МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники»
(ТУСУР)

Кафедра механики и графики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МиГ
______________ Люкшин Б.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению практических работ по вариационным методам в механике
для студентов всех специальностей

Указания рассмотрены и одобрены
на методическом семинаре кафедры МиГ,
протокол № 74 от 19.09.2011 г.

2012

Методическая разработка содержит указания по проведению практических работ по дисциплине «Вариационные методы в механике» и предназначена для студентов всех инженерных специальностей, изучающих данную дисциплину.

Разработчик: профессор кафедры МиГ Герасимов А.В.

Содержание

Здесь приведены основные понятия и представлены подходы к решению относительно простых задач вариационного исчисления. Рассматриваемый материал является необходимой базой для решения более сложных вариационных задач механики сплошных сред.

Элементы вариационного исчисления.

1. Уравнения Эйлера-Лагранжа.

1.1. Понятие функционала и его экстремума.

Рассмотрим множество дважды дифференцируемых функций $y = y(x), x \in [a,b]$, таких, что для всех функций из этого множества выполняется $y(a) = y_1, y(b) = y_2$. y_1, y_2 - фиксированы.

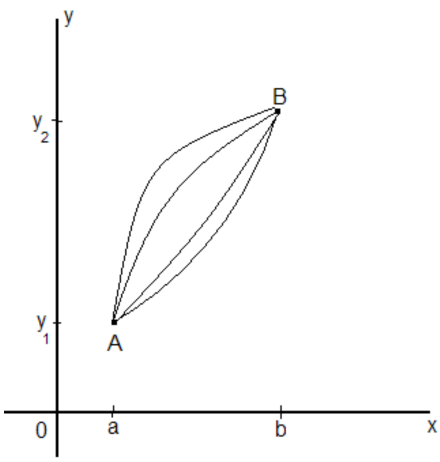

Рис. 1.

Геометрически множество указанных выше функций можно трактовать как множество кривых на плоскости начинающихся в фиксированной точке A и заканчивающихся в другой фиксированной точке B.

Введем функцию $F(x, y(x), y'(x))$, имеющую непрерывные частные производные по всем трем переменным до второго порядка включительно. Используя эту функцию построим определенный интеграл

$$J = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx. \qquad (1)$$

Очевидно, что для каждой заданной функции $y = y(x)$ этот интеграл является некоторым числом. Если в качестве функций $y = y(x)$ подставлять различные функции из указанного выше множества, то будем, вообще говоря, получать различные числа. В результате возникает отображение рассмотренного выше множества функций $V=\{y=y(x), x\in[a,b]\}$ в некоторое подмножество из Р

$$M \to \text{Р}$$

$$y(x)\in M \to J=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx \in \quad \text{Р}.$$

Обратим внимание, что введенное отображение ставит в соответствие каждой функции некоторое действительное число. Отображение указанного вида называется функционалом. Функции $y=y(x)$ называются аргументами функционала, а числа $J=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ называются значениями функционала. Это обстоятельство записывается так $J=J[y]$.

Вариационным исчислением называется раздел математики, изучающий экстремумы, то есть максимумы и минимумы функционалов. Основная задача вариационного исчисления звучит следующим образом: из всех функций $y=y(x)\in M$ найти такую (такие), которая (которые) доставляет (доставляют) функционалу $J[y]$ максимум или минимум.

Пусть $y(x)$ - функция доставляющая функционалу $J[y]$ экстремум. Это значит, что если мы рассмотрим другую достаточно близкую в некотором смысле функцию $y_0(x)$, то $J[y_0]$ либо всегда больше либо всегда меньше чем $J[y]$. Выражение $\delta y(x)=y(x)-y_0(x)$ называется вариацией функции. Выражение $\Delta J[y_0]=J[y_0+\delta y]-J[y]$ называется приращением функционала $J[y]$. Функция $y_0(x)$ доставляет функционалу максимум, если $\Delta J[y_0]<0$, минимум, если $\Delta J[y_0]>0$. Наша цель состоит в том, чтобы найти необходимые условия экстремума функционала $J[y]$.

1.2. <u>Необходимое условие экстремума.</u>

Пусть $y_0(x)$- функция, доставляющая экстремум. Рассмотрим вариацию $\delta y(x)=\alpha h(x)$, где α - произвольное действительное число, а $h(x)$ - произвольная функция из M. Рассмотрим $J[y_0+\delta y]=J[y_0+\alpha h]$. Это выражение является обычной функцией вещественной переменной α. Так как $J[y_0]$ есть экстремальное значение функционала, то функция $f(\alpha)=J[y_0+\alpha h]$ имеет экстремум при $\alpha=0$. Необходимое условие экстремума функции одной переменной хорошо известно: это равенство нулю первой производной

$$\left.\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0 \Rightarrow \left.\frac{dJ[y_0+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0. \qquad (2)$$

Вычислим производную по α. Имеем

$$J[y_0+\alpha h]=J=\int_a^b F(x,y_0(x)+\alpha h(x),y_0'(x)+\alpha h'(x))dx$$

$$\frac{dJ[y_0+\alpha h]}{d\alpha}=\int_a^b\left\{\frac{\partial F(x,y_0(x)+\alpha h(x),y_0'(x)+\alpha h'(x))}{\partial(y_0(x)+\alpha h(x))}h(x)+\frac{\partial F(x,y_0(x)+\alpha h(x),y_0'(x)+\alpha h'(x))}{\partial(y_0'(x)+\alpha h'(x))}h'(x\right.$$

Теперь положим $\alpha=0$. Находим

$$\left.\frac{dJ[y_0+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_a^b\left\{\frac{\partial F(x,y_0(x),y_0'(x))}{\partial y_0(x)}h(x)+\frac{\partial F(x,y_0(x),y_0'(x))}{\partial y_0'(x)}h'(x)\right\}dx.$$

Вспоминая соотношение (2) получим

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0}h+\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}h'\right)dx=0 \qquad (3)$$

Преобразуем это выражение. Рассмотрим второй член и проинтегрируем его по частям. Имеем

$$\int_a^b\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}h'dx.$$

Положим $u=\dfrac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'},\quad v=h'dx$. Тогда $v=h,\quad du=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}\right)dx$.

Поэтому $$\int_a^b\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}h'dx=\left.\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}h\right|_a^b-\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}\right)hdx. \qquad (4)$$

Теперь заметим, что для всех функций $y(x)$ выполняется $y(a)=y_{1,}\ y(b)=y_2$. То есть $y_0(a)=y_{1,}\ y_0(b)=y_2$ и $y_0(a)+\alpha h(a)=y_{1,}\ y_0(b)+\alpha h(b)=y_2$. Это значит, что $h(a)=0,\quad h(b)=0$.

В результате первый член в равенстве (4) обращается в ноль.

Возвращаясь к соотношению (3) получим

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y_0'}\right)hdx=0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольной функции $h(x)$. Следовательно подынтегральное выражение обращается в ноль и мы получим, что при $y=y_0(x)$ выполняется уравнение

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0. \qquad (5)$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа. Уравнение Эйлера-Лагранжа представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением является функция $y = y_0(x)$, обеспечивающая экстремум исходному

Геометрически, основная задача вариационного исчисления звучит так: из всех кривых, соединяющих две заданные точки на плоскости найти такую кривую $y = y_0(x)$ для которой функционал (1) имеет экстремум. Чтобы найти такую кривую надо решить дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа (5).

Выражение $\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \alpha h dx$ называется вариацией функционала $J[y]$ и обозначается $\delta J[y]$. Выражение $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$ называется вариационной или функциональной производной и обозначается $\frac{\delta J[y]}{\delta y(x)}$. С учетом этих обозначений $\delta J[y] = \int_a^b \frac{\delta J[y]}{\delta y(x)} \delta y(x) dx$. Необходимое условие экстремума функционала принимает простой вид $\delta J[y] = 0$, откуда $\frac{\delta J[y]}{\delta y(x)} = 0$.

Задача 1.

Найти экстремали $y_0(x)$ функционала

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

и вычислить $J[y_0]$.

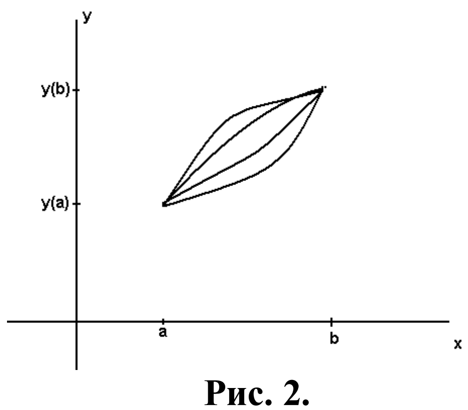

Рис. 2.

Решение

Запишем уравнение Эйлера в данном случае $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Уравнение Эйлера имеет вид

$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$. В данном случае $\frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Получаем уравнение $\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0\Rightarrow\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=const\Rightarrow y'=const=C_1.$ Имеем дифференциальное уравнение $y'(x)=C\ \Rightarrow y(x)=C_1x+C_2,\quad C_1,C_2-$произвольные постоянные. Итак, экстремали есть $y_0(x)=C_1x+C_2$ - семейство прямых линий.

$$J[y_0]=\int_a^b\sqrt{1+y_0'^2(x)}dx=\int_a^b\sqrt{1+C_1^2}dx=(b-a)\sqrt{1+C_1^2}\ .$$

Задача 2.

Найти экстремали функционала

$$J[y]=\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx\,.$$

Решение

Запишем уравнение Эйлера в данном случае $F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$. Уравнение Эйлера есть

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\,.$$

В данном случае $\frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}$.

Получаем уравнение $\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0\Rightarrow\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=const=C_1.$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

Для его решения положим $y'=tg\,t$, где t - произвольный параметр. Тогда $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+tg^2t}=\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}{\cos t}=\frac{1}{\cos t}.$ Значит $\frac{tg\,t\cos t}{x}=C_1\Rightarrow\frac{\sin t}{x}=C_1\Rightarrow x=\frac{1}{C_1}\sin t\equiv\overline{C}_1\sin t,$ где $\overline{C}_1=\frac{1}{C_1}=const.$

Запишем уравнение $y'=tgt\Rightarrow\frac{dy}{dx}=tgt\Rightarrow dy=tg\,tdx=tg\,t\overline{C}_1\cos tdt=\overline{C}_1\sin tdt,\quad y=\int\overline{C}_1\sin tdt+C_2=-\overline{C}_1\cos t+C_2.$

В результате мы имеем экстремали в параметрической форме

$x = \overline{C}_1 \sin t,$
$y = -\overline{C}_1 \cos t + C_2.$

Отсюда $y - C_2 = \overline{C}_1 \cos t, \quad x = \overline{C}_1 \sin t.$ Значит $x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^{\,2} \cos^2 t + \overline{C}_1^{\,2} \sin^2 t = \frac{1}{C_1^2}.$ Получили уравнение $x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^{\,2}$ - семейство окружностей с центром в точке $(0, C_2)$ и радиусами $\left|\overline{C}_1\right|$.

Задача 3.

Найти экстремали функционала
$$J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx.$$

Решение
Запишем уравнение Эйлера.
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$
В данном случае $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = F(y, y')$ от x не зависит. Преобразуем сначала уравнение Эйлера для случая когда $F(y, y')$.
Имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F(y, y')}{\partial y' \partial y'} y''.$$
Обозначим $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = F_{yy'}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} = F_{y'y'}.$
Уравнение принимает вид

$$F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$
Умножим обе части на y', имеем
$$y' F_y - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = 0.$$
Рассмотрим производную
$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}(y, y')) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - y' F_{y'y} y' - y' F_{y'y'} y'' = y' F_y - F_{yy'} y'^2 - y' F_{y'y'} y''$$
- левая часть предыдущего уравнения. Поэтому рассматриваемое уравнение можно переписать так
$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F - y' F_{y'} = const.$$

В данном случае $F(y,y^{'})=\dfrac{\sqrt{1+y^{'2}}}{y}$, $F_{y^{'}}=\dfrac{y^{'}}{y\sqrt{1+y^{'2}}}$. Получим уравнение $\dfrac{\sqrt{1+y^{'2}}}{y}-\dfrac{y^{'2}}{y\sqrt{1+y^{'2}}}=const=C_1$. Для решения данного дифференциального уравнения положим $y^{'}=tg\,t$.

Тогда $\sqrt{1+y^{'2}}=\dfrac{1}{\cos t}$. Имеем $\dfrac{1}{y\cos t}-\dfrac{tg^2 t\cos t}{y}=C_1\Rightarrow\dfrac{1}{y\cos t}(1-\sin^2 t)=C_1\Rightarrow\dfrac{1}{y}\cos t=C_1\Rightarrow y=\overline{C}_1\cos t,$ где $\overline{C}_1=\dfrac{1}{C_1}=const.$

Запишем уравнение $y^{'}=tg\,t\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=tg\,t\Rightarrow dx=\dfrac{dy}{tg\,t}=\dfrac{\cos t}{\sin t}\overline{C}_1(-\sin t)dt=-\overline{C}_1\cos t dt.$

Отсюда

$x=\int(-\overline{C}_1\cos t)dt+C_2=-\overline{C}_1\sin t+C_2.$

В итоге

$$x=-\overline{C}_1\sin t+C_2,$$
$$y=-\overline{C}_1\cos t.$$

Это если экстремали в параметрической форме. Исключим параметр t:

$x-C_2=-\overline{C}_1\sin t,\quad y=\overline{C}_1\cos t\Rightarrow$

$(x-C_2)^2+y^2+=\overline{C}_1^{\,2}(\sin^2 t+\cos^2 t)\Rightarrow(x-C_2)^2+y^2+=\overline{C}_1^{\,2}.$ Экстремали представляют собой семейство окружностей с центром в точке $(C_2,0)$ и радиусами $\left|\overline{C}_1\right|$.

Задача 4.

Найти экстремали функционала

$$J[y]=\int_a^b y^{'}(1+x^2y^{'})dx\,.$$

Решение

Запишем уравнение Эйлера $\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y^{'}}=0$.

В данном случае $F=y^{'}(1+x^2y^{'})=y^{'}+x^2y^{'2}$. $\dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\quad\dfrac{\partial F}{\partial y^{'}}=1+2x^2y^{'}.$

Получаем уравнение $\dfrac{d}{dx}(1+2x^2y^{'})=0\Rightarrow 1+2x^2y^{'}=C=const\Rightarrow x^2y^{'}=\dfrac{C-1}{2}=C_1.$

$$y' = \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow dy = \frac{C_1}{x^2}dx \Rightarrow y = \int \frac{C_1}{x^2}dx + C_2 = -\frac{C_1}{x} + C_2.$$

Экстремали $y = -\frac{C_1}{x} + C_2$ - семейство гипербол.

Задача 5.

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx.$$

Решение

Запишем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

В данном случае $F = y'^2 + 2yy' - 16y^2$, тогда $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 32y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + 2y.$

Уравнение Эйлера принимает вид $2y' - 32y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0 \Rightarrow 2y' - 32y - 2y'' + 2y' = 0 \Rightarrow y'' + 16y = 0.$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $p^2 + 16 = 0 \Rightarrow p = \pm 4i$ корни чисто мнимые. Значит, решение надо искать в виде $y = a\cos 4x + b\sin 4x.$ Проверим, $y' = -4a\sin 4x + 4b\cos 4x,$ $y'' = -16(a\cos 4x + b\sin 4x) = -16y \Rightarrow y'' + 16y = 0.$

Экстремаль имеет вид $y = a\cos 4x + b\sin 4x,$ a, b - произвольные постоянные.

Задача 6.

Найти экстремали функционала

$J[y] = \int_0^1 (xy' + y'^2)dx$. Причем $y(0) = 1, y(1) = 2.$

Решение

Запишем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

В данном случае $F = xy' + y'^2$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial F}{\partial y'} = x + 2y'.$

Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dx}(x+2y^{'})=0 \Rightarrow x+2y^{'}=C_1=const.$

Отсюда $y^{'}=\frac{1}{2}(C_1-x) \Rightarrow dy=\frac{1}{2}(C_1-x)dx \Rightarrow y=\int\frac{1}{2}(C_1-x)dx+C_2=\frac{1}{2}(C_1x-\frac{x^2}{2})dx+C_2.$

Экстремаль имеет вид $y=-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}C_1x+C_2.$ Найдем C_1,C_2 из условия $y(0)=1,\ y(1)=2.$

$y(0)=C_2 \Rightarrow C_2=1.\ y(1)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}C_1+C_2=2 \Rightarrow -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}C_1=2-C_2=1 \Rightarrow \frac{1}{2}C_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow C_1=\frac{5}{2}.$

Значит $y=-\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}x+1.$

Задача 7.

Найти экстремаль функционала

$J[y]=\int\limits_0^1 e^{y^{'}}tgy^{'}dx$. Причем $y(0)=1,\ y(1)=1.$

Решение

Запишем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{'}}=0.$$

В данном случае $F=e^{y^{'}}tgy^{'}$. Значит $\frac{\partial F}{\partial y}=0^{'}.$

Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{'}}=0 \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y^{'}}=const=C.$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{'}}=e^{y^{'}}tgy^{'}+e^{y^{'}}\frac{1}{\cos^2 y^{'}} \Rightarrow e^{y^{'}}(tgy^{'}+\frac{1}{\cos^2 y^{'}})=C \Rightarrow y^{'}=const=C_1.$$

$$\frac{dy}{dx}=C_1 \Rightarrow dy=C_1dx \Rightarrow y=C_1x+C_2.$$

Находим $y(0)=C_2=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0.\ y(1)=C_1+C_2=1 \Rightarrow C_1=1.$

Окончательно, искомая экстремаль есть $y=x$.

2. Обобщения основной задачи вариационного исчисления.

1. Необходимые условия экстремума функционалов, зависящих от нескольких функций.

Рассмотрим множество функций одной переменной $M = \{y = y(x), z = z(x), ..., x \in [a,b]\}$, таких , что все функции из М удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} y(a) = y_1,\ y(b) = y_2 \\ z(a) = z_1,\ z(b) = z_2\ . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \qquad (1)$$

Введем функцию $F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$, где $y(x), z(x)$ - две произвольные функции и построим интеграл

$$J[y,z] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))dx\,. \qquad (2)$$

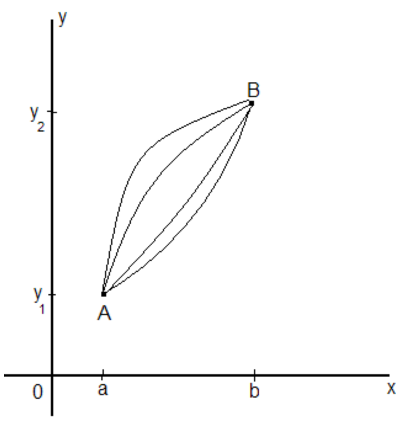

Рис. 3.

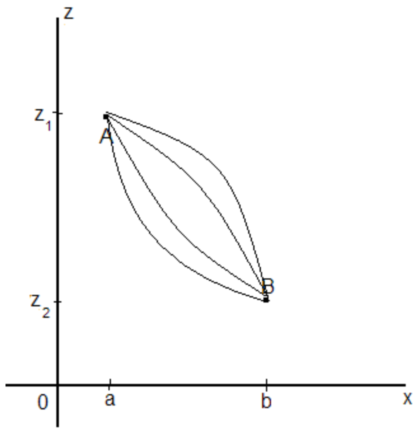

Рис.4.

Выражение (2) является функционалом, зависящим от двух функций $y(x), z(x)$. Задача ставится так: найти две $y = y_0(x)$ и $z = z_0(x)$ для которых данный функционал (2) имеет экстремум.

Решение задачи проводится совершенно аналогично тому как это было сделано в §1. Пусть при $y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$ функционал (2) имеет экстремум. Рассмотрим $J[y_0 + \alpha\delta y, z_0 + \beta\delta z]$, где α и β - произвольные вещественные переменные, а $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ - произвольные функции. Так как $J[y_0, z_0]$ есть экстремальное значение, то

$$\left.\frac{dJ[y_0 + \alpha\delta y, z_0]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{dJ[y_0, z_0 + \beta\delta z]}{d\beta}\right|_{\beta=0} = 0\,.$$

Повторяя буквально рассуждения §1 находим

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}=0. \qquad (3)$$

Полученные уравнения также называются уравнениями Эйлера-Лагранжа. Чтобы найти искомые функции $y=y_0(x), z=z_0(x)$ надо решить систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка Эйлера-Лагранжа (3).

Уравнения (3) можно обобщить на случай, когда функционал зависит от произвольного числа функций $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$. Рассмотрим функционал

$$J[y_1,...,y_n]=\int_a^b F(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x))dx.$$

Условия экстремума записываются в форме уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'}=0,\quad i=1,2,...,n$$

2. Необходимые условия экстремума функционала, зависящего от функции нескольких переменных.

Рассмотрим множество функций $f(x_1,x_2)$, зависящих от двух переменных x_1,x_2, изменяющихся в некоторой области G на плоскости Р^2. Пусть кривая C - является границей данной области G.

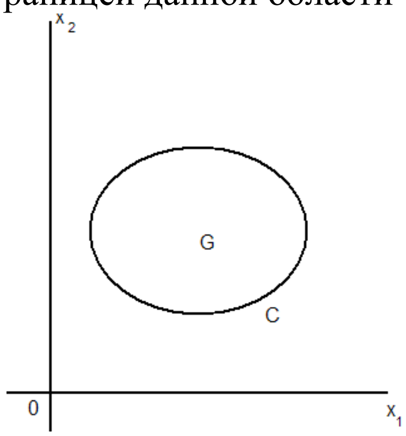

Рис.5.

Предположим, что все рассматриваемые функции $f(x_1,x_2)$ принимают одинаковые значения на границе C области G. Введем функцию $F(x_1,x_2, f(x_1,x_2), f_{x_1}(x_1,x_2), f_{x_2}(x_1,x_2))$, где $f_{x_1}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $f_{x_2}=\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$

и построим двойной интеграл

$$J[f]=\int_G F(x_1,x_2,f(x_1,x_2),f_{x_1}(x_1,x_2),f_{x_2}(x_1,x_2))dx_1dx_2\,. \qquad (4)$$

Задача ставится так: из всех функций $f(x_1,x_2)$ найти такую функцию $f_0(x_1,x_2)$ для которой функционал (4) принимает экстремальное значение. Решение осуществляется также как и в §1. Мы рассматриваем $J[f_0+\alpha h]$, где α - вещественная переменная, а $h(x_1,x_2)$ - произвольная фиксированная функция. Условие экстремума имеет вид

$$\left.\frac{dJ[f_0+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0\,.$$

Но $J[f+\alpha h]=\int_G F(x_1,x_2,f+\alpha h,f_{x_1}+\alpha h_{x_1},f_{x_2}+\alpha h_{x_2})dx_1dx_2$. Значит

$$\left.\frac{dJ[f+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_G\left\{\frac{\partial F}{\partial f}h+\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}h_{x_1}+\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}h_{x_2}\right\}dx_1dx_2\,.$$

Рассмотрим $\int_G\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}h_{x_1}dx_1dx_2=\int_G\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}h\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}\right)h\right\}dx_1dx_2$.

Тогда

$$\left.\frac{dJ[f+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_G\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}\right\}hdx_1dx_2+\int_G\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}h\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}h\right)\right]dx_1dx_2$$

.

Второй интеграл имеет вид $\int_G\left(\frac{\partial M}{\partial x_1}+\frac{\partial N}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2$. Используя теорему Грина его можно записать как $\int_C\left(Mdx_2-Ndx_1\right)$.

$M=\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}h(x_1,x_2),\quad N=\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}h(x_1,x_2)$. На границе C:

$f(x_1,x_2)\big|_C=(f(x_1,x_2)+\alpha h(x_1,x_2))\big|_C\Rightarrow h(x_1,x_2)\big|_C=0$. Но тогда $M\big|_C=N\big|_C=0$.

Остаются

$$\left.\frac{dJ[f+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\int_G\left(\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}\right)h(x_1,x_2)dx_1dx_2\,.$$

Так как $\left.\frac{dJ[f+\alpha h]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$ и $h(x_1,x_2)$ - произвольно, находим

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial f_{x_1}}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial f_{x_2}}\right)=0\,. \qquad (5)$$

Полученное дифференциальное уравнение в частных производных также называется уравнением Эйлера-Лагранжа. Чтобы найти искомую функцию $f_0(x_1,x_2)$ надо решить уравнение Эйлера-Лагранжа (5).

Уравнение (5) можно обобщить на случай, когда функционал зависит от функции любого числа переменных. Рассмотрим функционал $J[f]=\int\underset{G}{\dots}\int F(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n),f'_{x_1},...,f'_{x_n})dx_1..dx_n$, где G - область в пространстве $P^{n.}$

Условия экстремума записываются в виде уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial f'_{x_i}}=0.$$

Задача 1.

Найти экстремали функционала

$J[y_1,y_2]=\int_a^b(y_1'^2(x)+y_2'^2(x)+y_1'(x)y_2'(x)+y_1(x)+y_2(x))dx.$

Решение

Данный функционал зависит от двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Функция $F(x,y_1,y_2,y_1',y_2')$ в данном случае имеет вид $F(x,y_1,y_2,y_1',y_2')=y_1'^2+y_2'^2+y_1'y_2'+y_1+y_2$.

Запишем систему уравнений Эйлера

$\frac{\partial F}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y_2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'}=0.$

Имеем

$\frac{\partial F}{\partial y_1}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y_1'}=2y_1'+y_2',$

$\frac{\partial F}{\partial y_2}=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y_2'}=2y_2'+y_1'.$

Поэтому уравнения Эйлера имеют вид

$1-\frac{d}{dx}(2y_1'+y_2')=0,\quad 1-\frac{d}{dx}(2y_2'+y_1')=0,$ то есть $\frac{d}{dx}(2y_1'+y_2')=1,\quad \frac{d}{dx}(2y_2'+y_1')=1.$

Интегрируя обе части, получим

$$\begin{cases}2y_1'+y_2'=x+C_1\\2y_2'+y_1'=x+C_2\end{cases}$$

C_1,C_2- произвольные постоянные. Получили систему из двух линейных уравнений

для нахождения y_1',y_2'. Из этой системы находим

$$y_1' = \frac{1}{3}(x + 2C_1 - C_2),$$
$$y_2' = \frac{1}{3}(x + 2C_2 - C_1).$$
Интегрируя обе части, найдем

$$y_1 = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}(2C_1 - C_2)x + C_3,$$
$$y_2 = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}(2C_2 - C_1)x + C_4,$$
C_1, C_2 - произвольные коэффициенты.

Ответ: $$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}(2C_1 - C_2)x + C_3, \\ y_2 &= \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}(2C_2 - C_1)x + C_4. \end{aligned}$$

Задача 2.

Найти экстремали функционала
$$J[y_1, y_2, y_3] = \int_a^b (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_1'y_2' + y_1'y_3' + y_2'y_3')dx.$$

Решение

Данный функционал зависит от трех функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. Соответствующая функция $F(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3')$ в данном случае имеет вид
$$F(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') = \int_a^b (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_1'y_2' + y_1'y_3' + y_2'y_3'.$$
Запишем систему уравнений Эйлера
$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_3} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_3'} = 0.$$
Имеем
$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 2y_1' + y_2' + y_3', \frac{\partial F}{\partial y_2'} = 2y_2' + y_1' + y_3', \frac{\partial F}{\partial y_3'} = 2y_3' + y_1' + y_2'.$$

Поэтому уравнения Эйлера имеют вид
$$\frac{d}{dx}(2y_1' + y_2' + y_3') = 0, \quad \frac{d}{dx}(2y_2' + y_1' + y_3') = 0, \frac{d}{dx}(2y_3' + y_1' + y_2') = 0.$$
Отсюда

$$\begin{cases} 2y_1' + y_2' + y_3' = C_1 \\ 2y_2' + y_1' + y_3' = C_2 \\ 2y_3' + y_1' + y_2' = C_3 \end{cases} \quad C_1, C_2, C_3$$ - произвольные постоянные.

Получили систему из трех линейных уравнений для нахождения y_1', y_2', y_3'. Решая эту систему, выразим y_3' из первого уравнения и подставим во второе и третье.

$y_3' = C_1 - 2y_1' - y_2'.$

$$\begin{cases} 2y_2' + y_1' + C_1 - 2y_1' - y_2' = C_2 \\ 2(C_1 - 2y_1' - y_2') + y_1' + y_2' = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2' - y_1' = C_2 - C_1 \\ 2C_1 - 4y_1' - 2y_2' + y_1' + y_2' = C_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_2' - y_1' = C_2 - C_1 \\ 3y_1' + y_2' = 2C_1 - C_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{4}(3C_1 - C_2 - C_3), \\ y_2' &= \frac{1}{4}(3C_2 - C_1 - C_3). \end{aligned}$$

Теперь можно найти y_3'.

$y_3' = C_1 - 2y_1' - y_2' = \dfrac{1}{4}(3C_3 - C_1 - C_2).$

Окончательно

$$y_1' = \frac{1}{4}(3C_1 - C_2 - C_3),$$

$$y_2' = \frac{1}{4}(3C_2 - C_1 - C_3),$$

$$y_3' = \frac{1}{4}(3C_3 - C_1 - C_2).$$

Интегрируя обе части, получим

$$y_1 = \frac{1}{4}(3C_1 - C_2 - C_3)x + C_4,$$

$$y_2 = \frac{1}{4}(3C_2 - C_1 - C_3)x + C_5,$$

$$y_3 = \frac{1}{4}(3C_3 - C_1 - C_2)x + C6.$$

$$y_1(x)=\frac{1}{4}(3C_1-C_2-C_3)x+C_4,$$

Ответ: $$y_2(x)=\frac{1}{4}(3C_2-C_1-C_3)x+C_5,$$

$$y_3(x)=\frac{1}{4}(3C_3-C_1-C_2)x+C6.$$

Задача 3.

Показать, что уравнения второго закона Ньютона представляют собой уравнения Эйлера для функционала

$$S\left[\vec{r}\right]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2(t)}{2}-V(\vec{r}(t))dt\equiv\int_{t_1}^{t_2}L(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t))dt\right..$$

Этот функционал называется действием. Функция L есть разность между кинетической энергией частицы $\frac{m\vec{v}^2}{2}$ и потенциальной энергией $V(\vec{r})$.

Решение.

Данный функционал зависит от трех функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являющихся компонентами радиус-вектора $\vec{r}(t)$, t - независимая переменная. При этом, как обычно $\vec{v}=\dot{\vec{r}}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$, $\dot{\vec{r}}^2=\vec{v}^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$. Здесь v_x^2,v_y^2,v_z^2 - компоненты вектора скорости $\vec{v}$. Роль функции $F(t,x(t),y(t),z(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$ играет функция $L(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t))\equiv L(x(t),y(t),z(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t))$. Запишем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=0.$$

Имеем
$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial L}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial L}{\partial z}=-\frac{\partial V}{\partial z},$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y},\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{z}}=m\dot{z}.$$

Поэтому уравнения Эйлера имеют вид

$$-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dt}(m\dot{x})=0,\quad -\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dt}(m\dot{y})=0,\quad -\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{d}{dt}(m\dot{z})=0.$$

Или

$$m\ddot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad m\ddot{y}=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad m\ddot{z}=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Но

$-\frac{\partial V}{\partial x}=F_x,\quad -\frac{\partial V}{\partial y}=F_y,\quad -\frac{\partial V}{\partial z}=F_z,$ где F_x,F_y,F_z - компоненты вектора силы $\vec{F}$.

Таким образом

$$m\ddot{x}=F_x,\quad m\ddot{y}=F_y,\quad m\ddot{z}=F_z.$$

Но это ничто иное, как уравнения второго закона Ньютона.

Задача 4.
Найти экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (y_1' y_2' - \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2) dx .$$

Решение
Данный функционал зависит от двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Соответствующая функция $F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$ в данном случае имеет вид

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_1' y_2' - \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 ..$$

Запишем уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = -y_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y_1'} = y_2',$$

$$v = ce^x + de^{-x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = -y_2, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2'} = y_1'.$$

Поэтому получаем уравнения

$$-y_1 - \frac{d}{dx} y_2', \quad -y_2 - \frac{d}{dx} y_1'.$$

Или

$$\begin{cases} y_2'' = -y_1, \\ y_1'' = -y_2. \end{cases}$$

Получили систему из двух линейных дифференциальных уравнений. Сложим эти уравнения, а затем вычтем, будем иметь

$$y_2'' + y_1'' = -(y_1 + y_2),$$
$$y_2'' - y_1'' = -(y_1 - y_2).$$

Обозначим $u = y_1 + y_2, \quad v = y_1 - y_2$. Значит

$$\begin{cases} u'' = -u, \\ v'' = v. \end{cases}$$

Решение первого уравнения есть $u = a\cos x + b\sin x$, решение второго уравнения есть $v = ce^x + de^{-x}$, где a, b, c, d - произвольные постоянные. Проверим что это действительно решения.

$$\frac{d}{dx}(a\cos x + b\sin x) = -a\sin x + b\cos x,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(a\cos x + b\sin x) = \frac{d}{dx}(-a\sin x + b\cos x) = -a\cos x - b\sin x = -(\underbrace{a\cos x + b\sin x}_{u}),$$

$$\frac{d}{dx}(ce^x + de^{-x}) = ce^x - de^{-x},$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(ce^x + de^{-x}) = \frac{d}{dx}(ce^x - de^{-x}) = \underbrace{ce^x + de^{-x}}_{v}.$$

Итак
$$u = a\cos x + b\sin x,$$
$$v = ce^x + de^{-x},$$
или
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = a\cos x + b\sin x, \\ y_1 - y_2 = ce^x + de^{-x}. \end{cases}$$
Получили систему из двух линейных уравнений для нахождения y_1, y_2. Из этой системы
$$y_1 = \frac{1}{2}(a\cos x + b\sin x + ce^x + de^{-x}),$$
$$y_2 = \frac{1}{2}(a\cos x + b\sin x - ce^x - de^{-x}).$$

Ответ: $$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{2}(a\cos x + b\sin x + ce^x + de^{-x}), \\ y_2(x) &= \frac{1}{2}(a\cos x + b\sin x - ce^x - de^{-x}). \end{aligned}$$

Задача 5.

Запишем уравнение Эйлера для функционала
$$J[u] = \iint_G dx_1 dx_2 \left[\frac{1}{2}u_{x_1}^{'2} + \frac{1}{2}u_{x_2}^{'2} - \frac{1}{2}u \right].$$

Решение

Данный функционал зависит от функции $u(x_1, x_2)$. Соответствующая функция $F(x_1, x_2, u, u_{x_1}^{'}, u_{x_2}^{'})$ в данном случае есть $F = \frac{1}{2}u_{x_1}^{'2} + \frac{1}{2}u_{x_2}^{'2} - \frac{1}{2}u$.

Уравнение Эйлера записывается в виде
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial u_{x1}^{'}} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial u_{x2}^{'}} = 0.$$
Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-u,\quad \frac{\partial F}{\partial u'_{x_1}}=u'_{x_1},\quad \frac{\partial F}{\partial u'_{x_2}}=u'_{x_2}.$$

Поэтому уравнение Эйлера будет

$$-u-\frac{\partial}{\partial x_1}u'_{x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}u'_{x_2}=0,\quad -u-u''_{x_1x_1}-u''_{x_2x_2}=0.$$

Или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+u=0 \text{ или } u''_{x_1x_1}+u''_{x_2x_2}+u=0.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+u=0$.

Задача 6.

Записать уравнение Эйлера для функционала

$$J[u]=\iint\limits_G dtdx\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\lambda e^u\right),\text{ где } \lambda=const.$$

Решение

Данный функционал зависит от функции двух переменных $u(t,x)$. Соответствующая функция $F(t,x,u(t,x),u'_t,u'_x)$ в данном случае есть $F=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\lambda e^u$.

Уравнение Эйлера записывается в виде

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u'_t}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x}=0.$$

Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-\lambda e^u,\quad \frac{\partial F}{\partial u'_t}=u'_t,\quad \frac{\partial F}{\partial u'_x}=-u'_x.$$

Поэтому уравнение Эйлера будет

$$-\lambda e^u-\frac{\partial}{\partial t}u'_t-\frac{\partial}{\partial x}(-u'_x)=0,\quad -u-u''_{x_1x_1}-u''_{x_2x_2}=0 \quad\Rightarrow\quad u''_t-u''_x+\lambda e^u=0.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda e^u=0.$

Задача 7.

Записать уравнение Эйлера для функционала $J\left[u\right]=\iint\limits_{G}dtdx\frac{1}{2}g(u)\left(u_t'^2-u_x'^2\right),$ здесь $g(u)$ - заданная функция u. Показать, что уравнение Эйлера приводится к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\ln g(u))'(u_t'^2-u_x'^2)=0.$

Решение

Данный функционал зависит от функции двух переменных $u(t,x)$. Соответствующая функция $F(t,x,u(t,x),u_t^{'},u_x^{'})$ в данном случае есть $F=\frac{1}{2}g(u)(u_t'^2-u_x'^2)..$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u_t^{'}}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x^{'}}=0.$$

Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{1}{2}g'(u)(u_t'^2-u_x'^2),\quad \frac{\partial F}{\partial u_t^{'}}=g(u)u_t',\quad \frac{\partial F}{\partial u_x^{'}}=-g(u)u_x^{'}.$$

Уравнение Эйлера запишется так

$$\frac{1}{2}g'(u)(u_t'^2-u_x'^2)-\frac{\partial}{\partial t}(g(u)u_t')-\frac{\partial}{\partial x}(-g(u)u_x')=0.$$

Преобразуем это уравнение

$$g'(u)u_t'u_t'+g(u)u_{tt}''-g'(u)u_x'u_x'-g(u)u_{xx}''-\frac{1}{2}g'(u)u_t'^2+\frac{1}{2}g'(u)u_x'^2=0.$$

Или

$$g(u)(u_{tt}''-u_{xx}'')+\frac{1}{2}g'(u)(u_t'^2-u_x'^2)=0.$$

Или

$$u_{tt}''-u_{xx}''+\frac{1}{2}\frac{d\ln g(u)}{du}(u_t'^2-u_x'^2)=0.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(\ln g(u))'(u_t'^2-u_x'^2)=0.$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что изучает вариационное исчисление?
2. Что такое функционал?
3. Вариация функции.
4. Приращение функционала.
5. Когда функция $y_0(x)$ доставляет функционалу J[y] максимум?
6. Когда функция $y_0(x)$ доставляет функционалу J[y] минимум?
7. Уравнение Эйлера-Лагранжа.
8. Геометрическая формулировка основной задачи вариационного исчисления.
9. Что такое вариация функционала J[y].
10. Что такое вариационная производная.
11. Что такое функциональная производная.
12. Как обозначается функциональная производная ?
13. Форма записи вариации функционала J[y].
14. Необходимое условие экстремума функционала
15. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала зависящего от двух функций одного переменного
16. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала зависящего от n функций одного переменного
17. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала зависящего от функции нескольких переменных

Литература

1. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: «Наука», 1969. 424 с.
2. И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
3. М.Л. Краснов, Р.И. Макаренко, А.И. Киселев. Вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002. 166 с.