Министерство образования и науки
Российской Федерации

Государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
**Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники**

Кафедра механики и графики (МиГ)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МиГ

____________ Люкшин Б.А.

Расчет деформационно-прочностных свойств композиционных материалов и напряженно-деформированного состояния простейших конструкций

Методические указания
к выполнению практических работ по курсу
«Композитные материалы»

Указания рассмотрены и
одобрены на методическом
семинаре кафедры МГУК,
25 октября 2010 г.

Разработчик
Профессор кафедры
МиГ

_______________ Люкшин Б А

2010

Цели практических занятий №№ 1-3 (6 часов)

Усвоение содержания терминов, используемых при анализе прочности элементов и деталей конструкций различного назначения. Понятия матрицы, армирующих включений, способы армирования. Дисперсные и волокнистые армирующие добавки. Влияние добавок на деформационно-прочностные свойства композиций.

Краткие теоретические сведения

Напряжения и деформации при растяжении и сжатии

Деформации

Приложение растягивающей нагрузки к стержню, проволоке и т.д. вызовет удлинение, которое можно измерить в мм, см и т.д. Возникает вопрос, может ли эта величина служить мерой деформации? Довольно очевидно, что длина проволоки (исторически первые эксперименты были проведены для проволоки, поэтому далее будем говорить о ней) влияет на полученные измеренные значения. Чем длиннее проволока, тем больше будет измеренная величина удлинения, хотя нагрузка при этом будет одной и той же. Однако оказывается, что при постоянной (одинаковой для разных проволок) нагрузке отношение удлинения к начальной длине проволоки оказывается величиной примерно постоянной. По этой причине эта величина – отношение абсолютного (измеренного в единицах длины) удлинения к начальной длине – и принимается за меру деформирования.

Эту меру называют относительной деформацией растяжения и обычно обозначают

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 \,,$$

где Δl – измеренное абсолютное удлинение (абсолютная деформация), l_0 – начальная длина проволоки. Как видно из этого соотношения, относительная деформация является величиной безразмерной.

Для резины возможно удлинение ее вдвое по сравнению с начальным размером, что означает, что относительная деформация равна 1 (или 100 %). Реальные конструкционные материалы работаю упруго (т.е. после снятия нагрузки полностью восстанавливают свои размеры и форму), когда относительная деформация составляет доли процента (обычно 0.2 %).

Для примера: если образец имеет начальную длину 1 м (1000 мм), и упруго он будет работать при деформации до 0.2 %, то абсолютное удлинение не должно превысить 2 мм.

Напряжения

Представим себе, что мы придаем одно и то же удлинение проволокам одной начальной длины, но разного сечения. Тогда при равных абсолютных и относительных деформациях растягивающие силы будут разными. Если нам понадобится связать величину силы с деформацией растяжения, то каждый раз нужно будет учитывать площадь поперечного сечения проволоки. Экспериментально было обнаружено, что при равных деформациях проволок разных сечений постоянным оказывается отношение растягивающей силы P к площади поперечного сечения S. Это и послужило причиной тому, что за меру растягивающей нагрузки стали принимать не саму силу, а ее отношение к площади поперечного сечения

$$\sigma = P / S,$$

а соответствующая величина получила название **напряжения**.

В отличие от безразмерной относительной деформации **напряжения имеют размерность *сила/площадь***, и измеряются в величинах Н/м^2 = Па, кГ/см^2, атм = 1 кГ/см^2 и т.д.

Закон Гука

Роберт Гук (английский ученый, 1635-1703 гг.) экспериментально установил зависимость между напряжениями и деформациями: **нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению**.

Математически это выглядит просто:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности в этом соотношении – E – характеристика жесткости материала, называется модулем продольной упругости или модулем упругости первого рода (модуль Юнга). Размерность этого модуля – такая же, как у напряжений. Величина модуля упругости формально отвечает такому напряжению, при котором начальная длина растягиваемого образца растет ровно вдвое.

Коэффициент Пуассона

Поперечные размеры практически любого образца при растяжении уменьшаются, а при сжатии увеличиваются. Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении (сжатии) отношение продольной ε и поперечной ε' деформации в широких пределах является величиной постоянной. Этот факт впервые экспериментально был обнаружен французским ученым Пуассоном (1781-1840), и сформулирован в виде

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon^{/}}{\varepsilon}\right|.$$

Величина ν носит название коэффициента поперечной деформации (коэффициента Пуассона). По определению эта величина безразмерная.

Коэффициент Пуассона является упругой характеристикой конкретного материала. Обычно этот коэффициент при растяжении и сжатии полагают одинаковым.

Отношение массы (веса) армирующих включений к массе (весу) композиции в целом называется **массовой долей** армирующих включений.

Отношение объема армирующих включений к объему композиции в целом называется **объемной долей** армирующих включений.

Эти отношения в общем случае различны, т.к. общий вес (масса) включений зависит не только от объема, занимаемого ими, но и от удельного веса (плотности) материала включений.

Задача 1.

Известна объемная доля армирующих включений ψ. Если плотность включений ρ_1, а плотность матрицы ρ_2, определить массовую долю включений.

Решение

Обозначим объем включений V_1, тогда объем матрицы V_2, а суммарный объем будет

$V = V_1 + V_2$, при этом $\quad \dfrac{V_1}{V} = \psi, \; \dfrac{V_2}{V} = 1 - \psi, \; \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\psi}{1-\psi}.$

Суммарный вес включений $\rho_1 V_1$, матрицы $\rho_2 V_2$, а общий вес $\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$. Тогда массовая доля будет φ

$$\varphi = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \dfrac{1-\psi}{\psi}} = \frac{\rho_1 \psi}{\rho_1 \psi + \rho_2 (1-\psi)}.$$

Нетрудно видеть, что при $\rho_1 = \rho_2$ получится $\varphi = \psi$. Если $\psi = 0$, то и $\varphi = 0$. Если $\rho_1 / \rho_2 = a > 1$, то $\varphi > \psi$.

Задача 2.

Кубик с ребром a см выполнен из однонаправленного материала, при этом объемная доля армирующих волокон равна $0 < \psi < 1$, а волокна направлены вдоль одного из ребер.

Определить напряжения и деформации в кубике для случаев приложения суммарной нагрузки P вдоль и поперек волокон при условиях, что материалы работают упруго, адгезия идеальна. Модуль упругости волокон E_1, матрицы E_2.

Получить искомые значения при a = 2 см, ψ = 0.3, P = 1000 кГ, $E_1 = 10^5$ кГ/см^2, $E_2 = 5 \cdot 10^3$ кГ/см^2.

Решение

1. Рассмотрим случай приложения нагрузки вдоль волокон. Тогда деформации ε будут одинаковыми, а напряжения в волокнах будут $\sigma_1 = E_1\varepsilon,$ а в матрице $\sigma_2 = E_2\varepsilon.$ Именно деформация и подлежит определению, т.к. после этого напряжения определятся.

Очевидно, что при известных напряжениях суммарная нагрузка, которую несут волокна, определяются суммарной площадью волокон. Эта площадь пропорциональна объемной доле и равна $a^2 \cdot \psi$. Тогда волокна несут нагрузку $\sigma_1 a^2\psi = E_1\varepsilon a^2\psi.$

По аналогии суммарная нагрузка, которую несет матрица, будет $E_2\varepsilon a^2(1-\psi).$

В итоге $E_1\varepsilon a^2\psi + E_2\varepsilon a^2(1-\psi) = \varepsilon a^2[E_1\psi + E_2(1-\psi)] = P.$

Тогда искомая деформация

$$\varepsilon = \frac{P/a^2}{E_1\psi + E_2(1-\psi)}.$$

Для получения значения деформации подставим заданные значения величин, входящих в эту формулу. Учтем, что, несмотря на «внесистемную» размерность заданных величин, их подстановка приводит к уничтожению размерности. Тогда получим

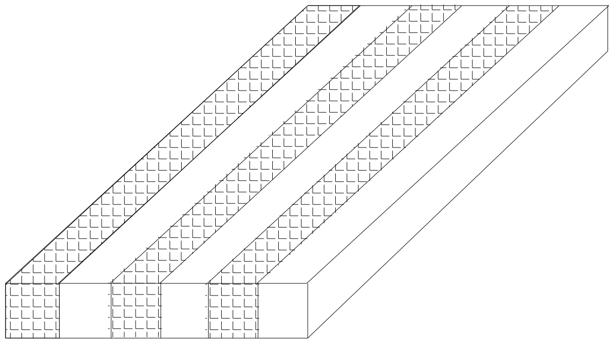
$$\varepsilon = \frac{1000/4}{10^5 \cdot 0.3 + 5 \cdot 10^3 \cdot 0.7} = 0.0075.$$

Напряжения в волокнах будут 750 кГ/см^2, в матрице 37.5 кГ/см^2.

Изменение размера кубика будет $\Delta a = a \cdot \varepsilon = 2 \cdot 0.0075 = 0.015$ (см).

2. Случай приложения нагрузки поперек волокон. Тогда в кубике в целом напряжения известны, причем можно считать, что они одинаковы в волокнах и в матрице.

Дополнительно сделаем предположение, что материал представляет собой слоистую структуру, тогда напряжения в волокнах (в поперечном направлении) и в матрице будут одинаковыми.



Они определяются очевидным образом $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = P / a^2$. Деформации определятся как $\varepsilon_1 = \sigma / E_1$, $\varepsilon_2 = \sigma / E_2$.

Таким образом, напряжения будут σ = 250 кГ/см^2, а деформации $\varepsilon_1 = 250/10^5 = 0.0025$, $\varepsilon_2 = 250/5000 = 0.05$.

Изменение размера кубика составит $\Delta a = a \cdot \psi \cdot \varepsilon_1 + a \cdot (1-\psi) \cdot \varepsilon_2$ = 0.0715 (см). Эта формула применима, если считать, что кубик выполнен из однонаправленного материала с укладкой слоев по приведенной выше схеме. Таким образом, приложение нагрузки поперек волокон вызывает деформацию кубика почти впятеро большую, чем вдоль волокон. По существу, волокна в этом случае «выключаются» из работы.

Задача 3

Каково должно быть содержание стекловолокна в композиции на основе эпоксидной смолы, если изготовленный из этого однонаправленного материала стержень при длине l м и площади поперечного сечения S при действии растягивающей нагрузки P должен растянуться ровно на a см?

Найти численное значение при l = 1 м, S = 1 см^2, a = 1 см, P = 75 кН.

Решение

Используем следующие модули упругости: для стекловолокна E_1 = 100 ГПа, для эпоксидной смолы E_2 = 30 ГПа.

Оценим границы P, при которых имеет смысл искать решение.

Если стержень целиком выполнении из стекловолокна, то величина приложенной нагрузки должна определяться по формуле $P = \sigma \cdot S.$ В свою очередь, $\sigma = E_в \cdot a / l,$ и в итоге $P = E_в \cdot a / l \cdot S = 100kH.$

Если стержень состоит из смолы, по тем же соображениям получим P = 30 кН. Таким образом, решение имеет искать смысл для случая 30 < P < 100 кН.

Обозначим ψ – объемное содержание стекловолокна в композиции. Тогда модуль упругости однонаправленного композита вдоль волокон определится по формуле

$$E_1 = \psi E_в + (1-\psi) E_м,$$

Относительная деформация должна составить величину $\varepsilon = a / l,$ что означает наличие растягивающих напряжений $\sigma = E_1 \cdot a / l,$ а суммарная осевая нагрузка определяется как $P = \sigma \cdot S.$

Объединяя все эти связи, получаем

$$P = \left[\psi E_в + (1-\psi) E_м\right] \cdot a / l \cdot S.$$

В этом соотношении справа и слева заданы все величины, кроме ψ. Задача сводится к решению уравнения с одним неизвестным. После преобразований получаем

$$\psi = \frac{P - E_м \dfrac{aS}{l}}{\dfrac{aS}{l}(E_в - E_м)}.$$

Подставляя заданные величины, получим ψ = 0.64.

Если уменьшить величину a вдвое и задать a = 0.5 см, получим ψ = 1.71 > 1, т.е. физически абсурдный результат. Это означает, что даже состоящий только из стекловолокна стержень не будет обладать заданной жесткостью.

Если же увеличить требуемое удлинение стержня вдвое: a = 2 см, то получим ψ = 0.11.

Контрольные вопросы по занятиям 1-3

1. Правило знаков для деформаций напряжений.
2. Влияние выбора систем координат на знаки деформаций и напряжений
3. Какова размерность модуля Юнга, коэффициента Пуассона?
4. Почему не совпадают массовая и объемная доли включений в композите?

5. Почему при определении деформация через напряжения можно использовать для последних внесистемные единицы?
6. Что такое жесткость стержня?
7. Почему степень наполнения не может быть больше единицы?
8. В чем недостатки модели однонаправленного композита, особенно при работе его на сжатие?

Цели практических занятий 4 – 6 (6 часов)

Освоение методов определения нагрузок в простейших статически определимых системах. Решение типовых задач. На основе определения нагрузок в стержневых системах нахождение состава однонаправленной композиции, отвечающей заданным требованиям по прочности и жесткости.

Краткие теоретические сведения

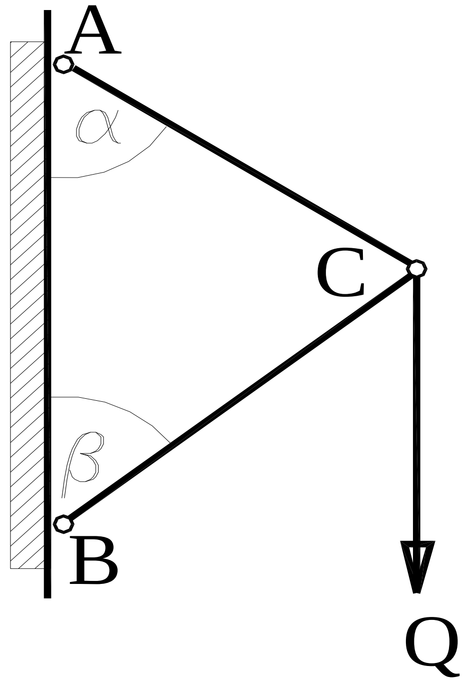
Система является (называется) статически определимой, если для нахождения нагрузок в отдельных ее элементах достаточно лишь условий равновесия.

Простейшей системой, подпадающей под это определение, является трос, удерживающий подвешенный груз заданной массы. Довольно очевидно, что в любом сечении такого троса суммарные напряжения должны уравновешивать вес груза. При этом совершенно неважно, из какого материала изготовлен трос (цепь, веревка, канат и т.п.), поскольку напряжения определяются лишь величиной груза и размером поперечного сечения троса.

В более сложных случаях решение задачи строится на том понимании, что при равновесии любой нагруженной системы суммарный (главный) вектор приложенных сил равен нулю – это одна из аксиом статики. В тех случаях, когда равновесие рассматривается для сил, не создающих момента относительно любой точки, этого условия вполне достаточно. В плоском случае это приводит к векторному равенству – сумма сил (векторов, определяющих эти силы), должна равняться нулю. При решении принимается, что можно этот нулевой вектор спроецировать на любую систему (в плоском случае это любые две непараллельные оси), при этом получаются два скалярных уравнения с нулевыми правыми частями.

Таким образом, в плоском случае неизвестных (при отсутствии моментов) не может быть более двух. Если же в системе допускается ненулевой момент, то появляется еще одно независимое условие для нахождения неизвестных сил, и тогда этих неизвестных может быть 3. В плоском случае это максимальное количество неизвестных.

Задача 4.



При действии нагрузки Q стержень AC растягивается, стержень BC сжимается. Найти соотношение сечений стержней, при котором относительное укорочение одного и относительное удлинение другого стержня будут одинаковыми. Материалы стержней одинаковы.

Решение

Найдем силы, растягивающие верхний и сжимающий нижний стержни. Направим эти силы соответственно от точки C к точке A в верхнем стержне и от точки B к точке C в нижнем. Обозначим эти силы через S_{CA} и S_{BC} соответственно. Тогда для равновесия необходимо выполнение векторного равенства

$$\overline{Q} + \overline{S}_{CA} + \overline{S}_{BC} = 0.$$

Нулевой вектор при проецировании его на любую ось даст нуль, что дает возможность ввести декартовы координаты и записать два уравнения в проекциях на оси X (направленной горизонтально вправо) и Y (направленной вертикально вверх):

$$-S_{CA}\sin\alpha + S_{BC}\sin\beta = 0,$$

$$-Q + S_{CA}\cos\alpha + S_{BC}\cos\beta = 0.$$

Решение этих двух уравнений с двумя неизвестными даст значения S_{CA} и S_{BC} .

Определить значения сил при $Q = 10\ kH$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

Обозначим сечения (площади) стержней через F_{CA} и F_{BC} соответственно. Тогда относительное удлинение верхнего стержня будет

$$\varepsilon_{AC} = \frac{S_{CA}}{E \cdot F_{CA}},$$

где E – модуль упругости.

Аналогично укорочение нижнего стержня будет

$$\varepsilon_{BC} = \frac{S_{BC}}{E \cdot F_{BC}}.$$

Из условия $\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{BC}$ следует искомое отношение площадей сечений

$$\frac{F_{CA}}{F_{BC}} = \frac{S_{CA}}{S_{BC}}.$$

Задача 5

В предыдущей задаче определить для каждого из стержней отношение содержания стекловолокна в однонаправленном композите на основе эпоксидной смолы, так, чтобы при одинаковых поперечных сечениях относительное удлинение и укорочение стержней остались одинаковыми.

Решение

В этом случае при равенстве площадей поперечных сечений и относительных деформаций получим равенства

$$\varepsilon_{AC} = \frac{S_{CA}}{E_{CA} \cdot F} = \varepsilon_{BC} = \frac{S_{BC}}{E_{BC} \cdot F}.$$

Тогда отношение модулей упругости будет

$$\frac{S_{CA}}{S_{BC}} = \frac{E_{CA}}{E_{BC}}.$$

Обозначим через ψ_{CA} и ψ_{BC} соответственно объемную долю стекловолокна в каждом из стержней. Тогда для каждого из них справедливы соотношения

$$E_{CA} = \psi_{CA} E_в + (1 - \psi_{CA}) E_м,$$

$$E_{BC} = \psi_{BC} E_в + (1 - \psi_{BC}) E_м.$$

Обозначив отношение этих величин через k, запишем

$$k = \frac{\psi_{CA} E_в + (1-\psi_{CA}) E_м}{\psi_{BC} E_в + (1-\psi_{BC}) E_м}.$$

Отсюда можно получить выражение ψ_{CA} через ψ_{BC} и далее найти их отношение.

Задача 6

Сколько порошка меди по весу нужно добавить в смесь с фторопластом, чтобы его объемная доля составила 10 %? Насыпная плотность порошка меди составляет 8 г/см^3, плотность фторопласта 2 г/см^3.

Сколько по весу меди и фторопласта нужно взять для получения объема смеси 200 см^3 ?

Решение

Используем решение задачи 1. Связь объемной степени наполнения ψ с массовой φ выражается формулой

$$\varphi = \frac{\rho_1 \psi}{\rho_1 \psi + \rho_2 (1-\psi)}.$$

Отсюда

$$\varphi \approx 0.308.$$

Средняя плотность смеси может быть посчитана из следующих соображений. Масса одной фазы $m_1 = \rho_1 \psi_1 v$, второй $m_2 = \rho_2 (1-\psi) v$, тогда средняя плотность смеси будет частным от деления массы на объем:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{v} = \rho_1 \psi + \rho_2 (1-\psi),$$

т.е. определяется по теории смесей.

В нашем случае $\psi = 0.1$, и средняя плотность равна 2.6 г/см^3. Тогда при заданном объеме смеси вес будет $m = \rho \cdot v = 520$ г, меди нужно взять $m\varphi = 520 \cdot 0.308 = 160.16$ г, фторопласта $m\,(1-\psi) = 359.84$ г.

Задача 7

Однонаправленный композит состоит из эпоксидной матрицы и стекловолокна. Модули упругости для стекловолокна $E_1 = 100$ ГПа, для эпоксидной смолы $E_2 = 30$ ГПа. Предел прочности стекловолокна равен $\sigma_1 = 4$ ГПа, для эпоксидной смолы $\sigma_2 = 100$ МПа.

Определить, какая фаза начнет разрушаться раньше при одноосном нагружении.

Решение

Максимальная деформация, которую выдержит стекловолокно, равна $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E_1$ = 0.04, а эпоксидная смола $\varepsilon_2 = \sigma_2 / E_2$ = 0.1/30 = 0.033.

Таким образом, разрушение начнется со смолы.

Задача 8

Если в условиях предыдущей задачи объемное содержание стекловолокна составит величину ψ = 10 %, при какой растягивающей нагрузке начнет разрушаться круглый стержень диаметром d = 5 мм ?

Решение

Очевидно, что объемное содержание фаз в однонаправленном композите пропорционально площади. Тогда площадь поперечного сечения стержня $S = \pi d^2 / 4$ = 19.6 мм^2, а доля, приходящаяся на стекловолокно, будет S_1 = 1.96 мм^2. Доля эпоксидной смолы составит S_2 = 17.6 мм^2.

Разрушение начнется, как было показано, с эпоксидной смолы – т.е. когда будет достигнут предел ее прочности. Предел прочности эпоксидной смолы задан, и суммарная нагрузка, которую к моменту начала разрушения будет нести смола, равна

$$P_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = 10^8\, \textit{Па} \cdot 17.6 \cdot 10^{-6}\, \textit{м}^2 = 1760\ H.$$

Деформация смолы (и всего стержня) составит ε = 0.033. При такой деформации напряжения в стекловолокне будут $\sigma_1 = E_2 \cdot \varepsilon$, а нагрузка, воспринимаемая волокнами, будет равна

$P_1 = \sigma_1 \cdot S_1 = E_2 \cdot \varepsilon \cdot S_1 = 10^{11}$Па$\cdot 0.033 \cdot 1.96 \cdot 10^{-6}$ м$^2 \approx 65 \cdot 10^2$Н.

Суммарная нагрузка составит $P_1 + P_2$ = 8260 Н.

Контрольные вопросы по занятиям 4 – 6

1. Что такое статически определимая система?
2. Если один и тот же груз подвесить на проволоку, на цепочку, на веревочку, на канат, то в каком случае суммарные напряжения будут больше?
3. Если один и тот же груз подвешивать на проволочках с разными сечениями, в каком случае напряжения будут выше?
4. Если один и тот же груз подвешивать на проволочках с одинаковыми сечениями, но из разного материала, в каком случае

напряжения будут выше? Что можно сказать в этом случае о деформациях удлинения?

Цели занятий 7 – 9 (5 часов)

Усвоение понятия эффективного модуля упругости композитного материала. Для однонаправленного композита равенства напряжений и деформаций в зависимости от способа приложения нагрузки. Определение параметров напряженно-деформированного состояния в элементах композита (в матрице и в армирующих волокнах).

Краткие теоретические сведения

Эффективным называется модуль упругости материала, наблюдаемый, в частности, экспериментально. Это величина, как правило, отличная от модуля упругости матрицы и модуля упругости армирующих включений. В общем случае для определения эффективного модуля упругости так называемое правило смесей непригодно. Это связано с тем, что вклад отдельных фаз композиции в его деформационные и прочностные свойства не является пропорциональным его объемному или массовому содержанию.

Для определения модуля упругости однонаправленного композита создаются расчетные модели различного уровня сложности. При этом привлекаются гипотезы, не всегда согласующиеся с реальностью. Например, обычно принимается, что на границах раздела фаз (на контактных поверхностях) адгезия идеальна, т.е. в процессе нагружения и деформирования в этих зонах не происходит расслоения материала. Если речь идет об однонаправленных композитах, их модели создаются в предположении, что пари нагружении вдоль волокон деформации матриц и волокон одинаковы, что тоже не отвечает реальному процессу, и т.д. Тем не менее, даже такого рода модели оказываются полезными и с достаточной для практики точностью во многих случаях позволяют найти эффективные характеристики материала.

Задача 9

Однонаправленный композит состоит из эпоксидной матрицы и стекловолокна. Модули упругости для стекловолокна E_1 = 100 ГПа, для эпоксидной смолы E_2 = 30 ГПа. Необходимо создать два стержня одинакового сечения из такого материала с тем, чтобы один из них при равных нагрузках растягивался вдвое сильнее другого. Определить содержание стекловолокна в более жестком стержне, если в податливом это содержание равно 1) 0.1; 2) 0.2; 3) 0.05.

Решение

Отличия в деформациях при равных нагрузках и равных напряжениях будут возникать за счет разницы в модулях упругости. Для каждого из стержней справедлива формула для определения модуля

$$E_1 = \psi E_в + (1-\psi)E_м,$$

причем для стержня 1 это будет $E_1 = \psi_1 E_в + (1-\psi_1)E_м$, для стержня 2 $E_2 = \psi_2 E_в + (1-\psi_2)E_м$, а из условия задачи $E_1 = 2 \cdot E_2$, тогда

$$\psi_1 E_в + (1-\psi_1)E_м = 2 \cdot [\psi_2 E_в + (1-\psi_2)E_м].$$

$$\psi_1 = 2 \cdot \psi_2 + \frac{E_м}{E_в - E_м}.$$

Ответ: 1) 0.63; 2) 1.03 (!); 3) 0.48.

Задача 10

Для получения десяти заготовок из КМ в виде полого цилиндра с размерами r = 15 мм, R = 25 мм, h = 60 мм требуется создать смесь на основе фторопласта и порошка меди. Плотность компактного материала после прессования составляет 2.3 г/см^2 . Сколько нужно фторопласта и порошка меди для создания смеси?

Решение

Найдем по данным суммарный объем и массу заготовок.

$$\begin{aligned} V &= 10 \cdot \pi(R^2 - r^2)h = 753.6 \ \ (см^3), \\ M &= \rho V = 1733.28 \ \ \ г. \end{aligned} \tag{1}$$

Плотность смеси определяется по теории смесей формулой

$$\rho = \rho_1 \psi + \rho_2 (1-\psi). \tag{2}$$

Общая масса будет определена, если плотность из (1) и (2) совпадает и равна 2.3 г/см^3. Тогда определяется

$$\psi = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{2.3-2}{8-2} = 0.05.$$

Объем порошка меди будет $V_1 = \psi \cdot V = 86.7\ (см^3)$, а вес 693.3 г. Тогда на долю фторопласта придется 1040 г.

Задача 11

Два одинаковых по размерам стержня подвержены действию растягивающих нагрузок P_1 = 1 kH и P_2 = 2 kH, при этом удлинение стержней одинаково. Стержни выполнены из однонаправленного композита на основе эпоксидной смолы, армированы углеродными волокнами с модулем упругости 400 ГПа. Каково соотношение между степенями объемного наполнения обоих стержней? Найти решение при 1) $\psi_2 = 0.2$; 2) $\psi_2 = 0.3$.

Решение

Напряжения в стержнях различны, а деформации одинаковы. Для этого необходимо, чтобы модули упругости их соотносились также, как напряжения.

Для первого стержня модуль будет

$$E_1 = \psi_1 E_в + (1-\psi_1)E_м,$$

для второго

$$E_2 = \psi_2 E_в + (1-\psi_2)E_м,$$

при этом необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$2E_1 = 2(\psi_1 E_в + (1-\psi_1)E_м) = E_2 = \psi_2 E_в + (1-\psi_2)E_м,$$

Отсюда

$$\psi_1 = \frac{\psi_2}{2} - \frac{E_м}{2(E_1 - E_м)}.$$

Для варианта 1) $\psi_1 = 0.06$; 2) $\psi_1 = 0.11$.

Цели

Задача 12

В условиях предыдущей задачи определить длину стержней с площадью поперечного сечения F = 0.2 см^2, при которой абсолютное удлинение составит 1 мм. Рассмотреть два варианта, полученных при решении задачи 11.

Решение

Поскольку удлинение одинаково, достаточно рассмотреть любой из стержней. Пусть для конкретности это будет стержень с меньшим модулем упругости.

Относительное удлинение будет $\varepsilon = \Delta l/l = \sigma / E_1$, тогда длина $l = E_1 \cdot \Delta l / \sigma$. Напряжения определяются как отношение нагрузки 1000 Н к площади сечения и составляют σ = 1000 / 0.00002 = $5 \cdot 10^7$ Па. Модуль упругости

1) при ψ_1 = 0.06 будет E_1 = 0.06 · 400 + 0.94 · 30 = 52.2 (ГПа). В итоге l = 1.044 (м).
2) при ψ_1 = 0.11 будет 60.7 (ГПа), и l = 1.214 (м).

Задача 13

С использованием решения предыдущей задачи определить значение разрушающей нагрузки для первого стержня, если максимальная деформация углеволокна составляет 0.01, а эпоксидной смолы 0.05.

Решение

Деформация считается как $\varepsilon = \sigma / E_1$, а ее предельное значение задано свойствами углеволокна (поскольку при одноосном армировании деформации матрицы и волокон одинаковы, то за предельное значение берется наименьшее из заданных).

Для первого варианта E_1 = 52.2 ГПа, $\sigma = E_1 \cdot \varepsilon$ = 0.522 ГПа. Суммарная предельная нагрузка будет $P = \sigma \cdot F$ = 0.522 · $2 \cdot 10^{-5}$ = 10440 Н.

Для второго варианта P = 12140 Н.

Цели и задачи занятий 7 – 9 (5 часов)

Задача 14

Каким должно быть соотношение объемного содержания углеволокна и стекловолокна в однонаправленных композитах на основе эпоксидной матрицы, чтобы они имели одинаковые эффективные модули упругости?

Решение

Для каждого из материалов справедлива формула для определения эффективного модуля упругости $E_1 = \psi_1 E_в + (1-\psi_1) E_м$, причем отличия заключаются в модулях волокон. Приравнивая значения для двух материалов, причем свойства матрицы одинаковы, получим искомое соотношение:

$$\psi_1 E_{в1} + (1-\psi_1) E_м = \psi_2 E_{в2} + (1-\psi_2) E_м,$$

отсюда

$$\psi_1 = \psi_2 \frac{E_{в2} - E_м}{E_{в1} - E_м}.$$

Если принять модули упругости для углеволокна 400 ГПа, для стекловолокна 100 ГПа, для смолы 30 ГПа, то соотношение будет

$$\psi_1 = \psi_2 \cdot 0.19.$$

Задача 15

Как изменится вес одинаковых по объему изделий из указанных в предыдущей задаче материалов при условии, что модули упругости материалов изделий при одноосном нагружении должна быть одинаковыми, если удельный вес углеволокна ρ_1 = 1.8 г/см^3, стекловолокна ρ_2 = 2.5 г/см^3, матрицы $\rho_м$ = 1.2 г/см^3. Вариант со стекловолокном реализован при ψ_2 = 0.2.

Решение

Для модулей упругости обоих материалов справедлива формула $\psi_1 E_{в1} + (1-\psi_1)E_м = \psi_2 E_{в2} + (1-\psi_2)E_м$, причем соотношение между степенями наполнения уже определено. Вес изделий при фиксированном объеме определяется средней плотностью (средним удельным весом) материала, который тоже определяется по формуле смесей

$$\rho_1 = \psi_1 \rho_{в1} + (1-\psi_1)\rho_м,$$
$$\rho_2 = \psi_2 \rho_{в2} + (1-\psi_2)\rho_м.$$

Тогда для варианта с углеволокном будет ρ_1 = 1.222 г/см^3, со стекловолокном ρ_2 = 1.460 г/см^3.

Контрольные вопросы по занятиям 7 – 9

1. В каком случае эффективный модуль упругости совпадет с соответствующими характеристиками для матрицы и включений?
2. Почему модели однонаправленного композита являются приближенными?