

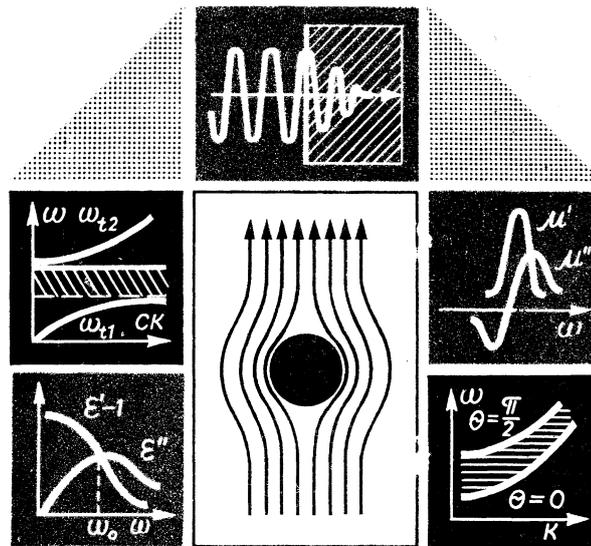


Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

А.С. Шостак

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Сборник задач



ТОМСК 2012

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

А.С. Шостак

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Сборник задач

2012

Рецензент: профессор кафедры КИПР ТУСУР, д. т. н. Татаринов В.Н.
Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР,
к.т.н. Озеркин Д.В.

Шостак А.С.

Электродинамика сплошных сред. Сборник задач для студентов очного, заочного и дистанционного обучения специальности 210201.

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012.- 72 с.

Содержание сборника задач соответствует программе курса “Электродинамика сплошных сред” для специальности 210201.

Излагаемый материал ориентирован на самостоятельное изучение дисциплины студентами заочной и дистанционной формы обучения. Предполагается, что студенты владеют соответствующим объемом знаний по курсу “Техническая электродинамика”. Конспект лекций может быть использован студентами дневных факультетов радиотехнического профиля для организации самостоятельной работы.

© Шостак А. С., 2012

© Кафедра КИПР Томского
государственного университета систем
управления и радиоэлектроники, 2012

1 . ВВЕДЕНИЕ.....	5
2 .ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА.....	6
3 ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.....	8
4 ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.....	13
5 . ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ.....	19
5.1 Основные формулы	19
5.2 Примеры решения типовых задач	23
5.3 Задачи для самостоятельной работы	37
6 РАДИОВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ.....	41
6.1 Основные формулы	41
6.2 Примеры решения типовых задач	44
6.3 Задачи для самостоятельного решения	47
7 ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ	51
7.1 Основные формулы	51
7.2 Примеры решения типовых задач	60
7.3 Задачи для самостоятельного решения	66
8 .СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	72

1 . ВВЕДЕНИЕ

В настоящем сборнике задач рассмотрены те части курса классической электродинамики, которая в различных пособиях и в разные времена называлась электронной теорией Лоренца, электродинамикой сплошных сред, электромагнитной теорией вещества и т. п.

Дело в том, что невозможно изложить электродинамику «вещества вообще». Можно говорить лишь об электромагнитных свойствах какого-то конкретного вида вещества (например, металла, диэлектрика, плазмы и т. д.), рассматриваемого на основе конкретной микроскопической модели. И тем не менее в имеющихся учебных пособиях по электродинамике приходится обращаться к электродинамике вещества (материальной среды), как только заходит речь о макроскопических уравнениях Максвелла, требующих для полноты постановки электродинамической задачи введения уравнений связи (материальных уравнений) между индукциями ($\vec{D} \hat{=} \vec{B}$) и напряженностями полей ($\vec{E} \hat{=} \vec{H}$).

В большинстве пособий принимается локальная связь между ними. Тем самым не учитывается так называемая пространственная дисперсия, благодаря которой индукция \vec{D} в точке пространства определяется распределением поля \vec{E} в некоторой окрестности этой точки. Это означает, что смещение \vec{D} в точке \vec{r} зависит не только от самого поля $\vec{E}(\vec{r})$, но и от его пространственных производных в этой же точке. Между тем за последние десятилетия развитие физики твердого тела (и плазмы) в значительной степени связано с учетом различных механизмов пространственной дисперсии.

Особенность настоящего сборника задач состоит в том, что в нем рассматриваются свойства самых различных видов вещества (диэлектриков, проводников и сверхпроводников, плазмы и магнетиков) с единой точки зрения — точки зрения электродинамики, ее материальных уравнений, в терминах нормальных электромагнитных волн с учетом пространственной (и временной) дисперсии.

2 .ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Уравнения Максвелла дают полные сведения об электромагнитном поле. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: \vec{E} - напряженность электрического поля, измеряемая в вольтах на метр (в/м); \vec{D} - электрическая индукция - кулон на квадратный метр (Кл/м²); \vec{H} - напряженность магнитного поля - ампер на метр (А/м); \vec{B} - магнитная индукция, измеряется в веберах на квадратный метр (Вб/м²).

Уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \vec{I}_{полн} \quad \text{- закон полного тока.} \quad (1)$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} \quad \text{- обобщенный закон электромагнитной индукции.} \quad (2)$$

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad \text{- постулат Максвелла} \quad (3)$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{- закон непрерывности.} \quad (4)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{полн}. \quad (5)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho. \quad (7)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (8)$$

Плотность полного тока представляет сумму четырех токов:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j}_{см} + \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{пер} + \vec{j}_{ст} \quad (9)$$

соответственно плотности тока смещения, плотности тока проводимости, плотности тока переноса и плотности стороннего тока.

Определение плотностей токов смещения, проводимости и тока переноса

$$\vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E}; \vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \vec{j}_{пер} = \rho \cdot \vec{V}. \quad (10)$$

В эти уравнения входят σ - удельная объемная проводимость вещества, измеряемая в Сименсах на метр (Сим/м) и объемная плотность заряда ρ и кулон на метр кубический (Кл/м³).

Связь векторов поля в некоторой материальной среде обычно характеризуют уравнениями:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (11)$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (12)$$

μ_a - абсолютная магнитная проницаемость, ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Часто бывает удобно характеризовать среды по сравнению с вакуумом, в связи с чем вводятся относительные проницаемости

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0 \quad (13)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_a / \varepsilon_0, \quad (14)$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi)$ - Ф/м - электрическая постоянная и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная.

Магнитным потоком Φ , пронизывающим поверхность, называется интеграл

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (2) запишется как

$$\int_L \bar{E} d\bar{l} = \frac{d\Phi}{dt}; \quad (16)$$

$$\iiint_V \bar{E} d\bar{S} = \int_V \text{div} \bar{E} dV - \text{теорема Остроградского}, \quad (18)$$

$$\int_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \text{rot} \bar{H} d\bar{S} - \text{теорема Стокса}. \quad (19)$$

Уравнения, определяющие граничные условия (два диэлектрика)

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad (20)$$

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{SN}.$$

В случае диэлектрик – металл граничные условия такие

$$E_{1n} = \rho_S / \varepsilon_1; \quad E_{1\tau} = 0; \quad (21)$$

$$H_{1\tau} = j_{SN}; \quad H_{1n} = 0.$$

$$\text{div} \text{rot} \bar{H} = \text{div} \bar{j}_{\text{полн}} \equiv 0.$$

$$\int_V \text{div} \bar{j}_{\text{полн}} dV = \int_S \bar{j}_{\text{полн}} d\bar{S} = I_{\text{полн}} - \text{Закон полного тока} \quad (22)$$

Определение расходимости (дивергенции) вектора \bar{a} декартовой системе координат

$$\text{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (23)$$

Определение ротора вектора \bar{a}

$$\begin{aligned} \text{rot}_x \vec{a} &= \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} & x \rightarrow y \rightarrow z \\ \text{rot}_y \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} & y \rightarrow z \rightarrow x \end{aligned} \quad (24_a)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \vec{a} &= \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} & z \rightarrow x \rightarrow y \\ \text{rot} \vec{a} &= \begin{pmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (24_b)$$

Определение градиента потенциала φ

$$\text{grad} \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (25)$$

3 ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Задача №1.

Доказать, что линии плотности полного тока непрерывны и замкнуты.

Вопрос 1 Какое равенство (по аналогии с линиями магнитного поля) должно иметь место, чтобы линии полного тока были замкнуты?

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } \iint_S \vec{j} d\vec{S} &= 0 \\ \text{div } \vec{j} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

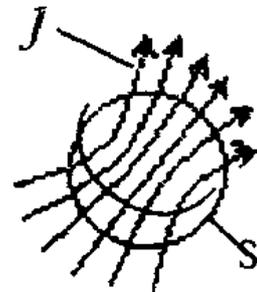


Рисунок 2.1

- эти равенства нам и нужно доказать.

Записать уравнение Максвелла, в которое входит плотность полного тока \vec{j} .

Из закона полного тока (22) следует, что $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$.

Вычислим $\text{div} \vec{j}$

$$\begin{aligned} \text{div} \text{rot} \vec{H} &= \text{div} \vec{j}, \\ \text{div} \text{rot} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad \text{- из векторного анализа.} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим, что $\text{div} \vec{j} = 0$ и $\iint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$, т.е. поток

\vec{j} через замкнутую поверхность (\iint_S) равен 0, значит нигде нет ни начала, ни конца линий, как показано на рис. 2.1.

Сколько линий входит в объем, столько и выходит.

Задача №2.

Используя уравнения Максвелла, вывести уравнения непрерывности и закон сохранения заряда.

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j} \right) = 0.$$

Уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \oint_S \bar{j} d\bar{S} + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0; \quad (28)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div} \bar{j} dV = 0; \quad \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial q}{\partial t}; \quad \int_V \operatorname{div} \bar{j} dV = \oint_S \bar{j} d\bar{S} = I.$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -I \text{ Закон сохранения заряда.}$$

Задача №3.

Доказать, что в однородной проводящей среде не может существовать объемное распределения заряда, не зависящее от времени

Вопрос. Какое математическое соотношение может описывать утверждение сформулированное в данной задаче?

Ответ: Объемная плотность заряда описывается величиной ρ . Нам, очевидно, нужно доказать, что если в какой-либо точке $\rho \neq 0$, то при этом обязательно и $d\rho/dt \neq 0$.

Записать уравнение Максвелла, в которое входит объемная плотность заряда.

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho.$$

Но сюда входит \bar{D} , чтобы получить уравнение для ρ надо исключить \bar{D} , поэтому, мы должны использовать уравнение, в которое входит \bar{D} .

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad \text{но } \bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \quad \text{поэтому } \bar{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \bar{D} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \bar{D} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (30)$$

Вектор \bar{j} исключим, взяв div от обеих частей уравнения:

$$\operatorname{div} \bar{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{div} \bar{D} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D}, \quad \text{т.к. } \operatorname{div} \bar{j} = 0, \operatorname{div} \bar{D} = \rho, \text{ откуда следует уравне-}$$

ние

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Если $\rho \neq 0$, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Произведя разделение переменных, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (31)$$

Из уравнения (31) определяем ρ . Оно равно

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}. \quad (32)$$

Ответ: $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}$.

Задача №4.

Может ли существовать в природе следующее магнитное поле, описываемое выражением $\vec{B} = \bar{x}_0 \cdot 5x + \bar{y}_0 \cdot y$?

Решение:

Четвертое уравнение Максвелла гласит, что $\text{div} \vec{B} = 0$. Проверим удовлетворяет ли ему заданный вектор \vec{B} , взяв дивергенцию

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial y} = 5 + 1 \neq 0,$$

Вывод: такого поля \vec{B} в природе не может быть.

Нахождение одного из векторов по заданному другому

Задача №5.

Определить полный ток, если известно, что $\vec{H} = \bar{x}_0 5z \sin \omega t$.

Воспользуемся уравнением Максвелла (5), получаем

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 5z \sin \omega t & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{y}_0 \cdot 5 \sin \omega t = \vec{j}_{\text{полн}}. \quad (33)$$

из полученного соотношения (33), видно, что плотность тока имеет только одну составляющую, направленную по оси y - $j_y = 5 \sin \omega t$; $j_x = j_z = 0$.

Задача №6.

Задано электрическое поле $\vec{E} = E_0(y\bar{x}_0 - x\bar{y}_0) \cos \omega t$. Определить магнитное поле \vec{H} .

Используем 2-е уравнение Максвелла.

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot E_0 \cos \omega t = -\bar{z}_0 2 \cos \omega t.$$

Вектор \vec{B} определим интегрированием $\text{rot} \vec{E}$ по времени

$$\vec{B} = \int \bar{z}_0 2 E_0 \cos \omega t, \quad \vec{B} = \bar{z}_0 \frac{2 E_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Используя, материальное уравнение (11), находим вектор \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \Rightarrow \vec{H} = \frac{2E_0}{z_0 \omega \mu} \sin \omega t.$$

Ответ: $\vec{H} = \frac{2E_0}{z_0 \omega \mu} \sin \omega t.$

Определение ЭДС в контуре

Задача №7.

Определить ЭДС, возбуждаемую в рамке потоком вектора $\vec{B} = \mu \vec{H}_0 \cos \omega t.$

Направление вектора \vec{H} показано на рис. 2.2.

Решение:

Для определения потока, воспользуемся уравнением (15) и зная, что скалярное произведение векторов равно $\vec{B} \cdot \vec{n}_0 = |\vec{B}| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos 45^\circ$, запишем значение для потока, проделав необходимые преобразования.

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \vec{B} n_0 dS = \cos 45^\circ \cdot \vec{B} \int dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \vec{H}_0 S$$

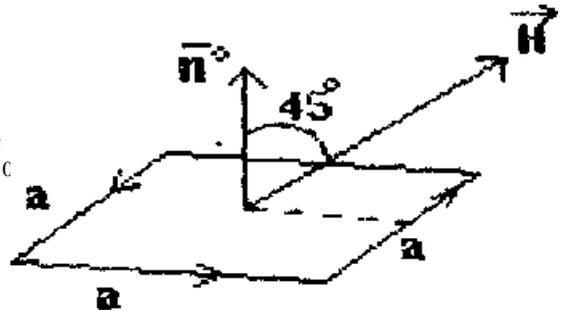


Рисунок 2.2

Электродвижущая сила определяется

из уравнения $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$ (34)

Подставим в (34) значение потока

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \mu H_0 \sin \omega t \cdot a^2.$$

Ответ: $\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \mu H_0 \sin \omega t \cdot a^2.$

Задача 8.

Определить ЭДС в замкнутом контуре, если известен вектор. $\vec{H} = H_0 \sin \omega t.$ Направление вектора \vec{H} показано на рис. 2.3.

Решение:

Запишем выражение для вектора \vec{B} и

потока $\vec{B} = \mu \vec{H}_0 \sin \omega t,$

$$\Phi = \mu (\vec{H}_0 \vec{n}_0) \sin \omega t \int dS.$$

Записываем скалярное произведение

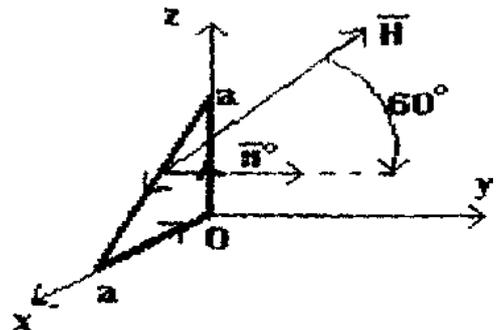


Рисунок 2.3

векторов - $\vec{H}_0 \cdot \vec{n}_0$ и $\int_S dS$

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{n}_0 = |\vec{H}_0| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\int_S dS = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a dx dz = \frac{a^2}{2}.$$

Подставляя в выражение для потока, получим

$$\Phi = \frac{\mu}{2} H_0 \sin \omega t \cdot \frac{a^2}{2}.$$

Определим электродвижущую силу определяем по уравнению.

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\mu \omega a^2}{4} H_0 \cos \omega t.$$

Ответ $\mathcal{E} = -\frac{\mu \omega a^2}{4} H_0 \cos \omega t.$

Задача №9

Определить ЭДС, возбуждаемую в замкнутом контуре L , если задано - $\vec{E} = \frac{E_0}{a} (\vec{x}_0 y - \vec{y}_0 x) \cos \omega t$, показанное на рис 2.4.

Электродвижущая сила для электрического поля определяется из уравнения $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$.

Запишем значение \mathcal{E} , используя теорему Стокса (19)

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S},$$

Распишем значения $d\vec{S}$ и $\text{rot} \vec{E}$

$$d\vec{S} = \vec{z}_0 dS = \vec{z}_0 dx dy,$$

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{E_0}{a} \cos \omega t = -\vec{z}_0 2 \frac{E_0}{a} \cos \omega t,$$

и подставим в формулу для \mathcal{E} . Прделав математические выкладки, получим значение для ЭДС.

$$\mathcal{E} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -2 \frac{E_0}{a} \cos \omega t \cdot \int_0^a \int_0^a dx dy = -2 E_0 a \cos \omega t.$$

Ответ: $\mathcal{E} = -2 E_0 a \cos \omega t.$

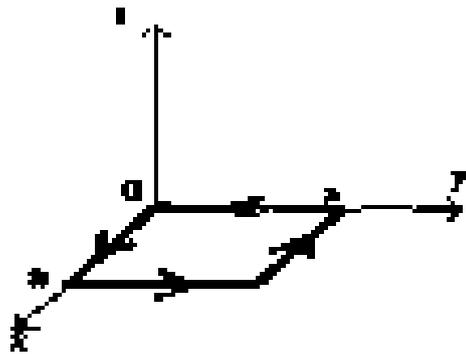


Рисунок 2.4

4 ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Задача №1

Имеются две полубесконечные магнитные среды, 1-ая изотропная, 2-ая анизотропная. Проводимости равны нулю.

Параметры сред:

$$\mu_1 = \mu_0; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0;$$

$$\vec{\mu}_2 = \begin{pmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}.$$

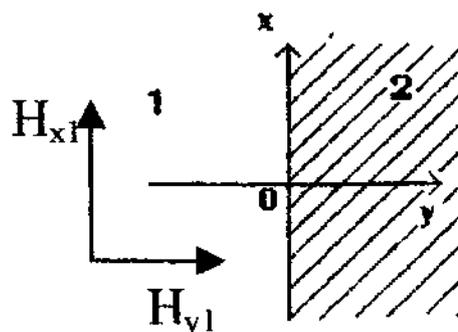


Рисунок 2.5

Магнитное поле в первой среде:

$$\vec{H} = x_0 H_{x1} + y_0 H_{y1}.$$

Определить магнитное поле во второй среде.

Решение:

Согласно рис.2.5 и граничным условиям (20) записываем связь между параметрами между параметрами первой и второй среды:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \rightarrow H_{x1} = H_{x2}. \quad (34)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \mu_0 H_{1y} = B_{2n}, \quad (35)$$

$$B_{2n} = B_{2y}; \quad B_{1n} = B_{1y}; \quad B_{1y} = B_{2y}. \quad (36)$$

Так как во второй среде магнитная проницаемость представлена тензором, то запишем вектор магнитной индукции для второй среды через материальное уравнение (12) в виде произведения двух определителей и перемножим их.

$$\vec{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{x2} \\ B_{y2} \\ B_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\alpha & 0 \\ +\alpha & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{x2} \\ H_{y2} \\ H_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 H_{x2} & -\alpha H_{y2} \\ \alpha H_{x2} & +\mu_0 H_{y2} \\ \mu_z H_{z2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Теперь из уравнения (37) выделим составляющую B_{y2} и приравняем ее, следуя условиям (35, 36).

Из выражения (35) следует, что $H_{x2} = H_{x1}$, тогда используя составляющую B_{x2} составляем еще одно уравнение

$$\alpha H_{x1} + \mu_0 H_{y2} = \mu_0 H_{1y},$$

Из которого можно найти H_{y2}

$$H_{y_2} = \frac{1}{\mu_0} (\mu_0 H_{1y} - \alpha H_{x1}); \quad H_{2z} = H_{1z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{H}_2 = \bar{x}_0 H_{x1} + \bar{y}_0 \left(H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1} \right).$$

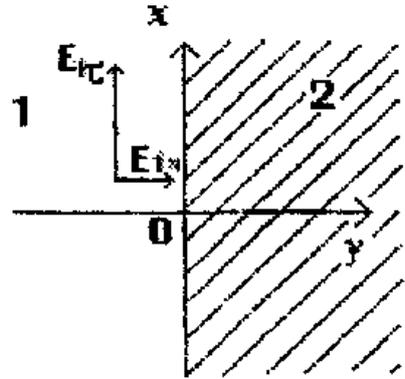
$$\text{Ответ: } \bar{H}_2 = \bar{x}_0 H_{x1} + \bar{y}_0 \left(H_{y1} - \frac{\alpha}{\mu_0} H_{x1} \right).$$

Задача №2.

Имеются две полубесконечные среды с параметрами:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0; \quad \vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; \quad \text{зарядов нет.}$$

Задано $\bar{E}_1 = \bar{x}_0 E_{x1} + \bar{y}_0 E_{y1}$. Определить \bar{E}_2 .



Эта задача подобна задаче №1, только определения проводятся для напряженности электрического поля с использованием соответствующих граничных условий из уравнений (20) и материальных уравнений (12).

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \rightarrow E_{1x} = E_{2x}; \quad D_{1y} = D_{2y}, \quad D_{1n} = D_{2n},$$

$$\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} D_{2x} \\ D_{2y} \\ D_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon_0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \\ E_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon E_{2x} & \varepsilon_0 E_{2z} \\ \varepsilon E_{2y} \\ \varepsilon_0 E_{2x} & \varepsilon E_{2z} \end{bmatrix}.$$

$$D_{1y} = D_{2y} = \varepsilon_0 E_{1y}; \quad E_{2y} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y} \Rightarrow \bar{E}_2 = \bar{x}_0 E_{1x} + \bar{y}_0 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y}.$$

$$\text{Ответ: } \bar{E}_2 = \bar{x}_0 E_{1x} + \bar{y}_0 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{1y}.$$

Задача №3.

Ток в среде распределен с плотностью \bar{j}_0 и опыт показывает, что с приложением постоянного магнитного поля H_z , появляется дополнительная составляющая плотности тока, определяемая равенством.

$$\bar{j}' = \chi [\bar{E} H_z],$$

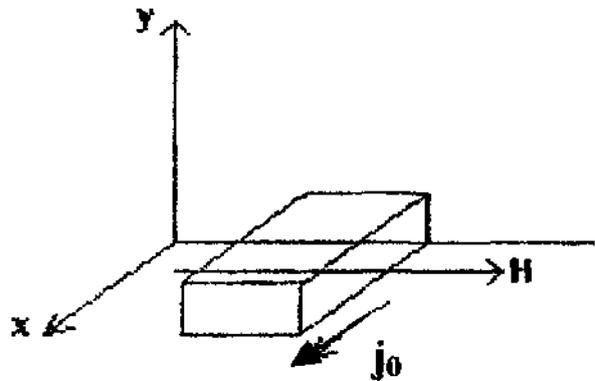


Рисунок 2.6

где χ - постоянная Холла. Это явление называют эффектом Холла.

Найти связь между током $\bar{j} = \bar{j}_0 + \bar{j}'$ и напряженностью \bar{E} в случае наличия эффекта Холла.

Решение:

Известна формула $\bar{j} = \sigma \bar{E}$. Примем \bar{H} вдоль Z направления, а.....

$$\bar{E} = E_x \cdot \bar{x}_0 + E_y \cdot \bar{y}_0 + E_z \cdot \bar{z}_0.$$

Плотность тока в произвольной точке будет равна

$$\bar{j} = \bar{j}' + \bar{j}_0;$$

$$\bar{j} = \sigma \bar{E} + \chi [\bar{E} \bar{H}_z] = \sigma \bar{E} + \chi H_z [\bar{E}, \bar{z}_0].$$

Это эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$j_x = \sigma E_x + \chi H_z E_y;$$

$$j_y = \sigma E_y + (-\chi H_z E_x);$$

$$j_z = \sigma E_z.$$

Удельная проводимость среды при эффекте Холла выражается тензором:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \chi \bar{H}_0 & 0 \\ -\chi \bar{H}_0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Плотность тока и напряженность поля не параллельны, т.е.

$$\bar{j} = \vec{\sigma} \bar{E}.$$

Задача №4.

Дано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора \bar{E} .

Показать, что \bar{E} и \bar{B} взаимно ортогональны.

Решение: Найдем \bar{B} по заданному \bar{E} .

Направим одну из осей координат по направлению вектора \bar{E} . Например z , тогда $E_x = E_y = 0$. Воспользовавшись 2-м уравнением Максвелла (6), записываем

выражение rot в декартовой системе координат $rot = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$rot = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} (\bar{x}_0 B_x + \bar{y}_0 B_y + \bar{z}_0 B_z), \text{ так как}$$

$E_x = E_y = 0$, то

$$rot_x E = \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \quad rot_y E = \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad rot_z E = 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

откуда $B_z = 0$. Следовательно $\vec{B} = x_0 B_x + y_0 B_y$.

Возьмем скалярное произведение

$$(\vec{E}\vec{B}) = (\vec{z}_0 E_z \vec{B}) = (\vec{z}_0 x_0 B_x E_z + \vec{z}_0 y_0 B_y E_z) \cos(\vec{z}_0 \vec{y}_0) = 0.$$

$$\left[E_z \vec{z}_0 \cdot (\vec{x}_0 B_x + \vec{y}_0 B_y) \right] = 0.$$

Следовательно $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Задача №5

Направление \vec{H} задано, показать, что вектор плотности \vec{j} тока перпендикулярен вектору \vec{H} .

Решение:

Так как направление \vec{H} задано, то пусть это будет по оси Z .

Воспользовавшись первым уравнением Максвелла, запишем составляющие плотностей тока

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_z = \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$\text{rot}_y \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x};$$

$$\text{rot}_z \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z = 0.$$

Откуда $\vec{j} = x_0 j_x + y_0 j_y$ и $\vec{B} = z_0 B_z$. Скалярное произведение, следовательно, $(\vec{j}\vec{B}) = 0$, т.е. $\vec{H} \perp \vec{j}$.

Задача №6.

Какова напряженность магнитного поля на расстоянии 10 см от прямолинейного постоянного провода с током в 2 А.

Решение:

Воспользуемся 1-м уравнением Максвелла в интегральной форме $\int_L \vec{H} d\vec{l} = I$. Ток прямолинейен. Мы доказали, что

$\vec{H} \perp \vec{j}$ (задача 5), следовательно линии вектора \vec{H} лежат в плоскости \perp направлению тока и имеют вид замкнутых кривых. Замкнутым контуром введем окружность, по которой будем считать циркуляцию.

$$d\vec{l} = \vec{\alpha}_0 \cdot r d\alpha, \quad \vec{H} = \vec{\alpha}_0 H_\alpha + \vec{r}_0 H_r, \quad \vec{H} d\vec{l} = H_\alpha d\alpha.$$

H_α - постоянная величина на расстоянии r

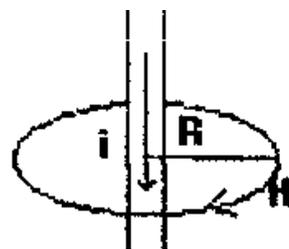


Рисунок 2.8

$$dl = I.$$

$$H \int_{2\pi R} H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{2A}{6,28 \cdot 0,10m} = 3,3 \frac{A}{m}.$$

Вектор \vec{H} при выбранном направлении тока направлен по часовой стрелке – составляет правовинтовую систему.

$$\text{Ответ: } H = I/(2\pi R) = 2A/(2\pi \cdot 0,1m) = 3,3 A/m$$

Задача №7.

В некотором объеме свободного пространства имеется электрическое поле $\vec{E} = 10\vec{y}_0 B/m$ и магнитное поле $\vec{H} = 15\vec{x}_0 A/m$. Заряд $q = 10^{-9} Кл$ влетает в этот объем со скоростью $\vec{v} = 10^6 м/с$. Определить силу, действующую на заряд, и её направление.

Решение:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Гн/м; \quad F_{Л} = q \left\{ \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right\}.$$

$$\vec{F}_{Э} = q\vec{E} = 10^{-9} \cdot 10 \cdot \vec{y}_0, \quad \vec{F}_{M} = q[\vec{v}\vec{B}] = q \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 15 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 18,84 \cdot 10^{-9} \vec{y}_0.$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{Э} + \vec{F}_{M} = 28,84 \cdot 10^{-9} \vec{y}_0.$$

Задача №8

Какова величина напряженности магнитного поля в середине между двумя параллельными бесконечными проводниками, по которому текут одинаковые, но противоположно направленные токи?

Решение:

$H = \frac{I}{2\pi a}$ (см. задачу 6). Поле двух разнонаправленных, но одинаковой величины токов по принципу суперпозиции

$$H_{\Sigma} = H_1 + H_2 = 2H = \frac{2I}{2\pi a} = \frac{I}{\pi a}.$$

Задача №9

Имеются два анизотропных диэлектрика, тензоры их относительной диэлектрической проницаемости в декартовой системе координат имеют вид:

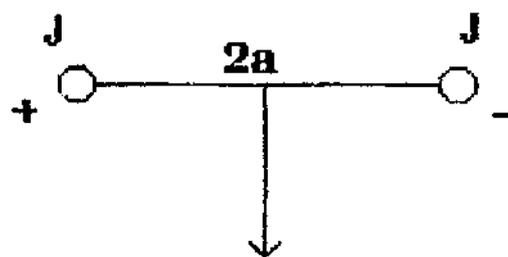


Рисунок 2.9

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 7,1 & 0 & 0 \\ 0 & 7,1 & 0 \\ 0 & 0 & 7,1 \end{pmatrix} \quad \vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 5,1 & 0 & 0 \\ 0 & 4,3 & 0 \\ 0 & 0 & 3,7 \end{pmatrix}.$$

В каждом диэлектрике создано однородное электрическое поле $\vec{E} = 2\vec{x}^0 + 3\vec{y}^0 + 4\vec{z}^0$ В/м.

Определить в каждом диэлектрике вектор электрического смещения \vec{D} .
Дать характеристику каждому диэлектрику.

Задача №10

В каждой точке XYZ декартовой системы координат задан вектор $\vec{H} = 5\vec{x}^0 + 4\vec{y}^0 + 7\vec{z}^0$.

Определить нормальную H_n и тангенциальную H_t составляющие этого вектора.

5 . ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНЫ

5.1 Основные формулы

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$, σ и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны.

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентом отражения:

$$R_E = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{над}}}; \quad R_H = \frac{H_{\text{отр}}}{H_{\text{над}}}$$

и коэффициентом преломления (прохождения):

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{над}}}; \quad T_H = \frac{H_{\text{пр}}}{H_{\text{над}}}.$$

Для среднего значения плотности потока мощности:

$$R_{\Pi} = \frac{\Pi_{\text{отр}}}{\Pi_{\text{над}}}; \quad T_{\Pi} = \frac{\Pi_{\text{пр}}}{\Pi_{\text{над}}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то:

$$R_E = \frac{(Z_{C2} - Z_{C1})}{(Z_{C2} + Z_{C1})}; \quad T_E = \frac{2Z_{C2}}{(Z_{C1} + Z_{C2})},$$

где Z_C – характеристическое сопротивление среды, соответственно первой и второй:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\epsilon}_{a1}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\epsilon}_{a2}}}.$$

Если в формулах для характеристического сопротивления учесть, что для диэлектриков с потерями:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \cdot \epsilon_0 (1 - jtg\delta_\epsilon),$$

то выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик примет вид

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon} \cdot (1 - jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + jtg\delta_\epsilon)^{1/2}}.$$

$$\text{Здесь } tg\delta_\epsilon = \frac{\sigma}{\omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \approx \delta_\epsilon.$$

Плоскость, содержащая вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к границе раздела, называют плоскостью падения.

Из граничных условий следует, что углы падения φ , отражения φ_0 и преломления φ_n связаны законом зеркального отражения $\varphi = \varphi_0$ и законом Снелля:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad \text{или} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Если вектор \vec{E} лежит в плоскости падения, то:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi_n - Z_{C1} \cos \varphi]}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]},$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi_n + Z_{C1} \cos \varphi]}.$$

Если вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения, то:

$$R_E^{\perp} = \frac{[Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_n]}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]},$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2Z_{C2} \cos \varphi}{[Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n]}.$$

Для диэлектрических сред, у которых $\mu = 1$, коэффициенты R и T удобно представить в виде:

$$R_E^{\perp} = \frac{-\sin(\varphi - \varphi_n)}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad R_E^{\parallel} = \frac{-\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_n)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_n)};$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n)}; \quad T_E^{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_n \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_n) \cos(\varphi - \varphi_n)}.$$

При $\varphi + \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, $R_E^{\parallel} = 0$. Угол падения, в этом случае называется углом Брюстера:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Если при $\varepsilon_2 \cdot \mu_2 < \varepsilon_1 \cdot \mu_1$ угол падения φ будет равен или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{ПВО}$, равного:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}},$$

то преломлённой волны в общепринятом смысле не существует (явление полного внутреннего отражения). Коэффициенты отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице, а будет изменяться только их фаза:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\},$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

Коэффициенты преломления \dot{T}_E^{\parallel} и \dot{T}_E^{\perp} при явлении полного внутреннего отражения не равны нулю:

$$\dot{T}_E^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}};$$

$$\dot{T}_E^{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \cos \varphi - j \sqrt{\left(\sin^2 \varphi - \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)}} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

В этом случае поле $\dot{E}_{\text{ПП}}$, прошедшее во вторую среду, представляет собой неоднородную плоскую волну, быстро убывающую при удалении от границы раздела и называемую поверхностной волной:

$$\dot{E}_{\text{ПП}} = \dot{T} \cdot \dot{E}_{\text{ПАД}} \exp \left\{ \beta_1 \left[z \sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} \right)} - jx \cdot \sin \varphi \right] \right\},$$

где z и x – текущие координаты в плоскости падения: z – перпендикулярна, а x – параллельна границе раздела.

Глубина проникновения поверхностной волны в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \operatorname{ch} \alpha},$$

где:

$$\operatorname{ch} \alpha = \sin \psi = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = \frac{n_2}{n_1},$$

ψ – комплексный угол преломления, $\beta_2 = \frac{\omega}{v_{\phi}}$ – коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2.

Фазовая скорость поверхностной волны находится из выражения:

$$v_{\phi.нов} = \frac{\omega}{\beta_{нов}},$$

где $\beta_{нов} = \beta_2 ch\alpha = \beta_2 \frac{n_2}{n_1} = \beta_1$.

Для металлоподобных сред справедливо граничное условие Леонтовича:

$$\vec{E}_\tau = Z_{см} [\vec{H} \cdot \vec{i}_n] \quad \text{или} \quad |\dot{E}| = |Z_{см} \cdot \dot{H}_\tau|,$$

где \vec{i}_n – единичный вектор нормали к поверхности металлоподобной среды, направленный внутрь;

$$Z_{см} = \sqrt{\frac{j\mu_a\omega}{\sigma}};$$

\dot{H}_τ – касательная к поверхности среды составляющая вектора напряженности магнитного поля.

На границе раздела должны выполняться следующие граничные условия:

$$\mu_{a1} \cdot H_{1n} = \mu_{a2} \cdot H_{2n}; \quad \varepsilon_{a1} \cdot E_{1n} = \varepsilon_{a2} \cdot E_{2n};$$

для нормальных составляющих и

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

для касательных составляющих электромагнитного поля.

Суммарная величина напряженности магнитного поля на границе раздела металла и среды:

$$H_\Sigma = 2H_{пад}.$$

Амплитуда вектора плотности электрического тока на границе раздела металла и среды:

$$j_{ПОВ.Э} = [\vec{i}_{ПОВ} \times \vec{H}_\Sigma],$$

где $\vec{i}_{ПОВ}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь толщиной l при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1-\varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1+\varepsilon)tg\theta},$$

где выражение для угла θ :

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\varepsilon\mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\varepsilon\mu}}{c}.$$

Для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн) амплитуда определяется из выражения:

$$\vec{E} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

$$E_\tau = 0; \quad H_n = 0.$$

Выразим фазовую скорость v_ϕ через продольное число $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, которое играет роль коэффициента фазы:

$$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \cdot \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

$$\text{Здесь } \beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Для немагнитного диэлектрика без потерь формулы для коэффициента отражения R имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi}; \quad R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Показатель преломления n при падении волны из вакуума:

$$n = \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}.$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры: $\varepsilon = 81$, $\mu = 1$, $\sigma = 0.1$ См/м. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц. Полагая, что амплитуда напряженности электрического поля падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна 1 В/м, записать выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны.

Решение.

Выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на такой диэлектрик с потерями имеет вид:

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C2} + Z_{C1}} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - jt g \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + jt g \delta_\varepsilon)^{1/2}}.$$

Воспользуемся приближением – при $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$:

$$\sqrt{1 - jt g \delta_\varepsilon} \approx 1 - 0.5 \cdot jt g \delta_\varepsilon,$$

$$\text{так как } \text{tg } \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{2}{9} \ll 1.$$

Тогда для коэффициента отражения получим:

$$\dot{R}_E = -\frac{8 + j}{10 - j} = -0.8e^{-j0.025},$$

а

$$\dot{T}_E = 1 - \dot{R}_E = \frac{2}{10 - j} = 0.2e^{j0.1}.$$

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля отраженной волны будет:

$$\dot{E}_{omp} = \dot{R}_E \cdot \dot{E}_{nad} = -0.8e^{-j0.025} e^{j\beta_0 Z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, найдем:

$$E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z).$$

Ответ: Комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте 100 МГц: $\dot{R}_E = -0.8e^{-j0.025}$ и $\dot{T}_E = 0.2e^{j0.1}$, выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны $E_{omp} = -0.8 \cos(2\pi \cdot 10^8 \cdot t - 0.025 + \beta_0 Z)$.

5.2.2 Измерение комплексного коэффициента отражения \dot{R}_E от диэлектрика с неизвестными параметрами ε и μ на частоте 1 ГГц дает величину $\dot{R}_E = -0.5e^{-j0.09}$. Определить параметры диэлектрика ε , $\text{tg } \delta_\varepsilon$, σ , если известно, что $\mu = 1$ и волна падает на диэлектрик нормально.

Решение.

Комплексный коэффициент отражения от границы раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon \varepsilon_0 (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)$, $\mu = 1$ запишется:

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}},$$

откуда

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2}.$$

Поскольку \dot{R}_E задано через показательную функцию, то и правую часть выразим через показательную функцию $a + jb = re^{j\varphi}$. Так как $\text{tg } \delta_\varepsilon \ll 1$, то $\text{tg } \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon$, $\arctg\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{\delta_\varepsilon}{2}$ и

$$(1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - j \cdot \frac{\delta_\varepsilon}{2} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon) e^{-j \cdot \arctg\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \approx (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} e^{-j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

Приняв указанные приближённые равенства, получим:

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 - j \text{tg } \delta_\varepsilon)^{1/2} = \sqrt{\varepsilon} \cdot (1 + \text{tg}^2 \delta_\varepsilon)^{1/4} \cdot e^{j \frac{\delta_\varepsilon}{2}}.$$

С другой стороны $\dot{R}_E = -|R| \cdot e^{-j\psi}$ ($|R| = 0.5$; $\psi = 0.09$), тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} &= \frac{1 + |R| \cdot e^{-i\psi}}{1 - |R| \cdot e^{-i\psi}} = \frac{1 + |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)}{1 - |R| \cdot (\cos \psi - j \sin \psi)} = \\ &= \frac{1 + |R| \cdot \cos \psi - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{1 - |R| \cdot \cos \psi + j \cdot |R| \cdot \sin \psi} = \frac{(1 + |R| \cdot \cos \psi) - j \cdot |R| \cdot \sin \psi}{(1 - |R| \cdot \cos \psi) + j \cdot |R| \cdot \sin \psi}. \end{aligned}$$

Приравнивая модули и фазы обеих частей, окончательно получим:

$$\frac{\delta_\varepsilon}{2} = -\operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 + |\dot{R}| \cos \psi} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 - |\dot{R}| \cos \psi} \right); \quad (*)$$

$$\varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\varepsilon} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|R| \cos \psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|R| \cos \psi}. \quad (**)$$

Кроме того:

$$\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \approx \delta_\varepsilon. \quad (***)$$

Подставляя $\psi = 0.09$ и $|R| = 0.5$, из соотношения (*) получим $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon \approx \delta_\varepsilon = 0.12$. Затем из соотношения (**) вычислим $\varepsilon = 9.0$. В заключение из соотношения (***) найдём $\sigma = 0.06$ См/м.

Ответ: параметры диэлектрика: $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0.12$, $\varepsilon = 9.0$, $\sigma = 0.06$ См/м.

5.2.3 Амплитудное значение напряженности электрического поля падающей из вакуума волны $E_{x.\text{пад}} = 250$ В/м. Относительная диэлектрическая проницаемость материала $\varepsilon = 3.2$. Найти модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн.

Решение.

Модули усредненных векторов Пойнтинга (Вт/м^2) будут:

$$P_{\text{пад}} = \frac{E_{x.\text{пад}}^2}{2} \cdot Z_0,$$

где Z_0 – характеристическое сопротивление вакуума, $Z_0 = 120\pi$;

$$P_{\text{отр}} = \frac{(R \cdot E_{x.\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_0,$$

и

$$P_{\text{пр}} = \frac{(T \cdot E_{x.\text{пад}})^2}{2} \cdot Z_{C2},$$

$$\text{где } Z_{C2} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Входящие в формулы R и T для рассматриваемого случая будут:

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = -0.283; \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = 0.717.$$

Тогда $P_{\text{пад}} = 82.9$ Вт/м²; $P_{\text{отр}} = 6.6$ Вт/м²; $P_{\text{пр}} = 76.2$ Вт/м².

Ответ: модули усредненных значений векторов Пойнтинга падающей, отраженной и прошедшей волн равны $P_{\text{пад}} = 82.9 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{отр}} = 6.6 \text{ Вт/м}^2$; $P_{\text{пр}} = 76.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.4 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом $\varphi = 60^\circ$ на границу раздела с диэлектриком, имеющим $\varepsilon = 3.8$, $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности электрического поля падающей волны $E_{m.\text{пад}} = 0.4 \text{ В/м}$. Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн.

Решение.

По определению, характеристическое сопротивление среды есть коэффициент пропорциональности между $E_{m.x}$ и $H_{m.y}$:

$$Z_C = \frac{E_{m.x}}{H_{m.y}}.$$

Для отраженной волны $Z_C = Z_0 = 120\pi$, а для прошедшей:

$$Z_C = Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тогда:

$$H_{m.\text{отр}} = |R_{\perp}| \cdot \frac{E_{m.\text{пад}}}{Z_0};$$

$$H_{m.\text{пр}} = |T_{\perp}| \cdot \frac{E_{m.\text{пад}}}{Z_{C2}}.$$

В рассматриваемой задаче:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}};$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Окончательно получим:

$$H_{m.\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}; \quad H_{m.\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}.$$

Ответ: амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн равны: $H_{m.\text{отр}} = 5.9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$; $H_{m.\text{пр}} = 9.2 \cdot 10^{-4} \text{ А/м}$.

5.2.5 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 = 3.4$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2, имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения $\varphi = 45^\circ$, частота поля $f = 35 \text{ ГГц}$.

Решение.

По условию задачи угол полного внутреннего отражения:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3.4}}\right) = 32.8^\circ.$$

Поскольку угол падения $\varphi > \varphi_{ПВО}$, неоднородные плоские волны в среде 2 действительно возникают.

Из закона Снелля $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1}$ комплексный угол преломления будет

$\sin \psi = \sqrt{3.4} \sin \varphi = 1.3$, откуда получаем уравнение относительно параметра α ($\psi = 90^\circ + j\alpha$). Учтем, что $\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha$ и воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sin \psi = \operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = 1.3.$$

Это трансцендентное уравнение относительно α преобразуем к виду:

$$e^{-2\alpha} - 2.6e^{-\alpha} + 1 = 0.$$

Это есть квадратное уравнение относительно $e^{-\alpha}$, имеющее два корня x_1 и x_2 , из которых выбираем больший, что следует из конечности решения при $\alpha \rightarrow 0$. Таким образом $\alpha = 0.756$, или $\psi = \frac{\pi}{2} + j0.756$.

Коэффициент фазы однородной плоской волны в среде 2:

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c} = 733 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент фазы поверхностной волны:

$$\beta_{пов} = \beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha = 952.9 \text{ м}^{-1},$$

откуда фазовая скорость:

$$v_{ф.пов} = \frac{\omega}{\beta_{пов}} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Глубина проникновения поля в менее плотную среду:

$$d = \frac{1}{\beta_2 \cdot \operatorname{ch} \alpha} = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: фазовая скорость и глубина проникновения неоднородной плоской волны равны: $v_{ф.пов} = 2.308 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ и $d = 1.64 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

5.2.6 На идеально проводящую плоскость из воздуха по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности 230 Вт/м^2 . Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела.

Решение.

Для условий, приведённых в задаче, запишем выражения для вычисления величины среднего значения вектора Пойнтинга:

$$P_{CP} = \frac{H_{y.m}^2}{2} \cdot \operatorname{Re} Z_c.$$

Из этого выражения получим формулу для вычисления величины напряженности магнитного поля $H_{\text{пад}}$ падающей электромагнитной волны:

$$H_{\text{пад}} = H_{y.m} = \sqrt{\frac{2P_{\text{CP}}}{\text{Re } Z_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 230}{377}} = 1.105 \text{ А/м.}$$

Вычислим суммарную величину напряженности магнитного поля на границе раздела:

$$H_{\Sigma} = 2H_{\text{пад}} = 2 \cdot 1.105 = 2.21 \text{ А/м.}$$

Амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела находим по формуле:

$$j_{\text{пов.э}} = [\vec{i}_{\text{пов}} \times \vec{H}_{\Sigma}] = 1 \cdot 2.21 = 2.21 \text{ А/м.}$$

В последней формуле $\vec{i}_{\text{пов}}$ – это единичный вектор, совпадающий с направлением вектора перпендикулярного поверхности раздела. Взаимная ориентация векторов показана на рисунке 5.1.

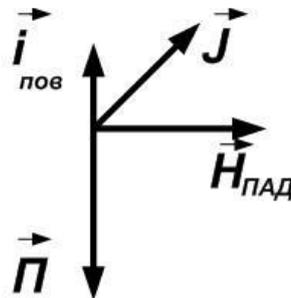


Рисунок 5.1 – Иллюстрация к задаче 5.2.6

Ответ: амплитуда вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела $j_{\text{пов.э}} = 2.21 \text{ А/м.}$

5.2.7 Плоская электромагнитная волна падает по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство с параметрами $\varepsilon = 9.5$, $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}} = 30 \text{ Вт/м}^2$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика.

Решение.

Запишем формулы для расчёта величин плотностей потока мощности плоской волны, прошедшей внутрь диэлектрика, и падающей плоской волны:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} \quad \text{и} \quad P_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{пад}}^2}{2Z_0}.$$

Затем начнём вычислять численные значения величин, входящих в эти формулы. Вначале для условий $\varepsilon = 9.5$ и $\mu = 1$, приведённых в задаче, определим величину характеристического сопротивления идеального диэлектрического полупространства, у которого удельная проводимость $\sigma = 0$:

$$Z_{c2} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{377}{\sqrt{9.5}} = 122.4 \text{ Ом},$$

напряженности электрического поля падающей волны:

$$E_{\text{пад}} = \sqrt{2Z_0\Pi_{\text{пад}}} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 30} = 150.4 \text{ В/м},$$

и коэффициента преломления (прохождения) плоской электромагнитной волны, падающей по нормали из воздуха на диэлектрическое полупространство:

$$T_E = \frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} = \frac{2}{1 + \sqrt{9.5}} = 0.49.$$

В заключение определим величины напряженности электрического поля прошедшей волны:

$$E_{\text{пр}} = T_E \cdot E_{\text{пад}} = 0.49 \cdot 150.4 = 73.7 \text{ В/м}$$

и плотности потока мощности плоской волны $\Pi_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика:

$$\Pi_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2}{2Z_c} = \frac{73.7^2}{2 \cdot 122.4} = 22.2 \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ: плотность потока мощности, прошедшей внутрь диэлектрика $\Pi_{\text{пр}} = 22.2 \text{ Вт/м}^2$.

5.2.8 На границу раздела между диэлектриком без потерь с параметрами $\varepsilon_2 = 4.6$, $\mu_2 = 1.1$ и вакуумом падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной.

Решение.

Представим падающую плоскую электромагнитную волну, имеющую круговую поляризацию как сумму двух волн линейной поляризации. У одной из этих волн вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения (параллельная поляризация), а у другой он перпендикулярен плоскости падения (перпендикулярная поляризация). Если поляризация параллельная, то при некотором значении угла падения, называемого углом Брюстера φ_B , коэффициент отражения R_E^{\parallel} равен нулю и отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера.

Приравняем выражение в виде дроби при $\varphi = \varphi_B$ для R_E^{\parallel} к нулю:

$$R_E^{\parallel} = \frac{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B]}{[Z_{c2} \cos \varphi_{nB} + Z_{c1} \cos \varphi_B]} = 0.$$

Эта дробь равна нулю, когда равен нулю её числитель:

$$Z_{c2} \cos \varphi_{nB} - Z_{c1} \cos \varphi_B = 0.$$

С другой стороны, по формуле Снелля (при $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$) имеем:

$$\frac{\sin \varphi_{nB}}{\sin \varphi_B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}.$$

Преобразуя два последних выражения, получим равенства:

$$\sin^2 \varphi_{нБ} = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2};$$

$$\cos^2 \varphi_{нБ} = \left(\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} \right)^2 \cos^2 \varphi_B = \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \mu_2} \cos^2 \varphi_B = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \cos^2 \varphi_B.$$

Сложение левых и правых частей этих равенств позволяет исключить угол преломления Брюстера $\varphi_{нБ}$ и получить уравнение с одним неизвестным – углом падения Брюстера φ_B :

$$1 = \frac{\sin^2 \varphi_B}{\varepsilon_2 \mu_2} + \frac{\varepsilon_2 \cos^2 \varphi_B}{\mu_2}.$$

Подставив в это уравнение:

$$\sin^2 \varphi_B = 1 - \cos^2 \varphi_B,$$

находим выражение для определения косинуса угла падения Брюстера, вычисляем величину $\cos \varphi_B$, а затем и сам угол Брюстера φ_B :

$$\varepsilon_2 \cdot \mu_2 = \sin^2 \varphi_B + \varepsilon_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_B; \quad \varepsilon_2 \cdot \mu_2 - 1 = \cos^2 \varphi_B (\varepsilon_2^2 - 1);$$

$$\cos \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2 - 1}{\varepsilon_2^2 - 1}} = \sqrt{\frac{4.6 \cdot 1.1 - 1}{4.6^2 - 1}} = 0.448; \quad \varphi_B = \arccos(0.448) = 63^\circ 20'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\varphi_B = 63^\circ 20'$.

5.2.9 Пластина толщиной $d = 1.4$ см выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами $\varepsilon = 2.1$, $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля $f = 12$ ГГц.

Решение.

Коэффициент отражения R плоской электромагнитной волны от пластины из диэлектрика без потерь при нормальном падении находится из выражения:

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon)tg\theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon)tg\theta}.$$

Вначале запишем выражение для угла θ и вычислим этот угол, а затем определим коэффициент отражения R и его модуль $|R|$:

$$\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_2} = \frac{2\pi l \sqrt{\epsilon \mu}}{\lambda} = \frac{2\pi l f \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \frac{6.28 \cdot 1.4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{2.1 \cdot 1}}{3 \cdot 10^8} = 5.096 \text{ рад} = 292.116^\circ = -67.854^\circ.$$

$$R = \frac{j(1-\epsilon)tg\theta}{2\sqrt{\epsilon} + j(1+\epsilon)tg\theta} = \frac{j(1-2.1)(-2.455)}{2\sqrt{2.1} + j(1+2.1) \cdot (-2.455)} =$$

$$= \frac{j2.7}{2.89 - j7.61} = \frac{-2.7}{7.61 + j2.89} = \frac{-2.7 \exp(-j \arctg 0.38)}{\sqrt{8.35 + 57.9}} = -0.33 \exp(-j20^\circ).$$

Модуль коэффициента отражения равен: $|R| = 0.33$.

Ответ: коэффициент отражения $R = -0.33 \exp(-j20^\circ)$, а его модуль $|R| = 0.33$.

5.2.10 Найти условия, при которых плоская электромагнитная волна будет распространяться путем отражений от двух безграничных пластин идеального металла, расположенных в вакууме параллельно друг другу на расстоянии a , если угол падения равен φ . Для каких значений λ_0 возможно распространение волны в такой структуре при заданном a ?

Решение. Рассмотрим задачу (рисунок 5.2), например, для электромагнитных волн, имеющих составляющую вектора напряженности электрического поля, параллельную направлению распространения волны z (для E -волн). Для этих волн, комплексная амплитуда определяется из выражения:

$$\vec{E} = 2E_m \sin \varphi \cos(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{x}_0 + j2E_m \cos \varphi \sin(gx) \exp(-jhz) \cdot \vec{z}_0,$$

где $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, $g = \beta_0 \cdot \cos \varphi$, $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

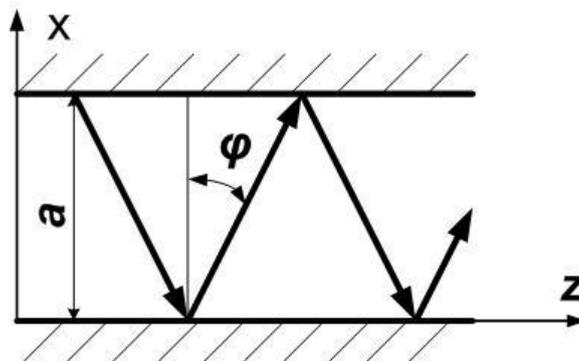


Рисунок 5.2 – Иллюстрация к задаче 5.2.10

Из выражения для \vec{E} находим E_z :

$$E_z = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(gx) \exp(-jhz).$$

Запишем граничные условия для безграничных пластин из идеального металла:

а) $E_z(x=0) = E_z = 0$;

$$\text{б) } E_z(x = a) = E_\tau = 0.$$

Из условия б) получим:

$$E_z(x = a) = 2E_m \cos \varphi \cdot \sin(ga) \exp(-jhz) = 0.$$

Откуда следует, что:

$$\sin(ga) = 0; \quad ga = \frac{2\pi \cos \varphi \cdot a}{\lambda_0} = n \cdot \pi,$$

где n может быть нулём или принимать любые целочисленные значения.

Из последнего выражения находим:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a}.$$

Поскольку $\cos \varphi \leq 1$, то и $\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1$, то есть:

$$\frac{n\lambda_0}{2a} \leq 1; \quad \lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}.$$

Ответ: $\lambda_0 \leq \frac{2\lambda a}{n}$, где n – целое число.

5.2.11 Определить скорость движения фазового фронта вдоль зазора между двумя параллельными бесконечными пластинами идеального металла (см. задачу 5.2.10). Изобразить зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 для нескольких значений n . Объяснить полученный результат.

Решение.

Выразим фазовую скорость v_Φ через продольное число $h = \beta_0 \cdot \sin \varphi$, которое играет (см. задачу 5.2.10) роль коэффициента фазы:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}.$$

При выводе выражения для v_Φ использовались соотношения $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ и

$$\frac{\omega}{\beta_0} = \frac{2\pi f \lambda_0}{2\pi} = \frac{fc}{f} = c.$$

Подставив в формулу для фазовой скорости v_Φ выражение для $\cos \varphi$, полученное в предыдущей задаче:

$$\cos \varphi = \frac{n\lambda_0}{2a},$$

находим зависимость фазовой скорости v_Φ от длины волны λ_0 :

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

Зависимости v_ϕ от λ_0 для $n = 1, n = 2, n = 3$ и $n = 4$ приведены на рисунке 5.3.

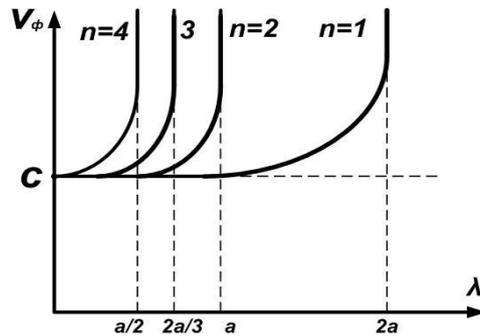


Рисунок 5.3 – Иллюстрация к задаче 5.2.11

Согласно двум последним приведенным формулам, с ростом длины волны λ_0 фазовая скорость v_ϕ и $\cos \phi$ также возрастают, а угол падения ϕ уменьшается. Когда длина волны λ_0 достигает некоторого значения, называемого критической длиной волны $\lambda_{кр}$, фазовая скорость v_ϕ устремляется к бесконечности, а угол падения ϕ становится равным нулю. Как видно из рисунка 5.3, при угле падения $\phi = 0$, когда $\lambda_0 \geq \lambda_{кр}$, распространение волны вдоль продольной оси z прекращается.

Критическая длина волны $\lambda_{кр}$ с ростом n уменьшается.

Ответ: скорость движения фазового фронта $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}}$.

5.2.12 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность плавленого кварца ($\epsilon \approx 3.75$). Определить угол падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

Решение.

Углом падения, при котором, осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную, является угол падения Брюстера ϕ_B , при котором коэффициент отражения R_E'' волн параллельной поляризации равен нулю и отражаются лишь волны перпендикулярной линейной поляризации. Таким образом, задача сводится к расчёту угла Брюстера. Для немагнитного диэлектрика без потерь этот угол определяют по формуле:

$$\phi_B = \arctg \sqrt{\epsilon} = \arctg \sqrt{3.75} = \arctg 1.936 = 62^\circ 50'.$$

Ответ: угол падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной: $\phi_B = 62^\circ 50'$.

5.2.13 Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума под углом ϕ на границу раздела со средой, показатель преломления

которой равен 1.531. Найти вид поляризации отраженной волны для углов падения 0° , 45° , $56^\circ 51'$.

Решение. При решении этой задачи используем формулы для определения коэффициентов отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения). Для немагнитного диэлектрика без потерь эти формулы имеют вид:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi};$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Величину относительной диэлектрической проницаемости для подстановки в эти формулы определяем через показатель преломления n :

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}; \quad \varepsilon = n^2 = 1.531^2 = 2.334.$$

1. Для $\varphi = 0^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}; \quad R_E^{\perp} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как для $\varphi = 0^\circ$ $R_E^{\parallel} = R_E^{\perp}$, то отраженная волна при этих условиях будет с круговой поляризацией.

2) Для $\varphi = 45^\circ$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.344 - 0.5} - 2.344 \cdot 0.707}{\sqrt{2.344 - 0.5} + 2.344 \cdot 0.707} = 0.092;$$

$$R_E^{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}} = \frac{0.797 - \sqrt{2.344 - 0.5}}{0.797 + \sqrt{2.344 - 0.5}} = -0.315.$$

Так как для $\varphi = 45^\circ$ $R_E^{\perp} \neq R_E^{\parallel}$, то отраженная волна при этих условиях будет иметь эллиптическую поляризацию с отношением длин осей эллипса:

$$\frac{R_E^{\perp}}{R_E^{\parallel}} = \frac{0.315}{0.092} = 3.42.$$

3. Для $\varphi = 56^\circ 51'$:

$$R_E^{\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cdot \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{2.344 - \sin^2 56^\circ 51'} - 2.344 \cdot \cos 56^\circ 51'}{\sqrt{2.344 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.344 \cdot \cos 56^\circ 51'} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{2.344 - \sin^2 56^\circ 51'} + 2.344 \cdot \cos 56^\circ 51'} = 0.$$

Поскольку для $\varphi = 56^{\circ}51'$ $R_E^{\parallel} = 0$, то отраженная плоская волна параллельной поляризации отсутствует, а угол $\varphi = 56^{\circ}51'$ является углом Брюстера. При этом отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

Ответ: $\varphi = 0^{\circ}$ – поляризация круговая; $\varphi = 45^{\circ}$ – поляризация эллиптическая с отношением осей 3.42; $\varphi = 56^{\circ}51'$ – отразятся лишь волны перпендикулярной линейной поляризации.

5.2.14 Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами $\varepsilon = 2.25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$, падает под углом 45° на границу раздела между средой и вакуумом. Определить коэффициент отражения для волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей.

Решение.

Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\varepsilon_{пл} = \varepsilon = 2.25$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot \varepsilon} = \sqrt{2.25} = 1.5.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{ПВО}$:

$$\varphi_{ПВО} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \arcsin \frac{1}{1.5} = \arcsin 0.666 = 41.18'.$$

Угол падения $\varphi = 45^{\circ} > \varphi_{ПВО} = 41.18'$. В этом случае преломлённой волны в общепринятом смысле не существует. Падающая волна полностью отражается внутрь среды. Коэффициенты отражения R_E^{\parallel} волн параллельной поляризации (вектор \vec{E} лежит в плоскости падения) и R_E^{\perp} волн перпендикулярной поляризации (вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения) остаются равными единице. Будет изменяться только фаза коэффициентов отражения:

$$R_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\};$$

$$R_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \arctg \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot \mu_2}{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \right)}}{\cos \varphi} \right] \right\}.$$

В нашем случае ($\varepsilon_1 = 2.25$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varphi = 45^{\circ}$) получим:

$$\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{2.25}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = -\exp(j73^\circ 40');$$

$$\dot{R}_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 45^\circ - \left(\frac{1 \cdot 1}{2.25 \cdot 1} \right)}}{\cos 45^\circ} \right] \right\} = \exp(j36^\circ 40').$$

Ответ: Коэффициенты отражения для волн, поляризованных в плоскости падения (R_E^{\parallel}) и перпендикулярно ей (R_E^{\perp}) равны: $\dot{R}_E^{\parallel} = -\exp(j73^\circ 40')$; $\dot{R}_E^{\perp} = \exp(j36^\circ 40')$.

5.2.15 Плоская электромагнитная волна распространяется в безграничной плоскопараллельной пластине диэлектрика с $\epsilon_{\text{пл}}$ под углом θ к границе раздела с вакуумом. При каких условиях волна не будет покидать пластину.

Решение.

Волна не будет покидать пластину, когда угол падения $\varphi = 90^\circ - \theta$ будет равным или больше угла полного внутреннего отражения $\varphi \geq \varphi_{\text{ПВО}}$. Вычислим показатель преломления n_1 для первой среды – пластины диэлектрика с $\epsilon = \epsilon_{\text{пл}}$ и $\mu = 1$:

$$n_1 = \sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{1 \cdot \epsilon_{\text{пл}}} = \sqrt{\epsilon_{\text{пл}}}.$$

Вычислим показатель преломления n_2 для второй среды – вакуума с $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$n_2 = \sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1.$$

Вычислим угол полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$:

$$\varphi_{\text{ПВО}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{пл}}}}.$$

Ответ: волна не будет покидать пластину при выполнении неравенств $90^\circ - \theta \geq \arcsin \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{пл}}}}$ или $\sin(90^\circ - \theta) > \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{пл}}}}$.

5.3 Задачи для самостоятельной работы

5.3.1 Плоская электромагнитная волна падает нормально из воздуха на границу раздела со средой, имеющей параметры: σ , ε , $\mu = 1$. Определить комплексные коэффициенты отражения \dot{R}_E и преломления \dot{T}_E на частоте f . Полагая, что амплитуда магнитной индукции падающей волны в плоскости $z = 0$, совпадающей с границей раздела, равна B_m , записать выражения для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны. Значения σ , ε , f и B_m приведены в таблице 5.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче 5.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	0.15	0.2	0.3	0.04	0.5	0.6	0.03	0.08	0.09	0.07
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
f , МГц	32	48	56	45	64	72	77	96	68	83
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B_m , Тл	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

5.3.2 Плоская электромагнитная волна с перпендикулярной поляризацией падает из воздуха под углом φ на границу раздела с диэлектриком, имеющим ε , $\mu = 1$. Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей волны равна H . Найти амплитуды векторов напряженности магнитного поля отраженной и преломленной волн. Значения φ , ε и H приведены в таблице 5.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.3 Найти фазовую скорость и глубину проникновения неоднородной плоской волны при падении плоской волны из среды 1 с параметрами $\varepsilon_1 \neq 1$, $\mu_1 = 1$ на границу раздела со средой 2 имеющей параметры $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 1$. Угол падения φ будет больше угла полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{ПВО}}$ в n раз, частота поля f . Значения n , ε и f приведены в таблице 5.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.2 – Исходные данные к задаче 5.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , рад	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3	0.8	0.9	0.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	32	18	26	15	24	12	47	36	28	13
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
H , А/м	2	1.8	1.6	1.5	1.4	1.2	0.4	0.6	0.8	1

Таблица 5.3 – Исходные данные к задаче 5.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , ГГц	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

5.3.4 Плоская электромагнитная волна падает по нормали к поверхности раздела из диэлектрического полупространства с параметрами ε_1 , $\mu = 1$ на диэлектрическое полупространство с параметрами ε_2 , $\mu = 1$. Плотность потока мощности плоской волны составляет $P_{\text{пад}}$. Найдите плотность потока мощности плоской волны $P_{\text{пр}}$, прошедшей внутрь диэлектрика через поверхность раздела. Значения ε_1 , ε_2 и $P_{\text{пад}}$ приведены в таблице 5.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.5 Пластина толщиной d выполнена из диэлектрика без потерь с параметрами ε , $\mu = 1$. Найдите коэффициент отражения плоской электромагнитной волны от этой пластины при нормальном падении, если частота поля f . Значения d , ε и f приведены в таблице 5.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.4 – Исходные данные к задаче 5.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_2	3.2	3.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{пад}}, \text{Вт/м}^2$	22	18	26	35	24	32	24	26	38	30

Таблица 5.5 – Исходные данные к задаче 5.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$d, \text{см}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	14	13	16	15	17	12.5	14	16	18	10

5.3.6 Из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ε_1, μ_1 в диэлектрическую область 2 без потерь с параметрами ε_2, μ_2 под углом к границе раздела падает плоская электромагнитная волна, имеющая круговую поляризацию. Определите значение угла падения, при котором поляризация отраженной волны будет линейной. Значения $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2$ и μ_2 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

5.3.7 На идеально проводящую плоскость из диэлектрической области 1 без потерь с параметрами ε_1, μ_1 по направлению нормали падает плоская электромагнитная волна со средним значением потока мощности $P_{\text{ср}}$. Вычислите амплитуду вектора плотности поверхностного электрического тока на границе раздела. Значения ε_1 и μ_1 приведены в таблице 5.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число. Значения $P_{\text{ср}}$ приведены в таблице 5.7.

Таблица 5.6 – Исходные данные к задаче 5.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_1	1.15	1.2	1.3	1.4	1.25	1.36	1.28	1.18	1.19	1.27
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε_2	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
μ_1	1.15	1.2	1.3	1.45	1.25	1.36	1.18	1.16	1.12	1.23
μ_2	1.1	1.25	1.35	1.4	1.15	1.26	1.28	1.28	1.19	1.1

Таблица 5.7 – Исходные данные к задаче 5.3.7

Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{CP}, \text{Вт/м}^2$	5.2	3.7	4.6	3.5	4.4	4.2	4.7	5.6	3.8	5.3

5.3.8 Амплитуда вектора напряженности магнитного поля падающей плоской электромагнитной волны равна H . Волна падает из вакуума по направлению нормали к поверхности раздела на границу раздела с металлом, параметры которого равны σ и $\mu = 1$. Вычислите амплитуду вектора напряженности электрического поля на поверхности раздела, если частота поля f . Значения H , σ и f приведены в таблице 5.8 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 5.8 – Исходные данные к задаче 5.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$H, \text{А/м}$	1.25	1.45	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	1.35	1.7
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\frac{\sigma}{10^7}, \text{См/м}$	3.2	1.8	2.6	3.5	2.4	4.2	4.7	3.6	2.8	3.3
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$f, \text{ГГц}$	4	3	6	5	7	2.5	1.4	1.6	1.8	2

6 РАДИОВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕДАХ

6.1 Основные формулы

Отношение плотностей тока смещения и тока проводимости в данной среде, выраженное в комплексной форме:

$$\frac{\dot{J}_{CM}}{\dot{J}_{PP}} = \frac{j\omega\varepsilon_a \dot{E}}{\sigma \dot{E}} = j \frac{\omega\varepsilon_a}{\sigma}. \quad (6.1)$$

Комплексная диэлектрическая проницаемость среды:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (6.2)$$

Углы падения φ , отражения φ_0 и преломления φ_n связаны следующими зависимостями:

$$\varphi = \varphi_0; \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (6.3)$$

где $n_1 = \frac{c}{v_1}$ – показатель преломления первой среды; $n_2 = \frac{c}{v_2}$ – показатель преломления второй среды.

Концентрация молекул в тропосфере N_M падает с увеличением высоты. Это приводит к снижению диэлектрической проницаемости воздуха ε , а значит, и его показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$. Показатель преломления воздуха в пределах тропосферы мало отличается от единицы при любых условиях. В инженерных расчетах применяют *индекс преломления* N :

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \quad (6.4)$$

В среднем значение N колеблется в пределах от 250 до 450, в зависимости от пункта наблюдения на поверхности Земли. При увеличении высоты h индекс преломления тропосферы падает практически по линейному закону со скоростью $\frac{dN}{dh} = -40 \text{ км}^{-1}$. Формула справедлива в интервале высот, не превышающих несколько километров.

Непостоянство показателя преломления с высотой вызывает искривление луча, это явление называется *атмосферной рефракцией*. Чертеж приведен на рисунке 6.1. Слой неоднородного воздуха представлен в виде двух соприкасающихся однородных слоев 1 и 2 с показателями преломления n_1 и n_2 причем $n_2 < n_1$. Углы падения φ и преломления φ_n связаны между собой формулой (6.3):

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_n} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.5)$$

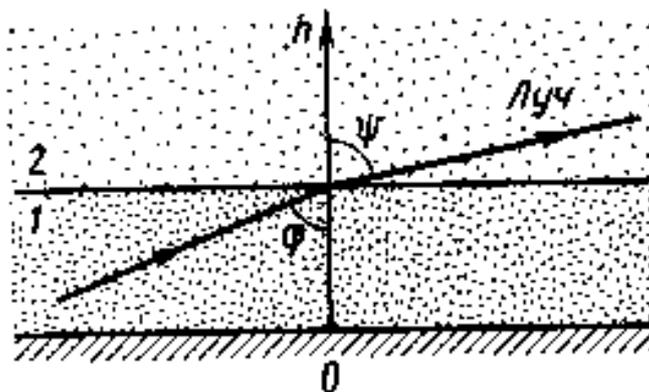


Рисунок 6.1 – Атмосферная рефракция

Легко видеть, что в рассматриваемом случае $\psi > \varphi$, т.е. луч в неоднородной по высоте тропосфере *искривляется в сторону земной поверхности*.

Относительная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления слоя ионосферы, имеющего электронную концентрацию N_e при частоте f , записываются в виде:

$$\varepsilon' = 1 - 80.8 \frac{N_e}{f^2} = 1 - \frac{f_{nl}}{f};$$

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{nl}}{f}\right)^2},$$
(6.6)

где $f_{nl} = 8.98\sqrt{N_e}$ – плазменная частота в Гц; N_e в эл/м³; f в Гц.

Полубесконечный плазменный слой полностью отражает все электромагнитные волны, частоты которых не превосходят критической частоты $f_{кр}$, численно совпадающей с плазменной частотой $f_{пл}$.

При падении плоской волны на полубесконечную плазму под произвольным углом φ , который отсчитывается от направления нормали к границе раздела плазма-воздух. В общем случае в плазме возникает преломленная волна, угол преломления ψ может быть найден из закона Снелля:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{пл}} = n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{nl}}{f}\right)^2}.$$
(6.7)

Если $f < f_{пл}$, то правая часть равенства (6.7) становится мнимой, это означает, что угол преломления $\varphi_{пл}$ оказывается комплексным. Вся мощность падающей волны при этом отражается от границы раздела назад в воздушную среду.

Если $f > f_{пл}$ (плазма прозрачна для электромагнитных волн), то преломленная волна в плазме принципиально может существовать. Однако следует учитывать, что показатель преломления плазмы n_2 является действительным числом, но всегда меньше единицы. Поэтому в данном случае ($\varphi_{пл} > \varphi$) возможно явление полного внутреннего отражения, когда $\varphi_{пл} = 90^\circ$, так как преломленная волна перестает быть обычной плоской волной [1]. Критическим углом па-

дения $\varphi_{кр}$ плоской волны на однородный плазменный слой называют такой угол падения φ , при котором возникает полное внутреннее отражение от границы раздела (рисунок 6.2). В соответствии с формулой (6.7):

$$\varphi_{кр} = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{f_{нл}}{f}\right)^2}. \quad (6.8)$$

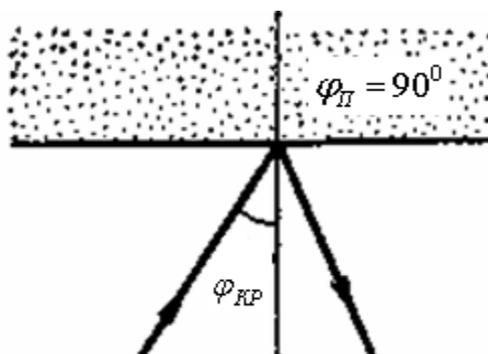


Рисунок 6.2 – Падение плоской волны на плазменное полупространство под критическим углом

Если $\varphi \geq \varphi_{кр}$, то падающая из воздуха плоская волна целиком отражается от полубесконечного плазменного слоя; если же $\varphi < \varphi_{кр}$, то падающая волна частично преломляется внутрь плазмы.

Минимально применимая волна:

$$\lambda_{\min} = \lambda_{кр} \cdot \sin \Delta, \quad (6.9)$$

где $\lambda_{кр}$ – критическая длина волны отражающего слоя; Δ – угол наклона луча к земной поверхности.

Максимально применимая частота (МПЧ) в соответствии с (6.7) удовлетворяет уравнению:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{f_{нл}}{f_{\max}}\right)^2},$$

откуда:

$$f_{\max} = \frac{f_{нл}}{\cos \varphi}.$$

При отсутствии потерь за счет среды распространения связь мощности, излучаемой на одном конце радиолинии ($P_{прд}$), и мощности, поступающую на вход приемника ($P_{пр}$) на другом конце радиолинии, выражается формулой идеальной радиосвязи:

$$P_{пр} = P_{прд} D_{прд} D_{пр} \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2, \quad (6.10)$$

где $D_{прд}$ – коэффициент направленного действия передающей антенны (КНД); $D_{пр}$ – коэффициент направленного действия приемной антенны, R – расстояние между передатчиком и приемником.

$$D_{np(np\delta)} = \frac{4\pi S_{np(np\delta)}}{\lambda^2}, \quad (6.11)$$

где $S_{np(np\delta)}$ – эффективная площадь раскрыва приемной (передающей) антенны.

В радиоканале на входе приемника неизбежно присутствует шум, эффективная мощность которого:

$$P_{ш} = kT_{ш}\Delta f, \quad (6.12)$$

где k – постоянная Больцмана, $T_{ш}$ – шумовая температура приемника, приведенная к его входу, Δf – полоса пропускания приемника.

Расстояние прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции (геометрический горизонт):

$$R_{ГОР} = 3.57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ км}, \quad (6.13)$$

где h_1, h_2 – высоты передающей и приемной антенн в м.

Расстояние прямой видимости при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт):

$$R_{РЕФ} = 4.12(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ км}. \quad (6.14)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Определить значение частоты, при котором в сухой почве с параметрами $\varepsilon = 5$, $\sigma = 10^{-3}$ См/м действительная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости становятся одинаковыми.

Решение.

В соответствие с формулой (6.2):

$$\operatorname{Re} \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon \varepsilon_0 = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{36\pi} = 4.42 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}.$$

Отсюда искомая частота:

$$\omega = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{10^{-3}}{4.42 \cdot 10^{-11}} = 2.26 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$$

или

$$f = 3.6 \text{ МГц}.$$

Таким образом, на волнах длинноволнового и средневолнового диапазонов сухая почва может рассматриваться как металлоподобная среда с потерями.

6.2.2 Известно, что на уровне земной поверхности значение индекса преломления $N_0 = 300$. Найти относительную диэлектрическую проницаемость воздуха ε на земле и на высоте $h = 3$ км.

Решение.

Формула для определения ε в соответствие с (6.4):

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{N}{10^6}\right)^2.$$

Индекс преломления на высоте 3 км:

$$N = N_0 - \left(\frac{dN}{dh} \right) h = 300 - 40 \cdot 3 = 180.$$

Подставляя в формулу для определения ε , находим, что:

$$\varepsilon(h = 0) = 1.0006 \quad \text{и} \quad \varepsilon(h = 3 \text{ км}) = 1.00036.$$

6.2.3 Оценить эффект атмосферной рефракции для конкретных условий, описанных в задаче 6.2.2. Реальный неоднородный слой заменить двумя однородными слоями с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1.0006$ и $\varepsilon_2 = 1.00036$. Положить угол падения $\varphi = 70^\circ$.

Решение.

Используя полученные в задаче 6.2.2 значения индексов преломления $N_0 = 300$ и $N = 180$, находим показатели преломления обоих слоев по формуле:

$$n = 10^{-6}N + 1,$$

откуда $n_1 = 1.0003$ и $n_2 = 1.00018$.

Подставив эти результаты в формулу (6.5), находим угол преломления:

$$\psi = \arcsin \left(\frac{\sin 70^\circ}{0.99958} \right) = 70^\circ 4'.$$

Если путь, проходимый волной в тропосфере достаточно протяжен (10 км), то угловая ошибка в 4' приведет к погрешности в определении координаты цели около 11 м.

6.2.4 Плоская волна падает на слой E ионосферы с электронной плотностью $N_e = 10^{11} \text{ м}^{-3}$ под углом $\varphi = 60^\circ$. Определить наибольшее значение частоты f_{\max} , при котором еще наблюдается полное внутреннее отражение от слоя.

Решение.

Для данного ионосферного слоя плазменная частота:

$$f_{pl} = 8.98 \sqrt{10^{11}} = 2.84 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 2.84 \text{ МГц}.$$

Заданный угол падения станет критическим на частоте f_{\max} , которая удовлетворяет уравнению:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2.84 \cdot 10^6}{f_{\max}} \right)^2}.$$

Решив это уравнение, получаем $f_{\max} = 5.68 \text{ МГц}$.

Вывод: при наклонном падении плазменный слой способен отражать колебания более высоких частот, чем при вертикальном зондировании.

6.2.5 Ионосферный слой F с концентрацией электронов $N_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$ располагается на высоте $h = 400 \text{ км}$ от поверхности Земли. Найти наивысшее значение частоты поля f_{\max} , которое еще обеспечивает полное отражение электромагнитной волны от этого слоя.

Решение.

В соответствие с рисунком 6.3, можно заметить, что угол падения волны на слой φ будет наибольшим в том случае, когда луч падающей волны AC направлен по касательной к земной поверхности, проведенной в точке A , где размещен передатчик. Так как $OA = OB = a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км (радиус Земли), то $BC = h = 400$ км (высота слоя F), а треугольник OAC прямоугольный, то:

$$\sin \varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{6370}{6770} = 0.941, \quad \varphi = 70^\circ.$$

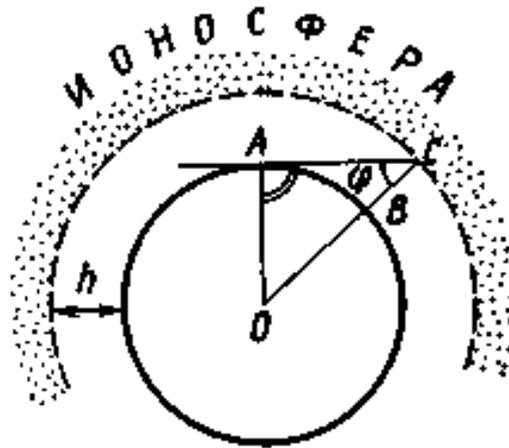


Рисунок 6.3 – Иллюстрация к задаче 6.2.5

Плазменная частота слоя $f_{\text{пл}} = 8.98$ МГц. Поэтому искомая частота есть корень уравнения:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{8.98}{f_{\text{max}}}\right)^2} = \sin \varphi = 0.941,$$

из которого находим, что $f_{\text{max}} = 27$ МГц. Все волны с более высокими частотами ни при каких условиях не могут отражаться от ионосферы.

6.2.6 Космическая линия связи имеет протяженность 400 км. Мощность передатчика 80 Вт, длина волны 3 см. Антенны передатчика и приемника идентичны и представляют собой параболические зеркала диаметром 1 м. Определить мощность, поступающую на вход приемника.

Решение.

Геометрическая площадь каждой антенны $S = 0.785 \text{ м}^2$, эффективная площадь $S_{\text{эф}} = 0.54S = 0.424 \text{ м}^2$. В соответствии с (6.11) значение КНД каждой антенны:

$$D = \frac{12.56 \cdot 0.424}{0.03^2} = 5900.$$

Подставив полученные цифры в (6.10), получим мощность на входе приемника радиолинии $P_{\text{пр}} = 10^{-9} \text{ Вт}$.

6.2.7 Космическая радиолиния снабжена антеннами и передатчиком, описанными в условиях задачи 6.2.6, используется приемник с шумовой температурой 150 К. Линия предназначена для передачи телевизионного изображения среднего качества и имеет полосу пропускания шириной 4 МГц. Вычислить длину трассы R , при которой мощность принятого сигнала в 10 раз превышает

мощность шума, т.е. отношение сигнал/шум $C_{\text{с/ш}} = \frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{ш}}} = 10$.

Решение.

В рассматриваемой системе мощность шума, приведенная ко входу приемника:

$$P_{\text{ш}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 150 \cdot 4 \cdot 10^6 = 8.28 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}.$$

Чтобы реализовать заданное отношение сигнал/шум, мощность принятого сигнала приемником $P_{\text{пр}}$ должна составить $8.28 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}$.

Уравнение идеальной радиосвязи (6.10) можно разрешить относительно искомой длины трассы R и получить:

$$R = \frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{P_{\text{пр}}}{P_{\text{прд}} D_{\text{пр}} D_{\text{прд}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив в формулу соответствующие значения параметров, находим, что $R = 4.38 \cdot 10^5 \text{ км}$. Рассматриваемая радиолиния способна обеспечить передачу телевизионных сигналов в пределах орбиты Луны.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

6.3.1 Определить отношение плотности тока смещения к плотности тока проводимости в морской воде ($\epsilon_a = 80\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 8 \text{ См/м}$) для волн с частотами $f = 10^4$; 10^6 ; 10^8 Гц .

6.3.2 Сравните отношения плотностей токов смещения и проводимости в морской воде ($\epsilon_a = 80\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 8 \text{ См/м}$) и сухой почве ($\epsilon_a = 4\epsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0.001 \text{ См/м}$) при частоте $f = 10^8 \text{ Гц}$.

6.3.3 Электромагнитные волны с амплитудой напряженности электрического поля $E_{\text{т.пад}} = 1 \text{ мВ/м}$, распространяясь в диэлектрике ($\epsilon = 2.5$, $\mu = \mu_0$, $\sigma =$

0), падают на плоскую поверхность идеального проводника. Определить максимальные амплитуды напряженностей полей.

6.3.4 Выразить комплексную относительную диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}$ через длину волны λ , измеряемую в метрах.

6.3.5 Для частоты $f = 600$ МГц определить комплексную относительную диэлектрическую проницаемость среды $\tilde{\epsilon}$, имеющую относительную проницаемость $\epsilon = 50$ и удельную проводимость $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ См/м. Каково соотношение между токами смещения и проводимости в данной среде?

6.3.6 Покажите, что сухая почва на частоте 300 МГц может рассматриваться как диэлектрическая среда с потерями.

6.3.7 Определить критическую длину волны слоя ионосферы с электронной концентрацией $N_e = 2.5 \cdot 10^9$ м⁻³.

6.3.8 Слой ионосферы имеет концентрацию электронов $N_e = 1.5 \cdot 10^{12}$ м⁻³. Каковы показатели преломления ионосферы n для частот $f = 2$ МГц и 7 МГц?

6.3.9 Какой электронной концентрации ионизированного слоя соответствует критическая длина волны 30 м?

6.3.10 На слой ионосферы F_2 с критической длиной волны $\lambda_{кр} = 30$ м падают электромагнитные волны под различными углами. Определите минимально применимую длину волны λ_{min} при отвесном падении ($\Delta = 90^\circ$) и при углах наклона лучей $\Delta = 60^\circ, 30^\circ, 10^\circ$.

6.3.11 Рассмотрите задачу об атмосферной рефракции в плоскослоистой среде, образованной соприкасающимися слоями без потерь толщиной d каждый. Слои имеют убывающие по высоте показатели преломления $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$. Известным считается угол падения на первый слой из вакуума.

6.3.12 На полубесконечную плазменную среду падает плоская электромагнитная волна с частотой, в 1.5 раза превышающей плазменную частоту. Найдите значение критического угла падения на такую среду.

6.3.13 Передающий конец космической радиолинии снабжен передатчиком мощностью 10 Вт и зеркальной параболической антенной с площадью 100 м². Аналогичная по конструкции приемная антенна имеет площадь 30 м². Рабочая длина волны 7.5 см. Приемник с полосой пропускания 1 МГц имеет шумовую температуру 120 К. Определите предельную длину радиолинии, при которой отношение сигнал/шум на входе приемника будет не ниже 10 дБ.

6.3.14 На сколько сократится длина линии, рассмотренной в задаче 6.3.13, если полосу пропускания приемника расширить до 10 МГц?

6.3.15 Спроектируйте линию КВ-связи длиной 1200 км, работающую за счет отражения радиоволн от слоя F ионосферы. Концентрация электронов в слое $1.5 \cdot 10^{12}$ м⁻³, высота слоя 260 км.

6.3.16 Найдите предельную длину трассы с прямой видимостью между антенной Останкинского телецентра ($h = 500$ м) и антенной коллективного приема телевидения, расположенной на крыше жилого дома ($h = 40$ м).

6.3.17 Передающая и приемная антенны имеют высоты $h_1 = h_2 = 10$ м. Определить расстояние R прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции и при наличии нормальной атмосферной рефракции.

6.3.18 Определить расстояние прямой видимости при отсутствии атмосферной рефракции и наличии нормальной атмосферной рефракции, если высота передающей антенны $h_1 = 100$ м, а приемной – $h_2 = 10$ м.

6.3.19 Высота расположения передающей телевизионной антенны равна h_1 [м], расстояние между телецентром и пунктом приема равно R [км]. Определите необходимую высоту расположения приемной антенны для обеспечения приема телевизионного сигнала в случаях отсутствия и присутствия атмосферной рефракции.

Значения h_1 и R приведены в таблице 6.1 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 6.1 – Исходные данные к задаче 6.3.19

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_1 , м	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , км	40	43	46	49	52	55	58	62	66	70

6.3.20 Определить электронную концентрацию ионосферного слоя N_e [м^{-3}], при которой наблюдается отражение волны при зондировании на частоте f [МГц] при угле падения φ [°].

Значения f и φ приведены в таблице 6.2 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

6.3.21 Какова максимально применимая частота (МПЧ) при зондировании слоя ионосферы с электронной концентрацией N_e [м^{-3}] при угле падения луча φ [°].

Значения N_e [м^{-3}] и φ приведены в таблице 6.3 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

6.3.22 Передающий конец космической радиолинии снабжен параболической антенной площадью 400 м^2 . Приемная параболическая антенна имеет площадь 36 м^2 . Рабочая длина волны равна 10 см. Мощность передатчика составляет 10 Вт. Определите предельную длину радиолинии, при которой отношение сигнал/шум на входе приемника будет не ниже 10 дБ, если приемник имеет полосу пропускания Δf , шумовую температуру T .

Значения Δf [МГц] и T [К] приведены в таблице 6.4 и зависят от номера варианта, представляющего двухзначное число.

Таблица 6.2 – Исходные данные к задаче 6.3.20

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
f , МГц	0.1	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	8.5
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , °	0	9	18	27	38	45	54	63	72	80

Таблица 6.3 – Исходные данные к задаче 6.3.21

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
N_e , м ⁻³	10^8	$5 \cdot 10^8$	10^9	$5 \cdot 10^9$	10^{10}	$5 \cdot 10^{10}$	10^{11}	$5 \cdot 10^{11}$	10^{12}	$2 \cdot 10^{12}$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
φ , °	80	72	63	54	45	36	27	18	9	0

Таблица 6.4 – Исходные данные к задаче 6.3.22

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Δf , МГц	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
T , К	200	180	160	140	135	130	125	120	115	110

7 ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН РАЗЛИЧНЫХ ДИАПАЗОНОВ

7.1 Основные формулы

В свободном пространстве ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$) амплитуда напряженности электрического поля в точке наблюдения (точке приема):

$$E_{0\max} = \frac{\sqrt{60G_1P_1'}}{r}, \quad (7.1)$$

где G_1 – коэффициент усиления передающей антенны относительно изотропного излучателя; P_1' – мощность, подводимая к передающей антенне; R – расстояние от точки передачи до точки приема.

При расчете радиолиний в диапазоне сверхдлинных (СДВ), длинных (ДВ), средних (СВ) и коротких волн пользуются не амплитудным, а действующим значением напряженности поля, которое в условиях свободного пространства (7.1):

$$E_{0д} = \frac{E_{0\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30G_1P_1'}}{R}. \quad (7.2)$$

Если к вертикальному электрическому вибратору, расположенному на идеально проводящей плоскости ($\sigma = \infty$), подвести такую же мощность, как и в случае его расположения в свободном пространстве, то за счет распределения излученной мощности только в верхнем полупространстве плотность потока мощности возрастет в 2 раза, а напряженность поля в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со свободным пространством, т.е. $E_{\inftyд} = \sqrt{2}E_{0д}$ или с учетом (7.2):

$$E_{\inftyд} = \frac{\sqrt{60G_1P_1'}}{R} \quad (7.3)$$

Сверхдлинные и длинные волны до расстояний 300...400 км распространяются преимущественно как поверхностные. При таких расстояниях действующее значение напряженности поля, создаваемое вертикальным электрическим вибратором, установленным на Земле, можно вычислять с помощью формулы:

$$E_{з.д} = E_{\inftyд} \cdot V_{з.д}(\rho), \quad (7.4)$$

где $E_{\inftyд}$ – действующее значение напряженности поля над идеально проводящей плоскостью; $V_{з.д}(\rho)$ – модуль множителя ослабления, показывающий во сколько раз напряженность поля над реальной Землей меньше напряженности поля над идеально проводящей плоскостью, при прочих равных условиях. Если E выразить в мВ/м, P_1' в кВт, R в км, то формула (7.4) приобретает следующий вид:

$$E_{з.д} = \frac{245\sqrt{P_1' \cdot G_1}}{R} V_{з.д}(\rho) \text{ [мВ/м]}. \quad (7.5)$$

Формула для множителя ослабления $V_{з.д}(\rho)$ без вывода дается в [10]:

$$V_{3M}(\rho) = \left| 1 - j \cdot \sqrt{\pi \rho} e^{-\rho} - 2e^{-\rho} \sqrt{\rho} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{-x^2} dx \right|, \quad (7.6)$$

где ρ – параметр, называемый численным расстоянием (безразмерная величина):

$$2\rho \approx \frac{\pi R}{\lambda \sqrt{\varepsilon_{3M}^2 + (60\lambda\sigma_{3M})^2}}. \quad (7.7)$$

Формула (7.4), в которой $V_{3M}(\rho)$ определяется формулой (7.6) с учетом формулы (7.7) называется формулой Шулейкина – Ван-дер-Поля. Кривые зависимости множителя ослабления V_{3M} от численного расстояния ρ приведены на рисунке 7.1.

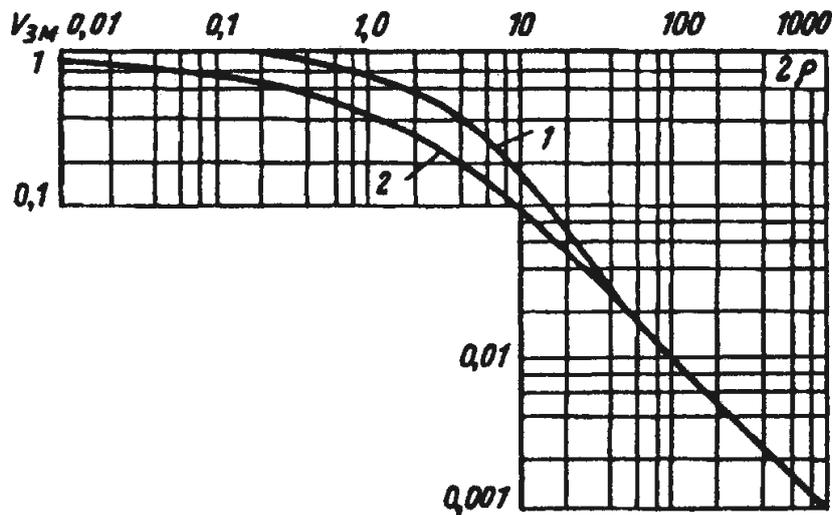


Рисунок 7.1 – Зависимость множителя ослабления V_{3M} от численного расстояния ρ

Кривая 1 относится к случаю $60\lambda\sigma_{3M} \gg \varepsilon_{3M}$, что характерно для длинных (сверхдлинных волн) и хорошо проводящих почв. Кривая 2 соответствует $60\lambda\sigma_{3M} \ll \varepsilon_{3M}$, что справедливо для коротких волн и плохо проводящих волн.

Сравнение расчетов по формуле Шулейкина – Ван-дер-Поля, справедливой для плоской Земли, и точной дифракционной формулы Фока показывает, что приближение плоской Земли справедливо для расстояний:

$$R < 7 \cdot 10^3 \cdot \lambda^{1/3}. \quad (7.8)$$

При этом ошибка вычисления напряженности поля, связанная с учетом сферичности Земли, не превышает 10%.

На расстояниях свыше 400 км в диапазонах СДВ и ДВ необходимо учитывать влияние отраженной от ионосферы волны. Расчет напряженности поля в этом случае сводится к решению распространения радиоволн в сферическом волноводе, образованном поверхностью земли и нижней границей ионосферы. Так как формулы, полученные в результате строго решения, сложны, то инже-

нерный расчет напряженности поля в диапазоне СДВ и ДВ производят по эмпирическим формулам. Обычно ведут расчеты по формуле Остина:

$$E_D \left[\frac{мВ}{м} \right] = \frac{300\sqrt{P}}{R} \cdot V_{СФ.ЗМ} = \frac{120\pi \cdot h_D \cdot I_D}{\lambda \cdot R} \cdot V_{СФ.ЗМ}, \quad (7.9)$$

где P – излучаемая мощность, [кВт]; R – расстояние между передатчиком и пунктом приема, [км]; h_D – действующая высота антенны, [м]; I_D – действующее значение тока у основания антенны, [А]; λ – длина волны, [м]; $V_{СФ.ЗМ}$ – функция ослабления для сферической Земли, которая определяется выражением:

$$V_{СФ.ЗМ} = \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot e^{-\frac{0.0014R}{\lambda^{0.6}}}. \quad (7.10)$$

В (7.10) λ и R выражены в км, а центральный угол $\theta [rad] = \frac{R}{a_{ЗМ}}$, $a_{ЗМ}$ – радиус Земли.

диус Земли.

Для расчета напряженности поля средних волн днем (напряженность поля поверхностной волны) широко применяются графики Международного Консультативного Комитета по Радио (МККР), которые представляют результат расчета напряженности поля по дифракционным формулам для разных проводимостей подстилающей поверхности. На рисунке 7.2 приведены такие графики для почвы с параметрами: $\epsilon_{ЗМ} = 4$, $\sigma_{ЗМ} = 10^{-3}$ См/м.

Значения напряженности поля, приведенные на графиках, соответствуют излученной мощности 1 кВт и короткой вертикальной передающей антенне (элементарному вибратору), стоящей на поверхности идеальной Земли. Реально напряженность поля, определенную из графика, следует умножить на $\sqrt{G_1 P_1'}$, где P_1' – мощность, подводимая к передающей антенне, [кВт]; G_1 – коэффициент усиления передающей антенны в направлении вдоль Земли, вычисленный по отношению к элементарному электрическому вибратору, расположенному на идеальной Земле.

В ночное время кроме земной волны необходимо учитывать наличие волны, отраженной от ионосферы. Напряженность поля ионосферной волны $E_{и}$ [мкВ/м] рекомендуют определять, используя результаты статистической обработки измерений, проведенных на Европейском континенте [10]:

$$E_{и} = \frac{10233}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{G_1 P_1'} \cdot \exp\left(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda^{-0.26} \cdot R\right), \quad (7.11)$$

где P_1' выражена в киловаттах, а все длины – в километрах.

В [10] приводятся многочисленные графики, позволяющие внести поправку на время суток, уровень солнечной активности, ДН антенны и др.

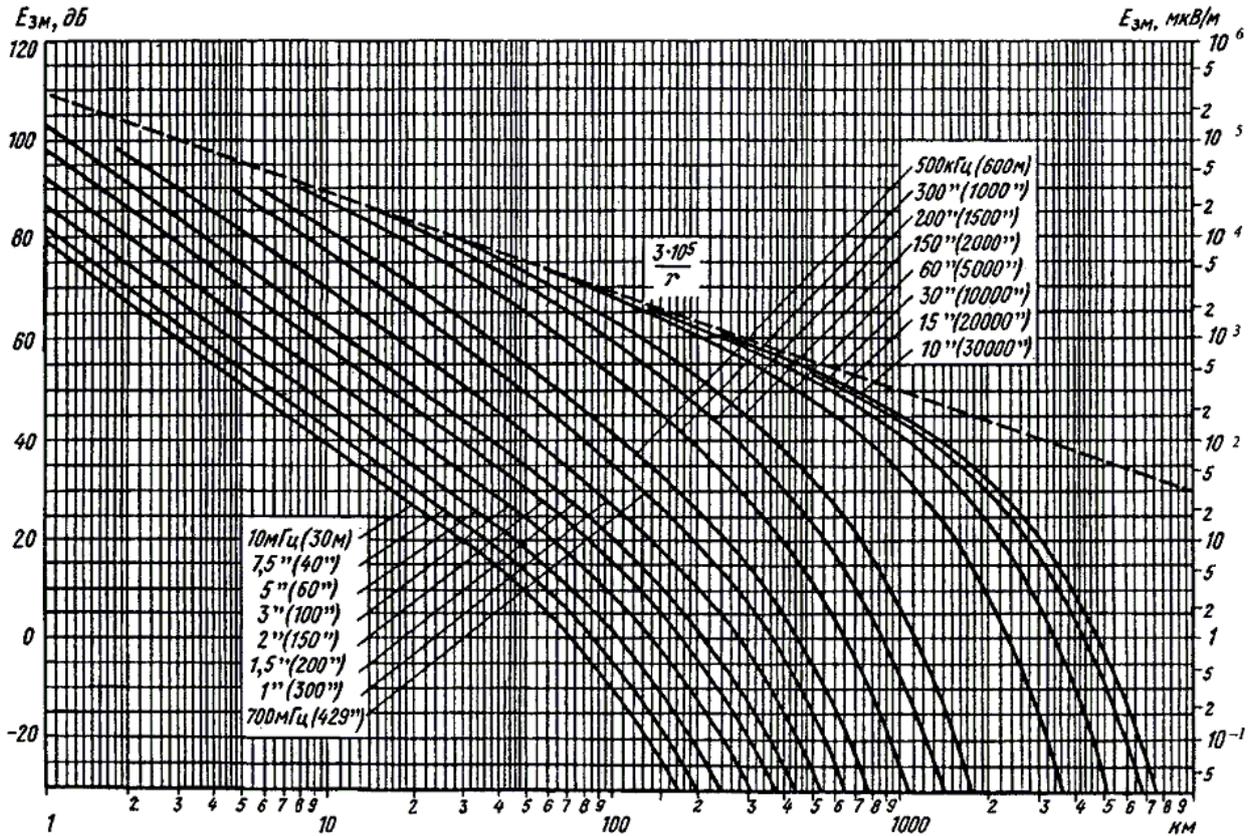


Рисунок 7.2 – Зависимость напряженности поля для почвы

Ослабление поля на коротковолновых (КВ) радиоприемах вызвано расходимостью волны, поглощением в ионосфере, отражением от поверхности Земли и другими причинами.

Одним из основных методов расчета напряженности поля является метод, предложенный А.Н. Казанцевым [10]. Наибольшую точность этот метод обеспечивает при расчете трасс, проходящих в средних широтах.

В соответствии с указанным методом действующее значение напряженности поля в точке приема:

$$E_D = \frac{\sqrt{30P_1'G_1(\Delta)}}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+R_{OTR}}{2} \cdot R_{OTR}^{n-1} \cdot \exp(-\Gamma_{II}). \quad (7.12)$$

Поясним структуру этой формулы.

Первый множитель соответствует полю в свободном пространстве. Здесь P_1' – мощность, подводимая к передающей антенне; $G_1(\Delta)$ – коэффициент усиления передающей антенны относительно изотропного излучателя с учетом влияния Земли, т.е. $G_1(\Delta) = G_{1max}F^2(\Delta)$, где $F(\Delta)$ – нормированная ДН передающей антенны в вертикальной плоскости с учетом влияния Земли; Δ – угол возвышения траектории волны; R – путь, проходимый волной от точки передачи до точки приема.

Второй множитель $\left(\frac{1}{2}\right)$ соответствует уменьшению поля (или мощности) на 6 дБ. Из них 3 дБ А.Н. Казанцев относит за счет того, что приемная антенна

имеет линейную поляризацию, а волна в процессе отражения от ионосферы приобретает эллиптическую (а иногда и круговую) поляризацию. Другие 3 дБ обусловлены тем, что волна в ионосфере расщепляется на обыкновенную и необыкновенную; необыкновенная составляющая сильно поглощается, а для приема оказывается полезной только половина излученной мощности.

Третий множитель $\frac{1+R_{\text{отр}}}{2}$ ($R_{\text{отр}}$ – коэффициент отражения) учитывает влияние отраженной от Земли волны в месте расположения приемной антенны. Если бы приемная антенна B (рисунок 7.3) находилась на оптимальной высоте h_2 над земной поверхностью, то волны 1 и 2 имели бы одинаковую фазу в точке приема и результирующее поле (при горизонтальной поляризации) имело бы значение $(1 + R_{\text{отр}})E_0$, где E_0 – поле прямой волны 1. В реальных условиях вследствие колебаний высоты отражающего слоя обеспечить оптимальное сложение волн 1 и 2 не удастся, и А.Н. Казанцев берет среднее значение коэффициента, учитывающего влияние отраженной от Земли волны, а именно $\frac{1+R_{\text{отр}}}{2}$. Обычно выбирают среднее значение $R_{\text{отр}}$ порядка 0.8.

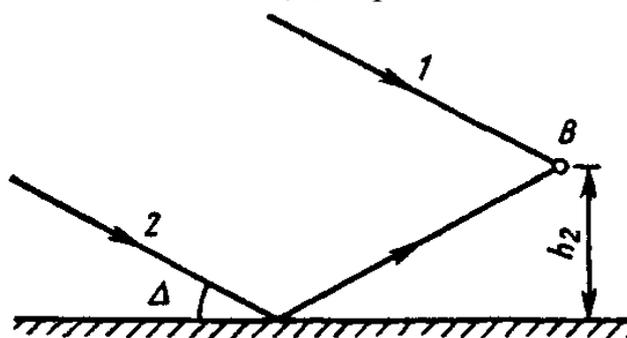


Рисунок 7.3 – Влияние отраженной от Земли волны в месте расположения приемной антенны

Четвертый множитель $R_{\text{отр}}^{n-1}$ учитывает дополнительные потери при отражении от Земли в промежуточных точках в случае многоскачкового распространения. Здесь n – число отражений от ионосферы. На односкачковых линиях (с одним отражением от ионосферы) $n = 1$ и $R_{\text{отр}}^{n-1} = 1$.

Наконец, пятый множитель $\exp(-\Gamma_{\text{и}})$ учитывает поглощение в ионосфере.

Полный интегральный коэффициент поглощения $\Gamma_{\text{и}}$ определяется как сумма поглощения в тех слоях ионосферы, которые волна проходит (неотклоняющее поглощение), и поглощения в отражающем слое ионосферы (отклоняющее поглощение). В литературе имеется обширная информация для определения $\Gamma_{\text{и}}$ в зависимости от различных параметров радиотрассы.

При проектировании радиолинии необходимо учитывать не только диапозонные особенности распространения радиоволн, но шумовые характеристики радиотрасс и технические характеристики антенн, радиоприемных и радиопередающих устройств. В качестве примеров рассмотрим расчет космической радиолинии и наземной радиолинии декаметрового диапазона [11].

Первым шагом при проектировании космической системы радиосвязи является расчет радиолинии: спутниковый ретранслятор – наземная станция или абонентский терминал.

Исходными данными для такого расчета являются:

- протяженность линии радиотрассы – прямого луча – между антеннами спутника и наземной станцией, т.е. значения R ;
- выбор диапазона частот или длины волны λ ;
- выбор типа антенн и определение их параметров (эффективной площади антенны S_A , коэффициента усиления антенны $G = \frac{4\pi S_A}{\lambda^2}$);
- определение затухания в атмосфере Земли $V_{\text{ТР}}$ с помощью таблиц или графиков в зависимости от длины волны λ ;
- определение затухания в антенно-фидерных трактах спутниковой и наземной радиостанций $V_{\text{Фид}}$;
- определение требуемой полосы пропускания радиоприемника по промежуточной полосе $\Delta f_{\text{ПР}}$, исходя из заданной скорости передачи сообщения, выбранного метода модуляции и нестабильности частоты сигналов несущей и гетеродина;
- определение требуемого соотношения сигнал-шум на входе блока обработки сигнала радиоприемника $C_{\text{С/Ш}}$;
- расчет реальной чувствительности радиоприемника.

Реальная чувствительность радиоприемника, определяемая мощностью радиосигнала на его входе для получения требуемого соотношения сигнал-шум $C_{\text{С/Ш}}$ на выходе линейной части приемника с учетом шумов канала радиосвязи и собственных шумов устройства, определяется в виде [11]:

$$P_{\text{ПРМ}} = kT_0 \Delta f C_{\text{С/Ш}} \frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0} \text{ [Вт]}, \quad (7.13)$$

где $kT_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц – спектральная плотность шума при стандартной температуре $T_0 = 290$ К;

$T_{\text{ШЛ}}$ – эквивалентная температура шума линии связи;

$T_{\text{Ш.ПРМ}}$ – эквивалентная температура шума приемника, пересчитанная к его входу;

$\Delta f_{\text{ПР}}$ – полоса пропускания тракта промежуточной частоты до блока обработки сигнала [Гц].

Та же чувствительность приемника, выпаженная в децибелах относительно мощности в 1 Вт:

$$P_{\text{ПРМ.дБ}} = 10 \lg P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10 \lg \Delta f [\text{кГц}] + 10 \lg C_{\text{С/Ш}} + 10 \lg \left(\frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0} \right) \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.14)$$

В формулах (7.13) и (7.14) значение температуры шумов канала радиосвязи $T_{\text{ШЛ}}(f)$, обусловленной радиоизлучением Галактики и атмосферным поглощением, можно определить с помощью графиков, приведенных на рисунке 7.4.

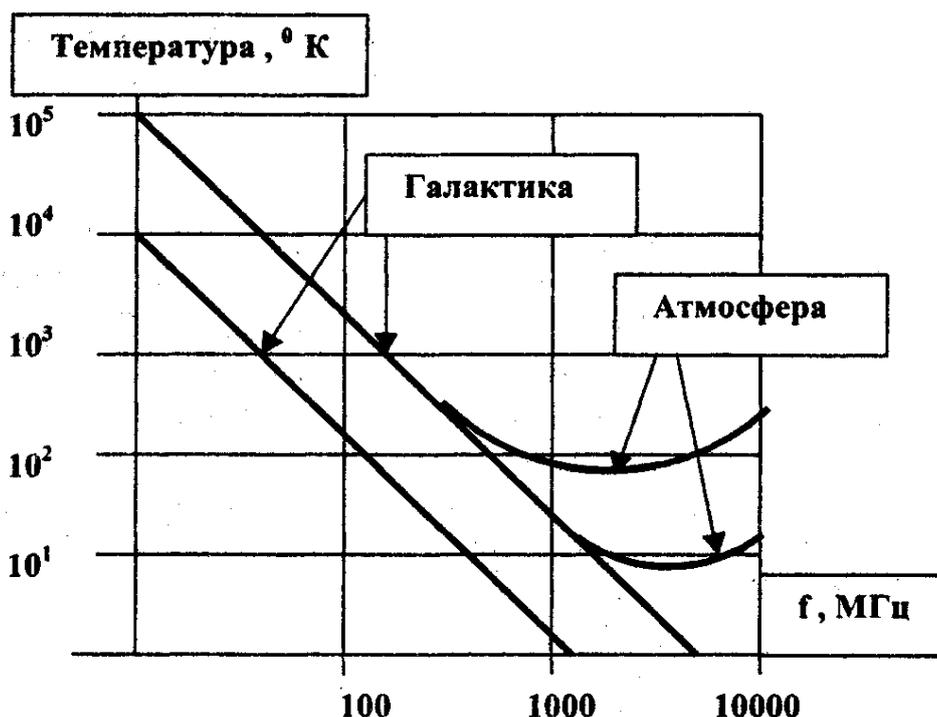


Рисунок 7.4 – Значение температуры шумов канала радиосвязи

Конечная цель расчета радиолинии состоит в определении мощности радиопередатчика, обеспечивающей устойчивую радиосвязь при передаче требуемого объема информации с заданной скоростью.

Предположим, что точечный источник равномерно излучает сигнал мощностью $P_{\text{изл}}$ по всей сфере. Тогда на расстоянии R на площадке размером S_A мощность сигнала составит:

$$P_C = \frac{P_{\text{изл}} S_A}{4\pi R^2}. \quad (7.15)$$

Заменив P_C на реальную чувствительность радиоприемника $P_{\text{прм}}$, а $P_{\text{изл}}$ на произведение $P_{\text{пер}} G_{\text{ант}}$, получим из (7.15) с учетом коэффициентов потерь в тропосфере и фидере ($B_{\text{тр}}$ и $B_{\text{фид}}$) следующую формулу по определению требуемой мощности радиопередатчика:

$$P_{\text{пер}} = \frac{4\pi R^2 P_{\text{прм}} B_{\text{тр}} B_{\text{фид}}}{G_{\text{пер}} S_{\text{прм}}}, \quad (7.16)$$

где $S_{\text{прм}}$ – площадь приемной антенны.

При неизменной площади передающей ($S_{\text{пер}}$) и приемной ($S_{\text{прм}}$) антенн (с учетом $G_A = \frac{4\pi S_A}{\lambda^2}$) преобразуем (7.16) к виду:

$$P_{\text{пер}} = \frac{R^2 \lambda^2 P_{\text{прм}} B_{\text{тр}} B_{\text{фид}}}{S_{\text{пер}} S_{\text{прм}}}. \quad (7.17)$$

При неизменном значении коэффициентов усиления антенн формула (7.17) примет вид:

$$P_{\text{ПЕР}} = \frac{(4\pi)^2 R^2 P_{\text{ПРМ}} B_{\text{ТР}} B_{\text{ФИД}}}{\lambda^2 G_{\text{ПЕР}} G_{\text{ПРМ}}}. \quad (7.18)$$

Для проведения расчетов значения параметров, входящих в формулы (7.16) – (7.18), целесообразнее выразить в децибелах. Тогда, например, формула (7.16) примет вид:

$$P_{\text{ПЕР.дБ}} = 10\lg P_{\text{ПЕР}} = 71 + 20\lg R[\text{км}] + 10\lg P_{\text{ПРМ}} + 10\lg(B_{\text{ТР}} B_{\text{ФИД}}) - 10\lg G_{\text{ПЕР}} - 10\lg S_{\text{ПРМ}}. \quad (7.19)$$

Перепишем формулу чувствительности радиоприемника в децибелах относительно 1 Вт (7.14) в следующем виде:

$$P_{\text{ПРМ.дБ}} = 10\lg P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10\lg \Delta f[\text{кГц}] + 10\lg C_{\text{С/Ш}} + 10\lg K_T \text{ [дБ Вт]}, \quad (7.20)$$

где $K_T = \frac{T_{\text{ШЛ}} + T_{\text{Ш.ПРМ}}}{T_0}$ – реальный коэффициент шума (с учетом шума линии радиосвязи).

При работе в декаметровом (КВ) диапазоне волн и использовании в качестве антенн четвертьволновых вибраторов расчет проводится по методике, разработанной академиком Б.А. Введенским [11]. В основе такой методики лежат две формулы, позволяющие рассчитать линию УКВ радиосвязи не только в пределах прямой видимости, но и за линией радиогоризонта. Расстояние до линии радиогоризонта для идеальной модели Земли, т.е. шара радиусом 6370 км:

$$R_{\text{ГОР}} = 3.57(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \text{ [км]}, \quad (7.21)$$

где $h_1; h_2$ – высота поднятия антенн в пунктах приема и передачи сигнала [м].

Напряженность электрического поля в точке приема при четвертьволновом вертикальном вибраторе в месте излучения сигнала:

$$E = \frac{90 \cdot h_1 h_2 \sqrt{P_1}}{\lambda R^2 K_p K_3} \text{ [мкВ/м]}, \quad (7.22)$$

где P_1 – излучаемая мощность [Вт]; λ – длина волны [м]; R – протяженность радиолинии [км]; $K_p > 1$ – коэффициент дополнительных потерь, учитывающий затухание сигнала вдоль трассы распространения волны за счет атмосферы и разного рода препятствий – зданий и иных сооружений; K_3 – коэффициент загоризонтной радиосвязи.

Значение K_p определяется экспериментально для разных трасс распространения радиоволн при определенной частоте сигнала. Согласно проведенным измерениям в г. Москве при частоте 40 МГц значение K_p колеблется в пределах 5...10.

При использовании декаметрового диапазона волн можно выделить три зоны приема: ближнюю, среднюю и дальнюю.

Ближней будем называть зону приема в пределах прямой радиовидимости, т.е. в теоретической модели распространения радиоволн при $R \leq R_{\text{ГОР}}$.

В средней зоне, лежащей за линией радиогоризонта и ориентировочно ограниченной пределами $R_{\text{ГОР}} \leq R \leq (2...3)R_{\text{ГОР}}$, прием сигнала возможен за счет

явлений дифракции и рефракции, приводящих к искривлению луча и распространению поверхностной волны, огибающей Землю.

В дальней зоне, лежащей за пределами $R \gg R_{\text{ГОР}}$, прием сигнала возможен за счет пространственной волны и ионосферной рефракции, что позволяет удлинить трассу радиоприема до 3000...4000 км.

В радиосвязи декаметрового диапазона используются ближняя и средняя зоны приема, в загоризонтной радиолокации – средняя и дальняя. Следует иметь в виду, что деление зон приема на ближнюю и среднюю зоны в реальных условиях достаточно условно, поскольку в ближней зоне ($R \leq R_{\text{ГОР}}$) из-за рельефа местности и разного рода строений, особенно в условиях города, радиовидимость между пунктами связи может отсутствовать, а прием основываться на явлении дифракции, т.е. огибании поверхностной радиоволной препятствий. Будем, однако, для определенности считать, что в формуле (7.22) в ближней зоне, т.е. при $R \leq R_{\text{ГОР}}$, коэффициент $K_3 = 1$, а все дополнительные потери в радиотрассе учитывать за счет коэффициента K_p . В средней зоне, т.е. при $R_{\text{ГОР}} \leq R \leq (2...3)R_{\text{ГОР}}$, возникают дополнительные потери, учитываемые с помощью коэффициента загоризонтной радиосвязи:

$$K_3 = \left(\frac{R}{R_{\text{ГОР}}} \right)^n, \quad (7.23)$$

где $n > 1$ – показатель степени, зависящий от многих факторов, в том числе, рельефа местности, состояния атмосферы и частоты сигнала. Согласно экспериментальным данным для диапазона частот 30...40 МГц значение $n = 1.5...3$. Поскольку значение n возрастает с повышением частоты сигнала, то при загоризонтной радиосвязи более предпочтителен диапазон 27...58 МГц, чем 146...174 МГц.

При вертикальном четвертьволновом вибраторе в месте приема мощность сигнала на входе радиоприемника с входным сопротивлением 50 Ом [11]:

$$P_{\text{ПР}} = \left(\frac{E^2 \lambda^2}{800} \right) \cdot 10^{-12} \text{ [Вт]}. \quad (7.24)$$

Подставив (7.22) в (7.24), получим:

$$P_{\text{ПР}} = \frac{10P_1 h_1^2 h_2^2}{R^4 K_p^2 K_3^2} \cdot 10^{-12} \text{ [Вт]}. \quad (7.25)$$

Согласно (7.25) при антеннах – вертикальных четвертьволновых вибраторах на обоих концах радиолинии – мощность принимаемого сигнала не зависит от длины волны и с расстоянием уменьшается по закону $\frac{1}{R^4}$.

Выразим (7.25) в децибелах относительно уровня в 1 Вт:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -110 + 10 \cdot \lg P_1 + 20 \cdot \lg(h_1 h_2) - 40 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg K_p - 20 \cdot \lg K_3 \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.26)$$

В частности, при мощности $P_1 = 10$ Вт и $K_p = 10$ Вт из (7.26) имеем:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -120 + 20 \cdot \lg(h_1 h_2) - 40 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg K_3 \text{ [дБ Вт]}. \quad (7.27)$$

Значение $P_{\text{ПР.дБ}}$, вычисленное по (7.27), должно превышать реальную чувствительность приемника $U_{\text{ч. ПР}}$ [мкВ] при входном сопротивлении 50 Ом, определяемую как:

$$P_{\text{ч.ПР.дБ}} [\text{дБ Вт}] = -137 + 20 \cdot \lg U_{\text{ч.ПР}}. \quad (7.27, \text{a})$$

При чувствительности $U_{\text{ч.ПР}} = 1$ мкВ значение $P_{\text{ч.ПР.дБ}} [\text{дБ Вт}] = -137$ дБ Вт.

При чувствительности $U_{\text{ч.ПР}} = 0.1$ мкВ значение $P_{\text{ч.ПР.дБ}} [\text{дБ Вт}] = -157$ дБ Вт.

На линии радиогоризонта при $P_1 = 10$ Вт, $K_p = 10$ и $K_3 = 1$ из (7.27) с учетом (7.21) получим:

$$P_{\text{ПР.дБ}} = -142 + 40 \lg \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} [\text{дБ Вт}]. \quad (7.138)$$

При получении (7.28) использовано очевидное соотношение:

$$20 \cdot \lg(h_1 h_2) = 40 \cdot \lg \sqrt{h_1 h_2}.$$

Согласно (7.28), например, при $h_1 = 10$ м и $h_2 = 20$ м имеем: $P_{\text{ПР дБ}} = 131.3$ дБ Вт, т.е. уровень сигнала в точке приема $R_{\text{ГОР}} = 27.2$ км соответствует чувствительности приемника в 2 мкВ. Следовательно, при реально достижимой чувствительности радиоприемника 0.1 мкВ запас уровня сигнала в точке приема превышает 20 дБ. Такое превышение сигнала позволяет организовать радиосвязь не только в области до радиогоризонта, но и за его пределами. Как показали экспериментальные исследования, при частоте 40 МГц дальность линии радиосвязи превышает значение $R_{\text{ГОР}}$ в 2...4 раза, т.е. при умеренной высоте подъема антенн в 10...20 м может достигать 50... 100 км.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Найти действующее значение напряженности электрического поля, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 25$ кВт и коэффициентом усиления (коэффициентом направленного действия) 1.5 на расстоянии $R = 300$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне $\lambda = 3000$ м. Расчет поля произвести для случая распространения радиоволн над почвой с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м по формуле (7.5) и графику (рисунок 7.1).

Решение.

По формуле (7.7) вычисляем численное расстояние 2ρ :

$$2\rho \approx \frac{\pi \cdot r}{\lambda \sqrt{\varepsilon_{3M}^2 + (60\lambda \cdot \sigma_{3M})^2}} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^3 \sqrt{16 + 60^2 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0.01^2}} \approx 0.18.$$

Так как $60\sigma\lambda \gg \varepsilon$, то, воспользовавшись рисунком 7.1, находим $V_{3M}(\rho) \approx 0.95$. Действующее значение поля найдем по формуле (7.5):

$$E_{3M.Д} = \frac{245\sqrt{P'_1 \cdot G_1}}{R} \cdot V_{3M}(\rho) = \frac{245\sqrt{25 \cdot 1.5}}{300} \cdot 0.95 = 4.8 \text{ [мВ/м]}.$$

7.2.2 Вычислить напряженность поля на расстоянии $R = 2000$ км по данным задачи 7.2.1, приняв радиус Земли $a_{3M} = 6370$ км.

Решение.

Так как при распространении длинных (СДВ) волн в основном определяется потерями при отражении от ионосферы и почти не зависит от свойств земной поверхности, над которой распространяются волны, действующее значение напряженности поля определяем по формуле Остина (7.9).

Для этого находим центральный угол θ :

$$\theta_{РАД} \approx \frac{R}{a} = \frac{2000}{6370} = 0.314 \quad \text{или} \quad \theta \approx 18^\circ.$$

Находим множитель функции ослабления (7.10):

$$\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} = \sqrt{\frac{0.314}{0.309}} = 1.008.$$

Вычисляем второй множитель функции ослабления:

$$e^{-\frac{0.0014}{\lambda^{0.6}} \cdot R} = 0.16.$$

Затем находим $V_{СФ.3M} = 1.008 \cdot 0.16 \approx 0.16$.

Действующее значение напряженности поля находим по (7.9):

$$E_{Д} = \frac{300\sqrt{P}}{R} \cdot V_{СФ.3M} = \frac{300\sqrt{25}}{2000} \cdot 0.16 = 0.12 \text{ [мВ/м]}.$$

7.2.3 Найти действующее значение напряженности электрического поля в ночные часы, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 12$ кВт и коэффициентом усиления $G_1 = 1$ на расстоянии $R = 1500$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне $\lambda = 900$ м. Расчет поля произвести для случая распространения радиоволн над почвой с параметрами $\varepsilon = 4$, $\sigma = 10^{-2}$ См/м.

Решение.

Расчет произведем по формуле (7.11), учитывающей земную и отраженную от ионосферы волну.

$$E_{и.д} = \frac{10233}{\sqrt{R}} \sqrt{G_1 P_1'} \cdot \exp(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda^{-0.26} \cdot R);$$

$$E_{и.д} = \frac{10233}{\sqrt{1500}} \sqrt{12 \cdot 1} \cdot \exp(-8.94 \cdot 10^{-4} \cdot 0.9^{-0.26} \cdot 1500) = 915.2 \cdot 0.232 \approx 230 \text{ мкВ/м.}$$

7.2.4 Определить зависимости расстояния прямой видимости [км] при отсутствии атмосферной рефракции (геометрический горизонт) и при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт) в зависимости от высоты поднятия антенн в точках передачи и приема – h_1, h_2 [м]. Расчеты проводить по формулам 6.13 и 6.14.

Решение.

Ниже приведен листинг программы расчета (MathCAD 2001) и графики зависимости (рисунок 7.5) расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции. Расчеты проведены для трех значений высоты h_2 (5, 15 и 30 м), высота h_1 изменялась в пределах 0...100 км.

$$\begin{aligned} h_1 &:= 0, 10.. 100 & h_2 &:= 5 & R1(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ & & & & R2(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ & & h_2 &:= 15 & R3(h_1) &:= 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) \\ & & h_2 &:= 30 & & \end{aligned}$$

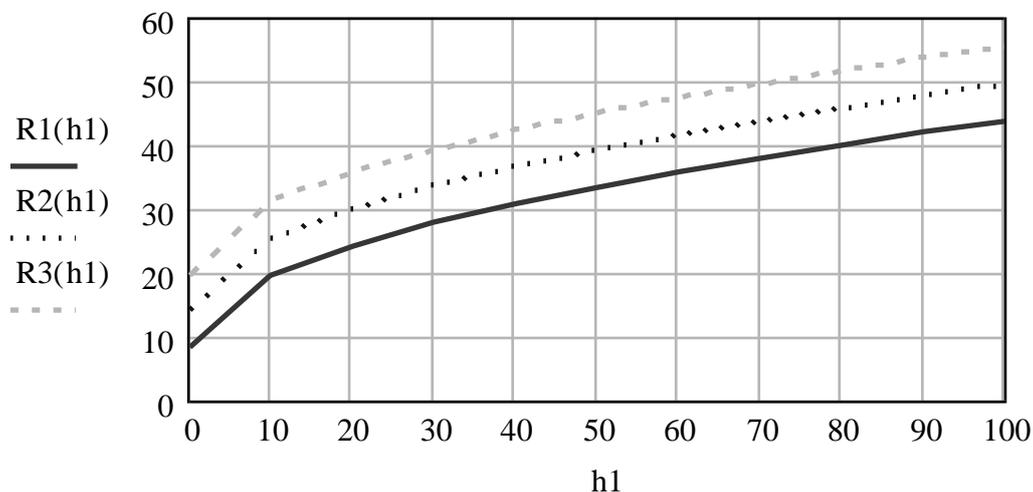


Рисунок 7.5 - Зависимости расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции

Ниже приведен листинг программы расчета (MathCAD 2001) и графики зависимости (рисунок 7.6) расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции (геометрический горизонт) $R2(h_1)$ и при нормальной атмосферной рефракции (радиогоризонт) $R1(h_1)$. Расчеты проведены для высоты $h_2 = 15$ м, высота h_1 изменялась в пределах 0...100 км.

$$h_1 := 0, 10.. 100 \quad R_1(h_1) := 4.2 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$$

$$h_2 := 15 \quad R_2(h_1) := 3.57 \cdot (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$$

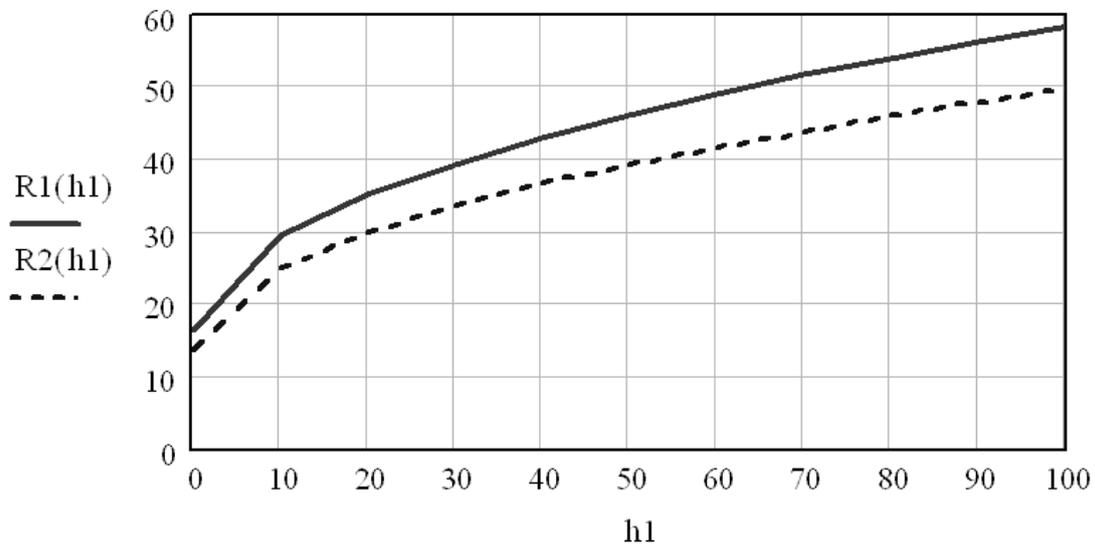


Рисунок 7.6 - Графики зависимости расстояний прямой видимости R [км] в случае отсутствия атмосферной рефракции и при нормальной атмосферной рефракции

7.2.5 Определить зависимости требуемой мощности радиопередатчика на линии радиогоризонта в зависимости от высоты поднятия четвертьволновых антенн над уровнем Земли при трех значениях $P_{\text{пр. дБ}}$. При расчетах использовать формулы (7.22 – 7.28).

Решение.

В составленной программе (нижеследующий листинг MathCAD 2001) введены обозначения:

- $P(h_1), P(h_2), P(h_3)$ – требуемая мощность радиопередатчика P_1 , дБ Вт;
- K_p – коэффициент дополнительных потерь K_p ;
- K_z – коэффициент загоризонтной радиосвязи K_z ;
- P_r – чувствительность радиоприемника $P_{\text{пр. дБ}}$;
- h_1, h_2 – высота поднятия антенны над уровнем Земли h_1, h_2 , м;
- R – протяженность радиотрассы R , км.

На рисунке 7.7 представлены графики зависимости мощности радиопередатчика [дБ Вт] от высоты поднятия антенны h_1 при $h_2 = \text{const} = 20$ м.

$$K_p := 10 \quad K_z := 1 \quad h_2 := 20$$

$$Pr := \begin{pmatrix} -130 \\ -140 \\ -150 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN} = 1$$

$$h_1 := 0, 10.. 100$$

$$F(h_1) := 40 \cdot \log\left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1 \cdot h_2}}\right)$$

$$P_1(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_1 + F(h_1)$$

$$P_2(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_2 + F(h_1)$$

$$P_3(h_1) := 132 + 20 \cdot \log(K_p) + 20 \cdot \log(K_z) + Pr_3 + F(h_1)$$

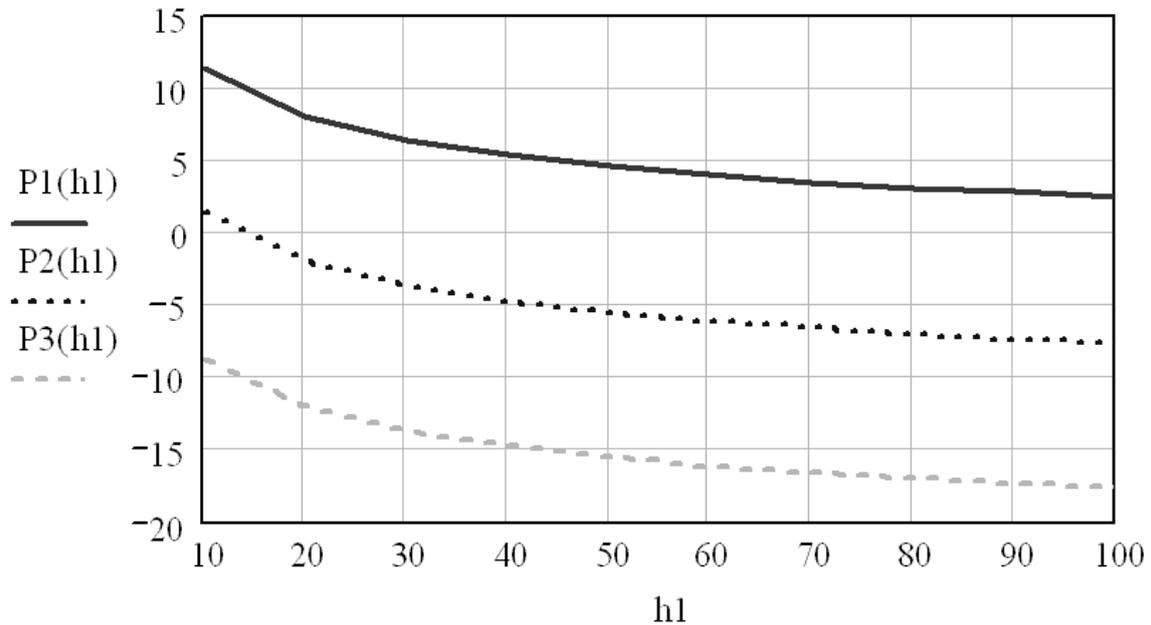


Рисунок 7.7 – Зависимости $P_1(h_1)$ при $h_2 = 20$ м для трех значений чувствительности радиоприемника P_{r1} , P_{r2} , P_{r3} [дБ Вт]

7.2.6 Произвести расчет линии космической радиосвязи по формулам (7.19) – (7.20) при следующих исходных условиях:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... $R = 1000$ км;
- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f = 40$ кГц;
- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700$ К;
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500$ К;
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}} = 10$;
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}} = 3$ дБ;
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2$ дБ;
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 10$;
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.1$ м².

Решение.

Согласно (7.19) определим реальную чувствительность радиоприемника спутникового ретранслятора:

$$P_{\text{ПРМ}} = -174 + 10 \cdot \lg 40 + 10 \cdot \lg 10 + 10 \cdot \lg 4 = -174 + 16 + 10 + 6 = -142 \text{ дБ Вт.}$$

Согласно (7.20) мощность радиопередатчика наземного абонента:

$$P_{\text{ПЕР}} = 71 + 20 \cdot \lg 1000 - 142 + 2 + 3 - 10 \cdot \lg 10 - 10 \cdot \lg 0.1 = -6 \text{ дБ Вт}$$

или $P_{\text{ПЕР}} = 0.25 \text{ Вт.}$

Как видно из приведенного примера, для радиосвязи наземного абонента со спутником в виду работы прямым лучом достаточно мощность радиопередатчика с весьма малой мощностью в 250 мВт.

Листинг программы по расчету космической линии радиосвязи согласно (7.19) приведен ниже. В программе приняты следующие обозначения:

- P1(R), P2(R), P3(R) – требуемая мощность радиопередатчика $P_{\text{ПЕР}}$, дБ Вт;

- Pr – чувствительность радиоприемника $P_{\text{ПРМ}}$, дБ Вт;
- R – протяженность радиотрассы R, км;
- Bt – потери в тропосфере $B_{\text{ТР}}$, дБ;
- Bf – потери в фидере $B_{\text{ФИД}}$, дБ;
- Ga – коэффициент усиления передающей антенны $G_{\text{ПЕР}}$;
- S – площадь приемной антенны $S_{\text{ПРМ}}$, м².

$$\begin{array}{l} R := 500, 750.. 20000 \quad \text{ORIGIN} := 1 \\ Bt := 3 \quad S := 0.1 \quad Bf := 2 \quad Ga := 10 \end{array} \quad Pr := \begin{pmatrix} -137 \\ -142 \\ -157 \end{pmatrix}$$

$$P1(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_1$$

$$P2(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_2$$

$$P3(R) := 71 + 20 \cdot \log(R) + Bt + Bf - 10 \log(Ga) - 10 \cdot \log(S) + Pr_3$$

На рисунке 7.8 приведены зависимости $P_{\text{ПЕР.дБ}}(R)$ при трех значениях чувствительности радиоприемника: -137, -142, -157 дБ Вт. Графики позволяют проследить, как меняется требуемая мощность спутникового передатчика в зависимости от протяженности радиотрассы и параметров антенн, чувствительности радиоприемника, затухания в атмосфере и за счет фидера.

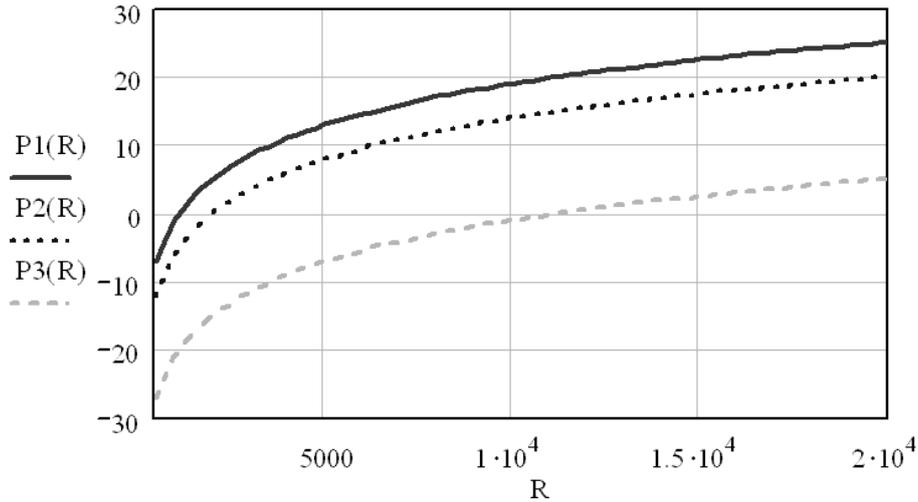


Рисунок 7.8 – Зависимости $P_{\text{ПЕР,дБ}}(R)$ при трех значениях чувствительности радиоприемника

7.3 Задачи для самостоятельного решения

7.3.1 Найти действующее значение напряженности электрического поля, создаваемого вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью $P'_1 = 25$ кВт и коэффициентом усиления $G_1 = 1.5$ на расстоянии $R = 300$ км от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [м]. Расчет поля произвести для случая распространения радиоволн над почвой с параметрами ϵ , σ [См/м].

Значения λ , ϵ и σ приведены в таблице 7.1 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.2 Вычислить напряженность поля на расстоянии R [км] по данным задачи 7.2.1, приняв радиус Земли $a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км.

Значения P'_1 , r и λ приведены в таблице 7.2 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.3 Вычислить действующее значение напряженности поля, создаваемое вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью P'_1 [кВт] и коэффициентом направленного действия 1.5 на расстоянии R [км] от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [км]. Принять радиус Земли $a_{\text{ЗМ}} = 6370$ км.

Значения P'_1 , r и λ приведены в таблице 7.3 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.1 – Исходные данные к задаче 7.3.1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ε	25	20	15	10	9	8	7	6	5	4
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
σ , См/м	2	0.6	0.2	0.8	0.06	0.4	0.2	0.08	0.02	0.01

Таблица 7.2 – Исходные данные к задаче 7.3.2

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	80	60	50	40	30	20	10	5	2
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
R , км	300	250	200	180	160	140	120	100	90	80

Таблица 7.3 – Исходные данные к задаче 7.3.3

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^3$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	80	60	50	40	30	20	10	5	2
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 1000$, км	16	14	12	10	8	6	4	2	1.5	1

7.3.4 Найти действующее значение напряженности электрического поля в ночные часы, создаваемое вертикальным электрическим диполем с излучаемой мощностью P'_1 [кВт] и коэффициентом усиления $G_1 = 1$ на расстоянии R [км] от передающей антенны, если передатчик работает на волне λ [м].

Значения P'_1 , R и λ приведены в таблице 7.4 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.4 – Исходные данные к задаче 7.3.4

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
λ , м	$1 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^2$	$1.1 \cdot 10^2$
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
P'_1 , кВт	100	90	80	70	60	55	25	30	40	50
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$r \cdot 1000$, км	1.1	1.3	1.5	1.7	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1

7.3.5 Определить зависимость расстояния прямой видимости R [км] в зависимости от высоты поднятия антенн в точках передачи и приема h_1, h_2 [м]:

$$R = K \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right).$$

Значения K, h_1 и h_2 приведены в таблице 7.5 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.5 – Исходные данные к задаче 7.3.5

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
K	3.57	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.05	4.1	4.15	4.2
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$h_1, \text{ м}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$h_2, \text{ м}$	1...20	2...30	3...40	4...50	5...60	5...50	4...40	3...30	2...20	1...40

7.3.6 Определить зависимости требуемой мощности радиопередатчика на линии радиогоризонта в зависимости от высоты поднятия четвертьволновых антенн (h_1, h_2) над уровнем Земли при чувствительности радиоприемника $P_{\text{ПРМ}}$ [дБ Вт]. При расчетах считать, что коэффициент дополнительных потерь $K_P = 10$, а коэффициент загоризонтной радиосвязи $K_3 = 1$. Для решения задачи использовать формулы (7.13) – (7.18).

Значения $P_{\text{ПРМ}}, h_1$ и h_2 приведены в таблице 7.6 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

7.3.7 Произвести расчет реальной чувствительности радиоприемника спутникового ретранслятора линии при следующих исходных условиях:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... $R, \text{ км};$
- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f, \text{ кГц};$
- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700 \text{ К};$
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500 \text{ К};$
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}};$
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}} = 3 \text{ дБ};$
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2 \text{ дБ};$
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 10;$
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.1 \text{ м}^2.$

Значения R , Δf и $C_{с/ш}$ приведены в таблице 7.7 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.6 – Исходные данные к задаче 7.3.6

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{ПРМ}}$, дБ Вт	120	125	130	135	140	145	150	152	154	156
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_1 , м	10	15	20	25	30	35	40	45	50	60
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h_2 , м	1...20	2...30	3...40	4...50	5...60	5...50	4...40	3...30	2...20	1...40

Таблица 7.7 – Исходные данные к задаче 7.3.7

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 10^3$, км	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	6
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Δf , кГц	10	20	30	35	40	45	50	55	60	70
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$C_{с/ш}$	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15

7.3.8 Определить требуемую мощность бортового спутникового радиопередатчика в зависимости от протяженности радиотрассы, чувствительности радиоприемника и коэффициенты потерь в атмосфере по следующим данным:

- орбита спутника – низкоорбитальная..... R , км;
- полоса пропускания радиоприемника..... $\Delta f = 40$ кГц;

- температура шума радиолинии..... $T_{\text{ШЛ}} = 700 \text{ К}$;
- температура шума радиоприемника..... $T_{\text{Ш.ПРМ}} = 500 \text{ К}$;
- требуемое соотношение сигнал-шум..... $C_{\text{С/Ш}} = 10$;
- коэффициент потерь в атмосфере..... $B_{\text{ТР}}$, дБ;
- коэффициент потерь в фидерах..... $B_{\text{ФИД}} = 2 \text{ дБ}$;
- коэффициент усиления передающей антенны..... $G_{\text{ПЕР}} = 1$;
- площадь приемной антенны..... $S_{\text{ПРМ}} = 0.5 \text{ м}^2$.

Значения R , $P_{\text{ПРМ}}$ и $B_{\text{ТР}}$ приведены в таблице 7.8 и зависят от номера варианта, представляющего трёхзначное число.

Таблица 7.8 – Исходные данные к задаче 7.3.8

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$R \cdot 10^3$, км	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	12
Вторая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$P_{\text{ПРМ}}$, дБ Вт	120	125	129	132	134	137	140	143	146	153
Третья цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$B_{\text{ТР}}$, дБ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

8 .СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Глав. редакция физико-математической литературы, 2002. - 620 с.
2. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 558 с.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
4. Туров У.А. Материальные уравнения электродинамики. - М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. - 156 с.
5. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1989. - 544 с.
6. Туровский Я. Техническая электродинамика. – М.: Энергия, 1974. – 486 с.
7. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. - М.: Радио и связь. 2002. – 536 с.
8. Кравченко А.Ф. Физические основы функциональной электроники. – Новосибирск : Издательство НГУ. 2000. – 442 с.
9. Физика твердого тела/Под ред. Верещагина И.К. – М.: Высшая школа. 2001. – 237 с.
10. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – С.-Петербург :Изд. “Лань”. 2003. – 398 с.
11. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. – М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1973. – 592 с.
12. Савельев В.И. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. – М.: Апрель. АСТ. 2002. – 336 с.
13. Савельев В.И. Курс общей физики. Волны и оптика. – М.: Апрель. АСТ. 2002. – 256 с.
14. Савельев В.И. Курс общей физики. Физика твердого тела. – М.: Апрель. АСТ. 2002. – 368 с.
15. Гасанов Л.Г. и др. Твердотельные устройства СВЧ в технике связи. – М.: Радио и связь. – 1988. – 288 с.
16. Смирнов С.В. Физика твердого тела. – Томск : ТМЦДО. 2000. - 89 с.
17. Грудинская Г.П. Распространение радиоволн. – М.: - Высшая школа, 1975 -244 с.
18. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+MathCAD. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001.
19. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. Электромагнитные поля и волны. – Томск: ТУСУР, 2005.
20. Шостак А.С. Основы электродинамики и распространение радиоволн. Распространение радиоволн. – Томск: ТУСУР, 2005.