МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»

(ТУСУР)

Кафедра механики и графики

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МиГ

______________ Люкшин Б.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению практических работ по основам механики сплошных сред для студентов всех специальностей

Указания рассмотрены и одобрены

на методическом семинаре кафедры МиГ,

протокол № 77 от 18.06.2012 г.

2012

Методическая разработка содержит указания по проведению практических работ по дисциплине «Основы механики сплошных сред» и предназначена для студентов всех специальностей, изучающих данную дисциплину.

Разработчик: профессор кафедры МиГ Герасимов А.В.

СОДЕРЖАНИЕ

Важнейшей компонентой математического инструментария механики сплошных сред является тензорное исчисление. Использование его позволило наиболее адекватно описывать процессы, протекающие в сплошных средах, особенно в твердых деформируемых, при различных внешних воздействиях. В работе приведено краткое изложение основ тензорного исчисления и представлены подходы к решению ряда задач с использованием этих основ. Рассматриваемый материал позволяет использовать его в дальнейшем изучении основ механики сплошных сред и решении наиболее важных задач МСС.

1. Элементы тензорного исчисления

В естествознании и технике приходится иметь дело с физическими величинами различной математической природы. Это различие проявляется, в частности, в характере их аналитического выражения и в законах преобразования их аналитического выражения при переходе от одной системы координат в пространстве к другой.

Простейшими, с точки зрения математической природы, физическими величинами являются скалярные величины, например масса тела, длина вектора, и т.п., инвариантные относительно преобразований координат. Каждая такая скалярная величина в любой системе координат выражается одним числом, причем это число не зависит от выбора системы координат.

Следующими по сложности математической природы являются величины векторные, например скорость, ускорение, сила и т.п. Векторная величина в трехмерном пространстве в каждом базисе определяется тройкой чисел – тройкой проекций вектора на оси координат, или, как говорят “тройкой координат вектора в данном базисе“, причем эти “ координаты вектора“ при переходе от одного базиса к другому преобразуются по определенному закону.

Следующими после векторов по сложности математической природы являются величины, называемые тензорами, играющие роль линейных операторов над векторами. Такого рода величиной описывается, например проводимость в анизотропном теле. Линейным оператором или линейной вектор - функцией называется такая функция $\overline{y} = L(\overline{x})$, которая каждому вектору $\overline{x}$ ставит в соответствие вектор $\overline{y}$ и для которой выполняется равенство $L(c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2}) = c_1L(\overline{x_1}) + c_2L(\overline{x_2})$ при любых $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$ и любых константах c_1 и c_2. А именно, в изотропном теле вектор плотности тока $\overline{j}$ и вектор напряженности электрического поля $\overline{E}$ коллинеарны, т.е. связаны соотношением

$$\overline{j} = \sigma\overline{E}\ , \qquad (*)$$

где σ - скалярный множитель $(\sigma > 0)$, называемый проводимостью. В анизотропном теле $\overline{j}$ и $\overline{E}$ уже, вообще говоря, не коллинеарны и множитель σ является линейным оператором, преобразующим вектор $\overline{E}$ в вектор $\overline{j}$; этот оператор называется "тензором" проводимости. Если выбрать в пространстве какой-либо определенный базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ и разложить по этому базису $\overline{j}$ и $\overline{E}$

$$\overline{j} = j_1\overline{e_1} + j_2\overline{e_2} + j_3\overline{e_3},$$

$$\overline{E} = E_1\overline{e_1} + E_2\overline{e_2} + E_3\overline{e_3},$$

то равенство (*) можно заменить эквивалентной системой трех скалярных равенств

$$j_k = \sum_{i=1}^{3}\sigma_{ki}E_i,\ k = 1,2,3.$$

Т.о., тензор проводимости σ в каждом базисе определяется девятью числами σ_{ki}, $k,i = 1,2,3$, которые называются координатами тензора σ в данном базисе. В определение тензора входит описание преобразования его координат при переходе от одного базиса к другому.

2. Понятие аффинного ортогонального тензора

При аффинном преобразовании – плоскости прямые переходят в прямые, точки в точки, параллельные прямые переходят в параллельные.

Преобразование ортогональных нормированных базисов.

Рассмотрим два каких-либо ортогональных нормированных базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ и $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ в трехмерном евклидовом пространстве. Из ортогональности и нормированности базисов вытекают следующие соотношения для скалярных произведений:

$$\left(\overline{e_i}, \overline{e_k}\right) = \delta_{ik}, \left(\overline{e_i'}, \overline{e_k'}\right) = \delta_{ik},$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Базисы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ и $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ будем условно называть “старым“ и “новым“. Разложив векторы нового базиса по старому, получим

$$\overline{e_1'} = \alpha_{11}\overline{e_1} + \alpha_{12}\overline{e_2} + \alpha_{13}\overline{e_3},$$
$$\overline{e_2'} = \alpha_{21}\overline{e_1} + \alpha_{22}\overline{e_2} + \alpha_{23}\overline{e_3},$$
$$\overline{e_3'} = \alpha_{31}\overline{e_1} + \alpha_{32}\overline{e_2} + \alpha_{33}\overline{e_3},$$

или короче $\overline{e_i'} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\overline{e_j}, \quad i = 1,2,3$. Матрица $\left\|\alpha_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \end{Vmatrix}$ называется матрицей перехода от старого базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ к новому базису $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$.

Свойства матрицы.

Скалярное произведение вектора $\overline{e_i'} = \alpha_{i1}\overline{e_1} + \alpha_{i2}\overline{e_2} + \alpha_{i3}\overline{e_3},$ на вектор $\overline{e_j'} = \alpha_{j1}\overline{e_1} + \alpha_{j2}\overline{e_2} + \alpha_{j3}\overline{e_3}$, имеет вид $\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$. (**)

Т.е. сумма квадратов элементов любой строки матрицы равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух различных строк матрицы равняется нулю. Матрица $\|\alpha_{ij}\|$, для которой выполнены соотношения (**), называется <u>ортогональной</u>. Т.о. матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому является ортогональной. Умножая скалярно $\overline{e_i'} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \overline{e_j}, \quad i = 1,2,3$ на $\overline{e_k}$, находим $\left(\overline{e_i'}, \overline{e_k}\right) = \alpha_{ik}$. Очевидно, $\alpha_{ik} = \left(\overline{e_i'}, \overline{e_k}\right) = \cos\left(\overline{e_i'}, \overline{e_k}\right)$. Найдем аналогичное выражение для элементов матрицы обратной матрице $\|\alpha_{ij}\|$. Разложив векторы старого базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ по новому, будем иметь

$$\overline{e_1} = \beta_{11}\overline{e_1'} + \beta_{12}\overline{e_2'} + \beta_{13}\overline{e_3'},$$
$$\overline{e_2} = \beta_{2}\overline{e_1'} + \beta_{22}\overline{e_2'} + \beta_{23}\overline{e_3'},$$
$$\overline{e_3} = \beta_{31}\overline{e_1'} + \beta_{32}\overline{e_2'} + \beta_{33}\overline{e_3'},$$

или, короче,

$$\overline{e_k} = \sum_{j=1}^{3} \beta_{kj}\overline{e_j'}, \quad i = 1,2,3 \;, \qquad (***)$$

Матрица

$$\|\beta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \beta_{11}\beta_{12}\beta_{13} \\ \beta_{21}\beta_{22}\beta_{23} \\ \beta_{31}\beta_{32}\beta_{33} \end{Vmatrix}$$

является, очевидно, обратной матрице $\|\alpha_{ij}\|$. Умножая (***) скалярно на $\overline{e_i'}$, получим $\left(\overline{e_i'}, \overline{e_k}\right) = \beta_{ki}$, сравнивая это соотношение и соотношение $\left(\overline{e_i'}, \overline{e_k}\right) = \alpha_{ik}$, найдем следующую связь между элементами матриц $\|\alpha_{ij}\|$ и $\|\beta_{ij}\|$ $\alpha_{ik} = \beta_{ki}$.

Т.о., матрица $\|\beta_{ij}\|$, обратная матрице $\|\alpha_{ij}\|$, получается транспонированием матрицы $\|\alpha_{ij}\|$.

<u>Определение аффинного ортогонального тензора.</u>

Пусть величина L определяется в каждом ортогональном нормированном базисе девяткой чисел: в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ числами $L_{ij}, i, j = 1,2,3$, в базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$ числами $L'_{ij}, i, j = 1,2,3$. Если при переходе от любого базиса $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ к любому другому базису $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$, то величину L называют аффинным ортогональным тензором второго ранга и обозначают символом $\left(L_{ij}\right)$, т.е. $L \equiv \left(L_{ij}\right)$.

Числа $L_{ij}, i, j = 1,2,3$ называют координатами тензора L в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, а числа $L'_{ij}, i, j = 1,2,3$ - его координатами в базисе $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}$.

Скалярная величина L, инвариантная относительно переходов от одного ортогонального нормированного базиса к другому, называется аффинным ортогональным тензором нулевого ранга.

Вектор - аффинный ортогональный тензор первого ранга.

3. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение, вычитание и умножение тензоров.

Тензоры одинакового ранга можно складывать и вычитать; например, суммой (разностью) тензоров второго ранга a_{ij} и b_{ij} называется тензор, координаты которого равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}) \quad i, j = 1,2,3.$$

Нетрудно убедиться, что величины c_{ij} при изменении системы координат преобразуются по тензорному закону. Перемножать можно тензоры любых рангов, Например, произведением тензора второго ранга a_{ij} на тензор третьего ранга b_{mnp} называется тензор пятого ранга, координаты которого равны $c_{ijmnp} = a_{ij} b_{mnp}, \quad i, j, m, n, p = 1,2,3$. Умножение тензора на число можно рассматривать, как частный случай произведения двух тензоров. Оно определяется так: произведение тензора a_{ijk} на число C называется тензор с координатами $b_{ijk} = Ca_{ijk}$.

Свертка. Операцией – специфической для тензоров является операция свертывания и свертки по какой-либо паре индексов. Так, например, сверткой тензора четвертого ранга c_{ijmn} называется тензор второго ранга, координаты которого определяются равенствами $a_{mn} = \sum_{i=1}^{3} c_{iimn}$.

Перестановка индексов.

Рассмотрим перестановку индексов для аффинного ортогонального тензора второго ранга (L_{ij}). Положим в каждом базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

$$L_{ij}^* = L_{ji},$$

где L_{ij} - координаты тензора (L_{ij}) в этом базисе. Совокупность величин L_{ij}^*, также образует аффинный ортогональный тензор второго ранга. Этот тензор называется сопряженным с тензором (L_{ij}) и обозначается символом (L_{ij}^*).

Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный.

Тензор второго ранга называется симметричным, если его матрица

$$\left\| L_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} L_{11} L_{12} L_{13} \\ L_{21} L_{22} L_{23} \\ L_{31} L_{32} L_{33} \end{matrix} \right\|$$

в каждом базисе симметрична, т.е. если в каждом базисе выполнены соотношения $L_{ij} = L_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. Тензор второго ранга (L_{ij}) называется антисимметричным, если для элементов его матрицы $\left\| L_{ij} \right\|$ в каждом базисе выполнены соотношения $L_{ij} = -L_{ji}$. Из этих соотношений следует, что для антисимметричного тензора $L_{ii} = -L_{ii}$, т.е. $2L_{ii} = 0$ и $L_{ii} = 0$. Т.о., симметричный тензор второго ранга определяется шестью своими координатами, а антисимметричный – только тремя недиагональными координатами. Заметим, что каждый тензор второго ранга $\left(L_{ij}\right)$ может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, что вытекает из равенства

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left\{L_{ij} + L_{ji}\right\} + \frac{1}{2}\left\{L_{ij} - L_{ji}\right\}.$$

Тензор 2-го ранга - это величина, определяемая в любой системе координат девятью числами A_{ik}, которые при изменении системы координат преобразуются в $A_{ik}^{'}$ по закону

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm}, \qquad (1)$$

где $\alpha_{i'k} = \cos(x'_i, x_k)$ - косинус угла между i-й новой осью и к-й старой осью. Величины A_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга.

Если компоненты $\left(A_{ik}\right)$ тензора заданы в одной декартовой прямоугольной системе координат, то по формуле (1) можно определить компоненты $\left(A'_{ik}\right)$тензора в любой другой декартовой прямоугольной системе, оси которой составляют с осями первоначальной системы углы с косинусами $\alpha_{i'k}$.

Если все компоненты тензора обращаются в нуль в какой-либо системе координат, то они равны нулю в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (1).

Иногда удобно записывать тензор в виде таблицы (матрицы)

$$\left\|A_{ik}\right\| = \begin{Vmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{Vmatrix}.$$

4. Тензорная алгебра

4.1. Сложение тензоров

Пусть A_{ik} и B_{ik} - компоненты тензоров 2-го ранга. Составим числа C_{ik} в виде сумм соответствующих компонент тензоров:

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}.$$

Числа C_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно, так как A_{ik} и B_{ik} - компоненты тензоров, то

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}B_{lm};$$

и $C'_{ik} = A'_{ik} + B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}(A_{lm} + B_{lm}) = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}C_{lm}$, т.е. C_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Тензор с компонентами C_{ik} называется суммой тензоров с компонентами A_{ik} и B_{ik}, а операция образования его компонент – сложением этих тензоров. Правило сложения относится к любому числу тензоров любого ранга. Суммой тензоров одного ранга называется тензор того же ранга, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых. Таким образом, складывать можно только тензоры одного ранга.

Аналогично сумме двух тензоров определяется разность двух тензоров одного ранга и соответственно операция вычитания.

4.2. Умножение тензоров

Пусть A_{ik} и B_{ik} - компоненты двух тензоров 2-го ранга. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого. Эти произведения будут зависеть от индексов, число которых равно сумме рангов тензоров A_{ik} и B_{ik}.

Обозначим $C_{iklm} = A_{ik}B_{lm}$. Числа C_{iklm} образуют тензор 4-го ранга. Действительно, т.к.

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}B_{lm};$$

то $C'_{iklm} = A'_{ik} B'_{lm} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} A_{np} B_{rs} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} C_{nprs}$. Это доказывает, что C_{iklm} образуют тензор 4-го ранга.

Тензор с компонентами C_{iklm} называется произведением тензоров с компонентами A_{ik} и B_{ik}, а операция образования его компонент – умножением (иногда внешним умножением или тензорным умножением) этих тензоров.

Нетрудно видеть, что $C_{iklm} = A_{ik} B_{lm} \neq C_{lmik} = A_{lm} B_{ik}$. Т.о., тензорное умножение некоммутативно. Правило умножения относится к любому числу тензоров любого ранга.

Произведением нескольких тензоров называется тензор, компоненты которого равны произведениям компонент сомножителей. Ранг произведения равен сумме рангов сомножителей.

4.3. Свертывание тензоров

В тензорном исчислении часто применяется операция свертывания тензоров.

Свертыванием называется суммирование компонент тензора по двум каким-либо индексам.

Свертывание можно проводить только тех тензоров, ранг которых не менее двух.

Пусть A_{ikl} образует тензор 3-го ранга. Произведем свертывание его по двум индексам i и k, т.е. возьмем только те его компоненты, у которых индексы i и k равны, и составим из них суммы

$$A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l}.$$

В результате свертывания тензора A_{ikl} по другим индексам получим суммы A_{iki} и A_{ill}. Таких сумм каждого вида будет три. Например, для A_{iil} имеем:

$$A_{ii1}\left(\equiv\sum_{i=1}^{3}A_{ii1}\right);\quad A_{ii2}\left(\equiv\sum_{i=1}^{3}A_{ii2}\right);\quad A_{ii3}\left(\equiv\sum_{i=1}^{3}A_{ii3}\right).$$

Докажем, что любая такая группа из трех сумм, например A_{iil}, образует тензор первого ранга, т.е. вектор.

Так как A_{ikl} образует тензор 3-го ранга, то $A_{ikl}=\alpha_{i'm}\alpha_{k'n}\alpha_{l'r}A_{mnr}$. Отсюда, свертывая по индексам i и k и учитывая формулы

$$\alpha_{l'i}\alpha_{l'k}=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}\ \text{и}\ \alpha_{i'l}\alpha_{k'l}=\delta'_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}$$

получим $A'_{iil}=\alpha_{i'm}\alpha_{k'n}\alpha_{l'r}A_{mnr}=\delta_{mn}\alpha_{l'r}A_{mnr}=\alpha_{l'r}A_{mmr}$. Из этой формулы преобразования следует, что величины A_{iil} определяют вектор.

Сформулируем общее правило относительно свертывания по двум индексам тензора ранга n получается тензор ранга $n-2$. Операцию свертывания можно применять к тензору несколько раз, до тех пор, пока его ранг не станет меньше двух. Тензор четного ранга может быть свернут до скаляра, а тензор нечетного ранга - только до вектора.

Умножение тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к различным множителям-тензорам, называется иногда скалярным или «внутренним» произведением тензоров.

Примеры «внутренних» произведений:

$$\alpha_{ik}B_k=A_i,$$
$$\lambda_{iklm}B_{lm}=A_{ik}.$$

Скалярное произведение двух векторов является произведением двух тензоров 1-го ранга с последующим свертыванием.

4.4. Свойство симметрии тензоров

Понятие симметрии относится к тензорам ранга не менее двух.

Тензор $S_{ikl\ldots}$ называют симметричным по паре индексов, например i и k, если компоненты, получающиеся при перестановке двух этих индексов, равны друг другу, т.е.

$S_{ikl\ldots} = S_{kil\ldots}$.

Т.о., $S_{12l\ldots} = S_{21l\ldots}$; $S_{23l\ldots} = S_{32l\ldots}$ и т.д.

Тензор A_{ikl} называется антисимметричным по паре индексов, если при их перестановке компоненты меняют знак, т.е.

$A_{ikl\ldots} = -A_{kil\ldots}$.

Т.о. $A_{12l\ldots} = -A_{21l\ldots}$; $A_{23l\ldots} = -A_{32l\ldots}$ и т.д. У антисимметричного тензора компоненты с равными индексами, по которым имеет место антисимметрия, равны нулю. Если $A_{ikl\ldots} = -A_{kil\ldots}$, то, например, $A_{11l\ldots} = -A_{11l\ldots}$, т.е. $A_{11l\ldots} = 0$. Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора системы координат. Т.о., тензор симметричный (антисимметричный) в какой-либо системе координат, остается симметричным (антисимметричным) в любой другой системе координат.

Доказательство этого утверждения следует из закона преобразования тензора. Действительно, если тензор T_{ik} симметричен в системе (К) т.е. $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{ml} = T'_{ki}.$$

Аналогично показывается инвариантность свойств антисимметрии по отношению к выбору системы координат.

Симметричный S_{ik} и антисимметричный A_{ik} тензоры 2-го ранга имеют матрицы следующего вида:

$$\|S_{ik}\| = \begin{Vmatrix} S_{11}S_{12}S_{13} \\ S_{21}S_{22}S_{23} \\ S_{31}S_{32}S_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга называется бивектором.

Любой тензор T_{ik} может быть представлен в виде суммы симметричного тензора S_{ik} и антисимметричного A_{ik}.Доказательство следует из очевидного равенства

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left(T_{ik} + T_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ik} - T_{ki}\right) . \qquad (*)$$

Тензор $S_{ik} = \frac{1}{2}\left(T_{ik} + T_{ki}\right)$ - симметричный, ибо $S_{ik} = S_{ki}$. Тензор $A_{ik} = \frac{1}{2}\left(T_{ik} - T_{ki}\right)$ - антисимметричный, ибо $A_{ik} = -A_{ki}$. Утверждено доказано.

5. Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование

Компоненты тензора T_{ik} можно рассматривать как элементы квадратной матрицы

$$\begin{Vmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{Vmatrix}.$$

Если в тензоре T_{ik} поменять местами индексы, то получается новый тензор T_{ki}, матрица которого

$$\begin{Vmatrix} T_{11} T_{21} T_{31} \\ T_{12} T_{22} T_{32} \\ T_{13} T_{23} T_{33} \end{Vmatrix}$$

Будет транспонированной по отношению к матрице T_{ik} (столбцы станут строками). Совокупность величин T_{ki} будет преобразовываться по формулам:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm}.$$

Т.о., простейшая операция – перестановка индексов – приводит к построению нового тензора. Очевидно, что для симметричного тензора перестановка индексов приводит к тому же тензору.

Симметрированием называется операция перестановки пары индексов и последующее сложение полученного тензора с исходящим тензором. В результате получается тензор, симметричный относительно принятой пары индексов.

Альтернированием операция перестановки пары индексов и последующее вычитание полученного тензора из исходного; при этом получается антисимметричный тензор относительно принятой пары индексов.

Из (*) следует, что симметричная часть S_{ik} тензора T_{ik} равна половине от результата симметрирования, а антисимметричная A_{ik} - половина от результата альтернирования. Наличие у тензора свойств симметрии уменьшает число его независимых компонент. Число независимых компонент симметричного тензора 2-го ранга равно шести, антисимметричного 2-го ранга – трем. Примером симметричного тензора 2-го ранга может служить единичный тензор δ_{ik}, примером антисимметричного тензора 2-го ранга – тензор $C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i$, где A_i и B_i - компоненты двух векторов.

6. Единичный тензор

Выше было показано, что известный из алгебры символ Кронекера δ_{ik} является тензором 2-го ранга с матрицей

$$\delta_{ik=}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}; \qquad \delta_{ik=}\alpha_{l'i}\alpha_{l'k} = \begin{cases}0, & i \neq k\\ 1, & i = k.\end{cases}$$

Тензор δ_{ik} носит название единичного тензора. По смыслу определения единичного тензора его компоненты равны либо нулю ($i \neq k$), либо единице во всех координатных системах; это следует из определения δ_{ik} и δ'_{ik}.

Умножение δ_{ik} на тензор с последующим свертыванием часто используется в алгебраических выкладках. Например,

$$A_{ik}B_k - B_i = A_{ik}B_k - \delta_{ik}B_k = (A_{ik} - \delta_{ik})B_k, \text{т.к. } B_i \equiv \delta_{ik}B_k .$$

7. Главные оси тензора. Приведение тензора к главным осям.

Вопрос о главных осях тензора имеет важное значение в физике.

Рассмотрим произвольный тензор 2-го ранга T_{ik}. Если этот тензор умножить на вектор $\overline{A}$ и произвести свертывание по индексу вектора и одному индексу тензора, то в результате получаем некоторый вектор $\overline{B}$ с компонентами $B_i = T_{ik} A_k$. Можно говорить, что тензор T_{ik}, будучи умножен скалярно на некоторый вектор $\overline{A}$, преобразует его в новый вектор $\overline{B}$ в том смысле, что из компонент вектора $\overline{A}$ определенным действием получаются компоненты другого вектора – вектора $\overline{B}$. Вектор $\overline{B}$ вообще отличен от $\overline{A}$ по величине и направлению. Т.о., тензор при умножении на вектор изменяет длину этого вектора и поворачивает его.

Поставим задачу отыскать для заданного тензора T_{ik} такие векторы $\overline{A}$, которые бы не поворачивались этим тензором, а только изменяли длину. Тогда $T_{ik} A_k = \lambda A_i$, где λ - скаляр.

Если существуют для тензора T_{ik} векторы $\overline{A}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k, \qquad (*)$$

то направления, определяемые этими векторами, называются главными (собственными) направлениями тензора T_{ik}. Оси этих направлений носят название главных осей тензора. Значения компонент тензора в координатной системе главных осей называются главными значениями.

Рассмотрим вопрос об определении главных направлений и главных значений тензора T_{ik}. Согласно (*), компоненты векторов $\overline{A}$, определяющие главные оси тензора T_{ik}, удовлетворяют системе трех однородных уравнений:

$$T_{ik} A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0,$$

или

$$(T_{11}-\lambda)A_1+T_{12}A_2+T_{13}A_3=0,$$
$$T_{21}A_1+(T_{22}-\lambda)A_2+T_{23}A_3=0, \qquad (**)$$
$$T_{31}A_1+T_{32}A_2+(T_{33}-\lambda)A_3=0.$$

Эта однородная система служит для определения A_1, A_2, A_3. При этом находят отличное от нуля, или, как говорят, нетривиальное решение этой системы. Как известно из алгебры, однородная система имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель ее равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (***)$$

Равенство нулю определителя (***) представляет собой кубическое уравнение относительно λ. Это уравнение называется характеристическим уравнением тензора T_{ik}.

Таким образом, для определения из системы (**) A_1, A_2, A_3 (отличных от нуля) необходимо и достаточно, чтобы значения λ в этой системе совпадали с одним из корней кубического уравнения (***). Корни этого уравнения, может случиться, не будут все вещественные, и тогда они не позволят определить все три главных направления. Остановимся на рассмотрении только симметричных тензоров 2-го ранга, отнесенных к прямоугольным декартовым системам координат, так что $T_{ik}=T_{ki}$. В этом случае все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения (***) вещественны. Важное значение имеет факт, что все три главных оси тензора взаимно-перпендикулярны. Тензор в системе своих главных осей имеет матрицу

$$\|T'_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения представляют диагональные компоненты (единственные отличные от нуля) тензора в системе главных осей; они и дают главные (собственные) значения тензора.

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то у тензора T_{ik} не существует других главных направлений, кроме тех, которые определяются корнями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (один корень характеристического уравнения кратный). Это значит, что если одно главное направление определено (корнем λ_3), а два других корня совпадают, то два оставшихся главных направления определяются любыми двумя направлениями, перпендикулярными к первому.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$, все корни характеристического уравнения совпадают. Таким образом, в этом случае любой вектор при умножении на тензор T_{ik} только изменяет свою длину, но не поворачивается и, следовательно, любое направление у тензора T_{ik} является главным. Такой тензор называется шаровым.

8. Инварианты тензора

Компоненты вектора A_i меняются при изменении системы координат. Однако с помощью этих компонент можно составить величину, которая остается неизменной при изменении прямоугольной декартовой системы координат, а именно:

$$A_i A_i = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A'_i A'_i.$$

Эта величина носит название инварианта вектора, т.е. $A_i A_i = I = inv$. Инварианты можно составить и из компонент тензора любого ранга.

Для получения инвариантов тензора 2-го ранга в общем виде распишем характеристическое уравнение (***), раскрыв определитель:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} T_{32} \\ T_{23} T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} T_{21} \\ T_{12} T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} T_{31} \\ T_{13} T_{33} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$ являются скалярами и поэтому не зависят от выбора системы координат, коэффициенты этого уравнения не должны меняться при изменении системы координат. Таким образом, величины:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = inv;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} T_{32} \\ T_{23} T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} T_{21} \\ T_{12} T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} T_{31} \\ T_{13} T_{33} \end{vmatrix} = (= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) = inv;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{vmatrix} = (= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = inv$$

являются инвариантами тензора 2-го ранга. Используя эти инварианты (I_1 - линейный инвариант, I_2 - квадратичный, I_3- инвариант 3-го порядка), можно составить бесчисленное множество других инвариантов, представляющих всевозможные комбинации I_1, I_2, I_3. Например, $I_1^2 - 2I_2 = T_{ik} T_{ik}$; $I_1^2 = (T_{ii})^2$ и т.д.

Те тензоры, у которых линейный инвариант $I_1 = 0$, называют девиаторами. Любой тензор можно разложить на девиатор и шаровой тензор:

$$T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ik} = D_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} T_{ll}.$$

Тензор D_{ik} - девиатор, т.к. $D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ii} - \frac{1}{3} T_{ll} \cdot 3 = 0.$

9. Признак тензорности величин

В дополнение к приведенному определению тензора как величины, преобразующейся по определенному закону, можно дать другое определение тензора. Это определение обычно рассматривается как признак тензорности величин. Сформулируем признак тензорности для девяти величин, являющихся определением тензора 2-го ранга.

Пусть A_i, B_i компоненты двух произвольных векторов; если с помощью девяти величин T_{ik} можно образовать инвариант вида $T_{ik}A_iB_k = inv,$ то девять величин T_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно, в силу инвариантности этого выражения и закона преобразования компонент векторов A_i и B_i при переходе к другой произвольной системе декартовых координат имеем

$$T'_{ik}A'_iB'_k = T_{lm}A_lB_m = T_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{i'}B_{k'},$$

или $(T'_{ik} - \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm})A'_iB'_k = 0.$

Отсюда в силу произвольности векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ имеем $T'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm}.$ Эта формула преобразования величин T_{ik} доказывает их тензорность.

10. Линейное n-мерное пространство. Вектор и тензоры в n-мерном пространстве.

В математике часто приходится иметь дело с совокупностями (множествами) некоторых объектов. Эти объекты могут иметь самую Разнообразную природу; их называют элементами совокупности.

Точка является элементом привычного трехмерного пространства. Совокупность всевозможных точек образует трехмерное пространство. Точка трехмерного пространства определяется тремя независимыми параметрами (координатами). В то же время во многих разделах математики (линейная алгебра, геометрия, теория функций) и теоретической физики (статистическая физика, теория относительности) приходится рассматривать множества таких объектов, каждый из которых определяется не тремя, а в общем случае n параметрами.

Совокупности таких объектов, оказывается, обладают теми же свойствами, что и привычное трехмерное пространство, а отличаются от него лишь тем, что их элементы имеют не три, n координат. Так, для элементов таких совокупностей имеются правила сложения и правило умножения на число. Эти правила удовлетворяют тем же условиям (аксиомам), что и правила сложения векторов и умножения вектора на скаляр; коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и др.

$\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$ - коммутативность;

$(\overline{A}+\overline{B})+\overline{C}=\overline{A}+(\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ - ассоциативность;

$\overline{A}(\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{C}$ - дистрибутивность.

В такой совокупности можно ввести понятия нулевого элемента, противоположного элемента и т.д.

Такая совокупность объектов называется линейным (аффинным) пространством.

11. Примеры линейных пространств

1. Совокупность решений однородной системы линейных алгебраических уравнений образует линейное пространство (сумма двух произвольных решений системы есть снова решение той же системы; произведение решения на произвольное число дает снова решение);

2. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей некоторого натурального числа n, с обычными правилами сложения и умножения их на число образуют линейное пространство;

3. Совокупность свободных векторов на плоскости;

4. Совокупность свободных векторов в пространстве;

5. Совокупность всех систем $x=(x_1,...,x_n)$ вещественных чисел образует линейное пространство, если положить, что для таких систем имеют место аксиомы:

1) $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$,

2) $x+y(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$, где $y_n=(y_1,y_2,...,y_n)$.

Элементы линейного пространства называют векторами, хотя по своей природе они могут быть совершенно непохожими на привычные нам направленные отрезки.

Геометрические представления, связанные со словом “вектор“, помогают построению общей (абстрактной) теории линейных пространств. В качестве примера можно привести понятие о линейной независимости элементов пространства и о базисе пространства, которые аналогичны введенным выше для обычного трехмерного пространства. Максимальное число линейно независимых векторов в линейном пространстве определяет его размерность: в n- мерном линейном пространстве всегда имеется точно n линейно-независимых векторов и любые $n+1$ векторы связаны линейным соотношением.

В соответствии с результатами разложения векторов в обычном трехмерном пространстве такое определение размерности пространства представляется естественным обобщением.

После этого можно говорить и о базисе n- мерного линейного пространства, как о совокупности n линейно-независимых векторов из этого пространства, и об единственности разложения любого вектора по векторам базиса, и о координатах вектора, как коэффициентах разложения этого вектора по векторам базиса. Кстати заметим, что эти числа (координаты) полностью и единственным образом определяют этот вектор в n- мерном пространстве в каждом базисе.

Если в линейном n- мерном пространстве в дополнение к правилам сложения и умножения определить скалярное произведение двух векторов, такое пространство называется n- мерным евклидовым пространством. В евклидовом пространстве можно рассмотреть такие понятия, как длина n- мерного вектора, угол между векторами, ортогональный базис, взаимные базисы и т.д.

Кроме n- мерных векторов, определяемых полностью n действительными числами, имеет смысл рассмотреть более сложные объекты, которые в каждом базисе требуют для своего определения n^2 чисел, n^3 чисел, n^4 чисел и т.д.

Эти понятия (тензоры 2-го ранга, 3-го ранга и т.д.) не отвлеченное теоретическое обобщение, они необходимы для описания многих реально существующих величин и явлений в физике.

Числа (компоненты), которые определяют данный объект в каждом базисе, меняются при переходе от одного базиса к другому. Однако, поскольку совокупность этих чисел каждый раз определяет один и тот же объект, закон их преобразования имеет такие же особенности, как и в случае трехмерного пространства. Так, при изменении базиса компоненты вектора $x_i (i=1,2,...,n)$ переходят в $x_i' \ (i=1,2,...,n)$ и закон преобразования имеет вид $x_i' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{\alpha' k} x_k \quad (i=1,2,...,n)$, где $\|\alpha_{i'k}\|$ - матрица, определяющая преобразование при изменении первоначального базиса по закону:

$$A_{ik}' = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm} \quad (i,k=1,2,...,n).$$

Таких компонент тензор 2-го ранга в n- мерном пространстве имеет всего n^2.

Наконец, вообще тензор m-го ранга в n- мерном пространстве имеет n^m компонент, которые при изменении базиса преобразуются по закону

$$T_{i_1 i_2 ... i_m}' = \sum_{k_1=1}^{n} ... \sum_{k_m=1}^{n} \alpha_{i_1' k_1}\alpha_{i_2' k_2} ... \alpha_{i_m' k_m} T_{k_1 k_2 ... k_m}.$$

Таким образом, на n- мерное евклидово пространство переносятся почти без изменений большая часть построений трехмерного пространства.

12. Задачи и решения

Задача 1. В трехмерном пространстве объяснить следующие тензорные символы (тензоры декартовы):

$A_{ii}, B_{ijj}, R_{ij}, a_i T_{ij}, a_i b_j S_{ij.}$

Решение.

A_{ii} представляет одну сумму: $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$;

B_{ijj} представляет три суммы:

1) при $i = 1$ $\quad B_{111} + B_{122} + B_{133}$,

2) при $i = 2$ $\quad B_{211} + B_{222} + B_{233}$,

3) при $i = 3$ $\quad B_{311} + B_{322} + B_{333}$;

R_{ij} представляет девять компонент:

$R_{11,} R_{12,} R_{13,} R_{21,} R_{22,} R_{23,} R_{31,} R_{32,} R_{33}$;

$a_i T_{ij}$ представляет три суммы:

1) при $j = 1$ $\quad a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31}$,

2) при $j = 2$ $\quad a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32}$,

3) при $j = 3$ $\quad a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33}$;

$a_i b_j S_{ij}$ представляет сумму девяти членов. Первое суммирование по i дает $a_i b_j S_{ij} = a_1 b_j S_{1j} + a_2 b_j S_{2j} + a_3 b_j S_{3j}$. Затем каждое из этих слагаемых суммируем по $j: a_i b_j S_{ij} = a_1 b_1 S_{11} + a_1 b_2 S_{12} + a_1 b_3 S_{13} + a_2 b_1 S_{21} + a_2 b_2 S_{22} + a_2 b_3 S_{23} + a_3 b_1 S_{31} + a_3 b_2 S_{32} + a_3 b_3 S_{33}$.

Задача 2. В трехмерном пространстве вычислить следующие выражения содержащие дельту Кронекера δ_{ij}: а) δ_{ii}, б) $\delta_{ij}\delta_{ij}$, в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, г) $\delta_{ij}\delta_{jk}$, д) $\delta_{ij} A_{ik}$.

Решение.

а) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$

б) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3.$

в) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3.$

г) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik},$

д) $\delta_{ij}A_{ik} = \delta_{1j}A_{1k} + \delta_{2j}A_{2k} + \delta_{3j}A_{3k} = A_{jk}.$

Задача 3. Написать в развернутой форме и по возможности упростить выражение $D_{ij}x_i x_j$, если а) $D_{ij} = D_{ji}$, б) $D_{ij} = -D_{ji}$.

Решение.

Имеем
$$D_{ij}x_i x_j = D_{1j}x_1 x_j + D_{2j}x_2 x_j + D_{3j}x_3 x_j = D_{11}x_1 x_1 + D_{12}x_1 x_2 + D_{13}x_1 x_3 + D_{21}x_2 x_1 + D_{22}x_2 x_2 + D_{23}x_2 x_3 + D_{31}x_3 x_1 + D_{32}x_3 x_2 + D_{33}x_3 x_3.$$

Поэтому

$a)\quad D_{ij}x_i x_j = D_{11}(x_1)^2 x_1 + D_{22}(x_2)^2 + D_{33}(x_3)^2 + 2D_{12}x_1 x_2 + 2D_{23}x_2 x_3 + 2D_{13}x_1 x_3.$

$b)\quad D_{ij}x_i x_j = 0,$ так как $D_{11} = -D_{11}, D_{12} = -D_{21}$ и т.д.

Задача 4.

Тензор Леви-Чивиты.

В тензорном исчислении для удобства вычислений вводится тензор третьего ранга ε_{ijk}, известный как тензор Леви-Чивиты (альтернирующий тензор).Этот часто используемый тензор определяется следующим образом:

ε_{ijk}= 1, если значения индексов i, j, k образуют четную перестановку из 1,2,3;

ε_{ijk}= -1, если значения индексов i, j, k образуют нечетную перестановку из 1,2,3;

$\varepsilon_{ijk} = 0$, если значения индексов i, j, k не образуют перестановки из 1,2,3, т.е.ю если два или все три индекса принимают одинаковые значения;

Показать, что $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$: а) при $i = 1, j = q = 2, \quad p = 3$ и б) $i = q = 1, \quad j = p = 2.$

Решение.

а) Положим $i = 1, j = 2, \quad p = 3, q = 2$ и заметим, что k - индекссуммирования и, следовательно, пробегает значения 1,2,3. Тогда

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k32} = \varepsilon_{121}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{12k}\varepsilon_{232} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{332} = 0.$$
$$\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{13}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{23} = 0.$$

б) Пусть $i = 1, j = 2, \quad p = 2, q = 1.$ Тогда $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{321} = -1$ и

$$\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22} = -1.$$

Задача 5.

Показать, что тензор $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j$ антисимметричен.

Решение.

В соответствии с определением ε_{ijk} перемена местами двух индексов ведет к изменению знака, так что

$$B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j = -(\varepsilon_{kji}a_j) = -(B_{ki}) = -B_{ki}.$$

Задача 6.

Пусть задан антисимметричный декартов тензор B_{ik} и вектор $b_i = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{jk}$. Показать, что $B_{pq} = \varepsilon_{pqi}b_i$.

Решение.

Умножим заданный вектор на ε_{pqi} и воспользуемся тождеством, доазанным в задаче 5:

$$\varepsilon_{pqi}b_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}B_{jk} = \tfrac{1}{2}(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj})B_{jk} = \tfrac{1}{2}(B_{pq} - B_{qp}) = \tfrac{1}{2}(B_{pq} + B_{pq}) = B_{pq}.$$

Задача 7.

Пусть B_{ij}- антисимметричный и A_{ij} - симметричный тензоры. Показать, что $A_{ij}B_{ij}=0.$

Решение.

Так как $A_{ij}=A_{ji}$ и $B_{ij}=-B_{ji}$, то $A_{ij}B_{ij}=-A_{ji}B_{ji}$, или $A_{ij}B_{ij}+A_{ji}B_{ji}=A_{ij}B_{ij}+A_{pq}B_{pq}=0.$ Поскольку все индексы являются немыми, $A_{pq}B_{pq}=A_{ij}B_{ij}$, и поэтому $2A_{ij}B_{ij}=0,$ или $A_{ij}B_{ij}=0.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое аффинный ортогональный тензор второго ранга
2.Сложение тензоров
3.Умножение тензоров
4.Свертывание тензоров
5.Симметричный тензор второго ранга
6.Антисимметричный тензор второго ранга
7.Представьте тензор второго ранга суммой симметричного и антисимметричного тензоров

Ответы

1. $L'_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn},\ i,j = 1,2,3$

2. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i,j = 1,2,3$

3. $c_{ijmnp} = a_{ij}b_{imnp}, \quad i,j,m,n,p = 1,2,3$

4. $a_{mn} = \sum_{i=1}^{3} c_{iimn}$

5. $L_{ij} = L_{ji}, \quad i,j = 1,2,3$

6. $L_{ij} = -L_{ji}, \quad i,j = 1,2,3$

7. $L_{ij} = \frac{1}{2}\{L_{ij} + L_{ji}\} + \frac{1}{2}\{L_{ij} - L_{ji}\}, \quad i,j = 1,2,3$

Литература

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Наука, 2003, 304 с.

2. Борисенко А.И,Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1972, 255 с.

3.Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высшая школа, 2001, 575 с.

4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974, 320 с.