Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

Кологривов В.А.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕКТНЫХ И ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

***Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям и самостоятельной работе
по дисциплине
“Прикладные математические методы в радиотехнике”***
для студентов радиотехнических специальностей

2012

Кологривов В.А.

Анализ временных характеристик дискретных и цифровых устройств. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. - 132 с.

Учебное методическое пособие посвящено иллюстрации предлагаемой методики анализа временных характеристик на примере простых дискретных линейных устройств первого и второго порядков.

В пособии подробно проиллюстрирована методика определения передаточных, переходных и импульсных характеристик простых дискретных устройств.

Предлагаемая методика основана на широком привлечении векторно-матричного аппарата, исчисления конечных разностей, Z-преобразования и теории разностных уравнений.

Пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы студентов очной формы обучения высшего специального образования, по направлениям: «Радиотехника», «Телекоммуникации» и др.

Аннотация

Методическое пособие “***Анализ временных характеристик дискретных и цифровых устройств”*** для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине ***“Прикладные математические методы в радиотехнике”*** посвящено иллюстрации методов анализа временных характеристик на примере простых дискретных линейных устройств и систем первого и второго порядков.

В отличие от аналоговых устройств дискретные и цифровые устройства задаются обычно либо системной функцией (характеристикой), либо функциональной схемой. По функциональной схеме достаточно просто определяются как системная функция, так и соответствующее разностное уравнение.

Временные характеристики дискретных и цифровых устройств определяются либо обратным Z- преобразованием изображения выходной реакции, получаемого из системной функции, либо из решения соответствующего разностного уравнения, получаемого путем перехода от системной функции.

Основное внимание в пособии уделено методам определения реакций дискретных и цифровых устройств на тестовые входные воздействия. Для определения реакций дискретных и цифровых устройств на последовательность единичных δ- импульсов и одиночный единичный δ- импульс использован как традиционный операторный метод на основе Z- преобразования, так и методы, основанные на формировании и решении разностных уравнений.

В пособии подробно рассмотрены многочисленные примеры простых дискретных устройств, при воздействии на них последовательности единичных δ- импульсов и одиночного единичного δ- импульса. Рассмотренные примеры анализа реакций устройств призваны проиллюстрировать прикладные возможности математических методов, изучаемых в дисциплине.

Рассмотренные вопросы анализа основных характеристик дискретных и цифровых устройств призваны расширить кругозор студентов, и будут востребованы при изучении специальных дисциплин радиотехнического профиля.

Методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы предназначено для студентов радиотехнических специальностей.

Содержание

Введение

Цель методического пособия: Проиллюстрировать методы определения временных характеристик, как реакций дискретных и цифровых устройств на соответствующие входные воздействия. Показать тесную взаимосвязь временных характеристик и методов временного анализа дискретных и цифровых устройств.

Задачи методического пособия: Проиллюстрировать прикладные возможности математического аппарата изучаемого в дисциплине ***"Прикладные математические методы в радиотехнике"***. На конкретных примерах дискретных устройств, заданных системной функцией, продемонстрировать методику и технику определения временных характеристик по реакции на тестовые входные воздействия.

Теоретическая часть. Основные определения. Используемый математический аппарат. Теоретической базой для методического пособия являются такие разделы математики как функции действительного и комплексного переменного, исчисление конечных разностей, Z-преобразование, линейная алгебра, разностные уравнения. Из теории линейных электрических цепей и сигналов используются понятия электрических моделей и определения основных характеристик радиотехнических цепей.

Наиболее общей характеристикой дискретных и цифровых устройств, не связанной с конкретным типом входного воздействия, является **системная характеристика (функция),** определяемая, как отношение изображений реакции и входного воздействия. Системные характеристики дискретных и цифровых устройств обычно определяются по функциональным схемам устройств.

Для описания поведения реакции устройств в частотной области, как комплексной функции частоты используется понятие **частотной характеристики (ЧХ).** Модуль частотной характеристики соответствует **амплитудно-частотной характеристике (АЧХ),** а аргумент частотной характеристики, выраженный в градусах, соответствует **фазочастотной характеристике (ФЧХ).** Частотную характеристику обычно получают формально из системной характеристики путем замены переменной вида $z \to e^{j\cdot\omega\cdot T}$, где ω- круговая частота, T- период дискретизации по времени. Так как функция $e^{j\cdot\omega\cdot T} = \cos(\omega \cdot T) + j \cdot \sin(\omega \cdot T)$ периодична, **частотные характеристики дискретных и цифровых устройств периодически повторяются по оси частот,** и период повторения определяется интервалом дискретизации T. Подобное формальное определение частотной характеристики не является конструктивным, так как обычно характеристики соответствуют реакции устройства на определенное тестовое воздействие при исходном состоянии покоя. Под **состоянием покоя** понимается полное установление реакции устройства на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников возмущений.

В изучаемой дисциплине частотная характеристика дискретных и цифровых устройств определяется конструктивно, как установившаяся реакция устройства на единичное дискретное гармоническое воздействие при исходном состоянии покоя. Такое определение частотной характеристике соответствует практике измерения частотных характеристик устройств.

Во временной области устройства характеризуются переходной и импульсной характеристиками, определяющими их быстродействие и время релаксации.

Переходная характеристика дискретного и цифрового устройства, находящегося в исходном состоянии покоя, определяется как его **реакция на последовательность единичных δ - импульсов $1(k \cdot T) = 1_k$.**

Импульсная характеристика дискретного и цифрового устройства, находящегося в исходном состоянии покоя, определяется как его **реакция на одиночный единичный δ - импульс $1(0 \cdot T) = 1_0$.**

Переходные и импульсные характеристики дискретных и цифровых устройств обычно определяются из решения соответствующего разностного уравнения, записанного относительно выходной переменной.

Операторный метод позволяет, непосредственно из системной характеристики, определить изображение выходной реакции на заданное воздействие, а, используя обратное Z- преобразование, получить оригинал реакции, то есть соответствующую характеристику устройства.

Наиболее **распространенными математическими моделями аналоговых устройств** во временной области **являются разностные уравнения либо системы разностных уравнений.** Для получения математической модели устройства во временной области в виде разностного уравнения, используется переход от системной характеристики, к неоднородному разностному уравнению, правая часть которого определяется внешним воздействием.

Переход от системной характеристики к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных условий, путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а переменной z оператором сдвига (упреждения) E. Позже, при решении разностного уравнения, используются истинные начальные условия.

Начальные условия могут быть определены, в общем случае, либо по изображению выходной реакции из теоремы операционного исчисления о начальном значении функции оригинала, либо по исходному разностному уравнению путем задания соответствующего номера отсчета.

Характеристическое уравнение определяется либо знаменателем системной характеристики, приравненного нулю, либо левой однородной частью разностного уравнения при замене оператора сдвига соответствующей степенью переменной. Характеристическое уравнение представляет собой степенной полином n- го порядка и имеет в общем случае n корней, среди которых могут быть равные нулю и кратные.

Фундаментальные решения однородного разностного уравнения определяются корнями характеристического уравнения d_i в виде степенных функций вида d_i^k. Для корня кратности m, фундаментальная система включает набор функций вида $d_i^k,\ k \cdot d_i^k,\ k^2 \cdot d_i^k,\ \ldots,\ k^{m-1} \cdot d_i^k$.

Из набора фундаментальных решений и их сдвигов до $n-1$- го порядка построчно строится **определитель Касорати.** Отличие от нуля определителя Касорати свидетельствует о **независимости фундаментальных решений.**

Наиболее общими методами решения неоднородных разностных уравнений, по аналогии с методами интегрирования дифференциальных уравнений, являются - метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и представление решения в форме Коши (метод Коши).

Метод Лагранжа задает общее решение неоднородного уравнения линейной суперпозицией варьируемых постоянных (неизвестных функций) и фундаментальных решений соответствующего однородного уравнения. Для нахождения варьируемых постоянных задан алгоритм построения **определяющей системы уравнений Лагранжа.**

Определяющая система уравнений Лагранжа образуется путем наложения ограничений, на рост порядка разности варьируемых постоянных, при определении сдвига предложенного общего решения, с целью подстановки в исходное разностное уравнение. Таких ограничений для исходного разностного уравнения n- го порядка оказывается ровно $n-1$. Последнее уравнение определяющей системы уравнений получается в результате подстановки сдвигов предполагаемого общего решения, с учетом наложенных ограничений, в исходное разностное уравнение и сокращения его однородной части. В результате определяющая система уравнений Лагранжа представляет собой линейную, относительно разностей варьируемых постоянных, алгебраическую систему уравнений. Решение определяющей системы, например методом Крамера, позволяет определить выражения разностей варьируемых постоянных. Раскрывая, обратный разностный оператор суммой функциональной последовательности, с точностью до постоянных суммирования, находим варьируемые постоянные. Постоянные суммирования и, соответственно, частное решение исходного разностного уравнения определяются из независимых дополнительных условий, например, начальных условий.

Метод Коши позволяет непосредственно записать частное решение разностного уравнения либо системы разностных уравнений первого порядка, используя начальные условия.

При решении разностного уравнения n- го порядка осуществляется переход к эквивалентной системе n уравнений первого порядка. Решение системы разностных уравнений первого порядка записывается через степенную функцию от матрицы коэффициентов системы.

Функция от матричного аргумента предполагает предварительное решение **проблемы собственных значений и векторов.**

1 Исследование временных характеристик устройств и систем первого порядка

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик рассмотрим несколько примеров простейших устройств первого порядка, заданных системной функцией.

В качестве основных временных характеристик дискретных устройств и систем рассмотрим переходные и импульсные характеристики. Напомним, что переходная и импульсная характеристики определяются, как реакция систем, соответственно, на последовательность единичных δ - импульсов 1_k и на одиночный единичный δ - импульс 1_0, при исходном состоянии покоя. В качестве реакции рассмотрим напряжение на выходе дискретных устройств и систем первого порядка.

Пример А. Системная (передаточная) характеристика дискретной системы имеет вид

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z}{z-d}.$$

Требуется определить переходную и импульсную характеристики системы.

Выразим изображение выходного напряжения дискретной системы

$$V_z = E_z \cdot \frac{z}{z-d}.$$

Приравнивая знаменатель системной функции к нулю

$$z - d = 0,$$

получим характеристическое уравнение системы с корнем равным $z_1 = d$.

Определение переходной характеристики. Переходная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на последовательность единичных δ - импульсов 1_k, при $k \geq 0$ и периодом T.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z - преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения получаем в виде

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-d}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходного напряжения, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-d} \Rightarrow v_k = \frac{1 - d \cdot e^{-\alpha \cdot t}}{1-d} = \frac{1 - d^{k+1}}{1-d} = h_k,$$

где $k = t/T$; $\alpha = -\ln(d)/T$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; T- период последовательности единичных δ - импульсов.

Отметим, что при $k = 0$ получаем $v_0 = h_0 = 1$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений.

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{z}{z-d} \Rightarrow v_k = 1_k \cdot \frac{E}{E-d} = \frac{1_{k+1}}{E-d},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_{k+1} = f_k .$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z}{z-d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{E}{E-d} .$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_{k+1} = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} = d \cdot v_k + f_k .$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-d} \right] = 1.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k. Так, при $k = -1$, получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_0 .$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 1$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k ,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее найти варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_{k+1}}{d^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1_n}{d^n} \right] + c_1,$$

где c_1 - новая постоянная суммирования.

Учтем, что при всех значениях переменной n, значение числителя равно 1 и может быть вынесено за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$. Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{d^k} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{d} - 1 \right)} = \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)},$$

находим выражение для варьируемой постоянной $c_{1,k}$

$$c_{1,k} = (1+b) \cdot \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)} + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = \frac{(d^k - 1)}{d-1} + c_1 \cdot d^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Учитывая начальное значение $v_0 = 1$, из общего решения при $k = 0$, получаем

$$v_0 = 1 = \frac{d^0 - 1}{d-1} + c_1 \cdot d^0 = 0 + c_1,$$

то есть $c_1 = 1$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = \frac{d^k - 1}{d-1} + 1 \cdot d^k = \frac{1 - d^{k+1}}{1-d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с ранее полученным операторным методом выражением.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} = d \cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где d - корень характеристического уравнения.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot 1_n = d^k + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n}{d^n}.$$

Учтем, что при всех значениях n числитель суммы равен 1 и может быть вынесен за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$.

Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{d^k} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{d} - 1 \right)} = \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d - 1)},$$

находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = d^k + \frac{d^k - 1}{d - 1} = \frac{1 - d^{k+1}}{1 - d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Определение импульсной характеристики. Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на одиночный единичный δ- импульс 1_0, при $k = 0$.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = \frac{1-d^{k+1}}{1-d},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = \frac{1-d^{k}}{1-d}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = d^k,$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = d^{k+1},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z - преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения совпадает с выражением системной функции

$$V_z = \frac{z}{z-d}.$$

Согласно таблицам обратного Z - преобразования, оригинал выходного напряжения имеет вид

$$V_z = \frac{z}{z-d} \Rightarrow v_k = e^{-\alpha \cdot t} = d^k,$$

где $k = t/T$; $\alpha = -\ln(d)/T$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; T - период последовательности единичных δ - импульсов.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^{k+1},$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = d^k,$$

при $k \geq 1$.

Из полученных выражений, соответственно, при $k = 0$ и $k = 1$, получаем $v_1 = g_1 = d$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений.

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{z}{z-d} \Rightarrow v_k = 1_0 \cdot \frac{E}{E-d} = \frac{1_1}{E-d},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_1 = f_k .$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z}{z-d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E}{E-d} .$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_1 = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_1 = d \cdot v_k + f_k .$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-d} \right] = 1 .$$

Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем значение v_1, используя теорему Z-преобразования об упреждении на один такт

$$v_1 \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 .$$

В соответствии с этим выражением и теоремой теории Z-преобразования о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{z \to \infty} z \cdot (V_z - v_0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z \cdot d}{z-d} = d .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующими значения индекса k .

Так, при $k = -1$, получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_0 .$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 1$.

При $k = 0$ получаем

$$v_1 = d \cdot v_0 + 1_1.$$

Учитывая, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени $k = 0$, начальное значение $v_0 = 1$, окончательно получаем $v_1 = d$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее найти варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_{k+1}}{d^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1_n}{d^n} \right] + c_1,$$

где c_1 - новая постоянная суммирования.

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому, то есть равно нулю

$$c_{1,k} = 0 + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = 0 \cdot d^k + c_1 \cdot d^k = c_1 \cdot d^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$, найдем постоянную суммирования c_1 по значению $v_1 = d$

$$v_1 = d = c_1 \cdot d,$$

то есть $c_1 = 1$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$g_k = v_k = 1 \cdot d^k = d^k,$$

при $k \ge 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^{k+1},$$

при $k \ge 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с ранее полученными операторным методом выражениями.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} = d \cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где d - корень характеристического уравнения.

Обратим внимание, что решение в форме Коши определено через начальное значение функции при $k = 0$.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot 1_n = d^k + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n}{d^n}.$$

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому, то есть равно нулю

$$g_k = v_k = d^k + d^k \cdot 0 = d^k,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^{k+1},$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Пример В. Системная (передаточная) характеристика дискретной системы имеет вид

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{T}{z-1}.$$

Требуется определить переходную и импульсную характеристики системы.

Выразим изображение выходного напряжения дискретной системы

$$V_z = E_z \cdot \frac{T}{z-1}.$$

Приравнивая знаменатель системной функции к нулю

$$z - 1 = 0,$$

получим характеристическое уравнение системы с корнем равным $z_1 = 1$.

Определение переходной характеристики. Переходная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на последовательность единичных δ - импульсов 1_k, при $k \ge 0$ и периодом T.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z - преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения получаем в виде

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{T}{z-1}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходного напряжения, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{T}{z-1} \Rightarrow v_k = t = k \cdot T = h_k,$$

где $k = t/T$; T - период последовательности единичных δ - импульсов.

Отметим, что при $k = 0$ получаем $v_0 = h_0 = 0$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор, заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений.

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{T}{z-1} \Rightarrow v_k = \frac{T \cdot 1_k}{E-1},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = T \cdot 1_k = f_k.$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T}{z-1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{T}{E-1}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - v_k = T \cdot 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+1} = v_k + T \cdot 1_k = v_k + f_k.$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{T}{z-1}\right] = 0 .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k. Так, при $k=-1$, получаем

$$v_0 = v_{-1} + T\cdot 1_{-1}.$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k}\cdot y_{1,k} = c_{1,k}\cdot d_1^k = c_{1,k}\cdot 1^k ,$$

где $c_{1,k}$- варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$- фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = 1$- корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее найти варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta\cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{T\cdot 1_k}{1^{k+1}} .$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k}\left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}}\right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1}\left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}}\right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k}\left[\frac{T\cdot 1_{n-1}}{1^n}\right] + c_1 ,$$

где c_1- новая постоянная суммирования.

Учтем, что при всех значениях переменной n, значение числителя равно T и может быть вынесено за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует арифметической прогрессии с разностью $r=0$. Используя формулу арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2} ,$$

где $a_1 = 1$- первый член последовательности; $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$- последний член последовательности, находим выражение для варьируемой постоянной $c_{1,k}$

$$c_{1,k} = k\cdot T + c_1 .$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = k\cdot T\cdot 1^k + c_1\cdot 1^k .$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Учитывая начальное значение $v_0 = 0$, из общего решения при $k = 0$, получаем

$$v_0 = 0 = 0 \cdot T \cdot 1^0 + c_1 \cdot 1^0 = 0 + c_1,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = k \cdot T \cdot 1^k + 0 \cdot 1^k = k \cdot T = t = h_k .$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с ранее полученным операторным методом выражением.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = v_k + T \cdot 1_k = v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = 1^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где 1- корень характеристического уравнения.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = 1^k \cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot 1_{n-1} = 1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{T \cdot 1_{n-1}}{1^n}.$$

Учтем, что при всех значениях n числитель суммы равен T и может быть вынесен за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует арифметической прогрессии с разностью $r = 0$. Используя формулу арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2},$$

где $a_1 = 1$- первый член последовательности; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$- последний член последовательности, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = k \cdot T \cdot 1^k = k \cdot T = t = h_k .$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Определение импульсной характеристики. Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на одиночный единичный δ- импульс 1_0, при $k = 0$.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = k \cdot T ,$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = (k-1) \cdot T .$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = T ,$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = T ,$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z- преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения совпадает с выражением системной функции

$$V_z = \frac{T}{z-1}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования подобное выражение отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом. В соответствии с теоремой о начальном значении функции оригинала

$$f(0) = f_0 = \lim_{k \to 0} f_k = \lim_{z \to \infty} F_z ,$$

находим значение оригинала при $k = 0$

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} \frac{T}{z-1} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении на один такт

$$f_1 \Rightarrow z \cdot F_z - z \cdot f_0 ,$$

находим

$$f_1 \Rightarrow \frac{z \cdot T}{z-1}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим

$$f_{k+1} = T \cdot 1^k ,$$

при $k \geq 0$ или

$$f_k = T \cdot 1^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

В итоге, получаем оригинал выходного напряжения дискретной системы в виде

$$v_{k+1} = f_{k+1} = T \text{ ,}$$

при $k \geq 0$ или

$$v_k = f_k = T \text{ ,}$$

при $k \geq 1$.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = T \text{ ,}$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = T \text{ ,}$$

при $k \geq 1$.

Из полученных выражений, соответственно, при $k = 0$ и $k = 1$, получаем $v_1 = g_1 = T$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор, заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений.

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{T}{z-1} \Rightarrow v_k = \frac{T \cdot 1_0}{E-1},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = T \cdot 1_0 = f_k .$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T}{z-1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{T}{E-1}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - v_k = T \cdot 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+1} = v_k + T \cdot 1_0 = v_k + f_k .$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{T}{z-1}\right] = 0.$$

Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем значение v_1, используя теорему Z- преобразования об упреждении на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0.$$

В соответствии с этим выражением и теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{z\to\infty} z\cdot(V_z - v_0) = \lim_{z\to\infty}\frac{z\cdot T}{z-1} = T\,.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующими значения индекса k.

Так, при $k = -1$, получаем

$$v_0 = v_{-1} + T\cdot 1_{-1}.$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

При $k = 0$ получаем

$$v_1 = v_0 + T\cdot 1_0\,.$$

Учитывая, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени $k = 0$, начальное значение $v_0 = 0$, окончательно получаем $v_1 = T$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k}\cdot y_{1,k} = c_{1,k}\cdot d_1^k = c_{1,k}\cdot 1^k,$$

где $c_{1,k}$- варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$- фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = 1$- корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее определить варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta\cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{T\cdot 1_k}{1^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{T \cdot 1_{n-1}}{1^n} \right] + c_1,$$

где c_1- новая постоянная суммирования.

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$c_{1,k} = \frac{T}{1} + c_1 = T + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = T \cdot 1^k + c_1 \cdot 1^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем постоянную суммирования c_1 по значению $v_1 = 1$

$$v_1 = T = T \cdot 1^1 + c_1 \cdot 1^1 = T + c_1,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$g_k = v_k = T \cdot 1^k + 0 \cdot 1^k = T,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = T,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с ранее полученными операторным методом выражениями.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = v_k + T \cdot 1_k = v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = 1^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где 1- корень характеристического уравнения.

Обратим внимание, что решение в форме Коши определено через начальное значение функции при $k = 0$.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = 1^k \cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot T \cdot 1_{n-1} = 1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{T \cdot 1_{n-1}}{1^n}.$$

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$g_k = v_k = 1^k \cdot T = T\,,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = T\,,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Пример С. Системная (передаточная) характеристика дискретной системы имеет вид

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{z-1}\,.$$

Требуется определить переходную и импульсную характеристики системы.

Выразим изображение выходного напряжения дискретной системы

$$V_z = E_z \cdot \frac{1}{z-1}\,.$$

Приравнивая знаменатель системной функции к нулю

$$z - 1 = 0\,,$$

получим характеристическое уравнение системы с корнем равным $z_1 = 1$.

Определение переходной характеристики. Переходная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на последовательность единичных δ - импульсов 1_k, при $k \geq 0$ и периодом T.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z - преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}\,.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения получаем в виде

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1}\,.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходного напряжения, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1} \Rightarrow v_k = \frac{t}{T} = k = h_k\,,$$

где $k = t/T$; T - период последовательности единичных δ - импульсов.

Отметим, что при $k = 0$ получаем $v_0 = h_0 = 0$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор, заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{1}{z-1} \Rightarrow v_k = \frac{1_k}{E-1},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_k = f_k .$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{1}{E-1}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - v_k = 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+1} = v_k + 1_k = v_k + f_k .$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1} \right] = 0 .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k. Так, при $k = -1$, получаем

$$v_0 = v_{-1} + 1_{-1} .$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot 1^k ,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = 1$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее найти варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_k}{1^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1_{n-1}}{1^n} \right] + c_1,$$

где c_1 - новая постоянная суммирования.

Учтем, что при всех значениях переменной n, значение числителя равно 1 и может быть вынесено за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует арифметической прогрессии с разностью $r = 0$. Используя формулу арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2},$$

где $a_1 = 1$- первый член последовательности; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ - последний член последовательности, находим выражение для варьируемой постоянной $c_{1,k}$

$$c_{1,k} = k + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = k \cdot T \cdot 1^k + c_1 \cdot 1^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Учитывая начальное значение $v_0 = 0$, из общего решения при $k = 0$, получаем

$$v_0 = 0 = 0 \cdot 1^0 + c_1 \cdot 1^0 = 0 + c_1,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = k \cdot 1^k + 0 \cdot 1^k = k = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с ранее полученным операторным методом выражением.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = v_k + 1_k = v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = 1^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где 1- корень характеристического уравнения.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = 1^k \cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot 1_{n-1} = 1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n}.$$

Учтем, что при всех значениях n числитель суммы равен 1 и может быть вынесен за знак суммы. В результате, выражение суммы соответствует арифметической прогрессии с разностью $r = 0$. Используя формулу арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2},$$

где $a_1 = 1$- первый член последовательности; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$- последний член последовательности, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = k \cdot 1^k = k = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Определение импульсной характеристики. Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на одиночный единичный δ- импульс 1_0, при $k = 0$.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = k,$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = k - 1.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = 1,$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = 1,$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z - преобразования, соответствует изображение в плоскости z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения совпадает с выражением системной функции

$$V_z = \frac{1}{z-1}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования подобное выражение отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом. В соответствии с теоремой о начальном значении функции оригинала

$$f(0) = f_0 = \lim_{k \to 0} f_k = \lim_{z \to \infty} F_z,$$

находим значение оригинала при $k = 0$

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z-1} = 0.$$

Далее, используя теорему Z - преобразования об упреждении на один такт

$$f_1 \Rightarrow z \cdot F_z - z \cdot f_0,$$

находим

$$f_1 \Rightarrow \frac{z}{z-1}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z - преобразования, находим

$$f_{k+1} = 1^k,$$

при $k \geq 0$ или

$$f_k = 1^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

В итоге, получаем оригинал выходного напряжения дискретной системы в виде

$$v_{k+1} = f_{k+1} = 1,$$

при $k \geq 0$ или

$$v_k = f_k = 1,$$

при $k \geq 1$.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = 1,$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = 1,$$

при $k \geq 1$.

Из полученных выражений, соответственно при $k = 0$ и $k = 1$, получаем $v_1 = g_1 = 1$.

Переход от системной функции к разностному уравнению. Далее, рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений, описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная z, как оператор, заменяется оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных значений.

Так, используя выражение для изображения выходной переменной

$$V_z = E_z \cdot \frac{1}{z-1} \Rightarrow v_k = \frac{1_0}{E-1},$$

в соответствии с указанной методикой, получаем разностное уравнение

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_0 = f_k.$$

Иногда переход к разностному уравнению от системной функции отображают следующей формализованной записью

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{1}{E-1}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - v_k = 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+1} = v_k + 1_0 = v_k + f_k.$$

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{1}{z-1} \right] = 0.$$

Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем значение v_1, используя теорему Z-преобразования об упреждении на один такт

$$v_1 \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0.$$

В соответствии с этим выражением и теоремой теории Z-преобразования о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{z \to \infty} z \cdot (V_z - v_0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z-1} = 1.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующими значения индекса k.

Так, при $k = -1$, получаем

$$v_0 = v_{-1} + 1_{-1}.$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях k равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

При $k = 0$ получаем

$$v_1 = v_0 + 1_0.$$

Учитывая, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени $k = 0$, начальное значение $v_0 = 0$, окончательно получаем $v_1 = 1$.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot 1^k,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = 1$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее найти варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_k}{1^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1_{n-1}}{1^n} \right] + c_1,$$

где c_1 - новая постоянная суммирования.

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$c_{1,k} = \frac{1}{1} + c_1 = 1 + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = 1 \cdot 1^k + c_1 \cdot 1^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например начальных условий, определить постоянную суммирования c_1. Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$, найдем постоянную суммирования c_1 по значению $v_1 = 1$

$$v_1 = 1 = 1 \cdot 1^1 + c_1 \cdot 1^1 = 1 + c_1,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение c_1 в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$g_k = v_k = 1 \cdot 1^k + 0 \cdot 1^k = 1,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = 1,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с ранее полученными операторным методом выражениями.

Решение в форме Коши (метод Коши). Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = v_k + 1_k = v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = 1^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где 1- корень характеристического уравнения.

Обратим внимание, что решение в форме Коши определено через начальное значение функции при $k = 0$.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = 1^k \cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} 1^{k-n} \cdot 1_{n-1} = 1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n}.$$

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$g_k = v_k = 1^k \cdot 1 = 1,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = 1,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как правило, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод подкупает своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализуем и прост для реализации в современных системах аналитических исследований. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик дискретных устройств первого порядка, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

В заключение, еще раз обратим внимание, на целесообразность приведения системных характеристик исследуемых устройств к нормированному каноническому виду, что существенно упрощает анализ и позволяет сразу отнести устройство к определенному классу устройств, характеристики которых совпадают с точностью до множителей.

2 Исследование временных характеристик устройств и систем второго порядка

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик рассмотрим несколько примеров простейших устройств второго порядка, заданных системной функцией.

В качестве основных временных характеристик дискретных устройств и систем рассмотрим переходные и импульсные характеристики. Напомним, что переходная и импульсная характеристики определяются, как реакция систем, соответственно, на последовательность единичных δ - импульсов 1_k и на одиночный единичный δ - импульс 1_0, при исходном состоянии покоя. В качестве реакции рассмотрим напряжение на выходе дискретных устройств и систем второго порядка.

Пример D. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2},$$

где E_z- изображение входного воздействия; T- период входной последовательности импульсов; V_z- изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{T^2 \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T} + 1)}{(e^{-j \cdot \omega \cdot T} - 1)^2} = \frac{T^2 \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T} + 1)}{e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} - 2 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + 1},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega)) \cdot 180/\pi .$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z \cdot T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z-1)^2 = z^2 - 2 \cdot z + 1 = 0,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1 = 1;\ d_2 = 1$, то есть кратность корня равна двум.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k \geq 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{(z-1)^3} \Rightarrow v_k = t^2 = k^2 \cdot T^2 = h_k.$$

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 0$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - 2 \cdot z + 1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{T^2 \cdot (E+1)}{E^2 - 2 \cdot E + 1}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) = f_k$$

или

$$v_{k+2} = 2 \cdot v_{k+1} - v_k + T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k).$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} \right] = 0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z^2}{(z-1)^2 \cdot (z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = T^2.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k = -2$ и $k = -1$, последовательно получаем

$$v_0 = 2 \cdot v_{-1} - v_{-2} + T^2 \cdot (1_{-1} + 1_{-2}) = 2 \cdot 0 - 0 + T^2 \cdot (0+0) = 0;$$

$$v_1 = 2 \cdot v_0 - v_{-1} + T^2 \cdot (1_0 + 1_{-1}) = 2 \cdot 0 - 0 + T^2 \cdot (1+0) = T^2.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$ и $v_1 = T^2$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка с кратным корнем

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot 1^k + c_{2,k} \cdot k \cdot 1^k,$$

где 1, 1- корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=1^k$, $y_{2,k}=k\cdot 1^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Заметим, что если разностное уравнение имеет l - тый корень d кратности m, то ему соответствует фрагмент линейно независимого набора фундаментальных решений вида

$$c_{l,k}\cdot d^k+c_{l+1,k}\cdot k\cdot d^k+\cdots+c_{l+m-1,k}\cdot k^{m-1}\cdot d^k .$$

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+1}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot(k+1)\cdot 1^{k+1}=0;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+2}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot(k+2)\cdot 1^{k+2}=T^2\cdot(1_{k+1}+1_k)=f_k .$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta=\Delta C=\begin{vmatrix}1^{k+1} & (k+1)\cdot 1^{k+1}\\ 1^{k+2} & (k+2)\cdot 1^{k+2}\end{vmatrix}=1^{k+1}\cdot 1^{k+2}\cdot(k+2-k-1)=1^{2\cdot k+3}=1;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & (k+1)\cdot 1^{k+1}\\ f_k & (k+2)\cdot 1^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-T^2\cdot(1_{k+1}+1_k)\cdot(k+1)\cdot 1^{k+1}}{1}=$$

$$=-T^2\cdot(1_{k+1}+1_k)\cdot(k+1)\cdot 1^{k+1};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}1^{k+1} & 0\\ 1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{T^2\cdot(1_{k+1}+1_k)\cdot 1^{k+1}}{1}=-T^2\cdot(1_{k+1}+1_k)\cdot 1^{k+1}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия формулы сумм факториального многочлена либо арифметической прогрессии

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} T^2 \cdot n \cdot (1_n + 1_{n-1}) \cdot 1^n = -T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} n \cdot (1_n + 1_{n-1}) =$$

$$= \frac{-2 \cdot T^2 \cdot k \cdot (k+1)}{2} + c_1 = -T^2 \cdot k \cdot (k+1) + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} T^2 \cdot (1_n + 1_{n-1}) \cdot 1^n = T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} (1_n + 1_{n-1}) = 2 \cdot T^2 \cdot k + c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k = -T^2 \cdot k \cdot (k+1) \cdot 1^k + c_1 \cdot 1^k + T^2 \cdot k^2 \cdot 1^k + c_2 \cdot k \cdot 1^k =$$

$$= T^2 \cdot \left[-k \cdot (k+1) + 2 \cdot k^2 \right] \cdot 1^k + (c_1 + k \cdot c_2) \cdot 1^k;$$

$$v_k = T^2 \cdot (k^2 - k) \cdot 1^k + (c_1 + k \cdot c_2) \cdot 1^k = T^2 \cdot k \cdot (k-1) + c_1 + k \cdot c_2.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0 = 0$ и $v_1 = T^2$. Так, приравнивая общее решение, при $k = 0$ и $k = 1$, начальным условиям, находим

$$v_0 = 0 = T^2 \cdot 0 \cdot (0-1) + c_1 + 0 \cdot c_2;$$

$$v_1 = T^2 = T^2 \cdot 1 \cdot (1-1) + c_1 + 1 \cdot c_2$$

или

$$c_1 = 0;$$

$$c_1 + c_2 = T^2.$$

Из полученной системы сразу следует, что $c_1 = 0;\ \ c_2 = T^2$.

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = T^2 \cdot k \cdot (k-1) + 0 + k \cdot T^2 = k^2 \cdot T^2 = t^2$$

или

$$h_k = v_k = k^2 \cdot T^2 = t^2.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так как в данном случае корни характеристического уравнения кратны, то при вычислении функции от матрицы модальная матрица собственных векторов окажется вырожденной, что не позволит довести решение до конца. В связи с этим можно рекомендовать аналитический прием для кратных и нулевых корней характеристического уравнения. Временно обозначаем, корни характеристического уравнения различными, например, d_1, d_2, доводим решение до конца, а затем осуществляем предельный переход, в данном случае $d_2 \to d_1 = 1$.

Введем различные корни, модифицировав системную функцию дискретной системы

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - (d_1+d_2)\cdot z + d_1 \cdot d_2}.$$

Построение модифицированного разностного уравнения дискретной системы, как и прежде, осуществим по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - (d_1+d_2)\cdot z + d_1 \cdot d_2} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{T^2 \cdot (E+1)}{E^2 - (d_1+d_2)\cdot E + d_1 \cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_k + T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k).$$

Далее, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^{k}$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1 + d_2) \cdot \lambda + d_1 \cdot d_2 = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем модифицированной системной функции, либо левой (однородной) частью модифицированного разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \;\; \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 - d_1 & d_1 + d_2 - d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = -d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1 - d_2)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1 - d_2)} \cdot \begin{bmatrix} -d_1 \cdot d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & -d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(d_1 - d_2)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1/d_2 \\ 1 & -1/d_1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d_1 - d_2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1/d_2 \\ 1 & -1/d_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_1 - d_2} \cdot \begin{bmatrix} -d_2 \cdot d_1^k + d_1 \cdot d_2^k & d_1^k - d_2^k \\ -d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1^k - d_2^k) & d_1 \cdot d_1^k - d_2 \cdot d_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 \cdot (1_{k+1} + 1_k) \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, можно записать выходное напряжение дискретной системы.

Предварительный анализ структуры векторов X_0 и F_k показывает, что в результирующее выражение войдут элементы a_{12} матриц A^k и A^{k-n}, соответственно равные $\dfrac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2}$ и $\dfrac{d_1^{k-n} - d_2^{k-n}}{d_1 - d_2}$. С целью сокращения аналитических выкладок целесообразно на данном этапе воспользоваться предельным переходом модифицированных значений корней характеристического уравнения к истинным значениям.

При $d_1 = d_2 = 1$ числители и знаменатели выражений элемента a_{12} одновременно стремятся к нулю, поэтому воспользуемся определением предельного перехода по Лопиталю, взяв отдельно производные от числителей и знаменателей выражений по d_1 и d_2.

Выполнив предельный переход и, положив $d_1 = d_2 = 1$, получим значения элементов a_{12} матриц A^k и A^{k-n} равными k и $k-n$. Теперь, подставив эти значения, в формулу Коши, получаем выражение для выходной реакции

$$v_k = k \cdot T^2 + \sum_{n=1}^{k} (k-n) \cdot T^2 \cdot (1_n + 1_{n-1}) =$$

$$= k \cdot T^2 + k \cdot T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} (1_n + 1_{n-1}) - T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} n \cdot (1_n + 1_{n-1}).$$

Используя для раскрытия сумм формулу арифметической прогрессии в первом случае и формулу суммирования факториального многочлена во втором случае, а также, учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \ge 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы

$$h_k = v_k = k \cdot T^2 + 2 \cdot k^2 \cdot T^2 - \frac{2 \cdot k \cdot (k+1) \cdot T^2}{2} = k^2 \cdot T^2 = t^2.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k = 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = k^2 \cdot T^2,$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = (k-1)^2 \cdot T^2.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = (2 \cdot k - 1) \cdot T^2,$$

при $k \ge 1$, или

$$g_{k+1} = (2 \cdot k + 1) \cdot T^2,$$

при $k \ge 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} = \frac{T^2 \cdot z}{(z-1)^2} + \frac{T^2}{(z-1)^2}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому разобьем его на два слагаемых.

В соответствии с таблицами обратного Z- преобразования, первому слагаемому соответствует преобразование

$$F_{1,z} = \frac{T^2 \cdot z}{(z-1)^2} \Rightarrow f_{1,k} = k \cdot T^2.$$

Для определения обратного Z- преобразования второго слагаемого воспользуемся следующим приемом. В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z,$$

находим

$$f_{2,0} = \lim_{z \to \infty} F_{2,z} = \lim_{z \to \infty} \frac{T^2}{(z-1)^2} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{T^2 \cdot z}{(z-1)^2}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$f_{2,k+1} = k \cdot T^2,$$

при $k \geq 0$ или

$$f_{2,k} = (k-1) \cdot T^2,$$

при $k \geq 1$, где $k = \dfrac{t}{T}$; T - период входной последовательности.

В итоге, суммируя оригиналы первого и второго слагаемых изображения, получаем оригинал выходной реакции, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} = (k+1) \cdot T^2 + k \cdot T^2 = (2 \cdot k + 1) \cdot T^2,$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = k \cdot T^2 + (k-1) \cdot T^2 = (2 \cdot k - 1) \cdot T^2,$$

при $k \geq 1$.

Отметим, что из предыдущих выражений при $k = 0$ и $k = 1$ имеем $v_1 = g_1 = T^2$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - 2 \cdot z + 1} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{T^2 \cdot (E+1)}{E^2 - 2 \cdot E + 1}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = 1_1 + 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = 2 \cdot v_{k+1} - v_k + 1_1 + 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} \right] = 0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{(z-1)^2}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{T^2 \cdot z \cdot (z+1)}{(z-1)^2} \right] = T^2.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_1 = \frac{T^2 \cdot z^2 \cdot (z+1)}{(z-1)^2} - T^2 \cdot z =$$

$$= \frac{T^2 \cdot (z^3 + z^2 - z^3 + 2 \cdot z^2 - z)}{(z-1)^2} = \frac{T^2 \cdot (3 \cdot z^2 - z)}{(z-1)^2}.$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k \to 0} v_{k+2} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_1) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{T^2 \cdot (3 \cdot z^2 - z)}{(z-1)^2} \right] = 3 \cdot T^2.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k = -2$, $k = -1$ и $k = 0$, последовательно получаем

$$v_0 = 2 \cdot v_{-1} - v_{-2} + T^2 \cdot (1_{-1} + 1_{-2}) = 2 \cdot 0 - 0 + T^2 \cdot (0 + 0) = 0;$$

$$v_1 = 2 \cdot v_0 - v_{-1} + T^2 \cdot (1_0 + 1_{-1}) = 2 \cdot 0 - 0 + T^2 \cdot (1 + 0) = T^2;$$

$$v_2 = 2 \cdot v_1 - v_0 + T^2 \cdot (1_1 + 1_0) = 2 \cdot T^2 - 0 + T^2 \cdot (0 + 1) = 3 \cdot T^2.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$, $v_1 = T^2$ и $v_2 = 3 \cdot T^2$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка с кратным корнем

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = T^2 \cdot (1_1 + 1_0) = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot 1^k + c_{2,k} \cdot k \cdot 1^k,$$

где 1, 1- корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = 1^k$, $y_{2,k} = k \cdot 1^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Заметим, что если разностное уравнение имеет l- тый корень d кратности m, то ему соответствует фрагмент линейно независимого набора фундаментальных решений вида

$$c_{l,k} \cdot d^k + c_{l+1,k} \cdot k \cdot d^k + \dots + c_{l+m-1,k} \cdot k^{m-1} \cdot d^k .$$

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot (k+1) \cdot 1^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot (k+2) \cdot 1^{k+2} = T^2 \cdot (1_1 + 1_0) = f_k .$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & (k+1) \cdot 1^{k+1} \\ 1^{k+2} & (k+2) \cdot 1^{k+2} \end{vmatrix} = 1^{k+1} \cdot 1^{k+2} \cdot (k+2-k-1) = 1^{2 \cdot k+3} = 1;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (k+1) \cdot 1^{k+1} \\ f_k & (k+2) \cdot 1^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-T^2 \cdot (1_1 + 1_0) \cdot (k+1) \cdot 1^{k+1}}{1} =$$

$$= -T^2 \cdot (1_1 + 1_0) \cdot (k+1) \cdot 1^{k+1};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{T^2 \cdot (1_1 + 1_0) \cdot 1^{k+1}}{1} = -T^2 \cdot (1_1 + 1_0) \cdot 1^{k+1}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия формулы сумм факториального многочлена либо арифметической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым, определяемым вторыми компонентами сумм

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} T^2 \cdot n \cdot (1_n + 1_{n-1}) \cdot 1^n =$$

$$= -T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} n \cdot (1_n + 1_{n-1}) = -T^2 + c_1 ;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} T^2 \cdot (1_n + 1_{n-1}) \cdot 1^n = T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} (1_n + 1_{n-1}) = T^2 + c_2 ,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k = -T^2 \cdot 1^k + c_1 \cdot 1^k + k \cdot (T^2 + c_2) \cdot 1^k =$$

$$= -T^2 + k \cdot T^2 + c_1 + k \cdot c_2 ;$$

$$v_k = T^2 \cdot (k-1) + c_1 + k \cdot c_2 .$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1 = T^2$ и $v_2 = 3 \cdot T^2$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k \geq 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k = 1$ и $k = 2$, начальным условиям, находим

$$v_1 = T^2 = T^2 \cdot (1-1) + c_1 + 1 \cdot c_2 ;$$

$$v_2 = 3 \cdot T^2 = T^2 \cdot (2-1) + c_1 + 2 \cdot c_2$$

или

$$c_1 + c_2 = T^2 ;$$

$$c_1 + 2 \cdot c_2 = 2 \cdot T^2 .$$

Решим полученную систему относительно неизвестных постоянных c_1 и c_2 методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 ;$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} T^2 & 1 \\ 2 \cdot T^2 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \cdot T^2 - 2 \cdot T^2}{1} = 0 ; \; c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & T^2 \\ 1 & 2 \cdot T^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \cdot T^2 - T^2}{1} = T^2 .$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = T^2 \cdot (k-1) + 0 + T^2 = (2 \cdot k - 1) \cdot T^2 ,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = (2 \cdot k + 1) \cdot T^2 ,$$

при $k \ge 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - 2 \cdot v_{k+1} + v_k = T^2 \cdot (1_1 + 1_0) = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так как в данном случае корни характеристического уравнения кратны, то при вычислении функции от матрицы модальная матрица собственных векторов окажется вырожденной, что не позволит довести решение до конца. В связи с этим можно рекомендовать аналитический прием для кратных и нулевых корней характеристического уравнения. Временно обозначаем, корни характеристического уравнения различными, например, d_1, d_2, доводим решение до конца, а затем осуществляем предельный переход, в данном случае $d_2 \to d_1 = 1$.

Введем различные корни, модифицировав системную функцию дискретной системы

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{(z - d_1) \cdot (z - d_2)} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - (d_1 + d_2) \cdot z + d_1 \cdot d_2}.$$

Построение модифицированного разностного уравнения дискретной системы, как и прежде, осуществим по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{z^2 - (d_1 + d_2) \cdot z + d_1 \cdot d_2} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{T^2 \cdot (E+1)}{E^2 - (d_1 + d_2) \cdot E + d_1 \cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = T^2 \cdot (1_1 + 1_0) = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_k + T^2 \cdot (1_1 + 1_0).$$

Далее, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 \cdot (1_1 + 1_0) \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1 {}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1 + d_2) \cdot \lambda + d_1 \cdot d_2 = 0.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем модифицированной системной функции, либо левой (однородной) частью модифицированного разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 - d_1 & d_1 + d_2 - d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = -d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1 - d_2)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot(d_1-d_2)}\cdot\begin{bmatrix}-d_1\cdot d_2 & d_1\\ d_1\cdot d_2 & -d_2\end{bmatrix}=\frac{1}{(d_1-d_2)}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1/d_2\\ 1 & -1/d_1\end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}d_1 & d_2\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1^k & 0\\ 0 & d_2^k\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_1-d_2}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1/d_2\\ 1 & -1/d_1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d_1-d_2}\cdot\begin{bmatrix}-d_2\cdot d_1^k+d_1\cdot d_2^k & d_1^k-d_2^k\\ -d_1\cdot d_2\cdot(d_1^k-d_2^k) & d_1\cdot d_1^k-d_2\cdot d_2^k\end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T^2\end{bmatrix};\ F_k=\begin{bmatrix}0\\ f_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ T^2\cdot(1_1+1_0)\end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка

$$X_k=A^k\cdot X_0+\sum_{n=1}^{k}A^{k-n}\cdot F_{n-1},$$

и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, можно записать выходное напряжение дискретной системы.

Предварительный анализ структуры векторов X_0 и F_k показывает, что в результирующее выражение войдут элементы a_{12} матриц A^k и A^{k-n}, соответственно равные $\dfrac{d_1^k-d_2^k}{d_1-d_2}$ и $\dfrac{d_1^{k-n}-d_2^{k-n}}{d_1-d_2}$. С целью сокращения аналитических выкладок целесообразно на данном этапе воспользоваться предельным переходом модифицированных значений корней характеристического уравнения к истинным значениям.

При $d_1=d_2=1$ числители и знаменатели выражений элемента a_{12} одновременно стремятся к нулю, поэтому воспользуемся определением предельного перехода по Лопиталю, взяв отдельно производные от числителей и знаменателей выражений по d_1 и d_2.

Выполнив предельный переход и, положив $d_1 = d_2 = 1$, получим значения элементов a_{12} матриц A^k и A^{k-n} равными k и $k-n$. Теперь, подставив эти значения, в формулу Коши, получаем выражение для выходной реакции

$$v_k = k \cdot T^2 + \sum_{n=1}^{k} (k-n) \cdot T^2 \cdot (1_n + 1_{n-1}) =$$

$$= k \cdot T^2 + k \cdot T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} (1_n + 1_{n-1}) - T^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} n \cdot (1_n + 1_{n-1}).$$

Используя для раскрытия сумм формулу арифметической прогрессии в первом случае и формулу суммирования факториального многочлена во втором случае, а также, учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым, определяемым вторыми компонентами сумм

$$g_k = v_k = k \cdot T^2 + k \cdot T^2 - T^2 = (2 \cdot k - 1) \cdot T^2,$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = (2 \cdot k + 1) \cdot T^2,$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Пример Е. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{(z-1) \cdot (z-d)},$$

где E_z - изображение входного воздействия; V_z - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot T} + b}{(e^{-j \cdot \omega \cdot T} - 1) \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T} - d)} = \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot T} + b}{e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} - (1+d) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + d},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega)) \cdot 180/\pi.$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z \cdot (z+b)}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z-1)\cdot(z-d) = z^2 - (1+d)\cdot z + d = 0,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1 = 1;\ d_2 = d$.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k \ge 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z\cdot(z+b)}{(z-1)^2\cdot(z-d)}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$V_z = \frac{z\cdot(z+b)}{(z-1)^2\cdot(z-d)} \Rightarrow v_k = A + A_0\cdot t + B\cdot e^{-\alpha\cdot t} = A + A_0\cdot t + B\cdot d^k$$

или

$$h_k = v_k = -\frac{d+b}{(1-d)^2} + \frac{k\cdot(1+b)}{(1-d)} + \frac{(d+b)\cdot d^k}{(1-d)^2} = \frac{(1+b)\cdot k}{(1-d)} - \frac{(d+b)\cdot(1-d^k)}{(1-d)^2},$$

где $B = -A = \dfrac{d+b}{(1-d)^2}$; $A_0 = \dfrac{1+b}{T\cdot(1-d)}$; $\alpha = -\dfrac{\ln(d)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; T - период входной последовательности.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 0$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z}=\frac{z+b}{(z-1)\cdot(z-d)}=\frac{z+b}{z^2-(1+d)\cdot z+d}\Rightarrow\frac{v_k}{1_k}=\frac{E+b}{E^2-(1+d)\cdot E+d}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2}-(1+d)\cdot v_{k+1}+d\cdot v_k=1_{k+1}+b\cdot 1_k=f_k$$

или

$$v_{k+2}=(1+d)\cdot v_{k+1}-d\cdot v_k+1_{k+1}+b\cdot 1_k.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0=\lim_{k\to 0}v_k=\lim_{z\to\infty}V_z=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z+b}{(z-1)\cdot(z-d)}\right]=0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1}\Rightarrow z\cdot V_z-z\cdot v_0=\frac{z^2\cdot(z+b)}{(z-1)^2\cdot(z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1=\lim_{k\to 0}v_{k+1}=\lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z-z\cdot v_0)=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z\cdot(z+b)}{(z-1)\cdot(z-d)}\right]=1.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$ и $k=-1$ последовательно, получаем

$$v_0=(1+d)\cdot v_{-1}-d\cdot v_{-2}+1_{-1}+b\cdot 1_{-2}=(1+d)\cdot 0-d\cdot 0+0+b\cdot 0=0;$$

$$v_1=(1+d)\cdot v_0-d\cdot v_{-1}+1_0+b\cdot 1_{-1}=(1+d)\cdot 0-d\cdot 0+1+b\cdot 0=1.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$ и $v_1 = 1$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d\cdot v_k = 1_{k+1} + b\cdot 1_k = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k}\cdot v_{1,k} + c_{2,k}\cdot v_{2,k} = c_{1,k}\cdot 1^k + c_{2,k}\cdot d^k,$$

где 1, d - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = 1^k$, $y_{2,k} = d^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+1} + \Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+1} = 0;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+2} + \Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+2} = 1_{k+1} + b\cdot 1_k = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & d^{k+1} \\ 1^{k+2} & d^{k+2} \end{vmatrix} = 1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d^{k+1} \\ f_k & d^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1_{k+1} + b\cdot 1_k)\cdot d^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)} = \frac{-(1_{k+1} + b\cdot 1_k)}{1^{k+1}\cdot(d-1)};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1_{k+1} + b\cdot 1_k)\cdot 1^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)} = \frac{1_{k+1} + b\cdot 1_k}{d^{k+1}\cdot(d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{1^n \cdot (d-1)} = \frac{-(1+b)}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1^n} = \frac{-(1+b) \cdot k}{d-1} + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d^n \cdot (d-1)} = \frac{1+b}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{d^n} = \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)^2} + c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k = \frac{-(1+b) \cdot k \cdot 1^k}{d-1} + c_1 \cdot 1^k + \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{(d-1)^2} + c_2 \cdot d^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0 = 0$ и $v_1 = 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k = 0$ и $k = 1$, начальным условиям, находим

$$v_0 = 0 = -0 + c_1 + 0 + c_2;$$

$$v_1 = 1 = -\frac{1+b}{d-1} + c_1 + \frac{(1+b)}{d-1} + c_2 \cdot d$$

или

$$c_1 + c_2 = 0;$$

$$c_1 + d \cdot c_2 = 1.$$

Определим значения постоянных суммирования c_1 и c_2, используя правило Крамера для решения линейной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d \end{vmatrix} = d - 1; \quad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1}{d-1}; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{d-1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = \frac{-(1+b) \cdot k \cdot 1^k}{d-1} - \frac{1^k}{d-1} + \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{(d-1)^2} + \frac{d^k}{d-1};$$

$$v_k == \frac{-(1+b) \cdot k}{d-1} + \frac{(-d + 1 + d^k - 1 + b \cdot d^k - b + d \cdot d^k - d^k)}{(d-1)^2}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{(1+b) \cdot k}{1-d} - \frac{(b+d) \cdot (1-d^k)}{(1-d)^2}.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2}-(1+d)\cdot v_{k+1}+d\cdot v_k=1_{k+1}+b\cdot 1_k=f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k}=v_k$; $x_{2,k}=x_{1,k+1}=v_{k+1}$; $x_{3,k}=v_{2,k+1}=v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1+d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+1}+b\cdot 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1}=A\cdot X_k+F_k\,.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k=A^k\cdot X_0+\sum_{n=1}^{k}A^{k-n}\cdot F_{n-1}\,,$$

где $X_0=\begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0}\end{bmatrix}^t=\ v_0 \quad v_1\ ^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A=H\cdot\Lambda\cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A)=H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda)=\Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda])=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1+d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(1+d)\cdot\lambda+d=0\,.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+d-1 & 1+d-d \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d \cdot (d-1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d \cdot (d-1)} \cdot \begin{bmatrix} d & -1 \\ -d & d \end{bmatrix} = \frac{1}{d-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & d^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d-1} \cdot \begin{bmatrix} d \cdot 1^k - 1 \cdot d^k & -1^k + d^k \\ d \cdot 1^k - d \cdot d^k & -1^k + d \cdot d^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+1} + b \cdot 1_k \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle (-1^k + d^k) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} (-1^{k-n} + d^{k-n}) \cdot (1_n + b \cdot 1_{n-1}) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle (d^k - 1) \cdot 1 - \sum_{n=1}^{k} (1_n + b \cdot 1_{n-1}) + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d^n} \right\rangle.$$

Используя для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \ge 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции исследуемой дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle (d^k - 1) + (1+b) \cdot k + \frac{d^k \cdot (1+b) \cdot (d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle -(1+b) \cdot k + \frac{-d + 1 + d \cdot d^k - d^k + d^k - 1 + b \cdot d^k - b}{d-1} \right\rangle;$$

$$h_k = v_k = \frac{-(1+b) \cdot k}{d-1} + \frac{(d+b) \cdot (d^k - 1)}{(d-1)^2} = \frac{(1+b) \cdot k}{1-d} - \frac{(b+d) \cdot (1-d^k)}{(1-d)^2}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k = 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = \frac{(1+b) \cdot k}{1-d} - \frac{(b+d) \cdot (1-d^k)}{(1-d)^2},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = \frac{(1+b) \cdot (k-1)}{1-d} - \frac{(b+d) \cdot (1-d^{k-1})}{(1-d)^2}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{1+b}{1-d} - \frac{(b+d)\cdot d^{k-1}}{1-d} = \frac{1-d^k}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{1-d^{k+1}}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z- преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z+b}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{z}{(z-1)\cdot(z-d)} + \frac{b}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому разобьем его на два слагаемых.

В соответствии с таблицами обратного Z- преобразования первому слагаемому соответствует оригинал

$$F_{1,z} = \frac{z}{(z-1)\cdot(z-d)} \Rightarrow f_{1,k} = \frac{1-e^{-\alpha\cdot t}}{1-d} = \frac{1-d^k}{1-d},$$

где $\alpha = -\dfrac{\ln(d)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; T - период входной последовательности.

В таблицах обратного Z- преобразования выражение соответствующее второму слагаемому отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z,$$

находим

$$f_{2,0} = \lim_{z\to\infty} F_{2,z} = \lim_{z\to\infty} \frac{b}{(z-1)\cdot(z-d)} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{b \cdot z}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$f_{2,k+1} = \frac{b\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})}{1-d} = \frac{b\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \ge 0$ или

$$f_{2,k} = \frac{b\cdot(1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \ge 1$, где $\alpha = -\frac{\ln(d)}{T}$; $k = \frac{t}{T}$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; T- период входной последовательности.

В итоге, суммируя оригиналы первого и второго слагаемых изображения, получаем оригинал выходной реакции, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} = \frac{1-d^{k+1}}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \ge 0$ или

$$g_k = v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = \frac{1-d^k}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \ge 1$.

Отметим, что из предыдущих выражений при $k=0$ и $k=1$ имеем $v_1 = g_1 = 1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной z^n дробно-рационального выражения - оператором сдвига E^n

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{z+b}{z^2-(1+d)\cdot z+d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E+b}{E^2-(1+d)\cdot E+d}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d\cdot v_k = 1_1 + b\cdot 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (1+d)\cdot v_{k+1} - d\cdot v_k + 1_1 + b\cdot 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z+b}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z\cdot(z+b)}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z\cdot(z+b)}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 1.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_1 = \frac{z^2\cdot(z+b)}{(z-1)\cdot(z-d)} - z\cdot 1 = \frac{z\cdot[(1+b+d)\cdot z - d]}{(z-1)\cdot(z-d)}$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k \to 0} v_{k+2} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_1) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z\cdot[(1+b+d)\cdot z - d]}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 1+b+d.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$, $k=-1$ и $k=0$, последовательно получаем

$$v_0 = (1+d)\cdot v_{-1} - d\cdot v_{-2} + 1_{-1} + b\cdot 1_{-2} = (1+d)\cdot 0 - d\cdot 0 + 0 + 0\cdot b = 0;$$

$$v_1 = (1+d)\cdot v_0 - d\cdot v_{-1} + 1_0 + b\cdot 1_{-1} = (1+d)\cdot 0 - d\cdot 0 + 1 + b\cdot 0 = 1;$$

$$v_2 = (1+d)\cdot v_1 - d\cdot v_0 + 1_1 + b\cdot 1_0 = (1+d)\cdot 1 - d\cdot 0 + 0 + b\cdot 1 = 1+b+d.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ и $v_2 = 1+b+d$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d\cdot v_k = 1_1 + b\cdot 1_0 = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot 1^k + c_{2,k} \cdot d^k ,$$

где 1, d - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = 1^k$, $y_{2,k} = d^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+2} = 1_1 + b \cdot 1_0 = f_k .$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & d^{k+1} \\ 1^{k+2} & d^{k+2} \end{vmatrix} = 1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d^{k+1} \\ f_k & d^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1_1 + b \cdot 1_0) \cdot d^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{-(1_1 + b \cdot 1_0)}{(d-1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1_1 + b \cdot 1_0) \cdot 1^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{1_1 + b \cdot 1_0}{d^{k+1} \cdot (d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым, определяемым вторыми компонентами сумм

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{1^n \cdot (d-1)} = \frac{-1}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{1^n} = \frac{-b}{d-1} + c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d^n\cdot(d-1)}=\frac{1}{d-1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d^n}=\frac{b}{d\cdot(d-1)}+c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=\frac{-b\cdot 1^k}{d-1}+c_1\cdot 1^k+\frac{b\cdot d^k}{d\cdot(d-1)}+c_2\cdot d^k=$$

$$=\frac{-b}{d-1}+\frac{b\cdot d^{k-1}}{d-1}+c_1+c_2\cdot d^k=\frac{b\cdot(d^{k-1}-1)}{d-1}+c_1+c_2\cdot d^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1=1$ и $v_2=1+b+d$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k\geq 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k=1$ и $k=2$, начальным условиям, находим

$$v_1=1=0+c_1+c_2\cdot d;$$

$$v_2=1+b+d=b+c_1+c_2\cdot d^2$$

или

$$c_1+d\cdot c_2=1;$$

$$c_1+d^2\cdot c_2=1+d.$$

Определим значения постоянных суммирования c_1 и c_2, используя правило Крамера для решения линейной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & d\\ 1 & d^2\end{vmatrix}=d\cdot(d-1);\quad c_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & d\\ 1+d & d^2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-1}{d-1};\quad c_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+d\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{1}{d-1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k=v_k=\frac{b\cdot(d^{k-1}-1)}{d-1}-\frac{1}{d-1}+\frac{d^k}{d-1}=\frac{1-d^k}{1-d}+\frac{b\cdot(1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k\geq 1$ или

$$g_{k+1}=v_{k+1}=\frac{b\cdot(1-d^k)}{1-d}+\frac{1-d^{k+1}}{1-d},$$

при $k\geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2}-(1+d)\cdot v_{k+1}+d\cdot v_k=1_1+b\cdot 1_0=f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k}=v_k$; $x_{2,k}=x_{1,k+1}=v_{k+1}$; $x_{3,k}=v_{2,k+1}=v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1+d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1_1+b\cdot 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1}=A\cdot X_k+F_k\,.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k=A^k\cdot X_0+\sum_{n=1}^{k}A^{k-n}\cdot F_{n-1}\,,$$

где $X_0=\begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A=H\cdot\Lambda\cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A)=H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda)=\Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda])=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1+d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(1+d)\cdot\lambda+d=0\,.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A-\Lambda_i \;\cdot h_i=0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A-\Lambda_i]$

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+d-1 & 1+d-d\\ d & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & 1\\ d & d\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=d\cdot(d-1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d\cdot(d-1)}\cdot\begin{bmatrix}d & -1\\ -d & d\end{bmatrix}=\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}d & 1\\ d & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1^k & 0\\ 0 & d^k\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d\\ -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}d\cdot 1^k-1\cdot d^k & -1^k+d^k\\ d\cdot 1^k-d\cdot d^k & -1^k+d\cdot d^k\end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\; F_k=\begin{bmatrix}0\\ f_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1_1+b\cdot 1_0\end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k\geq 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения v_1 и v_2, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения v_0 и v_1.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle(-1^k + d^k)\cdot 1 + \sum_{n=1}^{k}(-1^{k-n} + d^{k-n})\cdot(1_n + b\cdot 1_{n-1})\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle(d^k - 1 - \sum_{n=1}^{k}(1_n + b\cdot 1_{n-1}) + d^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n + b\cdot 1_{n-1}}{d^n}\right\rangle.$$

Используем для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым, определяемым вторыми компонентами сумм.

В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle(d^k - 1) - b + b\cdot d^{k-1}\right\rangle = \frac{1-d^k}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1-d^{k+1}}{1-d} + \frac{b\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Пример F. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)},$$

где E_z - изображение входного воздействия; V_z - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{1}{(e^{-j\cdot\omega\cdot T} - d_1)\cdot(e^{-j\cdot\omega\cdot T} - d_2)} =$$

$$= \frac{1}{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T} - (d_1 + d_2)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T} + d_1\cdot d_2},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega)) \cdot 180/\pi .$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z}{(z - d_1) \cdot (z - d_2)} .$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z - d_1) \cdot (z - d_2) = z^2 - (d_1 + d_2) \cdot z + d_1 \cdot d_2 = 0 ,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1 = d_1$; $d_2 = d_2$.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k \geq 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z - 1} .$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z}{(z - 1) \cdot (z - d_1) \cdot (z - d_2)} .$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{(z - 1) \cdot (z - d_1) \cdot (z - d_2)} \Rightarrow v_k = A + B_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$

$$= A + B_1 \cdot d_1^k + B_2 \cdot d_2^k$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1}{(1 - d_1) \cdot (1 - d_2)} + \frac{d_1^k}{(1 - d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{d_2^k}{(1 - d_2) \cdot (d_1 - d_2)} ,$$

где $A = \dfrac{1}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)}$; $B_1 = \dfrac{1}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)}$; $B_2 = \dfrac{1}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)}$; $\alpha_1 = -\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t} = d_2^k$; T - период входной последовательности.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 0$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{1}{z^2-(d_1+d_2)\cdot z + d_1\cdot d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{1}{E^2-(d_1+d_2)\cdot E + d_1\cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2}-(d_1+d_2)\cdot v_{k+1} + d_1\cdot d_2\cdot v_k = 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} - d_1\cdot d_2\cdot v_k + 1_k.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right] = 0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0 = \frac{z^2}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k\to 0} v_{k+1} = \lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z - z\cdot v_0) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right] = 0.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$ и $k=-1$, последовательно получаем

$$v_0=(d_1+d_2)\cdot v_{-1}-d_1\cdot d_2\cdot v_{-2}+1_{-2}=(d_1+d_2)\cdot 0-d_1\cdot d_2\cdot 0+0=0;$$

$$v_1=(d_1+d_2)\cdot v_0-d_1\cdot d_2\cdot v_{-1}+1_{-1}=(d_1+d_2)\cdot 0-d_1\cdot d_2\cdot 0+0=0.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения нулевые, то есть $v_0=0$ и $v_1=0$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2}-(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}+d_1\cdot d_2\cdot v_k=1_k=f_k$$

следует искать в виде

$$v_k=c_{1,k}\cdot v_{1,k}+c_{2,k}\cdot v_{2,k}=c_{1,k}\cdot d_1^k+c_{2,k}\cdot d_2^k,$$

где d_1, d_2 - корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=d_1^k$, $y_{2,k}=d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot d_1^{k+1}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d_2^{k+1}=0;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot d_1^{k+2}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d_2^{k+2}=1_k=f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta=\Delta C=\begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix}=d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & d_2^{k+1}\\ f_k & d_2^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-1_k\cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=\frac{-1_k}{d_1^{k+1}\cdot(d_2-d_1)};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}d_1^{k+1} & 0\\ d_1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{1_k\cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=\frac{1_k}{d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_1^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{-1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_1^n}=\frac{-(d_1^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot d_1^k\cdot(d_1-1)}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_2^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_2^n}=\frac{d_2^k-1}{(d_2-d_1)\cdot d_2^k\cdot(d_2-1)}+c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=-\frac{d_1^k-1}{(d_2-d_1)\cdot(d_1-1)}+c_1\cdot d_1^k+\frac{d_2^k-1}{(d_2-d_1)\cdot(d_2-1)}+c_2\cdot d_2^k;$$

$$v_k=-\frac{d_1^k-1}{(d_2-d_1)\cdot(d_1-1)}+\frac{d_2^k-1}{(d_2-d_1)\cdot(d_2-1)}+c_1\cdot d_1^k+c_2\cdot d_2^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0=0$ и $v_1=0$. Так, приравнивая общее решение, при $k=0$ и $k=1$, начальным условиям, находим

$$v_0=0=-0+0+c_1+c_2;$$

$$v_1=0=-\frac{1}{d_2-d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}+c_1\cdot d_1+c_2\cdot d_2$$

или

$$c_1+c_2=0;$$

$$d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2=0.$$

Из полученной системы сразу следует, что $c_1 = c_2 = 0$.

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = -\frac{d_1^k - 1}{(d_2 - d_1)\cdot(d_2 - 1)} + \frac{d_2^k - 1}{(d_2 - d_1)\cdot(d_2 - 1)}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{d_1^k}{(d_2 - d_1)\cdot(1-d_1)} + \frac{d_2^k}{(d_1 - d_2)\cdot(1-d_2)}.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2)\cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_k = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda])=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1\cdot d_2 & d_1+d_2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(d_1+d_2)\cdot\lambda+d_1\cdot d_2=0.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A-\Lambda_i \quad \cdot h_i=0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A-\Lambda_i]$

$$H=\begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1+d_2-d_1 & d_1+d_2-d_2 \\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix} d_1\cdot d_2 & -d_1 \\ -d_1\cdot d_2 & d_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение стеменной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix} d_2\cdot d_1^k-d_1\cdot d_2^k & -d_1^k+d_2^k \\ d_1\cdot d_2\cdot(d_1^k-d_2^k) & -d_1\cdot d_1^k+d_2\cdot d_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_k \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = 0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-d_1^{k-n} + d_2^{k-n})}{d_2 - d_1} \cdot 1_{n-1} = \frac{-d_1^k}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_1^n} + \frac{d_2^k}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_2^n}.$$

Используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \geq 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции исследуемой дискретной системы

$$v_k = \frac{-d_1^k}{d_2 - d_1} \cdot \frac{d_1^k - 1}{d_1^k \cdot (d_1 - 1)} + \frac{d_2^k}{d_2 - d_1} \cdot \frac{d_2^k - 1}{d_2^k \cdot (d_2 - 1)} =$$

$$= \frac{-d_1^k - 1}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{d_2^k - 1}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)};$$

$$h_k = v_k = \frac{1}{(1 - d_1) \cdot (1 - d_2)} + \frac{d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (1 - d_1)} + \frac{d_2^k}{(d_1 - d_2) \cdot (1 - d_2)}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k \geq 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = v_k = \frac{1}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{d_1^k}{(d_2-d_1)\cdot(1-d_1)} + \frac{d_2^k}{(d_1-d_2)\cdot(1-d_2)},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = v_{k-1} = \frac{1}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{d_1^{k-1}}{(d_2-d_1)\cdot(1-d_1)} + \frac{d_2^{k-1}}{(d_1-d_2)\cdot(1-d_2)}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z,$$

находим

$$v_0 = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$v_1 \Rightarrow \frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$v_{k+1} = \frac{e^{-\alpha_1 \cdot t} - e^{-\alpha_2 \cdot t}}{d_1 - d_2} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$ или

$$v_k = \frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$, где $\alpha_1 = -\frac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\frac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \frac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1 \cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2 \cdot t} = d_2^k$; T - период входной последовательности.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = \frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_1 = g_1 = 0$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{1}{z^2 - (d_1+d_2)\cdot z + d_1 \cdot d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{1}{E^2 - (d_1+d_2)\cdot E + d_1 \cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_k + 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{1}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} \right] = 0 .$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} .$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} \right] = 0 .$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_1 = \frac{z^2}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k \to 0} v_{k+2} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_1) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z^2}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} \right] = 1 .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k = -2$, $k = -1$ и $k = 0$, последовательно получаем

$$v_0 = (d_1 + d_2)\cdot v_{-1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-2} + 1_{-2} = (d_1 + d_2)\cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 0 = 0 ;$$

$$v_1 = (d_1 + d_2)\cdot v_0 - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-1} + 1_{-1} = (d_1 + d_2)\cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 0 = 0 ;$$

$$v_2 = (d_1 + d_2)\cdot v_1 - d_1 \cdot d_2 \cdot v_0 + 1_0 = (d_1 + d_2)\cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 1 = 1 .$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ и $v_2 = 1$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2)\cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k + c_{2,k} \cdot d_2^k,$$

где d_1, d_2 - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = d_1^k$, $y_{2,k} = d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+2} = 1_0 = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix} = d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d_2^{k+1} \\ f_k & d_2^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1_0 \cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{-1_0}{d_1^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} d_1^{k+1} & 0 \\ d_1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1_0 \cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{1_0}{d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_1^n \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{-1}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_1^n} = \frac{-1}{d_1 \cdot (d_2 - d_1)} + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_2^n \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d_2^n} = \frac{1}{d_2 \cdot (d_2 - d_1)} + c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k = \frac{-d_1^k}{d_1 \cdot (d_2 - d_1)} + c_1 \cdot d_1^k + \frac{d_2^k}{d_2 \cdot (d_2 - d_1)} + c_2 \cdot d_2^k;$$

$$v_k = \frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_2 - d_1} + c_1 \cdot d_1^k + c_2 \cdot d_2^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1 = 0$ и $v_2 = 1$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k \geq 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k = 1$ и $k = 2$, начальным условиям, находим

$$v_1 = 0 = 0 + c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2;$$

$$v_2 = 1 = 1 + c_1 \cdot d_1^2 + c_2 \cdot d_2^2$$

или

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0;$$

$$d_1^2 \cdot c_1 + d_2^2 \cdot c_2 = 0.$$

Из полученной системы сразу следует, что $c_1 = c_2 = 0$.

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{d_1^{k-1} - d_2^{k-1}}{d_2 - d_1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_2 - d_1},$$

при $k \geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1} ,$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1 \ ^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1 + d_2) \cdot \lambda + d_1 \cdot d_2 = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \ \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A-\Lambda_i]$

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1+d_2-d_1 & d_1+d_2-d_2\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_2 & d_1\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix}d_1\cdot d_2 & -d_1\\ -d_1\cdot d_2 & d_2\end{bmatrix}=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d_2\\ -1 & 1/d_1\end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}d_2 & d_1\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1^k & 0\\ 0 & d_2^k\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d_2\\ -1 & 1/d_1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix}d_2\cdot d_1^k-d_1\cdot d_2^k & -d_1^k+d_2^k\\ d_1\cdot d_2\cdot(d_1^k-d_2^k) & -d_1\cdot d_1^k+d_2\cdot d_2^k\end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix};\; F_k=\begin{bmatrix}0\\ f_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1_0\end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k\geq 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения v_1 и v_2, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения v_0 и v_1.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k=0+\sum_{n=1}^{k}\frac{-d_1^{k-n}+d_2^{k-n}}{d_2-d_1}\cdot 1_{n-1}=\frac{-d_1^k}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_1^n}+\frac{d_2^k}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d_2^n}.$$

Используем для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k=0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым. В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{-d_1^k}{(d_2-d_1)\cdot d_1} + \frac{d_2^k}{(d_2-d_1)\cdot d_2} = \frac{d_1^{k-1}-d_2^{k-1}}{d_2-d_1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_2-d_1},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Пример G. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z^2 + b_1\cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)},$$

где E_z - изображение входного воздействия; V_z - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T} + b_1\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T} + b_0}{(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-1)\cdot(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-d)} = \frac{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T} + b_1\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T} + b_0}{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T} - (1+d)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T} + d},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega))\cdot 180/\pi.$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z\cdot(z^2 + b_1\cdot z + b_0)}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z-1)\cdot(z-d) = z^2 - (1+d)\cdot z + d = 0,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1 = 1;\ d_2 = d$.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k \geq 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + b_0)}{(z-1)^2 \cdot (z-d)}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$V_z = \frac{z \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + b_0)}{(z-1)^2 \cdot (z-d)} \Rightarrow v_k = A + A_0 \cdot t + B \cdot e^{-\alpha \cdot t} = A + A_0 \cdot t + B \cdot d^k$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1 - 2 \cdot d - d \cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2} + \frac{k \cdot (1 + b_1 + b_0)}{(1-d)} + \frac{(d^2 + d \cdot b_1 + b_0) \cdot d^k}{(1-d)^2},$$

где $A = \dfrac{1 - 2 \cdot d - d \cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2}$; $A_0 = \dfrac{1 + b_1 + b_0}{T \cdot (1-d)}$; $B = \dfrac{d^2 + d \cdot b_1 + b_0}{(1-d)^2}$; $\alpha = -\dfrac{\ln(d)}{T}$;

$k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; T - период входной последовательности.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{z^2 - (1+d)\cdot z + d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{E^2 + b_1 \cdot E + b_0}{E^2 - (1+d)\cdot E + d}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_{k+2} + b_1 \cdot 1_{k+1} + b_0 \cdot 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (1+d)\cdot v_{k+1} - d \cdot v_k + 1_{k+2} + b_1 \cdot 1_{k+1} + b_0 \cdot 1_k .$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)}\right] = 1.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0 = \frac{z^2\cdot(z^2 + b_1\cdot z + b_0)}{(z-1)^2\cdot(z-d)} - z =$$

$$= \frac{z^2\cdot(z^2 + b_1\cdot z + b_0) - z\cdot(z-1)^2\cdot(z-d)}{(z-1)^2\cdot(z-d)} =$$

$$= \frac{(2+d+b_1)\cdot z^3 + (1-2\cdot d + b_0)\cdot z^2 + d\cdot z}{(z-1)^2\cdot(z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k\to 0} v_{k+1} = \lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z - z\cdot v_0) =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\frac{(2+d+b_1)\cdot z^3 + (1-2\cdot d + b_0)\cdot z^2 + d\cdot z}{(z-1)^2\cdot(z-d)}\right] =$$

$$= (1+d) + (1+b_1).$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$ и $k=-1$, последовательно получаем

$$v_0=(1+d)\cdot v_{-1}-d\cdot v_{-2}+1_0+b_1\cdot 1_{-1}+b_0\cdot 1_{-2}=$$
$$=(1+d)\cdot 0-d\cdot 0+1+b_1\cdot 0+b_0\cdot 0=1;$$
$$v_1=(1+d)\cdot v_0-d\cdot v_{-1}+1_1+b_1\cdot 1_0+b_0\cdot 1_{-1}=$$
$$=(1+d)\cdot 1-d\cdot 0+1+b_1\cdot 1+b_0\cdot 0=(1+d)+(1+b_1).$$

Таким образом, получаем, что в данном случае начальные значения равны $v_0=1$ и $v_1=(1+d)+(1+b_1)$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2}-(1+d)\cdot v_{k+1}+d\cdot v_k=1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k=f_k$$

следует искать в виде

$$v_k=c_{1,k}\cdot v_{1,k}+c_{2,k}\cdot v_{2,k}=c_{1,k}\cdot 1^k+c_{2,k}\cdot d^k,$$

где 1, d - корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=1^k$, $y_{2,k}=d^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+1}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+1}=0;$$
$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+2}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+2}=1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k=f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta=\Delta C=\begin{vmatrix}1^{k+1} & d^{k+1}\\ 1^{k+2} & d^{k+2}\end{vmatrix}=1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & d^{k+1}\\ f_k & d^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)\cdot d^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)}=$$

$$=\frac{-(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)}{1^{k+1}\cdot(d-1)};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}1^{k+1} & 0\\ 1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)\cdot 1^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)}=$$

$$=\frac{1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k}{d^{k+1}\cdot(d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{1^n\cdot(d-1)}=\frac{-(1+b_1+b_0)}{d-1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{1^n}=$$

$$=\frac{-(1+b_1+b_0)\cdot k}{d-1}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d^n\cdot(d-1)}=\frac{1+b_1+b_0}{d-1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d^n}=$$

$$=\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d^k-1)}{d^k\cdot(d-1)^2}+c_2,$$

где $c_1,\ c_2$ - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=\frac{-(1+b_1+b_0)\cdot k\cdot 1^k}{d-1}+c_1\cdot 1^k+\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d^k-1)}{(d-1)^2}+c_2\cdot d^k$$

или

$$v_k=\frac{-(1+b_1+b_0)\cdot k\cdot 1^k}{d-1}+\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d^k-1)}{(d-1)^2}+c_1\cdot 1^k+c_2\cdot d^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0=1$ и $v_1=(1+d)+(1+b_1)$. Так, приравнивая общее решение, при $k=0$ и $k=1$, начальным условиям, находим

$$v_0 = 1 = -0 + 0 + c_1 + c_2;$$

$$v_1 = (1+d) + (1+b_1) = -\frac{1+b_1+b_0}{d-1} + \frac{1+b_1+b_0}{d-1} + c_1 + c_2 \cdot d$$

или

$$c_1 + c_2 = 1;$$

$$c_1 + d \cdot c_2 = (1+d) + (1+b_1) = Q.$$

Определим значения постоянных суммирования c_1 и c_2, используя правило Крамера для решения линейной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & d \end{vmatrix} = d - 1;$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ Q & d \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1+d+1+b_1-d)}{d-1} = \frac{-(2+b_1)}{d-1};$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & Q \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1+d+1+b_1-1}{d-1} = \frac{1+d+b_1}{d-1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = \frac{-(1+b_1+b_0)\cdot k \cdot 1^k}{d-1} + \frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d^k-1)}{(d-1)^2} - \frac{2+b_1}{d-1} + \frac{(1+d+b_1)\cdot d^k}{d-1}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1-2\cdot d - d\cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2} + \frac{k\cdot(1+b_1+b_0)}{(1-d)} + \frac{(d^2 + d\cdot b_1 + b_0)\cdot d^k}{(1-d)^2}.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d\cdot v_k = 1_{k+2} + b_1 \cdot 1_{k+1} + b_0 \cdot 1_k = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1+d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+2} + b_1 \cdot 1_{k+1} + b_0 \cdot 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1} ,$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = \; v_0 \quad v_1 \;^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1+d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1+d) \cdot \lambda + d = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \;\; \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+d-1 & 1+d-d \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d \cdot (d-1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d\cdot(d-1)}\cdot\begin{bmatrix} d & -1 \\ -d & d \end{bmatrix} = \frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & d^k \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix} d\cdot 1^k - 1\cdot d^k & -1^k + d^k \\ d\cdot 1^k - d\cdot d^k & -1^k + d\cdot d^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (1+d)+(1+b_1) \end{bmatrix};\ F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+2} + b_1\cdot 1_{k+1} + b_0\cdot 1_k \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle \begin{matrix} (-1^k + d^k)\cdot 1 + (-1^k + d^k)\cdot(1+d+1+b) + \\ + \sum\limits_{n=1}^{k} (-1^{k-n} + d^{k-n})\cdot(1_{n+1} + b_1\cdot 1_n + b_0\cdot 1_{n-1}) \end{matrix} \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle \begin{matrix} -(1+b_1+b_0)\cdot k - (2+b_1) + (1+d+b_1)\cdot d^k + \\ +(1+b_1+b_0)\cdot d^k\cdot\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{d^n} \end{matrix} \right\rangle.$$

Используя для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \ge 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1}\cdot\left\langle \begin{matrix} -(1+b_1+b_0)\cdot k - (2+b_1) + (1+d+b_1)\cdot d^k + \\ + \dfrac{(1+b_1+b_0)\cdot d^k}{d^k\cdot(d-1)} \end{matrix} \right\rangle;$$

$$h_k = v_k = \frac{1-2\cdot d - d\cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2} + \frac{k\cdot(1+b_1+b_0)}{(1-d)} + \frac{(d^2+d\cdot b_1+b_0)\cdot d^k}{(1-d)^2}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k \ge 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla\cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta\cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = v_k = \frac{1-2\cdot d - d\cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2} + \frac{k\cdot(1+b_1+b_0)}{(1-d)} + \frac{(d^2+d\cdot b_1+b_0)\cdot d^k}{(1-d)^2},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = v_{k-1} = \frac{1-2\cdot d - d\cdot b_1 - b_0}{(1-d)^2} + \frac{(k-1)\cdot(1+b_1+b_0)}{(1-d)} +$$

$$+\frac{(d^2+d\cdot b_1+b_0)\cdot d^{k-1}}{(1-d)^2}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{1+b_1+b_0}{1-d} - \frac{(d^2+d\cdot b_1+b_0)\cdot d^{k-1}}{1-d};$$

$$g_k = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot d^k}{1-d} + \frac{b_0\cdot(1-d^{k-1})}{1-d}$$

при $k \ge 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot d^{k+1}}{1-d} + \frac{b_0\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \ge 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{z\cdot(z+b_1)}{(z-1)\cdot(z-d)} + \frac{b_0}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому разобьем его на два слагаемых.

В соответствии с таблицами обратного Z- преобразования первому слагаемому соответствует оригинал

$$F_{1,z} = \frac{z\cdot(z+b_1)}{(z-1)\cdot(z-d)} \Rightarrow f_{1,k} = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{1-d} = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot d^k}{1-d},$$

где $\alpha = -\dfrac{\ln(d)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; T - период входной последовательности.

В таблицах обратного Z- преобразования выражение соответствующее второму слагаемому отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z,$$

находим

$$f_{2,0} = \lim_{z\to\infty} F_{2,z} = \lim_{z\to\infty} \frac{b_0}{(z-1)\cdot(z-d)} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{b_0\cdot z}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$f_{2,k+1} = \frac{b_0\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})}{1-d} = \frac{b_0\cdot(1-d^k)}{1-d},$$

при $k \ge 0$ или

$$f_{2,k} = \frac{b_0 \cdot (1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \geq 1$, где $\alpha = -\frac{\ln(d)}{T}$; $k = \frac{t}{T}$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; T - период входной последовательности.

В итоге, суммируя оригиналы первого и второго слагаемых изображения, получаем оригинал выходной реакции, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot d^{k+1}}{1-d} + \frac{b_0 \cdot (1-d^k)}{1-d},$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = \frac{1+b_1-(d+b_1)\cdot d^k}{1-d} + \frac{b_0 \cdot (1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \geq 1$.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_1 = g_1 = 1 + d + b_1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{z^2 - (1+d)\cdot z + d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E^2 + b_1 \cdot E + b_0}{E^2 - (1+d)\cdot E + d}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (1+d)\cdot v_{k+1} - d \cdot v_k + 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 1.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + b_0)}{(z-1) \cdot (z-d)} - z =$$

$$= \frac{(1+d+b_1) \cdot z^2 + (d+b_0) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[\frac{(1+d+b_1) \cdot z^2 + (b_0 - d) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = 1 + d + b_1.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_1 = \frac{(1+d+b_1) \cdot z^3 + (b_0 - d) \cdot z^2}{(z-1) \cdot (z-d)} - z \cdot (1+d+b_1) =$$

$$= \frac{[1 + b_1 + b_0 + d \cdot (1+d+b_1)] \cdot z^2 - d \cdot (1+d+b_1) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-d)}.$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k \to 0} v_{k+2} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_1) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[\frac{[1 + b_1 + b_0 + d \cdot (1+d+b_1)] \cdot z^2 - d \cdot (1+d+b_1) \cdot z}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] =$$

$$= 1 + b_1 + b_0 + d \cdot (1+d+b_1).$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$, $k=-1$ и $k=0$, последовательно получаем

$$v_0 = (1+d) \cdot v_{-1} - d \cdot v_{-2} + 1_0 + b_1 \cdot 1_{-1} + b_0 \cdot 1_{-2} =$$

$$= (1+d) \cdot 0 - d \cdot 0 + 1 + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0 = 1;$$

$$v_1 = (1+d) \cdot v_0 - d \cdot v_{-1} + 1_1 + b_1 \cdot 1_0 + b_0 \cdot 1_{-1} =$$

$$= (1+d) \cdot 1 - d \cdot 0 + 0 + b_1 \cdot 1 + b_0 \cdot 0 = 1 + d + b_1;$$

$$v_2 = (1+d) \cdot v_1 - d \cdot v_0 + 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 =$$

$$= (1+d) \cdot (1+d+b_1) - d \cdot 1 + 0 + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 1 = 1 + b_1 + b_0 + d \cdot (1+d+b_1).$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 1$, $v_1 = 1 + d + b_1$ и $v_2 = 1 + b_1 + b_0 + d \cdot (1+d+b_1)$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2}-(1+d)\cdot v_{k+1}+d\cdot v_k=1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0=f_k$$

следует искать в виде

$$v_k=c_{1,k}\cdot v_{1,k}+c_{2,k}\cdot v_{2,k}=c_{1,k}\cdot 1^k+c_{2,k}\cdot d^k,$$

где $1,\ d$ - корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=1^k$, $y_{2,k}=d^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+1}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+1}=0;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot 1^{k+2}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d^{k+2}=1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0=f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta=\Delta C=\begin{vmatrix}1^{k+1} & d^{k+1}\\ 1^{k+2} & d^{k+2}\end{vmatrix}=1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & d^{k+1}\\ f_k & d^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-(1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0)\cdot d^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)}=\frac{-(1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0)}{d-1};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}1^{k+1} & 0\\ 1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0)\cdot 1^{k+1}}{1^{k+1}\cdot d^{k+1}\cdot(d-1)}=\frac{1_2+b_1\cdot 1_1+b_0\cdot 1_0}{d^{k+1}\cdot(d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k=0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{1^n\cdot(d-1)}=$$

$$=\frac{-1}{d-1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{1^n}=\frac{-b_0}{d-1}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d^n\cdot(d-1)}=$$

$$=\frac{1}{d-1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d^n}=\frac{b_0}{d\cdot(d-1)}+c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=\frac{-b_0\cdot 1^k}{d-1}+c_1\cdot 1^k+\frac{b_0\cdot d^k}{d\cdot(d-1)}+c_2\cdot d^k=$$

$$=\frac{-b_0}{d-1}+\frac{b_0\cdot d^{k-1}}{d-1}+c_1+c_2\cdot d^k=\frac{-b_0\cdot(1-d^{k-1})}{d-1}+c_1+c_2\cdot d^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1=1+d+b_1$ и $v_2=1+b_1+b_0+d\cdot(1+d+b_1)$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k\geq 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k=1$ и $k=2$, начальным условиям, находим

$$v_1=1+d+b_1=0+c_1+c_2\cdot d;$$

$$v_2=1+b_1+b_0+d\cdot(1+d+b_1)=b_0+c_1+c_2\cdot d^2$$

или

$$c_1+d\cdot c_2=1+d+b_1=Q_1;$$

$$c_1+d^2\cdot c_2=1+b_1+d\cdot(1+d+b_1)=Q_2.$$

Определим значения постоянных суммирования c_1 и c_2, используя правило Крамера для решения линейной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & d\\ 1 & d^2\end{vmatrix}=d\cdot(d-1);$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}Q_1 & d\\ Q_2 & d^2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{d^2+d^3+d^2\cdot b_1-d-d\cdot b_1-d^2-d^3-d^2\cdot b_1}{d\cdot(d-1)}=\frac{-(1+b_1)}{d-1};$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & Q_1 \\ 1 & Q_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1 + b_1 + d \cdot (1 + d + b_1) - 1 - d - b_1}{d \cdot (d - 1)} = \frac{d + b_1}{d - 1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{-b_0 \cdot (1 - d^{k-1})}{d - 1} - \frac{1 + b_1}{d - 1} + \frac{(d + b_1) \cdot d^k}{d - 1} =$$

$$= \frac{1 + b_1 - (d + b_1) \cdot d^k}{1 - d} + \frac{b_0 \cdot (1 - d^{k-1})}{1 - d},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1 + b_1 - (d + b_1) \cdot d^{k+1}}{1 - d} + \frac{b_0 \cdot (1 - d^k)}{1 - d},$$

при $k \geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (1 + d) \cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1 + d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \left[x_{1,0} \quad x_{2,0} \right]^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1 + d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + d) \cdot \lambda + d = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + d - 1 & 1 + d - d \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d \cdot (d - 1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d \cdot (d - 1)} \cdot \begin{bmatrix} d & -1 \\ -d & d \end{bmatrix} = \frac{1}{d - 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & d^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d - 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d - 1} \cdot \begin{bmatrix} d \cdot 1^k - 1 \cdot d^k & -1^k + d^k \\ d \cdot 1^k - d \cdot d^k & -1^k + d \cdot d^k \end{bmatrix} .$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+d+b_1 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k \geq 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения v_1 и v_2, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения v_0 и v_1.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle \begin{aligned} &(d-d^k)\cdot 1 + (-1+d^k)\cdot(1+d+b_1) + \\ &+\sum_{n=1}^{k} (-1^{k-n} + d^{k-n})\cdot(1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1}) \end{aligned} \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle \begin{aligned} &-1 - b_1 + (d+b_1)\cdot d^k - 1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{(1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1})}{1^n} + \\ &+d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{(1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1})}{d^n} \end{aligned} \right\rangle.$$

Используем для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым. В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle -1 + b_1 + (d+b_1)\cdot d^k - b_0 + b_0 \cdot d^k \right\rangle =$$

$$= \frac{1 + b_1 - (d+b_1)\cdot d^k}{1-d} + \frac{b_0 \cdot (1-d^{k-1})}{1-d},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1 + b_1 - (d+b_1)\cdot d^{k+1}}{1-d} + \frac{b_0 \cdot (1-d^k)}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Пример Н. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)},$$

где E_z - изображение входного воздействия; V_z - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot T}+b}{(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-d_1)\cdot(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-d_2)} =$$

$$= \frac{e^{-j\cdot\omega\cdot T}+b}{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T}-(d_1+d_2)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T}+d_1\cdot d_2},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega))\cdot 180/\pi.$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z\cdot(z+b)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z-d_1)\cdot(z-d_2) = z^2-(d_1+d_2)\cdot z+d_1\cdot d_2 = 0,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1 = d_1$; $d_2 = d_2$.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k \geq 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z \cdot (z+b)}{(z-1) \cdot (z-d_1) \cdot (z-d_2)}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$V_z = \frac{z \cdot (z+b)}{(z-1) \cdot (z-d_1) \cdot (z-d_2)} \Rightarrow v_k = A + B_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$

$$= A + B_1 \cdot d_1^k + B_2 \cdot d_2^k$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1+b}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)} + \frac{(d_1+b) \cdot d_1^k}{(1-d_1) \cdot (d_2-d_1)} + \frac{(d_2+b) \cdot d_2^k}{(1-d_2) \cdot (d_1-d_2)},$$

где $A = \dfrac{1+b}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)}$; $B_1 = \dfrac{d_1+b}{(1-d_1) \cdot (d_2-d_1)}$; $B_2 = \dfrac{d_2+b}{(1-d_2) \cdot (d_1-d_2)}$; $\alpha_1 = -\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1 \cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2 \cdot t} = d_2^k$; T- период входной последовательности.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 0$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{(z-d_1) \cdot (z-d_2)} = \frac{z+b}{z^2 - (d_1+d_2) \cdot z + d_1 \cdot d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{E+b}{E^2 - (d_1+d_2) \cdot E + d_1 \cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1+d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_{k+1} + b \cdot 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_k + 1_{k+1} + b \cdot 1_k .$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+b}{(z-d_1) \cdot (z-d_2)} \right] = 0 .$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z^2 \cdot (z+b)}{(z-1) \cdot (z-d_1) \cdot (z-d_2)} .$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z}{z-1} \cdot \frac{z \cdot (z+b)}{(z-d_1) \cdot (z-d_2)} \right] = 1 .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k = -2$ и $k = -1$, последовательно получаем

$$v_0 = (d_1 + d_2) \cdot v_{-1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-2} + 1_{-1} + b \cdot 1_{-2} =$$

$$= (d_1 + d_2) \cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 0 + b \cdot 0 = 0 ;$$

$$v_1 = (d_1 + d_2) \cdot v_0 - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-1} + 1_0 + b \cdot 1_{-1} = (d_1 + d_2) \cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 1 + b \cdot 0 = 1 .$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$ и $v_1 = 1$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_{k+1} + b \cdot 1_k = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k + c_{2,k} \cdot d_2^k ,$$

где d_1, d_2 - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = d_1^k$, $y_{2,k} = d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+2} = 1_{k+1} + b \cdot 1_k = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix} = d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d_2^{k+1} \\ f_k & d_2^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1_{k+1} + b \cdot 1_k) \cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{-(1_{k+1} + b \cdot 1_k)}{d_1^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} d_1^{k+1} & 0 \\ d_1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1_{k+1} + b \cdot 1_k) \cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{1_{k+1} + b \cdot 1_k}{d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d_1^n \cdot (d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{-(1+b)}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{d_1^n} = \frac{-(1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot d_1^k \cdot (d_1 - 1)} + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d_2^n \cdot (d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{1+b}{d_2 - d_1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{d_2^n} = \frac{(1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot d_2^k \cdot (d_2 - 1)} + c_2 ,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k = -\frac{(1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + c_1 \cdot d_1^k + \frac{(1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)} + c_2 \cdot d_2^k ;$$

$$v_k = -\frac{(1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{(1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)} + c_1 \cdot d_1^k + c_2 \cdot d_2^k .$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0 = 0$ и $v_1 = 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k = 0$ и $k = 1$, начальным условиям, находим

$$v_0 = 0 = -0 + 0 + c_1 + c_2 ;$$

$$v_1 = 1 = -\frac{1+b}{d_2 - d_1} + \frac{1+b}{d_2 - d_1} + c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2$$

или

$$c_1 + c_2 = 0 ;$$

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 1 .$$

Постоянные суммирования c_1 и c_2 найдем из полученной системы, используя правило Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = d_2 - d_1 ; \quad c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1}{d_2 - d_1} \;\; ; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ d_1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{d_2 - d_1} .$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = -\frac{(1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{(1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)} - \frac{d_1^k}{d_2 - d_1} + \frac{d_2^k}{d_2 - d_1} ;$$

$$v_k = \frac{-(1+b) \cdot (d_1^k - 1) - (d_1 - 1) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{(1+b) \cdot (d_2^k - 1) + (d_2 - 1) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)} ;$$

$$v_k = \frac{(1+b) - (b + d_1) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{-(1+b) + (b + d_2) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1+b}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{(d_1+b)\cdot d_1^k}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)} + \frac{(d_2+b)\cdot d_2^k}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)}.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} + d_1\cdot d_2\cdot v_k = 1_{k+1} + b\cdot 1_k = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1\cdot d_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+1} + b\cdot 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A\cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k\cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n}\cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H\cdot\Lambda\cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1\cdot d_2 & d_1+d_2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1+d_2)\cdot\lambda + d_1\cdot d_2 = 0.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 - d_1 & d_1 + d_2 - d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \cdot d_2 & -d_1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(d_2 - d_1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \begin{bmatrix} d_2 \cdot d_1^k - d_1 \cdot d_2^k & -d_1^k + d_2^k \\ d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1^k - d_2^k) & -d_1 \cdot d_1^k + d_2 \cdot d_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+1} + b \cdot 1_k \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle (-d_1^k + d_2^k) \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} (-d_1^{k-n} + d_2^{k-n}) \cdot (1_n + b \cdot 1_{n-1}) \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle -d_1^k + d_2^k - d_1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d_1^n} + d_2^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d_2^n} \right\rangle.$$

Используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \geq 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle -d_1^k + d_2^k - \frac{d_1^k \cdot (1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{d_1^k \cdot (d_1 - 1)} + \frac{d_2^k \cdot (1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{d_2^k \cdot (d_2 - 1)} \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle \frac{-d_1^k \cdot (d_1 - 1) - (1+b) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_1 - 1)} + \frac{d_2^k \cdot (d_2 - 1) + (1+b) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - 1)} \right\rangle$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1+b}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)} + \frac{(d_1 + b) \cdot d_1^k}{(1-d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{(d_2 + b) \cdot d_2^k}{(1-d_2) \cdot (d_1 - d_2)}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k \geq 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = v_k = \frac{1+b}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)} + \frac{(d_1 + b) \cdot d_1^k}{(1-d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{(d_2 + b) \cdot d_2^k}{(1-d_2) \cdot (d_1 - d_2)},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = v_{k-1} = \frac{1+b}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{(d_1+b)\cdot d_1^{k-1}}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)} + \frac{(d_2+b)\cdot d_2^{k-1}}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2} + \frac{b\cdot(d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{d_1^{k+1} - d_2^{k+1}}{d_1 - d_2} + \frac{b\cdot(d_1^k - d_2^k)}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z+b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} + \frac{b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому разобьем его на два слагаемых.

В соответствии с таблицами обратного Z- преобразования первому слагаемому соответствует оригинал

$$F_{1,z} = \frac{z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} \Rightarrow f_{1,k} = \frac{e^{-\alpha_1\cdot t} - e^{-\alpha_2\cdot t}}{d_1 - d_2} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2},$$

где $\alpha_1 = -\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t} = d_2^k$; T- период входной последовательности.

В таблицах обратного Z- преобразования выражение соответствующее второму слагаемому отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z,$$

находим

$$f_{2,0} = \lim_{z\to\infty} F_{2,z} = \lim_{z\to\infty} \frac{b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = 0\,.$$

Далее, используя теорему Z - преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{b\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\,.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z - преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$f_{2,k+1} = \frac{b\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t} - e^{-\alpha_2\cdot t})}{d_1-d_2} = \frac{b\cdot(d_1^k - d_2^k)}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 0$ или

$$f_{2,k} = \frac{b\cdot(d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 1$, где $\alpha_1 = -\frac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\frac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \frac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t} = d_2^k$; T - период входной последовательности.

В итоге, суммируя оригиналы первого и второго слагаемых изображения, получаем оригинал выходной реакции, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} = \frac{d_1^{k+1} - d_2^{k+1}}{d_1-d_2} + \frac{b\cdot(d_1^k - d_2^k)}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 0$ или

$$g_k = v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1-d_2} + \frac{b\cdot(d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 1$.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_1 = g_1 = 1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{z+b}{z^2-(d_1+d_2)\cdot z + d_1\cdot d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E+b}{E^2-(d_1+d_2)\cdot E + d_1\cdot d_2}\,.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2}-(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}+d_1\cdot d_2\cdot v_k=1_1+b\cdot 1_0=f_k$$

или

$$v_{k+2}=(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}-d_1\cdot d_2\cdot v_k+1_1+b\cdot 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k\geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0=\lim_{k\to 0}v_k=\lim_{z\to\infty}V_z=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z+b}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right]=0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1}\Rightarrow z\cdot V_z-z\cdot v_0=\frac{z\cdot(z+b)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1=\lim_{k\to 0}v_{k+1}=\lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z-z\cdot v_0)=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z\cdot(z+b)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right]=1.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2}\Rightarrow z\cdot V_z-z\cdot v_1=\frac{z^2\cdot(z+b)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}-z\cdot 1=$$

$$=\frac{(d_1+d_2+b)\cdot z^2+(b-d_1\cdot d_2)\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2=\lim_{k\to 0}v_{k+2}=\lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z-z\cdot v_1)=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{(d_1+d_2+b)\cdot z^2+(b-d_1\cdot d_2)\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right]=d_1+d_2+b.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$, $k=-1$ и $k=0$, последовательно получаем

$$v_0 = (d_1 + d_2) \cdot v_{-1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-2} + 1_{-1} + b \cdot 1_{-2} =$$
$$= (d_1 + d_2) \cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 0 + b \cdot 0 = 0;$$
$$v_1 = (d_1 + d_2) \cdot v_0 - d_1 \cdot d_2 \cdot v_{-1} + 1_0 + b \cdot 1_{-1} =$$
$$= (d_1 + d_2) \cdot 0 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 1 + b \cdot 0 = 1;$$
$$v_2 = (d_1 + d_2) \cdot v_1 - d_1 \cdot d_2 \cdot v_0 + 1_1 + b \cdot 1_0 =$$
$$= (d_1 + d_2) \cdot 1 - d_1 \cdot d_2 \cdot 0 + 0 + b \cdot 1 = d_1 + d_2 + b.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ и $v_2 = d_1 + d_2 + b$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_1 + b \cdot 1_0 = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k + c_{2,k} \cdot d_2^k,$$

где d_1, d_2 - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = d_1^k$, $y_{2,k} = d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+1} = 0;$$
$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+2} = 1_1 + b \cdot 1_0 = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix} = d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & d_2^{k+1}\\ f_k & d_2^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-(1_1+b\cdot 1_0)\cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=\frac{-(1_1+b\cdot 1_0)}{d_1^{k+1}\cdot(d_2-d_1)};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}d_1^{k+1} & 0\\ d_1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1_1+b\cdot 1_0)\cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=\frac{1_1+b\cdot 1_0}{d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k=0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_1^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{-1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_1^n}=\frac{-b}{d_1\cdot(d_2-d_1)}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_2^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_2^n}=\frac{b}{d_2\cdot(d_2-d_1)}+c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=\frac{-b\cdot d_1^k}{d_1\cdot(d_2-d_1)}+c_1\cdot d_1^k+\frac{b\cdot d_2^k}{d_2\cdot(d_2-d_1)}+c_2\cdot d_2^k;$$

$$v_k=\frac{b\cdot(d_2^{k-1}-d_1^{k-1})}{d_2-d_1}+c_1\cdot d_1^k+c_2\cdot d_2^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1=1$ и $v_2=d_1+d_2+b$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k\geq 1$. Так приравнивая общее решение, при $k=1$ и $k=2$, начальным условиям, находим

$$v_1=1=0+c_1\cdot d_1+c_2\cdot d_2;$$

$$v_2=d_1+d_2+b=b+c_1\cdot d_1^2+c_2\cdot d_2^2$$

или

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 1;$$
$$d_1^2 \cdot c_1 + d_2^2 \cdot c_2 = d_1 + d_2.$$

Постоянные суммирования c_1 и c_2 найдем из полученной системы, используя правило Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1^2 & d_2^2 \end{vmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1);$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & d_2 \\ d_1 + d_2 & d_2^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-d_1 \cdot d_2}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{-1}{d_2 - d_1};$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & 1 \\ d_1^2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d_1 \cdot d_2}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{1}{d_2 - d_1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{b \cdot (d_2^{k-1} - d_1^{k-1})}{d_2 - d_1} - \frac{d_1^k}{d_2 - d_1} + \frac{d_2^k}{d_2 - d_1} = \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2} + \frac{b \cdot (d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{d_1^{k+1} - d_2^{k+1}}{d_1 - d_2} + \frac{b \cdot (d_1^k - d_2^k)}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_1 + b \cdot 1_0 = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_1 + b \cdot 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1 + d_2) \cdot \lambda + d_1 \cdot d_2 = 0.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 - d_1 & d_1 + d_2 - d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix} d_1\cdot d_2 & -d_1 \\ -d_1\cdot d_2 & d_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix} d_2\cdot d_1^k-d_1\cdot d_2^k & -d_1^k+d_2^k \\ d_1\cdot d_2\cdot(d_1^k-d_2^k) & -d_1\cdot d_1^k+d_2\cdot d_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ F_k=\begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1_1+b\cdot 1_0 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k\geq 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения v_1 и v_2, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения v_0 и v_1.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\left\langle(-d_1^k+d_2^k)\cdot 1+\sum_{n=1}^{k}(-d_1^{k-n}+d_2^{k-n})\cdot(1_n+b\cdot 1_{n-1})\right\rangle;$$

$$v_k=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\left\langle(-d_1^k+d_2^k)-d_1^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_1^n}+d_2^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_n+b\cdot 1_{n-1}}{d_2^n}\right\rangle.$$

Используем для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k=0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым. В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{-d_1^k + d_2^k}{d_2 - d_1} - \frac{b \cdot d_1^k}{d_1 \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{b \cdot d_2^k}{d_2 \cdot (d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{d_1^k - d_2^k}{d_1 - d_2} + \frac{b \cdot (d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{d_1^{k+1} - d_2^{k+1}}{d_1 - d_2} + \frac{b \cdot (d_1^k - d_2^k)}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Пример I. Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z - d_1) \cdot (z - d_2)},$$

где E_z - изображение входного воздействия; V_z - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

Частотная характеристика дискретной системы определяется по системной функции путем замены $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} + b_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + b_0}{(e^{-j \cdot \omega \cdot T} - d_1) \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot T} - d_2)} =$$

$$= \frac{e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} + b_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + b_0}{e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} - (d_1 + d_2) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + d_1 \cdot d_2},$$

где T - период дискретизации по времени.

Амплитудно-частотная характеристика системы соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

Фазочастотная характеристика системы соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega)) \cdot 180 / \pi.$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + b_0)}{(z - d_1) \cdot (z - d_2)}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции, приравненный нулю, определяет характеристическое уравнение

$$(z-d_1)\cdot(z-d_2)=z^2-(d_1+d_2)\cdot z+d_1\cdot d_2=0,$$

корни которого, соответственно, равны $d_1=d_1;\ d_2=d_2$.

Переходная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность 1_k (единичных δ - импульсов при $k\geq 0$ и периодом T). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_k, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k=1_k\Rightarrow E_z=\frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z=\frac{z\cdot(z^2+b_1\cdot z+b_0)}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Из таблиц обратного Z- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику, исследуемой дискретной системы

$$V_z=\frac{z\cdot(z^2+b_1\cdot z+b_0)}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\Rightarrow v_k=A+B_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+B_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=$$

$$=A+B_1\cdot d_1^k+B_2\cdot d_2^k$$

или

$$h_k=v_k=\frac{1+b_1+b_0}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)}+\frac{(d_1^2+b_1\cdot d_1+b_0)\cdot d_1^k}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)}+\frac{(d_2^2+b_1\cdot d_2+b_0)\cdot d_2^k}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)},$$

где $A=\dfrac{1+b_1+b_0}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)}$; $B_1=\dfrac{d_1^2+b_1\cdot d_1+b_0}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)}$; $B_2=\dfrac{d_2^2+b_1\cdot d_2+b_0}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)}$; $\alpha_1=-\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2=-\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k=\dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t}=d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t}=d_2^k$; T- период входной последовательности.

Отметим, что при $k=0$ имеем $v_0=h_0=1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z}=\frac{z^2+b_1\cdot z+b_0}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}=\frac{z^2+b_1\cdot z+b_0}{z^2-(d_1+d_2)\cdot z+d_1\cdot d_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{v_k}{1_k}=\frac{E^2+b_1\cdot E+b_0}{E^2-(d_1+d_2)\cdot E+d_1\cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2}-(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}+d_1\cdot d_2\cdot v_k=1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k=f_k$$

или

$$v_{k+2}=(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}-d_1\cdot d_2\cdot v_k+1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, необходимо определить v_0 и v_1.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0=\lim_{k\to 0}v_k=\lim_{z\to\infty}V_z=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z^2+b_1\cdot z+b_0}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right]=1.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1}\Rightarrow z\cdot V_z-z\cdot v_0=\frac{z^2\cdot(z^2+b_1\cdot z+b_0)}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}-z\cdot 1=$$

$$=\frac{(1+b_1+d_1+d_2)\cdot z^3+(b_0-d_1-d_2-d_1\cdot d_2)\cdot z^2+d_1\cdot d_2\cdot z}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1=\lim_{k\to 0}v_{k+1}=\lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z-z\cdot v_0)=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{(1+b_1+d_1+d_2)\cdot z^3+(b_0-d_1-d_2-d_1\cdot d_2)\cdot z^2+d_1\cdot d_2\cdot z}{(z-1)\cdot(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right]=$$

$$=1+b_1+d_1+d_2.$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2$ и $k=-1$, последовательно получаем

$$v_0=(d_1+d_2)\cdot v_{-1}-d_1\cdot d_2\cdot v_{-2}+1_0+b_1\cdot 1_{-1}+b_0\cdot 1_{-2}=$$
$$=(d_1+d_2)\cdot 0-d_1\cdot d_2\cdot 0+1+b_1\cdot 0+b_0\cdot 0=1;$$
$$v_1=(d_1+d_2)\cdot v_0-d_1\cdot d_2\cdot v_{-1}+1_1+b_1\cdot 1_0+b_0\cdot 1_{-1}=$$
$$=(d_1+d_2)\cdot 1-d_1\cdot d_2\cdot 0+1+b_1\cdot 1+b_0\cdot 0=1+b_1+d_1+d_2\,.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0=1$ и $v_1=1+b_1+d_1+d_2$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2}-(d_1+d_2)\cdot v_{k+1}+d_1\cdot d_2\cdot v_k=1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k=f_k$$

следует искать в виде

$$v_k=c_{1,k}\cdot v_{1,k}+c_{2,k}\cdot v_{2,k}=c_{1,k}\cdot d_1^k+c_{2,k}\cdot d_2^k,$$

где $d_1,\ d_2$ - корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=d_1^k,\ y_{2,k}=d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k},\ c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot d_1^{k+1}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d_2^{k+1}=0;$$
$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot d_1^{k+2}+\Delta\cdot c_{2,k}\cdot d_2^{k+2}=1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k=f_k\,.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta=\Delta C=\begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix}=d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1);$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}=\frac{\begin{vmatrix}0 & d_2^{k+1}\\ f_k & d_2^{k+2}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)\cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{-(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)}{d_1^{k+1}\cdot(d_2-d_1)};$$

$$\Delta\cdot c_{2,k}=\frac{\begin{vmatrix}d_1^{k+1} & 0\\ d_1^{k+2} & f_k\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k)\cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1}\cdot d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k}{d_2^{k+1}\cdot(d_2-d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_1^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{-(1+b_1+b_0)}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_1^n}=\frac{-(1+b_1+b_0)\cdot(d_1^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot d_1^k\cdot(d_1-1)}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_2^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{1+b_1+b_0}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d_2^n}=\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d_2^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot d_2^k\cdot(d_2-1)}+c_2,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=-\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d_1^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot(d_1-1)}+c_1\cdot d_1^k+\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d_2^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot(d_2-1)}+c_2\cdot d_2^k;$$

$$v_k=-\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d_1^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot(d_1-1)}+\frac{(1+b_1+b_0)\cdot(d_2^k-1)}{(d_2-d_1)\cdot(d_2-1)}+c_1\cdot d_1^k+c_2\cdot d_2^k.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_0=1$ и $v_1=1+b_1+d_1+d_2$. Так, приравнивая общее решение, при $k=0$ и $k=1$, начальным условиям, находим

$$v_0=1=-0+0+c_1+c_2;$$

$$v_1 = 1 + b_1 + d_1 + d_2 = -\frac{1 + b_1 + b_0}{d_2 - d_1} + \frac{1 + b_1 + b_0}{d_2 - d_1} + c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2$$

или

$$c_1 + c_2 = 1;$$

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 1 + b_1 + d_1 + d_2 = Q\,.$$

Постоянные суммирования c_1 и c_2 найдем из полученной системы, используя правило Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = d_2 - d_1;$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ Q & d_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1 + b_1 + d_1)}{d_2 - d_1}\ ; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & Q \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1 + b_1 + d_2}{d_2 - d_1}\,.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = -\frac{(1 + b_1 + b_0) \cdot (d_1^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{(1 + b_1 + b_0) \cdot (d_2^k - 1)}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)} -$$

$$- \frac{(1 + b_1 + d_1) \cdot d_1^k}{d_2 - d_1} + \frac{(1 + b_1 + d_2) \cdot d_2^k}{d_2 - d_1};$$

$$v_k = \frac{-(1 + b_1 + b_0) \cdot (d_1^k - 1) - (d_1 - 1) \cdot (1 + b_1 + d_1) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} +$$

$$+ \frac{(1 + b_1 + b_0) \cdot (d_2^k - 1) + (d_2 - 1) \cdot (1 + b_1 + d_2) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)};$$

$$v_k = \frac{(1 + b_1 + b_0) - (d_1^2 + b_1 \cdot d_1 + b_0) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{-(1 + b_1 + b_0) + (d_2^2 + b_1 \cdot d_2 + b_0) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1 + b_1 + b_0}{(1 - d_1) \cdot (1 - d_2)} + \frac{(d_1^2 + b_1 \cdot d_1 + b_0) \cdot d_1^k}{(1 - d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{(d_2^2 + b_1 \cdot d_2 + b_0) \cdot d_2^k}{(1 - d_2) \cdot (d_1 - d_2)}\,.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_{k+2} + b_1 \cdot 1_{k+1} + b_0 \cdot 1_k = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k}=v_k$; $x_{2,k}=x_{1,k+1}=v_{k+1}$; $x_{3,k}=v_{2,k+1}=v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{k+2}+b_1 \cdot 1_{k+1}+b_0 \cdot 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1} ,$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 \end{bmatrix}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda)=\Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A-\Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1+d_2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1+d_2)\cdot\lambda + d_1 \cdot d_2 = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$\left(A - \Lambda_i\right) \cdot h_i = 0 ,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A-\Lambda_i]$

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1+d_2-d_1 & d_1+d_2-d_2\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_2 & d_1\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix}d_1\cdot d_2 & -d_1\\ -d_1\cdot d_2 & d_2\end{bmatrix}=\frac{1}{(d_2-d_1)}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d_2\\ -1 & 1/d_1\end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}d_2 & d_1\\ d_1\cdot d_2 & d_1\cdot d_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1^k & 0\\ 0 & d_2^k\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d_2\\ -1 & 1/d_1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\begin{bmatrix}d_2\cdot d_1^k-d_1\cdot d_2^k & -d_1^k+d_2^k\\ d_1\cdot d_2\cdot(d_1^k-d_2^k) & -d_1\cdot d_1^k+d_2\cdot d_2^k\end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1+b_1+d_1+d_2\end{bmatrix};\ F_k=\begin{bmatrix}0\\ f_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1_{k+2}+b_1\cdot 1_{k+1}+b_0\cdot 1_k\end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\left\langle\begin{matrix}(d_2\cdot d_1^k-d_1\cdot d_2^k)\cdot 1+(-d_1^k+d_2^k)\cdot(1+b_1+d_1+d_2)+\\ +\sum\limits_{n=1}^{k}(-d_1^{k-n}+d_2^{k-n})\cdot(1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1})\end{matrix}\right\rangle;$$

$$v_k=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\left\langle\begin{matrix}(1+b_1)\cdot(-d_1^k+d_2^k)-d_1\cdot d_1^k+d_2\cdot d_2^k-\\ -(1+b_1+b_0)\cdot d_1^k\cdot\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{d_1^n}+(1+b_1+b_0)\cdot d_2^k\cdot\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{d_2^n}\end{matrix}\right\rangle.$$

Используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \geq 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle \begin{matrix} -(1+b_1+d_1) \cdot d_1^k + (1+b_1+d_2) \cdot d_2^k - \\ -\dfrac{(1+b_1+b_0) \cdot (d_1^k - 1)}{d_1 - 1} + \dfrac{(1+b_1+b_0) \cdot (d_2^k - 1)}{d_2 - 1} \end{matrix} \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{-(1+b_1+b_0) \cdot (d_1^k - 1) - (d_1 - 1) \cdot (1+b_1+d_1) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} +$$

$$+ \frac{(1+b_1+b_0) \cdot (d_2^k - 1) + (d_2 - 1) \cdot (1+b_1+d_2) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)};$$

$$v_k = \frac{(1+b_1+b_0) - (d_1^2 + b_1 \cdot d_1 + b_0) \cdot d_1^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_1 - 1)} + \frac{-(1+b_1+b_0) + (d_2^2 + b_1 \cdot d_2 + b_0) \cdot d_2^k}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - 1)}$$

или

$$h_k = v_k = \frac{1+b_1+b_0}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)} + \frac{(d_1^2 + b_1 \cdot d_1 + b_0) \cdot d_1^k}{(1-d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{(d_2^2 + b_1 \cdot d_2 + b_0) \cdot d_2^k}{(1-d_2) \cdot (d_1 - d_2)}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Импульсная характеристика дискретной системы. Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный δ- импульс, при $k \geq 0$, то есть 1_0. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.

Определение импульсной характеристики по переходной характеристике. Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = \frac{1+b_1+b_0}{(1-d_1) \cdot (1-d_2)} + \frac{(d_1^2 + b_1 \cdot d_1 + b_0) \cdot d_1^k}{(1-d_1) \cdot (d_2 - d_1)} + \frac{(d_2^2 + b_1 \cdot d_2 + b_0) \cdot d_2^k}{(1-d_2) \cdot (d_1 - d_2)},$$

запишем выражение соответствующей функции, отстающей на один такт

$$h_{k-1} = \frac{1+b_1+b_0}{(1-d_1)\cdot(1-d_2)} + \frac{(d_1^2+b_1\cdot d_1+b_0)\cdot d_1^{k-1}}{(1-d_1)\cdot(d_2-d_1)} + \frac{(d_2^2+b_1\cdot d_2+b_0)\cdot d_2^{k-1}}{(1-d_2)\cdot(d_1-d_2)}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{(d_1+b_1)\cdot d_1^k}{d_1-d_2} + \frac{(d_2+b_1)\cdot d_2^k}{d_2-d_1} + \frac{b_0\cdot(d_1^{k-1}-d_2^{k-1})}{d_1-d_2},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{(d_1+b_1)\cdot d_1^{k+1}}{d_1-d_2} + \frac{(d_2+b_1)\cdot d_2^{k+1}}{d_2-d_1} + \frac{b_0\cdot(d_1^k-d_2^k)}{d_1-d_2},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

Операторный метод. Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории Z- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента z, называемых изображениями и наоборот.

Оригиналу входного воздействия 1_0, согласно теории Z-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной z вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z^2+b_1\cdot z+b_0}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = \frac{z\cdot(z+b_1)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} + \frac{b_0}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

В таблицах обратного Z- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому разобьем его на два слагаемых.

В соответствии с таблицами обратного Z- преобразования первому слагаемому соответствует оригинал

$$F_{1,z} = \frac{z\cdot(z+b_1)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} \Rightarrow f_{1,k} = B_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} + B_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} =$$

$$= \frac{(d_1+b_1)\cdot d_1^k}{d_1-d_2} + \frac{(d_2+b_1)\cdot d_2^k}{d_2-d_1},$$

где $\alpha_1 = -\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t} = d_2^k$; T- период входной последовательности.

В таблицах обратного Z- преобразования выражение соответствующее второму слагаемому отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z,$$

находим

$$f_{2,0} = \lim_{z\to\infty} F_{2,z} = \lim_{z\to\infty} \frac{b_0}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} = 0.$$

Далее, используя теорему Z- преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{b_0\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}.$$

Теперь, используя таблицы обратного Z- преобразования, находим оригинал выходной реакции

$$f_{2,k+1} = \frac{b_0\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t} - e^{-\alpha_2\cdot t})}{d_1-d_2} = \frac{b_0\cdot(d_1^k - d_2^k)}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 0$ или

$$f_{2,k} = \frac{b_0\cdot(d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 1$, где $\alpha_1 = -\dfrac{\ln(d_1)}{T}$; $\alpha_2 = -\dfrac{\ln(d_2)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha_1\cdot t} = d_1^k$; $e^{-\alpha_2\cdot t} = d_2^k$; T- период входной последовательности.

В итоге, суммируя оригиналы первого и второго слагаемых изображения, получаем оригинал выходной реакции, соответствующий импульсной характеристике, исследуемой дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} =$$

$$= \frac{(d_1+b_1)\cdot d_1^{k+1}}{d_1-d_2} + \frac{(d_2+b_1)\cdot d_2^{k+1}}{d_2-d_1} + \frac{b_0\cdot(d_1^k - d_2^k)}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 0$ или

$$g_k = v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = \frac{(d_1+b_1)\cdot d_1^k}{d_1-d_2} + \frac{(d_2+b_1)\cdot d_2^k}{d_2-d_1} + \frac{b_0\cdot(d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1-d_2},$$

при $k \ge 1$.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_1 = g_1 = 1$.

Построение разностного уравнения дискретной системы. Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены переменной z на k, в левой части выражения и заменой оператора z^n на оператор сдвига E^n, в правой части выражения

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)} = \frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{z^2 - (d_1 + d_2)\cdot z + d_1 \cdot d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E^2 + b_1 \cdot E + b_0}{E^2 - (d_1 + d_2)\cdot E + d_1 \cdot d_2}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2)\cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (d_1 + d_2)\cdot v_{k+1} - d_1 \cdot d_2 \cdot v_k + 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0.$$

Отметим, что переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется в предположении нулевых начальных значений, а истинные начальные значения учитываются позже при решении уравнения.

Определение начальных условий. Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить v_0, v_1 и v_2.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории Z- преобразования о начальном значении функции оригинала

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)} \right] = 1.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции v_{k+1} определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z \cdot (z^2 + b_1 \cdot z + b_0)}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)} - z \cdot 1 =$$

$$= \frac{(d_1 + d_2 + b_1)\cdot z^2 + (b_0 - d_1 \cdot d_2)\cdot z}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[\frac{(d_1 + d_2 + b_1)\cdot z^2 + (b_0 - d_1 \cdot d_2)\cdot z}{(z - d_1)\cdot(z - d_2)} \right] = d_1 + d_2 + b_1.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_1 =$$

$$= \frac{z\cdot[(d_1+d_2+b_1)\cdot z^2+(b_0-d_1\cdot d_2)\cdot z]}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)} - z\cdot(b_1+d_1+d_2) =$$

$$= \frac{[(d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0]\cdot z^2-(b_1+d_1+d_2)\cdot d_1\cdot d_2\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k\to 0} v_{k+2} = \lim_{z\to\infty}(z\cdot V_z - z\cdot v_1) =$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[\frac{[(d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0]\cdot z^2-(b_1+d_1+d_2)\cdot d_1\cdot d_2\cdot z}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)}\right] =$$

$$= (d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0 .$$

С другой стороны, для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса k, и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так, при $k=-2,\ k=-1$ и $k=0$, последовательно получаем

$$v_0 = (d_1+d_2)\cdot v_{-1} - d_1\cdot d_2\cdot v_{-2} + 1_0 + b_1\cdot 1_{-1} + b_0\cdot 1_{-2} =$$

$$= (d_1+d_2)\cdot 0 - d_1\cdot d_2\cdot 0 + 1 + b_1\cdot 0 + b_0\cdot 0 = 1;$$

$$v_1 = (d_1+d_2)\cdot v_0 - d_1\cdot d_2\cdot v_{-1} + 1_1 + b_1\cdot 1_0 + b_0\cdot 1_{-1} =$$

$$= (d_1+d_2)\cdot 1 - d_1\cdot d_2\cdot 0 + 0 + b_1\cdot 1 + b_0\cdot 0 = d_1+d_2+b_1;$$

$$v_2 = (d_1+d_2)\cdot v_1 - d_1\cdot d_2\cdot v_0 + 1_2 + b_1\cdot 1_1 + b_0\cdot 1_0 =$$

$$= (d_1+d_2)\cdot(d_1+d_2+b_1) - d_1\cdot d_2\cdot 1 + 0 + b_1\cdot 0 + b_0\cdot 1 =$$

$$= (d_1+d_2)^2 + b_1\cdot(d_1+d_2) + b_0 .$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0=1$, $v_1 = d_1+d_2+b_1$ и $v_2 = (d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0$.

Решение разностных уравнений. Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (d_1+d_2)\cdot v_{k+1} + d_1\cdot d_2\cdot v_k = 1_2 + b_1\cdot 1_1 + b_0\cdot 1_0 = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k}\cdot v_{1,k} + c_{2,k}\cdot v_{2,k} = c_{1,k}\cdot d_1^k + c_{2,k}\cdot d_2^k,$$

где $d_1,\ d_2$ - корни характеристического уравнения; $y_{1,k}=d_1^k,\ y_{2,k}=d_2^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k},\ c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot d_1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d_2^{k+2} = 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix} = d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d_2^{k+1} \\ f_k & d_2^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0) \cdot d_2^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{-(1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0)}{d_1^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} d_1^{k+1} & 0 \\ d_1^{k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0) \cdot d_1^{k+1}}{d_1^{k+1} \cdot d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0}{d_2^{k+1} \cdot (d_2 - d_1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_1^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{-1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_1^n}=\frac{-b_0}{d_1\cdot(d_2-d_1)}+c_1\,;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_2^n\cdot(d_2-d_1)}=$$

$$=\frac{1}{d_2-d_1}\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n+1}+b_1\cdot 1_n+b_0\cdot 1_{n-1}}{d_2^n}=\frac{b_0}{d_2\cdot(d_2-d_1)}+c_2\,,$$

где c_1, c_2 - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнения, получаем его в виде

$$v_k=\frac{b_0\cdot d_1^k}{d_1\cdot(d_1-d_2)}+c_1\cdot d_1^k+\frac{b_0\cdot d_2^k}{d_2\cdot(d_1-d_2)}+c_2\cdot d_2^k\,;$$

$$v_k=\frac{b_0\cdot(d_1^{k-1}-d_2^{k-1})}{d_1-d_2}+c_1\cdot d_1^k+c_2\cdot d_2^k\,.$$

Для определения постоянных суммирования c_1 и c_2 воспользуемся, найденными ранее, начальными условиями $v_1=d_1+d_2+b_1$ и $v_2=(d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k\ge 1$. Так, приравнивая общее решение, при $k=1$ и $k=2$, начальным условиям, находим

$$v_1=d_1+d_2+b_1=0+c_1\cdot d_1+c_2\cdot d_2\,;$$

$$v_2=(d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)+b_0=b_0+c_1\cdot d_1^2+c_2\cdot d_2^2$$

или

$$d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2=d_1+d_2+b_1=Q_1;$$

$$d_1^2\cdot c_1+d_2^2\cdot c_2=(d_1+d_2)^2+b_1\cdot(d_1+d_2)=Q_2\,.$$

Постоянные суммирования c_1 и c_2 найдем из полученной системы, используя правило Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}d_1 & d_2\\ d_1^2 & d_2^2\end{vmatrix}=d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1);$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}Q_1 & d_2\\ Q_2 & d_2^2\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-d_1\cdot d_2\cdot(d_1+b_1)}{d_1\cdot d_2\cdot(d_2-d_1)}=\frac{d_1+b_1}{d_1-d_2}\,;$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & Q_1 \\ d_1^2 & Q_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 + b_1)}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)} = \frac{d_2 + b_1}{d_2 - d_1}.$$

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{b_0 \cdot (d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2} + \frac{(d_1 + b_1) \cdot d_1^k}{d_1 - d_2} + \frac{(d_2 + b_1) \cdot d_2^k}{d_2 - d_1} =$$

$$= \frac{(d_1 + b_1) \cdot d_1^k}{d_1 - d_2} + \frac{(d_2 + b_1) \cdot d_2^k}{d_2 - d_1} + \frac{b_0 \cdot (d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{(d_1 + b_1) \cdot d_1^{k+1}}{d_1 - d_2} + \frac{(d_2 + b_1) \cdot d_2^{k+1}}{d_2 - d_1} + \frac{b_0 \cdot (d_1^k - d_2^k)}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы, и, как видим, совпадает с выражениями, найденными операторным методом.

Решение в форме Коши (метод Коши). Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot v_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot v_k = 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; A^k - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_1 + d_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d_1 + d_2) \cdot \lambda + d_1 \cdot d_2 = 0.$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы H, по известным собственным значениям матрицы A, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где Λ_i - диагональная матрица, составленная из λ_i.

Доказывается, что модальная матрица H может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 - d_1 & d_1 + d_2 - d_2 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d_1 \cdot d_2 \cdot (d_2 - d_1)} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \cdot d_2 & -d_1 \\ -d_1 \cdot d_2 & d_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d_2 & d_1 \\ d_1 \cdot d_2 & d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^k & 0 \\ 0 & d_2^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d_2 \\ -1 & 1/d_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \begin{bmatrix} d_2 \cdot d_1^k - d_1 \cdot d_2^k & -d_1^k + d_2^k \\ d_1 \cdot d_2 \cdot (d_1^k - d_2^k) & -d_1 \cdot d_1^k + d_2 \cdot d_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы A^{k-n} аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий X_0 и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений F_k имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d_1 + d_2 + b_1 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_2 + b_1 \cdot 1_1 + b_0 \cdot 1_0 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k \geq 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения v_1 и v_2, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения v_0 и v_1.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка, и, учитывая структуры векторов X_0 и F_k, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle \begin{matrix} (d_2 \cdot d_1^k - d_1 \cdot d_2^k) \cdot 1 + (-d_1^k + d_2^k) \cdot (d_1 + d_2 + b_1) + \\ + \sum\limits_{n=1}^{k} (-d_1^{k-n} + d_2^{k-n}) \cdot (1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1}) \end{matrix} \right\rangle;$$

$$v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle \begin{matrix} -(d_1 + b_1) \cdot d_1^k + (d_2 + b_1) \cdot d_2^k - \\ -d_1^k \cdot \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1}}{d_1^n} + \\ +d_2^k \cdot \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1_{n+1} + b_1 \cdot 1_n + b_0 \cdot 1_{n-1}}{d_2^n} \end{matrix} \right\rangle.$$

Используем для раскрытия сумм формулу геометрической прогрессии. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым. В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{1}{d_2 - d_1} \cdot \left\langle -(d_1 + b_1) \cdot d_1^k + (d_2 + b_1) \cdot d_2^k - \frac{d_1^k \cdot b_0}{d_1} + \frac{d_2^k \cdot b_0}{d_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{(d_1 + b_1) \cdot d_1^k}{d_1 - d_2} + \frac{(d_2 + b_1) \cdot d_2^k}{d_2 - d_1} + \frac{b_0 \cdot (d_1^{k-1} - d_2^{k-1})}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{(d_1 + b_1) \cdot d_1^{k+1}}{d_1 - d_2} + \frac{(d_2 + b_1) \cdot d_2^{k+1}}{d_2 - d_1} + \frac{b_0 \cdot (d_1^k - d_2^k)}{d_1 - d_2},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывают импульсную характеристику, исследуемой дискретной системы.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как уже отмечалось, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод отличается своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализуем и прост для реализации в современных системах аналитических исследований. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик дискретных устройств и систем второго порядка, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

В заключение, еще раз обратим внимание, на целесообразность приведения системных характеристик исследуемых устройств к нормированному каноническому виду, что существенно упрощает анализ и позволяет сразу отнести устройство к определенному классу устройств, характеристики которых совпадают с точностью до множителей.

Заключение

Приведенные в учебно-методическом пособии примеры подробно иллюстрируют предлагаемую методику исследования временных характеристик дискретных и цифровых устройств.

В пособии должное внимание уделено связи переходных и импульсных характеристик и методам формирования и решения соответствующих разностных уравнений.

Важным этапом исследования временных характеристик реальных дискретных устройств является приведение системной функции к нормированному каноническому виду, что позволяет существенно упростить и унифицировать последующие аналитические выкладки.

Приведенные в пособии методы достаточно продуктивны и универсальны. Операторный метод наиболее краток, однако трудно формализуем, предполагает наличие таблиц обратного преобразования Лапласа и ограничен воздействиями, для которых определено преобразование Лапласа. Метод Коши наиболее просто формализуем на произвольный случай и реализуем в обобщенной векторно-матричной форме. Метод Лагранжа по возможности формализации занимает промежуточное положение между операторным методом и методом Коши, однако является базовым в аналитическом плане.

Временные характеристики как реакции на последовательность единичных δ- импульсов либо одиночный единичный δ- импульс характеризуют быстродействие и время релаксации дискретных и цифровых устройств, и позволяют оценить скорость их реакции на реальный сигнал.

Предпринятое исследование убедительно показало плодотворность методов, изучаемых в дисциплине **«Прикладные математические методы в радиотехнике».**

Рассмотренные в пособии методы анализа переходных и импульсных характеристик достаточно универсальны и могут быть рекомендованы для использования, как в учебном процессе, так и для исследования реакций дискретных и цифровых устройств на произвольное воздействие с использованием современных систем для инженерных и научных исследований типа **MathCad, Maple-V, MatLab.**

Полученные в методическом пособии соотношения использованы в лабораторных работах по определению переходных и импульсных характеристик простых дискретных устройств по реакции на последовательность единичных δ- импульсов и одиночный единичный δ- импульс.

Список рекомендуемых источников

1. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971.- 808 с., 1974.- 754 с.
2. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова, Изд. 2-е, доп., в 2-х томах – Т. 1. - М.: Высшая школа, 1977.- 366 с.; Т. 2. - М.: Высшая школа, 1977.- 455 с.
3. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). – М.: Наука, 1970.- 620 с.
4. Овчиннников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1989.- 679 с.
5. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики (дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения). – М.: Высшая школа, 1974.- 367 с.
6. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.- 376 с.
7. Кологривов В.А. Руководство к лабораторным работам по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Для студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 60 с.
8. Кологривов В.А. Определение частотных характеристик аналоговых и дискретных устройств. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Для студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2005.- 54 с.
9. Кологривов В.А. Анализ временных характеристик аналоговых устройств. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Для студентов радиотехнических специальностей. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2005.- 102 с.