Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

Кологривов В.А.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АНАЛОГОВЫХ УСТРОЙСТВ

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине
“Прикладные математические методы в радиотехнике”
для студентов радиотехнических специальностей

2012

Кологривов В.А.

Анализ временных характеристик аналоговых устройств. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. - 102 с.

Учебное методическое пособие посвящено иллюстрации предлагаемой методики анализа временных характеристик на примере простых пассивных и активных линейных цепей, как моделей реальных аналоговых устройств.

В пособии подробно проиллюстрирована методика определения передаточных, переходных и импульсных характеристик простых аналоговых устройств.

Предлагаемая методика основана на широком привлечении векторно-матричного аппарата, операционного исчисления и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы студентов очной формы обучения высшего специального образования, по направлениям: «Радиотехника», «Телекоммуникации» и др.

Аннотация

Методическое пособие “***Анализ временных характеристик аналоговых устройств”*** для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине ***“Прикладные математические методы в радиотехнике”*** посвящено иллюстрации методов анализа временных характеристик на примере простых пассивных и активных линейных цепей первого и второго порядков, как моделей реальных устройств.

Методически важным моментом определения временных характеристик аналоговых устройств по заданному схемному решению является предварительное определение передаточной характеристики и последующее использование операторного метода либо перехода к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого также позволяет определить реакцию устройства на заданное воздействие.

Основное внимание в пособии уделено как способу определения передаточных характеристик, так и методам определения реакций цепей на тестовые входные воздействия.

Для определения реакций устройств на единичный скачок и единичный импульс использован как традиционный операторный метод на основе преобразования Лапласа, так и методы, основанные на формировании и решении дифференциальных уравнений.

В пособии подробно рассмотрены многочисленные примеры простых аналоговых цепей, как моделей реальных устройств, при воздействии на них единичного скачка и единичного импульса. Рассмотренные примеры анализа реакций цепей призваны проиллюстрировать прикладные возможности математических методов, изучаемых в дисциплине.

Рассмотренные вопросы анализа основных характеристик аналоговых устройств призваны расширить кругозор студентов, и будут востребованы при изучении специальных дисциплин радиотехнического профиля.

Методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы предназначено для студентов радиотехнических специальностей.

Содержание

Введение

Цель методического пособия: Проиллюстрировать методы определения временных характеристик, как реакций аналоговых устройств на соответствующие входные воздействия. Показать тесную взаимосвязь временных характеристик и методов временного анализа аналоговых устройств.

Задачи методического пособия: Проиллюстрировать прикладные возможности математического аппарата изучаемого в дисциплине ***“Прикладные математические методы в радиотехнике”***. На конкретных примерах аналоговых цепей, как моделей реальных устройств, продемонстрировать методику и технику определения временных характеристик по реакции на тестовые входные воздействия.

Теоретическая часть. Основные определения. Используемый математический аппарат. Теоретической базой для методического пособия являются такие разделы математики как функции действительного и комплексного переменного, преобразование Лапласа, линейная алгебра, дифференциальные уравнения. Из теории линейных электрических цепей и сигналов используются понятия электрических моделей и определения основных характеристик радиотехнических цепей.

Наиболее общей характеристикой аналоговых и дискретных устройств, не связанной с конкретным типом входного воздействия, является **передаточная характеристика,** определяемая, как отношение изображений реакции и входного воздействия. Передаточные характеристики аналоговых устройств обычно определяются по электрической либо функциональной схеме устройства.

Для описания поведения реакции устройств в частотной области, как комплексной функции частоты используется понятие **частотной характеристики (ЧХ).** Модуль частотной характеристики соответствует **амплитудно-частотной характеристике (АЧХ),** а аргумент частотной характеристики, выраженный в градусах, соответствует **фазочастотной характеристике (ФЧХ).** Частотную характеристику обычно получают формально из передаточной характеристики путем замены переменной вида $p \to j \cdot \omega$, где ω- круговая частота. Подобное формальное определение частотной характеристики не является конструктивным, так как обычно характеристики соответствуют реакции устройства на определенное тестовое воздействие при исходном состоянии покоя. Под **состоянием покоя** понимается полное установление реакции устройства на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников возмущений.

В изучаемой дисциплине частотная характеристика определяется конструктивно, как установившаяся реакция устройства на единичное гармоническое воздействие при исходном состоянии покоя. Такое определение частотной характеристике соответствует практике измерения частотных характеристик устройств.

Во временной области устройства характеризуются переходной и импульсной характеристиками, определяющими их быстродействие и время релаксации.

Переходная характеристика аналогового устройства, находящегося в исходном состоянии покоя, определяется как его **реакция на единичный скачок (функцию Хевисайда)** $1(t)$**.**

Импульсная характеристика аналогового устройства, находящегося в исходном состоянии покоя, определяется как его **реакция на единичный импульс (**δ **- функцию)** $\delta(0)$**.**

Переходные и импульсные характеристики аналоговых устройств обычно определяются из решения соответствующего дифференциального уравнения, записанного относительно выходной переменной.

Операторный метод позволяет, непосредственно из передаточной характеристики, определить изображение выходной реакции на заданное воздействие, а, используя обратное преобразование Лапласа, получить оригинал реакции, то есть соответствующую характеристику устройства.

Наиболее **распространенными моделями аналоговых устройств** во временной области **являются обыкновенные дифференциальные уравнения либо системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Для получения математической модели устройства во временной области в виде дифференциального уравнения, используется переход от передаточной характеристики, к неоднородному дифференциальному уравнению, правая часть которого определяется внешним воздействием.

Переход от передаточной характеристики к дифференциальному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных условий, путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а переменной p оператором дифференцирования d/dt. Позже, при интегрировании дифференциального уравнения, используются истинные начальные условия.

Начальные условия могут быть определены в общем случае по изображению выходной реакции из теоремы операционного исчисления о начальном значении функции оригинала.

Характеристическое уравнение определяется либо знаменателем передаточной характеристики, приравненного нулю, либо левой однородной частью дифференциального уравнения при замене производной соответствующей степенью переменной. Характеристическое уравнение представляет собой степенной полином n- го порядка и имеет в общем случае n корней, среди которых могут быть равные нулю и кратные.

Фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения определяются корнями характеристического уравнения $-\alpha_i$ в виде экспоненциальных функций вида $e^{-\alpha_i \cdot t}$. Для корня кратности k, фундаментальная система включает набор функций вида $e^{-\alpha_i \cdot t},\ t \cdot e^{-\alpha_i \cdot t},\ t^2 \cdot e^{-\alpha_i \cdot t},\ \ldots,\ t^{k-1} \cdot e^{-\alpha_i \cdot t}$.

Из набора фундаментальных решений и их производных до $n-1$- го порядка построчно строится **определитель Вронского.** Отличие от нуля определителя Вронского свидетельствует о **независимости фундаментальных решений.**

Наиболее общими методами интегрирования неоднородных дифференциальных уравнений являются метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и представление решения в форме Коши (метод Коши).

Метод Лагранжа задает общее решение неоднородного уравнения линейной суперпозицией варьируемых постоянных (неизвестных функций) и фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения. Для нахождения варьируемых постоянных задан алгоритм построения **определяющей системы уравнений Лагранжа.**

Определяющая система уравнений Лагранжа образуется путем наложения ограничений, на рост порядка производных от варьируемых постоянных, при взятии производных от предложенного общего решения, с целью подстановки в исходное дифференциальное уравнение. Таких ограничений для исходного дифференциального уравнения n- го порядка оказывается ровно $n-1$. Последнее уравнение определяющей системы уравнений получается в результате подстановки производных предполагаемого общего решения, с учетом наложенных ограничений, в исходное дифференциальное уравнение и сокращения его однородной части. В результате определяющая система уравнений Лагранжа представляет собой линейную, относительно производных варьируемых постоянных, алгебраическую систему уравнений. Решение определяющей системы, например методом Крамера, позволяет определить выражения производных варьируемых постоянных. Интегрируя полученные выражения, с точностью до постоянных интегрирования, находим варьируемые постоянные. Постоянные интегрирования и, соответственно, частное решение исходного дифференциального уравнения определяются из независимых дополнительных условий, например, начальных условий.

Метод Коши позволяет непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения либо системы дифференциальных уравнений первого порядка, используя начальные условия.

При интегрировании дифференциального уравнения n- го порядка осуществляется переход к эквивалентной системе n уравнений первого порядка. Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка записывается через экспоненту от матрицы коэффициентов системы.

Функция от матричного аргумента предполагает предварительное решение **проблемы собственных значений и векторов.**

1 Исследование временных характеристик цепей первого порядка

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик рассмотрим несколько примеров простейших цепей первого порядка.

Интегрирующая RL**- цепь.** На рисунке 1.1 изображена простая интегрирующая RL- цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

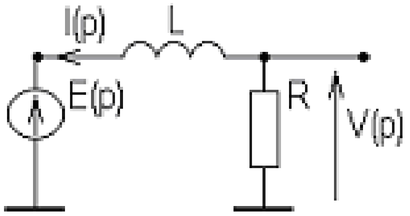

Рисунок 1.1 - Интегрирующая RL - цепь

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + p \cdot L}.$$

Далее, сразу получаем интересующее нас напряжение на резисторе, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p) = I(p) \cdot R = \frac{E(p) \cdot R}{R + p \cdot L} = \frac{E(p)}{1 + p \cdot L/R} = \frac{E(p)}{1 + p \cdot \tau} = \frac{E(p) \cdot \alpha}{p + \alpha},$$

где $\tau = L/R$- постоянная времени RL- цепи; $-\alpha = -1/\tau$- значение корня характеристического уравнения $p + \alpha = 0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя, приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + p \cdot \tau} = \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot \alpha}{p + \alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p \cdot V(p) = K(p)$ при $p = 0$ и $p \to \infty$. Так, при $p = 0$, получаем $K(0) = 1$, а при $p \to \infty$, соответственно, имеем $K(\infty) = 0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p \Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{\alpha}{p\cdot(p+\alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p\cdot(p+\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t}).$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, интегрирующей RL - цепи

$$V(p)=\frac{\alpha}{p\cdot(p+\alpha)} \Leftrightarrow (1-e^{-\alpha\cdot t})=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно нулю $h(0)=0$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, равно единице $h(\infty)=1$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=0;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=1.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени изменения значения от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения

$$(1-e^{-t_1/\tau})=0.1;\ e^{-t_1/\tau}=0.9;\ e^{t_1/\tau}=1/0.9;\ t_1/\tau=\ln(1)-\ln(0.9);\ t_1=-\tau\cdot\ln(0.9);$$

$$(1-e^{-t_2/\tau})=0.9;\ e^{-t_2/\tau}=0.1;\ e^{t_2/\tau}=1/0.1;\ t_2/\tau=\ln(1)-\ln(0.1);\ t_2=-\tau\cdot\ln(0.1);$$

$$t_н=t_2-t_1=-\tau\cdot(\ln(0.1)-\ln(0.9))\approx 2\ .19722\cdot\tau.$$

Вид переходной характеристики, интегрирующей RL - цепи, при $\tau=1$, приведен на рисунке 1.2.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения удобно формировать на основе передаточных характеристик, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot\alpha}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p\cdot(p+\alpha)}\rightarrow v(t)=\frac{1(t)\cdot\alpha}{(d/dt+\alpha)}.$$

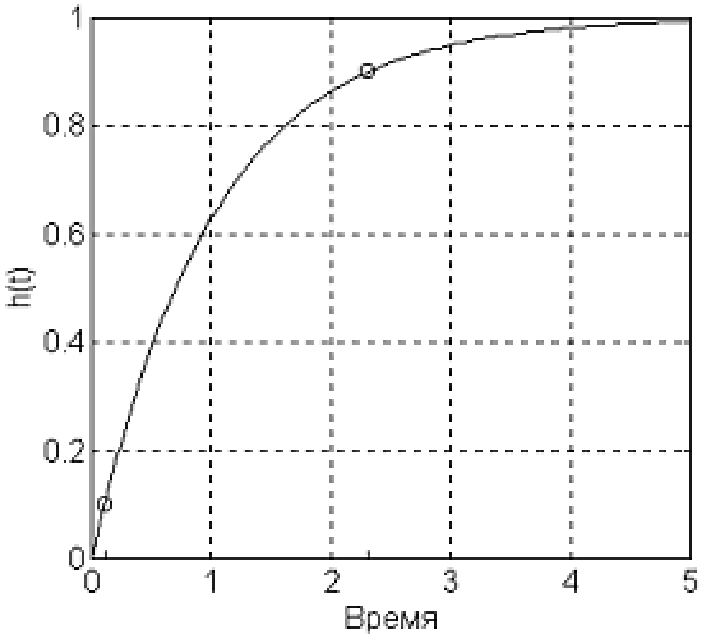

Рисунок 1.2 - Переходная характеристика интегрирующей RL - цепи

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, интегрирующей RL - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=\alpha\cdot 1(t).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+\alpha\cdot 1(t).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha}{p+\alpha}=0.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, интегрирующей RL- цепи, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \alpha \cdot 1(t),$$

откуда

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \alpha \cdot 1(t)$$

или

$$C^{'}(t) = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t) = \int \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = e^{\alpha \cdot t} + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования.

Эту постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (e^{\alpha \cdot t} + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 1 + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального значения $v(0) = 0$, при $t = 0$, следует, что

$$0 = 1 + C,$$

откуда получаем

$$C = -1.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, интегрирующей RL- цепи, получаем в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_{0}^{t} e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $e^{A \cdot t}$- в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\alpha\cdot 1(\tau)\cdot d\tau .$$

Так как $v(0)=0$, то, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, интегрирующей RL - цепи, в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha\cdot t} = h(t) .$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику, интегрирующей RL - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t) .$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha} .$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t} .$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, интегрирующей RL - цепи

$$V(p) = \frac{\alpha}{p+\alpha} \Leftrightarrow \alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} = v(t) = g(t) .$$

Заметим, что в этом случае $g(0)=\alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p\to\infty} p\cdot V(p) = \alpha ;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p\to 0} p\cdot V(p) = 0 .$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p\cdot V(p) - v({}_{+}0) .$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v(_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h^{'}(t) = (1 - e^{-\alpha \cdot t})^{'} = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Вид импульсной характеристики, интегрирующей RL - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 1.3.

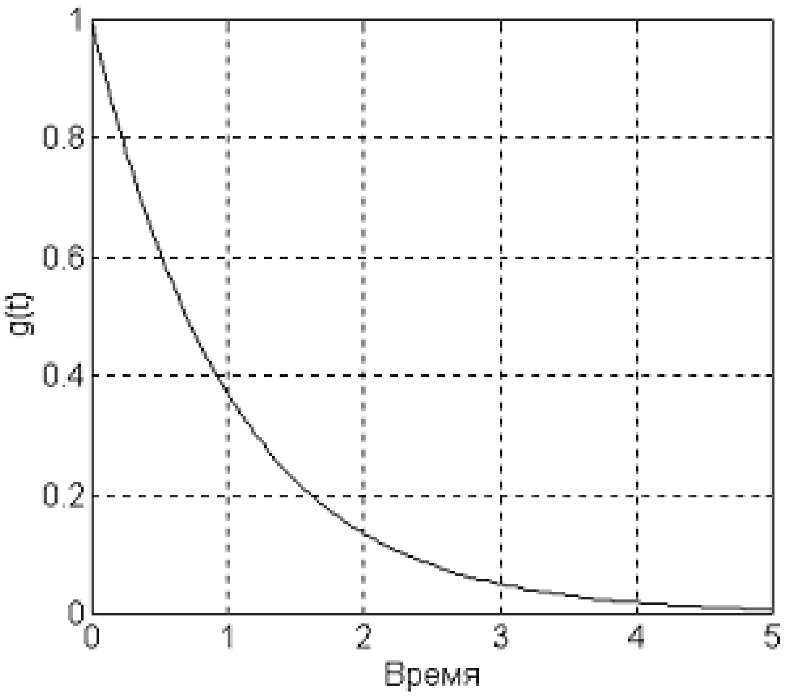

Рисунок 1.3 - Импульсная характеристика интегрирующей RL - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t)$, получаем

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot \alpha}{p + \alpha} = \frac{\alpha}{p + \alpha} \rightarrow v(t) = \frac{\delta(0) \cdot \alpha}{d/dt + \alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, интегрирующей RL - цепи

$$v^{'}(t) + \alpha \cdot v(t) = \alpha \cdot \delta(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ - функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{'}(t) = -\alpha \cdot v(t) + \alpha \cdot \delta(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{\alpha \cdot p}{p + \alpha} = \alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, интегрирующей RL - цепи, на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \alpha \cdot \delta(0),$$

или

$$C^{'}(t) = \alpha \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t) = \int \alpha \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = \alpha + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (\alpha + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального значения $v(0)=\alpha$, при $t=0$, следует, что

$$\alpha=\alpha+C,$$

откуда получаем

$$C=0.$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, интегрирующей RL- цепи, получаем в виде

$$v(t)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t)=A\cdot y(t)+F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t)=e^{A\cdot t}\cdot y(0)+\int_{0}^{t}e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $e^{A\cdot t}$- в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0)+\int_{0}^{t}e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\alpha\cdot\delta(0)\cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0)=\alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике, интегрирующей RL- цепи, в виде

$$v(t)=\underset{t>0}{\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}}+\underset{t=0}{\alpha}=g(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t>0$, а второе слагаемое при $t=0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику, интегрирующей RL- цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Дифференцирующая RL- цепь. На рисунке 1.4 изображена простая дифференцирующая RL- цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

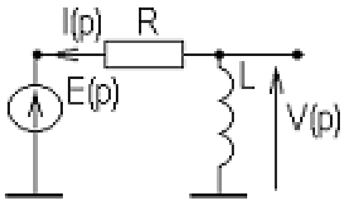

Рисунок 1.4 - Дифференцирующая RL - цепь

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p)=\frac{E(p)}{R+p\cdot L}.$$

Далее, умножая ток на индуктивное сопротивление, получаем интересующее нас напряжение на катушке индуктивности, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p)=I(p)\cdot p\cdot L=\frac{E(p)\cdot p\cdot L}{R+p\cdot L}=\frac{E(p)\cdot p\cdot L/R}{1+p\cdot L/R}=\frac{E(p)\cdot p\cdot\tau}{1+p\cdot\tau}=\frac{E(p)\cdot p}{p+\alpha},$$

где $\tau=L/R$- постоянная времени RL- цепи; $-\alpha=-1/\tau$- значение корня характеристического уравнения $p+\alpha=0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя, приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{p\cdot\tau}{1+p\cdot\tau}=\frac{p}{p+\alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot p}{p+\alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p\cdot V(p)=K(p)$ при $p=0$ и $p\to\infty$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=0$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=1$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{1}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, дифференцирующей RL - цепи

$$V(p) = \frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t = 0$, равно единице $h(0) = 1$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $h(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = 1;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени изменения значения от уровня 0.9 до уровня 0.1 от установившегося значения

$$e^{-t_1/\tau} = 0.9;\ e^{t_1/\tau} = 1/0.9;\ t_1/\tau = \ln(1) - \ln(0.9);\ t_1 = -\tau \cdot \ln(0.9);$$

$$e^{-t_2/\tau} = 0.1;\ e^{t_2/\tau} = 1/0.1;\ t_2/\tau = \ln(1) - \ln(0.1);\ t_2 = -\tau \cdot \ln(0.1);$$

$$t_н = t_2 - t_1 = -\tau \cdot (\ln(0.1) - \ln(0.9)) \approx 2\ .19722 \cdot \tau.$$

Вид переходной характеристики, дифференцирующей RL - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 1.5.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения формируем на основе передаточных характеристик, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot p}{p+\alpha} = \frac{1}{p+\alpha} \to v(t) = \frac{\delta(0)}{d/dt + \alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, дифференцирующей RL - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \delta(0).$$

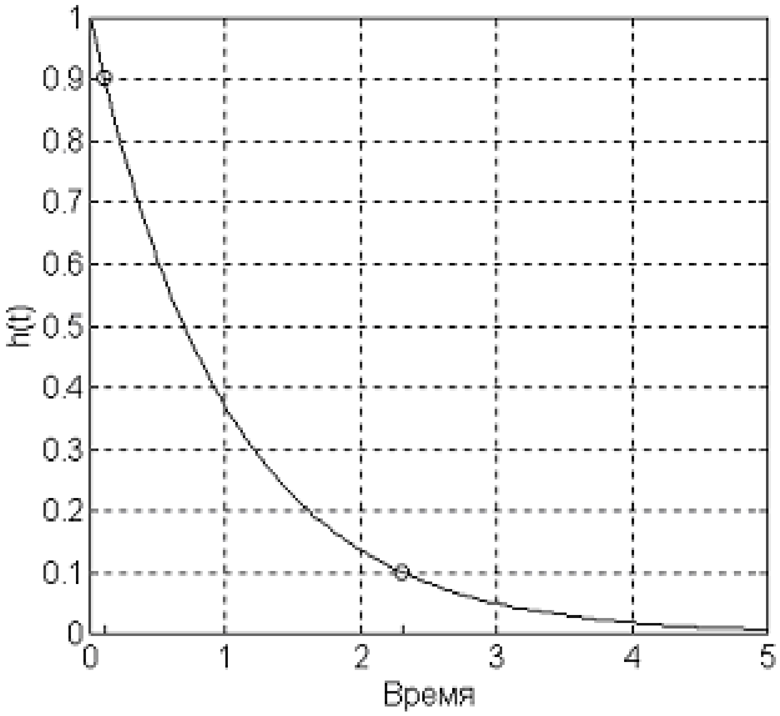

Рисунок 1.5 - Переходная характеристика дифференцирующей RL - цепи

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \delta(0).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p}{p + \alpha} = 1.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, дифференцирующей RL- цепи, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0),$$

откуда

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=\delta(0)$$

или

$$C^{'}(t)=\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t)=\int\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=1+C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt=f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t)=(1+C)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=e^{-\alpha\cdot t}+C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального значения $v(0)=1$, при $t=0$, следует, что

$$1=1+C,$$

откуда получаем

$$C=0.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, дифференцирующей RL-цепи, получаем в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}=h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t)=A\cdot y(t)+F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t)=e^{A\cdot t}\cdot y(0)+\int_{0}^{t}e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A\cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0)+\int\limits_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\delta(0)\cdot d\tau .$$

Принимая во внимание, что $v(0)=1$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, дифференцирующей RL - цепи, в виде

$$v(t)=\underset{t>0}{e^{-\alpha\cdot t}}+\underset{t=0}{1}=h(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено при $t>0$, а второе слагаемое при $t=0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}=h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими и представляет переходную характеристику, дифференцирующей RL - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p)=1\Leftrightarrow\delta(0)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=\frac{p}{p+\alpha}.$$

Отметим, что в данном случае дробно-рациональное выражение для изображения выходного напряжения имеет одинаковые степени числителя и знаменателя. Для перехода в область оригиналов необходимо, чтобы степень знаменателя была выше степени числителя, в связи с чем, разобьем дробно-рациональное выражение на элементарные дроби, поделив числитель на знаменатель

$$V(p)=\frac{p}{p+\alpha}=1-\frac{\alpha}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображениями и оригиналами

$$1\Leftrightarrow\delta(0);\ \frac{1}{p+\alpha}\Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t}.$$

На основании установленных соответствий, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, дифференцирующей RL - цепи

$$V(p)=1-\frac{\alpha}{p+\alpha}\Leftrightarrow\delta(0)-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0)=\delta(0)-\alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p\to\infty} p \cdot V(p) = \delta(0) - \alpha;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 1$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0) = (e^{-\alpha \cdot t})' + \delta(0) \cdot 1 = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Поскольку начальное значение ненулевое, импульсная характеристика содержит δ - функцию.

Вид импульсной характеристики, дифференцирующей RL - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 1.6.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot p}{p + \alpha} = \frac{1 \cdot p}{p + \alpha} \to v(t) = \frac{d(\delta(0))/dt}{d/dt + \alpha} = \frac{\delta'(0)}{d/dt + \alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, дифференцирующей RL - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \delta'(0).$$

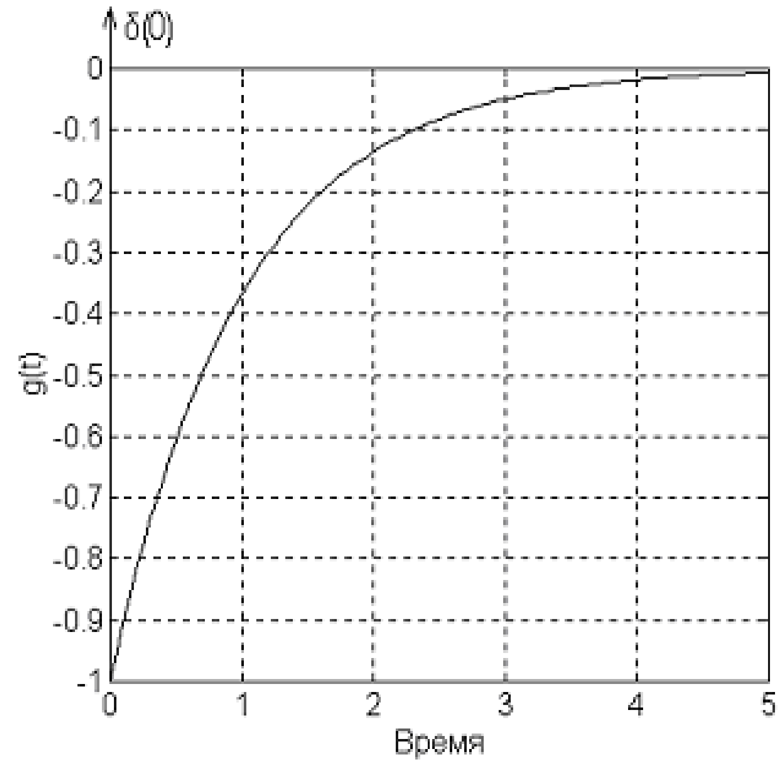

Рисунок 1.6 - Импульсная характеристика дифференцирующей RL - цепи

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ- функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \delta'(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся модифицированной теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2}{p + \alpha}.$$

Отметим, что в полученном дробно-рациональном отношении степень числителя выше степени знаменателя и простое взятие предела дает сразу ∞, скрадывая конечные составляющие начального значения.

В данной ситуации целесообразно воспользоваться модификацией теоремы операционного исчисления о начальном значении функции. Модификация теоремы о начальном значении заключается в том, что вначале путем последовательного деления числителя на знаменатель выделяем целую и дробную части. Составляющие целой части дадут δ- функцию и ее производные, а остаток от деления в пределе, при $p \to \infty$ даст конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v(0) = \lim_{t \to_+ 0} v(t) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2}{p+\alpha} = \lim_{p \to \infty} (p \cdot 1 - \frac{\alpha \cdot p}{p+\alpha}) = \delta(0) - \alpha .$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, дифференцирующей RL- цепи, на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} .$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta^{'}(0) ,$$

или

$$C^{'}(t) = \delta^{'}(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} .$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t) = \int \delta^{'}(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = -\alpha + C ,$$

где C- новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство производной δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta^{'}(0) \cdot dt = -f^{'}(0) .$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (-\alpha + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C \cdot e^{-\alpha \cdot t} .$$

Из начального значения $v(0) = \delta(0) - \alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$\delta(0) - \alpha = -\alpha + C ,$$

откуда получаем

$$C = \delta(0) .$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, интегрирующей RL- цепи, получаем в виде

$$v(t) = (\delta(0) - \alpha) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t) .$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_{0}^{t} e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_{0}^{t} e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \delta^{'}(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = \delta(0) - \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике, дифференцирующей RL - цепи, в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot (\delta(0) - \alpha) - \alpha = \delta(0) - \underset{t>0}{\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} - \underset{t=0}{\alpha} = g(t).$$

Учитывая, что второе слагаемое определено при $t > 0$, а первое и третье слагаемые при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику, дифференцирующей RL - цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик простых RL - цепей, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

Вариант интегрирующей RC- цепи. На рисунке 1.7 изображен вариант интегрирующей RC- цепи и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

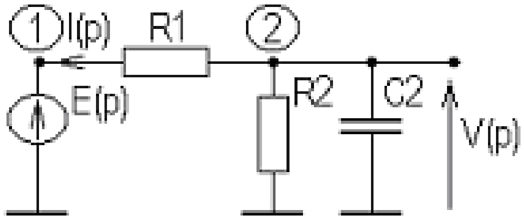

Рисунок 1.7 - Вариант интегрирующей RC - цепи

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику исследуемой цепи обобщенным узловым методом. Обозначим проводимости $g_1 = 1/R_1$; $g_2 = 1/R_2$ и запишем матрицу проводимостей цепи

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + p \cdot C_2 \end{bmatrix}.$$

Далее, выразим коэффициент передачи цепи по напряжению через отношение алгебраических дополнений матрицы проводимостей

$$K_V(p) = K(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{g_1}{g_1 + g_2 + p \cdot C_2}.$$

Приведем выражение для коэффициента передачи по напряжению к нормированному виду

$$K(p) = \frac{\dfrac{g_1}{g_1 + g_2}}{1 + p \cdot \dfrac{C_2}{g_1 + g_2}} = \frac{K_0}{1 + p \cdot \tau},$$

где $K_0 = g_1/(g_1 + g_2)$; $\tau = C_2/(g_1 + g_2)$. Вводя обозначение $\alpha = 1/\tau$, приходим к каноническому виду передаточной функции цепи

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha}.$$

Отметим, что $-\alpha$- является корнем характеристического уравнения $p + \alpha = 0$, представляющего собой знаменатель передаточной характеристики, приравненный нулю.

Из последнего выражения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p \cdot V(p) = K(p)$ при $p = 0$ и $p \to \infty$. Так, при $p = 0$, получаем $K(0) = K_0$, а при $p \to \infty$, соответственно, имеем $K(\infty) = 0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p) = 1/p \Leftrightarrow 1(t) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p \cdot (p + \alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p \cdot (p + \alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}).$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p \cdot (p + \alpha)} \Leftrightarrow K_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t = 0$, равно нулю $h(0) = 0$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t \to \infty$, равно коэффициенту передачи цепи по напряжению на нулевой частоте $h(\infty) = K_0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = 0;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = K_0.$$

Как видим, нормированный вид переходной характеристики, исследуемой интегрирующей цепи, совпадает с переходными характеристиками простых RC - и RL - интегрирующих цепей.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения сформируем на основе передаточной характеристики, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha} = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p \cdot (p + \alpha)} \to v(t) = \frac{1(t) \cdot K_0 \cdot \alpha}{(d/dt + \alpha)}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, исследуемой интегрирующей цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha} = 0.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой интегрирующей цепи, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C'(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t),$$

откуда

$$C'(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t)$$

или

$$C'(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t) = \int K_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = K_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования.

Эту постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (K_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = K_0 + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального значения $v(0)=0$, при $t=0$, следует, что

$$0=K_0+C,$$

откуда получаем

$$C=-K_0.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи, получаем в виде

$$v(t)=K_0\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})=h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t)=A\cdot y(t)+F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t)=e^{A\cdot t}\cdot y(0)+\int\limits_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A\cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0)+\int\limits_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot K_0\cdot\alpha\cdot 1(\tau)\cdot d\tau.$$

Так как $v(0)=0$, то, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи, в виде

$$v(t)=K_0\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})=h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику, исследуемой интегрирующей цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p)=1\Leftrightarrow\delta(0)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=\frac{K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha}\Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи

$$V(p)=\frac{K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}\Leftrightarrow K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0)=K_0\cdot\alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=g(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=K_0\cdot\alpha;$$

$$v(\infty)=g(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=0.$$

Как видим, вид импульсной характеристики, исследуемой интегрирующей цепи с точностью до множителя K_0, совпадает с импульсными характеристиками простых RC - и RL - интегрирующих цепей.

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t)\Rightarrow p\cdot V(p)-v({}_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p\cdot V(p)\Rightarrow v^{'}(t)+v({}_{+}0)\cdot\delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p\cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t)=h^{'}(t)+\delta(0)\cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0)=0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t)=h^{'}(t)=[K_0\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})]^{'}=K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1$, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p+\alpha}\to v(t)=\frac{\delta(0)\cdot K_0\cdot\alpha}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, исследуемой интегрирующей цепи

$$v^{'}(t)+\alpha\cdot v(t)=K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ- функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{'}(t)=-\alpha\cdot v(t)+K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot\alpha\cdot p}{p+\alpha}=K_0\cdot\alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой интегрирующей цепи, на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0),$$

или

$$C^{'}(t)=K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t)=\int K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=K_0\cdot\alpha+C,$$

где C- новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt = f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (K_0\cdot\alpha + C)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} + C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального значения $v(0) = K_0\cdot\alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$K_0\cdot\alpha = K_0\cdot\alpha + C,$$

откуда получаем

$$C = 0.$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи, получаем в виде

$$v(t) = K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} = g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A\cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A\cdot t}\cdot y(0) + \int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $e^{A\cdot t}$- в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0)\cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = K_0\cdot\alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой интегрирующей цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}} + \underset{t=0}{K_0\cdot\alpha} = g(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t > 0$, а второе слагаемое при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t)=K_0\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=g(t)\,.$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику, исследуемой интегрирующей цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Активная интегрирующая RC**- цепь.** На рисунке 1.8 изображена активная интегрирующая RC- цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

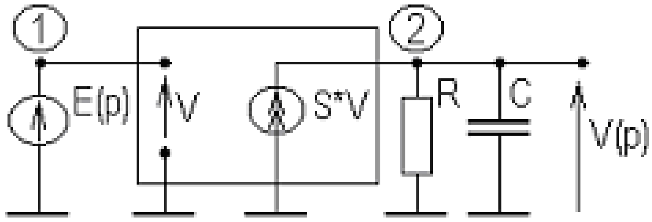

Рисунок 1.8 - Активная интегрирующая RC - цепь

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику исследуемой активной цепи обобщенным узловым методом. Обозначим проводимость $g=1/R$ и запишем матрицу проводимостей цепи

$$Y=\begin{bmatrix}0 & 0\\ S & g+p\cdot C\end{bmatrix},$$

где S - параметр крутизны источника тока управляемого напряжением.

Далее, выразим коэффициент передачи цепи по напряжению через отношение алгебраических дополнений матрицы проводимостей

$$K_V(p)=K(p)=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}=\frac{-S}{g+p\cdot C}\,.$$

Приведем выражение для коэффициента передачи по напряжению к нормированному виду

$$K(p)=\frac{-S/g}{1+p\cdot C/g}=\frac{K_0}{1+p\cdot\tau},$$

где $K_0=-S/g$; $\tau=C/g$. Вводя обозначение $\alpha=1/\tau$, приходим к каноническому виду передаточной функции цепи

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}\,.$$

Отметим, что $-\alpha$- является корнем характеристического уравнения $p+\alpha=0$, представляющего собой знаменатель передаточной характеристики, приравненный нулю.

Из последнего выражения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $p\cdot V(p)=K(p)$ при $p=0$ и $p\to\infty$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=K_0$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{K_0\cdot\alpha}{p\cdot(p+\alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p\cdot(p+\alpha)}\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t}).$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи

$$V(p)=\frac{K_0\cdot\alpha}{p\cdot(p+\alpha)}\Leftrightarrow K_0\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно нулю $h(0)=0$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, равно коэффициенту передачи цепи по напряжению на нулевой частоте $h(\infty)=K_0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=0;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=K_0.$$

Как видим, нормированный вид переходной характеристики, исследуемой цепи, совпадает с переходными характеристиками простых RC- и RL- интегрирующих цепей.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения сформируем на основе передаточной характеристики, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p) = \frac{E(p)\cdot K_0 \cdot \alpha}{p+\alpha} = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p\cdot(p+\alpha)} \to v(t) = \frac{1(t)\cdot K_0 \cdot \alpha}{(d/dt+\alpha)}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, исследуемой активной RC - цепи

$$v^{'}(t) + \alpha \cdot v(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{'}(t) = -\alpha \cdot v(t) + K_0 \cdot \alpha \cdot 1(t).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t\to_{+}0} v(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{K_0\cdot\alpha}{p+\alpha} = 0.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной интегрирующей цепи, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t) = C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} - \alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = -\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} + K_0\cdot\alpha\cdot 1(t),$$

откуда

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = K_0\cdot\alpha\cdot 1(t)$$

или

$$C^{'}(t) = K_0\cdot\alpha\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t) = \int K_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = K_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования.

Эту постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (K_0 \cdot e^{\alpha \cdot t} + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = K_0 + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального значения $v(0) = 0$, при $t = 0$, следует, что

$$0 = K_0 + C,$$

откуда получаем

$$C = -K_0.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи, получаем в виде

$$v(t) = K_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot K_0 \cdot \alpha \cdot 1(\tau) \cdot d\tau.$$

Так как $v(0) = 0$, то, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи, в виде

$$v(t) = K_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику, исследуемой активной интегрирующей цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p + \alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot \alpha}{p + \alpha} \Leftrightarrow K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0) = K_0 \cdot \alpha$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = K_0 \cdot \alpha;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Как видим, вид импульсной характеристики, исследуемой активной интегрирующей цепи с точностью до множителя K_0, совпадает с импульсными характеристиками простых RC - и RL - интегрирующих цепей.

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v(_+0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v(_+0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h'(t) = [K_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})]' = K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1$, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot\alpha}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p+\alpha}\to v(t)=\frac{\delta(0)\cdot K_0\cdot\alpha}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения, исследуемой активной RC - цепи

$$v'(t)+\alpha\cdot v(t)=K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ- функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t)=-\alpha\cdot v(t)+K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot\alpha\cdot p}{p+\alpha}=K_0\cdot\alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной интегрирующей цепи, на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения в исходное уравнение дает

$$C'(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+K_0\cdot\alpha\cdot\delta(0),$$

или

$$C^{'}(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t) = \int K_0 \cdot \alpha \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = K_0 \cdot \alpha + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (K_0 \cdot \alpha + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального значения $v(0) = K_0 \cdot \alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$K_0 \cdot \alpha = K_0 \cdot \alpha + C,$$

откуда получаем

$$C = 0.$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи, получаем в виде

$$v(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение отдельного либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot K_0 \cdot \alpha \cdot \delta(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = K_0 \cdot \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой активной интегрирующей цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} + \underset{t=0}{K_0 \cdot \alpha} = g(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t > 0$, а второе слагаемое при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = K_0 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику, исследуемой активной интегрирующей цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как правило, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод подкупает своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализуем и прост для реализации в современных системах аналитических исследований. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик пассивных и активных простых RC - и RL - цепей первого порядка, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

В заключение, еще раз обратим внимание, на целесообразность приведения передаточных характеристик исследуемых цепей к нормированному каноническому виду, что существенно упрощает анализ и позволяет сразу отнести цепь к определенному классу цепей, характеристики которых совпадают с точностью до множителей.

2 Исследование временных характеристик цепей второго порядка

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик рассмотрим несколько примеров простейших цепей второго порядка.

Активная цепь второго порядка RLC - типа. На рисунке 2.1 изображен вариант активной цепи второго порядка RLC - типа и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

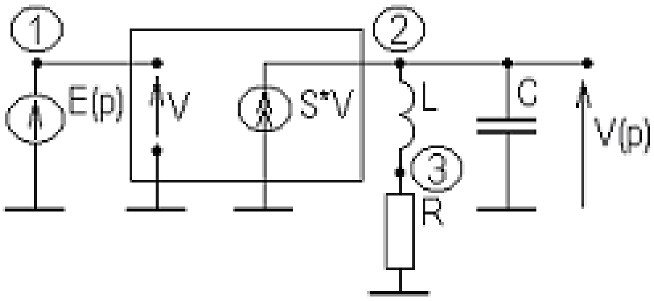

Рисунок 2.1 - Активная цепь RLC - типа

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику исследуемой цепи обобщенным узловым методом. Обозначим проводимость $g = 1/R$ и запишем матрицу проводимостей цепи

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & p\cdot C + \dfrac{1}{p\cdot L} & -\dfrac{1}{p\cdot L} \\ 0 & -\dfrac{1}{p\cdot L} & g + \dfrac{1}{p\cdot L} \end{bmatrix}.$$

Далее, выразим коэффициент передачи цепи по напряжению через отношение алгебраических дополнений матрицы проводимостей

$$K_V(p) = K(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{-S\cdot(g + \dfrac{1}{p\cdot L})}{g\cdot(p\cdot C + \dfrac{1}{p\cdot L}) + \dfrac{p\cdot C}{p\cdot L}} = \frac{-S\cdot(1 + p\cdot L\cdot g)}{g\cdot L\cdot C\cdot p^2 + p\cdot C + g}.$$

Приведем выражение для коэффициента передачи по напряжению к нормированному виду, вынося и, сокращая множители числителя и знаменателя при старших степенях оператора p

$$K(p)=\frac{-S}{C}\cdot\frac{(p+\frac{1}{L\cdot g})}{p^2+\frac{1}{L\cdot g}\cdot p+\frac{1}{L\cdot C}}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{p^2+a_1\cdot p+a_0},$$

где $K_0=-S/C$; $a_1=b=\frac{1}{L\cdot g}$; $a_0=\frac{1}{L\cdot C}$. Вводя обозначения $-\alpha_1,-\alpha_2$ - корней характеристического уравнения

$$p^2+a_1\cdot p+a_0=0,$$

приходим к каноническому виду коэффициента передачи по напряжению

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Из последнего выражения коэффициента передачи напряжения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Найдем значения передаточной функции $\frac{V(p)}{E(p)}=K(p)=p\cdot V(p)$, при $p=0$ и $p\to\infty$, принимая $E(p)=1/p$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2)$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p+b}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)},$$

при $\alpha_1\neq\alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$V(p)=\frac{K_0\cdot(p+b)}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_0\cdot\left\langle\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\right\rangle=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно нулю $h(0)=0$, а установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, равно $h(\infty)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2)=K_0\cdot b/a_0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K(p)=0;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot V(p)=\lim_{p\to 0}K(p)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2).$$

Выразим производную от выходной реакции

$$v'(t)=h'(t)=\frac{K_0\cdot\left\langle(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle}{\alpha_1-\alpha_2}$$

и отметим, что значение производной, при $t=0$, равно $h'(0)=K_0$, а при $t\to\infty$, равно $h'(\infty)=0$.

Заметим, что переходная характеристика, исследуемой активной цепи второго порядка RLC- типа, имеет более сложный вид, по сравнению с цепями первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения переходной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1/p$, получаем

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to v(t)=\frac{1(t)\cdot K_0\cdot(\frac{d}{dt}+b)}{(\frac{d}{dt}+\alpha_1)\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{1(t)\cdot K_0\cdot(\frac{d}{dt}+b)}{(\frac{d}{dt})^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\frac{d}{dt}+\alpha_1\cdot\alpha_2},$$

где $1(t) \Leftrightarrow 1/p$ - единичный скачок или функция Хевисайда, как результат обратного преобразования Лапласа от $1/p$ в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = K_0 \cdot [\delta(0) + b].$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{V(p)}{1/p} = \frac{K_0 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} \to \frac{v(t)}{1(t)} = \frac{K_0 \cdot (d/dt + b)}{(d/dt + \alpha_1) \cdot (d/dt + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot (d/dt + b)}{(d/dt)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot d/dt + \alpha_1 \cdot \alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$ приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = K_0 \cdot [\delta(0) + b].$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot [\delta(0) + b].$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v'(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to _+0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} = 0;$$

$$v'(0) = \lim_{t \to _+0} v'(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot p \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} = K_0.$$

Заметим, что полученные начальные значения, совпали с ранее найденными значениями переходной характеристики и ее производной, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной цепи второго порядка RLC-типа, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t)=C_1(t)\cdot f_1(t)+C_2(t)\cdot f_2(t)=C_1(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$- неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{matrix} C_1'(t)\cdot f_1(t)+C_2'(t)\cdot f_2(t)=0 \\ C_1'(t)\cdot f_1'(t)+C_2'(t)\cdot f_2'(t)=F(t) \end{matrix},$$

где $F(t)$- правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{matrix} C_1'(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2'(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=0 \\ -C_1'(t)\cdot\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-C_2'(t)\cdot\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=K_0\cdot[\delta(0)+b] \end{matrix}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ -\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{vmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t};$$

$$C_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ K_0\cdot[\delta(0)+b] & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta}=$$

$$=\frac{-K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}=\frac{-K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2};$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & 0 \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & K_0 \cdot [\delta(0)+b] \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot [\delta(0)+b] \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} = \frac{K_0 \cdot [\delta(0)+b] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta(0)+b] \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} dt = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot (1 + \frac{b}{\alpha_1} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t}) + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta(0)+b] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} dt = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot (1 + \frac{b}{\alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}) + C_2,$$

где C_1, C_2- новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle -(1 + \frac{b}{\alpha_1} \cdot e^{\alpha_1 \cdot t}) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + (1 + \frac{b}{\alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle +$$

$$+ C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t};$$

$$v(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \frac{b \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} - e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v'(t) = \frac{K_0 \cdot (\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t})}{\alpha_1 - \alpha_2} - C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0) = 0$ и $v'(0) = K_0$, при $t = 0$

$$v(0) = 0 = \frac{K_0 \cdot b}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} + C_1 + C_2$$

$$v'(0) = K_0 = K_0 - \alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1 + C_2 = \frac{-K_0 \cdot b}{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

$$-\alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2 = 0.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{-K_0 \cdot b}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} & 1 \\ 0 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot b \cdot \alpha_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{K_0 \cdot b}{\alpha_1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-K_0 \cdot b}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \\ -\alpha_1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot b \cdot \alpha_1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{-K_0 \cdot b}{\alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Подставляя, найденные постоянные в общее решение, получаем

$$v(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \frac{b \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} - e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t} + \frac{b}{\alpha_1} \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \frac{b}{\alpha_2} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t) = K_0 \cdot \left\langle \frac{b}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} - \frac{(\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}}{\alpha_1 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} + \frac{(\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} \right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t),\ Y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t - \tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $Y(0)$ - начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot [\delta(0) + b].$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t) = y_1 = v(t);\ y_2 = y_1' = v'(t), \text{ то есть } y_2' = v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta(0) + b] \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix};\ Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta(0) + b] \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0;\ \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A-\Lambda_i]\cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i- диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$- алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A-\Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H = \begin{bmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t} = H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix};$$

$$e^{A\cdot t} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix};\; F(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0\cdot[\delta(0)+b] \end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t) = v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot K_0\cdot[\delta(0)+b]\,d\tau.$$

Раскрывая интеграл и, приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа, в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\underset{t>0}{-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}}\underset{t=0}{-1+1}\underset{t>0}{-\frac{b\cdot(1-e^{-\alpha_1\cdot t})}{\alpha_1}+\frac{b\cdot(1-e^{-\alpha_2\cdot t})}{\alpha_2}}\right\rangle;$$

$$v(t)=h(t)=K_0\cdot\left\langle\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\right\rangle.$$

Как видим, полученное выражение переходной характеристики методом Коши, как реакции на единичный скачок на входе, полностью совпадает с решениями, полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p)=1\Leftrightarrow\delta(0)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p+b}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2},$$

при $\alpha_1\neq\alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$V(p)=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle=v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0)=K_0$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = K_0;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Отметим также, что импульсная характеристика может быть получена по переходной характеристике на основании теоремы о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0),$$

так как входное воздействие при исследовании импульсной характеристики, есть производная от входного воздействия при исследовании переходной характеристики. Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h'(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Отметим, что начальное значение импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g(0) = K_0$, а установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Выразим производную от выходной реакции

$$v'(t) = g'(t) = -\frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $g'(0) = K_0 \cdot [b - (\alpha_1 + \alpha_2)]$, а при $t \to \infty$, равно $g'(\infty) = 0$.

Заметим, что здесь мы математически определили производную выходной реакции, а не реакцию на производную, от входного воздействия, которая ищется по теореме о дифференцировании оригинала.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0)$$

для определения производной выходной реакции, то есть производной импульсной характеристики, перепишем его в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v(_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) + \delta(0) \cdot g(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $g(0) = K_0$, вновь получаем выражение для производной импульсной характеристики, дифференцируя импульсную характеристику и, учитывая ее начальное значение

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) = K_0 \cdot \left\langle \delta(0) - \frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right\rangle.$$

Так как начальное значение ненулевое, то производная импульсной характеристики содержит δ - функцию.

Начальное значение производной импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g^{'}(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle$.

Заметим, что импульсная характеристика, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа, как и переходная характеристика, имеет более сложный вид, по сравнению с цепями первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения импульсной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot (p + b)}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \rightarrow v(t) = \frac{K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)]}{(\frac{d}{dt} + \alpha_1) \cdot (\frac{d}{dt} + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)]}{(\frac{d}{dt})^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \frac{d}{dt} + \alpha_1 \cdot \alpha_2},$$

где $\delta(0) \Leftrightarrow 1$- дельта функция, как результат обратного преобразования Лапласа от 1 в области изображений; $\delta^{'}(0) \Leftrightarrow p$- производная дельта функции, как результат обратного преобразования Лапласа от p в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$v''(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot[\delta'(0)+b\cdot\delta(0)].$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to\frac{v(t)}{\delta(0)}=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt+\alpha_1)\cdot(d/dt+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt)^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot d/dt+\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(\delta(0))/dt=\delta'(0)$ и $\delta(0)\Leftrightarrow 1$ приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа

$$v''(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot[\delta'(0)+b\cdot\delta(0)].$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t)-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)+K_0\cdot[\delta'(0)+b\cdot\delta(0)].$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v'(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_+0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=K_0;$$

$$v'(0)=\lim_{t\to_+0}v'(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p^2\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\infty.$$

Заметим, что первое начальное значение, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

В последнем дробно-рациональном выражении степень числителя превысила степень знаменателя, и взятие предела дает значение ∞, не раскрывая ее составляющие. Раскрыть конечные и бесконечные составляющие этого предела можно путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока степень остатка не станет равной степени знаменателя. При этом, целые части от деления дают составляющие $\delta(0),\ \delta^{'}(0),\ \delta^{''}(0),\ \ldots$ и так далее, а остаток деления в пределе при $p \to \infty$ дает конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v^{'}(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v^{'}(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot p^2 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} =$$

$$= \lim_{p \to \infty} K_0 \cdot \left\langle p + \frac{[b-(\alpha_1+\alpha_2)]\cdot p^2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} \right\rangle = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b-(\alpha_1+\alpha_2)] \rangle .$$

Таким образом, полученное выражение совпало с начальным значением производной импульсной характеристики, полученной на основании теоремы о дифференцировании оригинала.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной цепи второго порядка RLC-типа, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t) = C_1(t)\cdot f_1(t) + C_2(t)\cdot f_2(t) = C_1(t)\cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2(t)\cdot e^{-\alpha_2 \cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$- неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{aligned} &C_1^{'}(t)\cdot f_1(t) + C_2^{'}(t)\cdot f_2(t) = 0 \\ &C_1^{'}(t)\cdot f_1^{'}(t) + C_2^{'}(t)\cdot f_2^{'}(t) = F(t) \end{aligned},$$

где $F(t)$- правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} &C_1^{'}(t)\cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2^{'}(t)\cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = 0 \\ &-C_1^{'}(t)\cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2^{'}(t)\cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b\cdot\delta(0)] \end{aligned}.$$

Определим $C_1^{'}(t)$ и $C_2^{'}(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t};$$

$$C_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} =$$

$$= \frac{-K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_1 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

$$C_2^{'} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & 0 \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} dt = \frac{K_0 \cdot (\alpha_1 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta^{'}(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} dt = \frac{-K_0 \cdot (\alpha_2 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2,$$

где C_1, C_2 - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции и ее производной

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0);$$

$$\int f(t) \cdot \delta^{'}(0) \cdot dt = -f^{'}(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = \left(\frac{K_0 \cdot (\alpha_1 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1\right) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + \left(\frac{-K_0 \cdot (\alpha_2 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2\right) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v'(t) = -K_0 \cdot \frac{\left\langle \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} -$$
$$- C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0) = K_0$ и $v'(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle$, при $t = 0$

$$v(0) = K_0 = K_0 + C_1 + C_2$$
$$v'(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle = K_0 \cdot [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] - \alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2 .$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$-\alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2 = K_0 \cdot \delta(0) .$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_0 \cdot \delta(0) & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}; \; C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & K_0 \cdot \delta(0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Подставляя, найденные постоянные в общее решение, получаем

$$v(t) = \frac{K_0 \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} -$$
$$- \frac{K_0 \cdot \left\langle \delta(0) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \delta(0) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, в силу того, что значения экспонент, при $t = 0$, равны по модулю единице и, следовательно, знаменатель второго слагаемого равен нулю.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t) = g(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}) \right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t),\ Y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)].$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t) = y_1 = v(t);\ y_2 = y_1' = v'(t), \text{ то есть } y_2' = v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix};\ Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$- диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0; \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A - \Lambda_i] \cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i- диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$- алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A - \Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 & -(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t}=H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_1\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-\alpha_1\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha_2\\ -1 & -1/\alpha_1\end{bmatrix};$$

$$e^{A\cdot t}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}\\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0)=\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v(0)\\ v^{'}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_0\\ K_0\cdot\langle\delta(0)+[b-(\alpha_1+\alpha_2)]\rangle\end{bmatrix};$$

$$F(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ K_0\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]\end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t)=v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}+\\ +\langle\delta(0)+[b-(\alpha_1+\alpha_2)]\rangle\cdot(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})+\\ +\int\limits_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]\,d\tau\end{array}\right\rangle.$$

Раскрывая интеграл и, приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}\underset{t>0}{[(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}]}-\\ \underset{t=0}{-\delta(0)\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t})}+\underset{t=0}{[(\alpha_1-b)-(\alpha_2-b)]}\end{array}\right\rangle.$$

Учитывая, что вторая составляющая равна нулю, при $t=0$ и сращивая во времени первую и третью составляющие, окончательно получаем решение дифференциального уравнения в виде

$$v(t)=g(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle.$$

Как видим, полученное методом Коши решение совпадает с предыдущими решениями операторным методом и методом Лагранжа и представляет импульсную характеристику, исследуемой активной цепи второго порядка RLC - типа, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Активная RC - цепь второго порядка с последовательной ООС. На рисунке 2.2 изображен вариант активной RC - цепи второго порядка с последовательной отрицательной обратной связью (ООС) и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

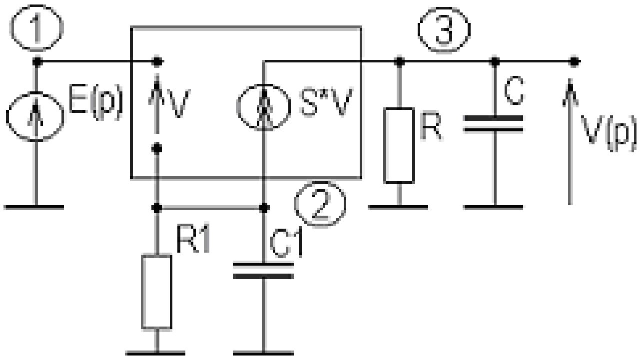

Рисунок 2.2 - Активная RC - цепь с последовательной ООС

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику исследуемой цепи обобщенным узловым методом. Обозначим проводимости $g = 1/R;\ g1 = 1/R_1$ и запишем матрицу проводимостей цепи

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -S & S + g_1 + p \cdot C_1 & 0 \\ S & -S & g + p \cdot C \end{bmatrix}.$$

Далее, выразим коэффициент передачи цепи по напряжению через отношение алгебраических дополнений матрицы проводимостей

$$K_V(p) = K(p) = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{-S \cdot (g_1 + p \cdot C_1)}{(g + p \cdot C) \cdot (S + g_1 + p \cdot C_1)}.$$

Приведем выражение для коэффициента передачи по напряжению к нормированному виду, вынося и, сокращая множители числителя и знаменателя при старших степенях оператора p

$$K(p) = \frac{-S}{C} \cdot \frac{(p + g_1/C_1)}{(p + g/C) \cdot (p + (S + g_1)/C_1)} = K_0 \cdot \frac{p + b}{p^2 + a_1 \cdot p + a_0},$$

где $K_0 = -S/C$; $a_1 = \dfrac{(S + g_1) \cdot C + g \cdot C_1}{C \cdot C_1}$; $a_0 = \dfrac{g \cdot (S + g_1)}{C \cdot C_1}$; $b = \dfrac{g_1}{C_1}$. Вводя обозначения $-\alpha_1, -\alpha_2$ - корней характеристического уравнения

$$p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = 0,$$

приходим к каноническому виду коэффициента передачи по напряжению

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Из последнего выражения коэффициента передачи напряжения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Найдем значения передаточной функции $\dfrac{V(p)}{E(p)}=K(p)=p\cdot V(p)$, при $p=0$ и $p\to\infty$, принимая $E(p)=1/p$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2)$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p+b}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)},$$

при $\alpha_1\neq\alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, исследуемой активной RC - цепи второго порядка с последовательной ООС

$$V(p)=\frac{K_0\cdot(p+b)}{p\cdot(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K_0\cdot\left\langle\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\right\rangle=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно нулю $h(0)=0$, а установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, равно $h(\infty)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2)=K_0\cdot b/a_0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K(p)=0;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot V(p)=\lim_{p\to 0}K(p)=K_0\cdot b/(\alpha_1\cdot\alpha_2).$$

Выразим производную от выходной реакции

$$v'(t) = h'(t) = \frac{K_0 \cdot \left\langle (\alpha_1 - b)\cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b)\cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $h'(0) = K_0$, а при $t \to \infty$, равно $h'(\infty) = 0$.

Заметим, что переходная характеристика, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС, имеет более сложный вид, по сравнению с характеристиками цепей первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения переходной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1/p$, получаем

$$V(p) = \frac{E(p)\cdot K_0 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} \to v(t) = \frac{1(t)\cdot K_0 \cdot (\frac{d}{dt} + b)}{(\frac{d}{dt} + \alpha_1)\cdot(\frac{d}{dt} + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{1(t)\cdot K_0 \cdot (\frac{d}{dt} + b)}{(\frac{d}{dt})^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\cdot \frac{d}{dt} + \alpha_1 \cdot \alpha_2},$$

где $1(t) \Leftrightarrow 1/p$- единичный скачок или функция Хевисайда, как результат обратного преобразования Лапласа от $1/p$ в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2)\cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = K_0 \cdot [\delta(0) + b].$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1/p}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to\frac{v(t)}{1(t)}=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt+\alpha_1)\cdot(d/dt+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt)^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot d/dt+\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt=\delta(0)$, приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС

$$v^{''}(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot[\delta(0)+b].$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{''}(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)+K_0\cdot[\delta(0)+b].$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v^{'}(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_+0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=0;$$

$$v^{'}(0)=\lim_{t\to_+0}v^{'}(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=K_0.$$

Заметим, что полученные начальные значения, совпали с ранее найденными значениями переходной характеристики и ее производной, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t)=C_1(t)\cdot f_1(t)+C_2(t)\cdot f_2(t)=C_1(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$- неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t)$, $C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{aligned} C_1'(t)\cdot f_1(t)+C_2'(t)\cdot f_2(t)=0 \\ C_1'(t)\cdot f_1'(t)+C_2'(t)\cdot f_2'(t)=F(t) \end{aligned},$$

где $F(t)$ - правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} C_1'(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2'(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=0 \\ -C_1'(t)\cdot\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-C_2'(t)\cdot\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=K_0\cdot[\delta(0)+b] \end{aligned}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ -\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{vmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t};$$

$$C_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ K_0\cdot[\delta(0)+b] & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{vmatrix}}{\Delta}=$$

$$=\frac{-K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}=\frac{-K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2};$$

$$C_2'=\frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ -\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} & K_0\cdot[\delta(0)+b]\end{vmatrix}}{\Delta}=$$

$$=\frac{K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}=\frac{K_0\cdot[\delta(0)+b]\cdot e^{\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t)=\frac{-K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int[\delta(0)+b]\cdot e^{\alpha_1\cdot t}dt=\frac{-K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot(1+\frac{b}{\alpha_1}\cdot e^{\alpha_1\cdot t})+C_1;$$

$$C_2(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int[\delta(0)+b]\cdot e^{\alpha_2\cdot t}dt=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot(1+\frac{b}{\alpha_2}\cdot e^{\alpha_2\cdot t})+C_2,$$

где C_1, C_2 - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt=f(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle -(1+\frac{b}{\alpha_1}\cdot e^{\alpha_1\cdot t})\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+(1+\frac{b}{\alpha_2}\cdot e^{\alpha_2\cdot t})\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle+$$
$$+C_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t};$$

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\frac{b\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle+C_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v'(t)=\frac{K_0\cdot(\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t})}{\alpha_1-\alpha_2}-C_1\cdot\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-C_2\cdot\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0)=0$ и $v'(0)=K_0$, при $t=0$

$$v(0)=0=\frac{K_0\cdot b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}+C_1+C_2$$
$$v'(0)=K_0=K_0-\alpha_1\cdot C_1-\alpha_2\cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1+C_2=\frac{-K_0\cdot b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}$$
$$-\alpha_1\cdot C_1-\alpha_2\cdot C_2=0.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\alpha_1 & -\alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1-\alpha_2;$$

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}\frac{-K_0\cdot b}{\alpha_1\cdot\alpha_2} & 1\\ 0 & -\alpha_2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{K_0\cdot b\cdot\alpha_2}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{K_0\cdot b}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)};$$

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{-K_0\cdot b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}\\ -\alpha_1 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-K_0\cdot b\cdot\alpha_1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{-K_0\cdot b}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Подставляя найденные постоянные в общее решение, получаем

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\frac{b\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}+\frac{b}{\alpha_1}\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\frac{b}{\alpha_2}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС и учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t)=K_0\cdot\left\langle\frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t)=A\cdot Y(t)+F(t),$$

где $Y(t)$, $Y'(t)$, $F(t)$ - в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t)=e^{A\cdot t}\cdot Y(0)+\int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A\cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t)-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)+K_0\cdot[\delta(0)+b].$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t)=y_1=v(t);\ y_2=y_1'=v'(t),\text{ то есть } y_2'=v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\alpha_1\cdot\alpha_2&-(\alpha_1+\alpha_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\K_0\cdot[\delta(0)+b]\end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}; \; Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta(0) + b] \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0; \; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A - \Lambda_i] \cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i - диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$ - алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A - \Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H=\begin{bmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t}=H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix};$$

$$e^{A\cdot t}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0)=\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix};\ F(\tau)=\begin{bmatrix} 0 \\ K_0\cdot[\delta(0)+b] \end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t)=v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int\limits_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot K_0\cdot[\delta(0)+b]\,d\tau\ .$$

Раскрывая интеграл и, приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС, в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle \underset{t>0}{-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}}\ \underset{t=0}{-1+1}\ \underset{t>0}{-\frac{b\cdot(1-e^{-\alpha_1\cdot t})}{\alpha_1}+\frac{b\cdot(1-e^{-\alpha_2\cdot t})}{\alpha_2}} \right\rangle;$$

$$v(t)=h(t)=K_0\cdot\left\langle \frac{b}{\alpha_1\cdot\alpha_2}-\frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)} \right\rangle.$$

Как видим, полученное выражение переходной характеристики методом Коши, как реакции на единичный скачок на входе, полностью совпадает с решениями, полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p)=1 \Leftrightarrow \delta(0)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p+b}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} \Leftrightarrow \frac{(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2},$$

при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике исследуемой активной RC - цепи второго порядка с последовательной ООС

$$V(p)=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle=v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае начальное значение, при $t=0$, равно $g(0)=K_0$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=g(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=K_0;$$

$$v(\infty)=g(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=0.$$

Отметим также, что импульсная характеристика может быть получена по переходной характеристике на основании теоремы о дифференцировании оригинала

$$v'(t)\Rightarrow p\cdot V(p)-v({}_{+}0),$$

так как входное воздействие при исследовании импульсной характеристики, есть производная от входного воздействия при исследовании переходной характеристики. Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p\cdot V(p)\Rightarrow v'(t)+v({}_{+}0)\cdot\delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h^{'}(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Отметим, что начальное значение импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g(0) = K_0$, а установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Выразим производную от выходной реакции

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) = -\frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $g^{'}(0) = K_0 \cdot [b - (\alpha_1 + \alpha_2)]$, а при $t \to \infty$, равно $g^{'}(\infty) = 0$.

Заметим, что здесь мы математически определили производную выходной реакции, а не реакцию на производную, от входного воздействия, которая ищется по теореме о дифференцировании оригинала.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0)$$

для определения производной выходной реакции, то есть производной импульсной характеристики, перепишем его в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) + \delta(0) \cdot g(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $g(0) = K_0$, вновь получаем выражение для производной импульсной характеристики, дифференцируя импульсную характеристику и учитывая ее начальное значение

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) = K_0 \cdot \left\langle \delta(0) - \frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right\rangle.$$

Так как начальное значение ненулевое, то производная импульсной характеристики содержит δ - функцию.

Начальное значение производной импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g^{'}(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle$.

Заметим, что импульсная характеристика, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС, как и переходная характеристика, имеет более сложный вид, по сравнению с характеристиками цепей первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения импульсной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1$, получаем

$$V(p)=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to v(t)=\frac{K_0\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]}{(\frac{d}{dt}+\alpha_1)\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]}{(\frac{d}{dt})^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\frac{d}{dt}+\alpha_1\cdot\alpha_2},$$

где $\delta(0)\Leftrightarrow 1$- дельта функция, как результат обратного преобразования Лапласа от 1 в области изображений; $\delta^{'}(0)\Leftrightarrow p$- производная дельта функции, как результат обратного преобразования Лапласа от p в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной RC - цепи второго порядка с последовательной ООС

$$v^{''}(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)].$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1}=\frac{K_0\cdot(p+b)}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to\frac{v(t)}{\delta(0)}=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt+\alpha_1)\cdot(d/dt+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot(d/dt+b)}{(d/dt)^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot d/dt+\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(\delta(0))/dt=\delta^{'}(0)$ и $\delta(0)\Leftrightarrow 1$, приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)].$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)].$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v'(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to_+ 0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot p \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} = K_0;$$

$$v'(0) = \lim_{t \to_+ 0} v'(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot p^2 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} = \infty.$$

Заметим, что первое начальное значение, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t = 0$.

В последнем дробно-рациональном выражении степень числителя превысила степень знаменателя, и взятие предела дает значение ∞, не раскрывая ее составляющие. Раскрыть конечные и бесконечные составляющие этого предела можно путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока степень остатка не станет равной степени знаменателя. При этом, целые части от деления дают составляющие $\delta(0),\ \delta'(0),\ \delta''(0),\ \ldots$ и так далее, а остаток деления в пределе при $p \to \infty$ дает конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v'(0) = \lim_{t \to_+ 0} v'(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{K_0 \cdot p^2 \cdot (p+b)}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} =$$

$$= \lim_{p \to \infty} K_0 \cdot \left\langle p + \frac{[b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \cdot p^2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot p}{(p+\alpha_1) \cdot (p+\alpha_2)} \right\rangle = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle.$$

Таким образом, полученное выражение совпало с начальным значением производной импульсной характеристики, полученной на основании теоремы о дифференцировании оригинала.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t) = C_1(t) \cdot f_1(t) + C_2(t) \cdot f_2(t) = C_1(t) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2(t) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$- неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающее появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{array}{l} C_1'(t) \cdot f_1(t) + C_2'(t) \cdot f_2(t) = 0 \\ C_1'(t) \cdot f_1'(t) + C_2'(t) \cdot f_2'(t) = F(t) \end{array},$$

где $F(t)$- правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{array}{l} C_1'(t) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2'(t) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = 0 \\ -C_1'(t) \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2'(t) \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{array}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t};$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} =$$

$$= \frac{-K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_1 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & 0 \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} dt = \frac{K_0 \cdot (\alpha_1 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} dt = \frac{-K_0 \cdot (\alpha_2 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2,$$

где C_1, C_2 - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции и ее производной

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0);$$

$$\int f(t) \cdot \delta'(0) \cdot dt = -f'(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = \left(\frac{K_0 \cdot (\alpha_1 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1\right) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + \left(\frac{-K_0 \cdot (\alpha_2 - b)}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2\right) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v'(t) = -K_0 \cdot \frac{\left\langle \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} -$$

$$- C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0) = K_0$ и $v'(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle$, при $t = 0$

$$v(0) = K_0 = K_0 + C_1 + C_2$$

$$v'(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) + [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] \rangle = K_0 \cdot [b - (\alpha_1 + \alpha_2)] - \alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$-\alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2 = K_0 \cdot \delta(0).$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_0 \cdot \delta(0) & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}; \; C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & K_0 \cdot \delta(0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Подставляя найденные постоянные в общее решение, получаем

$$v(t) = \frac{K_0 \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2} -$$

$$- \frac{K_0 \cdot \left\langle \delta(0) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \delta(0) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \right\rangle}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, в силу того, что значения экспонент, при $t = 0$, равны по модулю единице и, следовательно, знаменатель второго слагаемого равен нулю.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС и учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t) = g(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle (\alpha_1 - b) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - (\alpha_2 - b) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}) \right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t), Y'(t), F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t - \tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 + K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)].$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t) = y_1 = v(t); \; y_2 = y_1' = v'(t), \text{ то есть } y_2' = v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}; \; Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot [\delta'(0) + b \cdot \delta(0)] \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0; \; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_2\end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A-\Lambda_i]\cdot h_i=0$, по известны собственным значениям, где Λ_i- диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$- алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A-\Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H=\begin{bmatrix}-(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_1\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha_2\\ -1 & -1/\alpha_1\end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t}=H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_1\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-\alpha_1\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha_2\\ -1 & -1/\alpha_1\end{bmatrix};$$

$$e^{A\cdot t}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}\\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0)=\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v(0)\\ v^{'}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_0\\ K_0\cdot\langle\delta(0)+[b-(\alpha_1+\alpha_2)]\rangle\end{bmatrix};$$

$$F(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ K_0\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]\end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t)=v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}+\\ +\left\langle\delta(0)+[b-(\alpha_1+\alpha_2)]\right\rangle\cdot(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})+\\ +\int\limits_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot[\delta^{'}(0)+b\cdot\delta(0)]\,d\tau\end{array}\right\rangle.$$

Раскрывая интеграл и, приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой активной RC-цепи второго порядка с последовательной ООС, в виде

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}\underset{t>0}{[(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}]}-\\ -\delta(0)\cdot\underset{t=0}{(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t})}+\underset{t=0}{[(\alpha_1-b)-(\alpha_2-b)]}\end{array}\right\rangle.$$

Учитывая, что вторая составляющая равна нулю при $t=0$ и сращивая во времени первую и третью составляющие, окончательно получаем решение дифференциального уравнения в виде

$$v(t)=g(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle(\alpha_1-b)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-(\alpha_2-b)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\right\rangle.$$

Как видим, полученное методом Коши решение совпадает с предыдущими решениями операторным методом и методом Лагранжа и представляет импульсную характеристику, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

В заключение отметим, что все нормированные характеристики, исследуемой активной RC- цепи второго порядка с последовательной ООС, совпали с характеристиками, ранее исследованной активной цепи второго порядка RLC- типа, поскольку цепи имеют аналогичные структуры канонических передаточных функций.

Аналоговая система, заданная выражением передаточной функции. Аналоговая система второго порядка задана передаточной функцией вида

$$K_V(p)=K(p)=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}$$

и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

Приравнивая знаменатель нулю, получаем характеристическое уравнение

$$p \cdot (p+\alpha) = p^2 + \alpha \cdot p = 0,$$

корни которого, соответственно, равны $\alpha_1 = 0$ и $-\alpha_2 = -\alpha$.

Распишем коэффициент передачи по напряжению через отношение выходного напряжения к входному воздействию

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p \cdot (p+\alpha)}.$$

Из последнего выражения коэффициента передачи напряжения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot (p^2 + b_1 \cdot p + b_0)}{p \cdot (p+\alpha)}.$$

Найдем значения передаточной функции $\dfrac{V(p)}{E(p)} = K(p) = p \cdot V(p)$, при $p = 0$ и $p \to \infty$, принимая $E(p) = 1/p$. Так при $p = 0$, получаем $K(0) = \infty$, а при $p \to \infty$, имеем неопределенность вида ∞ / ∞. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получаем $K(\infty) = 1$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p) = 1/p \Leftrightarrow 1(t) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot (p^2 + b_1 \cdot p + b_0)}{p \cdot (p+\alpha)} = \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p^2 \cdot (p+\alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p^2 \cdot (p+\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left\langle (\alpha \cdot b_1 - b_0) + \alpha \cdot b_0 \cdot t + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\rangle.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$V(p) = \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p^2 \cdot (p+\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left\langle (\alpha \cdot b_1 - b_0) + \alpha \cdot b_0 \cdot t + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\rangle = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t = 0$, равно единице $h(0) = 1$, а установившееся значение переходной характеристики, при $t \to \infty$, равно бесконечности $h(\infty) = \infty$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p\to\infty} p\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} K(p) = 1;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p\to 0} p\cdot V(p) = \lim_{p\to 0} K(p) = \infty.$$

Выразим производную от выходной реакции

$$v'(t) = h'(t) = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle \alpha\cdot b_0 - \alpha\cdot(\alpha^2 - \alpha\cdot b_1 + b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle b_0 - (\alpha^2 - \alpha\cdot b_1 + b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $h'(0) = b_1 - \alpha$, а при $t \to \infty$, равно $h'(\infty) = b_0/\alpha$.

Заметим, что переходная характеристика, исследуемой аналоговой системы второго порядка, имеет более сложный вид, по сравнению с характеристиками цепей первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения переходной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1/p$, получаем

$$V(p) = \frac{E(p)\cdot(p^2 + b_1\cdot p + b_0)}{p\cdot(p+\alpha)} \to v(t) = \frac{1(t)\cdot[(\frac{d}{dt})^2 + b_1\cdot\frac{d}{dt} + b_0]}{\frac{d}{dt}\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha)} =$$

$$= \frac{1(t)\cdot[(\frac{d}{dt})^2 + b_1\cdot\frac{d}{dt} + b_0]}{(\frac{d}{dt})^2 + \alpha\cdot\frac{d}{dt}},$$

где $1(t) \Leftrightarrow 1/p$- единичный скачок или функция Хевисайда, как результат обратного преобразования Лапласа от $1/p$ в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$ и $d^2(1(t))/dt^2 = \delta'(0)$, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v''(t) + \alpha\cdot v'(t) = \delta'(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0.$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1/p}=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}\rightarrow\frac{v(t)}{1(t)}=\frac{(\frac{d}{dt})^2+b_1\cdot\frac{d}{dt}+b_0}{\frac{d}{dt}\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha)}=$$

$$=\frac{(\frac{d}{dt})^2+b_1\cdot\frac{d}{dt}+b_0}{(\frac{d}{dt})^2+\alpha\cdot\frac{d}{dt}}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt=\delta(0)$ и $d^2(1(t))/dt^2=\delta'(0)$, приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v''(t)+\alpha\cdot v'(t)=\delta'(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0.$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t)=-\alpha\cdot v'(t)+\delta'(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0.$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v'(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}=1;$$

$$v'(0)=\lim_{t\to_{+}0}v'(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p\cdot(p^2+b_1\cdot p+b_0)}{p\cdot(p+\alpha)}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p+\alpha}=\infty.$$

Заметим, что первое начальное значение, совпало с ранее найденным значением переходной, при $t=0$.

В последнем дробно-рациональном выражении степень числителя превысила степень знаменателя, и взятие предела дает значение ∞, не раскрывая ее составляющие. Раскрыть конечные и бесконечные составляющие этого предела можно путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока степень остатка не станет равной степени знаменателя. При этом, целые части от деления дают составляющие $\delta(0),\ \delta'(0),\ \delta''(0),\ \ldots$ и так далее, а остаток деления в пределе при $p \to \infty$ дает конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v'(0) = \lim_{t \to {}_+0} v'(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p + \alpha} =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\langle p + \frac{(b - \alpha) \cdot p + b_0}{p + \alpha} \right\rangle = \left\langle \delta(0) + (b_1 - \alpha) \right\rangle.$$

Отметим, что дифференцируя решение полученное операторным методом, мы теряли слагаемое $\delta(0)$. Эта ситуация может быть пояснена тем, что для нахождения производной следовало воспользоваться теоремой операционного исчисления о дифференцировании оригинала. Другими словами, мы математически определили производную выходной реакции, а не реакцию на производную, от входного воздействия, которая ищется по теореме о дифференцировании оригинала.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_+0)$$

для определения производной выходной реакции, то есть производной переходной характеристики, перепишем его в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v({}_+0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$v'(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 1$, вновь получаем выражение для производной переходной характеристики, дифференцируя переходную характеристику и учитывая ее начальное значение

$$v'(t) = g(t) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left\langle \alpha \cdot b_0 - \alpha \cdot (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\rangle + \delta(0) \cdot 1 =$$

$$= \delta(0) + \frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle b_0 - (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\rangle.$$

Так как начальное значение ненулевое, то производная переходной характеристики определенная таким образом содержит δ- функцию и соответствует импульсной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка.

Начальное значение производной переходной характеристики, определенной таким образом, соответствует значению импульсной характеристики, при $t = 0$, и равно $v'(0) = g(0) = \delta(0) + (b_1 - \alpha)$.

Таким образом, выражение, полученное по теореме о начальном значении производной функции, совпало с выражением начального значения производной переходной характеристики, полученной на основании теоремы о дифференцировании оригинала.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой аналоговой системы второго порядка, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t) = C_1(t)\cdot f_1(t) + C_2(t)\cdot f_2(t) = C_1(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} + C_2(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} =$$

$$= C_1(t) + C_2(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$ - неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка; $-\alpha_1 = 0,\ -\alpha_2 = -\alpha$ - корни характеристического уравнения.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{array}{l} C_1'(t)\cdot f_1(t) + C_2'(t)\cdot f_2(t) = 0 \\ C_1'(t)\cdot f_1'(t) + C_2'(t)\cdot f_2'(t) = F(t) \end{array},$$

где $F(t)$ - правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{array}{l} C_1'(t) + C_2'(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = 0 \\ 0 - C_2'(t)\cdot\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} = \delta'(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0 \end{array}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\alpha\cdot t} \\ 0 & -\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} \end{vmatrix} = -\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t};$$

$$C_1^{'} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha\cdot t} \\ F(t) & -\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{-[\delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0]\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle \delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0 \right\rangle;$$

$$C_2^{'} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F(t) \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{\delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0}{-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}} = -\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle \delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0 \right\rangle\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{1}{\alpha}\cdot\int\left\langle \delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0 \right\rangle dt = \frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle \delta(0) + b_1 + b_0\cdot t \right\rangle + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{-1}{\alpha}\cdot\int\left\langle \delta^{'}(0) + b_1\cdot\delta(0) + b_0 \right\rangle\cdot e^{\alpha\cdot t} dt = \frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle -\alpha + b_1\cdot\delta(0) + \frac{b_0}{\alpha}\cdot e^{\alpha\cdot t} \right\rangle + C_2,$$

где C_1, C_2 - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции и ее производной

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt = f(0);$$

$$\int f(t)\cdot\delta^{'}(0)\cdot dt = -f^{'}(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = \frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle \delta(0) + b_1 + b_0\cdot t \right\rangle + C_1 -$$

$$-\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle -\alpha + b_1\cdot\delta(0) + \frac{b_0}{\alpha}\cdot e^{\alpha\cdot t} \right\rangle\cdot e^{-\alpha\cdot t} + C_2\cdot e^{-\alpha\cdot t};$$

$$v(t) = \frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle -\delta(0) - b_1 - b_0\cdot t - \alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} + b_1\cdot e^{-\alpha\cdot t} + \frac{b_0}{\alpha} \right\rangle + C_1 + C_2\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v^{'}(t) = \frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle -\delta^{'}(0) - b_0 + \alpha^2\cdot e^{-\alpha\cdot t} - \alpha\cdot b_1\cdot e^{-\alpha\cdot t} \right\rangle - \alpha\cdot C_2\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0) = 1$ и $v^{'}(0) = \delta(0) + (b_1 - \alpha)$, при $t = 0$

$$v(0) = 1 = \frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle -\delta(0) - \alpha + \frac{b_0}{\alpha} \right\rangle + C_1 + C_2;$$

$$v'(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha)=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta'(0)-b_0+\alpha\cdot(\alpha-b_1)\right\rangle-\alpha\cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1+C_2=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta(0)+\frac{b_0}{\alpha}\right\rangle;$$

$$-\alpha\cdot C_2=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta'(0)+\alpha\cdot\delta(0)-b_0\right\rangle.$$

Из второго уравнения следует, что

$$C_2=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle\delta'(0)-\alpha\cdot\delta(0)+b_0\right\rangle.$$

Подставляя полученное значение C_2 в первое уравнение, получим

$$C_1=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta(0)+\frac{b_0}{\alpha}\right\rangle-C_2=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle-\alpha\cdot\delta(0)+b_0\right\rangle-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle\delta'(0)-\alpha\cdot\delta(0)+b_0\right\rangle=-\frac{\delta'(0)}{\alpha^2}.$$

Подстановка найденных констант в общее решение, дает

$$v(t)=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta(0)-b_1-b_0\cdot t-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}+b_1\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\frac{b_0}{\alpha}\right\rangle-$$

$$-\frac{\delta'(0)}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}\left\langle\delta'(0)-\alpha\cdot\delta(0)+b_0\right\rangle\cdot e^{-\alpha\cdot t};$$

$$v(t)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle\begin{matrix}\alpha\cdot\delta(0)+\alpha\cdot b_1+\alpha\cdot b_0\cdot t+\alpha\cdot(\alpha-b_1)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-b_0-\\-\delta'(0)+[\delta'(0)-\alpha\cdot\delta(0)]\cdot e^{-\alpha\cdot t}+b_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}\end{matrix}\right\rangle;$$

$$v(t)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle\begin{matrix}(\alpha\cdot b_1-b_0)+\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\\+\alpha\cdot\delta(0)\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})-\delta'(0)\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})\end{matrix}\right\rangle.$$

Так как $\delta(0)$ и $\delta'(0)$ существуют только при $t=0$ и при этом $(1-e^{-\alpha\cdot t})\big|_{t=0}=0$, то последние два слагаемых в выражении равны нулю.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t)=h(t)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle(\alpha\cdot b_1-b_0)+\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t), Y'(t), F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $Y(0)$ - начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

При этом подразумевается, что система дифференциальных уравнений не вырождена, то есть отсутствуют нулевые и кратные корни характеристического уравнения. **В данном случае один корень характеристического уравнения равен нулю, поэтому, для того чтобы воспользоваться методом Коши, положим корни отличными от нуля и разными. Далее, доведем аналитическое решение до конца, а затем совершим предельный переход к реальным значениям корней $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \alpha$.**

Реализуя данную идею, получим заново дифференциальное уравнение характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка, по трансформированной передаточной характеристике.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{V(p)}{1/p} = \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p \cdot (p + \alpha)} \Rightarrow \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \to$$

$$\to \frac{v(t)}{1(t)} = \frac{(\frac{d}{dt})^2 + b_1 \cdot \frac{d}{dt} + b_0}{(\frac{d}{dt} + \alpha_1) \cdot (\frac{d}{dt} + \alpha_2)} = \frac{(\frac{d}{dt})^2 + b_1 \cdot \frac{d}{dt} + b_0}{(\frac{d}{dt})^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \frac{d}{dt} + \alpha_1 \cdot \alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$ и $d^2(1(t))/dt^2 = \delta'(0)$, приходим к полной форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = \delta'(0) + b_1 \cdot \delta(0) + b_0.$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + \delta'(0) + b_1 \cdot \delta(0) + b_0.$$

Интегрирование полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, выполним с прежними, то есть истинными начальными условиями $v(0)=1$ и $v'(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha_2)$.

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t)=y_1=v(t)\,;\; y_2=y_1'=v'(t),\ \text{то есть}\ y_2'=v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \delta'(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0 \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t)=A\cdot Y(t)+F(t),$$

где

$$Y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix};\; Y'(t)=\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ \delta'(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0 \end{bmatrix};\; A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A=H\cdot\Lambda\cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A)=H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A-\Lambda]=0;\; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\lambda+\alpha_1\cdot\alpha_2=0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из модифицированной передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A - \Lambda_i] \cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i - диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$ - алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A - \Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 & -(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A \cdot t} = H \cdot e^{\Lambda \cdot t} \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1 \cdot t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix};$$

$$e^{A \cdot t} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} & -e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (e^{-\alpha_1 \cdot t} - e^{-\alpha_2 \cdot t}) & \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A \cdot (t - \tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta(0) + (b_1 - \alpha_2) \end{bmatrix}; \; F(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta'(0) + b_1 \cdot \delta(0) + b_0 \end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t)=v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}+\\+(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot[\delta(0)+(b_1-\alpha_2)]+\\+\int\limits_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot(\delta'(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0)\,d\tau\end{array}\right\rangle.$$

Раскрывая интеграл и приводя подобные, получаем

$$v(t)=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\underset{t>0}{+}\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}+\\+(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot[\delta(0)+(b_1-\alpha_2)]\underset{t>0}{-}\\-\alpha_1+\alpha_2+b_1\cdot(-1+1)\underset{t=0}{-}\\-b_0\cdot(1-e^{-\alpha_1\cdot t})/\alpha_1+b_0\cdot(1-e^{-\alpha_2\cdot t})/\alpha_2\\ \qquad\qquad\qquad t>0\end{array}\right\rangle.$$

При $\alpha_1\to 0$ и $\alpha_2\to\alpha$ и $t\geq 0$ выражение перепишется в виде

$$v(t)=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle\begin{array}{l}\alpha+(1-e^{-\alpha\cdot t})\cdot[\delta(0)+(b_1-\alpha)]+\\+\lim\limits_{\alpha_1\to 0}\dfrac{b_0}{\alpha_1}\cdot(1-e^{-\alpha_1\cdot t})-\dfrac{b_0}{\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})\end{array}\right\rangle.$$

Учитывая тот факт, что $\lim\limits_{\alpha_1\to 0}\dfrac{b_0}{\alpha_1}\cdot(1-e^{-\alpha_1\cdot t})=b_0\cdot t$ и, приводя слагаемые к общему знаменателю, получаем

$$v(t)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle\begin{array}{l}(\alpha\cdot b_1-b_0)+\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\\+\alpha\cdot\delta(0)\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})\end{array}\right\rangle.$$

Так как $\delta(0)$ существует только при $t=0$ и при этом $(1-e^{-\alpha\cdot t})\underset{t=0}{}=0$, последнее слагаемое тождественно равно нулю.

В результате, окончательно получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка с учетом начальных условий, в виде

$$v(t)=h(t)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left\langle(\alpha\cdot b_1-b_0)+\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle.$$

Как видим, полученное выражение переходной характеристики методом Коши, как реакции на единичный скачок на входе, полностью совпадает с решениями, полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс

$$E(p)=1 \Leftrightarrow \delta(0)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot(p^2+b_1\cdot p+b_0)}{p\cdot(p+\alpha)}=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}.$$

Переходя к правильной дроби, путем деления числителя на знаменатель и, используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}=1+\frac{(b_1-\alpha)\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta(0)+\frac{b_1-\alpha}{\alpha}\left\langle \frac{b_0}{b_1-\alpha}+[\alpha-\frac{b_0}{b_1-\alpha}]\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle =$$

$$=\delta(0)+\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle b_0-(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$V(p)=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}=1+\frac{(b_1-\alpha)\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta(0)+\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle b_0-(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle = v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае начальное значение, при $t=0$, равно $g(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha)$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно $g(\infty)=b_0/\alpha$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=g(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=\delta(0)+(b_1-\alpha);$$

$$v(\infty)=g(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=b_0/\alpha.$$

Отметим также, что импульсная характеристика может быть получена по переходной характеристике на основании теоремы о дифференцировании оригинала

$$v'(t)\Rightarrow p\cdot V(p)-v(_{+}0),$$

так как входное воздействие при исследовании импульсной характеристики, есть производная от входного воздействия при исследовании переходной характеристики. Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v(_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 1$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot 1 = \delta(0) + \frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle b_0 - (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \right\rangle.$$

Поскольку начальное значение не равно нулю, то импульсная характеристика содержит δ - функцию.

Отметим, что начальное значение импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g(0) = \delta(0) + (b_1 - \alpha)$, а установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно $g(\infty) = b_0 / \alpha$.

Выразим производную от выходной реакции

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) = \delta^{'}(0) + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $g^{'}(0) = \delta^{'}(0) + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0)$, а при $t \to \infty$, равно $g^{'}(\infty) = 0$.

Заметим, что здесь мы математически определили производную выходной реакции, а не реакцию на производную, от входного воздействия, которая ищется по теореме о дифференцировании оригинала.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v(_{+}0)$$

для определения производной выходной реакции, то есть производной импульсной характеристики, перепишем его в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v(_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) + \delta(0) \cdot g(_{+}0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $g(_{+}0) = \delta(_{+}0) + (b_1 - \alpha)$, и тот факт, что $\delta(0) \cdot \delta(_{+}0) = 0$, в силу их ε-смещения, вновь получаем выражение для производной импульсной характеристики, дифференцируя импульсную характеристику и, учитывая ее начальное значение

$$v'(t) = g'(t) + \delta(0) \cdot g({}_{+}0) =$$

$$= \delta'(0) + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0) \cdot (b_1 - \alpha) =$$

$$= \delta'(0) + \delta(0) \cdot (b_1 - \alpha) + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0) \cdot e^{-\alpha \cdot t} .$$

Так как импульсная характеристика содержала δ- функцию, то ее производная содержит производную δ- функции, а так как начальное значение импульсной характеристики ненулевое, то производная импульсной характеристики содержит δ- функцию.

Начальное значение производной импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g'(0) = \delta'(0) + \delta(0) \cdot (b_1 - \alpha) + (\alpha^2 - \alpha \cdot b_1 + b_0)$.

Заметим, что импульсная характеристика, исследуемой аналоговой системы второго порядка, как и переходная характеристика, имеет более сложный вид, по сравнению с характеристиками цепей первого порядка.

Далее, переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения импульсной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot (p^2 + b_1 \cdot p + b_0)}{p \cdot (p + \alpha)} \to v(t) = \frac{\delta(0) \cdot [(\frac{d}{dt})^2 + b_1 \cdot \frac{d}{dt} + b_0]}{\frac{d}{dt} \cdot (\frac{d}{dt} + \alpha)} =$$

$$= \frac{\delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0)}{(\frac{d}{dt})^2 + \alpha \cdot \frac{d}{dt}},$$

где $\delta(0) \Leftrightarrow 1$- дельта функция, как результат обратного преобразования Лапласа от 1 в области изображений; $\delta'(0) \Leftrightarrow p$- производная дельта функции, как результат обратного преобразования Лапласа от p в области изображений; $\delta''(0) \Leftrightarrow p^2$- вторая производная дельта функции, как результат обратного преобразования Лапласа от p^2 в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v''(t) + \alpha \cdot v'(t) = \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) .$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1}=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}\to\frac{v(t)}{\delta(0)}=\frac{(\frac{d}{dt})^2+b_1\cdot\frac{d}{dt}+b_0}{\frac{d}{dt}\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha)}=$$

$$=\frac{\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0)}{(\frac{d}{dt})^2+\alpha\cdot\frac{d}{dt}}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d^2(\delta(0))/dt^2=\delta^{''}(0)$, $d(\delta(0))/dt=\delta^{'}(0)$ и $\delta(0)\Leftrightarrow 1$, приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v^{''}(t)+\alpha\cdot v^{'}(t)=\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{''}(t)=-\alpha\cdot v^{'}(t)+\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v^{'}(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться модифицированной теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_+0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p+\alpha};$$

$$v^{'}(0)=\lim_{t\to_+0}v^{'}(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^3+b_1\cdot p^2+b_0\cdot p}{p+\alpha}.$$

Отметим, что в обоих дробно-рациональных выражениях степень числителя превышает степень знаменателя, и взятие предела дает значение ∞, не раскрывая ее составляющие. Раскрыть конечные и бесконечные составляющие этого предела можно путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока степень остатка не станет равной степени знаменателя. При этом, целые части от деления дают составляющие

$\delta(0),\ \delta^{'}(0),\ \delta^{''}(0),\ \ldots$ и так далее, а остаток деления в пределе при $p \to \infty$ дает конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2 + b_1 \cdot p + b_0}{p + \alpha} =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\langle p + \frac{(b_1 - \alpha) \cdot p + b_0}{p + \alpha} \right\rangle = \delta(0) + (b_1 - \alpha);$$

$$v^{'}(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v^{'}(t) = \lim_{p \to \infty} p^2 \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^3 + b_1 \cdot p^2 + b_0 \cdot p}{p + \alpha} =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left\langle p^2 + (b_1 - \alpha) \cdot p + \frac{b_0 - \alpha \cdot (b_1 - \alpha) \cdot p}{p + \alpha} \right\rangle =$$

$$= \delta^{'}(0) + (b_1 - \alpha) \cdot \delta(0) + [b_0 - \alpha \cdot (b_1 - \alpha)].$$

Таким образом, полученные выражение совпали с начальными значениями импульсной характеристики и ее производной, полученными на основании теоремы о дифференцировании оригинала.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика, исследуемой аналоговой системы второго порядка, на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t) = C_1(t) \cdot f_1(t) + C_2(t) \cdot f_2(t) = C_1(t) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2(t) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$

$$= C_1(t) + C_2(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$ - неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка; $-\alpha_1 = 0,\ -\alpha_2 = -\alpha$ - корни характеристического уравнения.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{aligned} &C_1^{'}(t) \cdot f_1(t) + C_2^{'}(t) \cdot f_2(t) = 0 \\ &C_1^{'}(t) \cdot f_1^{'}(t) + C_2^{'}(t) \cdot f_2^{'}(t) = F(t) \end{aligned},$$

где $F(t)$ - правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{array}{l} C_1'(t) + C_2'(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 0 \\ 0 - C_2'(t) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) \end{array}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\alpha \cdot t} \\ 0 & -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \end{vmatrix} = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t};$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha \cdot t} \\ F(t) & -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{-[\delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0)] \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{-\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) \right\rangle;$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F(t) \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{\delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0)}{-\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) \right\rangle \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \int \left\langle \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) \right\rangle dt = \frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle \delta'(0) + b_1 \cdot \delta(0) + b_0 \right\rangle + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{-1}{\alpha} \cdot \int \left\langle \cdot \delta(0) \right\rangle \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = \frac{-1}{\alpha} \cdot \left\langle \alpha^2 + b_1 \cdot \alpha + b_0 \right\rangle + C_2,$$

где C_1, C_2 - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции и ее производных

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0);$$

$$\int f(t) \cdot \delta'(0) \cdot dt = -f'(0);$$

$$\int f(t) \cdot \delta''(0) \cdot dt = f''(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle \delta''(0) + b_1 \cdot \delta'(0) + b_0 \cdot \delta(0) \right\rangle + C_1 -$$

$$-\frac{1}{\alpha} \cdot \left\langle \alpha \cdot (\alpha - b_1) + b_0 \right\rangle \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t};$$

$$v(t)=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta^{'}(0)-b_1\cdot\delta(0)-b_0+\alpha\cdot(\alpha-b_1)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+b_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle+$$

$$+C_1+C_2\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v^{'}(t)=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta^{''}(0)-b_1\cdot\delta^{'}(0)-\alpha^2\cdot(\alpha-b_1)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot b_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle-\alpha\cdot C_2\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha)$ и $v^{'}(0)=\delta^{'}(0)+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha\cdot(b_1-\alpha)]$, при $t=0$

$$v(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha)=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta^{'}(0)-b_1\cdot\delta(0)-\alpha\cdot(b_1-\alpha)\right\rangle+C_1+C_2;$$

$$v^{'}(0)=\delta^{'}(0)+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha\cdot(b_1-\alpha)]=$$

$$=\frac{-1}{\alpha}\cdot\left\langle-\delta^{''}(0)-b_1\cdot\delta^{'}(0)+\alpha^2\cdot(\alpha-b_1)-\alpha\cdot b_0\right\rangle-\alpha\cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1+C_2=\frac{-\delta^{'}(0)}{\alpha}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha}+(b_1-\alpha);$$

$$-\alpha\cdot C_2=\frac{-\delta^{''}(0)}{\alpha}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha}+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0).$$

Из второго уравнения следует, что

$$C_2=\frac{\delta^{''}(0)}{\alpha^2}+\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha^2}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha}.$$

Подставляя полученное значение C_2 в первое уравнение, получим

$$C_1=\frac{-\delta^{'}(0)}{\alpha}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha}+(b_1-\alpha)-C_2=$$

$$=\frac{-\delta^{'}(0)}{\alpha}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha}+(b_1-\alpha)-\frac{\delta^{''}(0)}{\alpha^2}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha^2}+\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha};$$

$$C_1=\frac{-\delta^{''}(0)}{\alpha^2}-\frac{b_1\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha^2}+(b_1-\alpha).$$

Подстановка найденных констант в общее решение, дает

$$v(t)=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle\delta^{'}(0)+b_1\cdot\delta(0)+b_0+\alpha\cdot(b_1-\alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+b_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle-$$

$$-\frac{\delta^{''}(0)}{\alpha^2}-\frac{b_1\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha^2}+(b_1-\alpha)+$$

$$+\left\langle\frac{\delta^{''}(0)}{\alpha^2}+\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta^{'}(0)}{\alpha^2}-\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)}{\alpha}\right\rangle\cdot e^{-\alpha\cdot t};$$

$$v(t)=\frac{\delta^{''}(0)\cdot(e^{-\alpha\cdot t}-1)}{\alpha^2}+\frac{(b_1-\alpha)\cdot\delta^{'}(0)\cdot(e^{-\alpha\cdot t}-1)}{\alpha^2}-\frac{b_1\cdot\delta(0)\cdot(e^{-\alpha\cdot t}-1)}{\alpha}+$$

$$+\delta(0)+\frac{[b_0-(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)]\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{\alpha}.$$

Так как $\delta(0)$, $\delta^{'}(0)$ и $\delta^{''}(0)$ существуют только при $t=0$ и при этом $(e^{-\alpha\cdot t}-1)\underset{t=0}{=}0$, то первые три слагаемых в выражении равны нулю.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t)=g(t)=\delta(0)+\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle b_0-(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y^{'}(t)=A\cdot Y(t)+F(t),$$

где $Y(t),\ Y^{'}(t),\ F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t)=e^{A\cdot t}\cdot Y(0)+\int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A\cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

При этом подразумевается, что система дифференциальных уравнений не вырождена, то есть отсутствуют нулевые и кратные корни характеристического уравнения. **В данном случае один корень характеристического уравнения равен нулю, поэтому для того чтобы воспользоваться методом Коши положим корни отличными от нуля и разными. Далее, доведем аналитическое решение до конца, а затем совершим предельный переход к реальным значениям корней $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\alpha$.**

Реализуя данную идею, получим заново дифференциальное уравнение характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка, по трансформированной передаточной характеристике.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1}=\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}\Rightarrow\frac{p^2+b_1\cdot p+b_0}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{v(t)}{\delta(0)}=\frac{(\frac{d}{dt})^2+b_1\cdot\frac{d}{dt}+b_0}{(\frac{d}{dt}+\alpha_1)\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha_2)}=\frac{(\frac{d}{dt})^2+b_1\cdot\frac{d}{dt}+b_0}{(\frac{d}{dt})^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\frac{d}{dt}+\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и, учитывая, что $d(\delta(0))/dt=\delta^{'}(0)$ и $d^2(\delta(0))/dt^2=\delta^{''}(0)$, приходим к полной форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения, исследуемой аналоговой системы второго порядка

$$v^{''}(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{''}(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)+\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0).$$

Интегрирование полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, выполним с прежними, то есть истинными начальными условиями $v(0)=\delta(0)+(b_1-\alpha_2)$ и $v^{'}(0)=\delta^{'}(0)+(b_1-\alpha_2)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha_2\cdot(b_1-\alpha_2)]$, при $t=0$.

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t)=y_1=v(t);\ y_2=y_1^{'}=v^{'}(t),\text{ то есть }y_2^{'}=v^{''}(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix}y_1^{'}\\y_2^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\alpha_1\cdot\alpha_2&-(\alpha_1+\alpha_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\delta^{''}(0)+b_1\cdot\delta^{'}(0)+b_0\cdot\delta(0)\end{bmatrix}$$

или

$$Y^{'}(t)=A\cdot Y(t)+F(t),$$

где

$$Y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v(t)\\v^{'}(t)\end{bmatrix};\ Y^{'}(t)=\begin{bmatrix}y_1^{'}(t)\\y_2^{'}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v^{'}(t)\\v^{''}(t)\end{bmatrix};$$

$$F(t)=\begin{bmatrix}0\\ \delta''(0)+b_1\cdot\delta'(0)+b_0\cdot\delta(0)\end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2)\end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A=H\cdot\Lambda\cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A)=H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A-\Lambda]=0;\ \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2)-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\lambda+\alpha_1\cdot\alpha_2=0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из модифицированной передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_2\end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A-\Lambda_i]\cdot h_i=0$, по известны собственным значениям, где Λ_i - диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$ - алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A-\Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H=\begin{bmatrix}-(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_1\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha_2\\ -1 & -1/\alpha_1\end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t}=H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_1\\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-\alpha_1\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1/\alpha_2\\ -1 & -1/\alpha_1\end{bmatrix};$$

$$e^{A\cdot t}=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}\\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0)=\begin{bmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v(0)\\ v'(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta(0)+(b_1-\alpha_2)\\ \delta'(0)+(b_1-\alpha_2)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha_2\cdot(b_1-\alpha_2)]\end{bmatrix};$$

$$F(\tau)=\begin{bmatrix}0\\ \delta''(0)+b_1\cdot\delta'(0)+b_0\cdot\delta(0)\end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t)=v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t)=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{matrix}(-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot[\delta(0)+(b_1-\alpha_2)]+\\ +(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot\\ \cdot\left\langle\delta'(0)+(b_1-\alpha_2)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha_2\cdot(b_1-\alpha_2)]\right\rangle+\\ +\int_0^t\left\langle\begin{matrix}(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot\\ \cdot(\delta''(0)+b_1\cdot\delta'(0)+b_0\cdot\delta(0))\end{matrix}\right\rangle d\tau\end{matrix}\right\rangle.$$

Раскрывая интеграл и, приводя подобные, получаем

$$v(t)=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle\begin{matrix}(-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot[\delta(0)+(b_1-\alpha_2)]+\\ +(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})\cdot\\ \cdot\left\langle\delta'(0)+(b_1-\alpha_2)\cdot\delta(0)+[b_0-\alpha_2\cdot(b_1-\alpha_2)]\right\rangle+\\ +(-\alpha_1^2+b_1\cdot\alpha_1-b_0)+(\alpha_2^2-b_1\cdot\alpha_2+b_0)\end{matrix}\right\rangle.$$

При $\alpha_1\to 0$ и $\alpha_2\to\alpha$ выражение перепишется в виде

$$v(t)=\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle\begin{array}{l}\alpha\cdot[\delta(0)+\underset{t>0}{(b_1-\alpha)}]+\\ +[\delta'(0)+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)+b_0-\alpha\cdot(b_1-\alpha)]\cdot\underset{t>0}{(1-e^{-\alpha\cdot t})}-\\ \underset{t=0}{-b_0+\alpha\cdot(b_1-\alpha)+b_0}\end{array}\right\rangle;$$

$$v(t)=\left\langle\begin{array}{l}\delta(0)+\underset{t>0}{(b_1-\alpha)}+\dfrac{[\delta'(0)+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)]\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})}{\alpha}+\\ \underset{t>0}{\dfrac{b_0}{\alpha}-(b_1-\alpha)}-\underset{t>0}{\dfrac{[b_0-\alpha\cdot(b_1-\alpha)]\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{\alpha}}\underset{t=0}{-\dfrac{b_0}{\alpha}+(b_1-\alpha)+\dfrac{b_0}{\alpha}}\end{array}\right\rangle.$$

Приводя подобные и, сращивая слагаемые по времени, получаем

$$v(t)=\delta(0)+\frac{[\delta'(0)+(b_1-\alpha)\cdot\delta(0)]\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})}{\alpha}+\frac{b_0}{\alpha}-\frac{[b_0-\alpha\cdot(b_1-\alpha)]\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{\alpha}.$$

Так как $\delta(0)$ и $\delta'(0)$ существуют только при $t=0$ и при этом $\underset{t=0}{(1-e^{-\alpha\cdot t})}=0$, второе слагаемое тождественно равно нулю.

В результате, окончательно получаем решение, соответствующее переходной характеристике, исследуемой аналоговой системы второго порядка с учетом начальных условий, в виде

$$v(t)=g(t)=\delta(0)+\frac{1}{\alpha}\cdot\left\langle b_0-(\alpha^2-\alpha\cdot b_1+b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle.$$

Как видим, полученное методом Коши решение совпадает с предыдущими решениями операторным методом и методом Лагранжа и представляет импульсную характеристику, исследуемой аналоговой системы второго порядка, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как уже отмечалось, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод отличается своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализуем и прост для реализации в современных системах аналитических исследований. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик пассивных и активных простых RC - и RL - цепей второго порядка, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

В заключение, еще раз обратим внимание, на целесообразность приведения передаточных характеристик исследуемых цепей к нормированному каноническому виду, что существенно упрощает анализ и позволяет сразу отнести цепь к определенному классу цепей, характеристики которых совпадают с точностью до множителей.

Заключение

Приведенные в учебно-методическом пособии примеры подробно иллюстрируют предлагаемую методику исследования временных характеристик аналоговых устройств.

В пособии должное внимание уделено связи переходных и импульсных характеристик и методам формирования и интегрирования соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важным этапом исследования временных характеристик реальных аналоговых устройств по заданному схемному решению является приведение передаточной функции к нормированному каноническому виду, что позволяет существенно упростить и унифицировать последующие аналитические выкладки.

Приведенные в пособии методы достаточно продуктивны и универсальны. Операторный метод наиболее краток, однако трудно формализуем, предполагает наличие таблиц обратного преобразования Лапласа и ограничен воздействиями, для которых определено преобразование Лапласа. Метод Коши наиболее просто формализуем на произвольный случай и реализуем в обобщенной векторно-матричной форме. Метод Лагранжа по возможности формализации занимает промежуточное положение между операторным методом и методом Коши, однако является базовым в аналитическом плане.

Временные характеристики как реакции на единичный скачок либо единичный импульс характеризуют быстродействие и время релаксации аналоговых устройств, и позволяет оценить скорость их реакции на реальный сигнал.

Предпринятое исследование убедительно показало плодотворность методов, изучаемых в дисциплине **«Прикладные математические методы в радиотехнике».**

Рассмотренные в пособии методы анализа переходных и импульсных характеристик достаточно универсальны и могут быть рекомендованы для использования как в учебном процессе, так и для исследования реакций аналоговых устройств на произвольное воздействие с использованием современных систем для инженерных и научных исследований типа **MathCad, Maple-V, MatLab.**

Полученные в методическом пособии соотношения использованы в лабораторных работах по определению переходных и импульсных характеристик простых аналоговых устройств по реакции на единичный скачок и единичный импульс.

Список рекомендуемых источников

1. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971.- 808 с., 1974.- 754 с.
2. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова, Изд. 2-е, доп., в 2-х томах – Т. 1. - М.: Высшая школа, 1977.- 366 с.; Т. 2. - М.: Высшая школа, 1977.- 455 с.
3. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). – М.: Наука, 1970.- 620 с.
4. Овчиннников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1989.- 679 с.
5. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики (дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения). – М.: Высшая школа, 1974.- 367 с.
6. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.- 376 с.
7. Кологривов В.А. Руководство к лабораторным работам по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Для студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 60 с.
8. Кологривов В.А. Определение частотных характеристик аналоговых и дискретных устройств. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Для студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2005.- 54 с.