вдоль оси x и поэтому вместо их скалярного произведения используем обычное произведение величин этих векторов: $E \cdot l$.

2) В области пространства, где координата $0 < x \leq a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 - E_3 = \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}; \\ \varphi_2(x) &= -\int_0^x E dl = -\frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}. \end{aligned}$$

3) В области пространства, где координата $-a < x \leq 0$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = E_1 - E_2 - E_3 = -E_1 = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_3(x) = - \int_{-x}^0 E dl = \frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}.$$

4) В области пространства, где координата $x \leq -a$ (рисунок 2.9), величина E вектора напряженности электрического поля \vec{E} определится как величина алгебраической суммы векторов:

$$E = -E_1 - E_2 - E_3 = -3E_1 = -\frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$E_{-a} = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi(-a) = - \int_{-a}^0 E_{-a} dl = \frac{a \cdot \sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_4(x) = - \int_{-x}^{-a} E dl + \varphi(-a) = \frac{3 \cdot \sigma}{2\varepsilon_a} (-a + x) + \frac{a \cdot \sigma}{\varepsilon_a} = -\frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} + \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}.$$

Ответ: 1) электрическое поле и потенциал при $x > a$:

$$E = \frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} - \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a};$$

2) при $0 < x \leq a$:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a}.$$

3) при $-a < x \leq 0$:

$$E = -\frac{q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_a};$$

4) при $x \leq -a$:

$$E = -\frac{3q}{2\varepsilon_a \cdot S} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_a};$$

$$\varphi_4(x) = -\frac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_a} + \frac{3\sigma \cdot x}{2\varepsilon_a}.$$

2.2.19 Путём интегрирования уравнения Лапласа в сферических координатах, вычислить потенциал электростатического поля внутри и вне прово-

дующей сферы радиуса a , по поверхности которой равномерно распределён заряд q .

Решение.

Чтобы получить формулу для величины E вектора напряжённости электрического поля \vec{E} в явном виде, запишем закон Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

В этой задаче вектор напряжённости электрического поля \vec{E} и вектор $d\vec{S}$ в силу симметрии направлены вдоль оси r , причём поле \vec{E} не меняется по $d\vec{S}$, так как заряд q равномерно распределён по поверхности сферы.

Для этого случая закон Гаусса примет вид:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{охв}}}{\epsilon_a} \quad \text{и} \quad E_r = \frac{q_{\text{охв}}}{4\pi\epsilon_a r^2},$$

где $q_{\text{охв}}$ – величина заряда, охваченная сферой радиуса r .

1) вычислим потенциал электростатического поля $\varphi_{\text{нар}}(r)$ вне проводящей сферы, когда $r \geq a$ и $q_{\text{охв}} = q$:

$$\varphi_{\text{нар}}(r) = -\int \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r}.$$

2) вычислим потенциал электростатического поля $\varphi_{\text{внутр}}$ внутри проводящей сферы, когда $r < a$, $q_{\text{охв}} = 0$, $E_r = 0$ и $\varphi = \text{const}$:

$$\varphi_{\text{внутр}} = 0.$$

Ответ: потенциал электростатического поля равен:

$$\text{при } r \geq a: \varphi_{\text{нар}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r};$$

$$\text{при } r < a: \varphi_{\text{внутр}} = 0.$$

2.2.20 Покажите, что квадрат разности потенциалов $(\varphi_2 - \varphi_1)^2$ прямо пропорционален величине F силы, то есть порядок величины электростатических сил, действующих между телами, можно оценить по разности потенциалов. Найдите величину коэффициента пропорциональности k и его размерность [к] в системе СИ.

Решение.

1) Выразим размерность величины разности потенциалов $[(\varphi_2 - \varphi_1)]$ через размерность величины силы [F]:

$$[(\varphi_2 - \varphi_1)] = [E \cdot l] = \left[\frac{F \cdot l}{q} \right].$$

2) Выразим размерность величины квадрата разности потенциалов $[(\varphi_2 - \varphi_1)^2]$ через размерность величины силы $[F]$:

$$[(\varphi_2 - \varphi_1)^2] = \left[\frac{F \cdot l}{q} \right]^2 = [kF].$$

3) Из последнего выражения определим величину коэффициента пропорциональности k и его размерность $[k]$ в системе СИ:

$$[k] = \frac{[(\varphi_2 - \varphi_1)^2]}{[F]} = \left[\frac{F \cdot l^2}{q^2} \right] = \left[\frac{q^2}{4\pi\epsilon_a l^2} \cdot \frac{l^2}{q^2} \right] = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_a} \right];$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_a}.$$

Абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a в системе СИ имеет размерность фарад на метр $[\Phi/\text{м}]$, поэтому, согласно последней формуле, размерность $[k] = [\text{м}/\Phi]$.

Ответ: размерность $[k] = [\text{м}/\Phi]$, а величина k находится из формулы:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_a}.$$

2.3 Задачи для самостоятельной работы

2.3.1 Чему равна полная электростатическая сила, действующая на единицу положительного заряда $+q_0$, помещенного в центре квадрата со стороной a , если по углам квадрата расположены (по часовой стрелке) заряды q_1, q_2, q_3 и q_4 , причём: $q_1 = q_3$, а $q_2 = nq_4$ (рисунок 2.10). Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.1 с исходными данными согласно варианту задания.

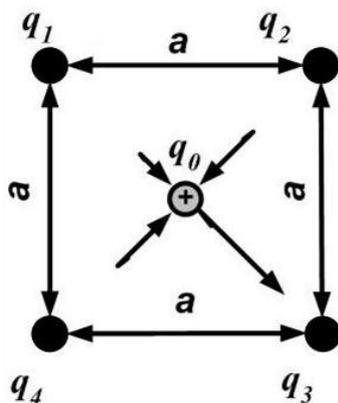


Рисунок 2.10 – Иллюстрация к задаче 2.3.1

Таблица 2.1 – Исходные данные к задаче 2.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q_1	$3q$	$2q$	$4q$	$6q$	$5q$	$-2q$	$-4q$	$-7q$	$-5q$	$-6q$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q_2	$2q$	$3q$	$5q$	$7q$	$4q$	$-3q$	$-7q$	$-4q$	$+5q$	$-2q$
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	5	-4	3	-2	5	-5	-2	3	-4	5

2.3.2 Заряженная частица движется в направлении \vec{x} в пространстве, где имеется электрическое поле E_y и перпендикулярное к нему магнитное поле с индукцией B_z со скоростью v_x . При каком условии результирующая сила F , действующая на эту частицу, равняется нулю. Какова должна быть величина v_x , если E_y и B_z известны. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.2 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.2 – Исходные данные к задаче 2.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y , кВ/м	1	1.5	2.2	3.4	5	1.6	4.7	2.8	3.6	3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_z , мТл	10	12	15	17	20	22	24	25	28	29

2.3.3 Индуктивная катушка представляет собой одиночный виток, размещенный на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала ($\mu \gg 1$) с размерами: внутренний диаметр равен $2a$, внешний $2b$, высота h . Найти индуктивность катушки (рисунок 2.11). Ниже приведена таблица 2.3 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.3 – Размеры сердечника и параметры магнитного материала

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\mu/100$	20	32	53	34	15	26	17	28	35	40
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$(a = h)$, мм	2.5	3.6	4	4.5	6	5.2	3.8	3.5	5	5.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Отношение b/a	3.6	3.3	3	2.8	2.6	2.4	2.2	2	2.5	3.45

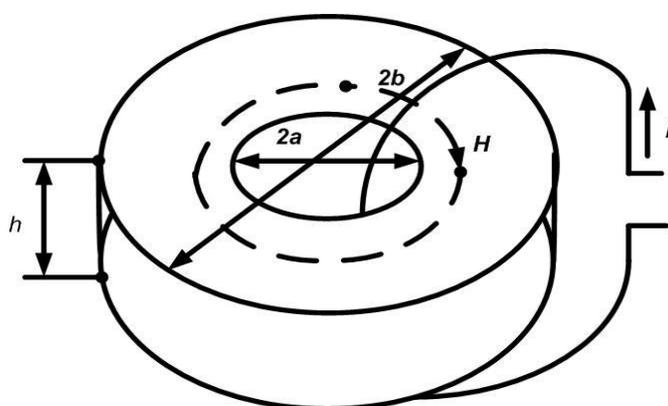


Рисунок 2.11 – Иллюстрация к задаче 2.3.3

2.3.4 Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами a и b , выполненные из металла. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет U , потенциал наружного цилиндра равен нулю. Определить напряженность электрического поля на окружности радиуса R (рисунок 2.12). Ниже приведена таблица 2.4 с исходными данными согласно варианту задания.

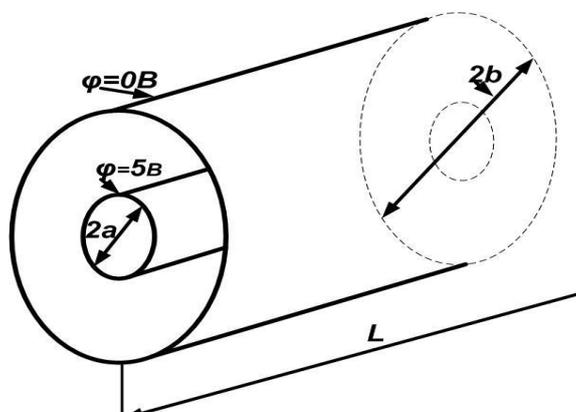


Рисунок 2.12 – Иллюстрация к задаче 2.3.4

Таблица 2.4 – Исходные данные к задаче 2.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
b , см	5.5	4.6	5.4	6.5	6	5.2	7.8	8.5	9.5	9.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , см	4.5	3.6	4	5.5	4.6	4.2	5.8	6.5	8	8.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a , см	1.8	2	2.2	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5
U , В	8	12	22	25	28	32	35	24	15	18

2.3.5 Плоский конденсатор имеет размеры l и d и подключён к источнику питания с напряжением U . В зазор конденсатора введена пластина с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Пренебрегая краевыми эффектами определить силу F , стремящуюся втянуть пластину внутрь конденсатора (рисунок 2.13). Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.5 с исходными данными согласно варианту задания.

Примечание: система стремится к состоянию устойчивого равновесия, при котором электрическая энергия, запасённая в конденсаторе, достигает наибольшего значения, а свободная энергия системы «диэлектрик - обкладки конденсатора» наименьшего значения. Для достижения такого состояния диэлектрик втягивается между обкладками конденсатора до тех пор, пока электрическая ёмкость конденсатора не достигнет максимального значения. Считать, что сила F не распределена по объёму, а полностью приложена к центру тяжести диэлектрика.

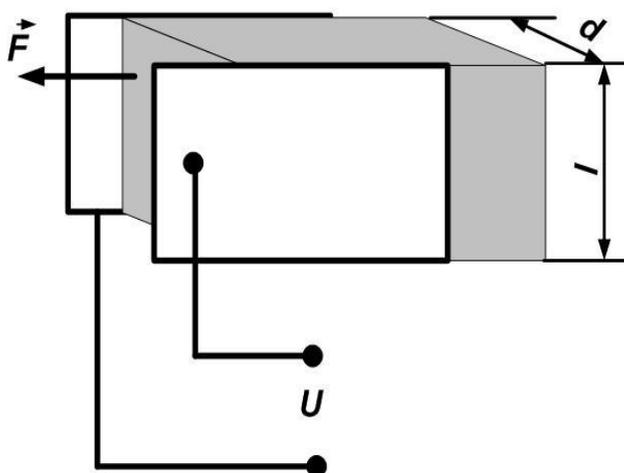


Рисунок 2.13 – Иллюстрация к задаче 2.3.5

Таблица 2.5 – Исходные данные к задаче 2.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	10	20	15	25	18	28	1.3	22	16	14
d , мм	1.8	2.4	2	3	2.3	3.3	1.9	2.9	1.9	1.9
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
U , В	15	18	25	30	35	40	29	25	15	37
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	5	6	7	8	9	10	3	2	4	7

2.3.6 Коаксиальный конденсатор состоит из двух длинных коаксиальных цилиндров с диаметрами $2a$ и $2b$, выполненных из металла. Длина конденсатора l . Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε . Вывести выражение для определения электрической ёмкости коаксиального конденсатора и вычислить численное значение этой ёмкости. Толщиной стенки наружного цилиндра и краевыми эффектами пренебречь. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.6 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.6 – Исходные данные к задаче 2.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a , мм	1	2	1.5	2.5	1.8	2.8	1.3	2.2	1.6	1.7
b , мм	1.8	2.4	2	3	2.3	3.3	1.9	2.9	1.9	2.1
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	5	6	7	8	9	10	3	2	4	7
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	25	15	28

2.3.7 Коаксиальный конденсатор состоит из двух длинных коаксиальных цилиндров с диаметрами a и b , выполненных из металла. Длина конденсатора l . В пространство между цилиндрами частично введена трубка из ди-

электрика с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ (рисунок 2.14). Используя выражение для определения электрической ёмкости коаксиального конденсатора, выведенное при решении задачи 2.3.6 и пренебрегая краевыми эффектами, определить силу F , стремящуюся втянуть трубку внутрь конденсатора. Толщиной наружной стенки пренебречь. При решении использовать сведения, приведённые в примечании к задаче 2.3.5. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Исходные данные согласно варианту задания, соответствующие первой и второй цифрам номера варианта задания взять из таблиц к задаче 2.3.6, а данные, соответствующие третьей цифре задания приведены ниже в таблице 2.3.7.

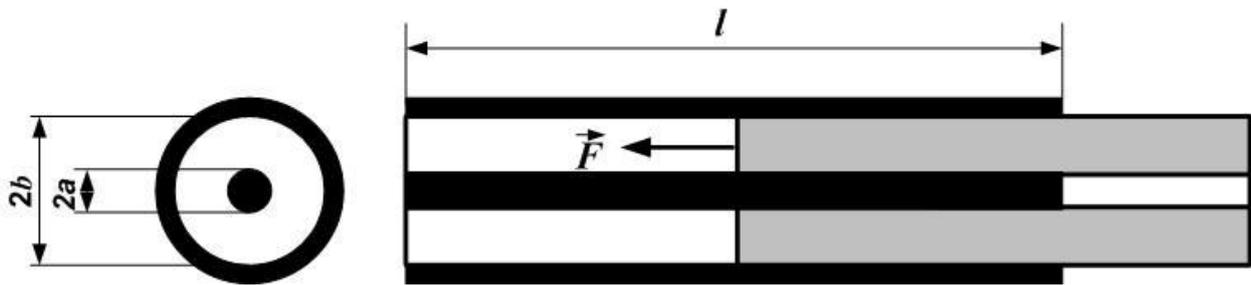


Рисунок 2.14 – Иллюстрация к задаче 2.3.7

Таблица 2.7 – Исходные данные к задаче 2.3.7

Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	40	27	25
U , В	15	18	25	30	35	40	29	35	40	29

2.3.8 Два одноимённых точечных заряда q и nq расположены на расстоянии l друг от друга. Найти на прямой, соединяющей эти заряды точку с нулевой напряжённостью и точку, в которой напряжённости создаваемые каждым зарядом равны и одинаково направлены. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.8 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.8 – Исходные данные к задаче 2.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , мм	15	18	25	30	35	40	29	25	15	22
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	2.7	2.5	2.4	3.2	2.8	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6

2.3.9 В пространство между обкладками заряженного конденсатора заливается масло ($\epsilon = n \cdot \epsilon_0$). После заливки объём масла оказался в x раз меньше объёма между обкладками конденсатора. Рассчитать, как изменится энергия конденсатора после заливки, если конденсатор во время заполнения: а) остаётся присоединённым к источнику энергии; б) отсоединён от него. Данные для решения задачи приведены в таблице 2.9 и зависят от номера варианта.

Таблица 2.9 – Исходные данные к задаче 2.3.9

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x	2	3	4	5	6	4	3	6	5	2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	2.7	2.5	2.4	3.2	2.8	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6

2.3.10 В данной точке под углом φ накладываются два электрических поля, напряжённости которых n кВ/м и m кВ/м. Найти объёмную плотность энергии при $\epsilon = p \cdot \epsilon_0$. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.10 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.10 – Исходные данные к задаче 2.3.10

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	5.5	4.6	5.4	6.5	6	5.2	7.8	8.5	9.5	9.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	4.5	3.6	4	5.5	4.6	4.2	5.8	6.5	8	8.4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1.8	2	2.2	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5
φ , рад	0.5	0.6	0.4	1.3	0.3	1.2	0.8	0.7	0.9	0.8

2.3.11 Шарик из проводящего материала радиуса $r = 3$ см помещён в начало декартовых координат. Шарик находится в воздухе и имеет заряд $Q = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл (рисунок 2.15). Потенциал поверхности шарика принят равным 50 В. Найти потенциал и напряжённость электрического поля в точках с координатами $A(r, 0, 0)$, $B(n \cdot r; 0; 0)$, $C(0; m \cdot r; p \cdot r)$, $D(n \cdot r; m \cdot r; p \cdot r)$. Координаты точек заданы в сантиметрах. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем.

вателем, и состоит из трёх цифр. Исходные данные согласно варианту задания приведены в таблице 2.10.

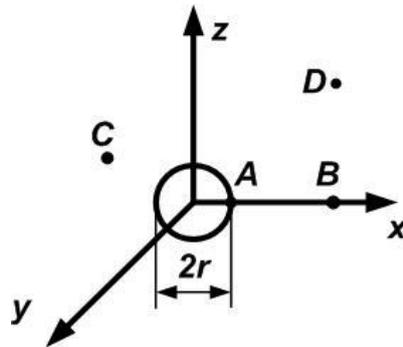


Рисунок 2.15 – Иллюстрация к задаче 2.3.11

2.3.12 По прямому цилиндрическому стальному проводу радиусом a протекает постоянный ток с силой I . Магнитная проницаемость материала провода μ . Определить напряженность магнитного поля и магнитную индукцию внутри и вне проводника. Вариант задания для этой задачи назначается преподавателем, и состоит из трёх цифр. Ниже приведена таблица 2.11 с исходными данными согласно варианту задания.

Таблица 2.11 – Исходные данные к задаче 2.3.12

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I , А	0.5	0.6	0.4	1.5	1.6	1.2	0.8	0.7	2.5	1.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	155	206	254	135	146	1422	168	245	180	240
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a , мм	1.8	2	2.	2.5	2.8	3	3.5	4	4.5	5

3 ТЕМА 3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

3.1 Основные формулы

Для вакуума напряженность электрического поля \vec{E} и напряженность магнитного поля \vec{H} удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

которые в материальных средах должны быть дополнены материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Выражения для проекций вектора электрической индукции \vec{D} для анизотропной среды в декартовой системе координат имеют вид:

$$D_x = \varepsilon_{a11} \cdot E_x + \varepsilon_{a12} \cdot E_y + \varepsilon_{a13} \cdot E_z;$$

$$D_y = \varepsilon_{a21} \cdot E_x + \varepsilon_{a22} \cdot E_y + \varepsilon_{a23} \cdot E_z;$$

$$D_z = \varepsilon_{a31} \cdot E_x + \varepsilon_{a32} \cdot E_y + \varepsilon_{a33} \cdot E_z.$$

В эти выражения подставляют заданные значения компонентов тензора относительной диэлектрической проницаемости ε .

В расчетах обычно используют относительные проницаемости:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}; \quad \mu = \frac{\mu_a}{\mu_0},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36 \cdot \pi}$ Ф/м; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

В материальных средах необходимо учитывать микроскопическую структуру вещества, что приводит к возникновению тока проводимости с объемной плотностью $\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}$, удовлетворяющей уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{j}_{np} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Здесь σ – удельная объемная проводимость вещества, ρ – плотность объемных зарядов.

Сумма плотностей тока смещения $\vec{j}_{CM} = \epsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, тока проводимости \vec{j}_{np} и стороннего тока $\vec{j}_{CT.Э}$ образует плотность полного тока $\vec{j}_{полн}$.

Для материальной среды уравнения Максвелла имеют более сложный вид, чем для вакуума из-за учёта явлений поляризации и намагничивания.

Если электромагнитное поле переменное во времени, то в материальной среде возникает ток поляризации с объемной плотностью $\vec{j}_n = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Здесь \vec{P} – вектор поляризованности, то есть электрический дипольный момент единицы объёма:

$$\vec{P} = k_{\epsilon} \vec{E},$$

где $k_{\epsilon} = \epsilon_a - \epsilon_0 = \epsilon_0(\epsilon - 1)$ – диэлектрическая восприимчивость, называемая также поляризуемостью.

Вектор поляризованности \vec{P} можно определить также через концентрацию N молекулярных диполей $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$:

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p},$$

где q – заряд, \vec{l} – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда $-q$ молекулярного диполя к положительному заряду $+q$, длина l вектора \vec{l} – это расстояние между зарядами в диполе.

Электрический дипольный момент \vec{P}_V области V можно выразить через вектор поляризованности \vec{P} :

$$\vec{P}_V = \vec{P} \cdot V.$$

В материальной среде вектор электрического смещения \vec{D} и векторное поле электрической поляризованности \vec{P} связаны соотношением $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, а первое уравнение Максвелла в переменном электромагнитном поле приобретает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э}.$$

В этой же среде вектор намагниченности \vec{M} , являющийся магнитным моментом единицы объёма вещества, и вектор магнитной индукции \vec{B} связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$. Тогда векторное уравнение Максвелла в материальной среде запишется в виде $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Третье и четвертое уравнение Максвелла имеют вид:

Третье и четвертое уравнение Максвелла имеют вид:

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Четвертое уравнение Максвелла свидетельствует о том, что в природе не существует магнитных зарядов. Иногда полезно ввести фиктивный сто-

ронный магнитный ток $\vec{j}_{CT.M}$, который придает симметричный вид уравнениям Максвелла.

В интегральной форме уравнения Максвелла имеют вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э} \right) d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j}_{CT.M} \right) d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV,$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

где $d\vec{l}$ – вектор, равный по величине dl , и совпадающий с направлением обхода контура в окрестности участка dl ; $d\vec{S}$ – вектор, равный по величине площади dS , направленный от внутренней поверхности S к наружной перпендикулярно площади S в окрестности dS .

Для гармонических электромагнитных полей уравнения Максвелла записывают относительно комплексных амплитуд соответствующих полей:

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E} + \vec{j}_{CT.Э},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \tilde{\mu}_a \vec{H} - \vec{j}_{CT.M},$$

$$\text{div} \vec{D} = \dot{\rho},$$

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

где $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a$, $\tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a$ есть величины комплексные.

Если потери энергии в среде связаны только с наличием токов проводимости, то:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - \frac{j \cdot \sigma}{\omega}, \quad \tilde{\mu}_a = \mu_a.$$

В технике вещества принято характеризовать с помощью тангенсов углов диэлектрических и магнитных потерь:

$$\text{tg} \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''_a}{\epsilon'_a}, \quad \text{tg} \delta_\mu = \frac{\mu''_a}{\mu'_a}.$$

Объемная плотность энергии в любой точке пространства есть $\omega = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$, удовлетворяющая закону сохранения энергии (теорема Пойнтинга):

$$- \text{div} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] + \sigma E^2 + j_{CT.Э} + j_{CT.M} \cdot \vec{H}.$$

Вектор Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]$ характеризует плотность потока мощности излучения.

Для полей, изменяющихся по гармоническому закону, удобно ввести комплексный вектор Пойнтинга $\vec{P} = \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$. Действительная часть этого вектора равна среднему потоку мощности излучения за период.

$\vec{P}_{КОЛ} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \exp(j2\omega t) \right\}$ – колеблющаяся часть $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга.

Электромагнитное поле должно удовлетворять лемме Лоренца:

$$\text{div} [\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_2] - \text{div} [\vec{E}_2 \cdot \vec{H}_1] = \vec{E}_2 \cdot \vec{j}_{СТ.1Э} - \vec{E}_1 \cdot \vec{j}_{СТ.2Э}.$$

Выражение для определения максимального удельного значения энергии $W_{\text{max.УД}}$ запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током – $W_{\text{max.УД}} = \frac{B_{\text{max}} H_{\text{max}}}{2} = \frac{B_{\text{max}}^2}{2\mu \cdot \mu_0}$.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Показать, что уравнение непрерывности тока может быть получено из первого и третьего уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Решение.

Применим операцию div к первому уравнению:

$$\text{div rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{j}_{np}.$$

Из векторного анализа известно, что $\text{div rot} \vec{H} = 0$. Подставляя $\text{div} \vec{E}$ из второго уравнения, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0.$$

Ответ: уравнение непрерывности тока $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{np} = 0$ может быть получено из первого и третьего уравнений Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_{np}$ и

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

3.2.2 Показать, что волновое уравнение электромагнитного поля следует из уравнений Максвелла.

Решение.

Выпишем первые два уравнения Максвелла, справедливых для вакуума в отсутствие сторонних источников:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Применим операцию rot ко второму уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}).$$

Из векторного анализа известно, что:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}.$$

Поскольку по условию задачи заряды отсутствуют, то из третьего уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ и:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}).$$

Подставим $\operatorname{rot} \vec{H}$ из первого уравнения:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Окончательно получим:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Теперь применим операцию rot к первому уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

откуда $\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$.

Ответ: волновое уравнение электромагнитного поля $\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$ может быть получено из первого и второго уравнений

Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

3.2.3 Материальная среда характеризуется абсолютными проницаемостями $\tilde{\varepsilon}_a(x, y, z)$, $\mu_a = \mu_0$. Получить дифференциальное уравнение второго порядка, которому должно удовлетворять векторное поле \vec{H} в данной неоднородной среде, если электромагнитный процесс гармонически изменяется во времени с частотой ω .

Решение.

Выпишем два первых уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$$

и применим операцию rot к первому уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = j\omega \operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \vec{E}).$$

Магнитная проницаемость среды неизменна в пространстве по условию задачи, поэтому $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Кроме того:

$$\operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \vec{E}) = \left[\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a \cdot \vec{E} \right] + \tilde{\epsilon}_a \cdot \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Из первого уравнения:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{j}{\omega \cdot \tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H},$$

тогда:

$$\operatorname{rot}(\tilde{\epsilon}_a \cdot \vec{E}) = \left[-\frac{j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H}.$$

Окончательно получим:

$$\nabla^2 \vec{H} + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H} + \left[\frac{\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a}{\tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] = 0.$$

Ответ: полученное из уравнений Максвелла дифференциальное уравнение второго порядка, которому должно удовлетворять векторное поле \vec{H} в данной неоднородной среде, если электромагнитный процесс гармонически изменяется во времени с частотой ω , имеет вид

$$\nabla^2 \vec{H} + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \vec{H} + \left[\frac{\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a}{\tilde{\epsilon}_a} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \right] = 0.$$

3.2.4 В вакууме существует электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени. В некоторой точке пространства вектор $\vec{E} = 130 \cos 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{r}_x$. Определить плотность тока смещения в заданной точке.

Решение.

По определению ток смещения:

$$\vec{j}_{CM} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -0.556 \cdot \sin 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{i}_x.$$

Из решения видно, что в пространстве ток смещения и напряженность электрического поля параллельны, однако ток опережает по фазе напряженность поля на 90° .

Ответ: плотность тока смещения \vec{j}_{CM} в заданной точке равна $\vec{j}_{CM} = -0.556 \cdot \sin 2\pi \cdot 10^{10} \cdot t \cdot \vec{i}_x$

3.2.5 В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды векторов поля: $\vec{E} = 35e^{j60^\circ} \cdot \vec{x}_0$; $\vec{H} = j4 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0$. Найти мгновенные значения векторов поля, а также среднее значение вектора Пойнтинга.

Решение.

Мгновенные значения связаны с комплексными амплитудами формулами:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= \operatorname{Re}(\vec{E}(r) \cdot e^{j\omega t}), \\ \vec{H}(r, t) &= \operatorname{Re}(\vec{H}(r) \cdot e^{j\omega t}),\end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, t) &= 35 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}, \\ \vec{H}(r, t) &= -4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \omega t \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м}.\end{aligned}$$

Для полей, гармонически изменяющихся во времени:

$$\vec{P}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*] = 6.062 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: мгновенные значения векторов равны для напряжённости электрического поля $\vec{E}(r, t) = 35 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot \vec{x}_0$ В/м, для напряжённости магнитного поля $\vec{H}(r, t) = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \omega t \cdot \vec{y}_0$ А/м, а среднее значение вектора Пойнтинга \vec{P}_{cp} равно $\vec{P}_{cp} = 6.062 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{z}_0$ Вт/м².

3.2.6 Покажите, что векторное поле \vec{H} , изменяющееся во времени и в пространстве по закону $\vec{H} = 6x \cos \omega t \cdot \vec{x}_0 + 2e^{-2y} \sin \omega t \cdot \vec{x}_0$ не может быть полем магнитного вектора, который удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Решение.

Запишем четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Учитывая, что $\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}$ получим:

$$\operatorname{div} \vec{H}_x = \frac{d\vec{H}}{dx} = 0.$$

Для нашего же случая $\operatorname{div} \vec{H}_x = \frac{d\vec{H}}{dx} = 6 \cos \omega t \neq 0$, то есть заданное векторное поле \vec{H} не может быть полем магнитного вектора, так как не удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла в дифференциальной форме.

Ответ: заданное векторное поле \vec{H} не может быть полем магнитного вектора, так как не удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла в дифференциальной форме.

3.2.7 Покажите, что из четвертого уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в однородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция про-

странственных координат, вытекает следующее уравнение относительно вектора напряженности магнитного поля: $\operatorname{div}\vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad}\mu_a)$

Решение.

Запишем четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{B} &= 0; \\ \vec{B} &= \mu_a \cdot \vec{H}; \\ \operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) &= 0.\end{aligned}$$

Используем векторное тождество:

$$\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{grad}\mu_a + \mu_a \operatorname{div}\vec{H}.$$

Подставим в это тождество $\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = 0$ и получим искомое выражение:

$$\operatorname{div}\vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad}\mu_a).$$

Ответ: из четвертого уравнения Максвелла $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ и тождества $\operatorname{div}(\mu_a \cdot \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{grad}\mu_a + \mu_a \operatorname{div}\vec{H}$ следует, что $\operatorname{div}\vec{H} = -\mu_a^{-1}(\vec{H} \cdot \operatorname{grad}\mu_a)$.

3.2.8 Известно, что некоторый электромагнитный процесс характеризуется тем, что все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z . Используя уравнения Максвелла, покажите, что при этом продольные проекции E_z и H_z векторов электромагнитного поля будут отсутствовать.

Решение.

Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Так как все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z , то:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = 0$$

и

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Из последнего выражения видно, что продольные проекции $\operatorname{rot}\vec{H}_z = 0$ и $D_z = 0$. В этом случае $E_z = \frac{D_z}{\varepsilon_{az}} = 0$, то есть отсутствует продольная проекция E_z .

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Так как все декартовы составляющие полей зависят лишь от координаты z , то:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Из последнего выражения видно, что продольные проекции $\operatorname{rot} \vec{E}_z = 0$ и $B_z = 0$. В этом случае $H_z = \frac{B_z}{\mu_{az}} = 0$, то есть отсутствует продольная проекция H_z .

Ответ: продольные проекции E_z и H_z векторов электромагнитного поля отсутствуют, то есть $E_z = 0$ и $H_z = 0$.

3.2.9 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = 28e^{j0.16}\vec{x}_0 - 105e^{-j1.2}\vec{y}_0 + 36e^{j2.3}\vec{z}_0$ (углы даны в радианах). Частота колебаний $f = 2$ МГц. Найдите мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени 0.1 мкс.

Решение.

Запишем выражение для круговой частоты:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 = 4\pi \cdot 10^6 \text{ рад/с.}$$

Запишем выражение зависимости вектора \vec{E} от времени:

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot e^{j\omega t}) = 28 \cos(4\pi \cdot 10^6 t + 0.16)\vec{x}_0 - 105 \cos(4\pi \cdot 10^6 t - 1.2)\vec{y}_0 + 36 \cos(4\pi \cdot 10^6 t + 2.3)\vec{z}_0.$$

Из последнего выражения найдём мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени $t = 0.1$ мкс $= 10^{-7}$ с:

$$\vec{E}(t = 10^{-7}) = 4.3\vec{x}_0 - 104.83\vec{y}_0 - 32.9\vec{z}_0.$$

Ответ: мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени 0.1 мкс равно $\vec{E}(t = 10^{-7}) = 4.3\vec{x}_0 - 104.83\vec{y}_0 - 32.9\vec{z}_0$.

3.2.10 Покажите, что электромагнитное поле с компонентами $E_x = E_y = 0$, $B_y = B_z = 0$, $E_z = \cos(y - ct)$, $B_x = \cos(y - ct)$ при определённом значе-

нии постоянной c удовлетворяет уравнениям Максвелла и определите это значение постоянной c .

Решение.

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_x = E_y = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) - \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Так как $E_z = \cos(y - ct)$ не зависит от x , то $\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0$ и второе уравнение Максвелла примет вид:

$$\vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Вычислим левую часть полученного уравнения Максвелла:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{x}_0 = \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial y} \vec{x}_0 = -\vec{x}_0 \sin(y - ct),$$

а затем правую часть этого уравнения:

$$-\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{x}_0 \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial t} = -\vec{x}_0 \cdot c \cdot \sin(y - ct).$$

Заданное по условию задачи поле удовлетворяет второму уравнению Максвелла, если равны правые части двух последних выражений, то есть при значении постоянной c равном единице ($c = 1$).

Запишем четвёртое уравнение Максвелла в дифференциальной форме $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ в декартовой системе координат при $B_y = B_z = 0$ и $B_x = \cos(y - ct)$:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial \cos(y - ct)}{\partial x} = 0,$$

то есть заданное по условию задачи поле удовлетворяет четвёртому уравнению Максвелла.

Ответ: заданное по условию задачи поле удовлетворяет уравнениям Максвелла при значении постоянной c равном единице ($c = 1$).

3.2.11 В некоторой точке пространства вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 20\vec{y}_0$ В/м, в то время как вектор Пойнтинга $\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0$ Вт/м². Определить вектор напряженности магнитного поля \vec{H} .

Решение.

Запишем выражение для вектора Пойнтинга \vec{P} для случая, когда вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 20\vec{y}_0$:

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 20 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = 20H_z \vec{x}_0 - 20H_x \vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

С другой стороны, по условию задачи:

$$\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0 \text{ Вт/м}^2.$$

Приравняем между собой правые части двух последних выражений для вектора Пойнтинга \vec{P} :

$$\vec{P} = 10\vec{x}_0 + 30\vec{z}_0 = 20H_z \vec{x}_0 - 20H_x \vec{z}_0$$

и проекции на оси координат этого вектора:

$$10\vec{x}_0 = 20H_z \vec{x}_0 \text{ и } 30\vec{z}_0 = 20H_x \vec{z}_0.$$

Из двух последних выражений получим искомые значения проекций вектора напряженности магнитного поля:

$$H_z = \frac{10}{20} = 0.5 \text{ А/м} \quad \text{и} \quad H_x = \frac{30}{-20} = -1.5 \text{ А/м}$$

и формулу для вектора напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = -1.5\vec{x}_0 + 0.5\vec{z}_0 \text{ А/м.}$$

Ответ: выражение для вектора напряженности магнитного поля имеет вид $\vec{H} = -1.5\vec{x}_0 + 0.5\vec{z}_0 \text{ А/м.}$

3.2.12 В фиксированной точке пространства известны мгновенные значения векторов поля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$, где \vec{E}_0 и \vec{H}_0 – постоянные векторы. Найти среднее значение \vec{P}_{CP} и колеблющуюся часть $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга.

Решение.

Запишем выражения для среднего значения \vec{P}_{CP} и колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга \vec{P} в общем виде:

$$\vec{P}_{CP} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$$

и

$$\vec{P}_{КОЛ} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{[\vec{E} \times \vec{H}] \exp(j2\omega t)\right\}.$$

Для условий, приведённых в задаче, в этих выражениях:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\varphi_1),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(j\varphi_2),$$

$$\vec{H}^* = \vec{H}_0 \exp(-j\varphi_2).$$

Запишем выражения для среднего значения \vec{P}_{CP} и колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга \vec{P} для условий, приведённых в задаче:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{cp} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_0 \exp(j\varphi_1) \times \vec{H}_0 \exp(-j\varphi_2)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cdot \exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)]\} = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{P}_{КОЛ} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\vec{E}_0 \exp(j\varphi_1) \times \vec{H}_0 \exp(j\varphi_2)\} \cdot \exp(j2\omega t) = \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}$$

При этом $\bar{z}_0 \perp \vec{E}$ и $\bar{z}_0 \perp \vec{H}$.

Ответ: среднее значение вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_{CP} = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

колеблющаяся часть вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_{КОЛ} = \bar{z}_0 \frac{1}{2} [E_0 \cdot H_0] \cdot \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2).$$

3.2.13 В диэлектрике с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2.4$ создано постоянное электрическое поле напряженностью $E = 200$ кВ/м. Определить электрический дипольный момент \vec{P}_V области диэлектрика объемом $V = 6$ см³.

Решение.

При решении задачи исходим из того, что электрический дипольный момент области \vec{P}_V выражается через вектор поляризованности \vec{P} , а вектор поляризованности связан с диэлектрической восприимчивостью $k_{\mathcal{E}}$ и с напряженностью электрического поля.

1) Вначале определим диэлектрическую восприимчивость $k_{\mathcal{E}}$, называемую также поляризуемостью:

$$k_{\mathcal{E}} = \varepsilon_a - \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) = \varepsilon_0(2.4 - 1) = 1.4 \cdot \varepsilon_0.$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8.842 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2) Затем определим вектор поляризованности \vec{P} , то есть электрический дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = k_{\mathcal{E}} \cdot \vec{E} = 1.4 \cdot 8.842 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^3 = 2.475 \cdot 10^{-6} \text{ В} \cdot \text{Ф/м}^2.$$

3) В заключение находим электрический дипольный момент области \vec{P}_V :

$$\vec{P}_V = \vec{P} \cdot V = 2.475 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 1.485 \cdot 10^{-11} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Ответ: электрический дипольный момент \vec{P}_V области диэлектрика объемом $V = 6$ см³ равен $1.485 \cdot 10^{-11}$ Кл·м.

3.2.14 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = 4.2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j1.2} \vec{z}_0$, $\vec{E} = 0.85 \cdot e^{j0.6} \vec{x}_0 - 1.3 \cdot e^{-j0.7} \vec{y}_0$. Определить комплексный вектор Пойнтинга \vec{P} и его среднее значение.

Решение.

Запишем выражения для комплексного \vec{P} и для среднего значения \vec{P}_{CP} вектора Пойнтинга \vec{P} в общем виде:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} [\vec{E} \times \vec{H}^*];$$

$$\vec{P}_{CP} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \operatorname{Re} \vec{P}.$$

Для условий, приведённых в задаче ($\vec{H} = 4.2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j1.2} \vec{z}_0$ и $\vec{E} = 0.85 \cdot e^{j0.6} \vec{x}_0 - 1.3 \cdot e^{-j0.7} \vec{y}_0$), выражения для комплексно сопряжённого значения комплексной амплитуды \vec{H}^* вектора напряённости магнитного поля и для комплексного вектора Пойнтинга \vec{P} примут вид:

$$\vec{H}^* = 4.2 \cdot 10^3 \exp(j1.2) \cdot \vec{z}_0;$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0.85 \exp(j0.6) & -1.3 \exp(-j0.7) & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \cdot 10^{-3} \exp(j1.2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \vec{x}_0 [-1.3 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3} \exp[j(1.2 - 0.7)]] - \vec{y}_0 [0.95 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3} \exp[j(0.6 + 1.2)]] \right\} =$$

$$= -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \exp(j0.5) - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} \exp(j1.8).$$

Для условий, приведённых в задаче, найдём выражения для среднего значения вектора Пойнтинга:

$$\vec{P}_{CP} = \operatorname{Re} \vec{P} = -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \cos(0.5) - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} \cos(1.8) =$$

$$= -\vec{x}_0 2.73 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8776 - \vec{y}_0 1.785 \cdot 10^{-3} (-0.227) =$$

$$= -2.396 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 0.406 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0.$$

Ответ: $\vec{P} = -2.73 \cdot 10^{-3} e^{j0.5} \vec{x}_0 - 1.785 \cdot 10^{-3} e^{-j1.8} \cdot \vec{y}_0,$

$$\vec{P}_{CP} = -2.396 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 0.406 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0.$$

3.2.15 Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет компоненты $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 6.5$, $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$. В диэлектрике создано равномерное электрическое поле $\vec{E} = 2.51 \vec{x}_0 + 1.7 \vec{y}_0 + 9.2 \vec{z}_0$. Определить век-

тор электрической индукции \vec{D} и угол в пространстве между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Решение.

Запишем выражения для проекций вектора электрической индукции \vec{D} в общем виде в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{a11} \cdot E_x + \varepsilon_{a12} \cdot E_y + \varepsilon_{a13} \cdot E_z; \\ D_y &= \varepsilon_{a21} \cdot E_x + \varepsilon_{a22} \cdot E_y + \varepsilon_{a23} \cdot E_z; \\ D_z &= \varepsilon_{a31} \cdot E_x + \varepsilon_{a32} \cdot E_y + \varepsilon_{a33} \cdot E_z. \end{aligned}$$

Подставим в записанные выражения заданные значения компонентов тензора относительной диэлектрической проницаемости ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 6.5; \\ \varepsilon_{ij} &= 0; \quad i \neq j. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_x = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_x; \\ D_y &= \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y; \\ D_z &= \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_z = 6.5 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_z. \end{aligned}$$

Для заданного электрического поля $\vec{E} = 2.51\vec{x}_0 + 1.7\vec{y}_0 + 9.2\vec{z}_0$ имеем:

$$E_x = 2.51 \text{ В/м}; \quad E_y = 1.7 \text{ В/м}; \quad E_z = 9.2 \text{ В/м}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} D_x &= 6.5 \cdot 2.51 \varepsilon_0 = 16.32 \varepsilon_0; \\ D_y &= 6.5 \cdot 1.7 \varepsilon_0 = 11.05 \varepsilon_0; \\ D_z &= 6.5 \cdot 9.2 \varepsilon_0 = 59.8 \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Такой же результат, но более коротким путём можно получить, используя матричное исчисление:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.51 \\ 1.7 \\ 9.2 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 16.32 \\ 11.05 \\ 59.8 \end{pmatrix}.$$

Определим выражение для косинуса угла в пространстве ($\cos \varphi$) между векторами \vec{E} и \vec{D} , используя формулу для скалярного произведения:

$$(\vec{E} \cdot \vec{D}) = |\vec{E}| \cdot |\vec{D}| \cdot \cos \varphi = E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z.$$

Из этой формулы получим:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{(E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z)}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|}.$$

Для получения численного значения $\cos \varphi$ вычислим вначале модули $|\vec{E}|$ и $|\vec{D}|$ векторов \vec{E} и \vec{D} , а затем скалярное произведение $(\vec{E} \cdot \vec{D})$ этих векторов:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{2.51^2 + 1.7^2 + 9.2^2} = 9.687 \text{ В/м};$$

$$\begin{aligned}
|\vec{D}| &= \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{16.32^2 + 11.05^2 + 59.8^2} \cdot \varepsilon_0 = 62.963\varepsilon_0 \text{ Кл/м}^2; \\
(\vec{E} \cdot \vec{D}) &= E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z = \varepsilon_0 \cdot (2.51 \cdot 16.32 + 1.7 \cdot 11.05 + 9.2 \cdot 59.8) = \\
&= 609.896 \cdot \varepsilon_0 \frac{В \cdot Кл}{м^3}; \\
\cos \varphi &= \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{(E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y + E_z \cdot D_z)}{|\vec{E}| \cdot |\vec{D}|} = \frac{609.896 \cdot \varepsilon_0}{9.687 \cdot 62.963 \cdot \varepsilon_0} = 0.99996; \\
\varphi &= \arccos(0.9996) = 0.5949^\circ.
\end{aligned}$$

Ответ: $\varphi = 0.5949^\circ$;

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (16.32\vec{x}_0 + 11.05\vec{y}_0 + 59.8\vec{z}_0) \text{ Кл/м}^2$$

$$\text{или в матричной форме } \vec{D} = \begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \cdot \begin{vmatrix} 16.32 \\ 11.05 \\ 59.8 \end{vmatrix} \text{ Кл/м}^2.$$

3.2.16 В однородной проводящей среде с параметрами ε и σ в момент времени $t = 0$ создано начальное распределение плотности зарядов $\rho(x, y, z)$. Показать, что за счет токов проводимости в среде происходит экспоненциальное уменьшение плотности объемного заряда:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 \cdot \exp\left[-\frac{\sigma t}{\varepsilon \varepsilon_0}\right].$$

Оценить τ – характерное время релаксации этого процесса для типичного металла, у которого $\sigma_1 = 10^7$ См/м, а также для полупроводника, имеющего $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м.

Указание. Для решения используйте уравнение непрерывности тока.

Решение.

Запишем уравнение непрерывности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{\text{пр}}.$$

Выразим вектор плотности тока проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$ через вектор электрической индукции \vec{D} :

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \cdot \vec{D}}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

и подставим полученное выражение для вектора плотности тока проводимости $\vec{j}_{\text{пр}}$ в уравнение непрерывности тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_{\text{пр}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \text{div} \vec{D}.$$

Запишем третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

и, подставив выражение для $\operatorname{div} \vec{D}$ в полученное уравнение непрерывности тока, получим однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma \cdot \rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = 0.$$

Из математики известно, что решение такого уравнения имеет вид:

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{-\sigma \cdot t}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где τ – постоянная времени, определяемая по формуле:

$$\tau = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\sigma}.$$

Для $\sigma_1 = 10^7$ См/м имеем:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{10^7} = 8.85 \cdot 10^{-19} \cdot \varepsilon \text{ с},$$

а для $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{10^{-3}} = 8.85 \cdot 10^{-9} \cdot \varepsilon \text{ с}.$$

Ответ: $\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{-\sigma \cdot t}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$

для $\sigma_1 = 10^7$ См/м: $\tau_1 = 8.85 \cdot 10^{-19} \cdot \varepsilon \text{ с},$

для $\sigma_2 = 10^{-3}$ См/м: $\tau_2 = 8.85 \cdot 10^{-9} \cdot \varepsilon \text{ с}.$

3.2.17 Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью 7.7 г/см^3 и имеет массу 2 кг . Амплитудное значение магнитной индукции 2.1 Тл , относительная магнитная проницаемость стали $\mu = 200$. Найти максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током.

Решение.

Запишем выражение для определения максимального удельного значения энергии $W_{\max. \text{УД}}$, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током:

$$W_{\max. \text{УД}} = \frac{B_{\max} \cdot H_{\max}}{2} = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0}.$$

Поскольку энергия W_{\max} , запасаемая в сердечнике, распределена по объёму сердечника V практически равномерно, то:

$$\begin{aligned} W_{\max} &= W_{\max.\text{уд}} \cdot V = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0} \cdot V = \frac{B_{\max}^2}{2\mu \cdot \mu_0} \cdot \frac{m}{\rho} = \\ &= \frac{2^2 \cdot 2}{2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} \cdot 7.7 \cdot 10^3} = 2.279 \quad \text{Дж.} \end{aligned}$$

Ответ: максимальное удельное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током, $W_{\max.\text{уд}}$ равно 2.279 Дж.

3.3 Задачи для самостоятельной работы

3.3.1 Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью $\rho = 7.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и имеет массу m . Амплитудное значение магнитной индукции B_m , относительная магнитная проницаемость стали μ . Найти максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током. Значения μ , m и B_m приведены в таблице 3.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.1 – Исходные данные к задаче 3.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	150	200	300	400	500	600	700	800	900	950
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m , кг	2.2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.7	0.6	0.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_m , Тл	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

3.3.2 Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат имеет компоненты $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$, $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$. В диэлектрике создано равномерное электрическое поле $\vec{E} = E_x \cdot \vec{x}_0 + E_y \cdot \vec{y}_0 + E_z \cdot \vec{z}_0$. Определить вектор электрической индукции \vec{D} и угол в пространстве между векторами \vec{E} и \vec{D} .

Значения ϵ , E_x , E_y и E_z приведены в таблице 3.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.2 – Исходные данные к задаче 3.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	9.5
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y	2.2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	2.7	2.6	2.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_z	9	8	7.6	6.5	3.4	4.2	5.4	3.6	2.8	4
ε	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.3 В диэлектрике с относительной проницаемостью ε создано постоянное электрическое поле напряженностью E [кВ/м]. Определить электрический дипольный момент области диэлектрика объемом V [см³]. Значения E [кВ/м], ε и V [см³] приведены в таблице 3.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.3 – Исходные данные к задаче 3.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , кВ/м	150	200	300	400	500	600	700	800	900	950
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
V , см ³	2.2	1.8	6	4.5	3.4	11.2	12.7	15.6	17.8	11.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.4 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0 + E_z e^{j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$ (углы даны в радианах). Частота колебаний f [МГц]. Найдите мгновенное значение вектора \vec{E} в момент времени τ [мкс]. Значения f , τ , φ_x , φ_y , φ_z , E_x , E_y и E_z приведены в таблице 3.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 3.4 – Исходные данные к задаче 3.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x , В/м	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95
E_y , В/м	-25	-40	-45	-28	-27	-37	-58	-28	-39	-36
E_z , В/м	55	70	100	74	84	49	37	95	20	42
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
τ , мкс	0.1	0.08	0.16	0.12	0.04	0.12	0.07	0.06	0.05	0.03
f , МГц	0.25	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	2.7	2.6	2.8	1.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ_x	-0.2	1.25	-1.4	-1.5	1.45	-1.2	-0.2	-1.0	-0.8	1.15
φ_y	0.28	0.25	-1.0	-1.2	0.45	-0.3	-1.0	-0.1	1.32	-0.3
φ_z	-1.2	-1.1	0.45	0.55	-0.4	1.4	0.35	2.15	-0.4	0.65

3.3.5 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = H_z e^{-j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$, $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0$. Определить комплексный вектор Пойнтинга и его среднее значение. Значения E_x , E_y , φ_x , φ_y , φ_z , H_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах.

Таблица 3.5 – Исходные данные к задаче 3.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H_z , мА/м	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4

3.3.6 В фиксированной точке пространства известны мгновенные значения векторов поля $\vec{E} = \vec{E}_y \cos(\omega t + \varphi_y)$, $\vec{H} = \vec{H}_z \cos(\omega t + \varphi_z)$, где \vec{E}_y и \vec{H}_z – постоянные векторы. Найти среднее значение и колеблющуюся часть вектора Пойнтинга. Значения E_y , H_z , φ_y , φ_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах.

3.3.7 В некоторой точке пространства вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = E_y \cdot \vec{y}_0$ В/м, в то время как вектор Пойнтинга $\vec{P} = P_x \cdot \vec{x}_0 + P_z \cdot \vec{z}_0$ Вт/м². Определить вектор напряженности магнитного поля. Значения E [В/м], P_x [Вт/м²] и P_z [Вт/м²] приведены в таблице 3.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число

Таблица 3.6 – Исходные данные к задаче 3.3.7

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , В/м	50	20	30	40	55	60	70	80	45	35
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P_x , Вт/м ²	15	20	35	45	40	16	22	18	24	41
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P_z , Вт/м ²	24	15	16	11	14	33	18	17	13	15

3.3.8 Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями $\vec{H} = H_z e^{-j\varphi_z} \cdot \vec{z}_0$, $\vec{E} = E_x e^{j\varphi_x} \cdot \vec{x}_0 + E_y e^{j\varphi_y} \cdot \vec{y}_0$. Значения E_x , E_y , φ_x , φ_y , φ_z , H_z и частоты f [МГц] приведены в таблицах 3.4 и 3.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Углы даны в радианах. Записать выражение для колеблющейся части $\vec{P}_{КОЛ}$ вектора Пойнтинга, построить график зависимости $\vec{P}_{КОЛ}(t)$ для участка времени t от 0 до $\frac{1}{f}$, определить среднее значение колеблющейся части вектора Пойнтинга за период $T = \frac{1}{f}$.

4 ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1 Основные формулы

В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \gamma^2 \vec{H} = 0,$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \cdot \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$ – комплексный коэффициент распространения; β – коэффициент фазы, или волновое число; α – коэффициент ослабления.

Частное решение уравнения Гельмгольца описывает однородную плоскую волну:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_1(0) \cdot e^{j\gamma z} + \vec{E}_2(0) \cdot e^{-j\gamma z}.$$

Здесь временная зависимость $e^{j\omega t}$ опущена.

Если величины $\tilde{\epsilon}_a$ и $\tilde{\mu}_a$ известны, то β и α находятся с помощью известных формул для комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} = \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j \cdot \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа; квадратные корни $\sqrt{\frac{r+a}{2}}$ и $\sqrt{\frac{r-a}{2}}$ следует считать положительными.

Поскольку $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon\epsilon_0(1 - jtg\delta_\epsilon)$, а $\mu_a = \mu_0$ – для большинства веществ, то:

$$\gamma = \beta - ja = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'_a} \cdot \sqrt{1 - jtg\delta_\epsilon}.$$

Величина тангенса угла диэлектрических потерь $tg\delta_\epsilon$:

$$tg\delta_\epsilon = \frac{\sigma}{2\pi f \cdot \epsilon}.$$

Условно считают, что если $tg\delta \geq 100$, то среда является металлом, а если $tg\delta \leq 0.01$, то она является диэлектриком.

Выражение для характеристического сопротивления Z_c материальной среды с малыми электрическими потерями при $\mu_a \neq \mu_0$ с учётом того, что при $tg\delta_\epsilon \ll 1$ и $\delta_\epsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства:

$$tg\delta_\epsilon \approx \delta_\epsilon \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\epsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\epsilon}{2} \right)$$

имеет вид:

$$Z_C = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon}} \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right).$$

Когда $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon > 1$, то коэффициент ослабления α рассчитывают по формуле для металлоподобной среды:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi f \cdot \mu_a \cdot \sigma}{2}}.$$

Расстояние, на котором фаза изменяется на 2π радиан, называется длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$.

Плоскость равных фаз или волновой фронт при любых t удовлетворяет соотношению $\omega t - \beta z = \text{const}$.

Волновой фронт перемещается с фазовой скоростью:

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d\left(\frac{\omega t - \text{const}}{\beta}\right)}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Длина волны в материальной среде λ_d может быть выражена через фазовую скорость v_ϕ и частоту f :

$$\lambda_d = \frac{v_\phi}{f}.$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления при $\mu = 1$ могут быть выражены следующими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}}{2}\right)^{1/2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} - 1}{2}\right)^{1/2},$$

откуда $\alpha = \beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)$.

Формулы для вычисления фазовой скорости и длины волны в материальной среде при $\mu = 1$ имеют вид:

$$v_\phi = \frac{\sqrt{2} \cdot c}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}\right)^{1/2}};$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \cdot \lambda_0}{\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}\right)^{1/2}}.$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют коэффициентом преломления $n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для плоской волны комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} связаны характеристическим сопротивлением среды:

$$Z_c = \omega \cdot \frac{\mu_\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_\alpha}{\tilde{\varepsilon}_\alpha}},$$

так что $\dot{E} = Z_c \cdot \dot{H}$.

При $\mu_a = \mu_0$:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot (1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{-1/4} \cdot e^{j \frac{\delta_\varepsilon}{2}} \text{ Ом.}$$

Для вакуума: $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$.

Тогда:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0};$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0};$$

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом};$$

Для магнитоэлектрика ($\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$):

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Диэлектрик с малыми потерями ($\mu = 1$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$).

Поскольку $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$, то $\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \cong 1 - j \operatorname{tg} \frac{\delta_\varepsilon}{2} \approx 1 - j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Тогда:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon} = \omega \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c},$$

$$\alpha \approx \omega \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2c} = \beta \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2},$$

$$Z_c \approx \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 + j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2} \right).$$

Проводящие среды ($\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \cdot \frac{\sigma}{\omega}$ — являются функцией частоты).

Если $\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon_a$, то среда называется металлоподобной:

$$\tilde{\varepsilon}_{am} = -j \cdot \frac{\sigma}{\omega}.$$

$$\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m = j\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{am} \cdot \mu_{am}} = \sqrt{j\omega_{am} \cdot \sigma \cdot \mu_{am}}.$$

Так как главное значение квадратного корня из мнимой единицы:

$$\sqrt{j} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}},$$

то:

$$\gamma_m = \sqrt{\omega\mu_{ам} \cdot \frac{\sigma}{2}} \cdot (1+j),$$

откуда:

$$\beta_m = \alpha_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}{2}}.$$

$$v_{\phi m} = \frac{\omega}{\beta_m} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_{ам} \cdot \sigma}};$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\beta_m} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}}.$$

$$Z_{см} = \sqrt{\frac{\mu_{ам}}{\tilde{\epsilon}_{ам}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_{ам}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{ам}}{\sigma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Расстояние, на котором волна затухает в e раз, называется скин-слоем:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{ам} \cdot \sigma}}.$$

Поскольку уравнения Максвелла линейны, любая комбинация их частных решений также является решением. В частности, если $\dot{E}_x \vec{i}_x$ и $\dot{E}_y \vec{i}_y$ – решения исходных уравнений, то:

$$\dot{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 + \dot{E}_y \cdot \vec{y}_0$$

также есть решение уравнения Максвелла.

В зависимости от соотношения между фазами и амплитудами \dot{E}_x и \dot{E}_y в каждой точке пространства конец вектора \vec{E} будет перемещаться по эллипсу с различным отношением и ориентацией его полуосей.

Линейно поляризованная волна представляет собой один из предельных случаев эллиптически поляризованной волны. Вторым предельным случаем имеет место при равенстве амплитуд исходных полей и сдвиге фаз между ними, равном 90° – волна с круговой поляризацией, $\vec{E} = \dot{E}(\vec{x}_0 \pm j \cdot \vec{y}_0)$. Знак плюс соответствует волне с правой круговой поляризацией, у которой вектор вращается по часовой стрелке, если смотреть в направлении против распространения волны. Знак минус соответствует волне с левой круговой поляризацией, когда направление вращения обратное.

Любая волна с линейной поляризацией может быть представлена суммой двух волн с круговой поляризацией. Например, при линейной поляризации вдоль оси x имеем:

$$\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

где $\vec{E}_+ = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 + jy)$, $E_x = E_m = E$, $\vec{E}_- = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 - jy)$.

При эллиптической поляризации комплексные амплитуды:

$$\dot{E}_x = E_{0x} \cdot \exp(j\varphi_x); \quad \dot{E}_y = E_{0y} \cdot \exp(j\varphi_y).$$

Ось эллипса повёрнута относительно оси x на угол α , который отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{z}_0 . Величину угла α находят с помощью выражения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|}.$$

Отношение длины большой полуоси эллипса a к длине малой оси b называют коэффициентом эллиптичности $k_{\text{ЭЛ}}$. Этот коэффициент можно рассчитать по формуле:

$$k_{\text{ЭЛ}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2 \sin \Delta\varphi} \left[\frac{E_{0x}}{E_{0y}} + \frac{E_{0y}}{E_{0x}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\varphi} \right].$$

Вектор Пойнтинга (среднюю плотность потока мощности) $\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \cdot \vec{H}^*]$ удобно выражать через напряженность какого-либо одного поля:

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right) \cdot \vec{i}_z = \frac{|\dot{H}|^2}{2} \cdot \operatorname{Re}(Z_c) \cdot \vec{i}_z.$$

Для сред с потерями:

$$\Pi_{\text{cp}} = \Pi_{\text{cp}}(0) \cdot e^{-2\alpha z}.$$

Погонное затухание выражается в дБ/м:

$$\Delta = 20 \lg \left[\frac{E(0)}{E(l=1)} \right] = 10 \lg \frac{\Pi(0)}{\Pi(l=1)},$$

которое связано с коэффициентом ослабления α соотношением:

$$\Delta = 8.69\alpha.$$

При распространении на расстояние l затухание волны в децибелах (дБ) равно:

$$k_{\text{дБ}} = \Delta \cdot l.$$

Для нахождения вида сигнала необходимо пользоваться спектральным или операторным методом. Если известно Фурье-преобразование сигнала

$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ в плоскости $z = 0$, то можно найти сигнал для любых значений z , используя обратное преобразование:

$$S(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{-j\omega z} \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

При этом групповая скорость узкополосного сигнала $S(t, z)$ дается соотношением:

$$v_{gp} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}.$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2.4$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 10^{-1}$, $\mu = 1$. Определить фазовую скорость, длину волны и коэффициент ослабления.

Решение.

Поскольку $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$, то:

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \left(1 - j \frac{\operatorname{tg} \delta_\varepsilon}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon}{8} \right).$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} (1 + 0.125 \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon), \\ \alpha &= 0.5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 1.622 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Фазовая скорость волны будет:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} (1 + 0.125 \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon)} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.94 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Теперь находим длину волны:

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = 0.194 \text{ м}.$$

Ответ: фазовая скорость $v_\phi = 1.94 \cdot 10^8$ м/с, длина волны $\lambda = 0.194$ м и коэффициент ослабления $\alpha = 1.622 \text{ м}^{-1}$.

4.2.2 Вычислить фазовую скорость, коэффициент ослабления и глубину проникновения поля для плоской волны с частотой 10 МГц, распространяющейся в металле с параметрами $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м, $\mu = 1$.

Решение.

В реальных металлах плотность токов проводимости значительно больше токов смещения, поэтому:

$$\gamma \approx \omega \sqrt{\mu_0 \left(-j \cdot \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \sigma \cdot \mu_0}{2}} \cdot (1 - j),$$

откуда:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \sigma \cdot \mu_0}{2}} = 44.43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1},$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = 1.414 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = 22.5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 22.5 \text{ мкм}.$$

Ответ: фазовая скорость $v_{\phi} = 1.414 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, глубина проникновения поля $d = 22.5 \text{ мкм}$ и коэффициент ослабления $\alpha = 44.43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$.

4.2.3 Плоская электромагнитная волна с частотой 10^9 Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2.25$, $\text{tg } \delta_{\varepsilon} = 0.01$, $\mu = 1$. Амплитуда электрического поля в плоскости $z = 0$ равна 100 В/м . Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости $z = 1 \text{ м}$.

Решение.

Плотность потока мощности определяется выражением:

$$P_{cp}(Z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \text{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) \cdot e^{-2\alpha z}.$$

Таким образом, необходимо вычислить Z_c и α :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5 j \text{tg} \delta_{\varepsilon}} \approx 251.32 \text{ Ом}.$$

$$\alpha = 0.5 \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'_a} \cdot \text{tg} \delta_{\varepsilon} = 0.5 \frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot \omega}{c} \cdot \text{tg} \delta_{\varepsilon} \approx 0.157 \text{ м}^{-1}.$$

Подставляя Z_c и α в $P_{cp}(z)$ получим:

$$P_{cp}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{120\pi} \cdot e^{-2\alpha z} = P_{cp}(z=1\text{м}) = 14.38 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: средняя плотность потока мощности в плоскости $z = 1 \text{ м}$ $P_{cp}(z=1 \text{ м}) = 14.38 \text{ Вт/м}^2$.

4.2.4 Считая заданными значения фазовых скоростей для левой $v_{\text{л}}$ и правой $v_{\text{пр}}$ круговой поляризации, определить угол поворота плоскости поляризации волны на участке пути длиной L для электромагнитной волны с заданной частотой ω .

Решение.

Линейно поляризованную волну, имеющую в плоскости $z = 0$ вид:

$$\vec{E} = E_{0x} \cdot \vec{i}_x$$

можно представить как сумму двух волн с правой и левой поляризацией:

$$\vec{E}_{np} = \frac{E_{0x}}{2} (\vec{i}_x + j\vec{i}_y), \quad \vec{E}_l = \frac{E_{0x}}{2} (\vec{i}_x - j\vec{i}_y).$$

Волновое число $\beta = \frac{\omega}{v_{\phi}}$. Тогда:

$$\dot{E}_{np}(z) = E_{o,np} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v_{np}}z}; \quad \dot{E}_l(z) = E_{o,l} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v_l}z}.$$

В любой плоскости $z \neq 0$ сумма этих волн будет представлять собой волну с линейной поляризацией. Координатные составляющие этих волн равны:

$$\vec{E}_x(z) = \frac{E_{0x}}{2} (e^{-j\beta_{np} \cdot z} + e^{-j\beta_l \cdot z}), \quad \vec{E}_y(z) = j \frac{E_{0x}}{2} (e^{-j\beta_{np} \cdot z} - e^{-\beta_l \cdot z}).$$

Суммарный вектор \vec{E} образует некоторый угол φ с осью x , который зависит от z :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega z}{2} \left(\frac{1}{v_l} - \frac{1}{v_{np}} \right) \right],$$

или на отрезке длиной L :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left[\frac{\omega L}{2} \left(\frac{v_{np} - v_l}{v_{np} \cdot v_l} \right) \right].$$

Если различие скоростей v_{np} и v_l мало, то:

$$\varphi \approx \frac{\omega L}{2} \cdot \frac{v_{np} - v_l}{v^2} = \pi \frac{L}{\lambda} \cdot \delta v,$$

где v – среднее значение скорости; δv – относительная разность распространения; $\lambda = \frac{v}{f}$ – длина волны в среде.

Ответ: угол поворота плоскости поляризации волны на участке пути длиной L : $\varphi = \pi \frac{L}{\lambda} \cdot \delta v$.

4.2.5 Среднее значение плотности потока мощности плоской электромагнитной волны в вакууме составляет 5 Вт/м^2 . Определить амплитудные значения x -й проекции вектора напряженности электрического поля и y -й проекции вектора магнитного поля.

Решение.

Для среды без потерь:

$$P_{cp}(z) = \frac{|E_x|^2}{2} \cdot \frac{1}{Z_c} = \frac{|H_y|^2}{2} \cdot Z_c,$$

где $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$. Откуда:

$$E_x = \sqrt{P_{cp} \cdot 240\pi} = 61.4 \text{ В/м.}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{2P_{cp}}{Z_c}} = 0.16 \text{ А/м.}$$

Ответ: амплитудные значение x -й проекции вектора напряженности электрического поля $E_x = 61.4$ В/м и y -й проекции вектора магнитного поля $H_y = 0.16$ А/м.

4.2.6 Доказать принципиальную невозможность существования чисто продольных электромагнитных волн, которые имели бы лишь нулевые проекции E_z и H_z , не зависящие от поперечных координат x и y .

Решение.

Задачу решим двумя способами.

Первый способ решения.

Непосредственно воспользуемся двумя первыми уравнениями Максвелла. Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \vec{j} = 0.$$

В полученном выражении плотность тока равна нулю ($\vec{J} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$),

так как проекции E_z и H_z по условию задачи не зависят от поперечных координат x и y , и производные по этим координатам равны нулю. Значит вектор напряженности электрического поля $\vec{E} = 0$ В/м.

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ В/м}^2.$$

В полученном выражении производная от вектора магнитной индукции по времени равна нулю ($-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ В/м}^2$), то есть магнитное поле и связанное с ним электрическое поле не меняются во времени. Отсюда следует, что электромагнитная волна, которая всегда связана с изменением полей во времени, отсутствует.

Второй способ решения.

Запишем выражение для вектора Пойнтинга \vec{P} при $E_z = 0$ и $H_z = 0$:

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \sin \alpha = E_z \cdot H_z \cdot \sin 0 = 0 \text{ Вт/м}^2.$$

Равенство вектора Пойнтинга \vec{P} нулю обозначает, что переноса энергии чисто продольной электромагнитной волной нет, а значит, не может быть и самой чисто продольной электромагнитной волны.

4.2.7 Плоская гармоническая волна с частотой $f = 80$ МГц, распространяясь в некоторой материальной среде без потерь, имеет длину волны $\lambda = 0.5$ м. Вычислите фазовую скорость этой волны.

Решение.

Запишем выражение для длины волны в материальной среде, содержащее фазовую скорость и частоту f :

$$\lambda_{\phi} = \frac{v_{\phi}}{f}.$$

Из этого выражения получим:

$$v_{\phi} = \lambda_{\phi} \cdot f = 0.5 \cdot 80 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_{\phi} = 4 \cdot 10^7$ м/с.

4.2.8 Плоская волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты z , имеет комплексную амплитуду $\dot{V}_+(z) = 200 \cdot e^{-\gamma z}$ В, где $\gamma = 0.8 + j0.5$ м⁻¹. Частота волнового процесса $f = 8 \cdot 10^4$ Гц. Вычислите мгновенное значение функции $V(z, t)$ в плоскости $z = 5$ м при $t = 10^{-4}$ с.

Решение.

Запишем выражение для плоской волны, распространяющейся в сторону увеличения координаты z , и имеющей комплексную амплитуду $\dot{V}_+(z) = 200 \cdot e^{-\gamma z}$ В:

$$V(z) = V_m \cos(\omega t - \beta z) \cdot \exp(-\alpha z).$$

Так как:

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.8 + j0.5 \text{ м}^{-1},$$

то:

$$\alpha = 0.8 \text{ м}^{-1}; \quad \beta = 0.5 \text{ м}^{-1}.$$

С учётом этого в плоскости с координатой $z = 5$ м в момент времени $t = 10^{-4}$ с имеем:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_m \cos(\omega t - \beta z) \cdot \exp(-\alpha z) = \\ &= 200 \cdot \cos(6.28 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4} - 0.5 \cdot 5) \cdot \exp(0.8 \cdot 5) = 2.461 \text{ В.} \end{aligned}$$

Ответ: в плоскости с координатой $z = 5$ м в момент времени $t = 10^{-4}$ с $V(z) = 2.461$ В.

4.2.9 Погонное затухание Δ однородной плоской волны составляет 45 дБ/м. Определите, на каком расстоянии z амплитуда волны уменьшится в $k = 10^6$ раз.

Решение.

Запишем выражения для затухания однородной плоской волны

$$\begin{aligned} k_{\text{дБ}} &= \Delta \cdot z; \\ k_{\text{дБ}} &= 20 \cdot \lg k = 20 \cdot \lg 10^6 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ дБ.} \end{aligned}$$

Из этих выражений получим:

$$z = \frac{k_{\partial B}}{\Delta} = \frac{120}{45} = 2.66 \text{ м.}$$

Ответ: амплитуда волны уменьшится в $k = 10^6$ раз при $z = 2.66$ м.

4.2.10 Найдите характеристическое сопротивление Z_c материальной среды с параметрами $\varepsilon = 4$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 7$.

Решение.

Запишем выражение для характеристического сопротивления Z_c материальной среды с электрическими потерями с учётом того, что при $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$ и $\delta_\varepsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$ и

$$\frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\varepsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} Z_c &= 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - jt\text{g}\delta_\varepsilon}} \approx 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) = \\ &= 377 \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \left(1 + j \frac{10}{2} \cdot 10^{-3}\right) = 498 + j2.49 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Ответ: характеристическое сопротивление среды при $\varepsilon = 4$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10 \cdot 10^{-3}$ и $\mu = 7$ равно $Z_c = 498 + j2.49$ Ом.

4.2.11 В среде с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 0$, $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряжённости электрического поля которой в плоскости $z = 0$ $\vec{E} = (0.5\vec{x}_0 + 0.2\vec{y}_0)$ В/м. Определить комплексную амплитуду вектора напряжённости магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты z .

Решение.

Вычислим характеристическое сопротивление среды для плоской электромагнитной волны при $\varepsilon = 4$, $\sigma = 0$, $\mu = 1$:

$$Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{4}} = 188.5 \text{ Ом.}$$

Запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме в декартовой системе координат для плоской электромагнитной волны ($E_z = 0$,

$$H_z = 0, B_z = 0, \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0):$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{d(B_x \cdot \vec{x}_0 + B_y \cdot \vec{y}_0)}{dt}.$$

Из равенства проекций векторного уравнения видно, что величины $B_x = \mu_a \cdot H_x$ и H_x зависят от E_y , а $B_y = \mu_a \cdot H_y$ и H_y зависят от E_x . С учётом этого получим искомые значения проекций вектора напряжённости магнитного поля:

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_c} = -\frac{0.2}{188.5} = -1.06 \cdot 10^{-3} \text{ А/м};$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_c} = \frac{0.5}{188.5} = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$$

и формулу для комплексной амплитуды напряжённости магнитного поля:

$$\vec{H} = H_x \cdot \vec{x}_0 + H_y \cdot \vec{y}_0 = -1.06 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 2.65 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м.}$$

Ответ: комплексная амплитуда напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = -1.06 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{x}_0 + 2.65 \cdot 10^{-3} \cdot \vec{y}_0 \text{ А/м.}$$

4.2.12 Определить комплексную амплитуду вектора напряжённости электрического поля плоской электромагнитной волны в металле с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м на частотах 10 кГц и 1 МГц, если в заданной точке пространства комплексная амплитуда вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H} = 25\vec{y}_0$ А/м.

Решение.

Запишем выражение для характеристического сопротивления в металле $Z_{C.M}$:

$$Z_{C.M} = 120\pi \sqrt{\frac{j\omega \cdot \mu_a}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{2\sigma}} \cdot (1+j) = \sqrt{\frac{\pi f \cdot \mu_a}{\sigma}} \cdot (1+j) \text{ Ом.}$$

Определим величины этого сопротивления для частот 10 кГц ($Z_{C.M}(10^4$ Гц)) и 1 МГц ($Z_{C.M}(10^6$ Гц)):

$$Z_{C.M}(10^4 \text{ Гц}) = \sqrt{\frac{3.14 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^7}} \cdot (1+j) = 2.565 \cdot 10^{-5} \cdot (1+j) \text{ Ом,}$$

$$Z_{C.M}(10^6 \text{ Гц}) = \sqrt{\frac{3.14 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^7}} \cdot (1+j) = 2.565 \cdot 10^{-4} \cdot (1+j) \text{ Ом.}$$

По условиям нашей задачи $\vec{H} = \dot{H}_y \cdot \vec{y}_0 = 25\vec{y}_0$ А/м, а в предыдущей задаче из равенства проекций векторов во втором уравнении Максвелла было показано, что для плоской электромагнитной волны величина $+\dot{E}_x$ связана с величиной $-\dot{H}_y$. С учётом этого запишем выражение для комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля этой волны $\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0$ и определим величины этой амплитуды для заданных частот:

$$\vec{E} = \dot{E}_x \cdot \vec{x}_0 = -Z_c \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0.$$

$$\vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -Z_{c.m} (10^4) \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0 = -2.565 \cdot 10^{-5} (1+j) \cdot 25 \cdot \vec{x}_0 = -641.3 \cdot 10^{-6} (1+j) \cdot \vec{x}_0;$$

$$\vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -Z_{cM} (10^6) \dot{H}_y \cdot \vec{x}_0 = -2.565 \cdot 10^{-4} (1+j) \cdot 25 \cdot \vec{x}_0 = -641.3 \cdot 10^{-5} (1+j) \cdot \vec{x}_0.$$

По формуле Эйлера:

$$(1+j) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \exp(j45^\circ)$$

С учётом этого:

$$\vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-6} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м};$$

$$\vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-5} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}.$$

Ответ: значения комплексной амплитуды вектора напряжённости электрического поля равны:

$$\text{для частоты } 10 \text{ кГц } \vec{E}(10^4 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-6} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м};$$

$$\text{для частоты } 1 \text{ МГц } \vec{E}(10^6 \text{ Гц}) = -906.9 \cdot 10^{-5} \exp(j45^\circ) \cdot \vec{x}_0 \text{ В/м}.$$

4.2.13 Диэлектрический материал на частоте 10 ГГц обладает параметрами $\varepsilon = 3.38$, $\text{tg } \delta_\varepsilon = 10^{-4}$, $\mu = 1$. Определить длину волны λ , коэффициент ослабления α и характеристическое сопротивление такой среды Z_C .

Решение.

Определим длину волны в диэлектрике:

$$\lambda = \frac{v_\phi}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3.38 \cdot 1} \cdot 10^{10}} = 1.63 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Запишем выражения для характеристического сопротивления Z_C и коэффициента ослабления α материальной среды с электрическими потерями с учётом того, что при $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$ и $\delta_\varepsilon \ll 1$ выполняются приближённые равенства $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$ и

$$\frac{1}{\sqrt{1 - j\delta_\varepsilon}} \approx \left(1 + j \frac{\delta_\varepsilon}{2} \right).$$

$$\begin{aligned}
 Z_c &= 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-jtg\delta_\varepsilon}} \approx 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \left(1 + j\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) = \\
 &= 377\sqrt{\frac{1}{3.38}} \cdot \left(1 + j\frac{10^{-4}}{2}\right) = 204.9 + j1.024 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}. \\
 \alpha &\approx \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon} \cdot \delta_\varepsilon}{2c} = \frac{6.28 \cdot 10^{10} \sqrt{3.38} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1.924 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Ответ: длина волны $\lambda = 1.63 \cdot 10^{-2}$ м; характеристическое сопротивление $Z_c = 204.9 + j1.024 \cdot 10^{-2}$ Ом, а коэффициент ослабления $\alpha = 1.924 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$.

4.2.14 Во сколько раз уменьшится амплитуда плоской волны с частотой 2 МГц при распространении в среде с параметрами $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м на пути в 1 м.

Решение.

Определим величину тангенса угла диэлектрических потерь $tg \delta_\varepsilon$:

$$tg \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{2\pi f \cdot \varepsilon_a} = \frac{10^{-3}}{6.28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.885 \cdot 10^{-11} \cdot 2} = 4.98.$$

Так как $tg \delta_\varepsilon > 1$, то коэффициент ослабления α рассчитываем по формуле для металлоподобной среды:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi f \cdot \mu_a \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{6.28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 12.56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}{2}} = 8.88 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

Вычисляем, во сколько раз уменьшится амплитуда плоской волны на пути $z = 1$ м:

$$\frac{E_0}{E(z)} = \exp(\alpha z) = \exp(8.88 \cdot 10^{-2} \cdot 1) = 1.093.$$

Ответ: амплитуда плоской волны на пути $z = 1$ м уменьшится в 1.093 раза.

4.2.15 Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в 10^4 раз на частотах 50 Гц и 50 МГц. Электрофизические характеристики меди $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$ См/м, $\mu_a = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Решение.

Уменьшение амплитуды плоской волны на пути z в $n = 10^4$ раз описывается выражением:

$$\frac{E_0}{E(z)} = \exp(\alpha z) = n = 10^4.$$

Подставляя в это выражение формулу для определения коэффициента ослабления:

$$\alpha = \sqrt{\pi f \cdot \mu_a \sigma},$$

получим расчётное соотношение для определения толщины медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в $n = 10^4$ раз:

$$z = \frac{\ln(n)}{\alpha} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{\pi f \cdot \mu_a \sigma}}.$$

На частоте 50 Гц:

$$z(50 \text{ Гц}) = \frac{\ln(10^4)}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}} = 0.0868 \text{ м} = 8.68 \text{ см}.$$

На частоте 50 МГц:

$$z(50 \cdot 10^6 \text{ Гц}) = \frac{\ln(10^4)}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.7 \cdot 10^7}} = 0.0868 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 86.8 \text{ мкм}.$$

Ответ: Толщины медного экрана для заданных частот равны: $z(50 \text{ Гц}) = 8.68 \text{ см}$; $z(50 \cdot 10^6 \text{ Гц}) = 86.8 \text{ мкм}$.

4.2.16 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , в плоскости $z = 0$, равна $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$. Определить вид поляризации, если $\varphi = 60^\circ$.

Решение.

Запишем выражение для компонент комплексной амплитуды вектора напряженности заданного электрического поля $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$:

$$E_x = E_0; \quad E_y = E_0 \cdot \exp(j\varphi).$$

С другой стороны, при эллиптической поляризации:

$$E_x = E_{0x} \cdot \exp(j\varphi_x); \quad E_y = E_0 \cdot \exp(j\varphi).$$

Сравнивая приведённые выражения, получаем:

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0; \quad \varphi_x = 0^\circ; \quad \varphi_y = 60^\circ.$$

Определим ориентацию эллипса относительно оси x , используя формулу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|}.$$

В этой формуле угол α отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{z}_0 . В нашем случае вращение левое, так как $\vec{E} = E_0(\vec{x}_0 + e^{j\varphi} \cdot y_0)$, а в случае, когда в скобках подобного выражения вместо знака «+» стоит «-» – вращение правое.

Вычислим $\operatorname{tg} 2\alpha$:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|} = \frac{2E_0E_0}{|E_0^2 - E_0^2|} = \infty.$$

При $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$; $2\alpha = 90^\circ$, а $\alpha = 45^\circ$.

Коэффициент эллиптичности, равный отношению осей эллипса a/b , находим по формуле:

$$k_{\text{эл}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2 \sin \Delta\varphi} \left[\frac{E_{0x}}{E_{0y}} + \frac{E_{0y}}{E_{0x}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} - \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\varphi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \sin 60^\circ} \left[1 + 1 + \sqrt{(1-1)^2 + 4 \cos^2 60^\circ} \right] = \frac{1 + \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

Ответ: поляризация эллиптическая с левым вращением вектора \vec{E} ; большая ось эллипса образует угол 45° с осью x , $K_{\text{эл}} = \sqrt{3}$.

4.2.17 Две плоские электромагнитные волны с левой и правой круговой поляризацией в плоскости $z = 0$ имеют векторы напряженности электрического поля: $\vec{E}_l = E_0(\vec{x}_0 - j\vec{y}_0)e^{j\varphi_l}$; $\vec{E}_{np} = E_0(\vec{x}_0 + j\vec{y}_0)e^{j\varphi_{np}}$. Определить вид поляризации суммарного поля, если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_l - \varphi_{np} = 45^\circ$.

Решение.

Запишем выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля при линейной поляризации вдоль оси поляризации x :

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; \quad E_x = E_m = E, \quad (*)$$

где $\vec{E}_+ = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 + jy)$, а $\vec{E}_- = \frac{E_x}{2}(\vec{x}_0 - jy)$.

В нашем случае:

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_{np} = E_0 \left\{ \exp[j(\varphi_{np} + 45^\circ)] + \exp(j\varphi_{np}) \right\} = E_0 \exp(j\varphi_{np}) \left[\exp(j45^\circ) + 1 \right].$$

Совместим ось x' с направлением 45° . Тогда:

$$\vec{E} = E_0 \exp(j\varphi_{np}) \left[\exp(j0^\circ) + 1 \right] = 2E_0 \exp(j\varphi_{np}).$$

$$E = \text{Re } \vec{E} = 2E_0 \cos(\varphi_{np}) = E_m. \quad (**)$$

Сравнивая выражения (*) и (**) видим, что поляризация линейная, вектор \vec{E} образует угол 45° с осью x .

Ответ: поляризация линейная, вектор \vec{E} образует угол 45° с осью x .

4.2.18 Однородная плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Вектор Пойнтинга волны лежит в плоскости x, z и образует угол φ с осью z . Найти расстояние вдоль z , на котором фаза волны изменится на 360° , если частота колебаний равна 100 МГц, а угол $\varphi = 60^\circ$.

Решение.

Изобразим ориентацию вектора Пойнтинга в декартовой системе координат на рисунке 4.1.

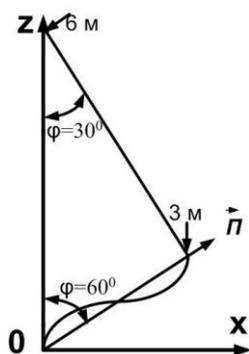


Рисунок 4.1 – Иллюстрация к задаче 4.2.17

Вычислим длину волны в вакууме:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ м.}$$

Из рисунка 4.1 видно пересечение фронта волны, на котором фаза волны изменится на 360° , с осью z . С помощью этого рисунка находим выражение для расстояния вдоль оси z , на котором фаза волны изменится на 360° :

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\sin(30^\circ)} = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ м.}$$

Ответ: 6 м.

4.2.19 В среде с параметрами $\epsilon = 2.25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 100 В/м. Определить плотность потока мощности, переносимой волной в направлении распространения.

Решение.

Запишем выражение для расчёта величины плотности потока мощности, переносимой волной в направлении распространения:

$$P = \frac{E_m^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right).$$

Определим величину характеристического сопротивления:

$$Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \sqrt{\frac{1}{2.25}} = 251.3 \text{ Ом.}$$

Определим величину плотности потока мощности:

$$P = \frac{E_m^2}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} \right) = \frac{10^4}{2} \cdot \frac{1}{251.3} = 19.894 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: величина плотности потока мощности $P = 19.894 \text{ Вт/м}^2$.

4.2.20 В среде с показателем преломления, зависящим от частоты, распространяются два узкополосных радиоимпульса с несущими частотами 10 и 20 ГГц. Определить разность времен запаздывания импульсов на расстоянии

100 км от точки, где они совпадают по времени, если закон изменения показателя преломления записывается в виде $n(\omega) = 10^{-10} \omega$.

Решение.

Определим зависимость скорости распространения от частоты для закона изменения показателя преломления $n(\omega) = 10^{-10} \omega$:

$$v(\omega) = \frac{c}{n} = \frac{c}{10^{-10} \omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-10} \cdot 6.28 f} = 0.478 \cdot 10^{18} f^{-1} \text{ м/с.}$$

Определим разность времён запаздывания импульсов на расстоянии 100 км от точки, где они совпадают по времени:

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \tau_1 - \tau_2 = S \left(\frac{1}{v_2(\omega)} - \frac{1}{v_1(\omega)} \right) = S \cdot 10^{-18} \cdot \frac{1}{0.478} (f_1 - f_2) = \\ &= 10^5 \cdot 10^{-18} \cdot \frac{10^{10}}{0.478} (2 - 1) = 2.092 \text{ мс.} \end{aligned}$$

Ответ: импульс с несущей частотой 10 ГГц будет опережать второй импульс с несущей частотой 20 ГГц на 2.092 мс.

4.3 Задачи для самостоятельной работы

4.3.1 Плоская волна, распространяющаяся в сторону увеличения координаты z , имеет комплексную амплитуду $V_+(z) = 200e^{-\gamma z}$ В, где $\gamma = \alpha + j\beta$ м⁻¹. Частота волнового процесса $f = f_0$, кГц. Вычислите мгновенное значение функции $V(z, t)$ в плоскости $z = z_0$ при $t = t_0$ мс, погонное затухание Δ в дБ/м и фазовую скорость. Значения α [м⁻¹], β [м⁻¹], f_0 , z_0 и t_0 приведены в таблице 4.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.2 Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в n раз на частотах f_1 [Гц] и f_2 [МГц]. Значения n , f_1 [Гц] и f_2 [МГц] приведены в таблице 4.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.1 – Исходные данные к задаче 4.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\alpha, \text{ м}^{-1}$	0.4	0.2	0.15	0.28	0.56	1.2	1.4	0.85	0.9	0.3
$\beta, \text{ м}^{-1}$	0.3	0.6	0.4	0.35	0.48	0.4	1	1.3	0.6	0.8
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f = f_0, \text{ кГц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$z_0, \text{ м}$	4	5	6	7	2.8	6.2	7.6	6.5	4.2	3.4
$t_0, \text{ мс}$	22	18	24	15	14	11	17	16	18	12

Таблица 4.2 – Исходные данные к задаче 4.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$2.6 \cdot 10^5$	$3.7 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^5$	$2.9 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f_1, \text{ Гц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f_2, \text{ МГц}$	22	18	64	45	34	11	27	56	78	83

4.3.3 Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с параметрами ε , $\sigma = 0$, $\mu = 1$ и имеет в плоскости $z = 0$ комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля $\vec{E} = (E_x \cdot \vec{x}_0 + E_y \cdot \vec{y}_0)$ В/м. Определить характеристическое сопротивление среды и комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты z . Значения ε , E_x и E_y приведены в таблице 4.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.3 – Исходные данные к задаче 4.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_x , В/м	1.2	1.8	0.4	0.5	3.4	1.1	2.7	0.6	0.8	0.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_y , В/м	2.2	0.8	0.6	0.4	1.4	2.1	0.7	0.5	1.8	1.3

4.3.4 Плоская электромагнитная волна распространяется вертикально вниз и падает на водную поверхность с параметрами: ε_a [нФ/м], σ [См/м], $\mu = 1$. Длина волны в воздухе λ . Определить: является ли среда металлоподобной для данной частоты, длину волны в воде, а также изменённую скорость распространения волны в воде. На какую длину волны необходимо настроить приёмник под водой для принятия сигнала, если шкала приёмника проградуирована в длинах волн: на длину волны в воздухе или длину волны в воде. Значения ε_a [нФ/м], σ [См/м] и λ [м] приведены в таблице 4.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.5 Плоская электромагнитная волна распространяется в условиях задачи 4.3.4. Величина напряжённости электрического поля E [мкВ/м] на глубине x [м] равна $E = E_m \cos \omega t$ В/м. Определить величину напряжённости магнитного поля H на поверхности воды. Значения ε_a [нФ/м], σ [См/м] и λ [м] приведены в таблице 4.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число, а значения E (В/м) и x (м) в таблице 4.5.

Таблица 4.4 – Исходные данные к задаче 4.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_a , нФ/м	0.6	0.78	0.65	0.7	0.58	0.64	0.73	0.56	0.68	0.71
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.9	1.05	1.14	1.0	0.95	0.88	0.97	1.07	0.93	0.88
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	400	430	450	470	490	510	530	550	580	380

Таблица 4.5 – Исходные данные к задаче 4.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x , м	1	2	3	4	3.5	1.4	2.7	1.6	1.8	2.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E , мкВ/м	1.2	1.8	0.4	0.5	3.4	1.1	2.7	0.6	0.8	0.3

4.3.6 Диэлектрический материал на частоте f [ГГц] обладает параметрами ϵ , $\text{tg } \delta_\epsilon$, $\mu = 1$. Определить длину волны, коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление такой среды. Значения ϵ , $\text{tg } \delta_\epsilon$, f [ГГц] приведены в таблице 4.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

4.3.7 Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны эллиптической поляризации, распространяющейся вдоль оси z , в плоскости $z = 0$, равна $\vec{E} = E_{0x} e^{j\varphi_x} \vec{x}_0 + E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{y}_0$. По заданным значениям E_{0x} , E_{0y} и $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ определить параметры эллиптической поляризации: направление вращения вектора \vec{E} , ориентацию осей эллипса и коэффициент эллиптичности. Значения E_{0x} [В/м], E_{0y}/E_{0x} и $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ приведены в таблице 4.7 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.6 – Исходные данные к задаче 4.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{tg\delta_\varepsilon}{10000}$	0.9	1.0	1.2	1.1	2.9	0.5	0.7	1.6	0.3	0.8
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	16	13	15	17	19	12	20	23	11	8

Таблица 4.7 – Исходные данные к задаче 4.3.7

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_{0x} , В/м	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{E_{0x}}{E_{0y}}$	0.9	1.05	1.14	1.3	0.95	0.88	0.97	1.07	0.93	0.88
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\Delta\varphi^\circ$	36	53	45	30	15	25	20	23	10	40

4.3.8 Найдите характеристическое сопротивление Z_C материальной среды с параметрами ε , $tg \delta_\varepsilon$, μ . Значения ε , $tg \delta_\varepsilon$ приведены в таблице 4.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значения μ приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Исходные данные к задаче 4.3.8

Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	16	13	15	17	10	12	20	23	11	8

4.3.9 Определить комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны в металле с параметрами $\mu = 1$, $\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м, на частотах f_1 и f_2 , если в заданной точке пространства комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля $\vec{H} = H_y \cdot \vec{y}_0$ А/м. Значения H_y [А/м], f_1 [кГц] и f_2/f_1 приведены в таблице 4.9 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.9 – Исходные данные к задаче 4.3.9

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H_y , А/м	2	8	6	5	3	4	2.7	5.6	7.8	8.3
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f_1 , кГц	36	53	45	30	15	25	20	23	10	40
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{f_2}{f_1}$	80	50	45	90	75	25	20	65	70	60

4.3.10 Плоская электромагнитная волна распространяется в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , с относительной магнитной проницаемостью μ и с удельной проводимостью σ . Определить параметры волны: α , β , γ , Z_c , v_ϕ и λ для значений частоты: 10^5 Гц, 10^8 Гц, 10^{10} Гц. Условно считая, что если $\text{tg}\delta \geq 100$, то среда является металлом, а если $\text{tg}\delta \leq 0.01$, то она является диэлектриком, определить для какой из указанных частот среду можно считать металлом, а для какой диэлектриком. Значения ϵ , μ и σ приведены в таблице 4.10 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 4.10 – Исходные данные к задаче 4.3.10

Первая цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ	72	81	68	75	93	74	87	64	78	83
Вторая цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ	1.6	1.5	1.4	1.3	1.55	1.25	1.2	1.6	1.0	1.45
Третья цифра номера вариан- та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.2	0.3	45	0.1	0.09	0.2	0.3	0.06	0.07	0.08

5 ТЕМА 5. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ

5.1 Основные формулы

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$, σ и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны.

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентом отражения:

$$R_E = \frac{E_{omp}}{E_{nad}}; \quad R_H = \frac{H_{omp}}{H_{nad}}$$

и коэффициентом преломления (прохождения):

$$T_E = \frac{E_{np}}{E_{nad}}; \quad T_H = \frac{H_{np}}{H_{nad}}.$$

Для среднего значения плотности потока мощности:

$$R_{\Pi} = \frac{\Pi_{omp}}{\Pi_{nad}}; \quad T_{\Pi} = \frac{\Pi_{np}}{\Pi_{nad}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то:

$$R_E = \frac{(Z_{C2} - Z_{C1})}{(Z_{C2} + Z_{C1})}; \quad T_E = \frac{2Z_{C2}}{(Z_{C1} + Z_{C2})},$$

где Z_C – характеристическое сопротивление среды, соответственно первой и второй:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}}.$$

Если в формулах для характеристического сопротивления учесть, что для диэлектриков с потерями:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \cdot \epsilon_0 (1 - jtg\delta_\epsilon),$$

то выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик примет вид

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon} \cdot (1 - jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}.$$

Здесь $tg\delta_\epsilon = \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \approx \delta_\epsilon$.

Плоскость, содержащая вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к границе раздела, называют плоскостью падения.

Из граничных условий следует, что углы падения φ , отражения φ_0 и преломления φ_n связаны законом зеркального отражения $\varphi = \varphi_0$ и законом Снелля:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Если вектор \vec{E} лежит в плоскости падения, то:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi_n - Z_{C1} \cos \varphi]}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]},$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]}.$$

Если вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения, то:

$$R_E^{\perp} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_n]}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]},$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]}.$$

Для диэлектрических сред, у которых $\mu = 1$, коэффициенты R и T удобно представить в виде:

$$R_E^{\perp} = \frac{-\sin(\varphi - \varphi_n)}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad R_E^{\parallel} = \frac{-\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_n)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_n)};$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad T_E^{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n) \cos(\varphi - \varphi_n)}.$$

При $\varphi + \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, $R_E^{\parallel} = 0$. Угол падения, в этом случае называется углом Брюстера:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Если при $\varepsilon_2 \cdot \mu_2 < \varepsilon_1 \cdot \mu_1$ угол падения φ будет равен или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{ПВО}$, равного:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}},$$

то преломлённой волны в общепринятом смысле не существует (явление полного внутреннего отражения). Коэффициенты отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице, а будет изменяться только их фаза:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\},$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

Коэффициенты преломления \dot{T}_E^{\parallel} и \dot{T}_E^{\perp} при явлении полного внутреннего отражения не равны нулю:

$$\dot{T}_E^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}};$$

$$\dot{T}_E^{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

В этом случае поле $\dot{E}_{\text{ПП}}$, прошедшее во вторую среду, представляет собой неоднородную плоскую волну, быстро убывающую при удалении от границы раздела и называемую поверхностной волной:

$$\dot{E}_{\text{ПП}} = \dot{T} \cdot \dot{E}_{\text{ПАД}} \exp \left\{ \beta_1 \left[z \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)} - jx \cdot \sin \varphi \right] \right\},$$

где z и x – текущие координаты в плоскости падения: z – перпендикулярна, а x – параллельна границе раздела.

Глубина проникновения поверхностной волны в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \operatorname{ch} \alpha},$$

где:

$$\operatorname{ch} \alpha = \sin \psi = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \frac{n_2}{n_1},$$

ψ – комплексный угол преломления, $\beta_2 = \frac{\omega}{v_{\phi}}$ – коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2.

Фазовая скорость поверхностной волны находится из выражения:

$$v_{\phi.нов} = \frac{\omega}{\beta_{нов}},$$

где $\beta_{нов} = \beta_2 ch\alpha = \beta_2 \frac{n_2}{n_1} = \beta_1$.

Для металлоподобных сред справедливо граничное условие Леонтовича:

$$\vec{E}_\tau = Z_{см} [\vec{H} \cdot \vec{i}_n] \quad \text{или} \quad |\dot{E}| = |Z_{см} \cdot \dot{H}_\tau|,$$

где \vec{i}_n – единичный вектор нормали к поверхности металлоподобной среды, направленный внутрь;

$$Z_{см} = \sqrt{\frac{j\mu_a \omega}{\sigma}};$$

\dot{H}_τ – касательная к поверхности среды составляющая вектора напряженности магнитного поля.

На границе раздела должны выполняться следующие граничные условия:

$$\mu_{a1} \cdot H_{1n} = \mu_{a2} \cdot H_{2n}; \quad \varepsilon_{a1} \cdot E_{1n} = \varepsilon_{a2} \cdot E_{2n};$$

для нормальных составляющих и

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

для касательных составляющих электромагнитного поля.

Суммарная величина напряженности магнитного поля на границе раздела металла и среды:

$$H_\Sigma = 2H_{пад}.$$

Амплитуда вектора плотности электрического тока на границе раздела металла и среды:

$$j_{ПОВ.Э} = [\vec{i}_{ПОВ} \times \vec{H}_\Sigma],$$

где $\vec{i}_{ПОВ}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь толщиной l при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1-\varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1+\varepsilon)tg\theta},$$

где выражение для угла θ :

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\varepsilon\mu}}{c}.$$

Для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн) амплитуда определяется из выражения:

$$\vec{E} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

$$E_\tau = 0; \quad H_n = 0.$$

Выразим фазовую скорость v_ϕ через продольное число $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, которое играет роль коэффициента фазы:

$$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \cdot \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

Здесь $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Для немагнитного диэлектрика без потерь формулы для коэффициента отражения R имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi}; \quad R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Показатель преломления n при падении волны из вакуума:

$$n = \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}.$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры: $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.1$ См/м. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц. Полагая, что амплитуда напряженности электрического поля падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна 1 В/м, записать выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны.

Решение.

Выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик с потерями имеет вид:

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon)^{1/2}}.$$

Воспользуемся приближением – при $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \ll 1$:

$$\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon} \approx 1 - 0.5 \cdot j \operatorname{tg} \delta_\varepsilon,$$

так как $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{2}{9} \ll 1$.

Тогда для коэффициента отражения получим:

$$\dot{R}_E = -\frac{8+j}{10-j} = -0.8e^{-j0.025},$$

а

$$\dot{T}_E = 1 - \dot{R}_E = \frac{2}{10-j} = 0.2e^{j0.1}.$$

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля отраженной волны будет:

$$\dot{E}_{omp} = \dot{R}_E \cdot \dot{E}_{nad} = -0.8e^{-j0.025} e^{j\beta_0 Z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, найдем:

$$E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z).$$

Ответ: Комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц: $\dot{R}_E = -0.8e^{-j0.025}$ и $\dot{T}_E = 0.2e^{j0.1}$, выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны $E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z)$.

5.2.2 Измерение комплексного коэффициента отражения \dot{R}_E от диэлектрика с неизвестными параметрами ε и μ на частоте 1 ГГц дает величину $\dot{R}_E = -0.5e^{-j0.09}$. Определить параметры диэлектрика ε , $\text{tg } \delta_\varepsilon$, σ , если известно, что $\mu = 1$ и волна падает на диэлектрик нормально.

Решение.

Комплексный коэффициент отражения от границы раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon \varepsilon_0 (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)$, $\mu = 1$ запишется:

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}},$$

откуда

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}.$$

Поскольку \dot{R}_E задано через показательную функцию, то и правую часть выразим через показательную функцию $a + jb = re^{j\varphi}$. Так как $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$, то $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$, $\text{arctg} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \right) \approx \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ и

$$(1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon) e^{-j \cdot \text{arctg} \left(\frac{\delta_\varepsilon}{2} \right)} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} e^{-j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

Приняв указанные приближённые равенства, получим:

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} \cdot e^{j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

С другой стороны $\dot{R}_E = -|R| \cdot e^{-j\psi}$ ($|R| = 0.5$; $\psi = 0.09$), тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} &= \frac{1 + |R| \cdot e^{-i\psi}}{1 - |R| \cdot e^{-i\psi}} = \frac{1 + |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)}{1 - |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)} = \\ &= \frac{1 + |R| \cdot \cos \psi - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{1 - |R| \cdot \cos \psi + j \cdot |R| \cdot \sin \psi} = \frac{(1 + |R| \cdot \cos \psi) - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{(1 - |R| \cdot \cos \psi) + j \cdot |R| \cdot \sin \psi}. \end{aligned}$$

Приравнивая модули и фазы обеих частей, окончательно получим:

$$\frac{\delta_\varepsilon}{2} = -\operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 + |\dot{R}| \cos \psi} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 - |\dot{R}| \cos \psi} \right); \quad (*)$$

$$\varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|R| \cos \psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|R| \cos \psi}. \quad (**)$$

Кроме того:

$$\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \approx \delta_\varepsilon. \quad (***)$$

Подставляя $\psi = 0.09$ и $|R| = 0.5$, из соотношения (*) получим $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon = 0.12$. Затем из соотношения (**) вычислим $\varepsilon = 9.0$. В заключение из соотношения (***) найдём $\sigma = 0.06$ См/м.

Ответ: параметры диэлектрика: $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0.12$, $\varepsilon = 9.0$, $\sigma = 0.06$ См/м.

5.2.3 Амплитудное значение напряженности электрического поля падающей из вакуума волны $E_{x,\text{пад}} = 250$ В/м. Относительная диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon = 3.2$. Найти модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн.

Решение.

Модули усредненных векторов Пойнтинга (Вт/м²) будут:

$$P_{\text{пад}} = \frac{E_{x,\text{пад}}^2}{2} \cdot Z_0,$$

где Z_0 – характеристическое сопротивление вакуума, $Z_0 = 120\pi$;

$$P_{\text{отр}} = \frac{(R \cdot E_{x,\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_0,$$

и

$$P_{\text{пр}} = \frac{(T \cdot E_{x,\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_{C2},$$

$$\text{где } Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Входящие в формулы R и T для рассматриваемого случая будут:

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = -0.283; \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = 0.717.$$

Тогда $P_{\text{пад}} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{отр}} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{пр}} = 76.2 \text{ Вт/м}^2$.

Ответ: модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн равны $P_{\text{пад}} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{отр}} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{пр}} = 76.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.4 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом $\varphi = 60^\circ$ на границу раздела с диэлектриком, имеющим $\varepsilon = 3.8$, $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны $E_{m,\text{пад}} = 0.4 \text{ В/м}$. Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

Решение.

По определению, характеристическое сопротивление среды есть коэффициент пропорциональности между $E_{m,x}$ и $H_{m,y}$:

$$Z_C = \frac{E_{m,x}}{H_{m,y}}.$$

Для отраженной волны $Z_C = Z_0 = 120\pi$, а для прошедшей:

$$Z_C = Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тогда:

$$H_{m,\text{отр}} = |R_\perp| \cdot \frac{E_{m,\text{пад}}}{Z_0};$$

$$H_{m,\text{пр}} = |T_\perp| \cdot \frac{E_{m,\text{пад}}}{Z_{C2}}.$$

В рассматриваемой задаче:

$$R_\perp = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}};$$

$$T_\perp = \frac{2 \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Окончательно получим:

$$H_{m,\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}; \quad H_{m,\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}.$$

Ответ: амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн равны: $H_{m,\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$; $H_{m,\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$.

5.2.5 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 = 3.4$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2, имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения $\varphi = 45^\circ$, частота поля $f = 35 \text{ ГГц}$.

Решение.

По условию задачи угол полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3.4}}\right) = 32.8^\circ.$$

Поскольку угол падения $\varphi > \varphi_{\text{ПВО}}$, неоднородные плоские волны в среде 2 действительно возникают.

Из закона Снелля $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1}$ комплексный угол преломления будет

$\sin \psi = \sqrt{3.4} \sin \varphi = 1.3$, откуда получаем уравнение относительно параметра α ($\psi = 90^\circ + j\alpha$). Учтем, что $\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha$ и воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = 1.3.$$

Это трансцендентное уравнение относительно α преобразуем к виду:

$$e^{-2\alpha} - 2.6e^{-\alpha} + 1 = 0.$$

Это есть квадратное уравнение относительно $e^{-\alpha}$, имеющее два корня x_1 и x_2 , из которых выбираем больший, что следует из конечности решения при $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом $\alpha = 0.756$, или $\psi = \frac{\pi}{2} + j0.756$.

Коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} = 733 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент фазы поверхностной волны:

$$\beta_{\text{пов}} = \beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha = 952.9 \text{ м}^{-1},$$

откуда фазовая скорость:

$$v_{\text{ф.пов}} = \frac{\omega}{\beta_{\text{пов}}} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Глубина проникновения поля в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha} = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: фазовая скорость и глубина проникновения неоднородной плоской волны равны: $v_{\text{ф.пов}} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ и $d = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

5.2.6 На идеально проводящую плоскость из воздуха по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности 230 Вт/м^2 . Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела.

Решение.

Для условий, приведённых в задаче, запишем выражения для вычисления величины среднего значения вектора Пойнтинга:

$$P_{CP} = \frac{H_{y.m}^2}{2} \cdot \operatorname{Re} Z_c.$$

Из этого выражения получим формулу для вычисления величины напряженности магнитного поля $H_{\text{пад}}$ падающей электромагнитной волны:

$$H_{\text{пад}} = H_{y.m} = \sqrt{\frac{2P_{CP}}{\operatorname{Re} Z_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 230}{377}} = 1.105 \text{ А/м.}$$

Вычислим суммарную величину напряженности магнитного поля на границе раздела:

$$H_{\Sigma} = 2H_{\text{пад}} = 2 \cdot 1.105 = 2.21 \text{ А/м.}$$

Амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела находим по формуле:

$$j_{\text{пов.э}} = [\vec{i}_{\text{пов}} \times \vec{H}_{\Sigma}] = 1 \cdot 2.21 = 2.21 \text{ А/м.}$$

В последней формуле $\vec{i}_{\text{пов}}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела. Взаимная ориентация векторов показана на рисунке 5.1.

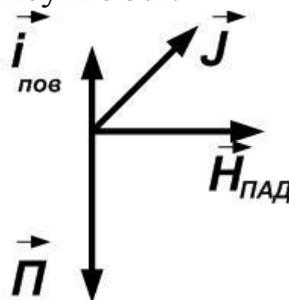


Рисунок 5.1 – Иллюстрация к задаче 5.2.6

Ответ: амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела $j_{\text{пов.э}} = 2.21 \text{ А/м.}$

5.2.7 Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство с параметрами $\varepsilon = 9.5$, $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}} = 30 \text{ Вт/м}^2$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика.

Решение.

Запишем формулы для расчёта величин плотностей потока мощности плоской волны, прошедшей внутрь диэлектрика, и падающей плоской волны:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} \quad \text{и} \quad P_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{пад}}^2}{2Z_0}.$$

Затем начнём вычислять численные значения величин, входящих в эти формулы. Вначале для условий $\varepsilon = 9.5$ и $\mu = 1$, приведённых в задаче, опреде-

лим величину характеристического сопротивления идеального диэлектрического полупространства, у которого удельная проводимость $\sigma = 0$:

$$Z_{c2} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{9.5}} = 122.4 \text{ Ом},$$

напряженности электрического поля падающей волны:

$$E_{\text{пад}} = \sqrt{2Z_0 P_{\text{пад}}} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 30} = 150.4 \text{ В/м},$$

и коэффициента преломления (прохождения) плоской электромагнитной волны, падающей по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство:

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = \frac{2}{1 + \sqrt{9.5}} = 0.49.$$

В заключение определим величины напряженности электрического поля прошедшей волны:

$$E_{\text{пр}} = T_E \cdot E_{\text{пад}} = 0.49 \cdot 150.4 = 73.7 \text{ В/м}$$

и плотности потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} = \frac{73.7^2}{2 \cdot 122.4} = 22.2 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: плотность потока мощности, прошедшей внутрь диэлектрика $P_{\text{пр}} = 22.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.8 На границу раздела между диэлектриком без потерь с параметрами $\varepsilon_2 = 4.6$, $\mu_2 = 1.1$ и вакуумом падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной.

Решение.

Представим падающую плоскую электромагнитную волну, имеющую круговую поляризацию как сумму двух волн линейной поляризации. У одной из этих волн вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения (параллельная поляризация), а у другой он перпендикулярен плоскости падения (перпендикулярная поляризация). Если поляризация параллельная, то при некотором значении угла падения, называемого углом Брюстера φ_B , коэффициент отражения R_E^{\parallel} равен нулю и отражатся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера.

Приравняем выражение в виде дроби при $\varphi = \varphi_B$ для R_E^{\parallel} к нулю:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B]}{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} + Z_{c1} \cos \varphi_B]} = 0.$$

Эта дробь равна нулю, когда равен нулю её числитель:

$$Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B = 0.$$

С другой стороны, по формуле Снелля (при $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) имеем:

$$\frac{\sin \varphi_{nB}}{\sin \varphi_B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Преобразуя два последних выражения, получим равенства:

$$\sin^2 \varphi_{nB} = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2};$$

$$\cos^2 \varphi_{nB} = \left(\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \right)^2 \cos^2 \varphi_B = \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \mu_2} \cos^2 \varphi_B = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \cos^2 \varphi_B.$$

Сложение левых и правых частей этих равенств позволяет исключить угол преломления Брюстера φ_{nB} и получить уравнение с одним неизвестным – углом падения Брюстера φ_B :

$$1 = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{\varepsilon_2 \cos^2 \varphi_B}{\mu_2}.$$

Подставив в это уравнение:

$$\sin^2 \varphi_B = 1 - \cos^2 \varphi_B,$$

находим выражение для определения косинуса угла падения Брюстера, вычисляем величину $\cos \varphi_B$, а затем и сам угол Брюстера φ_B :

$$\varepsilon_2 \cdot \mu_2 = \sin^2 \varphi_B + \varepsilon_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_B; \quad \varepsilon_2 \cdot \mu_2 - 1 = \cos^2 \varphi_B (\varepsilon_2^2 - 1);$$

$$\cos \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{\varepsilon_2^2 - 1}} = \sqrt{\frac{4.6 \cdot 1.1 - 1}{4.6^2 - 1}} = 0.448; \quad \varphi_B = \arccos(0.448) = 63^\circ 20'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\varphi_B = 63^\circ 20'$.

5.2.9 Пластина толщиной $d = 1.4$ см выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами $\varepsilon = 2.1$, $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля $f = 12$ ГГц.

Решение.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon)tg\theta}.$$

Вначале запишем выражение для угла θ и вычислим этот угол, а затем определим коэффициент отражения R и его модуль $|R|$:

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\varepsilon \mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} =$$

$$= \frac{6.28 \cdot 1.4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2.1 \cdot 1}}{3 \cdot 10^8} = 5.096 \text{ рад} = 292.116^\circ = -67.854^\circ.$$

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \theta} = \frac{j(1 - 2.1)(-2.455)}{2\sqrt{2.1} + j(1 + 2.1) \cdot (-2.455)} =$$

$$= \frac{j2.7}{2.89 - j7.61} = \frac{-2.7}{7.61 + j2.89} = \frac{-2.7 \exp(-j \arctg 0.38)}{\sqrt{8.35 + 57.9}} = -0.33 \exp(-j20^\circ).$$

Модуль коэффициента отражения равен: $|R| = 0.33$.

Ответ: коэффициент отражения $R = -0.33 \exp(-j20^\circ)$, а его модуль $|R| = 0.33$.

5.2.10 Найти условия, при которых плоская электромагнитная волна будет распространяться путем отражений от двух безграничных пластин идеального металла, расположенных в вакууме параллельно друг другу на расстоянии a , если угол падения равен φ . Для каких значений λ_0 возможно распространение волны в такой структуре при заданном a ?

Решение. Рассмотрим задачу (рисунок 5.2), например, для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн). Для этих волн, комплексная амплитуда определяется из выражения:

$$\dot{\vec{E}} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

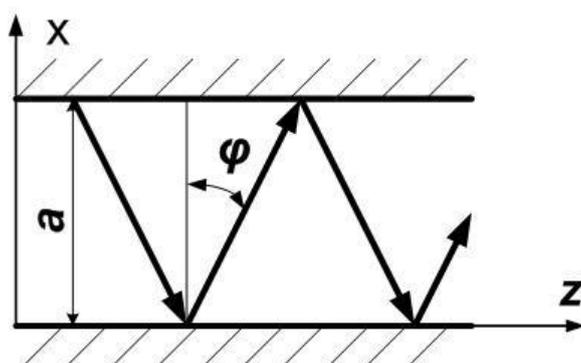


Рисунок 5.2 – Иллюстрация к задаче 5.2.10

Из выражения для $\dot{\vec{E}}$ находим E_z :

$$E_z = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(gx) \exp(-jhz).$$

Запишем граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

а) $E_z(x = 0) = E_z = 0$;

$$\text{б) } E_z(x=a) = E_\tau = 0.$$

Из условия б) получим:

$$E_z(x=a) = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(ga) \exp(-jhz) = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\sin(ga) = 0; \quad ga = \frac{2\pi \cos \varphi \cdot a}{\lambda_0} = n \cdot \pi,$$

где n может быть нулём или принимать любые целочисленные значения.

Из последнего выражения находим:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a}.$$

Поскольку $\cos \varphi \leq 1$, то и $\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1$, то есть:

$$\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1; \quad \lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}.$$

Ответ: $\lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}$, где n – целое число.

5.2.11 Определить скорость движения фазового фронта вдоль зазора между двумя параллельными бесконечными пластинами идеального металла (см. задачу 5.2.10). Изобразить зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 для нескольких значений n . Объяснить полученный результат.

Решение.

Выразим фазовую скорость v_Φ через продольное число $h = \beta_0 \sin \varphi$, которое играет (см. задачу 5.2.10) роль коэффициента фазы:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

При выводе выражения для v_Φ использовались соотношения $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ и

$$\frac{\omega}{\beta_0} = \frac{2\pi f \lambda_0}{2\pi} = \frac{fc}{f} = c.$$

Подставив в формулу для фазовой скорости v_Φ выражение для $\cos \varphi$, полученное в предыдущей задаче:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a},$$

находим зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 :

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

Зависимости v_ϕ от λ_0 для $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ приведены на рисунке 5.3.

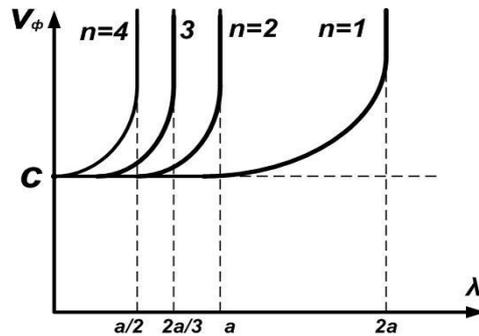


Рисунок 5.3 – Иллюстрация к задаче 5.2.11

Согласно двум последним приведенным формулам, с ростом длины волны λ_0 фазовая скорость v_ϕ и $\cos \phi$ также возрастают, а угол падения ϕ уменьшается. Когда длина волны λ_0 достигает некоторого значения, называемого критической длиной волны $\lambda_{\text{КР}}$, фазовая скорость v_ϕ устремляется к бесконечности, а угол падения ϕ становится равным нулю. Как видно из рисунка 5.3, при угле падения $\phi = 0$, когда $\lambda_0 \geq \lambda_{\text{КР}}$, распространение волны вдоль продольной оси z прекращается.

Критическая длина волны $\lambda_{\text{КР}}$ с ростом n уменьшается.

Ответ: скорость движения фазового фронта $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}$.

5.2.12 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность плавленого кварца ($\varepsilon \approx 3.75$). Определить угол падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

Решение.

Углом падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную, является угол падения Брюстера ϕ_B , при котором коэффициент отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации равен нулю и отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера. Для немагнитного диэлектрика без потерь этот угол определяют по формуле:

$$\phi_B = \arctg \sqrt{\varepsilon} = \arctg \sqrt{3.75} = \arctg 1.936 = 62^\circ 50'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\phi_B = 62^\circ 50'$.

5.2.13 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума под углом ϕ на границу раздела со средой, показатель прелом-

ления которой равен 1.531. Найти вид поляризации отраженной волны для углов падения 0° , 45° , $56^\circ 51'$.

Решение. При решении этой задачи используем формулы для определения коэффициентов отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения). Для немагнитного диэлектрика без потерь эти формулы имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi};$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Величину относительной диэлектрической проницаемости для подстановки в эти формулы определяем через показатель преломления n :

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}; \quad \varepsilon = n^2 = 1.531^2 = 2.334.$$

1. Для $\varphi = 0^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}; \quad R_E^{\perp} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как для $\varphi = 0^\circ$ $R_E^{\parallel} = R_E^{\perp}$, то отраженная волна при этих условиях будет с круговой поляризацией.

2) Для $\varphi = 45^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.334 - 0.5} - 2.334 \cdot 0.707}{\sqrt{2.334 - 0.5} + 2.334 \cdot 0.707} = 0.092;$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}} = \frac{0.707 - \sqrt{2.334 - 0.5}}{0.707 + \sqrt{2.334 - 0.5}} = -0.315.$$

Так как для $\varphi = 45^\circ$ $R_E^{\perp} \neq R_E^{\parallel}$, то отраженная волна при этих условиях будет иметь эллиптическую поляризацию с отношением длин осей эллипса:

$$\frac{R_E^{\perp}}{R_E^{\parallel}} = \frac{0.315}{0.092} = 3.42.$$

3. Для $\varphi = 56^\circ 51'$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} - 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'}{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2.334 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.334 \cdot \cos 56^\circ 51'} = 0.$$

Поскольку для $\varphi = 56^{\circ}51'$ $R_E^{\parallel} = 0$, то отраженная плоская волна параллельной поляризации отсутствует, а угол $\varphi = 56^{\circ}51'$ является углом Брюстера. При этом отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

Ответ: $\varphi = 0^{\circ}$ – поляризация круговая; $\varphi = 45^{\circ}$ – поляризация эллиптическая с отношением осей 3.42; $\varphi = 56^{\circ}51'$ – отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

5.2.14 Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами $\varepsilon = 2.25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$, падает под углом 45° на границу раздела между средой и вакуумом. Определить коэффициент отражения для волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей.

Решение.

Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\varepsilon_{\text{пл}} = \varepsilon = 2.25$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon} = \sqrt{2.25} = 1.5.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \arcsin \frac{1}{1.5} = \arcsin 0.666 = 41.18'.$$

Угол падения $\varphi = 45^{\circ} > \varphi_{\text{ПВО}} = 41.18'$. В этом случае преломленной волны в общепринятом смысле не существует. Падающая волна полностью отражается внутрь среды. Коэффициенты отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице. Будет изменяться только фаза коэффициентов отражения:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\};$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

В нашем случае ($\varepsilon_1 = 2.25$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varphi = 45^\circ$) получим:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{2.25}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = -\exp(j73^\circ 40');$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = \exp(j36^\circ 40').$$

Ответ: Коэффициенты отражения для волн, поляризованных в плоскости падения (R_E^{\parallel}) и перпендикулярно ей (R_E^{\perp}) равны: $\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp(j73^\circ 40')$; $\dot{R}_E^{\perp} = \exp(j36^\circ 40')$.

5.2.15 Плоская электромагнитная волна распространяется в безграничной плоскопараллельной пластине диэлектрика с $\varepsilon_{\text{пл}}$ под углом θ к границе раздела с вакуумом. При каких условиях волна не будет покидать пластину.

Решение.

Волна не будет покидать пластину, когда угол падения $\varphi = 90^\circ - \theta$ будет равным или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi \geq \varphi_{\text{ПВО}}$. Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пл}}$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon_{\text{пл}}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}.$$

Ответ: волна не будет покидать пластину при выполнении неравенств $90^\circ - \theta \geq \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}$ или $\sin(90^\circ - \theta) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{пл}}}}$.

5.3 Задачи для самостоятельной работы

5.3.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из воздуха на границу раздела со средой, имеющей параметры: σ , ε , $\mu = 1$. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте f . Полагая, что амплитуда магнитной индукции падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна B_m , записать выражения для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны. Значения σ , ε , f и B_m приведены в таблице 5.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче 5.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.15	0.2	0.3	0.04	0.5	0.6	0.03	0.08	0.09	0.07
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
f , МГц	32	48	56	45	64	72	77	96	68	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_m , Тл	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

5.3.2 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом φ на границу раздела с диэлектриком, имеющим ε , $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей волны равна H . Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн. Значения φ , ε и H приведены в таблице 5.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.3 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2 имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения φ будет больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$ в n раз, частота поля f . Значения n , ε и f приведены в таблице 5.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.2 – Исходные данные к задаче 5.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , рад	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.8	0.9	0.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H , А/м	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

Таблица 5.3 – Исходные данные к задаче 5.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

5.3.4 Плоская электромагнитная волна падает по нормали к поверхности раздела из диэлектрического полупространства с параметрами ε_1 , $\mu = 1$ на диэлектрическое полупространство с параметрами ε_2 , $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}}$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика через поверхность раздела. Значения ε_1 , ε_2 и $P_{\text{пад}}$ приведены в таблице 5.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.5 Пластина толщиной d выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами ε , $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля f . Значения d , ε и f приведены в таблице 5.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.4 – Исходные данные к задаче 5.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ_2	3.2	3.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{пад}}, \text{Вт/м}^2$	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

Таблица 5.5 – Исходные данные к задаче 5.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$d, \text{см}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ϵ	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	14	13	16	15	17	12.5	14	16	18	10

5.3.6 Из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ϵ_1, μ_1 в диэлектрическую область 2 без потерь с параметрами ϵ_2, μ_2 под углом к границе раздела падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной. Значения $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2$ и μ_2 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.7 На идеально проводящую плоскость из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ϵ_1, μ_1 по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности P_{CP} . Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела. Значения ϵ_1 и μ_1 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значения P_{CP} приведены в таблице 5.7.

Таблица 5.6 – Исходные данные к задаче 5.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_2	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ_1	1.15	1.2	1.3	1.45	1.25	1.36	1.18	1.16	1.12	1.23
μ_2	1.1	1.25	1.35	1.4	1.15	1.26	1.28	1.28	1.19	1.1

Таблица 5.7 – Исходные данные к задаче 5.3.7

Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{CP}, \text{Вт/м}^2$	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3

5.3.8 Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей плоской электромагнитной волны равна H . Волна падает из вакуума по направлению нормали к поверхности раздела на границу раздела с металлом, параметры которого равны σ и $\mu = 1$. Вычислите амплитуду вектора напряженности электрического поля на поверхности раздела, если частота поля f . Значения H , σ и f приведены в таблице 5.8 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.8 – Исходные данные к задаче 5.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$H, \text{А/м}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{\sigma}{10^7}, \text{См/м}$	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	4	3	6	5	7	2.5	1.4	1.6	1.8	2

6 ТЕМА 6. ВОЛНОВОДЫ

6.1 Основные формулы

Прямоугольный волновод.

Для волны типа Е в прямоугольном волноводе $\dot{E}_z \neq 0, \dot{H}_z = 0$, тогда согласно формулам перехода

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-j \cdot h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, & H_x &= \frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y &= \frac{-j \cdot h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \end{aligned}$$

где h - продольное волновое число, g - поперечное волновое число, которые связаны соотношением $h^2 + g^2 = \beta_0^2$ или $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, φ - УГОЛ падения, $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$.

На стенках волновода должны выполняться граничные условия

$$\begin{aligned} \dot{E}_z = 0 & \quad \text{при} \quad \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{cases}, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = 0 & \quad \text{при} \quad y = 0, y = b, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = 0 & \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, \end{aligned}$$

где a и b - размеры большой и малой стенки волновода.

Из граничных условий следует, что

$$g = \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2},$$

где m и n - целые числа, m - число стоячих полуволн вдоль широкой стенки волновода, а n - вдоль узкой стенки b . Величина g , отвечающая паре чисел m и n , носит название собственного значения краевой задачи для уравнения Гельмгольца.

Продольное волновое число $h = \sqrt{\beta^2 - g^2}$. При $\beta = g$, $h = 0$ и, следовательно, $\lambda_{\text{в}} = \infty$, которая называется критической длиной волны $\lambda_{\text{кр}}$.

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}; \quad \text{откуда вводится}$$

$$f_{\text{кр}} = \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Длина волны в волноводе $\lambda_{\text{в}}$, длина волны генератора λ_0 и $\lambda_{\text{кр}}$ связаны соотношением

$$\frac{1}{\lambda_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2}} \quad \text{или} \quad \lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{\text{кр}})^2}}.$$

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}; \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dh} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Откуда

$$v_{\text{ф}} \cdot v_{\text{гр}} = c^2 \text{ на любой рабочей частоте, } Z_{\text{сЕ}} = Z_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

Для волны типа H, $\dot{H}_z \neq 0$, $E_z = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-j \cdot \omega \cdot \mu_0}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, & \dot{H}_x &= \frac{j \cdot h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \\ \dot{E}_y &= \frac{-j \cdot \omega \cdot \mu_0}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, & H_x &= \frac{j \cdot h}{g^2} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

Граничные условия запишутся

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} &= 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b, \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a. \end{aligned}$$

Каждой паре индексов m, n соответствует волна H-типа, обозначаемая H_{mn} . Формулы для $g, \lambda_{\text{кр}}, \lambda_{\text{в}}$ и $v_{\text{ф}}$ остаются прежними, записанные для E-волн.

Основной волной в прямоугольном волноводе (при заданном a может распространяться волна с максимальной $\lambda_{\text{в}}$) является волна H_{10} , для которой

$$\lambda_{\text{кр}} = 2 \cdot a.$$

Плотность потока мощности

$$\vec{\Pi}_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[E_y \cdot \vec{i}_y \cdot \vec{H}_x^* \cdot \vec{i}_x \right] = \frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot h \cdot a^2}{2\pi^2} \cdot H_0^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \vec{i}_z,$$

откуда видно, что для волны H_{10} плотность потока мощности будет максимальна в центре волновода $\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) = \sin\frac{\pi \cdot a}{2 \cdot a} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Поток мощности вдоль координаты x будет

$$\vec{\Pi}_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[E_y \cdot \vec{i}_y \cdot \vec{H}_z^* \cdot \vec{i}_z \right] = -j \cdot \frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot a}{4 \cdot \pi} \cdot H_0^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \vec{i}_x.$$

Эта часть потока мощности чисто мнимая (реактивная) в переносе мощности не участвует и связана с образованием стоячих волн вдоль поперечной оси x .

Характеристическое сопротивление

$$Z_{\text{CH}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Мощность, переносимая по прямоугольному волноводу волной типа H_{10} будет

$$P_{\text{ср}} = \frac{E_{\text{max}}^2 \cdot a \cdot b}{480 \cdot \pi} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2 \cdot a}\right)^2}.$$

Круглый металлический волновод.

Для волны типа E_{mn} $E_z = E_0 \cdot J \cdot \left(\frac{Y_{mn} \cdot r}{a}\right) \cdot \cos m \cdot \varphi$, $H_z = 0$, тогда

$$\vec{E}_r = -j \cdot h \cdot E_0 \cdot \left[\frac{m \cdot a^2}{Y_{mn}^2 \cdot r} \cdot J_m \cdot \left(\frac{Y_{mn} \cdot r}{a}\right) - \frac{a}{Y_{mn}} \cdot J_{m+1} \cdot \left(\frac{Y_{mn} \cdot r}{a}\right) \right] \cdot \cos m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z},$$

$$\vec{E}_\varphi = j \cdot h \cdot E_0 \cdot \frac{m \cdot a^2}{Y_{mn}^2 \cdot r} \cdot J_m \cdot \left(\frac{Y_{mn} \cdot r}{a}\right) \cdot \sin m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z},$$

$$\vec{E}_z = E_0 \cdot J_m \cdot \left(\frac{Y_{mn} \cdot r}{a}\right) \cdot \cos m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z},$$

$$\vec{H}_r = -\frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{h} \cdot \vec{E}_\varphi, \quad \vec{H}_\varphi = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{h} \cdot \vec{E}_r, \quad \vec{H}_z = 0,$$

где (r, φ, z) - координаты цилиндрической системы координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра, a - радиус волновода, Y_{mn} - корни функции Бесселя.

Критическая длина волны $\lambda_{\text{кр}E_{mn}} = \frac{2\pi}{g_{mn}} = \frac{2\pi \cdot a}{Y_{mn}}$,

$$a \quad \lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}; \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Характеристическое сопротивление

$$Z_{\text{CE}} = \frac{\sqrt{\vec{E}_r \cdot \vec{E}_r^* + \vec{E}_\varphi \cdot \vec{E}_\varphi^*}}{\sqrt{\vec{H}_r \cdot \vec{H}_r^* + \vec{H}_\varphi \cdot \vec{H}_\varphi^*}} = 120 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Основным типом волны является волна E_{01} .

$$P_{\text{срз}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{E}_r \cdot \dot{H}_\varphi^* = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot h}{2 \cdot Y_{01}^2} \cdot E_0^2 \cdot J_1 \left(\frac{Y_{01} \cdot r}{a} \right),$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2 \cdot h}{Y_{01}^2} \cdot E_0^2 \cdot \int_0^a J_1^2 \left(\frac{Y_{01} \cdot r}{a} \right) \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot a^4 \cdot h}{2 \cdot Y_{01}^2} \cdot E_0^2 \cdot J_1^2(Y_{01}).$$

Для волн типа H_{mn} в круглом волноводе $\dot{H}_z \neq 0$, $\dot{E}_z = 0$.

$$\vec{E}_r = j \cdot \frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot m \cdot a^2}{\mu_{mn}^2 \cdot r} \cdot H_0 \cdot J_m \left(\frac{\mu_{mn} \cdot r}{a} \right) \cdot \sin m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z},$$

$$\vec{E}_\varphi = -j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot H_0 \cdot \left[\frac{m \cdot a^2}{\mu_{mn}^2 \cdot r} \cdot J_m \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \right) - \frac{a}{\mu_{mn}} \cdot J_{m+1} \left(\frac{\mu_{mn} \cdot r}{a} \right) \right] \cdot \cos m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z},$$

$$\vec{E}_z = 0$$

$$\vec{H}_r = -\frac{h}{\omega \cdot \mu_0} \cdot \vec{E}_\varphi, \quad \vec{H}_\varphi = \frac{h}{\omega \cdot \mu_0} \cdot \vec{E}_r, \quad \vec{H}_z = H_0 \cdot J_m \left(\frac{\mu_{mn} \cdot r}{f} \right) \cdot \cos m \cdot \varphi \cdot e^{-j \cdot h \cdot z}.$$

Основные расчетные формулы будут теми же, что и для волн E- типа:

$$\lambda_{\text{кр}H_{mn}} = \frac{2\pi \cdot a}{\mu_{mn}},$$

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}, \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}.$$

Основной волной является волна H_{11} , для которой $\lambda_{\text{кр}H_{11}} = \frac{2\pi \cdot a}{1.841} = 3.41 \cdot a$.

Действительно, это наибольшая длина волны для круглого волновода радиуса a . Для сравнения приводим

$$\lambda_{\text{кр}E_{01}} = \frac{2\pi \cdot a}{2.405} = 2.61 \cdot a,$$

$$\lambda_{\text{кр}H_{21}} = \frac{2\pi \cdot a}{3.054} = 2.06 \cdot a,$$

$$\lambda_{\text{кр}H_{01}} = \frac{2\pi \cdot a}{3.832} = 1.64 \cdot a.$$

Коаксиальный волновод.

Могут распространяться только поперечные волны, $\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0$.

$$\vec{E}(r,z) = \frac{U}{\ln(b/a) \cdot r} \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot \vec{i}_r;$$

$$\vec{H}(\varphi,z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_a / \mu_a} \cdot U}{\ln(b/a) \cdot r} \cdot e^{-j\beta \cdot z} \cdot \vec{i}_\varphi.$$

$$Z_c = \frac{\vec{E}_r}{\vec{H}_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} - \text{совпадает с характеристическим сопротивлением заполняющей среды.}$$

Волновое сопротивление Z_b будет

$$Z_b = \frac{U}{I} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \cdot \sqrt{\varepsilon_a/\mu_a}} = 60 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

зависит от отношения внешнего радиуса b к внутреннему a и относительных проницаемостей заполняющей среды.

$$\text{Переносимая мощность } P = \frac{U^2 \cdot \sqrt{\varepsilon/\mu}}{120 \cdot \ln(b/a)}.$$

Полосковые волноводы.

Могут распространяться квази - T - волны. При $h/b \ll 1$ и $\varepsilon \gg 1$ продольными проекциями E_z и H_z можно пренебречь, где h - толщина диэлектрика, b - ширина полоска.

$$Z_b = \frac{U}{I} = 120\pi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{h}{b} - \text{формула приближенная, используется для грубой}$$

оценки и в качестве первого приближения при расчетах по более точной формуле

$$Z_b = \frac{188.5}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \left\{ \frac{b}{2h} + 0.441 + 0.082 \cdot \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} \right) + \left(\frac{\varepsilon+1}{2\pi \cdot \varepsilon} \right) \cdot \left[1.451 + \ln\left(\frac{b}{2h} + 0.94 \right) \right] \right\}^{-1},$$

справедливая при условии, что $h/b < 1$, $\mu = 1$.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 В заполненном воздухом прямоугольном волноводе с размерами $a = 50\text{мм}$, $b = 25\text{мм}$ возбуждена волна типа E_{11} . Вектор напряженности электрического поля в центре волновода при $x = a/2$, $y = b/2$ имеет амплитуду $E_0 = 200\text{В/м}$. Определить комплексную амплитуду вектора \vec{H} вдоль оси z в точке с координатами $x = 15\text{мм}$, $y = 10\text{мм}$. Длина волны возбуждающего генератора $\lambda_0 = 35\text{мм}$.

Решение. Коэффициент фазы в свободном пространстве

$$\beta = 2\pi/\lambda_0 = 179.5\text{ м}^{-1}.$$

Поперечное волновое число, соответствующее волне типа E_{11} будет

$$g = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = 140.5\text{ м}^{-1}.$$

Продольное волновое число

$$h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = 111.7 \text{ м}^{-1}.$$

Поле $\vec{H}(z)$ будет иметь только две компоненты, поскольку для волны E_{11} $H_z = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{H}(z) &= \vec{H}_x \cdot \vec{i}_x + \vec{H}_y \cdot \vec{i}_y = \\ &= j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\pi \cdot E_0}{g^2} \cdot e^{-j \cdot h \cdot z} \cdot \left[\frac{1}{b} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) - \frac{1}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \right] = \\ &= j \cdot (0.151 \cdot \vec{i}_x - 0.199 \cdot \vec{i}_y) \cdot e^{-j111.7 \cdot z}. \end{aligned}$$

6.2.2 Прямоугольный волновод с размерами поперечного сечения $a = 60 \text{ мм}$, $b = 35 \text{ мм}$ работает на волне типа E_{11} . Определить коэффициент ослабления α в волноводе, если частота $f_0 = 0.8 \cdot f_{\text{кр}}$.

Решение. Критическая частота связана с критической длиной волны соотношением

$$f_{\text{кр}} = \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = 4.96 \cdot 10^9 \text{ Гц}, \text{ откуда}$$

$$f_0 = 3.968 \cdot 10^9 \text{ Гц}, \text{ тогда}$$

$$\beta = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi \cdot f_0}{c} = 103.88 \text{ м}^{-1};$$

$$g = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = 103.91 \text{ м}^{-1}.$$

$$h = \sqrt{\beta^2 - g^2} = \pm j \cdot \sqrt{g^2 - \beta^2} = \pm j \cdot 2.497 \text{ м}^{-1}, \text{ оказывается мнимым.}$$

Если выбрать знак минус, то $e^{-j \cdot h \cdot z} = e^{-\alpha \cdot z}$ - то есть волна распространяется с коэффициентом ослабления $\alpha = 2.497 \text{ м}^{-1}$ (постоянная распространения $\gamma = \alpha + j \cdot \beta$).

6.2.3 Волна типа H_{10} в волноводе с размерами стенок $a = 40 \text{ мм}$, $b = 20 \text{ мм}$ имеет амплитудное значение $E_{\text{max}} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$. Длина волны генератора $\lambda_0 = 55 \text{ мм}$. Найти длину волны в волноводе, а также величину $H_{z\text{max}}$ - амплитуду напряженности магнитного поля на узких стенках волновода.

Решение. Для волны H_{10} $\lambda_{\text{кр}} = 2 \cdot a = 80 \text{ мм}$, откуда

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = 75.7 \text{ мм}.$$

Продольная составляющая магнитного поля запишется

$$H_z = j \cdot \frac{\pi}{\omega \cdot \mu_0 \cdot a} \cdot E_{\text{max}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot h \cdot z}.$$

На стенках волновода $\cos \frac{\pi \cdot x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} = \pm 1$, тогда

$$H_{z\max} = \frac{\pi \cdot E_{\max}}{\omega \cdot \mu_0 \cdot a} = 54.71 \text{ А/м}.$$

6.2.4 Радиус круглого волновода $a = 15 \text{ мм}$, длина волны возбуждающего генератора в свободном пространстве $\lambda_0 = 32 \text{ мм}$, тип волны E_{01} . Амплитуда продольной проекции вектора напряженности электрического поля на оси волновода $E_0 = 7 \cdot 10^3 \text{ В/м}$. Найти величину $E_{\text{rm}}(a)$ - амплитудное значение радиальной проекции электрического вектора и $H_{\varphi\text{m}}$ - амплитуду азимутальной проекции вектора напряженности магнитного поля на стенке рассматриваемого круглого волновода.

Решение. Критическая длина волны $\lambda_{\text{кр}E_{01}} = 2.61 \cdot a = 39.15 \text{ мм} > \lambda_0$, что говорит о распространяющейся волне.

При $r = a$

$$\dot{E}_r(a, z) = j \cdot \frac{h \cdot a}{Y_{01}} \cdot J_1(Y_{01}) \cdot e^{-j \cdot h \cdot z} \quad \text{и}$$

$$\dot{H}_\varphi(a, z) = \frac{\dot{E}_r(a, z)}{Z_{cE_{01}}}.$$

По таблицам функций Бесселя находим $J_1(2.405) = 0.52$. Безразмерный параметр

$$h \cdot a = \frac{2\pi \cdot a}{\lambda_{\text{в}}} = \frac{2\pi \cdot a}{c} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = 1.697.$$

Волновое сопротивление $Z_{cE} = 120 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = 217 \text{ Ом}$.

Окончательно находим

$$E_{\text{rm}}(a) = 2.57 \cdot 10^3 \text{ В/м}, \quad E_{\varphi\text{m}}(a) = 11.82 \text{ А/м}.$$

6.2.5 Коаксиальный волновод имеет размеры $a = 2 \text{ мм}$, $b = 6 \text{ мм}$. Заполняющей средой является диэлектрик с параметрами $\mu = 1$, $\varepsilon = 2.4$. Найти амплитуду напряжения в бегущей волне, если известно, что амплитуда тока равна 0.4 А .

Решение. Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ линии передачи с волной типа Т записывается

$$Z_{\text{в}} = \frac{U}{I} = 60 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 42.5 \text{ Ом}.$$

Тогда

$$U = I \cdot Z_b = 17 \text{ В.}$$

6.2.6 Рассчитать волновое сопротивление, погонные емкость и индуктивность, а также предельную передаваемую мощность в несимметричной полосковой линии передачи с воздушным заполнением. Параметры линии: ширина проводника $b = 5 \text{ мм}$, расстояние между проводником и заземленной металлической пластиной $h = 1 \text{ мм}$, толщина полоски $t = 0.025 \text{ мм}$, предельно допустимое значение напряженности электрического поля в воздухе $E_{\text{пред}} = 30 \text{ кВ/см}$.

Решение. По условию задачи $b/h > 2$, поэтому воспользуемся формулой, учитывающей толщину проводника в виде

$$Z_b = \frac{314 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\left[1 + \frac{b}{h} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/h} \right) \right]}.$$

Поскольку $\mu = \varepsilon = 1$, то $Z_b = 51.24 \text{ Ом}$.

Погонная емкость

$$C = 1.06 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{b}{h} \right) \quad \text{при} \quad \begin{cases} \frac{t}{h} \ll 1 \\ \frac{b}{h} > 0.6 \end{cases}$$

Откуда $C = 63.6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$, а погонная индуктивность определяется по формуле

$$Z_{\%} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{откуда} \quad L = Z_b \cdot C = 0.173 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}.$$

Предельная передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии определяется по формуле

$$P_{\text{пред}} = 16.88 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{пред}}^2 \cdot h \cdot t \cdot r_B, \text{ Вт},$$

где коэффициент r_B - находится по таблицам в зависимости от t/h . В нашем случае $r_B = 14.56$, $\varepsilon = \mu = 1$, тогда

$$P_{\text{пред}} = 5.53 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

6.3 Задачи для самостоятельной работы

6.3.1 Какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 3 см, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 3.2$ на частоте 10 ГГц.

Ответ: $\frac{2\pi \cdot a}{\lambda \cdot d} = 5.627 > v_{\text{mm}}$;
 $\mu_{\text{mn}}(E_{01}, E_{02}, E_{11}, E_{21}, H_{01}, H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{31}, H_{41})$.

6.3.2 В прямоугольном волноводе сечением 4x3 см распространяется волна типа H_{11} . Волновод заполнен диэлектриком с $\varepsilon = 1.15$. Частота колебаний 8 ГГц. Определить фазовую скорость и длину волны в волноводе.

Ответ: $v_{\text{ф}} = 4.084 \cdot 10^5 \text{ м/с}$, $\lambda_{\text{в}} = 5.105 \text{ см}$.

6.3.3 Прямоугольный волновод сечением 23x10 мм служит для передачи СВЧ импульсов $t = 6 \text{ нс}$, несущая частота $f_0 = 10 \text{ ГГц}$. Длина линии 50 м. Оценить качественно величину искажения импульсов, вызванных дисперсией волновода.

Указание. Спектр прямоугольного СВЧ импульса в области положительных частот описывается выражением

$$S(\omega) = \frac{E \cdot t}{2} \cdot \frac{\sin\left[\frac{(\omega - \omega_0) \cdot t}{2}\right]}{\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot t} .$$

Ответ: $\Delta t = 5.4 \text{ нс}$.

6.3.4 Диаметр волновода в котором распространяется на частоте 12 ГГц мода TE_{11} , равен 6 см. Определить критическую длину волны, длину волн в волноводе и характеристическое сопротивление.

Ответ: $\lambda_{\text{кр}} = 7.88 \text{ см}$, $\lambda_{\text{в}} = 2.64 \text{ см}$, $Z_c = 358 \text{ Ом}$.

6.3.5 При каком диаметре круглого волновода в нем может распространяться только один основной тип волны при частоте колебаний 10 ГГц.

Ответ: $17.58 \text{ мм} < a < 22.96 \text{ мм}$.

6.3.6 В круглом волноводе диаметром 5 см распространяется волна E_{01} . Передаваемая мощность 20 кВт. Определить максимальные значения напряженности электрического поля и амплитуду поверхностной плотности тока на стенках волновода.

Указание: $\int_0^{Y_{01}} J_1^2(x) \cdot x \cdot dx = \frac{Y_{01}^2}{2} \cdot J_1^2(Y_{01}) = 0.778$.

Ответ: $E_{\text{max}} = 1.676 \cdot 10^3 \text{ В/м}$. $|\vec{\gamma}_{\text{кз}}| = |H_{\text{ф}}(r = a)| = 3.01 \text{ А/м}$.

6.3.7 Вычислить размеры поперечного сечения квадратного волновода, если известно, что фазовая скорость волны типа E_{11} равна $6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Частота передаваемых колебаний 5 ГГц.

Ответ: 49x49 мм.

- 6.3.8 Фазовая скорость волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе равна $5c$, где c - скорость света. Определить размеры волновода, если длина волны в свободном пространстве равна 10 см.

Ответ: $a = 5.1$ см; размер b из условий задачи определить нельзя.

- 6.3.9 В волноводе заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2.25$, распространяется волна с фазовой скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с. Определить групповую скорость.

Ответ: $1.333 \cdot 10^8$ м/с .

- 6.3.10 Определить характеристическое сопротивление волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе сечением 72x34мм при частоте колебаний 3 ГГц.

Ответ: 523.9 Ом.

- 6.3.11 В круглом волноводе диаметром 5 см, заполненном диэлектриком без потерь, распространяется волна типа H_{11} . Частота колебаний 3 ГГц. Определить диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод, если фазовая скорость волны равна скорости света в свободном пространстве.

Ответ: $\varepsilon = 2.37$.

- 6.3.12 Определить затухание волны типа H_{10} в отрезке прямоугольного волновода сечением 23x10 мм, длиной 10 см на частоте 6 ГГц.

Ответ: 46.4 дБ.

- 6.3.13 По линии передачи, представляющей собой прямоугольный волновод сечением 72x34 мм и длиной 50 м, передаются СВЧ импульсы с прямоугольной огибающей. Длительность импульсов 1 мкс, несущая частота 3 ГГц. Определить время запаздывания сигнала при прохождении линии.

Ответ: 0.23 мкс.

- 6.3.14 Определить погонное затухание волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе сечением 72x34 мм при частоте поля 3 ГГц. Материал стенок волновода - медь.

Ответ: 0.02 дБ/м .

- 6.3.15 Определить размеры поперечного сечения прямоугольного волновода, работающего на волне типа H_{10} , при которых обеспечивается мини-

мальное затухание при условии невозможности распространения высших типов волн. Частота колебаний 6 ГГц. Найти значение минимального погонного затухания при удельной проводимости материала стенок волновода $5.7 \cdot 10^7$ см/м .

Ответ: $a = 5$ см, $b = 2.5$ см, 0.027 дБ/м.

7 ТЕМА 7. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

7.1 Основные формулы

Прямоугольный объемный резонатор. Резонансная частота колебаний типа H_{mnp} или E_{mnp} дается формулой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{\ell}\right)^2},$$

где a, b, ℓ - геометрические размеры резонатора, m - число стоячих полуволн вдоль стенки a , n - вдоль b , p - вдоль ℓ .

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющем минимальную резонансную частоту, в зависимости от соотношения размеров a, b и ℓ могут быть H_{101} , H_{011} и H_{110} .

Цилиндрический объемный резонатор. Резонансная частота колебаний типа H_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{\ell}\right)^2}.$$

Для колебаний типа E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{Y_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{\ell}\right)^2}.$$

Основным типом колебаний H является тип H_{111} , картина силовых линий напоминает прямоугольный волновод. Для E волн, основным колебанием является E_{010} , его резонансная частота зависит только от радиуса цилиндра

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \frac{2.4048}{a}.$$

В общем случае, длина закороченного с обоих концов резонатора определяется из условия $\ell = p \cdot \frac{\lambda_B}{2}$, где p - целое число (продольный индекс); λ_B - длина волны в соответствующем волноводе (линии передачи). Откуда

$$\omega_p = \frac{\pi \cdot p \cdot v_\phi}{\ell}, \text{ где } v_\phi - \text{ фазовая скорость волны.}$$

Коаксиальный резонатор, закороченный с обеих сторон отрезок коаксиальной линии передачи имеет для T_1

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \ell}} .$$

В диапазоне дециметровых волн коаксиальный резонатор нагружают на конденсатор и резонансную частоту находят из решения уравнения $Z_B \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_p \cdot \ell}{c} = \frac{1}{\omega_p \cdot C_H}$, где Z_B - волновое сопротивление коаксиальной линии передачи; c - скорость света; C_H - емкость конденсатора, на который нагружена линия.

Если линию передачи свернуть в кольцо, то образуется резонатор бегущей волны, для которого

$$\omega_p = n \cdot \frac{2\pi \cdot v_\phi}{\ell}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа

$$W = \int_V \varepsilon_a \cdot \frac{E^2}{2} \cdot dV = \int_V \mu_a \cdot \frac{H^2}{2} \cdot dV .$$

В частности, для колебаний H_{101} , H_{011} , H_{110} в прямоугольном объемном резонаторе

$$W = \frac{1}{8} \cdot \varepsilon_a \cdot E_{\max}^2 \cdot a \cdot b \cdot \ell ,$$

где E_{\max} - максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонатору.

В цилиндрическом резонаторе:

$$\text{колебание типа } E_{010} - W = 0.423 \cdot \varepsilon_a \cdot E_{\max}^2 \cdot a^2 \cdot \ell ,$$

$$\text{колебание типа } E_{011} - W = \frac{\varepsilon_a \cdot \ell \cdot a^2}{4} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{Y_{01}}{a}\right)^2}{\left(\frac{Y_{01}}{a}\right)^2} \right] \cdot E_{\max}^2 ,$$

$$\text{колебание типа } H_{101} - W = 0.316 \cdot \varepsilon_a \cdot E_{\max}^2 \cdot a^2 \cdot \ell ,$$

$$\text{колебание типа } H_{111} - W = 0.749 \cdot \varepsilon_a \cdot E_{\max}^2 \cdot a^2 \cdot \ell .$$

Добротность объемного резонатора

$$Q = \frac{\omega_p \cdot \int_V \mu_a \cdot |H|^2 \cdot dV}{R_s \cdot \oint_S |H_\tau|^2 \cdot dS} .$$

Для колебаний типа H_{101} в прямоугольном резонаторе

$$Q = \frac{\omega_p \cdot \mu_a}{2 \cdot R_s} \cdot \frac{a \cdot b \cdot \ell \cdot (a^2 + \ell^2)}{a^3 \cdot (\ell + 2 \cdot b) + \ell^3 \cdot (a + 2 \cdot b)}.$$

В цилиндрическом резонаторе :

$$\text{колебание типа } E_{010} - Q = \frac{\omega_p \cdot \mu_a}{2 \cdot R_s} \cdot \frac{a \cdot \ell}{a + \ell},$$

$$\text{колебание типа } E_{011} - Q = \frac{\omega_p \cdot \mu_a}{2 \cdot R_s} \cdot \frac{a \cdot \ell}{a + \ell},$$

$$\text{колебание типа } H_{011} - Q = \frac{\omega_p \cdot \mu_a}{2 \cdot R_s} \cdot \frac{\omega_p^2 \cdot \epsilon_a \cdot \mu_a \cdot \ell \cdot a^2}{\mu_{01}^2 \cdot \frac{\ell}{a} + \pi^2 \cdot \frac{a^2}{\ell^2}}.$$

Если резонатор заполнен диэлектриком с потерями, то добротность будет

$$Q = \frac{1}{1/Q_M + \text{tg} \delta_\epsilon},$$

где Q_M - обусловлена потерями в стенках, определенная выше.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Определить, какова должна быть длина ℓ закороченного с обоих концов отрезка прямоугольного волновода сечением 23×10 мм, если известно, что при резонансной длине волны $\lambda_{\text{рез}} = 3.4$ см вдоль его оси укладывается три стоячие полуволны, т. е. $p = 3$.

Решение. Резонансное значение длины волны прямоугольного резонатора для типа H_{103} будет

$$\lambda_{\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{3}{\ell}\right)^2}}, \quad \text{откуда}$$

$$\ell = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{2}{3.4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2.3}\right)^2}} = 7.57 \text{ см}.$$

7.2.2 Прямоугольный объемный резонатор имеет размеры $x = a = 40$ мм, $y = b = 25$ мм, $z = \ell = 15$ мм. Определить, какая мода является основной, и вычислить соответствующую резонансную длину волны.

Решение. Индекс $p = 0$ должен соответствовать самому короткому ребру $\ell = 15$ мм. Поэтому основным типом колебаний будет тип E_{110} , для которого

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = 42.4 \text{ мм} .$$

7.2.3 Круглый резонатор с колебанием E_{010} выполнен из меди, заполнен воздухом и имеет размеры $a = 38.4$ мм, $\ell = 40$ мм. Вычислить ширину полосы пропускания по уровню 0.707 от максимального значения АЧХ.

Решение. Для моды E_{010} в круглом резонаторе $\lambda_{0\text{рез}} = 2.61 \cdot a$,

$\omega_{\text{рез}} = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda_{0\text{рез}}} = \frac{2.405 \cdot c}{a}$. С учетом этого добротность резонатора будет

$$Q_{E_{010}} = 21.3 \cdot \sqrt{\sigma} \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot \ell}{a + \ell} ,$$

где все размеры даны в метрах. Откуда

$$Q_{E_{010}} = 21.3 \cdot \sqrt{(5.7 \cdot 10^7)} \cdot \frac{40 \cdot (38.4 \cdot 10^{-3})^{1/2}}{38.4 + 40} = 16080 .$$

Отсюда полоса пропускания резонатора

$$\Pi_{0.707} = \frac{f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ Гц}}{16080} \cong 187 \text{ кГц} .$$

7.2.4 Определить предельную энергию, которая может быть накоплена в коаксиальном резонаторе с размерами $d = 10$ мм, $D = 40$ мм, $\ell = 80$ мм на основном типе колебаний. Максимально допустимая напряженность электрического поля $E_{\text{max}} = 30$ кВ/см.

Решение. Электрическое поле основной волны в коаксиальном резонаторе имеет только радиальную составляющую

$$E_r = \frac{A}{\sin\left(\frac{\pi \cdot z}{\ell}\right)} , \text{ где } A - \text{ пока неизвестный коэффициент} .$$

Энергия запасенная в резонаторе есть

$$W = \int_V \epsilon_a \cdot E^2 \cdot dV = \frac{\pi}{2} \cdot \epsilon_a \cdot \ell \cdot A^2 \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) .$$

Максимальная напряженность электрического поля существует в середине резонатора на поверхности внутреннего проводника при $r = d/2$,

$E_{\text{max}} = 2 \cdot A/d$, откуда $A = \frac{1}{2} \cdot E_{\text{max}} \cdot d$.

Окончательно получим

$$W = \frac{\pi}{8} \cdot \varepsilon_a \cdot d^2 \cdot \ell \cdot E_{\max}^2 \cdot \ln\left(\frac{D}{d}\right) = 0.3466 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} .$$

7.2.5 Цилиндрический резонатор диаметром 6см и длиной 5см заполнен диэлектриком с параметрами $\varepsilon = 2.5; \text{tg}\delta_\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$. Материал стенок - медь ($\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$). Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Найти резонансную частоту, добротность и полосу пропускания резонатора на этом типе колебаний.

Решение. Основным типом колебаний в цилиндрическом резонаторе является тип E_{010} с резонансной частотой

$$\omega_{\text{рез}}^{E_{010}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \cdot \varepsilon_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{Y_{01}}{a}\right)^2}$$

либо тип H_{111} с резонансной частотой

$$\omega_{\text{рез}}^{H_{111}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\mu_{11}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2} .$$

Сравнивая, видим что $\omega_{\text{рез}}^{E_{010}} < \omega_{\text{рез}}^{H_{111}}$. Поэтому основным является колебание типа E_{010} , для которого

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} \cdot \frac{2.405}{a} = 1.52 \cdot 10^{10} \text{ рад/с} \quad \text{или}$$

$$f_{\text{рез}} = \frac{\omega_p}{2 \cdot \pi} = 2.42 \text{ ГГц} .$$

Добротность резонатора будет

$$Q = \frac{\omega_p \cdot \mu_a}{2 \cdot R_s} \cdot \frac{a \cdot \ell}{a + \ell} ; \quad Q = \frac{1}{1/Q'' + \text{tg}\delta_\varepsilon} .$$

Окончательно получим $Q = 3680$.

Полоса пропускания резонатора

$$2 \cdot \Delta\omega = \frac{\omega_p}{Q} = 4.13 \cdot 10^6 \text{ рад/с} \quad \text{или}$$

$$2 \cdot \Delta f = 658 \text{ кГц} .$$

7.3 Задачи для самостоятельной работы

7.3.1 Кубический объемный резонатор имеет воздушное заполнение и идеально проводящие стенки с размером 20мм. Вычислите резонансную длину волны для основной моды.

- 7.3.2 Прямоугольный объемный резонатор, заполненный воздухом имеет размеры $a = 2\text{см}$, $b = 4\text{см}$, $\ell = 3\text{см}$. Определите, какой тип колебаний в заданном резонаторе является основным; какова его резонансная частота; какая мода является ближайшей высшей.
- 7.3.3 Перестраиваемый объемный резонатор выполнен на основе прямоугольного металлического волновода сечением $23 \times 10\text{см}$. Для перестройки резонатора одну из торцевых стенок (поршень) перемещают вдоль оси волновода. Вычислите, в каких пределах следует перемещать поршень, чтобы резонатор перестраивался в диапазоне частот от 10 до 12 ГГц.
- 7.3.4 Круглый объемный резонатор с воздушным заполнением имеет диаметр 5см и длину 7.5см . Определите резонансные длины волн для мод E_{010} и E_{011} в данном резонаторе.
- 7.3.5 Кубический резонатор со сторонами 3см работает на колебании типа E_{111} . Найти резонансную частоту этого колебания, изобразить картину силовых линий поля и определить добротность резонатора, считая, что его стенки выполнены из меди.
 Ответ: $f_p = 8.66\text{ ГГц}$, $Q = 10470$.
- 7.3.6 Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением $23 \times 10\text{мм}$, внутри которого перемещается поршень. Определить пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8 - 12 ГГц. Тип колебания H_{101} .
 Ответ: $14.89\text{ мм} \leq \ell \leq 32.37\text{ мм}$.
- 7.3.7 Длина цилиндрического объемного резонатора вдвое больше его диаметра. Резонансная частота колебания типа E_{011} равна 6 ГГц. Определить диаметр резонатора.
 Ответ: 4.026 см.
- 7.3.8 Незаполненный резонатор имеет резонансную частоту 6 ГГц. Какова будет резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью $\epsilon = 2.7$?
 Ответ: 3.65 ГГц.
- 7.3.9 Прямоугольный объемный резонатор с размерами $a = 5\text{см}$, $b = 3\text{см}$, $\ell = 6\text{см}$ работает на основном типе колебаний. Стенки резонатора посеребрены, резонатор заполнен диэлектриком с параметрами $\epsilon = 2.3$;

$\operatorname{tg}\delta_\varepsilon = 4 \cdot 10^{-4}$. Определить резонансную частоту и добротность резонатора.

Ответ: 2.575 ГГц, 2042.

7.3.10 Определить резонансную частоту и добротность цилиндрического объемного резонатора, работающего на колебании типа H_{011} диаметр и длина резонатора 5 см, проводимость материала стенок $6.1 \cdot 10^7$ См/м.

Ответ: 7.93 ГГц, 37450.

7.3.11 Максимальная амплитуда напряженности электрического поля в прямоугольном объемном резонаторе с размерами $a = 20$ см, $b = 10$ см, $l = 30$ см равна 10^5 В/м. Материал стенок - медь. Тип колебания H_{101} . Определить запасенную энергию и мощность потерь в стенках.

Ответ: $0.66 \cdot 10^{-4}$ Дж, 43.3 Вт.

7.3.12 Объемный резонатор используется для измерения диэлектрической проницаемости материалов. Определить разрешающую способность измерения ε , если измерительное устройство позволяет обнаружить смещение резонансной частоты, равное 0.1 полосы пропускания резонатора. Добротность резонатора равна 12000.

Ответ: $\Delta\varepsilon/\varepsilon = 1.67 \cdot 10^{-5}$.

7.3.13 Кольцевой резонатор бегущей волны, предназначенный для работы на длине волны 8 мм, образован отрезком диэлектрической линии передачи длиной 2 м, свернутый в кольцо. Фазовая скорость волны 0.9с, погонное затухание 0.5 дБ/м. Определить интервал между частотами соседних типов колебаний и ширину полосы пропускания каждого типа колебаний.

Ответ: 67.5 МГц, 10 МГц.

7.3.14 Добротность лазерного резонатора открытого типа равна 10^5 . Определить значение удельной проводимости активной среды в резонаторе, необходимое для возникновения колебаний. Длина волны генерируемых колебаний 10.6 мкм, длина резонатора 2 м.

Ответ: $-1.57 \cdot 10^{-2}$ См/м.

7.3.15 Найти величину проводимости активного вещества, необходимую для возникновения генерации в лазере на длине волны 1.06 мкм. Длина резонатора 0.6 м, диаметр зеркал 20 мкм, коэффициент отражения от поверхности зеркала 0.99.

Ответ: $\sigma < -8.8 \cdot 10^{-5}$ См/м.

8 ТЕМА 8. УСТРОЙСТВА С КВАЗИ - Т - ВОЛНАМИ.

8.1 Основные расчетные формулы

Для практических расчетов удобны следующие приближенные соотношения :

Погонные емкости (Ф/м):

для несимметричной полосковой линии передачи

$$C = 1.06 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{w}{d}\right) \quad \left(\frac{t}{d} \ll \left(1, \frac{w}{d}\right) 0.6\right),$$

$$C = 1.06 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{w}{d}\right) \cdot \frac{1}{1 - t/d} \quad \left(\frac{w}{d} \ll 2\right),$$

$$C = 1.06 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left[1 + \frac{w}{d} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/d}\right)\right] \quad \left(\frac{w}{d} \gg 2\right),$$

для симметричной полосковой линии передачи

$$C = 1.54 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{w}{d}\right) \quad \left(\frac{t}{d} \ll \left(1, \frac{w}{d}\right) 0.6\right),$$

$$C = 1.54 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{w}{d}\right) \cdot \frac{1}{1 - t/d} \quad \left(\frac{w}{d} \ll 2\right),$$

$$C = 1.54 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left[1 + \frac{w}{d} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/d}\right)\right] \quad \left(\frac{w}{d} \gg 2\right),$$

где w - ширина полоски, d - толщина диэлектрика, t - толщина металлической полоски, ε - относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Волновое сопротивление с учетом толщин токонесущего проводника рассчитывают по формулам:

для несимметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{314}{1 + w/d} \cdot \left(1 - \frac{t}{d}\right) \quad \left(\frac{w}{d} \ll 2\right),$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{314}{1 + \frac{w}{d} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/d}\right)} \quad \left(\frac{w}{d} \gg 2\right),$$

для симметричной линии передачи

$$Z_B = 216 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1 - t/d}{1 - w/d} \quad \left(\frac{w}{d} \ll 2\right),$$

$$Z_B = 216 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{w}{d} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/d} \right)} \quad \left(\frac{w}{d} > 2 \right).$$

Передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии передачи

$$P = 8.44 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 \cdot d^2 \cdot \ln \frac{r_B}{r_a}, \text{ Вт},$$

где E_0 - амплитуда напряженности поля в центре линии, В/м. Значения коэффициентов r_a и r_b в зависимости от отношения w/d определяют по таблицам. При $w/d \geq 1$ $\ln \frac{r_B}{r_a} \approx r_b$, тогда

$$P = 8.44 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 \cdot d^2 \cdot r_b, \text{ Вт}.$$

Предельная мощность полосковых линий передачи, обусловленная условиями электрического пробоя, $E_{\max} = 2 \cdot E_0 / k_H$.

Для несимметричной полосковой линии передачи

$$k_H \approx 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{t}{d} + 4 \cdot \frac{t}{d}}.$$

При малых t/d

$$k_H \approx 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{t}{d}}.$$

С учетом этого

$$P_{\text{пред}} = 8.44 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{пред}}^2 \cdot \frac{k_c^2}{4} \cdot d^2 \cdot r_b, \text{ Вт}.$$

Передаваемая мощность в симметричной полосковой линии передачи

$$P = \frac{1}{60 \cdot \pi^2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_0^2 \cdot d^2 \cdot k_c^2 \cdot \ln \left(\frac{1+r_c}{1-r_c} \right), \quad \text{где}$$

$$k_c^2 = \sqrt{\frac{t}{2 \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{t}{d} \right) \cdot \left(2 + \frac{t}{d} \right)^2 \cdot \left(4 + \frac{t}{d} \right)}.$$

При $t/d < 0.3$ и $w/d > 1$

$$P = 5.4 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{пред}}^2 \cdot d^2 \cdot \left(0.1 + \frac{t}{d} \right) \cdot \left(4 + \frac{w}{d} \right), \text{ Вт}.$$

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводниках симметричной полосковой линии передачи при $t/d < 0.3$, $w/d > 1$,

$$\alpha_M = \frac{R_s}{120 \cdot \pi \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{7 - 50 \cdot \frac{t}{d} + \frac{w}{d}}{3.2 \cdot \left(0.1 + \frac{t}{d} \right) \cdot \left(4 + \frac{w}{d} \right)}, \text{ м}^{-1},$$

где R_s - поверхностное сопротивление металла.

Коэффициент ослабления за счет потерь в диэлектрике

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a} \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon .$$

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Рассчитать волновое сопротивление, погонные емкость и индуктивность, а также предельную передаваемую мощность в несимметричной полосковой линии передачи с воздушным заполнением. Параметры линии: ширина проводника $w = 5 \text{ мм}$, расстояние между проводником и заземленной пластиной $d = 1 \text{ мм}$, толщина проводника $t = 0.025 \text{ мм}$, предельно допустимое значение напряженности электрического поля в воздухе $E_{\text{пред}} = 30 \text{ кВ/см}$.

Решение. В рассматриваемом случае $w/d > 2$, поэтому

$$Z_B = 314 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{w}{d} \cdot \left(\frac{1}{1 - t/d} \right)} = 51.24 \text{ Ом} .$$

Погонная емкость

$$C = 1.06 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{w}{d} \right) = 63.6 \text{ пФ/м} ,$$

тогда по формуле $Z_B = \sqrt{L/C}$ находим индуктивность

$$L = Z_B^2 \cdot C = 0.173 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м} .$$

Предельная передаваемая мощность, при $w/d = 5$ и $t/d = 0.025$ по таблицам $r_B = 14.56$, будет

$$P_{\text{пред}} = 16.88 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot E_{\text{пред}}^2 \cdot d^2 \cdot \frac{t}{d} \cdot r_B = 5.53 \text{ кВт} .$$

8.2.2 Рассчитать коэффициент ослабления в симметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком. Параметры линии: ширина проводника $w = 1.2 \text{ мм}$, $d = 1 \text{ мм}$, $t = 0.05 \text{ мм}$. Проводники выполнены из меди. Параметры диэлектрика: $\mu = 1, \varepsilon = 2.25$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$. Рабочая частота $6 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

Решение. Коэффициент ослабления

$$\alpha = \alpha_g + \alpha_m .$$

$$\alpha_g = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a} \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}{3 \cdot 10^8} \cdot \operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0.0798 \text{ м}^{-1} .$$

$$\alpha_m = \frac{R_s}{120 \cdot \pi \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{7 - 50 \cdot \frac{t}{d} + \frac{w}{d}}{3.2 \cdot \left(0.1 + \frac{t}{d} \right) \cdot \left(4 + \frac{w}{d} \right)} = 0.0979 \text{ м}^{-1} .$$

Суммарный коэффициент ослабления будет

$$\alpha = 0.1777 \text{ м}^{-1} .$$

8.2.3 Отрезок линии передачи с малыми потерями имеет волновое сопротивление 50 Ом и погонную емкость 100 пФ/м. Определить время задержки и фазовый сдвиг для сигнала частотой 100 МГц, прошедшего со входа линии длиной 25 м на ее выход. Как показали измерения, амплитуда входного сигнала уменьшается до 80 % от начального значения на длине линии 15 м. Определить затухание при полной длине линии 25 м.

Решение. Коэффициент распространения

$$\beta = \omega \cdot (L \cdot C)^{1/2} .$$

Индуктивность L найдем через волновое сопротивление $Z_B = (4 \cdot C)^{1/2}$, откуда

$$L \approx Z_B^2 \cdot C = 250 \text{ нГн/м} .$$

Тогда $\beta = 3.14159 \text{ рад/м}$.

На расстоянии 25 м

$\beta \cdot \ell = 78.54 \text{ рад} = 4500^\circ = 12 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ то есть, напряжения на выходе и входе сдвинуты по фазе на 180° . Сигнал на выходе запаздывает относительно входного на время

$$t = \frac{\beta \cdot \ell}{\omega} = 0.125 \text{ мкс} .$$

Так как амплитуда выходного напряжения через 15 м составляет 0.8 от входного, то

$$20 \cdot \lg \left(\frac{V_{\text{ВХ}}}{0.8 \cdot V_{\text{ВХ}}} \right) = 1.94 \text{ дБ} .$$

Следовательно, погонное затухание равно

$$\frac{1.94 \text{ дБ}}{15} = 0.13 \text{ дБ/м} .$$

При общей длине линии 25 м затухание Δ равно

$$\Delta = 20 \cdot \lg \left(\frac{V_{\text{ВХ}}}{V_{\text{ВХ}}} \right) = -0.13 \cdot 25 = 10^{-0.163} = 0.687 .$$

Следовательно, после прохождения 25 м амплитуда волны уменьшится до 69 % от исходной.

8.2.4 Необходимо определить физические размеры отрезка несимметричной полосковой линии, электрическая длина которого на частоте 4 ГГц равна четверти длины волны. Волновое сопротивление линии 50 Ом. Относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей линию равна 4. Толщину центрального проводника можно полагать бесконечно малой.

Решение. В данной задаче необходимо определить w/d при $t/d=0$, $Z_B = 50$ Ом и $\varepsilon = 4.6$. Для этого необходимо воспользоваться уточненной формулой для Z_B и понятием эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{эф}$.

$$\varepsilon_{эф} = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon + 1) + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - 1) \cdot p,$$

$$\text{где } p = \begin{cases} \left(1 + 12 \cdot \frac{d}{\omega}\right)^{-1/2}, & \frac{w}{d} \geq 1 \\ \left(1 + 12 \cdot \frac{d}{\omega}\right)^{-1/2} + 0.04 \cdot \left(1 - \frac{w}{d}\right)^2, & \frac{w}{d} \leq 1 \end{cases}$$

$$Z_B = \begin{cases} \frac{120 \cdot \pi / \sqrt{\varepsilon_{эф}}}{w/d + 1.393 + 0.667 \cdot \ln(w/d + 1.444)}, & \frac{w}{d} \geq 1 \\ \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{эф}}} \cdot \ln\left(8 \cdot \frac{d}{w} + \frac{w}{4 \cdot d}\right), & \frac{w}{d} \leq 1. \end{cases}$$

Воспользуемся случаем $w/d \geq 1$, поскольку ε мало и решим совместно два уравнения для $\varepsilon_{эф}$ и Z_B относительно w/d . Систему уравнений будем решать методом итераций, взяв за нулевое решение $(w/d)_0$ из приближенной формулы

$$Z_B = 120 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{d}{w} \quad \text{откуда}$$

$$\left(\frac{w}{d}\right)_0 = \left(\frac{Z_B \cdot \sqrt{\varepsilon}}{120 \cdot \pi}\right)^{-1} \cong 3.515 > 1.$$

Тогда

$$\varepsilon_{эф}^0 = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon + 1) + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - 1) \cdot \left(1 + 12 \cdot \frac{d}{w}\right)^{-1/2} = 2.8 + 1.8 \cdot 0.476 = 3.657.$$

Находим

$$Z_B^0 = \frac{120 \cdot \pi / \sqrt{\varepsilon_{эф}^0}}{\left(\frac{w}{d}\right)_0 + 1.393 + 0.667 \cdot \ln\left[\left(\frac{w}{d}\right)_0 + 1.444\right]} = \frac{197.137}{5.976} = 32.988 < 50 \text{ Ом.}$$

Даем приращение $\Delta(w/d)$ со знаком минус, поскольку, при уменьшении ширины полоска волновое сопротивление возрастает. Пусть $\Delta(w/d) = 0.515$, тогда

$$\left(\frac{w}{d}\right)_1 = 3; \quad \varepsilon_{эф}^1 = 3.605; \quad Z_B^1 = \frac{198.554}{5.388} = 36.852 < 50 \text{ Ом,}$$

и т. д.

$$\left(\frac{w}{d}\right) = 1.7 ; \quad \varepsilon_{\text{эф}}^1 = 3.434 ; \quad Z_{\text{в}}^1 = \frac{203.435}{3.057} \cong 52.744 \approx 50 \text{ Ом} .$$

Таким образом задача синтеза решена $\left(\frac{w}{d}\right) \cong 1.7 \text{ мм}$ (точнее 1.76 мм). Эту задачу удобно решать с помощью ЭВМ. Обратите внимание на погрешность приближенной формулы для $Z_{\text{в}}$.

Чтобы определить длину волны в линии, найдем длину волны в свободном пространстве $\lambda_0 = c/f = 7.5 \text{ см}$, тогда длина волны в линии на этой же частоте

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}}} = 4.067 \text{ см} .$$

Откуда четвертьволновой отрезок линии должен иметь физическую длину

$$\frac{\lambda_{\text{в}}}{4} = 1.016 \text{ см} .$$

8.2.5 Через очень короткий отрезок линии передачи с волновым сопротивлением 50 Ом необходимо передать в нагрузку мощность, равную 1 кВт. В соответствии с требованиями завода - изготовителя действующее напряжение в линии не должно превышать 250 В. Определить: максимально допустимое значение коэффициента стоячей волны $K_{\text{ст}U}$, при котором не повреждается линия, величину мощности, развиваемую генератором.

Решение. Поскольку длина линии мала, то потерями в линии можно пренебречь. Тогда, мощность передаваемая в нагрузку будет

$$P_{\text{н}} = P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}} \quad \text{или}$$

$$P_{\text{н}} = \frac{U_{\text{пад}}^2}{Z_{\text{в}}} - \frac{U_{\text{отр}}^2}{Z_{\text{в}}} = \frac{1}{Z_{\text{в}}} \cdot (U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}) \cdot (U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}) = 1000 \text{ Вт} .$$

$$\text{Откуда: } (U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}) \cdot (U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}) = 50000 .$$

Так как действующее напряжение в линии не должно превышать 250 В, то

$$U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} < 250 .$$

$$\text{Следовательно } (U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}) > \frac{50000}{250} = 200 .$$

Но, по определению

$$K_{\text{ст}U} = \frac{|U_{\text{пад}}| + |U_{\text{отр}}|}{|U_{\text{пад}}| - |U_{\text{отр}}|} , \quad \text{откуда}$$

$$K_{\text{ст}U} < \frac{250}{200} = 1.25 .$$

При таком значении $K_{\text{ст}U}$ 98.8 % мощности падающей волны передается из линии в нагрузку. Следовательно, для обеспечения в нагрузке мощности 1 кВт, генератор должен выдавать мощность 1012 Вт, при условии, что генератор согласован с линией передачи.

8.3 Задачи для самостоятельной работы

- 8.3.1 Рассчитать волновое сопротивление, погонные индуктивность и емкость несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком с $\varepsilon = 2.08$. Параметры линии: ширина токонесущей полоски $w = 7\text{мм}$, толщина диэлектрика $d = 1\text{мм}$, толщина полоски $t = 0.05\text{мм}$. Потерями в линии пренебречь.
 Ответ: $Z_{\text{в}} = 26\text{ Ом}$, $L = 0.126\text{ мкГн/м}$, $C = 186.3\text{ пФ/м}$.
- 8.3.2 Определить волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи, если известно, что в качестве диэлектрика используется материал с $\varepsilon = 2.55$, а погонная емкость линии 60 пФ/м .
 Ответ: $Z_{\text{в}} = 88.7\text{ Ом}$.
- 8.3.3 Определить волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком, если известно, что длина волны в линии 10см , а погонная емкость 100 пФ/м . Рабочая частота 2 ГГц .
 Ответ: $Z_{\text{в}} = 50\text{ Ом}$.
- 8.3.4 Линия, питаемая генератором синусоидального напряжения с частотой 25 МГц , имеет погонные параметры $C = 16\text{ пФ/м}$ и $L = 0.126\text{ мкГн/м}$. Найти фазовую скорость и длину волны в линии.
 Ответ: $v_{\text{ф}} = 2.5 \cdot 10^8\text{ м/с}$, $\lambda_{\text{в}} = 10\text{ м}$.
- 8.3.5 Определить погонные параметры несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком, если известно, что длина волны в линии 7см , а волновое сопротивление 50 Ом . Рабочая частота 3 ГГц .
 Ответ: $L = 0.24\text{ мкГн/м}$, $C = 95.2\text{ пФ/м}$.
- 8.3.6 Рассчитать погонное затухание в несимметричной полосковой линии передачи, заполненной воздухом. Размеры поперечного сечения линии: $w = 12\text{мм}$, $d = 2\text{мм}$, $t = 0.05\text{мм}$. Линия выполнена из меди ($\sigma = 5.7 \cdot 10^7\text{ См/м}$). Рабочая частота 500 МГц .
 Ответ: $\Delta = 0.06\text{ дБ/м}$.
- 8.3.7 Определить погонное затухание и предельную мощность, которая может быть передана по симметричной полосковой линии, заполненной воздухом, если пробой происходит при напряжении электрического

поля 30кВ/см . Длина волны в линии 5см . Параметры линии: $w = 2.93\text{мм}$, $d = 1\text{мм}$, $t = 0.05\text{мм}$. Линия выполнена из меди.

Ответ: $\Delta = 1.049\text{ дБ/м}$, $P_{\text{пред}} = 50.52\text{ кВт}$.

- 8.3.8 Определить погонное затухание в несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком. Длина волны в линии 5см . Параметры линии: $w = 2\text{мм}$, $d = 2\text{мм}$, $t = 0.05\text{мм}$. Относительная проницаемость диэлектрика $\epsilon = 9$, $\text{tg}\delta_{\epsilon} = 8 \cdot 10^{-4}$. Токонесущая полоска и заземленная пластина выполнены из меди ($\sigma = 5.7 \cdot 10^7\text{ См/м}$). Какова при этом доля потерь в металле и в диэлектрике?

Ответ: $\Delta = 0.807\text{ дБ/м}$, доля потерь составляет 0.371 в металле и 0.436 в диэлектрике.

- 8.3.9 Построить график зависимости суммарного и частичных коэффициентов затухания волны за счет потерь в металле и в диэлектрике от частоты в полосе $0.1 - 10\text{ ГГц}$ для симметричной полосковой линии передачи. Параметры линии: $w = 6\text{мм}$, $d = 1\text{мм}$, $t = 0.05\text{мм}$, $\epsilon = 2.4$, $\text{tg}\delta_{\epsilon} = 7 \cdot 10^{-4}$. Линия выполнена из меди ($\sigma = 5.7 \cdot 10^7\text{ См/м}$).

- 8.3.10 Микрополосковый волновод имеет размеры поперечного сечения $b = 2\text{мм}$, $h = 0.25\text{мм}$. Электродинамические параметры подложки $\mu = 1$, $\epsilon = 9.6$. Найти волновое сопротивление по приближенной и уточненной формулам. Оценить погрешность.

Ответ: 157 Ом , 12.6 Ом , 25% .

- 8.3.11 Между проводниками микрополоскового волновода создано гармоническое напряжение с амплитудой $U = 250\text{ В}$. Параметры линии: $b = 4\text{мм}$, $h = 1\text{мм}$, $\epsilon = 2.1$. Вычислить амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на проводящей полоске.

- 8.3.12 Отрезок линии передачи длиной $0.17 \cdot \lambda$ нагружен на линейный двухполюсник с нормированным сопротивлением $Z'_{\text{н}} = 4.5 - j \cdot 0.8$. Найти нормированное входное сопротивление отрезка.

- 8.3.13 Определить отношение (w/d) для 70 -омной микрополосковой линии, если относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки равна 2 . Толщина полоски пренебрежимо мала.

- 8.3.14 Определить физические размеры отрезка микрополосковой линии передачи, электрическая длина которого равна $\lambda_{\text{в}}/2$ на частоте 4 ГГц . Волновое сопротивление линии 50 Ом . Относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей линию равна 10 , а от-

носительная магнитная проницаемость $\mu = 4$. Толщина проводника бесконечно мала.

- 8.3.15 Рассчитать коэффициент ослабления в симметричной полосковой линии передачи с твердым магнетодиэлектриком. Параметры линии: ширина проводника $w = 0.6\text{мм}$, $d = 0.5\text{мм}$, $t = 0.05\text{мм}$. Проводник выполнен из меди. Параметры магнетодиэлектрика $\mu = 5$, $\varepsilon = 10$, $\text{tg}\delta_\mu = 3 \cdot 10^{-6}$, $\text{tg}\delta_\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$. Рабочая частота $6 \cdot 10^9$ Гц.

9 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992.
2. Никольский В.В. Математический аппарат электродинамики. Учебное пособие. – М.: МИРЭА, 1973.
3. Мисюркеев И.В. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Просвещение, 1975.
4. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. С.И. Баскакова. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Зайцев И.А., Лурье А.Г. Задачник по теоретическим основам электротехники. – М.: ГЭИ, 1961.
6. Говорков В.А., Купальян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1963.
7. Фуско В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование. – М.: Радио и связь, 1990.
8. Корогодов В.С. Техническая электродинамика. Сборник задач. – Томск: ТУСУР, 2001.
9. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1967.
10. Ерохин Г.А. Антенно - фидерные устройства и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия - Телеком, 2004.
11. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+MathCAD. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001.
12. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. Электромагнитные поля и волны. – Томск: ТУСУР, 2005.
13. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. – Томск: ТУСУР, 2005.