

**Министерство науки и образования РФ**

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра механики и графики**

**Б.А. ЛЮКШИН**

# **Композитные материалы**

ТОМСК  
2012

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Основные понятия механики материалов	5
2. Классификация композитных материалов (КМ)	
3. Определения свойств дисперсно наполненных (зернистых) материалов	17
4. Структурно-механическая модель КМ	24
5. Основы линейной механики деформируемого твердого тела	26
6. Анализ свойств КМ с позиций механики деформируемого твердого тела	42
7. Соотношения вязкоупругости	54
8. Соотношения теории пластичности	56
9. Метод последовательных нагружений	59
10. Осреднение по объему	66
11. Осреднение с помощью энергетических методов	69
12. Характеристики материалов	70
13. Упругие характеристики однонаправленного КМ при плоском напряженном состоянии	86
14. Неразрушающие методы контроля КМ	90

# ВВЕДЕНИЕ

## Общие замечания

Роль материалов в жизни человека преувеличить нельзя. Важность их иллюстрируется тем, что материалы давали названия целым эпохам в жизни человечества. Так, достаточно вспомнить такие названия, как каменный век, бронзовый век, железный и т.д. Например, 20 век часто пытались определить как век полимеров.

В этом отношении 21 век вполне можно определять как век наноматериалов и век композитов.

Любое изделие характеризуется рядом признаков, которые можно назвать показателями его качества. В общем плане в перечень этих показателей можно включить много параметров – от внешнего вида, формы и цвета до стоимости конкретного изделия. Не последнюю роль в ряду показателей качества играет такое понятие, как надежность. Можно дать определение этого понятия по стандарту, но в общем плане это качество нам понятно. Ясно, что надежность любого изделия связана не в последнюю очередь с тем, какие материалы использованы при его изготовлении и насколько они пригодны для этого.

Отсюда возникает проблема – какие свойства определяют сам материал, т.е. что является показателями качества материала? И сразу же становится понятно, что эти показатели качества, сам набор этих показателей, могут различаться в зависимости от назначения материала. Так, решение проблем трения требует применения материалов, обладающих низким коэффициентом трения и высокой износостойкостью а одних случаях (например, подшипники скольжения) и высоким коэффициентом трения в других (тормозные колодки). Для проблем электроизоляции нужны материалы с высокими изолирующими свойствами. Для использования в разного рода производственных и лабораторных аппаратах нужны термостойкие и химически стойкие материалы, и т.д.

Таким образом, материал может характеризоваться целым комплексом свойств. По некоторым данным, так называемый паспорт материала, который определяет его свойства, может включать в себя свыше 50 показателей.

Мы далее будем говорить о материалах конструкционного назначения, т.е. о таких, которые используются при изготовлении несущих конструкций. Это означает, что материалы должны обладать необходимыми так называемых деформационно-прочностных свойств.

Изучение этих свойств – одна из основных задач механики сплошных сред, в частности, ее раздела – механики деформируемого твердого тела.

Механика сплошной среды (МСС) оперирует моделями. В частности, модель сплошной среды в МСС строится с использованием следующих предположений:

- гипотеза сплошности (пустот нет в любом объеме материала);
- гипотеза однородности;
- гипотеза изотропии (для т.н. обычных материалов);
- гипотеза идеальной упругости (тело воспринимает энергию при деформировании в обратимой форме);
- гипотеза относительной жесткости, или принцип начальных размеров (изменение размеров тела в процессе деформирования пренебрежимо мало);
- любой объем среды подчиняется законам механики;
- линейная зависимость деформирования тел до определенного предела:
- гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела;
- и т.д.

Метод МСС заключается в переводе всех допущений и экспериментальных данных в уравнения и далее работа с этими уравнениями по правилам математики. МСС – наука **феноменологическая**, т.е. часть соотношений получается из обработки экспериментальных данных.

Имена в теории упругости и МСС – Галилей, Ньютон, Гук, Коши, Пуассон, Навье, Лурье, Галеркин, Работнов, Качанов, Лейбензон, Мусхелишвили, ....

Следует обратить внимание на совпадение этих имен с именами корифеев математики. Это не случайно – до сих пор связь математики и механики является неразрывной. Тому наглядным подтверждением является наличие механико-математических факультетов в классических университетах. Во все времена от Архимеда до наших дней. Задачи механики вызвали рождение целых разделов математики, в частности, дифференциального и интегрального исчисления, а методы математики позволяли ставить и решать новые задачи механики.

Развитие МСС на современном этапе связано с появлением новых материалов, или применением известных материалов в новых условиях. Что касается новых материалов, это наноматериалы, композитные материалы, полимеры и т.д.

Задачи МСС в большинстве случаев – нелинейные. Два типа нелинейности:

- геометрическая нелинейность;
- физическая нелинейность.

В первом случае речь идет о виде связи между перемещениями точек сплошной среды с деформациями. Если эти деформации малы, то можно ограничиться в разложениях перемещений в точках  $x + dx$  удержанием небольшого числа членов, и тогда деформации получаются в виде соотношений Коши – это и есть геометрически линейные соотношения. Если же погрешность при таком подходе велика, нужно учесть дополнительные члены в этих разложениях, что приводит к виду деформаций, которые уже представляют собой нелинейные соотношения.

Во втором случае имеется в виду связь между напряжениями и деформациями. Это отражает характер работы материала – так, в простейшем случае этот характер на графике напряжения-деформации представляется отрезком прямой, и соответствующая зависимость является линейной. Если же линейность исчезает, то и соотношения между напряжениями и деформациями имеют более сложный вид – и тогда говорят о физической нелинейности.

Модели МСС классифицируются

По геометрии объектов, для которых строятся модели:

- 1) стержни (валы, балки) – одномерные задачи;
- 2) оболочки и пластины – двумерные модели;
- 3) массивы – трехмерные задачи.

По типу среды:

сплошная, изотропная, однородная и т.д. – см. гипотезы выше.

По характеру деформирования:

- 1) упругая;
  - 2) упругопластическая с линейным упрочнением;
  - 3) упругопластическая с нелинейным упрочнением;
  - 4) вязкоупругая;
  - 5) вязкопластическая;
  - 6) жесткопластическая;
- и т.д.

# 1. Основные понятия механики материалов

## Нагрузки

Нагрузки по происхождению и способу приложения делятся по следующим категориям:

- Массовые и поверхностные.
- Сосредоточенные, локальные, распределенные.
- Статические, динамические.
- Ударные (импульсные), периодические.
- Активные и реактивные (реакции связи).

## Деформации

Деформации в общем случае являются сложными – в том смысле, что присутствуют в реальном процессе всегда их различные составляющие. В механике принято различать своего рода набор основных деформаций, из которых можно составить любую реальную сложную деформацию.

1. Растяжение – сжатие.
2. Кручение.
3. Сдвиг.
4. Изгиб.

В отличие от задач теоретической механики, для задач МСС характерным является, за редким исключением, их статическая неопределимость – т.е. для определения параметров НДС недостаточно знать и использовать только уравнения равновесия.

Основной метод изучения параметров НДС – метод сечений. В соответствии с ним для определения напряжений и/или деформаций в любой точке среды нужно провести плоскость, разделяющую тело на части, и заменить действие одной из частей тела на другую силами, распределенными по этой поверхности. Поскольку любая система сил сводится к главному вектору и главному моменту, то и действие отброшенной части можно заменить либо распределенными силами, либо главным вектором и главным моментом. Одна из гипотез МСС (гипотеза Сен-Венана) гласит, что все системы сил, имеющие одинаковые главный вектор и главный момент, на расстоянии, сравнимом (и больше) характерного размера нагружаемой площадки тела, дают одни и те же параметры НДС.

Из условий равновесия в сечении найдутся статические эквиваленты реальных сил, которыми являются главный вектор и главный момент.

## Напряжения и деформации при растяжении и сжатии

### Деформации

Приложение растягивающей нагрузки к стержню, проволоке и т.д. вызовет удлинение, которое можно измерить в мм, см и т.д. Возникает вопрос, может ли эта величина служить мерой деформации? Довольно очевидно, что длина проволоки (исторически первые эксперименты были проведены для проволоки, поэтому далее будем говорить о ней) влияет на полученные измеренные значения. Чем длиннее проволока, тем больше будет измеренная величина удлинения, хотя нагрузка при этом будет одной и той же. Однако оказывается, что при постоянной (одинаковой для разных проволок) нагрузке отношение удлинения к начальной длине проволоки оказывается величиной примерно постоянной. По этой причине эта величина – отношение абсолютного (измеренного в единицах длины) удлинения к начальной длине – и принимается за меру деформирования.

Эту меру называют относительной деформацией растяжения и обычно обозначают

$$\varepsilon = \Delta l / l_0,$$

где  $\Delta l$  – измеренное абсолютное удлинение (абсолютная деформация),  $l_0$  – начальная длина проволоки. Как видно из этого соотношения, относительная деформация является величиной безразмерной.

Для резины возможно удлинение ее вдвое по сравнению с начальным размером, что означает, что относительная деформация равна 1 (или 100 %). Реальные конструкционные материалы работают упруго (т.е. после снятия нагрузки полностью восстанавливают свои размеры и форму), когда относительная деформация составляет доли процента (обычно 0.2 %).

Для примера: если образец имеет начальную длину 1 м (1000 мм), и упруго он будет работать при деформации до 0.2 %, то абсолютное удлинение не должно превысить 2 мм.

### Напряжения

Представим себе, что мы придаем одно и то же удлинение проволокам одной начальной длины, но разного сечения. Тогда при равных абсолютных и относительных деформациях растягивающие силы будут разными. Если нам понадобится связать величину силы с деформацией растяжения, то каждый раз нужно будет учитывать площадь поперечного сечения проволоки. Экспериментально было обнаружено, что при равных деформациях проволок разных сечений постоянным оказывается отношение растягивающей силы  $P$  к площади поперечного сечения  $S$ . Это и послужило причиной тому, что за меру растягивающей

нагрузки стали принимать не саму силу, а ее отношение к площади поперечного сечения

$$\sigma = P / S,$$

а соответствующая величина получила название **напряжения**.

В отличие от безразмерной относительной деформации **напряжения имеют размерность сила/площадь**, и измеряются в величинах  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ,  $\text{кГ/см}^2$ ,  $\text{атм} = 1 \text{ кГ/см}^2$  и т.д.

## Закон Гука

Роберт Гук (английский ученый, 1635-1703 гг.) экспериментально установил зависимость между напряжениями и деформациями: **нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению**.

Математически это выглядит просто:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности в этом соотношении –  $E$  – характеристика жесткости материала, называется модулем продольной упругости или модулем упругости первого рода (модуль Юнга). Размерность этого модуля – такая же, как у напряжений. Величина модуля упругости формально отвечает такому напряжению, при котором начальная длина растягиваемого образца растёт ровно вдвое.

## Коэффициент Пуассона

Поперечные размеры практически любого образца при растяжении уменьшаются, а при сжатии увеличиваются. Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении (сжатии) отношение продольной  $\varepsilon$  и поперечной  $\varepsilon'$  деформации в широких пределах является величиной постоянной. Этот факт впервые экспериментально был обнаружен французским ученым Пуассоном (1781-1840), и сформулирован в виде

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Величина  $\nu$  носит название коэффициента поперечной деформации (коэффициента Пуассона). По определению эта величина безразмерная.

Коэффициент Пуассона является упругой характеристикой конкретного материала. Обычно этот коэффициент при растяжении и сжатии полагают одинаковым.

Для ряда материалов его значения можно привести

Пробка	0.00	Латунь
0.32...0.42		

Чугун	0.23...0.27	Свинец	0.42
Сталь	0.24...0.30	Каучук	0.47
Медь	0.031...0.34	Парафин	0.5

### Пример

Стальной цилиндр с начальной длиной 80 мм и диаметром 30 мм при сжатии укорачивается на 0.064 мм, при этом диаметр увеличивается на 0.0065 мм. Найти коэффициент Пуассона.

Для решения найдем продольную и поперечную деформации. Получим

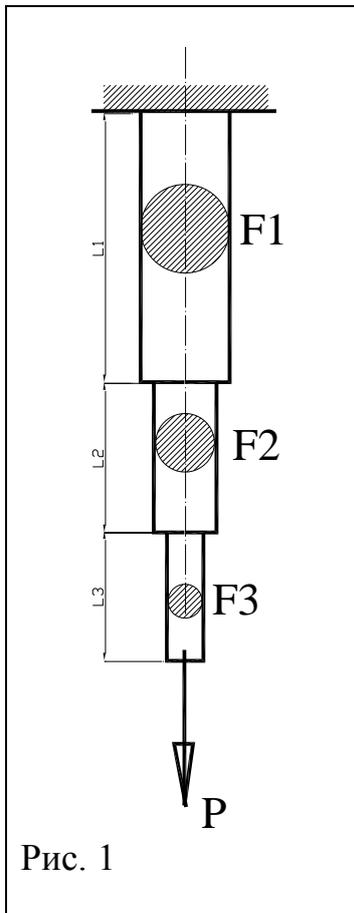
$$\varepsilon = -0.064/80; \quad \varepsilon' = 0.0065/30.$$

По определению

$$\nu = \left| \varepsilon' / \varepsilon \right| = 0.27.$$

**Растяжением (сжатием) называется такая деформация бруса, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила.**

### Пример



Рассмотрим задачу о растяжении стержня ступенчатого переменного сечения силой  $P$ . Геометрия стержня определяется длинами участков  $L_1, L_2, L_3$  и соответственно площадями поперечных сечений  $F_1, F_2, F_3$ . Найти общее удлинение стержня.

Считаем, что нагрузка воспринимается в каждом сечении стержня равномерно. Тогда напряжения в каждом из сечений будут

$$\sigma_1 = P / F_1, \quad \sigma_2 = P / F_2, \quad \sigma_3 = P / F_3.$$

Деформации в каждом сечении определяются в соответствии с законом Гука

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 / E = \frac{P}{EF_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{P}{EF_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{P}{EF_3}.$$

Абсолютные удлинения каждого участка определяются соотношениями

$$\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1 = \frac{PL_1}{EF_1}, \quad \Delta L_2 = \frac{PL_2}{EF_2}, \quad \Delta L_3 = \frac{PL_3}{EF_3},$$

а суммарное удлинение будет

$$\Delta L = \frac{P}{E} \left( \frac{L_1}{F_1} + \frac{L_2}{F_2} + \frac{L_3}{F_3} \right).$$

При построении решения использовалось, по существу, предположение о справедливости двух гипотез – гипотезы плоских сечений и гипотезы о ненадавливании волокон. Первая из них означает, что поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Вторая предполагает, что продольные «волокна» стержня не надавливают друг на друга.

Обе эти гипотезы справедливы тем обоснованнее, чем дальше находится сечение стержня от места закрепления и от места приложения нагрузки.

Графики, показывающие распределения тех или иных величин вдоль оси стержня, называются эпюрами. Знаки напряжений выбираются так же, как и знаки сил – растягивающие напряжения считаются положительными.

## Диаграммы растяжения

Типичная диаграмма растяжения металлического образца имеет ряд характерных точек. Она получается в результате испытаний реального образца в разрывной машине.

Различают два типа диаграмм – реальная и условная. В первом случае при работе разрывной машины измеряются приложенная сила и смещение захватов. Построенная зависимость и представляет собой реальную диаграмму. Во втором случае проводится пересчет измеренных величин – абсолютные смещения пересчитываются в деформации, а приложенная сила пересчитывается в напряжения, причем учитывается только начальный размер поперечного сечения образца.

И в том, и в другом случае получается зависимость, которая характеризуется кривой напряжения-деформации ( $\sigma \sim \varepsilon$ ). На этой кривой в типичных случаях наблюдается ряд характерных точек.

**Предел пропорциональности** отвечает напряжению, при котором зависимость  $\sigma \sim \varepsilon$  начинает отклоняться от линейной.

**Предел упругости** отвечает напряжению, превышение которого приводит к появлению остаточных деформаций.

**Предел текучести** отвечает напряжению, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки. При его достижении на образце обычно образуется сетка линий, наклонных к оси образца (и оси нагружения) под углом  $45^\circ$ . Это так называемые линии Людерса-Чернова.

**Предел текучести** – основная механическая характеристика **пластичного** материала при оценке его прочности.

**Временное сопротивление** – условное напряжение, отношение максимальной силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения. Разрушение образцов большинства материалов начинается с образования местного сужения – **шейки**. Поэтому реальное напряжение разрушения будет больше, чем временное сопротивление (за счет сужения площадь в разрушаемом сечении образца уменьшается, иногда очень значительно).

**Предел прочности** – временное сопротивление образца, разрушающегося без образования шейки. Обычно эта характеристика хрупких материалов.

Если остановить процесс нагружения образца до разрушения и снять нагрузку, то зависимость  $\sigma \sim \varepsilon$  пойдет примерно параллельно начальному участку диаграммы растяжения. Полное снятие нагрузки приводит к тому, что часть деформаций не исчезает – это и есть остаточная деформация. Повторное нагружение образца сначала пойдет по линии, отвечающей разгрузке. В итоге возникает эффект **наклепа** – увеличения пределов упругости и пропорциональности при одновременном уменьшении пластичности.

Явление наклепа может быть вредным – например, при пробитии отверстий под заклепки в их окрестности материал теряет пластичность и может начать хрупко разрушаться. Иногда наклеп полезен, например, провода, тросы кранов, подъемные цепи за счет наклепа становятся прочнее.

**Степень пластичности** материала может характеризоваться остаточным относительным удлинением и остаточным относительным сужением шейки. Эти величины измеряются в процентах по формулам

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \times 100, \quad \psi = \frac{A_p - A_0}{A_0} \times 100,$$

Где индекс «*p*» отвечает моменту разрушения,  $l_0$  – исходному состоянию,  $l$  – длина образца,  $A$  – площадь поперечного сечения.

Для материалов, не имеющих ясно выраженной площадки текучести (например, легированные и высокоуглеродистые стали) вводится понятие **условного предела текучести** – такого уровня напряжений, при котором возникает остаточная деформация, равная 0.2 %.

Деление на хрупкие и пластичные материалы условно. На вид зависимости  $\sigma \sim \varepsilon$  влияют такие факторы, как скорость приложения нагрузки, температура и т.д. Пластичные в обычных условиях материалы при понижении температуры становятся хрупкими. Этот же эффект прослеживается при повышении скорости деформирования.

## **Потенциальная энергия деформации при растяжении**

Если внешняя сила совершает работу при деформировании образца, эта работа переходит в энергию деформации. При определении работы используется такой способ, как расчет площади под кривой, отражающей зависимость силы от пройденного под ее действием пути. Если такая зависимость упругая и линейная, то работа внешней силы  $F$  на удлинении  $\Delta l$ , равная потенциальной энергии деформации, будет

$$U = W = F \cdot \Delta l / 2 = \frac{F}{2} \cdot \varepsilon l = \frac{F}{2} \cdot \frac{F}{AE} l = \frac{F^2 l}{2EA}.$$

Чаще используется понятие удельной энергии деформации, т.е. энергии, приходящейся на единицу объема

$$u = \frac{W}{Al} = \frac{F^2}{A^2} \frac{1}{2E} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Если разные участки бруса работают в разных условиях, то брус разбивают на отдельные участки, где напряжения примерно постоянны, считают энергию на этих участках и суммируют.

Потенциальная энергия деформации выражается в обычных для энергии единицах – Джоулях, удельная энергия – в Дж/м<sup>3</sup>.

Из анализа полученных результатов следует.

1. Потенциальная энергия деформации всегда положительна, т.к. в соответствующих формулах фигурируют не напряжения (имеющие знаки), а их квадраты.
2. При вычислении потенциальной энергии от действия нескольких сил нельзя использовать принцип суперпозиции. Это следует из анализа формулы для потенциальной энергии – квадрат суммы не равен сумме квадратов.

## Расчеты растяжения и сжатия. Запас прочности

При статической нагрузке для пластичных материалов предельным напряжением считается предел текучести, для хрупких – предел прочности.

Чтобы изделия выполняли нужные функции, необходимо, чтобы эксплуатационные нагрузки были меньше предельных.

Отношение предельного напряжения к максимальному эксплуатационному называется запасом прочности и обозначается  $S$ :

$$S = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{эспл}}.$$

Поскольку в разных точках изделия реальные нагрузки отличаются, то определяется точка, где эксплуатационные нагрузки максимальны, соответственно коэффициент запаса прочности минимален. Эта точка (сечение) называется опасной. Минимально необходимый коэффициент запаса прочности называется допускаемым и обозначается  $[\sigma]$ . Для пластичных материалов обычно принимается  $[\sigma] = 1.2 \dots 2.5$ , для хрупких  $[\sigma] = 2 \dots 5$ , для древесины  $[\sigma] = 8 \dots 12$ .

Отношение предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности называют допускаемым напряжением и обозначают

$$[\sigma] = \sigma_{пред} / [\sigma]$$

Условие прочности детали конструкции заключается в том, чтобы максимальное возникающее в ней напряжение не превышало допускаемое

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

В другом виде условие прочности можно записать

$$s \geq [\sigma]$$

Это означает, что расчетный коэффициент запаса прочности не может быть меньше допускаемого.

В тех случаях, когда допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, их соответственно обозначают  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$ .

Определяют три вида задач при расчете конструкций на прочность, отличающиеся расчетными формулами. Рассмотрим их на примере бруса при растяжении.

1. Проектный расчет, в котором определяется размер опасного сечения

$$A = N_{max} / [\sigma]$$

2. Проверочный расчет, когда определяется рабочее напряжение и сравнивается с допускаемым:

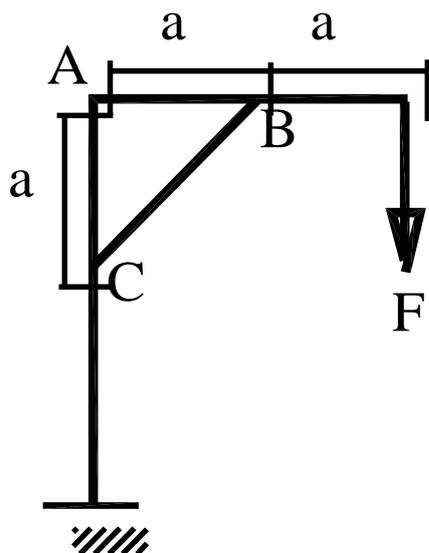
$$\sigma = N / A \leq [\sigma]$$

3. Определение допускаемой нагрузки по формуле

$$[N] = A[\sigma]$$

### Пример

Найти размер квадратного сечения подкоса ВС, если  $F = 5$  кН,  $a = 1$  м,  $[\sigma] = 6$  МПа (см. рис.).



Составив уравнение равновесия моментов относительно точки А, найдем силу  $R$ , действующую в стержне ВС.

$$-F \cdot 2a + Ra \sin 45^{\circ} = 0.$$

После определения  $R$  можно найти площадь по формуле

$$A = R / [\sigma] = 2370 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Сторона  $b$  квадратного сечения подкоса тогда определится как

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{2370 \cdot 10^{-6}} = 48.6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 48.6 \text{ мм}.$$

Имея в виду, что в стандартах обычно используются целые величины, получим, округляя, что  $b = 50$  мм – при таком округлении расчет идет с некоторым запасом по прочности.

### Растяжение под действием собственного веса

При вертикальном положении собственный вес бруса приводит к его сжатию или растяжению в зависимости от способа закрепления.

Пусть брус постоянного сечения  $A$  и длиной  $L$  закреплен верхним концом и находится под действием собственного веса.

Для определения напряжений используем метод сечений. На расстоянии  $z$  от нижнего конца из уравнения равновесия следует, что осевая сила определяется равенством

$$N_z = \gamma Az,$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала бруса,  $Az$  – объем части бруса ниже сечения  $z$ . Напряжения в этом же сечении будут

$$\sigma_z = \gamma z.$$

Как видим, от площади сечения напряжения не зависят, но зависят от расстояния сечения от нижнего торца. Самое опасное сечение отвечает максимальному значению  $z = L$ .

Напряжения линейно зависят от  $z$ , и соответствующий график выглядит как прямая, проходящая через ноль у нижнего торца и максимальное значение  $\sigma_{z \max} = \gamma L$  у верхнего торца.

Если решить задачу: какова максимальная длина бруса, при которой он еще не разрушается под действием собственного веса, то предельная длина будет

$$L_{np} = [\sigma] / \gamma.$$

Отношение предела прочности материала к его удельному весу называется удельной прочностью. Таким образом, удельная прочность материала может трактоваться физически как предельная длина бруса постоянного сечения, изготовленного из этого материала, который не разрушается под действием собственного веса.

Отсюда также следует, что предельная длина не зависит от площади поперечного сечения бруса.

Если принять в качестве материала бруса сталь (Ст2), для нее характеристики дают предельную длину 4600 м.

Оценим растяжение бруса. Для участка длиной  $dz$  можно считать, что ввиду его малости растягивающая сила в сечении примерно постоянна, тогда удлинение этого участка будет

$$d\Delta L = \varepsilon \cdot dz = \frac{\gamma z}{E} dz,$$

а общее удлинение получится как результат интегрирования по длине бруса

$$\Delta L = \frac{\gamma}{E} \int_0^L z dz = \frac{\gamma L^2}{2E}.$$

Если бы невесомый брус растягивался силой, приложенной к нижнему торцу и равной его весу  $\gamma AL$ , его растяжение было

$\Delta L_* = \varepsilon L = \frac{\gamma AL}{AE} \cdot L = \frac{\gamma L^2}{E} = 2\Delta L$ , т.е. ровно вдвое больше, чем при растяжении собственным весом.

### Статически неопределимые задачи

Выше был рассмотрен пример так называемой статически определимой задачи. В этом случае для определения силы в любом

сечении достаточно одних (одного) уравнений равновесия. Для более общего случая необходимо строить решение с учетом уравнений перемещения.

Рассмотрим задачу о невесомом стержне постоянного сечения  $A$  и длиной  $L$ , жестко закрепленном по концам и подвергающемся нагреву. При нагреве длина стержня растет, а защемление этому препятствует, что вызывает появление так называемых температурных напряжений. Из симметрии понятно, что реакции опор одинаковы, а сила в любом сечении стержня равна этим реакциям.

Для определения реакции отбросим одну из опор, заменив ее сжимающей силой, которая вызывает укорочение стержня, равное по величине его удлинению за счет нагрева. Это удлинение определяется через перепад температур, коэффициент линейного температурного расширения материала и общую длину стержня:

$$\Delta L_T = \alpha T L.$$

Напряжение в стержне, при котором будет таким же его укорочение, будет

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta L_T}{L} = E\alpha T.$$

Как видно из результата, напряжения не зависят ни от длины стержня, ни от площади его поперечного сечения. Конечно, суммарная сила для стержней разных сечений будет отличаться.

### **3. Определение механических свойств дисперсно наполненных (зернистых) композитов**

При наличии непрерывной фазы в композите (матрицы) он называется иногда матричным, и классификация таких матричных композитов проводится в основном по типу включений (дисперсные или зернистые, волокнистые, слоистые). Пористые материалы иногда тоже трактуют как композиты, в которых включениями являются поры.

Основная черта механики композитов заключается в учете особенностей строения материала на уровне структурной неоднородности. В классической механике сплошной среды и механике деформируемого твердого тела обычно используется гипотеза об однородности материала.

Требования, предъявляемые к теоретической модели композита, можно сформулировать, в частности, следующим образом.

Модель должна воспроизводить все основные особенности деформирования реального материала (условие адекватности).

Модель должна быть внутренне непротиворечивой во всех теоретических построениях (условие непротиворечивости).

В предельных случаях модель должна приводить к физически правильным результатам (условие физичности).

Модель можно сравнить с карикатурой – при всей ее условности она отражает, «схватывает» основные черты прототипа.

При выборе модели необходимо также учитывать внутреннюю геометрию системы и масштабный фактор. Модель не должна отражать излишние детали, так как это приводит к ее усложнению без заметного улучшения качества.

В зависимости от строения конкретного композита модели могут сильно отличаться. Так, при слабо заполненной композиции для определения эффективного модуля упругости (т.е. модуля материала в целом) используется модель в виде одиночного включения в бесконечной матрице. Очевидно, для случая, когда расстояния между включениями сопоставимы с их размерами, такая модель непригодна, поскольку она не учитывает взаимные влияния полей возмущений от соседних частиц.

Основные направления моделирования наполненных композитов можно определить следующим образом.

#### **3.1. Феноменологические теории**

Материал рассматривается как квазиоднородная среда, для которой формулируются абстрактные математические связи. Параметры в этих соотношениях определяются по результатам экспериментов. Согласование таких моделей с реальными средами может быть хорошим, но совершенно не анализируются внутренние физические причины, дающие тот или иной результат.

Иногда эти подходы используются для получения своего рода опорных точек в закономерностях, которые выглядят качественно очевидными, но требуют получения количественных оценок.

Например, довольно очевидно, что если армирующие частицы прочнее матрицы, то их введение в материал приведет к росту прочности матрицы – при условии, что на границах матрица-включения осуществляется идеальный контакт.

Если измельчать армирующие частицы, то для полимерных матриц возникает известный эффект образования «шубы», или межфазных слоев вокруг этих частиц. Это связано может быть с многими механизмами.

Например, механизм выстраивания молекул вдоль поверхности жесткого включения, когда возникает не хаотически расположенные элементы структуры полимера, а ориентированные вдоль поверхности, что меняет механические свойства полимера. Это может быть связано и с тем, что при полимеризации матрицы в окрестности включений в общем случае меняется температурный режим формования – что тоже меняет механические свойства полимера.

Такое образование межфазного слоя приводит к тому, что меняется в сторону повышения прочности свойства композиции.

В таких случаях направленность изменения свойств можно легко предсказать, но вопрос о количественных изменениях требует экспериментальных исследований. Повышение дисперсности не меняет степени наполнения, но меняет площадь той самой поверхности, около которой механические свойства полимерной матрицы меняются, и характер изменений эффективных свойств материала в целом предсказуем. Однако вопрос – в количественных оценках этих изменений, и это требует проведения экспериментов.

Такие модели применимы лишь для описания поведения композитов в области известных опытных данных, но не имеют предсказательной силы. По существу эти подходы справедливы лишь в той мере, в какой работают правила интерполяции или экстраполяции экспериментальных зависимостей.

Более того, иногда возникают ситуации, теоретически не прогнозируемые. Например, известным является факт, когда для формально одной и той же композиции – тальконаполненный полипропилен – получаются существенно отличные свойства только потому, что армирующий минеральный материал, тальк, берется из разных месторождений. Форма, размеры армирующих частиц, химический состав формально идентичны, но результаты армирования приводят к разным свойствам композиций.

### **3.2. Статистические теории**

В них тоже предполагается наличие некоторой макрооднородной среды, в которой те или иные дефекты распределены в соответствии с некоторыми статистическими законами. Обычно это распределения по нормальному закону или распределение Вейбулла.

Эти законы трактуются двояко. Известно выражение: теоретики думают, что законы распределения получены обработкой экспериментов, а экспериментаторы считают, что законы распределения придуманы математиками.

В этих теориях не рассматривается реальная структура материала, а особенности напряженного состояния не связаны с конкретными физическими эффектами. Получаемые с помощью этих теорий зависимости отражают лишь некоторые принципиальные явления в материале. Для перехода к количественным оценкам требуются дополнительные эксперименты.

### **3.3. Методы механики микронеоднородных сред**

Эти методы в настоящее время являются наиболее универсальными. Они позволяют построить единую концепцию анализа достаточно разных задач. В линейных случаях для таких моделей можно получить оценки погрешностей, т.е. оценить границы применимости получаемых результатов.

Используются два основных (базисных) допущения. Во-первых, структурные неоднородности в системе по размеру во много раз больше, чем особенности атомно-молекулярной структуры. Это дает возможность для каждой фазы использовать аппарат механики сплошной среды. Во-вторых, размеры структурных неоднородностей много меньше расстояний, на которых заметно меняются макросвойства

материала. Это означает, что в теле можно выделить некоторую область с достаточно большим количеством структурных элементов (представительный объем), обладающую свойствами материала в целом, и сам материал рассматривать как совокупность таких областей (мезоэлементов или мезообластей).

Под представительным принято понимать такой минимальный объем материала, который полностью отражает его свойства. Во всяком случае, анализ НДС этого объема при его увеличении не должен приводить к заметному изменению количественных оценок деформационно-прочностных свойств материала.

Для материалов с регулярной (периодической) структурой за представительный объем можно принять ячейку периодичности. При определении эффективных характеристик материала методами вычислительной механики в этом случае относительно просто можно сформулировать граничные условия для расчетной области – представительного объема, – например, из соображений симметрии или периодичности. Анализ НДС такой ячейки под действием заданных на границах области перемещений и/или напряжений дает представление об эффективных свойствах материала.

Для материалов с нерегулярным строением дело обстоит не так просто. По смыслу и определению представительного объема он должен быть достаточно большим, чтобы получаемые на основе его анализа упругие и прочностные характеристики можно было принимать за эффективные, присущие всему материалу в целом – на уровне детали, элемента конструкции, стандартного лабораторного образца и т.д. Анализ такого достаточно большого объема методами вычислительной механики представляется сложным ввиду наличия большого количества внутренних границ в расчетной области, разделяющих (или объединяющих) подобласти, занятые разными фазами. По некоторым оценкам добавление каждой внутренней границы в расчетной области усложняет расчет примерно так же, как повышение размерности задачи.

Избежать такого усложнения можно, рассматривая область относительно небольших размеров, но тогда полученные результаты едва ли можно трактовать как анализ представительного объема. Выход из этого положения предлагается следующий. Анализируется область, содержащая небольшое количество неоднородностей, например, армирующих включений, в полимерной матрице. Для реального материала нерегулярного строения проводится серия расчетов, в каждом из которых анализируется область небольших размеров. Эта расчетная область получается случайным образом при наложении контура, как правило, прямоугольной формы, на карту образца. При увеличении размеров

контура отклонение получаемых эффективных характеристик от их асимптотических значений, отвечающих области неограниченных размеров, будет уменьшаться. Чем меньше размеры контура, тем длиннее должна быть серия расчетов, усреднением результатов которых и получают эффективные характеристики. В этом смысле можно говорить, что размер представительного объема и длина серии расчетов связаны с ограничениями на отклонение получаемых при его анализе характеристик от «точных» асимптотических значений.

Такой подход является предпочтительным не только в силу упрощения вычислительного алгоритма. При фиксированном числе элементов сетки точность аппроксимации всех получаемых в расчете величин – перемещений, деформаций и напряжений – будет тем выше, чем мельче элементы сетки по сравнению с зонами, где градиенты этих величин наиболее выражены. Для наполненных полимерных систем это зоны в окрестности контакта матрица и армирующих включений, где скачком или с большим градиентом меняются деформационно-прочностные свойства. Эта особенность должна учитываться при проведении численного анализа наряду с указанным в работе [23] принципом: «Дискретизация области, заполненной композитом, имеет существенные особенности. Дело в том, что для определения микронапряжений это разбиение необходимо провести таким образом, чтобы вычислительная ячейка была много меньше ячейки периодичности». Хотя в данной цитате речь идет о ячейке периодичности, понятие которой, строго говоря, применимо лишь для композитов регулярного строения, для материалов с нерегулярной структурой этот принцип тоже является справедливым. Его нужно трактовать в том смысле, что размеры ячеек конечно-разностной или конечно-элементной сетки должны быть меньше размеров меньшей из фаз или зон, где эти свойства меняются с большим градиентом.

Таким образом, небольшие размеры расчетной области с небольшим числом включений позволяют проводить расчеты на сетках, удовлетворяющих сформулированным требованиям.

Первые работы, в которых исследуются эффективные модули неоднородной среды, выполнены в соответствии с правилами механического смешивания. Так, в работах Фойгта используется гипотеза об однородности деформаций в среде. В работах Рейсса предполагается однородность напряжений. Эти решения образуют так называемую вилку Рейсса-Фойгта, ширина которой пропорциональна квадрату соотношений модулей фаз.

Для композитов со средней или высокой степенью заполнения характерно образование структуры с элементами ближнего порядка. Это приводит к возможности замены среды со случайным распределением включений на среду с регулярным строением (метод регуляризации). Существуют два способа решения этих задач, наиболее известные.

Первый способ связан с использованием двоякопериодических функций, когда решение ищется в виде разложения по этим функциям. Сами функции выбираются таким образом, что удовлетворяются граничные условия. Точность решения зависит от числа удерживаемых членов разложения в ряду.

Второй подход основан на переходе к краевой задаче теории упругости для конечной области. Такие задачи решаются методами механики деформируемого твердого тела.

Метод регуляризации плохо работает для систем с очень большой степенью заполнения, поскольку именно в таких системах элемент случайности (стохастичности) является определяющим в формировании эффективных свойств композита.

Существует еще так называемый метод самосогласования. В его основе лежит решение задачи об изолированной неоднородности в однородном поле напряжений в среде, обладающей искомыми эффективными характеристиками. Это решение используется для нахождения бесконечно малого изменения упругого модуля при внесении в среду дополнительной неоднородности. Эти методы лишь в некоторых случаях дают приемлемые результаты – как правило, для систем со слабо выраженными неоднородностями. Практически неприемлемы эти методы для систем, существенно нелинейных геометрически и физически.

Все эти методы имеют общий недостаток, который заключается в малом учете влияния структуры композита на его эффективные свойства. Более того, при моделировании обычно стараются исключить из рассмотрения реальную структуру материала. В то же время известно, что эта структура существенно меняет свойства материала при прочих равных условиях – при одной и той же степени заполнения, например, можно получить значительно отличающиеся по свойствам материалы за счет варьирования фракционного состава, размеров или формы включений.

В настоящее время одними из наиболее перспективных являются численные методы структурного моделирования. Они учитывают геометрическую организацию композита. Недостатки этих методов

сводятся к следующим обстоятельствам. Во-первых, это неопределенность свойств на границах между матрицей и включениями – межфазные слои. Наличие этих зон учесть в модели можно, но свойства их недостаточно изучены.

Следует отметить, что структура композита в большей мере влияет на его прочностные свойства, нежели на упругие эффективные свойства. Так, единичное малое изменение структуры может никоим образом не проявиться в изменении эффективных характеристик. В то же время перераспределение напряжений в окрестности такого изменения может привести к локальному разрушению, которое либо перерастет в магистральную трещину, либо приведет к существенному изменению характера работы композита. Поэтому иногда говорят, что прочность материала есть «структурно-чувствительная» характеристика.

#### 4. Структурно-механическая модель композита

Основная идея структурно-механической модели композита заключается в замене реального материала и реальных взаимодействий между элементами структуры некоторыми более простыми дискретно-механическими элементами аналоговой системы.

Любая модель сплошной среды имеет бесчисленное число степеней свободы – в каждой точке смещения являются непрерывными функциями ее положения, помимо других факторов – размеров и формы тела, вида нагрузки и способов закрепления, свойств материала. Если заменить эти непрерывные распределения некоторым конечным числом параметров, определяющих НДС среды, то расчет, несомненно, упрощается.

В структурно-механической модели распределенная по некоторому объему среды масса заменяется сосредоточенными в некоторых узлах массами (материальными точками), обладающими моментами инерции (в классическом понимании материальная точка не обладает моментами инерции), а взаимодействие отдельных элементов заменяется системой пружин, упругих стержней и т.п. Тем самым производится переход от сплошного континуума с бесконечным числом степеней свободы к дискретной модели, в которой набор параметров уже является конечным.

Некоторую аналогию можно провести с методами расчета ферм в теоретической механике. С одной стороны, для определения реакций опор на первом этапе расчета ферма рассматривается как абсолютно твердое тело. Далее анализ проводится для каждого из стержней, составляющих эту ферму. Таким образом, один и тот же объект может рассматриваться с разной степенью детализации.

Хотя при этом возникает некоторая условность модели, тем не менее налицо существенное снижение объема расчетов по сравнению с методами МСС. В тех случаях, когда требуется найти эффективные характеристики композита, этот подход достаточно оправдан.

По существу, этот подход означает замену задачи МСС более простой – задачей теоретической механики в сочетании с сопротивлением материалов.

Ясно, что возникает вопрос – какое количество структурных элементов необходимо ввести в рассмотрение, чтобы расчет по соответствующей схеме дал реальные или близкие к ним значения материала. С теоретической точки зрения результаты расчетов будут тем точнее, чем

ближе условная дискретная расчетная схема к исходному объекту, или чем больше степеней свободы учитывается в этой схеме.

Ответ на такой вопрос зависит от точности, которую необходимо получить, и от реального строения материала. Так, для волокнистого композита со случайной укладкой армирующих элементов получены следующие оценки.

При концентрации в пределах 50-85 % от предельно возможной с точностью 90 % расчет эффективных характеристик требует анализировать систему из 300-500 структурных элементов в виде упругих стержней, работающих на растяжение-сжатие и кручение.

Для плотных и разреженных случайных структур (в плоском случае включения представляют собой диски, в пространственном – шары) необходимо анализировать систему из 150-200 частиц.

## 5. Основы линейной механики деформируемого твердого тела

Основные гипотезы, лежащие в основе моделей механики сплошной среды, были выше сформулированы.

### 5.1. Теория деформаций

В общем случае перемещение любой точки среды зависит от ее координат. Само перемещение имеет три компоненты – вдоль осей декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$ , соответственно обозначим эти компоненты

$$u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3).$$

В каждой точке можно тогда определить три линейные деформации, которые представляют собой удлинения элементов среды вдоль соответствующих направлений

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (1)$$

и три угловых деформации, которые представляют собой изменения углов между первоначально взаимно перпендикулярными элементами среды в процессе деформирования

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (2)$$

Все эти соотношения можно записать в виде одного выражения

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Всего выражений получается 9, но в силу очевидного равенства

$$e_{ij} = e_{ji} \quad (4)$$

останется 6 различных соотношений.

Детали вывода этих соотношений приводить не будем, заметим лишь, что они получаются как следствия

- 1) определения самих линейных и угловых деформаций;
- 2) разложения перемещений в окрестности точки с координатами  $x_1, x_2, x_3$  в ряды Тейлора и удержания в этих разложениях минимального числа членов.

Положительные линейные деформации, как и ранее, означают растяжение.

Положительные угловые деформации отвечают такому изменению первоначально прямого угла, что он становится острым.

Эти знаки принимаются просто в силу традиций и своего рода договоренностей, особенного физического или механического смысла в них усматривать не следует.

Полученные 6 выражений образуют совокупность величин, которые определяют математический объект, называемый тензором второго ранга. В общем случае такой тензор определяется девятью компонентами. В силу равенства (4) этот тензор является симметричным и имеет 6 различных компонент.

Формально наш тензор записывается в виде таблицы чисел (матрицы) вида

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ранг тензора в математике определяется числом  $n$ , так что  $3^n$  определяет число его компонент. В соответствии с таким определением скаляр является тензором нулевого ранга, т.к. он определяется полностью своей величиной, одним числом, а  $1 = 3^0$ . Вектор можно рассматривать как тензор первого ранга, поскольку он определяется тремя компонентами, и  $3 = 3^1$ . Объект, который определяется девятью компонентами, можно рассматривать как тензор второго ранга, т.к.  $9 = 3^2$ .

Помимо такого формального определения ранга тензора для его компонент существуют правила, в соответствии с которыми они меняются при переходе от одной системы координат к другой. Если подробно рассмотреть, как меняются компоненты деформаций при переходе от одной системы координат к другой, окажется, что они подпадают под определение тензора второго ранга полностью.

Инвариантными называются величины, которые не меняются при переходе от одной системы координат к другой.

В этом отношении скалярная величина сама по себе является инвариантом – в самом деле, в любой систем координат скаляр определяется только своей величиной.

Для вектора инвариантом является его длина, или модуль. Понятно, что в любой декартовой системе координат длина вектора  $\mathbf{u}$  определяется через его компоненты

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad (6)$$

Если ввести другую систему отсчета, то компоненты вектора  $\mathbf{u}$  в общем случае изменятся, а длина его, подсчитанная в соответствии с (3), останется прежней.

Для симметричного тензора второго ранга существует три инварианта. Они также имеют в нашем случае механический смысл. Так, первый инвариант, представляющий собой сумму

$$I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} , \quad (7)$$

имеет смысл объемной деформации, т.е. такой, когда форма деформируемого объема не меняется, а меняется только его размер.

Два других инварианта записываются сложнее, а оба имеют смысл изменения формы при неизменном объеме.

В механике принято разделять деформированное состояние на две части – первая представляет собой объемную деформацию, вторая – формоизменение. Под таким разделением есть физический смысл, который заключается в том, что практически все материалы различным образом сопротивляются изменению объема и изменению формы.

Так, газы в свободном состоянии не сохраняют ни объем, ни форму.

Жидкости сохраняют объем (известно высказывание: «жидкость практически несжимаема»), но легко принимают форму сосуда, в который их наливают.

Твердые тела сохраняют как объем, так и форму, но при этом сопротивление их изменению формы и объема различно.

В связи с этим для описания поведения твердых деформируемых тел обычно делается деление деформации на две части.

Объемная деформация описывается с помощью так называемого шарового тензора. Для этого вводится величина средней деформации

$$e = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = I_1 / 3 , \quad (8)$$

и шаровой тензор записывается в виде

$$\begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} . \quad (9)$$

Деформация формоизменения получается формально вычитанием шарового тензора (9) из тензора полной деформации (5):

$$\begin{bmatrix} e_{11} - e & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - e & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - e \end{bmatrix} \quad (10)$$

Иногда этот тензор, который получил название девиатора деформаций, записывают в виде  $(e_{ij} - e\delta_{ij})$ . Здесь  $\delta_{ij}$  – т.н. символ Кронеккера, принимающий значение 1 при  $i = j$  и 0 во всех остальных случаях.

## 5.2. Условия совместности

6 компонентов деформаций выражаются через три перемещения. При этом считается, что перемещения заданы, а деформации определяются через них.

С тем же основанием можно переформулировать задачу и считать, что заданы деформации, а найти нужно смещения. Но тогда в силу (1) и (2) у нас для определения трех неизвестных – смещений – есть 6 уравнений. Такая ситуация приводит к понятию переопределенной системы, т.е. такой, в которой число уравнений больше числа неизвестных. В математике показывается, что такие системы либо не имеют решения вообще, либо для существования решения необходимо выполнение некоторых условий, которые носят название условий совместности.

Можно показать, что таких условий существует три, и только выполнение этих условий позволяет находить перемещения через заданные деформации.

В число новых уравнений МСС эти уравнения не включаются. Они трактуются иногда так, что являются следствиями геометрических соотношений (1) и (2).

С физической точки зрения выполнение условий совместности означает, что любая материальная точка сплошной среды при деформировании тела не «раздваивается», и никакие точки, различные до деформации, не сольются в одну после деформации. В связи с этим уравнения совместности очень часто называют уравнениями неразрывности.

## 5.3. Теория напряжений

Напряженное состояние в каждой точке тела описывается девятью составляющими. Этот факт можно легко усмотреть из следующего рассуждения. На любой элементарной площадке с ориентацией, определяемой направлением нормали к площадке, в общем случае существует вектор напряжения, ориентированный произвольным образом. Его можно разложить на три составляющие – одну вдоль нормали, две другие – по взаимно перпендикулярным касательным. В той же точке изменим направление нормали, т.е. повернем площадку – и получим в общем случае новые значения для вектора напряжений и его трех составляющих.

Таким образом, в каждой точке в зависимости от направления проведенной через нее площадки получаем разные вектора напряжений и их составляющие. Число таких площадок бесконечно, и описать полностью напряженное состояние именно таким образом невозможно.

Но если ввести в данной системе координат три площадки с нормальми вдоль осей, то получим три вектора напряжений на этих площадках и соответственно 9 составляющих. Оказывается, если они известны, то становится возможным уже для любой наклонной площадки выразить вектор напряжений и его составляющие через эти 9 величин. Для этого достаточно только задать ориентацию площадки, или направление нормали к этой площадке.

Поэтому говорят, что напряженное состояние в точке полностью определяется девятью величинами, которые образуют тензор напряжений, а его можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Аналогично теории деформаций вводится шаровой тензор напряжений и девиатор. Существуют и три инварианта этого тензора, причем смысл первого – среднее (гидростатическое) давление.

Если рассмотреть элементарный объем материала, то условия его равновесия под действием напряжений в среде приводят к уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом правила суммирования по повторяющемуся индексу, а также правила обозначения производной эти три соотношения можно записать в виде единого соотношения

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

Здесь величины  $X_i$  представляют собой компоненты массовых сил.

Таким образом, мы ввели 3 составляющих вектора перемещений  $u_i$  и по 6 компонент (с учетом симметрии) тензоров деформаций  $e_{ij}$  и напряжений  $\sigma_{ij}$ , т.е. всего 15 величин, которые определяют напряженное состояние (НДС) деформируемой среды.

Решение такой системы требует наличия 15 соотношений.

У нас есть 6 соотношений для деформаций, и три уравнения равновесия, т.е. не хватает 6 уравнений. К тому же следует учесть, что все соотношения, которые мы использовали, записаны безотносительно свойств материала. Они равным образом справедливы как для упругих, так и неупругих сред, для жидкостей в общем случае и т.д.

#### 5.4. Уравнения связи

Недостающие уравнения и должны конкретизировать свойства среды, т.е. связать между собой напряжения и деформации. Эти уравнения так и называются – физические соотношения, или уравнения связи.

Если учесть, что упругая однородная изотропная среда характеризуется только разницей в сопротивлении изменению объема и изменению формы, то эти два своего рода крайние случаи описываются с помощью двух упругих постоянных. Эти постоянные так и называются – модуль объемного сжатия  $K$  и модуль сдвига  $G$ .

Когда мы рассматриваем более общий случай материала, не обладающего указанными выше свойствами, то связь между напряжениями и деформациями должна с обеих сторон включать все компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Композитные материалы, даже если они работают в идеальной упругости, не могут считаться однородными, строго говоря, и уж тем более изотропными. Особенно последнее касается КМ с наполнителями в виде ориентированных волокон.

Для таких материалов соотношения упругости в простейшем линейном случае будут

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \dots\dots & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{13} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

В этих соотношениях коэффициенты  $a_{ij}$  ( $i, j = 1 \dots 6$ ) представляют собой т.н. упругие постоянные.

Наиболее общая форма записи соотношений (14) между деформациями и напряжениями в упругом случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Это запись закона Гука в так называемом обобщенном виде. Постоянные  $C_{ijkl}$  в этом выражении – тензор жесткостей, тензор четвертого ранга. В общем случае этот тензор содержит 81 компоненту. Поскольку тензоры деформаций и напряжений симметричны, число независимых компонент сокращается до 36. Эти компоненты и фигурируют в выражении (14). Когда речь идет об упругом материале, для которого существует такое понятие, как упругий потенциал, число независимых компонент сокращается до 21. Для однородного материала эти компоненты не зависят от координат.

В теории упругости напряжения выражаются через производную от энергии деформирования по деформации

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \text{где } W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (16)$$

Необходимо, чтобы тензор постоянных был симметричным, т.к. входящие в (16) справа и слева компоненты напряжений и деформаций принадлежат симметричным тензорам:

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$

В итоге число независимых постоянных сокращается до 21.

Дальнейшее сокращение числа упругих постоянных возможно в случаях, когда упругая среда обладает симметрией.

Введем обозначения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}.$$

и для компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33},$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = \varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = \varepsilon_{12}.$$

Тогда при наличии 21 независимой упругой постоянной (15) можно переписать в векторно-матричном виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}.$$

где  $C_{ij}$  - симметричная матрица. В сокращенной форме это соотношение можно представить в виде

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Если материал имеет плоскость упругой симметрии, то число постоянных в этом соотношении сокращается до 13 независимых значений.

При наличии трех плоскостей упругой симметрии (например, ортогонально армированный материал) остается 9 независимых постоянных.

Для трансверсально изотропного материала одна из плоскостей ортотропии (предыдущий случай) становится плоскостью изотропии. В этом случае остается 5 упругих постоянных.

Наконец, в случае однородного изотропного упругого материала остается лишь две упругие постоянные, и матрица постоянных имеет вид

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 1/2(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ & & & & & 1/2(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}.$$

В этом частном случае изотропии соотношения напряжения-деформации обычно записываются в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе.

Если ввести шаровые тензоры деформаций и напряжений и соответствующие им девиаторы:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk},$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk},$$

то соотношения напряжения-деформации можно переписать в виде

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij},$$

$$\sigma_{kk} = 3k \varepsilon_{kk}.$$

Здесь появилась «новая» постоянная  $k$  – объемный модуль. Фактически она не является новой независимой переменной, а выражается через ранее введенные величины. Если учесть, что на практике часто используются еще модуль Юнга при растяжении  $E$  и модуль сдвига материала  $G$ , возникает впечатление обилия постоянных. На самом деле из всех постоянных независимы только две.

Наиболее распространенные сочетания постоянных: модуль объемного сжатия  $k$  и модуль сдвига  $G$ ; коэффициенты Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ ; модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Переход от каждой пары к другой описывается, например, зависимостями вида

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)};$$

и т.п.

### 5.5. Вариационная и дифференциальная постановка задач МСС

Описанная выше постановка задачи, включающая в себя дифференциальные и алгебраические уравнения, называется дифференциальной. Это название связано с тем, что получение этих уравнений делается на основе анализа НДС так называемого дифференциально малого объема материала. Так, деформации в точке получаются введением непрерывной функции смещения в точке и разложением в ряд Тейлора ее в соседней точке, отстоящей на расстоянии  $dx$ . Уравнения равновесия получаются из анализа дифференциально малого объема в виде параллелепипеда (при использовании декартовой системы координат).

Формально любую систему уравнений вида

$$f_i(x_k) = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

можно заменить одним уравнением, например, вида

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x_k)| = 0. \quad (17)$$

В самом деле, если уравнение (17) выполняется, то необходимо выполняются и соотношения (16).

Очевидно, что вместо суммы модулей величин в (17) можно использовать сумму квадратов (и любых четных степеней) функций, входящих в систему (16).

В этом отношении и всю систему уравнений МСС можно заменить формально одним соотношением. Но обычно идут по другому пути.

Строится некоторое выражение (функционал), условиями экстремума которого и являются дифференциальные и алгебраические уравнения дифференциальной постановки. В зависимости от того, какова формулировка, или вид, функционала, следствиями его экстремума могут

быть как все уравнения вида (16), так и часть из них. Поэтому в МСС различается целый ряд функционалов, носящих имена Рейсснера, Ху-Вашицу, Лагранжа, Кастильяно и др. Соответствующие формулировки носят название вариационных постановок задач.

С формальной точки зрения дифференциальная и вариационная постановки полностью эквивалентны – на гладких решениях. Это условие гладкости решения появляется потому, что по определению дифференциальная постановка предполагает использование дифференцируемых функций, описывающих НДС.

С этой точки зрения вариационная постановка, в виде построения функционала и его исследования, является более общей.

### Теоремы о минимуме

В теории упругости имеются два фундаментальных энергетических принципа, которые выполняются для любой упругой среды независимо от ее однородности, изотропности и т.д. В соответствии с этими принципами некоторый функционал энергетического типа принимает минимальное значение для действительных решений краевой задачи, в отличие от других «допустимых» значений переменных, описывающих НДС среды.

Эти принципы формулируются в виде теорем **о минимуме потенциальной энергии и о минимуме дополнительной энергии**.

Пусть отыскивается решение статической задачи теории упругости с заданными объемными силами  $F_i(x_k)$  и граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= f_i & \text{на } S_\sigma, \\ u_i &= U_i & \text{на } S_u. \end{aligned}$$

где  $S$  – полная поверхность тела объема  $V$ , состоящая из двух частей, на которых соответственно заданы напряжения или перемещения,  $n_j$  – компоненты единичной внешней нормали к поверхности.

Определим далее функционал потенциальной энергии в виде

$$U_\varepsilon = \int_V [W(\varepsilon_{ij}) - F_i u_i] dv - \int_{S_\sigma} f_i u_i ds, \quad (18)$$

где  $W$  определяется по (16).

Этот функционал представляет собой не что иное, как потенциальную энергию деформации за вычетом работы внешних объемных и поверхностных сил.

Назовем допустимым полем перемещений такое поле  $\tilde{u}_i(x_j)$ , которое подчиняется граничным условиям в перемещениях, а в остальном произвольно (разве еще только непрерывно дифференцируемо). Тогда **теорема о минимуме потенциальной энергии** формулируется следующим образом:

среди всех допустимых полей перемещений абсолютный минимум функционала потенциальной энергии (18) достигается лишь для истинного поля перемещений, т.е. такого, для которого выполняются все соотношения теории упругости.

Доказательство этой теоремы основано на свойстве положительной определенности потенциальной энергии деформирования

$$W(\varepsilon_{ij}) \geq 0.$$

\* \* \*

Теорема о минимуме дополнительной энергии формулируется аналогичным образом. Функционал дополнительной энергии определяется выражением

$$U_\sigma = \int_V W(\sigma_{ij}) dv - \int_{S_u} \sigma_i U_i ds, \quad \sigma_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (19)$$

Здесь энергия деформирования выражается через напряжения

$$W = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \quad \text{где } S_{ijkl} -$$

тензор упругих податливостей.

Определим допустимые напряжения как такие, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и условиям в напряжениях, а в остальном произвольны (с условием дифференцируемости). Тогда **теорема о минимуме дополнительной энергии:**

среди всех допустимых напряженных состояний реализуется такое, которое обеспечивает минимум функционала (19), при этом удовлетворяются уравнения совместности деформаций.

## 5.6. Полная система уравнений. Граничные условия

Таким образом, с определением уравнений связи, а число этих уравнений равно 6, число неизвестных в модели МСС сравнивается с числом уравнений.

В самом деле, полная система уравнений включает в себя:

- 6 геометрических соотношений;
- 3 уравнения равновесия;
- 6 уравнений связи.

В итоге для 15 неизвестных (3 перемещения, 6 деформаций и 6 напряжений) есть 15 уравнений, и систему можно считать замкнутой.

Однако часть этих соотношений представляет собой дифференциальные уравнения, для интегрирования которых необходимо иметь условия для определения соответствующих постоянных.

Эти условия представляют собой т.н. граничные условия.

С физической точки зрения понятно, что внешняя нагрузка может быть задана различными способами. В общем случае существует три варианта.

1. Задаются напряжения на поверхности расчетной области в виде вектора напряжений. В трехмерном случае это означает, что в каждой точке внешней поверхности задаются три компоненты вектора напряжений. Соответственно в двумерном случае это две компоненты, в одномерном – одна.

2. Задаются смещения на внешней поверхности в виде вектора смещений. Опять в зависимости от размерности задачи возникают варианты с тремя, двумя и одной компонентой вектора смещений.

3. Условия в так называемой смешанной форме, когда вдоль одних направлений на внешней поверхности задаются компоненты напряжений, вдоль других – смещений. Важно понимать, что нельзя задавать вдоль одних и тех же направлений и смещения, и напряжения. Если такие условия все же задать, то получим, что они либо дублируют друг друга, либо, что вероятнее, противоречат друг другу. Поэтому если вдоль одной оси задано смещение, то компоненты напряжений можно задавать лишь для других осей.

## **5.7. Постановка задач**

Решая конкретную задачу теории упругости, нужно использовать все выписанные соотношения применительно к ее постановке. При этом нужно понимать следующее.

1. Уравнения, связывающие между собой смещения и деформации (1) и (2), в геометрически линейном случае справедливы применительно к любой задаче и для любой среды (даже необязательно упругой).

2. Уравнения равновесия справедливы для любой среды – газообразной, жидкой, твердой. Поэтому в любой задаче это одни и те же уравнения вида (12).

3. Уравнения состояния, или уравнения связи, характеризуют материал – как он реагирует на деформирование, какие при этом возникают в нем напряжения. Эти уравнения выбираются в соответствии со справочными данными, полученными из экспериментов.

4. Граничные условия ставятся для конкретной задачи, при этом их постановка связана с формой и размерами расчетной области, со способом приложения нагрузки и ее конкретными видом.

По существу, это означает, что именно постановка граничных условий конкретизирует задачу.

Итак, постановка задачи включает в себя:

геометрические уравнения;

уравнения равновесия;

уравнения связи;

граничные условия.

Кроме этого, постановка задачи не завершена до тех пор, пока нет данных о свойствах материалов, т.е. постоянных, входящих в уравнения связи.

## **5.8. Решение физически нелинейных задач**

При наличии методов решения упругих задач решение любой физически нелинейной задачи, так или иначе, сводится к последовательности решения линейных задач. По существу строится некоторый итерационный процесс, и разные методы решения отличаются способами организации этого процесса.

Наиболее известными и распространенными методами решения нелинейных задач можно считать три.

### **Метод последовательных нагружений, или метод касательного модуля**

Суть метода заключается в том, что процесс приложения нагрузки разбивается на ряд этапов или шагов. На первом шаге решается упругая задача с исходными свойствами материала – для однородной изотропной среды это две упругих постоянных. Очевидно, для правомерности такого решения нужно сделать первый шаг по нагрузке относительно небольшим. Полученное решение проверяется с точки зрения согласования упругого решения с реальной кривой напряжения-деформации. Если это решение «ложится» на кривую  $\sigma \sim \varepsilon$ , то решение строится на следующий шаг по

нагрузке с использованием той же упругой зависимости. Если же появляется рассогласование, то при решении новой упругой задачи упругие характеристики подправляются в соответствии с видом кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ . Фактически это означает, что на очередном шаге в качестве модуля упругости принимается уже не исходное значение его, а подправленное, что на графике кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  соответствует направлению касательной к этой кривой. Соответствующий модуль называется касательным. Таким образом, общее решение получается суммированием отдельных решений, полученных на каждом шаге по нагрузке.

Фактически это означает, что продвижение вдоль кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  заменяется движением по ломаной линии, с той или иной точностью аппроксимирующей кривую. Точность этой аппроксимации зависит от шага по нагрузке – чем меньше шаг, тем точнее полученное решение.

### **Метод секущего модуля**

Этот метод предполагает решение условно упругой задачи, когда предполагается, что можно прямой начальный участок кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  считать неограниченно длинным. Условность заключается в том, что на самом деле материал при действии заданной нагрузки работает уже за пределами упругости. Ясно, что полученное решение неправильно – материал конструкции не может выдержать рассчитанных нагрузок. По диаграмме  $\sigma \sim \varepsilon$  определяем те значения напряжений, которые реально должны отвечать полученным деформациям. Это дает точку на кривой, через которую можно провести прямую линию из начала координат. Если бы материал конструкции подчинялся такой зависимости, то решение было бы точным. Но ясно, что задачу нужно решать снова – при том модуле упругости, который определяется проведенной прямой. Этот модуль носит название секущего модуля. Новое решение опять дает значения напряжений и деформаций, которые тоже не ложатся точно на кривую  $\sigma \sim \varepsilon$ . Опять строим новый секущий модуль и т.д. – до тех пор, пока очередная итерация не даст значения напряжений и деформаций, достаточно близкое к кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ .

### **Метод упругих решений**

Как и в предыдущем методе, решение начинается с упругой постановки при неограниченной упругости материала. Получается результат, в котором деформации и напряжения упругие. Для полученных значений деформаций находим напряжения из кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , подстановка которых в уравнения равновесия приведет к тому, что эти уравнения не будут выполняться. Возникает так называемая невязка – вместо нуля в

правой части уравнений равновесия получается некоторая конечная величина. Ее можно расценивать как дополнительные массовые силы, которые появляются за счет неточности решения. Эти силы учитываются при решении вновь упругой задачи с исходным модулем упругости, опять возникает невязка и т.д. – итерационный процесс заканчивается при достижении приемлемой точности.

### **Точность**

Все рассмотренные выше методы являются приближенными. Возникает вопрос, какая точность решения может нас устроить. Это, в частности, определит критерий, по которому заканчивается итерационный процесс построения решения.

Для определения требуемой и достаточной точности можно использовать следующие соображения. Любая задача ставится и решается с использованием, помимо всех уравнений, граничных и начальных условий, еще и таких данных, как форма и размеры конструкции, свойства материала, конкретные параметры нагрузки. Понятно, что все эти данные имеют определенную точность – как геометрические характеристики, так и свойства материала и параметры нагрузки. Любое решение будет зависеть от этих данных, и довольно очевидно, что нет смысла строить модель и алгоритм ее анализа с точностью большей, чем точность исходной информации.

Из перечисленных определяющих факторов наибольшие погрешности связаны с определением свойств материала. Известно, что испытания в лабораторных условиях даже образцов из одной партии дает некоторый спектр результатов, а не единую цифру. Разброс свойств иногда достигает величин порядка десяти процентов – для такого материала нет смысла строить решение с большей точностью.

## **6. Анализ НДС КМ на основе соотношений МДТТ.**

### **Представительный объем**

В этом случае композит рассматривается, по существу, как конструкция, отдельными частями которой являются элементы структуры. Свойства каждого из элементов принимаются точно известными (детерминированный подход) или с некоторой степенью вероятности в границах известного диапазона (вероятностный подход). В последнем случае как свойства элементов (фаз) материала, так и само распределение элементов структуры по расчетной области может носить вероятностный характер.

При использовании детерминированного подхода свойства каждого элемента «точно» определены, что означает следующее. Фактически любые свойства материалов, получаемые экспериментально, представляют собой обработку некоторого массива данных. Ясно, что при получении этих данных существует некоторый разброс количественных характеристик. Так, даже для простейшей модели материала – идеально упругого тела – модуль упругости и коэффициент Пуассона для разных образцов будут отличаться. После набора некоторого массива экспериментальных данных проводится осреднение их, и эти осредненные величины и принимаются за детерминированные характеристики материала.

Попутно можно отметить, что величина разброса характеризует стабильность материала, известное постоянство его свойств. Она зависит от большого числа факторов – это стабильность свойств сырья, технологических процессов, даже средств измерения и контроля.

Стабильность влияет на такой показатель конструкции, как запас прочности. Если бы разброс отсутствовал вообще, достаточно было бы выполнить конструкцию с учетом ограничений на расчетные значения деформаций и/или напряжений. Поскольку реальные свойства материалов (впрочем, как и размеры и форма изделия, а также номинальная нагрузка) имеют некоторый разброс, необходимо это учитывать, закладывая в изделие запас прочности. Этот запас должен быть тем больше, чем больше разброс всех указанных выше величин, в том числе и свойств материала.

Внутри каждого из элементов структуры его свойства принимаются постоянными, т.е. каждый из элементов по масштабу много больше элементов следующего уровня, составляющего, в свою очередь, его структуру. Выше уже шла речь, по существу, о представительном

объеме – части материала, которая дает информацию о свойствах материала в целом. Это вопрос для композитов регулярного и нерегулярного строения может решаться по-разному. Так, при анализе композита с регулярным строением часто достаточно ограничиться анализом ячейки периодичности, чтобы получить представление о свойствах материала в целом. При численном решении на отдельных границах этой ячейки, служащей расчетной областью, можно поставить условия симметрии, а все границы области считать прямоугольными (если композит представляет собой двоякопериодическую систему).

Сложнее дело обстоит для композитов со случайной структурой. В этом случае понятие ячейки периодичности ввести нельзя. Два возможных подхода сводятся к следующему. В первом случае рассматривается достаточно большая по размерам область.

Размер этой области влияет на точность получаемых оценок. Крайние оценки будут получаться в тех случаях, когда область настолько мала, что в ней представлены только матрица или только армирующее включение. Тогда и «эффективные» характеристики будут соответствовать свойствам матрицы или армирующих включений.

Если область взять достаточно больших размеров, чтобы в ней были представлены многие армирующие включения, полученные свойства будут соответствовать свойствам материала в целом.

Таким образом, размер области влияет на точность полученных оценок эффективных характеристик материала. Более того, можно сказать, что размер представительного объема зависит от точности, с которой следует получить значения эффективных характеристик.

В матрице присутствует достаточно большое число включений, так что свойства представительного объема можно считать свойствами всего материала. Но в этом случае сильно усложняется вычислительный алгоритм. Каждое включение в расчетной области требует постановки и реализации контактных условий. По некоторым оценкам, появление лишней границы внутри расчетной области по усложнению алгоритма сравнимо с повышением размерности задачи. Таким образом, этот подход предъявляет высокие требования как к возможностям вычислительной техники, так и к программному продукту.

Во втором подходе анализу подвергается область сравнительно небольших размеров. Она получается наложением рамки, ограничивающей размеры расчетной области, на карту образца. Тогда расчет ведется для области, ограниченной этой рамкой, с учетом всех элементов, попавших внутрь расчетной области. Ясно, что при случайном наложении рамки на расчетную область можно получить и результаты, далекие от действительных. Последними можно считать

результаты, полученные, строго говоря, для области неограниченных размеров.

По существу, в этом случае проводится ряд расчетов для областей небольших размеров, внутренняя геометрия которых определяется случайным образом. Естественно, что все получаемые характеристики имеют некоторый разброс. Этот разброс тем меньше, чем больше размер расчетной области (рамки) в каждом расчете. Границы разброса определяются значениями характеристик матрицы и включений. Эти значения полностью определяют результат, когда в расчетной области есть только матрица или только включение.

За действительные характеристики материала можно принимать некоторые средние значения, полученные из серии расчетов такого рода.

## Физически нелинейные процессы деформирования материалов

### Механические модели сплошной среды

Упругое тело, для которого выполняется соотношение закона Гука, условно можно представить в виде пружины, рис. 1, а. Упругий элемент, для которого связь между смещениями и приложенными силами определяется линейным законом, имитирует поведение упругого однородного изотропного материала под нагрузкой.

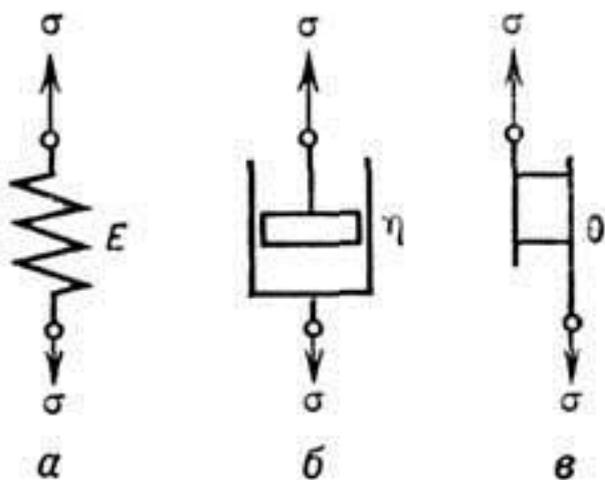


Рис. 1. Механические модели реологических сред: а - упругое тело Гука; б - вязкая жидкость Ньютона; в - жёсткопластическое тело Сен-Венана.

В упругом состоянии деформации обратимы, и вся энергия, затраченная на деформирование, при разгрузке возвращается (диссипация энергии отсутствует). Для любого твердого тела процесс деформирования начинается с упругой деформации. Изотропное тело имеет две константы

упругости - модуль упругости и коэффициент Пуассона. Для анизотропных тел число упругих констант в общем случае равно 21. Из основных констант упругости можно получить их производные - модуль сдвига  $G$ , модуль объемной реформации  $K$  и постоянную Ламе  $\lambda$ .

Вязкое сопротивление - в некотором смысле противоположно упругому - работа внешних сил, уравновешенных силами вязкого сопротивления, полностью рассеивается в виде тепла. Вязкое сопротивление определяется величиной касательной силы, необходимой для поддержания ламинарного скольжения слоев, или течения с определенной скоростью. Таким образом, вязкость можно определить как сопротивление течению.

Представление о вязкоупругой деформации дает поведение моделей, сочетающих свойства вязкости и упругости в такой последовательности: при нагружении тела в нем возникает мгновенная упругая деформация, подчиняющаяся закону Гука; далее при том же максимальном напряжении наблюдается вязкая деформация, подчиняющаяся закону Ньютона.

Наиболее распространенными в теории линейной вязко-упругости являются реологические модели Максвелла и Фойгта, дающие связь между напряжениями и деформациями и скоростями их изменения:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{- модель Максвелла,}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad \text{- модель Фойгта,}$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости.

В модели Фойгта упругий и вязкий элементы (рис. 1, а и б) соединены параллельно, в модели Максвелла – последовательно.

Очевидно, что последовательно обобщая модели, построенные из вязких и упругих элементов, можно получить связи между напряжениями и деформациями и их производными в виде двух дифференциальных операторов в виде

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} + \dots = b_0 \varepsilon + b_1 \dot{\varepsilon} + b_2 \ddot{\varepsilon} + \dots$$

Удерживая в этих соотношениях то или иное количество слагаемых, получаем последовательно модель упругого тела, модель Фойгта, модель Максвелла и т.д.

## 6.2. Вязкоупругость

Свойства материалов, получившие название вязкоупругости, проявляются двояко – в идее ползучести и в виде релаксации.

Ползучестью называется явление роста деформаций при фиксированном значении нагрузки.

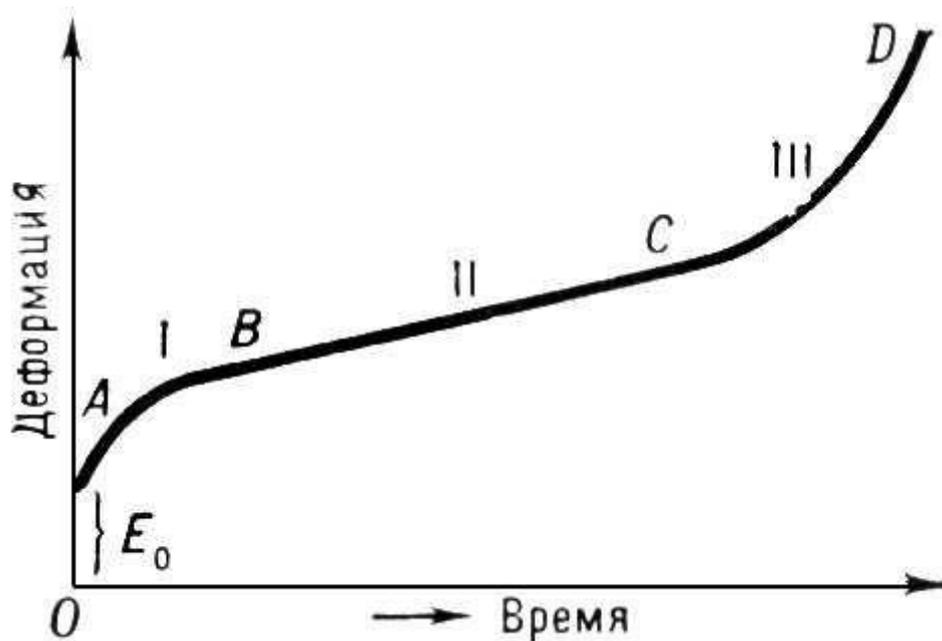
Релаксацией называется явление уменьшения напряжений в нагруженном образце материала при фиксированном значении деформации.

### Ползучесть

Явление *ползучести* было замечено несколько сот лет назад, однако систематические исследования *ползучести* металлов и сплавов, резин, стекло относятся к началу XX века и особенно к 40-м годам, когда в связи с развитием техники столкнулись, например, с *ползучестью* дисков и лопаток паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и ракет, в которых значительный нагрев сочетается с механическими нагрузками. Потребовались конструкционные материалы (жаропрочные сплавы), детали из которых выдерживали бы нагрузки длительное время при повышенных температурах. Долгое время считали, что *ползучесть* может происходить только при повышенных температурах, однако *ползучесть* имеет место и при очень низких температурах, так, например, в кадмии заметная *ползучесть* наблюдается при температуре  $-269\text{ C}^\circ$ , а у железа — при  $-169\text{ C}^\circ$ .

*Ползучесть* наблюдают при растяжении, сжатии, кручении и других видах нагружения. В реальных условиях службы жаропрочного материала *ползучесть* происходит в весьма сложных условиях нагружения.

*Ползучесть* описывается так называемой кривой *ползучести*, которая представляет собой зависимость деформации от времени при постоянных температуре и приложенной нагрузке (или напряжении).



Её условно делят на три участка, или стадии:

- AB — участок неустановившейся (или затухающей) *ползучести* (стадия I),
- BC — участок установившейся *ползучести* — деформации, идущей с постоянной скоростью (стадия II),
- CD — участок ускоренной *ползучести* (стадия III),
- $E_0$  — деформация в момент приложения нагрузки (стадия IV),
- точка D — момент разрушения.

Как общее время до разрушения, так и протяжённость каждой из стадий зависят от температуры и приложенной нагрузки. При температурах, составляющих 40 %-80 % температуры плавления металла (именно эти температуры представляют наибольший технический интерес), затухание *ползучести* на первой её стадии является результатом деформационного упрочнения (наклёпа). Так как *ползучесть* происходит при высокой температуре, то возможно также снятие наклёпа — так называемый возврат свойств материала. Когда скорости наклёпа и возврата становятся одинаковыми, наступает II стадия *ползучести*. Переход в III стадию связан с накоплением повреждения материала (поры, микротрещины), образование которых начинается уже на I и II стадиях.

### Ползучесть и пластичность

Описанные кривые *ползучести* имеют одинаковый вид для широкого круга материалов — металлов и сплавов, ионных кристаллов, полупроводников, полимеров, льда и других твёрдых тел. Структурный же механизм *ползучести*, то есть элементарные процессы, приводящие к *ползучести*, зависит как от вида материала, так и от условий, в которых происходит *ползучесть*. Физический механизм *ползучести*, особенно при высоких температурах, имеет преимущественно диффузионную природу и тем отличается от механизма деформирования при пластичности, которая связана с быстрым скольжением вдоль атомных плоскостей зёрен поликристалла (Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твёрдого тела).

Всё многообразие элементарных процессов необратимой пластической деформации, приводящих к *ползучести*, можно условно разделить на процессы, осуществляемые движением дислокаций (дефектов в кристалле), и процессы, обусловленные диффузией. Последние имеют место у аморфных тел при всех температурах их существования, а также у кристаллических тел, в частности у металлов и сплавов, при достаточно высоких температурах. При температурах, близких к температурам плавления, различие между *ползучестью* и пластичностью становится менее выраженным (Тайра, Отани. Теория высокотемпературной прочности материалов). При неизменной общей деформации напряжения в нагруженном теле с течением времени убывают вследствие *ползучести*, то есть происходит релаксация напряжений.

### Жаропрочность

Высокое сопротивление *ползучести* является одним из факторов, определяющих жаропрочность. Для сравнительной оценки технических материалов сопротивление *ползучести* характеризуют пределом *ползучести* — напряжением, при котором за заданное время достигается данная деформация. В авиационном моторостроении принимают время, равное 100—200 ч, при конструировании стационарных паровых турбин — 100 000 ч. Иногда сопротивление *ползучести* характеризуют величиной скорости деформации по прошествии заданного времени. Скорость полной деформации  $\dot{\epsilon}$  складывается из скорости  $\dot{\epsilon}_e$  упругой деформации и скорости  $\dot{\epsilon}_\pi$  деформации *ползучести*.

### Положение в теории

Теория *ползучести* близко примыкает к теории пластичности, однако в связи с разнообразием механических свойств твёрдых тел единой теории *ползучести* нет. Для металлов большей частью пользуются теорией течения:  $\dot{\epsilon}_\pi = f(s, t)$ , где  $s$  — напряжение,  $t$  — время, которая удовлетворительно описывает *ползучесть* при напряжениях,

изменяющихся медленно и монотонно, но имеет существенно нелинейный характер зависимости  $\dot{\varepsilon}_\pi$  от  $s$ .

Более полное описание ползучести даёт теория упрочения:  
$$\dot{\varepsilon}_\pi = f(s, \dot{\varepsilon}_\pi),$$

которая удобна для приближённого анализа кратковременной *ползучести* при высоком уровне напряжений. Теория упрочения правильно улавливает некоторые особенности ползучести при изменяющихся напряжениях, однако её применение связано с большими математическими трудностями.

В механике полимеров обычно пользуются теорией наследственности:

$$\phi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

где  $K(t - t)$  - так называемые ядро последствия, которое характеризует, в какой мере в момент времени  $t$  ощущается влияние (последствие) на деформацию единичного напряжения, действовавшего в течение единичного промежутка времени в более ранний момент  $t$ . Так как напряжение действует и в другие моменты времени, то суммарное последствие учитывается интегральным слагаемым. Теория наследственности определяет полную деформацию и даёт качественное описание некоторых более сложных явлений (например, эффекта обратной ползучести).

### **Влияние различных факторов на механические характеристики конструкционных материалов**

Зависимость механических характеристик конструкционных материалов от их химического состава, внешних условий и условий нагружения весьма многообразна; отметим наиболее существенные, характерные для типичных условий эксплуатации конструкций.

#### **Влияние уровня нагрузки**

Экспериментальные данные показывают, что скорость ползучести – монотонно возрастающая функция напряжений

**Влияние содержания углерода.** Введение различных легирующих добавок в металлы позволяет значительно повысить прочностные характеристики сплавов. На рис. 1 показано влияние процентного содержания углерода на механические свойства конструкционной стали. Как видно, с увеличением содержания углерода, временное сопротивление

повышается в несколько раз; однако при этом значительно ухудшаются пластические свойства; относительное удлинение  $\delta$  и относительное сужение  $\psi$  при разрыве уменьшаются.

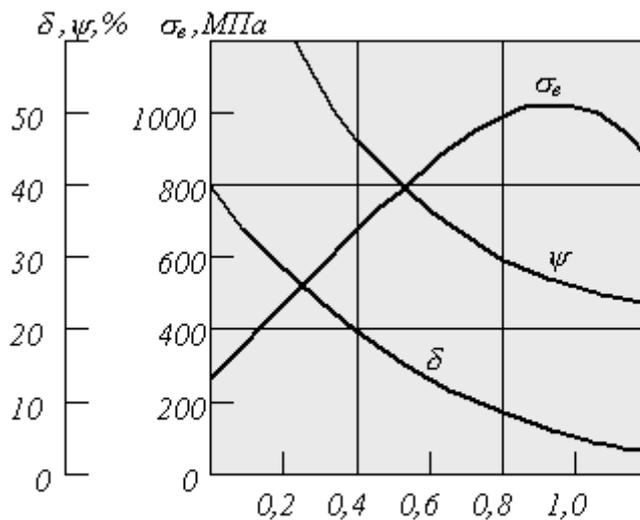


Рис. 1. Влияние процентного содержания углерода

**Влияние температуры окружающей среды.** Повышенные температуры оказывают существенное влияние на такие механические характеристики конструкционных материалов, как ползучесть и длительная прочность. *Ползучестью* называют медленное непрерывное возрастание пластической (остаточной) деформации под воздействием постоянных нагрузок. *Длительной прочностью* называется зависимость разрушающих напряжений (временного сопротивления) от длительности эксплуатации. Свойства ползучести и длительной прочности проявляются у углеродистых сталей при  $T > 300^\circ\text{C}$ , для легированных сталей при  $T > 350^\circ\text{C}$ , для алюминиевых сплавов при  $T > 100^\circ\text{C}$ . Некоторые материалы проявляют эти свойства и при обычных температурах.

Мерой оценки ползучести материала является *предел ползучести* - напряжение, при котором пластическая деформация за определенный промежуток времени достигает заданной величины. В некоторых случаях сопротивление ползучести оценивается величиной скорости деформации по прошествии заданного времени. При обозначении предела ползучести указывается величина деформации, время и температура испытаний. Например, для жаропрочного сплава ХН77ТЮР при температуре  $700^\circ\text{C}$  за время 100 часов и деформации ползучести 0,2% предел ползучести составляет 400 МПа:  $s_{0,2/100}(700) = 400$  МПа.

Ползучесть сопровождается *релаксацией напряжений* - самопроизвольным уменьшением напряжений с течением времени при неизменной деформации. Скорость релаксации напряжений возрастает при

повышении температуры. Мерой скорости релаксации *служит время релаксации* - промежуток времени, в течение которого напряжение уменьшается по сравнению с начальным значением в  $e = 2,718$  раза.

Прочность материала при повышенных температурах оценивается *пределом длительной прочности* - напряжением, при котором материал разрушается не ранее заданного времени. При обозначении предела длительной прочности указывается продолжительность нагружения и температура испытания. Так, для сплава ХН77ТЮР при температуре  $700^{\circ}\text{C}$  и времени 1000 часов предел длительной прочности составляет  $s_{\text{дл}100}(700) = 330$  МПа. При кратковременных испытаниях для этого же сплава при температуре  $700^{\circ}\text{C}$  пределы прочности и текучести соответственно равны:  $s_{\text{в}} = 830$  МПа,  $s_{0,2} = 560$  МПа.

Влияние повышенных температур на характеристики прочности и пластичности можно проследить на рис. 2 и 3, где представлены осредненные результаты экспериментов для 1-углеродистой стали, содержащей 0,15% углерода; 2-0,40% углерода, 3-хромистой стали. Прочность углеродистых сталей с повышением температуры до  $650-700^{\circ}\text{C}$  снижается почти в десять раз. Наиболее резкое снижение  $s_{\text{в}}$  наблюдается для алюминиевых сплавов. Наибольшими значениями  $s_{\text{в}}$  при высоких температурах обладают литые жаропрочные сплавы, содержащие 70-80% никеля. Снижение пределов текучести  $s_{\text{т}}$  с повышением температуры происходит примерно так же, как и снижение  $s_{\text{в}}$ . Для углеродистых сталей характерным является ухудшение пластических свойств (охрупчивание) при температурах около  $300^{\circ}\text{C}$  (кривая 2 на рис. 3).

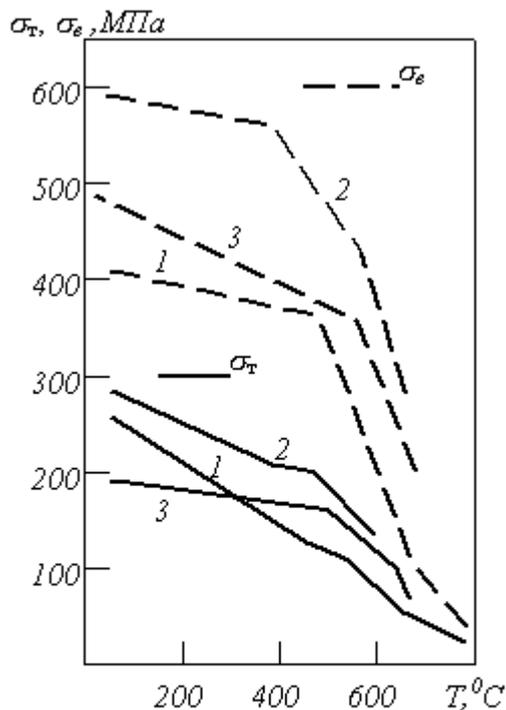


Рис.2. Влияние температуры на упругие свойства

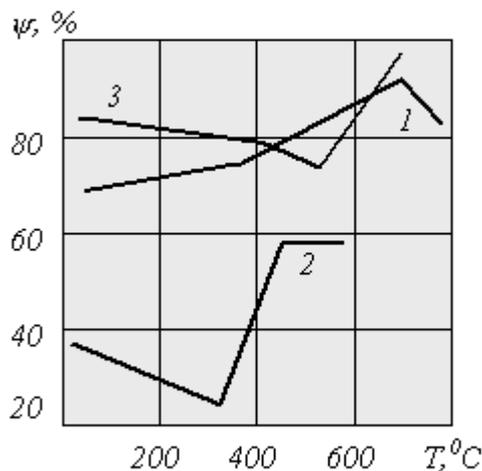


Рис.3. Влияние температуры на пластические свойства

### Влияние температур на упругие свойства. Температурный

коэффициент линейного расширения  $\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{dT}$  и температурный

коэффициент модуля упругости  $\eta = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT}$  связаны между собой соотношением

$$\eta + \alpha m = 0, \text{ или } (\eta / \alpha) = -m = \text{const},$$

где  $r$  и  $m$  - постоянные, характеризующие параметры кристаллической решетки. На рис. 4 приведена зависимость безразмерного модуля упругости  $E/E_0$  некоторых конструкционных материалов от температуры ( $E_0$  - модуль упругости материала при обычной температуре): 1 - нержавеющая сталь; 2 - алюминиевые сплавы, 3 - углеродистые стали, 4 - титановые сплавы.

Для сталей с повышением температуры испытаний с 25 до 450°C модули упругости  $E$  и  $G$  уменьшаются на 20-40%, при этом, начиная с 300-400°C наблюдается расхождение между значениями модулей, определенными при статических и динамических испытаниях.

Изменение модулей упругости при малых колебаниях температуры (от -50 до +500°C) незначительно и им обычно пренебрегают.

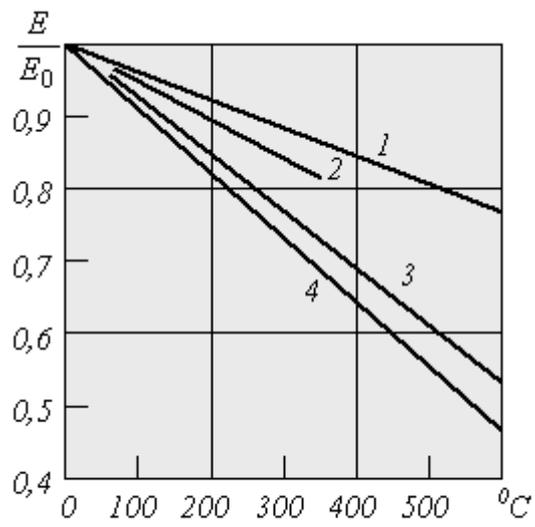


Рис.4. Зависимость модуля упругости от температуры

## 7. Соотношения вязкоупругости

Уравнения теории упругости не отражают зависимость процессов деформирования от скорости и времени. Эта зависимость для многих материалов, особенно полимеров, проявляется очень ярко. Такие материалы проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагрузку, а это свойство называют памятью.

Различают два своего рода крайних проявления эффектов вязкоупругости.

В первом случае при фиксированной нагрузке сначала появляется деформация, отвечающая этому уровню нагрузки (мгновенная упругость), а потом деформация продолжает медленно расти. Это явление получило название ползучести – материал «ползет» при фиксированном уровне нагружения. Наглядно это можно представить в виде груза, подвешенного на тросе из вязкоупругого материала. Сначала такой трос растянется под действием нагрузки на некоторую фиксированную величину, а потом будет продолжать растягиваться с относительно малой скоростью.

Во втором случае фиксируется деформация, а сопротивление материала при такой деформации сначала имеет определенное значение (мгновенная упругость), но со временем начинает уменьшаться. Такой эффект получил название релаксации. Наглядно это можно представить в виде стержня, который растянули и зафиксировали это растяжение. Измерение напряжений в этом стержне дает их постоянно уменьшающийся уровень.

Другая особенность полимеров связана с тем, что в них сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам, а затем рассеивать ее подобно вязким средам. Такие материалы называют вязкоупругими.

Связь между напряжениями с деформациями для вязкоупругих материалов может быть записана различными способами. Одна из наиболее общих и распространенных форм записи выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

где компоненты тензора  $C_{ijkl}(t)$  – так называемые функции релаксации материала. Эти функции характеризуют вязкоупругий материал, так же как модули упругости – упругий. Общим является правило: эти функции релаксации являются положительными монотонно убывающими функциями времени. Это означает, что чем дальше по времени (раньше) было воздействие на материал, тем меньше это ощущается в текущий момент времени.

В безындексной форме можно записать в виде

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t C(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

или, после интегрирования по частям,

$$\sigma(t) = C(0)\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{dC(t - \tau)}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (1.10)$$

причем считается, что  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

В этом соотношении первое слагаемое представляет собой упругую мгновенную реакцию среды на приложенную деформацию, а второе со временем все заметнее уменьшает внутренние напряжения в среде – что выше и названо релаксацией.

Функции релаксации должны быть положительными монотонно убывающими функциями времени.

Обратная форма соотношений вязкоупругости, когда деформации выражаются явным образом через функционал от напряжений, может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

где  $J(t)$  – тензор функций ползучести. Функции ползучести являются положительными монотонно возрастающими функциями времени, которые могут как приближаться, так и не приближаться к асимптоте, не зависящей от времени.

Очевидно, что функции ползучести и функции релаксации не могут быть независимыми.

## 8. Соотношения теории пластичности

Теория пластичности моделирует нелинейную реакцию материала за пределами упругости, не зависящую от скорости нагружения, т.е. ее соотношения и сама теория не зависят от времени.

Для приводимых ниже соотношений используется иногда термин теория скоростного типа, что означает наличие в определяющих соотношениях слагаемых скоростного типа, но явной зависимости от времени нет.

В теории пластичности вводится понятие функции нагружения (в отличие от функции текучести, которая представляет собой функцию нагружения, действующую только в течение первого цикла нагружения от недеформированного состояния).

Полная деформация представляется в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij},$$

причем справа первое слагаемое – упругая составляющая, второе – пластическая.

Общий вид функции нагружения представляется в виде

$$f(\sigma_{kl}, \varepsilon''_{kl}) = \kappa.$$

Скалярная величина  $\kappa$  здесь – общая функция главных переменных теории. Покажем, как (1.16) можно использовать для определения упругой или пластической деформации.

Определим деформации как функции напряжений. Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon'_{kl}.$$

Обычно используется изотропная форма этого соотношения.

Пластическая деформация определяется соотношением

$$\dot{\varepsilon}''_{ij} = F_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}, \varepsilon''_{kl}),$$

где точка означает дифференцирование по времени.

Уравнения состояния зависят от того, какой из трех видов деформирования реализуется: нагружение, разгрузка, нейтральное нагружение.

Главная проблема заключается в определении конкретного вида функций  $f$ ,  $F_{ij}$ ,  $K$ . Это определение делается на основе обработки экспериментальных данных, поэтому в литературе можно встретить большое разнообразие представления этих функций.

После этого можно интегрировать уравнения состояния, записанные в скоростях, и получить историю напряжений и деформаций.

### Функции текучести

Наиболее известны и распространены функции текучести Мизеса и Треска.

В соответствии с **функцией текучести Треска** течение наступает тогда, когда максимальное сдвиговое напряжение достигает определенного значения

**Критерий текучести Мизеса** выглядит проще и записывается в виде

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = k^2,$$

где  $k$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Физический смысл критерия Мизеса сводится к тому, что энергия деформирования, связанная со сдвиговой деформацией, ограничена.

Задания функции текучести в одной из выше описанных форм достаточно, если материал является упруго-идеально-пластическим.

Если учитывать упрочнение материала, то можно рассматривать два наиболее общих вида упрочнения.

Упрочнение, или закон упрочнения, определяет изменение формы и размеров поверхности нагружения в процессе деформирования.

Простейший вид упрочнения – **изотропное упрочнение**. Тогда функция нагружения (1.16) записывается в следующем частном виде

$$f(J_2, J_3) = K,$$

где весь эффект упрочнения определяется изменением параметра  $K$ . В этом случае – изотропного упрочнения – не проявляется эффект Баушингера. В связи с этим модель не пригодна для описания широкого класса материалов.

**Кинематическое упрочнение** определяет функцию нагружения в виде

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k^2,$$

где  $k$  – константа, а  $\alpha_{ij}$  - тензор параметров упрочнения, зависящий от основных переменных задачи. Из этого представления следует, что поверхность нагружения просто перемещается в пространстве напряжений без изменения формы.

Все соотношения, представленные выше, позволяют описывать зависимости деформации-напряжения для так называемой невязкой пластичности. Остальные соотношения теории упругости – геометрические и уравнения равновесия (движения) – не меняются.

Поскольку соотношения пластичности являются нелинейными, то и соответствующие краевые задачи нелинейны.

## 9. Метод последовательных нагружений

С использованием вариационного принципа в форме метода перемещений решаются задачи, когда для дискретизации функционала приращения энергии используется метод конечных элементов. В качестве параметра нагружения могут использоваться как приращения сил или перемещений на границе, так и (при решении задач о температурных напряжениях) изменение температуры в расчетной области.

Решение заключается в следующем. С использованием инкрементальной теории (теории приращений) процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний

$$\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(N)}, \Omega^{(N+1)}, \dots, \Omega^{(F)},$$

где  $\Omega^{(0)}$  и  $\Omega^{(F)}$  - начальное и конечное состояния,  $\Omega^{(N)}$  - некоторое произвольное промежуточное состояние. Далее считается, что все параметры, характеризующие деформируемую систему, для состояния  $N$  известны, и задача сводится к определению параметров системы для состояния  $N+1$ . Предполагая, что смежные состояния  $N$  и  $N+1$  достаточно близки друг к другу, все определяющие соотношения можно линеаризовать по отношению к приращению переменных состояния.

Если на тело нанесена связанная с ним (лагранжева) система координат, то при его деформировании система координат движется, так что зависимость между начальной (исходной, отвечающей состоянию  $N$ , в том числе при  $N = 0$ ) системой координат  $X_i$  и текущей (деформированной, отвечающей состоянию  $N+1$ ) системой  $x_i$  имеет вид

$$x_i = X_i + \Delta u_i, \quad (1.23)$$

где  $\Delta u_i$  – приращение перемещений.

Рассмотрим конструкцию в начале шага  $N$ . В этот момент начальные и текущие координаты совпадают. Внутренние напряжения  $\sigma_{ij}$  и нагрузка на поверхности  $T_i^0$  в общем случае не равны нулю. Эти напряжения и нагрузки вычисляются в начальных координатах  $X_i$  и отнесены к единице площади до момента конечного приращения нагрузки. Соответствующие площадь поверхности и объем конструкции будем далее называть недеформированными. Для этого состояния система характеризуется координатами  $x_i = X_i$ , полями напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , усилий  $T_i^0$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}^0$  и перемещений  $u_i^0$ . После приращения нагрузки на величину  $\Delta T_i$  в новом “деформированном” состоянии в конструкции возникнут текущие поля перемещений, деформаций и напряжений, причем

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}, \quad (1.24)$$

$$T_i = T_i^0 + \Delta T_i. \quad (1.25)$$

Принцип виртуальной работы в текущем деформированном состоянии  $\Omega^{(N+1)}$  запишется в виде

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \delta(\Delta E_{ij}) dV = \int_S (T_i^0 + \Delta T_i) \delta(\Delta u_i) dS. \quad (1.26)$$

Здесь  $\Delta E_{ij}$  - тензор приращения деформаций (тензор Грина):

$$\Delta E_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \eta_{ij}, \quad (1.27)$$

( $\Delta \varepsilon_{ij}, \Delta \eta_{ij}$  - линейная и нелинейная части приращения деформаций соответственно). Зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta E_{kl}, \quad (1.28)$$

где через коэффициенты  $C_{ijkl}$  может быть учтена предыстория нагружения. Если подставить (1.24), (1.25), (1.27), (1.28) в (1.26), получим

$$\begin{aligned} \int_V [\sigma_{ij}^0 \delta(\Delta \eta_{ij}) + \Delta \varepsilon_{kl} C_{ijkl} \delta(\Delta \varepsilon_{ij})] dV = \\ \int_S \Delta T_i \delta(\Delta u_i) dS - \left( \int_V \sigma_{ij}^0 \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) dV - \int_S T_i^0 \delta(\Delta u_i) dS \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Следует отметить, что напряжения  $\sigma_{ij}$ , полученные на шаге N, являются начальными для шага N+1. Для шага N эти напряжения отнесены к недеформированной площади и ориентированы относительно текущих осей  $x_i$ . Для шага N+1 эти напряжения следует отнести к деформированной площади и начальным осям  $X_i$ .

Зависимость между тензорами напряжений в начальном и деформированном состояниях определяется соотношениями

$$\sigma_{ij}^0 = \left| \frac{\partial x}{\partial X} \right|^{-1} \sigma_{kl} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_l} \right), \quad (1.30)$$

где  $\left| \frac{\partial x}{\partial X} \right|^{-1}$  - детерминант матрицы  $\left[ \frac{\partial x}{\partial X} \right]$

Из (1.23) следует

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \delta_{ik} + \Delta u_{i,k}, \quad (1.31)$$

где  $\delta_{ik}$  - символ Кронекера. Тогда масштабирующий множитель в (1.30) равен

$$\left| \frac{\partial x}{\partial X} \right|^{-1} \approx (1 - \Delta u_{1,1} - \Delta u_{2,2} - \Delta u_{3,3}). \quad (1.32)$$

В плоской задаче линейная и нелинейная части деформации (1.27) могут быть представлены соответственно в виде

$$\Delta \varepsilon_{ij} = (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) / 2, \quad (1.33)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \Delta u_{k,j} \Delta u_{k,i} / 2. \quad (1.34)$$

После подстановки (1.33), (1.34) в (1.29) получим принцип виртуальной работы для конечных приращений, который лежит в основе конечно-элементной формулировки задачи

$$\begin{aligned} & \int_V \sigma_{ij}^0 \Delta u_{k,i} \delta \Delta u_{k,j} + C_{ijkl} \Delta u_{k,l} \delta \Delta u_{i,j} dV = \\ & = \int_V \Delta T_i \delta \Delta u_i dS - \left( \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \Delta u_{i,j} dV - \int_S T_i^0 \delta \Delta u_i dS \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Преобразование напряжений при переходе от текущего состояния к начальному имеет вид

$$\sigma_{ij}^0 = (1 - \Delta \varepsilon_{kk}) \sigma_{ij} + (\Delta \varepsilon_{jk} + \Delta \omega_{jk}) \sigma_{ik} + (\Delta \varepsilon_{ik} + \Delta \omega_{ik}) \sigma_{jk}, \quad (1.36)$$

где  $\Delta \omega_{ij}$  - приращения углов поворота:

$$\omega_{ij} = (\Delta u_{i,j} - \Delta u_{j,i}) / 2. \quad (1.37)$$

После разбиения расчетной области на конечные элементы приращение перемещений в каждом элементе аппроксимируется следующим образом:

$$\Delta u_k = \phi_{ik} \Delta r_i, \quad (1.38)$$

где  $\phi_{ik}$  - функции формы,  $\Delta r_i$  - приращение перемещений в узлах. Подставляя (1.38) в (1.35), получаем так называемое элементное матричное уравнение

$$(k_{ij}^G + k_{ij}) \Delta r_i = \Delta f_i + \varepsilon_i, \quad (1.39)$$

где

$$k_{ij}^G = \int_{V_n} \phi_{in,k} \sigma_{kl}^0 \phi_{jn,l} dV, \quad (1.40)$$

$$k_{ij} = \int_{V_n} \phi_{ik,l} C_{klmn} \phi_{jm,n} dV, \quad (1.41)$$

$$\Delta f_i = \int_{S_n} \Delta T_k \phi_{ik} dS, \quad (1.42)$$

$$\varepsilon_i = \int_{S_n} T_k^0 \phi_{ik} dS - \int_{V_n} \sigma_{kl}^0 \phi_{ik,l} dV. \quad (1.43)$$

В этих выражениях  $V_n$ ,  $S_n$  – части объема и поверхности, принадлежащие рассматриваемому элементу,  $k_{ij}^G$  – матрица жесткости для состояния начальных напряжений (или матрица влияния начальных напряжений, или инкрементальная геометрическая матрица жесткости),  $k_{ij}$  – элементная матрица жесткости,  $\Delta f_i$  – вектор приращения нагрузок на очередном шаге,  $\varepsilon_i$  – остаточная погрешность равновесия сил в каждом элементе.

Напряжения  $\sigma_{ij}^0$ , входящие в инкрементальную матрицу жесткости, вычисляются на каждом шаге. Полные перемещения получаются суммированием приращений перемещений с предыдущими. Зависимость между напряжениями и деформациями на каждом шаге алгоритма может меняться в соответствии с изменением наклона кривой деформирования реального материала.

Итак, уравнение равновесия для  $N$ -го элемента имеет вид

$$\left( [k^G] + [k] \right)_N \{ \Delta r \}_N = \{ \Delta f \}_N + \{ \varepsilon \}_N, \quad (1.44)$$

а для всего ансамбля элементов –

$$\left( [K^G] + [K] \right) \{ \Delta R \}_i = \{ \Delta F \}_i + \{ E \}_i, \quad (1.45)$$

где  $i$  – номер шага нагружения, на котором вычисляются перемещения узловых точек ансамбля элементов.

Для первого шага нагружения остаточная погрешность равновесия сил и матрица начальных напряжений равны нулю:  $\{ E \}_1 = 0$ ,  $[K^G]_1 = 0$ , а уравнение равновесия для первого шага  $[K]_1 \{ \Delta R \}_1 = \{ \Delta F \}_1$ . После первого шага вычисляются новые координаты узловых точек, а также перемещения, деформации и напряжения. В конце

шага  $N$  от напряжений  $\sigma_{ij}$  следует перейти согласно (1.30) или (1.36) к напряжениям  $\sigma_{ij}^0$ , начальным для следующего шага  $N+1$ . Матрицы  $[K^G]$  и  $[K]$  пересчитываются на каждом шаге нагрузки (или связанного с ней параметра). Соотношение  $\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}\Delta E_{kl}$  тоже может меняться от шага к шагу, поскольку зависимость напряжений от деформаций в общем случае нелинейна. Вычислив по (1.43) погрешность (невязку), на следующем шаге включаем ее в нагрузку, так что суммарная нагрузка равна  $\Delta f_2 + E_2$ . Это приводит к уменьшению погрешности в (1.45). Кроме того, уточнить значения перемещений можно с использованием итерационного процесса, когда внешняя нагрузка фиксируется, т.е.  $\{\Delta F\}_N = 0$ , а уравнения для приращений принимают вид

$$([K^G] + [K])_N \{\Delta R\}_N = \{E\}_N. \quad (1.46)$$

Полученные приращения перемещения суммируются с предыдущими, затем вычисляются матрицы  $[K^G]$  и  $[K]$ , находится погрешность равновесия сил  $\{E\}_N$ , затем вновь решается уравнение (1.46). Этот процесс продолжается до тех пор, пока приращения перемещений не станут меньше некоторой заданной малой величины погрешности

$$\frac{\{\Delta R\}^T \{\Delta R\}}{\{R\}^T \{R\}} \leq \varepsilon,$$

или такое же условие не будет выполнено для отношения норм остаточного вектора и полного вектора сил:

$$\frac{\{E\}^T \{E\}}{\{F\}^T \{F\}} \leq \varepsilon.$$

Если в качестве параметра нагружения используется смещение границы расчетной области, итерационная процедура уточнения решения меняется. Кроме того, если шаг нагружения связать со временем, появляется возможность анализа задач с учетом эффектов вязкоупругости.

При решении задач термоупругости алгоритм изменяется в связи с тем, что параметром нагружения является не приращение сил или перемещений на границе, а изменение температуры  $\Delta T$  во всей расчетной области. Такие задачи возникают при анализе внутренних напряжений в неоднородных конструкциях или в структурно неоднородном материале (когда его отдельные фазы имеют различные теплофизические характеристики) при его нагреве или охлаждении. В этом случае решение

заключается в следующем. В начальном состоянии в материале при температуре  $T_0$  напряжения принимаются отсутствующими. Затем расчетная область охлаждается или нагревается (далее для определенности будем считать, что рассматривается процесс охлаждения) на величину  $\Delta T$ , и параметры ее напряженно-деформированного состояния определяются при температуре  $T_0 - \Delta T$ .

Элементное матричное уравнение метода конечных элементов в перемещениях на первом шаге имеет вид

$$[K]_e \{\Delta R\}_e = \{\Delta F\}_e. \quad (1.47)$$

Здесь  $[K]_e \{\Delta R\}_e$  – произведение матрицы жесткости на вектор приращения перемещений;  $\{\Delta F\}_e$  – вектор приращения сил.

При решении плоской задачи правая часть элементного уравнения (1.47) может быть представлена в виде

$$\{\Delta F\}_e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} * t * A. \quad (1.48)$$

Здесь  $[B]$  – матрица, связывающая деформации и перемещения;  $[D]$  – матрица, описывающая механические свойства материала;  $\{\varepsilon_0\}$  – вектор деформаций элемента, связанных с тепловым расширением  $\alpha \Delta T$ ;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $t$  – толщина;  $A$  – площадь элемента.

Выражение (1.48) приводится к виду

$$\{\Delta F\}_e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} t A = \frac{\alpha(T) E(T) t \Delta T}{2(1-\nu)} \cdot \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала;

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k, & b_j &= y_k - y_i, & b_k &= y_i - y_j, \\ c_i &= x_k - x_j, & c_j &= x_i - x_k, & c_k &= x_j - x_i, \end{aligned}$$

величины  $x, y$  с индексами – координаты узлов треугольного элемента.

Система разрешающих уравнений для ансамбля элементов на первом шаге может быть представлена в виде

$$[K]\{\Delta R\} = \{\Delta F\}, \quad (1.50)$$

где  $[K]\{\Delta R\}$  – произведение матрицы жесткости на вектор приращения перемещений узлов сетки элементов,  $\{\Delta F\}$  – вектор приращения сил, полученный в результате ансамблирования векторов (1.49).

Система (1.50) решается методом Гаусса с учетом симметричности матрицы и ее ленточной структуры.

На втором шаге, когда температура расчетной области изменилась, необходимо учесть возникшее в конце первого шага напряженное состояние, используя вместо (1.48) уравнение

$$([K^G] + [K])\{\Delta R\} = \{\Delta F\} + \{E\}. \quad (1.51)$$

Здесь  $[K^G]$  – матрица жесткости, учитывающая начальные напряжения, полученные в конце предыдущего шага;  $\{E\}$  – вектор остаточной погрешности равновесия сил, вычисленных на предыдущем шаге.

Матрица жесткости  $[K]$  и вектор  $\{F\}$  вычисляются на каждом шаге, так как упругие характеристики и коэффициенты линейного температурного расширения отдельных элементов в расчетной области могут меняться вместе с температурой.

Поля перемещений, деформаций и напряжений, полученные на текущем шаге, суммируются с аналогичными имеющимися характеристиками, и это состояние становится исходным для следующего шага. Далее процесс вычислений становится циклическим.

Метод конечных элементов в приведенном варианте можно отнести к классу неявных схем, хотя, строго говоря, он не является классическим сеточным методом. Тем не менее по своей реализации он соотносится именно с неявными схемами, поэтому его можно использовать для решения статических или квазистатических задач. Время входит в уравнения, описывающие состояние расчетной области, лишь в качестве параметра (в нагрузку или в физические соотношения). В последнем случае это может быть связано, например, с учетом эффектов вязкоупругости.

Величина шага конечно-элементной сетки влияет на точность результатов: с уменьшением размеров ячеек растет точность. Поскольку это связано с осреднением всех величин по ячейке, шаг сетки должен быть тем меньше, чем большими градиентами характеризуются рассчитываемые величины. Предложенный метод можно использовать для сеток с переменным шагом, но при этом необходимо учитывать, что резкое изменение размеров соседних ячеек приводит к уменьшению точности расчета.

## 10. Осреднение по объему

Масштаб осреднения тесно связан с понятием представительного объема материала. Если приложенное внешнее поле напряжений или деформаций макроскопически однородно, можно ввести понятие средних по объему напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= \int_V \sigma_{ij}(x_i) dv, \\ \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \int_V \varepsilon_{ij}(x_i) dv.\end{aligned}\quad (1.52)$$

Эти соотношения весьма общие в том смысле, что в них нет никаких ограничений на геометрические характеристики фаз среды.

После этого можно ввести понятие эффективных характеристик материала.

Так, эффективные жесткости можно ввести соотношением

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1.53)$$

Таким образом, для определения эффективных характеристик материала нужно сделать осреднения по (1.52) и далее найти коэффициенты из (1.53). Простота этой процедуры только кажущаяся, так как задача нахождения напряжений и деформаций во всех точках представительного объема достаточно сложна.

Теоретически полученные результаты ограничиваются несколькими геометрическими моделями. В этом смысле все гетерогенные среды делятся на пять типов.

1. Материалы с кристаллической зернистой структурой, как у обычных металлов. Каждое зерно анизотропно, а разные зерна имеют разную ориентацию в пространстве.

2. Среда с двумя или большим числом фаз, каждая из которых непрерывна, отчетливо выражена, но отсутствует характерная геометрическая характеристика поверхностей раздела. Такие системы называют взаимопроникающими сетками.

3. Три типа сред как варианты одного общего случая – матрица с включениями сферической, цилиндрической или пластинчатой формы. Общность заключается в том, что формы включений можно рассматривать как частные случаи эллипсоидальных включений. Цилиндрическая форма

включения трактуется как сильно вытянутый эллипсоид, а пластинчатая – как сплюснутый эллипсоид.

Все более общие случаи можно рассматривать как комбинации тех, что представлены выше.

На элементарном уровне все среды можно рассматривать в виде:

1) систем, содержащих одну непрерывную фазу с дискретными включениями из одного или нескольких материалов;

2) всех остальных систем.

Рассмотрим конкретный вариант, когда одна фаза непрерывна (матрица), другая входит в виде дискретных включений.

Тогда для каждой из фаз применимы упругие соотношения вида

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где упругие постоянные для матрицы и включений разные. Средние напряжения (1.52) можно ввести, разбив всю область интегрирования справа на две части – по матрице без включений (первый интеграл) и только по включениям (второй интеграл):

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V - \sum V_n} \sigma_{ij} dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \sigma_{ij} dv, \quad (1.54)$$

где принимается, что внутри представительного объема есть  $N$  включений с соответствующим объемами, и первый интеграл берется по области, не занятой включениями. В каждом подынтегральном выражении следует использовать соответствующие упругие постоянные.

Если первый интеграл разбить на две части – интеграл по всему объему минус такой же по объему включений, то (1.54) принимает вид

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\lambda \sigma_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) dv - \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\lambda \sigma_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}) dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \sigma_{ij} dv. \quad (1.55)$$

Среднее напряжение можно переписать с учетом (1.53), а справа используем обозначения для средних величин. Тогда

$$C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \lambda \delta_{ij} \langle \varepsilon_{kk} \rangle + 2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - 2\mu \varepsilon_{ij}) dv. \quad (1.56)$$

Эта формула применяется для дальнейшего анализа эффективных свойств. Таким образом, из (1.56) следует, что для вычисления тензора эффективных модулей необходимо иметь только условия внутри включений.

## 11. Осреднение с помощью энергетических методов

Другой способ получения эффективных характеристик композита заключается в использовании условия равенства энергии деформирования для реального композита и представляющей его однородной среды.

Произведем свертку выражения (1.53) с помощью тензора средних деформаций:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1.57)$$

Средние напряжения и деформации в (1.57) определяются условиями на границе представительного объема. Внутри представительного объема напряжения и деформации макроскопически однородны, поэтому средние их значения можно найти интегрированием по объему или из граничных значений, что иногда проще. Тогда левая часть (1.57) равна интегралу, вычисленному через напряжения и деформации на поверхности. В итоге (1.57) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma_i u_i ds = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1.58)$$

Используем затем теорему Остроградского-Гаусса и уравнения равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$ . Тогда (1.58) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1.59)$$

Это соотношение определяет эффективные свойства -  $C_{ijkl}$  — через равенство энергий деформирования, запасаемых в неоднородной и эквивалентной однородной среде.

## 12. Характеристики материалов

### Межфазные взаимодействия в композитных материалах

По определению композитные материалы представляют собой двух- или многофазные среды. Целью введения армирующих частиц в матрицу является изменение иногда целого спектра свойств.

Это **деформационно-прочностные** свойства – модуль упругости, предел текучести, предельная деформация при растяжении, коэффициент Пуассона, модуль упрочнения (для упрочняющихся материалов). Все эти характеристики определяются диаграммой напряжения деформации ( $\sigma \sim \epsilon$ ).

Это **теплофизические** свойства – удельная теплоемкость, коэффициенты тепло- и температуропроводности, коэффициент линейного температурного расширения и т.д.

**Теплоемкость - это способность накапливать тепловую энергию в материале при его нагревании.** Численно удельная теплоемкость равна энергии, которую нужно ввести в единицу объема материала, чтобы нагреть его на один градус. Размерность удельной теплоемкости [Дж/(кг·К)]. Эта величина экстенсивная, т.е. можно говорить о теплоемкости отдельной молекулы или атома, затем их просуммировать и получить теплоемкость одного грамма или одного моля вещества. Значение теплоемкости зависит от природы материала. Самая высокая теплоемкость у воды  $4.2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К) или 4.2 кДж/(кг·К). У подавляющего большинства материалов удельная теплоемкость порядка 1 кДж/(кг·К). Теплоемкость зависит от температуры. Вблизи нуля Кельвина она мала, в рабочем диапазоне температур - слабо меняется с ростом температуры. **Какие-либо скачки теплоемкости связаны со структурной перестройкой тел, например с растянутым плавлением у таких веществ, как парафин. Здесь можно упомянуть пример с парафиновой прогревающей повязкой, когда тепло долго сохраняется за счет высокой теплоемкости парафина и повязка греет длительное время.**

Теплоемкость газов хорошо изучена теоретически. Для газов даже введено два типа теплоемкости: при постоянном давлении  $C_p$  и при постоянном объеме  $C_v$ . Обычно рассматривают теплоемкость, приходящуюся на одну молекулу. Тогда для одноатомного газа  $C_p = 5/2$  кТ, а  $C_v = 3/2$  кТ. Почему при постоянном давлении труднее нагревать молекулы? Ясно, что при этом газ расширяется, значит, нужна дополнительная энергия, чтобы нагреть газ при постоянном давлении. Отметим, что для многоатомных газов теплоемкость выше, т.к. при нагревании требуется энергия для вращения молекул, колебаний и т.п.

Приведем выражение для тепловой энергии материала:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1),$$

где  $m$  - масса материала,  $T_2, T_1$  конечная и начальная температуры.

Это выражение можно переписать для локальных, удельных, параметров:

$$Q/V = c \cdot \rho \cdot (T_2 - T_1),$$

где  $Q/V$  - удельное выделение энергии,  $\rho$  - плотность материала.

Эти выражения позволяют определить изменение температуры материала в процессе его работы, например, за счет диэлектрических потерь энергии, протекания тока или какого-либо другого процесса. Энерговыведение  $Q$  задается конкретными процессами, протекающими в материале.

**Теплопроводность определяет способность передать тепловую энергию через материал.** Это тоже важная характеристика, она характеризуется коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ . Численно он равен потоку тепла  $q$ , проходящему через площадку куба единичной площади, при перепаде на его гранях температуры  $1^\circ\text{C}$ . Лучше всего передают тепло металлы, так, у меди  $\lambda = 400 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , для серебра чуть больше (418), для алюминия  $200 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , для нержавеющей стали примерно  $20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , для простых сталей примерно в два раза выше.

У диэлектрических материалов теплопроводность обычно значительно ниже. Например, у бетона  $\lambda = 0.6 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , у трансформаторного масла  $\lambda = 0.13 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , для воздуха  $\lambda = 3,67 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ . Единственный диэлектрик имеет высокую теплопроводность, это окись бериллия  $\lambda \gg 200 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ . Отметим, что в справочниках часто приводят  $\lambda$  в устаревших единицах, например  $\text{кал}/(\text{см}\cdot\text{сек}\cdot^\circ\text{C})$ ; для перевода в систему единиц СИ нужно умножить на 418.

Коэффициенты теплопроводности различных материалов

Материал	Коэффициент теплопроводности, Вт/м*К	Материал	Коэффициент теплопроводности, Вт/м*К
Алюминий	230	Медь	380
Асбест (шифер)	0,35	Опилки древесные сухие	0,065
Бетон пористый	1,4		
Бетон сплошной	1,75	Пенополистирол	0,04
Бетон	0,18	ПС-Б	

термоизоляционный		Песок	
Битум	0,47	0% влажности	0,33
Бумага	0,14	10% влажности	0,97
Вата минеральная	0,045	20% влажности	1,33
Гранит, базальт	3,5	Снег	1,5
Грунт 10% воды	1,75	Стекло	1,15
Грунт 20% воды	2,1	Стекловата	0,05
Грунт песчаный	1,16	Стекловолокно	0,036
Грунт сухой	0,4	Кирпич сплошной	0,67
Грунт утрамбованный	1,05	Кирпич шлаковый	0,58
Древесина - доски	0,15	Латунь	110
Каучук вспененный	0,03	Лед	
Каучук натуральный	0,042	0°С	2,21
		-20°С	2,44
		-60°С	2,91

**Температуропроводность** (коэффициент температуропроводности) — физическая величина, характеризующая скорость изменения (выравнивания) температуры вещества в неравновесных тепловых процессах. Численно равна отношению теплопроводности к произведению теплоёмкости на плотность единицы объема вещества, в системе СИ измеряется в м<sup>2</sup> / с.

$$\chi = \frac{\kappa}{c_p \rho},$$

где  $\chi$  — температуропроводность,  $\kappa$  — теплопроводность,  $c_p$  — изобарная (т.е. при постоянном давлении) теплоёмкость,  $\rho$  - плотность

Температуропроводность и теплопроводность являются двумя из наиболее важных параметров веществ и материалов, поскольку они описывают процесс переноса теплоты и изменение температуры в них.

Величина коэффициента температуропроводности зависит от природы вещества. Жидкости и газы обладают сравнительно малой температуропроводностью. Металлы, напротив, имеют бóльший коэффициент температуропроводности.

## Методика измерения температуропроводности

Схема установки определения коэффициента теплопроводности представлена на схеме. В установке реализован импульсный метод измерения температуропроводности и теплоемкости образцов (метод Паркера).

Установка состоит из четырех основных узлов: камеры, измерительной схемы, зарядного блока и вакуумной системы.

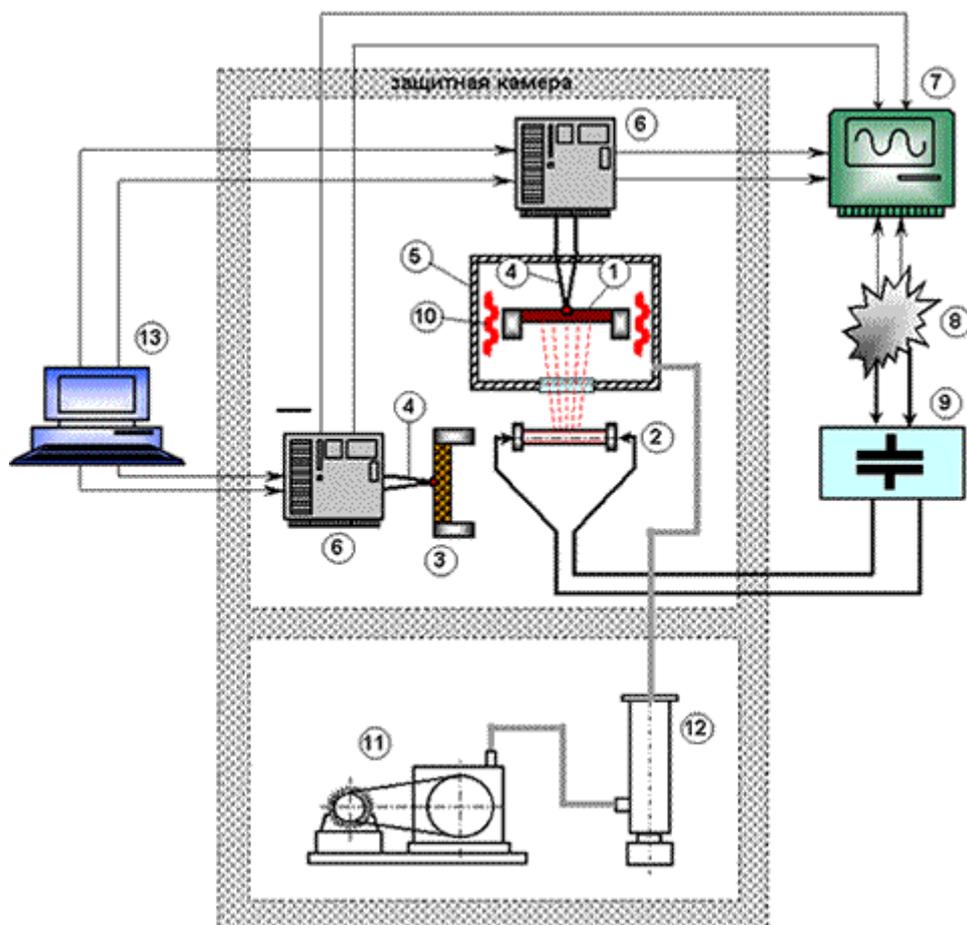


Схема установки измерения температуропроводности  
1 - образец; 2 - импульсная лампа; 3 - эталонный образец; 4 - термопары; 5 - вакуумная камера; 6 - усилитель постоянного тока; 7 - осциллограф; 8 - зарядное устройство; 9 - конденсаторы; 10 - нагреватель; 11 - форвакуумный насос; 12 - диффузионный насос; 13 - блок управления, компенсации и эталонного сигнала

Камера выполнена в таком образом, что все операции по перезакреплению образца можно выполнять дистанционно.

Образец закреплен в держателе, размещен в вакуумной камере и может нагреваться печью сопротивления до температуры от 10 до 800°C. В вакуумной камере имеется кварцевое окно, через которое одна сторона образца может облучаться световым потоком от импульсной лампы.

Симметрично оси лампы вне нагревательной печи расположен эталонный образец с известной теплоемкостью. К поверхности образцов, противоположных импульсной лампе, прижимаются термопары.

Электрическая часть установки состоит из зарядного блока для зарядки батареи, конденсаторов и измерительной схемы для регистрации термоЭДС термопар, прижатых к образцу.

В блоке управления усилителем расположены источник эталонного напряжения, цепь компенсации постоянной термоЭДС и индикаторный прибор.

Процесс измерения происходит следующим образом. В момент разрядки конденсаторов импульсная лампа, зажигаясь, посылает импульс света на образец. Поглотив этот импульс, лицевая сторона нагревается и тепло начинает распространяться по образцу. ТермоЭДС измеряется термопарой, прижатой к обратной стороне образца, усиливается усилителем и подается на осциллограф. Сигнал регистрируется на экране осциллографа, развернутого по времени синхронно со световой вспышкой. Одновременно через второй канал усилителя записывается термоэдс калибровочного образца для определения количества тепла, поглощенного измеряемым образцом. Теплоемкость образца рассчитывается по максимальному изменению температуры образца, температуропроводность - по кривой изменения температуры во времени. Теплопроводность рассчитывается из известных значений температуропроводности, теплоемкости и плотности. Погрешность в определении коэффициента температуропроводности не превышает 5%.

Полученная информация регистрируется, хранится и обрабатывается в памяти цифрового осциллографа и затем передается на персональный компьютер для последующей обработки.

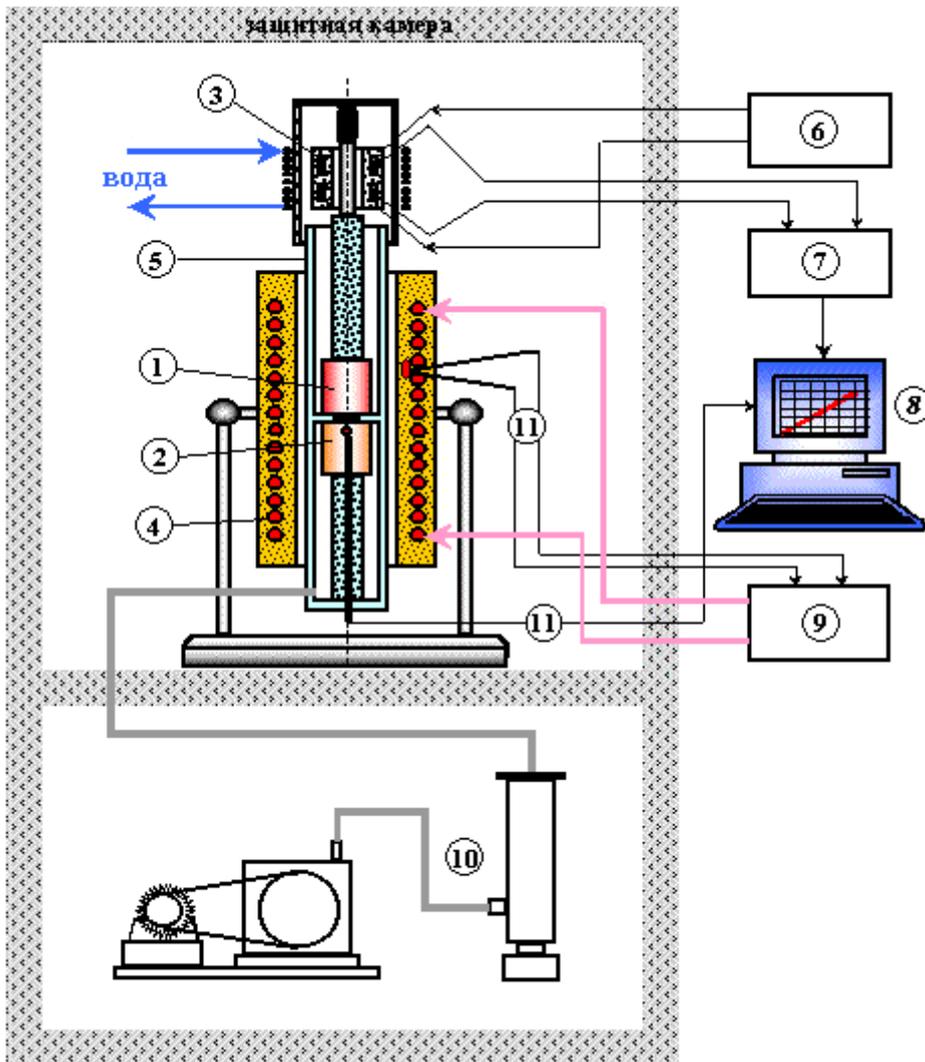
## **Методика измерения термического коэффициента линейного расширения**

Блок-схема установки для измерения термического коэффициента линейного расширения (ТКЛР) представлена на блок-схеме. Цель - измерение термического коэффициента линейного расширения облученных образцов при температуре до 1000°C в вакууме до  $7,5 \cdot 10^{-9}$  Па.

Установка состоит из датчика линейного перемещения, соединенного с корпусом электропечи. Эта конструкция крепится на станине и может приводиться в горизонтальное положение вращением для облегчения загрузки и выгрузки образца. Во внутренней полости установки размещаются образец, контрольный (эталонный) образец,

кварцевый стержень (шток), якорь индукционного датчика линейного перемещения и пружина. Внутренняя полость установки вакуумируется с помощью форвакуумного насоса. После достижения необходимого уровня давления производится нагрев образца до рабочей температуры с заданной скоростью. При нагреве происходит изменение длины образца, которое приводит к перемещению кварцевого стержня и металлического сердечника индукционного датчика. Перемещение якоря воздействует на магнитное поле обмотки датчика, сигнал с которой контролируется и регистрируется на персональном компьютере. Температура образца определяется косвенно измерением температуры контрольного образца, расположенного в непосредственной близости с испытываемым образцом внутри печи симметрично относительно ее центра. Температура контрольного образца измеряется термопарой и выводится на ЭВМ. Температура печи контролируется второй термопарой, закрепленной на ее корпусе.

Температура образца изменяется с постоянной скоростью от 1 до 10°С/мин. Запись удлинения образца проводится непрерывно индукционным датчиком с точностью 0,001мм. Погрешность измерения ТКЛР составляла  $0,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$  при измерениях температуры выше 100°С.



Блок схема установки для измерения ТКЛР:  
 1 - образец; 2 - эталон; 3 - индукционный датчик перемещения; 4 - нагреватель; 5 - вакуумная камера (кварцевая труба); 6 - питающее устройство; 7 - преобразователь сигнала; 8 - компьютер; 9 - система управления печью; 10 - вакуумная система; 11 - термопары

### Методика измерений теплоемкости

Измерения теплоемкости производятся на установке ИТ-С-400, предназначенной для исследования температурной зависимости удельной теплоемкости. В основу работы измерителя положен метод динамического С-калориметра с тепломером и адиабатической оболочкой. Тепловая схема метода представлена на схеме.

Принцип измерения теплоемкости заключается в том, что тепловой поток, проходящий через среднее сечение тепломера, идет на разогрев испытуемого образца и ампулы. Величина теплового потока, проходящего

через тепломер, оценивается по перепаду температуры на тепломере и тепловой проводимости тепломера, определенной из независимых градуировочных экспериментов с медным образцом. Температурный диапазон - до 400°C. Погрешность методики не превышает 6%.

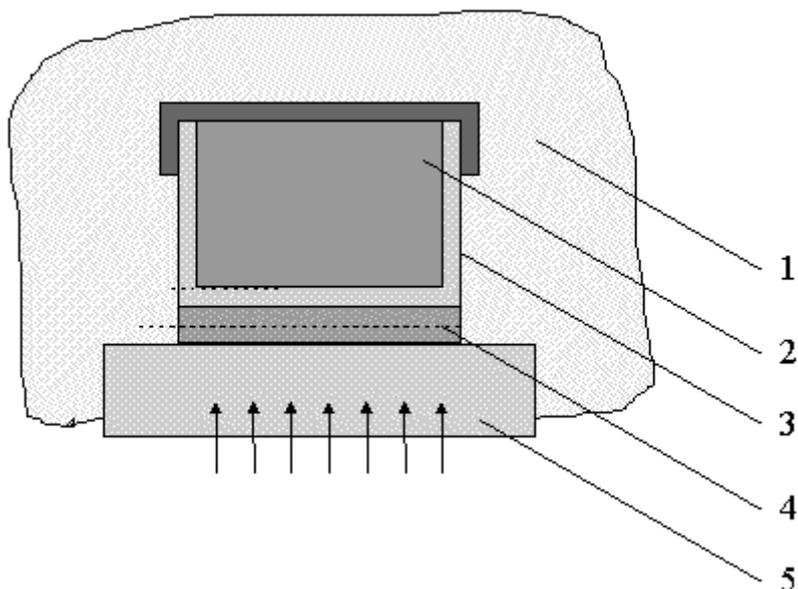


Схема метода измерения теплоемкости:  
 1-оболочка адиабатическая; 2-образец испытуемый; 3-ампула; 4-тепломер;  
 5-основание

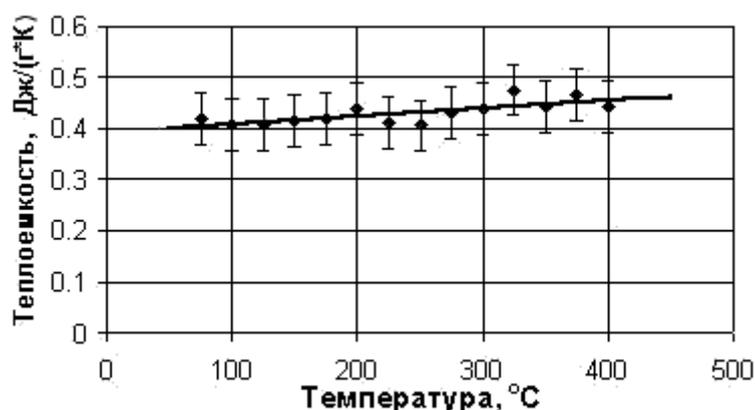


Рис 5. Зависимость теплоемкости титаната диспрозия от температуры.

Можно говорить еще и об электрофизических свойствах – сопротивление на пробой или проводимость, тангенс угла диэлектрических потерь и др.; о триботехнических свойствах композиций – коэффициент трения и изнашиваемость, и т.д.

Наконец, важной характеристикой композитов является такое их свойство, как усадка. Она проявляется в том, что изготовленный по «точным» размерам формы образец материала или деталь после

охлаждения значительно меняет свои размеры, как правило, в сторону уменьшения. Уменьшение объема связано с тем, что в процессе полимеризации мономеры и олигомеры (промежуточное состояние между мономерами и полимерами) образуют сеточную структуру, сокращаются межмолекулярные расстояния более чем вдвое – с 3...4 ангстремов до 1.54 А. В итоге искажается форма и размеры изделия, а также возникают внутренние напряжения, которые снижают прочность изделия.

Для ПКМ, степень наполнения которых равна или превышает 50 %, возникает проблема равномерности распределения армирующих элементов в матрице. Это относится как к порошковым (дисперсным) наполнителям, так и к волокнистым.

Одним из путей решения этой проблемы является использование т.н. полимеризационного наполнения. Суть его заключается в следующем. Наполнитель обрабатывается инициатором полимеризации, который осаждается на поверхности волокон (частиц). Тогда при обработке таких армирующих элементов мономером на поверхности включений начинается реакция полимеризации. Как только на поверхности образуется слой «шубы» нужной толщины, реакция полимеризации обрывается с помощью ингибиторов (добавок, по действию противоположных катализаторам).

Такой способ обеспечивает исключительно равномерное распределение армирующих включений в матрице. Это объясняется тем, что газообразный или жидкий мономер легко смешивается с включениями, в отличие от вязкого полимера. Каждое включение «укутано» пленкой полимера, и между включением и матрицей образуется химическая связь.

Все эти свойства зависят от фазового состава материала, т.е. от того, что служит матрицей и армирующими включениями. Как показывает практика, большое влияние на эти свойства оказывает характер межфазного взаимодействия, или адгезия.

Взаимодействие армирующих включений с матрицей объясняется двумя возможными механизмами, причем ни один из них не является общепринятым.

Первый механизм (физический) предполагает возникновение на границах раздела фаз сил трения и давления (нормального и касательного взаимодействия). Появление этих сил связывают с разницей в усадке матрицы и включений при отверждении.

Этот подход отрицает возможность образования химических связей между матрицей и включениями. Однако известны факты, противоречащие этой теории, которые сводятся к улучшению свойств композиции при использовании аппретов, улучшающих взаимодействие

между фазами. Сторонники первого механизма объясняют это тем, что дело не в образовании химических связей, а в улучшении смачиваемости наполнителя полимером и в снижении напряжений в зоне контакта фаз. Однако, если принять эту точку зрения, при увеличении усадки при отверждении должен наблюдаться рост прочности, но на самом деле этого не происходит. К тому же роль поверхностной обработки наполнителя эта теория не проясняет.

Второй механизм (химический) объясняет улучшение свойств композитов усилением адгезии включений к матрице. Кроме того, применительно к композитам предполагается, что упрочняющий эффект наполнителя, помимо всего прочего, связан с тем, что в окрестности включений проявляется ориентирующее действие жесткой поверхности, и полимерная матрица около поверхности переходит в состояние тонкой пленки. Это объяснение подтверждается тем, что при увеличении поверхности включений (за счет измельчения) экспериментально обнаружено увеличение прочности ПКМ до определенного уровня, соответствующего предельно ориентированному бимолекулярному слою связующего (матрицы).

Влияние адгезии качественно объясняется следующим образом. Пусть волокнистый композит растягивается вдоль волокон. Каждое волокно растягивается и за счет эффекта Пуассона стремится сжаться в поперечном направлении. Но тогда слои полимерной матрицы, примыкающие к волокну, будут растягиваться и удерживать волокно от сжатия.

Таким образом, для разрушения нужно не только преодолеть суммарное сопротивление волокон растяжению, но и силы, препятствующие поперечному сжатию. Ясно, что чем выше адгезия, тем значительнее эти силы, и тем выше прочность композита. В настоящее время можно считать установленной связь между уровнем адгезии и прочностью композита.

В соответствии с представлениями физической химии смачивание одного тела другим определяется соотношением поверхностных натяжений (свободных поверхностных энергий) этих тел. Все твердые материалы можно разделить на две группы – с высокой поверхностной энергией (металлы, стекло), которые хорошо смачиваются и взаимодействуют с полимерными матрицами, и с низкой поверхностной энергией (полимерные и угольные волокна), которые плохо взаимодействуют с полимерными матрицами.

Улучшение смачиваемости достигается двумя основными приемами.

В первом случае это использование ПАВ – поверхностно активных веществ. Примерами таких веществ служат мыло, стиральные порошки, моющие средства и т.п.

Во втором случае армирующие элементы подвергают специальной обработке (аппретированию). Одним из способов повышения поверхностной активности включений является так называемая механическая активация. Она заключается в том, что включения обрабатываются в шаровой мельнице или в смесителе роторного типа, или в лопастном смесителе (типа миксера). Интенсивное нагружение приводит к тому, что при смешивании армирующих элементов с матрицей происходит намного лучшее сцепление фаз. Природа этого эффекта до конца не исследована. Здесь нужно обратиться к обзору такого явления, как адгезия.

Повышение прочности композитов при введении армирующих включений связано еще с одним обстоятельством. Вблизи поверхности включения макромолекулы располагаются с образованием более жестких полимерных цепей. Поэтому упаковка таких молекул является более рыхлой. Это, в свою очередь, приводит к тому, что образующиеся трещины распространяются с меньшей скоростью, что и дает повышение прочности.

## АДГЕЗИЯ

Адгезия (от лат. *adhaesio* — прилипание), слипание поверхностей двух разнородных твёрдых или жидких тел. Адгезия обусловлена теми же причинами, что и адсорбция.

Адсорбция - поглощение вещества из газовой или жидкой среды поверхностным слоем твердого тела (адсорбента) или жидкости. Адсорбция применяется во многих отраслях медицины (лабораторные исследования, анестезиология и реаниматология, токсикология и др.), а также является одним из свойств кожи и слизистых оболочек.

Количественно адгезия характеризуется удельной работой, затрачиваемой на разделение тел. Эта работа зависит от того, как производится их разделение: сдвигом вдоль поверхности раздела или отрывом в направлении, перпендикулярном поверхности. Адгезия иногда оказывается больше, чем когезия, характеризующая силу сцепления частиц внутри данного тела. В этом случае разрыв происходит когезионно — внутри наименее прочного из соприкасающихся тел.

Адгезия твёрдых тел с неровной поверхностью обычно невелика, т. к. они фактически соприкасаются только отдельными выступающими участками своих поверхностей. Адгезия жидкости и твёрдого тела и двух несмешивающихся жидкостей достигает предельно высокого значения вследствие полного контакта по всей площади соприкосновения. При

покрытии твёрдого тела полимером в текучем состоянии последний проникает в углубления и поры. После отвердевания полимера возникает связь, иногда называемая механической адгезией. В этом случае для отрыва полимерной плёнки необходимо преодолеть когезию в затвердевшем полимере. Для достижения предельной адгезии твёрдые тела соединяют в пластическом или эластичном состоянии под давлением, например, при склеивании резиновым клеем или при холодной сварке металлов. Прочная адгезия достигается также при образовании новой твёрдой фазы на поверхности раздела, например в случае гальванических покрытий, или при возникновении поверхностных химических соединений (окисные, сульфидные и др. плёнки).

Адгезия полимеров происходит лучше в том случае, если макромолекулы полярны и имеют большое число химически активных функциональных групп. Для улучшения адгезии в состав клея или плёнкообразующего полимера вводят активные добавки, молекулы которых одним концом прочно связываются с плёнкой, другим — с подложкой, образуя ориентированный адсорбционный слой. При контакте двух объёмов одного и того же полимера может произойти автогезия (самослипание), когда имеет место диффузия макромолекул или их участков из одного объёма в другой. При этом прочность связи со временем увеличивается, стремясь к пределу — когезионной прочности.

Явление адгезии имеет место при сварке, паянии, лужении, склеивании, при изготовлении фотоматериалов, а также при нанесении лакокрасочных полимерных покрытий, предохраняющих металлические детали от коррозии; причинами нарушения адгезии в последнем случае являются напряжения, возникающие вследствие усадки плёнки, а также различие коэффициентов теплового расширения плёнки и металла.

Если исходить строго из определений адгезии, то можно констатировать, что единый предмет в определениях адгезии существует - это межфазная граница контактирующих несовместимых фаз. Другое дело, что для описания этого предмета (явления) существуют разные подходы, например, термодинамический. Или в виде молекулярных теорий взаимодействия между макроскопическими телами, которые достаточно подробно изложены в ряде монографий. Другие же теории уместно рассматривать в качестве поправок, учитывающих отклонения (иногда существенные) от идеальной адгезии.

Прочность адгезионного соединения определяет основные механические свойства полимерных композиционных материалов. При оценке адгезионной прочности необходимо учитывать физические аспекты процессов развития и роста трещин, распределения напряжений и их релаксации и разрушения, наличие внутренних напряжений и пр.

При постоянстве термодинамической работы адгезии (инвариантной величины, характеризующейся только природой взаимодействующих

поверхностей), работа разрушения адгезионного соединения зависит от многих факторов. Поэтому только термодинамическая работа адгезии, если она правильно определена, относится к собственно адгезии двух тел и имеет физический смысл, независимо от условий испытаний или формирования адгезионного соединения. При термодинамических оценках не учитываются неупругие деформации тел, дефекты на границе раздела между адгезивом и твердым телом, напряжения в клеевом шве в процессе получения, концентрация напряжений, обусловленная различиями в величинах упругих модулей адгезива и субстрата и пр.

В зависимости от того, как происходит разрушение склейки, различают следующие типы отрыва:

- адгезионный, при котором происходит полное отслаивание адгезива от субстрата;
- когезионный, при котором разрушение склейки идет либо по адгезиву, либо по субстрату;
- смешанный, когда частичное разрушение склейки проходит одновременно по адгезиву и по субстрату.

Фактически только адгезионный отрыв, который наблюдается крайне редко, характеризует адгезию.

Для оценки адгезионной прочности можно с успехом применять методы рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС), относящиеся к группе методов элементного анализа тонких поверхностных слоев твердых тел. Если образец композита подвергнуть хрупкому разрушению в условиях, исключающих образование полимерных тяжей, и провести анализ поверхности разрушения методом РФЭС, то можно установить, какую часть площади на поверхности разрушения занимают частицы наполнителя. Таким образом, этот метод может быть использован для дисперсно-упрочненных композитов. Для количественной оценки, однако, необходима модель, учитывающая форму частиц наполнителя, а также знание распределения напряжений на поверхности частиц при наполнении. Для простого случая, когда частицы наполнителя имеют сферическую форму и в системе осуществляется адгезионное разрушение, принимается, что прочность матрицы  $\sigma_n$  превышает адгезионную прочность.

К вопросу о характере разрушения (адгезионный или когезионный) можно подойти более простым путем, используя микроскопическую технику. Визуальное наблюдение поверхности раздела после разрушения адгезионного соединения может дать определенное представление о месте и виде разрушения адгезионного соединения, однако этот метод является достаточно трудоемким и недостаточно надежным.

Адгезия на межфазной границе может быть оценена недеструктивными методами. Если принять, что разрушение происходит в слое адгезива на границе раздела с твердым телом, то очевидно, что для

улучшения адгезии необходимо повысить когезионную прочность или плотность энергии когезии в данном слое. При этом имеется в виду, что благодаря адсорбционному взаимодействию с поверхностью и конформационным эффектам изменяется структура поверхностного слоя. Она проявляется в перераспределении компонентов полимерной системы в соответствии с их поверхностной активностью между объемом адгезива и поверхностным слоем. С этой точки зрения можно предложить два пути повышения адгезии, базирующиеся на концепции необходимости увеличения энергии когезии граничного слоя.

Первый путь состоит во введении в адгезив минеральных наполнителей, имеющих отличное от поверхности средство к компонентам системы и повышающих когезионную прочность покрытия. В таких системах существуют два типа поверхности (подложки и наполнителя) и соответственно два типа поверхностных слоев. Существование двух химически отличающихся поверхностей с различной поверхностной энергией приведет к перераспределению компонентов покрытия между двумя поверхностями. Средство поверхностей к компонентам покрытия неодинаково. Низкомолекулярные фракции или примеси мигрируют из объема адгезива на поверхность при формировании покрытия, в результате чего граничные слои полимера на поверхности подложки освобождаются от них, и граничный слой становится более гомогенным и менее дефектным.

Возможно упрочнение полимера и при введении малых добавок другого полимера. В соответствии с термодинамикой это также может обусловить повышение энергии когезии матрицы и, следовательно, работы адгезии.

Разработаны пути повышения адгезии, в основе которых лежит использование в качестве адгезива смесей двух термодинамически несовместимых полимеров, взятых в соотношениях, при которых их прочность резко повышается. Применение в качестве адгезивов полимерных смесей имеет и другие преимущества. Двухкомпонентные термодинамически несовместимые смеси характеризуются избыточным свободным объемом вследствие несовместимости и образования межфазной области между компонентами. Благодаря этому релаксационные процессы в таких системах протекают с большими скоростями, и внутренние напряжения снижаются, что приводит к повышению адгезионной прочности.

В двухкомпонентных адгезивах, полученных из смеси двух линейных полимеров, благодаря их термодинамической несовместимости образуются полимерные дисперсии, что дает возможность рассматривать данные системы как полимеры с добавками полимерных наполнителей. В них должны протекать те же процессы, что и в полимерах, наполненных минеральными наполнителями, приводящие к возрастанию энергии

когезии матрицы и образованию менее дефектных слоев на границе с подложкой. Адгезивы подобного вида, как и другие системы, содержащие частицы полимерного наполнителя с низким модулем, имеют высокие динамические свойства.

Другой путь создания адгезивов с повышенными характеристиками заключается в использовании взаимопроникающих полимерных сеток (ВПС). Получение ВПС является новым методом смешения неплавких и нерастворимых трехмерных полимеров и дает возможность получить материалы с широким спектром свойств.

Для взаимопроникающих полимерных сеток отмечено увеличение разрывной прочности по сравнению с тем же показателем составляющих сеток. Это свидетельствует о повышении их энергии когезии, что дает возможность использовать эти сетки в качестве адгезивов. Особенности использования взаимопроникающих полимерных сеток в качестве адгезивов обусловлены различными скоростями отверждения двух составляющих сеток.

Увеличение адгезионной прочности достигается благодаря двум факторам: возрастанию энергии когезии адгезива на основе ВПС и снижению внутренних напряжений в ходе формирования адгезионного соединения.

Другим путем регулирования свойств адгезивов является применение реакционноспособных ПАВ. Известно, что улучшение смачивания поверхности приводит к повышению прочности адгезионной связи, поэтому использование ПАВ является одним из путей достижения высокой адгезионной прочности. Образование на поверхности мономолекулярного слоя ПАВ обуславливает увеличение адгезии, как и при введении ПАВ в адгезив. В большинстве случаев адгезия понижается или повышается в узком концентрационном интервале, что обусловлено образованием полимолекулярных слоев. Прочность ПАВ обычно низка, и они образуют на поверхности слабый граничный слой, что приводит к уменьшению адгезионной.

Эта проблема может быть решена следующим образом. В адгезив можно ввести такое ПАВ, которое играло бы роль агента, улучшающего смачивание и растекание только на начальных стадиях формирования адгезионного соединения. После этого ПАВ должны терять свои свойства за счет протекания химической реакции с адгезивом и участвовать в формировании сшитого полимера. Следовательно, первоначально образовавшийся адсорбционный слой ПАВ становится частью отвержденного адгезива.

На исследование механизмов взаимодействия матрицы с включениями и их моделирование обращается пристальное внимание многими исследователями. Например, предлагается мезомеханическая конечно-элементная модель для тонких адгезивных слоев. Модель калибрована экспериментальными

результатами, в которых тонкий адгезивный слой нагружается монотонно (растяжением) лопатки или сдвигом, и в процессе нагружения (*in situ*) изучается процесс разрушения. Целью мезомеханической конечно-элементной модели является содействие изучению основных закономерностей для адгезивных слоев.

Идеи развиты в работе, где сплошные структурные элементы объединены в единую связку и используются как основа для конечно-элементной сетки. Это делает возможным распространение микротрещин вдоль границ конечных элементов.

Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментом. Модель применима для воспроизведения реальных деформаций, наблюдаемых как при растяжении, так и при сдвиге.

Взаимодействие на границе раздела частица-матрица имеет важнейшее значение для макроскопического поведения композита. В настоящее время ведутся интенсивные аналитические и численные исследования интерфейса, основанные на использовании моделей когезионных зон, в которых принимаются феноменологические соотношения между нормальными (сдвиговыми) усилиями и раскрытием (сдвигом) вдоль поверхностей интерфейса. Однако экспериментов по определению законов когезионного взаимодействия на границах матрица-включение либо мало, либо вообще нет.

Можно считать общепризнанным большое значение адгезии для формирования механических свойств наполненных полимерных систем, в том числе и для высокоэнергетических материалов. Проблемы моделирования поведения материала под нагрузкой в тонких слоях, примыкающих к включениям, по-прежнему остается одной из актуальных проблем мезомеханики.

### 13. Упругие характеристики однонаправленного КМ при плоском напряженном состоянии

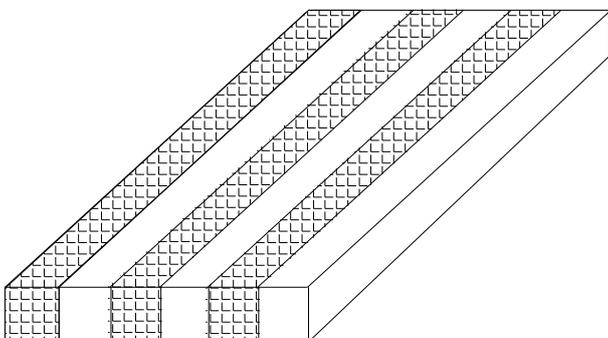
Известно, что анизотропное упругое тело в общем случае характеризуется 21 упругой постоянной. При этом анизотропное тело предполагается однородным, т.е. в каждой точке тела его характеристики одинаковы. На практике эффект анизотропии есть проявление сложной структуры материала. Определение эффективных (макро-) характеристик материала по свойствам составляющих его фаз, матрицы и армирующих включений является задачей структурной механики композитов.

Для некоторых типов структуры материала можно построить «точные» решения. При этом кавычки означают, что понятие точности условное, поскольку рассматривается некоторая идеализированная расчетная схема, а на самом деле и структура материала, и характер взаимодействия элементов структуры могут быть весьма сложными.

При упрощающих предположениях, прежде всего об упорядоченности структуры материала, методами теории упругости можно получить точные решения. Эти решения получаются как аналитическими, так и численными методами.

Обычно решения строятся для относительно простых моделей. Совершенствование методов расчета позволяет уточнить решения, но оказывается, что получаемые уточнения не позволяют достигнуть согласия с экспериментальными данными. Это связано с рядом факторов, в частности, с тем, что закладываемые в модель параметры обладают случайным характером, например, упаковка (местоположение) армирующих включений, их форма и размеры, искривления волокнистых включений и т.д. Сложным и в значительной мере неопределенным является характер взаимодействия матрицы с армирующими включениями.

Используем простейшую модель однонаправленного материала (т.е. в матрице присутствуют волокна, ориентированные в одном направлении). Представим такой материал в виде пластины, в которой чередуются слои, обладающие свойствами волокна и матрицы.



При этом считается, что доля волокна в реальном материале и доля включений в модели равны друг другу. Связи на границах считаются идеальными, а оба материала – линейно упругими.

Далее будем индекс «в» использовать для волокна, «м» - для матрицы, аналогичные эффективные характеристики для всего материала обозначать буквами без индекса.

Пусть вдоль волокон направление оси имеет индекс 1, поперек – 2. Тогда для параметров НДС можно привести очевидные соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{1\varepsilon} = \varepsilon_{1м}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{2\varepsilon} = \sigma_{2м}, \\ \tau_{12} &= \tau_{12\varepsilon} = \tau_{12м}.\end{aligned}\tag{1}$$

Обозначим через  $\psi$  объемную долю волокон. Тогда  $1-\psi$  - объемная доля матрицы, и можно установить следующие связи:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{1\varepsilon} \cdot \psi + (1-\psi) \cdot \sigma_{1м}; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{2\varepsilon} \cdot \psi + (1-\psi) \cdot \varepsilon_{2м}; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12\varepsilon} \cdot \psi + (1-\psi) \cdot \gamma_{12м}.\end{aligned}\tag{2}$$

Эти соотношения согласуются с так называемым правилом смесей: вклад каждого компонента пропорционален его объемной доле.

Полагая, что каждая фаза в отдельности является изотропной, для них можно записать закон Гука. Для волокон:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1\varepsilon} &= \frac{1}{E_\varepsilon} (\sigma_{1\varepsilon} - \nu_\varepsilon \cdot \sigma_{2\varepsilon}), \\ \varepsilon_{2\varepsilon} &= \frac{1}{E_\varepsilon} (\sigma_{2\varepsilon} - \nu_\varepsilon \cdot \sigma_{1\varepsilon}), \\ \gamma_{12\varepsilon} &= \frac{\tau_{12\varepsilon}}{G_\varepsilon}.\end{aligned}\tag{3}$$

Аналогично для матрицы

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1м} &= \frac{1}{E_м} (\sigma_{1м} - \nu_м \cdot \sigma_{2м}), \\ \varepsilon_{2м} &= \frac{1}{E_м} (\sigma_{2м} - \nu_м \cdot \sigma_{1м}), \\ \gamma_{12м} &= \frac{\tau_{12м}}{G_м}.\end{aligned}\tag{4}$$

Преобразовав соотношения (1) – (4), можно выразить напряжения в волокне и в матрице через средние напряжения в композите:

$$\sigma_{1M} = \frac{E_M \sigma_1 + \psi \cdot (v_M E_\epsilon - v_\epsilon E_M) \cdot \sigma_2}{\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M},$$

$$\sigma_{1\epsilon} = \frac{E_\epsilon \sigma_1 + (1 - \psi) \cdot (v_M E_\epsilon - v_\epsilon E_M) \cdot \sigma_2}{\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M},$$

а средние деформации тогда будут:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M} - \frac{\psi v_\epsilon + (1 - \psi) v_M}{\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M} \sigma_2,$$

$$\epsilon_2 = \left( \frac{\psi E_M + (1 - \psi) E_\epsilon}{E_\epsilon E_M} - \frac{\psi(1 - \psi)(v_M E_\epsilon - v_\epsilon E_M)^2}{E_\epsilon E_M [\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M]} \right) \sigma_2 -$$

$$- \frac{\psi v_\epsilon + (1 - \psi) v_M}{\psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M} \sigma_1,$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12} \cdot \frac{\psi G_M + (1 - \psi) \cdot G_\epsilon}{G_\epsilon \cdot G_M}$$

Можно записать выражения эффективных упругих постоянных через упругие постоянные фаз и их объемное содержание:

$$E_1 = \psi E_\epsilon + (1 - \psi) E_M,$$

$$E_2 \approx \frac{E_\epsilon E_M}{\psi E_M + (1 - \psi) E_\epsilon},$$

$$G_{12} = \frac{G_\epsilon G_M}{\psi G_M + (1 - \psi) G_\epsilon}.$$

Второе равенство не является точным, оно получено в предположении, что можно пренебречь слагаемыми, которые имеют порядок квадрата коэффициента Пуассона по сравнению с единицей.

Для каждой из фаз выполняются связи между упругими постоянными:

$$G_\epsilon = \frac{E_\epsilon}{2(1 + \nu_\epsilon)}, \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)}.$$

Коэффициенты Пуассона (эффективные) для однонаправленного материала:

$$\nu_{12} = \psi \nu_\epsilon + (1 - \psi) \nu_M,$$

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}.$$

Можно показать, что формулы для эффективного модуля упругости  $E_1$  и коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$  являются достаточно точными (обратим внимание, что они соответствуют соотношениям теории смесей). Эти значения можно использовать при проведении инженерных расчетов. Что касается остальных эффективных упругих характеристик, их можно использовать для прикидочных расчетов и целесообразно уточнять на основе экспериментов.

Что касается других упругих эффективных постоянных, то выражения для их определения много сложнее, чем соотношения теории смесей.

Рассмотренный пример относится к одному из простейших. Если учесть отклонения в ориентации волокон от направления растяжения, условия на контакте, отличные от идеальных, неравномерность распределения напряжений в фазах и т.д., модель настолько усложняется, что аналитическое решение становится невозможным.

## 14. Неразрушающие методы контроля КМ

Особенностью применения КМ является их изготовление в едином технологическом процессе с изготовлением изделия. Если для традиционных конструкционных материалов можно использовать такой прием, как изготовление образца-свидетеля (обычно это вырезанный из той же заготовки, что и изделие, стандартный образец), то для КМ это неприемлемо. Причина в том, что изготовление и затем испытание образца формально по тем же режимам, что и изделия, может дать совершенно отличные результаты. Это объясняется тем, что размеры и геометрия формы для изготовления образца в общем случае сильно отличаются от таких же параметров для изделия, а режим формования КМ на полимерной основе сильно влияет на деформационно-прочностные и др. свойства.

Тем большее значение приобретают методы неразрушающего контроля изделий. В этом случае изделие после контроля может допускаться до эксплуатации.

Методы неразрушающего контроля базируются на наблюдении, регистрации и анализе результатов взаимодействия физических полей (излучений) или веществ с объектом контроля, причем характер этого взаимодействия зависит от химического состава, строения, состояния структуры контролируемого объекта и т.п.

Все методы неразрушающего контроля являются косвенными методами.

Настройка, калибровка должны осуществляться по контрольным образцам, имитирующим измеряемый физический параметр.

Метода, который бы мог обнаружить самые разнообразные по характеру дефекты, нет. Каждый отдельно взятый метод НК решает ограниченный круг задач технического контроля.

Выбор оптимального метода неразрушающего контроля следует осуществлять исходя из его:

- реальных особенностей;
- физических основ;
- степени разработки;
- области применения;
- чувствительности;
- разрешающей способности;
- технических условий отбраковки;
- технических характеристик аппаратуры.

Измерительная система средств неразрушающего контроля должна быть скомплектована из прибора, преобразователя и контрольного образца.

Раскомплектовка измерительной системы недопустима и ведёт к изменению метрологических характеристик.

Важной характеристикой любых методов неразрушающего контроля является их чувствительность.

Чувствительность - выявление наименьшего по размерам дефекта; зависит от особенностей метода неразрушающего контроля, условий проведения контроля, материала изделий. Удовлетворительная чувствительность для выявления одних дефектов может быть совершенно непригодной для выявления дефектов другого характера.

Чувствительность методов неразрушающего контроля к выявлению одного и того же по характеру дефекта различна.

При определении предельно допустимой погрешности выбранного метода неразрушающего контроля следует обязательно учитывать дополнительные погрешности, возникающие от влияющих факторов:

- минимального радиуса кривизны вогнутой и выпуклой поверхностей;
- шероховатости контролируемой поверхности;
- структуры материала;
- геометрических размеров зоны контроля;
- других влияющих факторов указанных в инструкциях для конкретных приборов.

В зависимости от физических явлений, положенных в основу методов неразрушающего контроля, они подразделяются на девять основных видов: **акустический, магнитный, вихретоковый, проникающими веществами, радиоволновый, радиационный, оптический, тепловой и электрический.**

### **14.1. Визуальные методы**

Одним и наиболее распространенных методов неразрушающего контроля (МНК) является визуальный осмотр.

При этом обнаруживаются следующего вида дефекты:

- разнооттеночность (вследствие локального перегрева изделия);
- посторонние включения;
- трещины, царапины, зазубрины;
- пузыри, поры, шероховатость («апельсиновая корка»);
- натеки, непропитанные участки, пустоты и расслоения.

Когда осмотр проводится в проходящем свете (если материал просвечивается), то дефекты обнаруживаются внутри образцов. Часто при этом используются мощные источники света.

Использование отраженного света позволяет обнаружить лишь поверхностные дефекты.

Особенность этого метода – он зависит от остроты зрения и квалификации контролера. В целом считается, что этот метод применим лишь для обнаружения сравнительно больших по размерам дефектов.

## **14.2. Акустические (ультразвуковые) методы**

**Под акустическим** понимают вид неразрушающего контроля, основанный на регистрации параметров упругих колебаний, возбуждаемых и (или) возникающих в контролируемом объекте.

В акустическом виде неразрушающего контроля чаще всего применяют звуковые и ультразвуковые частоты, т.е. используют диапазон частот приблизительно от 0,5 кГц до 30 МГц. В случае, когда при контроле используют частоты свыше 20 кГц, допустимо применение термина «ультразвуковой» вместо термина «акустический».

Различают пассивные и активные акустические методы контроля. Пассивные методы основаны на исследовании упругих волн, возникающих в контролируемом изделии во время или по окончании технологического процесса, или при нагружении, в частности в момент образования или развития несплошностей. К ним относятся методы контроля, использующие акустическую эмиссию, а также шумо- и вибродиагностика. Активные методы основаны на исследовании распространения колебаний специально вводимых в контролируемое изделие.

Акустические колебания - это механические колебания среды. При акустическом контроле обычно используют колебания с частотой 0,5...25 МГц, т. е. ультразвуковые. Поэтому большинство акустических методов являются ультразвуковыми, хотя известны случаи использования и колебаний звуковой частоты, в частности импедансный метод контроля, используемый при контроле паяных, клееных или сваренных контактной сваркой конструкций.

Для возбуждения и регистрации ультразвуковых колебаний используют пьезоэлектрический эффект: некоторые материалы (кварц, титанат бария, титанат-цирконат свинца и др.) под действием переменного электрического поля меняют свои размеры с частотой изменения поля. Пьезоэлектрическую пластину помещают в специальном устройстве-пьезопреобразователе (искателе). Материалы, используемые в пьезопреобразователях: плексиглас, капролон, фторопласт, полистирол, — способствуют гашению отраженной волны, так как имеют большие коэффициенты затухания ультразвуковых колебаний и малую скорость их распространения.

Пьезопреобразователи, предназначенные для ввода волны в направлении, перпендикулярном поверхности, называют *прямыми*, или *нормальными*, а для ввода под некоторым углом - *наклонными*, или *призматическими*. Пьезопреобразователи включаются по отдельной, совмещенной или отдельно-совмещенной схемам. В последнем случае в одном корпусе размещаются два пьезопреобразователя, разделенных между собой экраном. При падении ультразвуковой волны на поверхность раздела двух сред, в частности на границу дефекта, часть энергии отражается, что и используется при контроле.

Иногда для ввода волны используется механическое устройство в виде «карандаша». Устройство внешне похоже на обычный карандаш с цанговым зажимом, внутри которого вместо грифеля помещен металлический стерженек с регулярными надпилами. При нажатии на этот «грифель» он ломается и подает сигнал, который обладает известной стабильностью.

Для анализа распространения ультразвуковых колебаний в контролируемом изделии используют три основных метода: теневой, зеркально-теневой и эхо-метод.

**При теневом методе** признаком обнаружения дефекта служит уменьшение интенсивности (амплитуды) ультразвуковой волны, прошедшей от излучающего пьезопреобразователя к приемному (рис. 1, а). Недостатки метода - необходимость двустороннего доступа к изделию и малая точность оценки координат дефектов, достоинство - высокая помехоустойчивость. Метод может применяться для изделий с грубо обработанной поверхностью.

**При зеркально-теневом методе** признаком обнаружения дефекта является уменьшение интенсивности (амплитуды) ультразвуковой волны, отраженной от противоположной поверхности изделия (рис. 1, б). Отраженный сигнал называется *донным*. Метод не требует двустороннего доступа к контролируемому изделию, помехоустойчив, применяется для изделий небольшой толщины с грубо обработанной поверхностью. Однако точность определения координат дефекта и при этом методе невысока.

**При эхо-методе** признаком обнаружения дефекта является прием эхо-сигнала, отраженного от дефекта (рис. 1, в). При зеркально-теневом и эхо-методе возможно использование одного пьезопреобразователя в качестве излучателя и приемника (при эхо-методе, как правило, так и делается), однако сигнал при этом должен подаваться импульсами. Если дефект расположен слишком близко к поверхности, то сигнал от него приходит раньше, чем закончится зондирующий импульс, и этот сигнал не будет заметен на фоне зондирующего импульса - дефект не

обнаруживается. Слой материала, непосредственно прилегающий к пьезопреобразователю, в котором дефект не обнаруживается, называется мертвой зоной.

Эхо-метод по сравнению с ранее рассмотренными позволяет достаточно точно определить не только наличие дефекта, но и его характеристики. Если длина волны ультразвуковых колебаний больше размера дефекта, то будет происходить его огибание и дефект не обнаружится. При большой величине структурных элементов в материале происходит значительное затухание колебаний. Так как длина волны обратно пропорциональна частоте колебаний, то с увеличением частоты повышается чувствительность к более мелким дефектам, но возрастают структурные помехи. Это необходимо учитывать при выборе частоты. При контроле сварных соединений обычно используются частоты от 0,5 до 10 МГц. Ультразвуковой контроль (УЗК) крупнозернистых материалов затруднен. Зависимость коэффициента затухания от величины зерна используют в ультразвуковых структурных анализаторах.

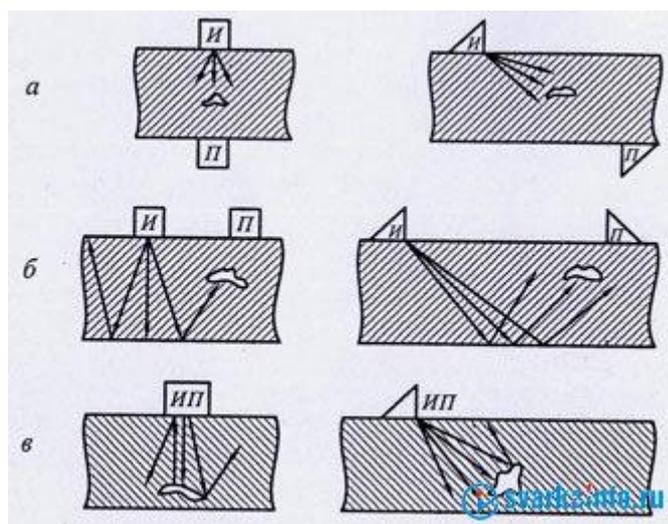


Рис. 1. Методы ультразвукового контроля:  
а - теневой; б - зеркально-теневой; в - эхо-метод;

И - излучатель; П - приемник

Перед УЗК производят подготовку: выбирают основные параметры контроля, настраивают дефектоскоп, очищают поверхности, по которым должен перемещаться искатель, от грязи, пыли, покрывают их слоем контактной жидкости (минеральное масло, глицерин и др.) для осуществления акустического контакта. Затем ведут поиск дефектов, после чего определяют их характеристики: максимальную амплитуду эхо-сигнала, его координаты, условные размеры, конфигурацию и ориентацию.

Для оценки конфигурации и ориентации дефекта применяют специальные методики, включающие прозвучивание под различными углами и в различных направлениях и вращение пьезопреобразователя.

Преимущества УЗК: возможность контроля большой толщины (для толщины свыше 80 мм это наиболее надежный способ), меньшие затраты по сравнению с радиографией, безопасность, выявление дефектов малого раскрытия. Это перспективный метод, постепенно вытесняющий радиационные методы. Однако он имеет и ряд недостатков: объемные дефекты выявляются хуже, чем плоские, не выявляются дефекты, имеющие в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, размер меньше длины волны, сложнее по сравнению с радиационными методами определить вид дефекта, из-за большого уровня структурных помех некоторые материалы нельзя контролировать.

Основной недостаток УЗК - субъективность: зависимость результатов от квалификации и внимательности оператора. Для устранения этого недостатка механизмируют перемещение пьезопреобразователя относительно изделия, создают приборы, в которых с помощью ЭВМ сигналы в процессе сканирования запоминаются, а по его окончании - анализируются и выдаются в наглядной форме.

### **14.3. Радиография**

Радиография заключается в визуализации внутренней структуры изделия. Для этого изделие помещается между источником проникающего излучения и регистратором. Регистратором служит фотопленка или фотобумага. Любой дефект меняет условия прохождения излучения, что и отражается на регистраторе.

Метод позволяет обнаруживать такие дефекты, как непараллельность волокон, их обрывы, качество соединения волокон с полимерной матрицей.

Название «радиография» по существу относится к целому семейству методов. Различие отдельных видов заключается в использовании разных источников излучения, разных способов фиксации изображений, и даже разных способов обработки этих изображений. Так, есть методы, основанные на использовании бета-радиоактивности, гамма-радиации.

#### **14.4. Термические (тепловые) методы**

В тепловых методах неразрушающего контроля (ТНК) в качестве пробной энергии используется тепловая энергия, распространяющаяся в объекте контроля. Температурное поле поверхности объекта является источником информации об особенностях процесса теплопередачи, которые, в свою очередь, зависят от наличия внутренних или наружных дефектов. Под дефектом при этом понимается наличие скрытых раковин, полостей, трещин, инородных включений и т.д., всевозможных отклонений физических свойств объекта от нормы, наличия мест локального перегрева (охлаждения) и т.п.

##### **Физическая сущность теплового контроля**

Методы неразрушающего контроля теплового вида используют при исследовании тепловых процессов в изделиях. При нарушении термодинамического равновесия объекта с окружающей средой на его поверхности возникает избыточное температурное поле, характер которого позволяет получить информацию об интересующих свойствах объектов. Методы теплового контроля основаны на взаимодействии теплового поля объекта с термодинамическими чувствительными элементами (термопарой, фотоприемником, жидкокристаллическим индикатором и т.д.), преобразовании параметров поля (интенсивности, температурного градиента, контраста, лучистости и др.) в электрический сигнал и передаче его на регистрирующий прибор.

Достоинствами теплового контроля являются: дистанционность, высокая скорость обработки информации; высокая производительность испытаний; высокое линейное разрешение: возможность контроля при одно- и двустороннем подходе к изделию; теоретическая возможность контроля любых материалов; многопараметрический характер испытаний; возможность взаимодополняющего сочетания ТНК с другими видами неразрушающего контроля; сочетаемость со стандартными системами обработки информации; возможность поточного контроля и создания автоматизированных систем контроля и управления технологическими процессами. Различают:

- 1) пассивный ТНК;
- 2) активный ТНК.

Пассивный ТНК не нуждается во внешнем источнике теплового воздействия (ИТВ) - тепловое поле в объекте контроля (ОК) возникает при его эксплуатации (изделия радиоэлектроники, энергетическое

оборудование, металлургические печи и т. п.) или изготовлении (закалке, отжиге, сварке и т. п.). Активный ТНК (АНТК) предполагает нагрев объекта внешними источниками энергии. В случае использования АТНК в дефектоскопии, например, для обнаружения дефектов в виде нарушения сплошности (раковин, трещин, мест непрочлея), информацию о дефектах несут в себе локальные неоднородности температурного поля на поверхности ОК.

Существуют следующие *способы активного теплового контроля изделий*:

Кратковременный локальный нагрев изделия с последующей регистрацией температуры той же (при одностороннем контроле) или противоположной области (при двустороннем контроле). По истечении некоторого времени (чтобы изделие успело остыть) переходят к следующей точке и т.д. Так будет пройдена вся поверхность изделия, причем измеренная температура дефектных областей будет существенно отличаться от температуры бездефектных участков. С использованием сканирующей системы, состоящей из жестко закрепленных друг относительно друга источника нагрева и регистрирующего прибора (например, радиометра), перемещающихся с постоянной скоростью вдоль поверхности образца. Одновременный нагрев поверхности образца вдоль некоторой линии (при одностороннем контроле) или вдоль аналогичной линии с противоположной поверхности образца (при двустороннем контроле). Подобная регистрация может быть осуществлена, например, прибором "Термопрофиль." Одновременный нагрев всей поверхности образца и последующая одновременная регистрация температурного распределения на этой же или на противоположной поверхности. Подобный способ контроля может быть осуществлен при помощи телевизора. В методе АТНК можно выделить три основных направления развития:

тепловая дефектоскопия (ТД); тепловая дефектометрия (ТД); тепловая томография (ТТ). Тепловая дефектоскопия состоит в определении факта наличия дефекта и его расположение в объекте контроля. В настоящее время это наиболее разработанное направление. Тепловая дефектометрия - направление АТНК, представляющее методы и средства количественной оценки глубины залегания дефектов, их толщины и поперечных размеров. С математической точки зрения ТД требует решения обратных теплофизических задач. Тепловая томография (ТТ) является последующим развитием ТД и состоит в послойном синтезе внутренней структуры объекта контроля на основе

использования методов проективной компьютерной томографии.

***Область применения активного ТНК:***

Авиакосмическая индустрия.

Ик-влажнометрия: дефекты структуры композитов, готовых панелей, клеевых соединений, защитных покрытий.

Микроэлектроника: лазерный контроль пайки, сварки: ИК-томография полупроводников, БИС; дефекты теплоотводов.

Машиностроение: термоволновая дефектоскопия антикоррозионных покрытий, тепловая толщинометрия пленок.

Лазерная техника: контроль термонапряжений в лазерных кристаллах.

Материаловедение: тепловая диагностика напряженного состояния объектов на основе термоэластического эффекта.

Строительство: контроль теплопроводности строительных материалов, защитных ограждений, обнаружение пустот, промоин.

Нефтехимия: термографический контроль уровня жидкостей в резервуарах.

Энергетика: тепловизионный контроль статоров, защитных покрытий, термоизоляции.

Агрокомплекс: контроль продуктов, дефектоскопия деталей с.х. техники

***Область применения пассивного ТНК:***

Энергетика: тепловая диагностика турбин, дымовых труб, энергоагрегатов, контактных сетей, теплоизоляции.

Нефтехимия: тепловизионный контроль реакторных колонн и энергоагрегатов, обнаружение утечек из продуктопроводов.

Машиностроение: контроль тепловых режимов машин, механизмов.

Строительство: обнаружение утечек тепла в зданиях, тепловизионный контроль качества кровли, ограждающих конструкций.

Экологический мониторинг: дистанционный контроль утечек тепла, загрязнений на водных поверхностях, выявление тепловых аномалий, обнаружение пустот, промоин.

Металлургия: пирометрический контроль температуры расплавов, тепловизионная диагностика футеровки, контроль горячего проката.

Транспорт: обнаружение перегрева букс, дефектов контактных сетей, изоляторов, тепловая диагностика электрооборудования подвижного состава.

Авиация: световая пирометрия лопаток турбин, аэродинамический эксперимент, контроль теплового режима бортовых РЭА.

Медицина: термодиагностика сосудистых заболеваний, онкологии, кожных заболеваний.

### **Методы и средства теплового неразрушающего контроля.**

*Вибротепловизионные метод:* Вибротепловизионный метод особенно перспективен для анализа изделий, работающих в условиях вибрации. В материалах с дефектами структуры под воздействием вибрации возникают температурные поля, что обусловлено рассеянием энергии колебаний на дефектах и превращением ее в теплоту за счет внутреннего перегрева в материале. В областях нарушения гомогенности структуры возникают локальные зоны перегрева объекта. На термограммах вибрирующих пластин и других объектов четко выявляются дефекты типа расслоений, несплошностей и т.п.

### **Метод тепловой томографии**

Тепловая томография - метод визуализации внутренних сечений объекта с помощью тепловых эффектов. Его можно реализовать импульсным облучением объекта плоским равномерным пучком излучения и последовательной регистрацией "тепловых отпечатков" дефектов или неоднородностей теплофизических параметров контролируемой структуры на противоположной стороне изделия с помощью быстродействующего тепловизора.

### **Методы теплового контроля на основе термофотоупругости**

В современной технологии, особенно лазерной, широко применяются высокопрозрачные оптические кристаллы, например в качестве линз для фокусировки форсированного излучения, резонаторов мощных лазеров, защитных иллюминаторов, материалов

для вытяжки ИК световодов и т.п. Важнейшей характеристикой подобных материалов является абсолютное значение натурального показателя поглощения оптического излучения, который, в свою очередь, определяет долю энергии, поглощенную материалом при прохождении через него мощного потока излучения. Эта характеристика позволяет прогнозировать лучевую прочность материалов, динамику их разогрева в процессе облучения, потери в линиях световодной связи и т.п.

### **Теплографический ТНК композитов**

Контроль тонкостенных оболочек из полимерных композиционных материалов, прочность которых существенно зависит от дефектов типа воздушных расслоений, "слипнутых" отслоений и т.д., эффективен с помощью комбинированного теплологографического метода. Он заключается в нагреве (тепловом нагружении) изделия и совместной регистрации термограмм и голографических интерферограмм нагретой поверхности. При этом обнаружение дефектов производится по наличию аномалий интерференционных полос, а их протяженность и глубина залегания - на основании анализа термограмм контролируемой зоны изделия при его нагреве галогенными лампами.

### **14.5. Другие методы контроля**

**Голография.** Метод основан на измерении перемещений поверхности при механическом или тепловом нагружении образца. Образец располагается на очень жесткой платформе, и измерения проводятся с большой точностью.

**Поглощение влаги.** Используется для определения пористости материала или способности его впитывать влагу. Обычно дело сводится к помещению образца в жидкость и взвешиванию. Изменение веса образца является мерой его способности к влагопоглощению.

