

**Министерство образования и науки РФ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

**В.А. Кологривов**

***Основы автоматизированного  
проектирования радиоэлектронных  
устройств***

**Часть 1**

**Учебное пособие  
для студентов радиотехнических специальностей**

Рекомендовано Сибирским региональным отделением УМО высших  
учебных заведений РФ по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации для  
межвузовского использования в качестве учебного пособия

**2012**

**Кологривов В.А.**

Основы АПР РЭУ: Учебное пособие. В 2-х частях. Часть 1. Учебное пособие для студентов направлений радиотехника и телекоммуникации. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. - 120 с.

Рассмотрены модели основных элементов электронных схем, современные методы формирования математических моделей, решения линейных и нелинейных систем алгебраических и дифференциальных уравнений и оптимизации характеристик устройств. Изложение методов и алгоритмов ориентировано на реализацию программ автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств.

Рекомендовано для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов 654200 “Радиотехника” специальностей 200700, “Радиотехника” 201600 Радиоэлектронные системы; 654400 “Телекоммуникации” специальностей 071700 “Физика и техника оптической связи”, 201100 “Радиосвязь, радиовещание и телевидение”, 201200 “Средства связи с подвижными объектами”, 201800 “Защищенные телекоммуникационные системы”, а также специальности 075400 “Комплексная защита объектов информации”.

© Кологривов В.А., 2012

© ТУСУР, РТФ, каф. СРС, 2012 г.

## АННОТАЦИЯ

Данное учебное пособие представляет собой расширенный конспект лекций по основам автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств для студентов радиотехнических и связанных специальностей очной и заочной форм обучения.

Особенностью данного пособия является систематическое использование модифицированных методов формирования математических моделей, позволяющих с единой позиции изложить методологию расчета рабочих режимов, частотных и временных характеристик, чувствительности их к изменению параметров устройств и внешних факторов.

Достаточно подробно рассмотрены модели основных элементов электронных схем, современные методы формирования математических моделей, решения линейных и нелинейных систем алгебраических и дифференциальных уравнений и оптимизации характеристик устройств.

Изложение методов и алгоритмов ориентировано на реализацию программ автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств.

Пособие может быть рекомендовано и студентам смежных специальностей по направлениям радиоэлектроники и телекоммуникаций, интересующимся вопросами автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронной аппаратуры.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Задачи и содержание курса «Основы АПР РЭУ»</b>	<b>9</b>
<b>2 Топологическое описание схем</b>	<b>13</b>
2.1 Основные понятия теории графов	13
2.2 Топологические матрицы	13
2.3 Соотношение ортогональности	18
2.4 Независимые токи и напряжения	19
2.5 Включение независимых источников в граф	20
2.6 Логический алгоритм формирования дерева графа	20
2.7 Алгоритм формирования матрицы главных сечений	23
<b>3 Классические методы формирования математических моделей</b>	<b>27</b>
3.1 Обобщенный метод узловых потенциалов	27
3.2 Алгоритм формирования узловой системы уравнений	34
3.3 Метод контурных токов	41
3.4 Основные элементы схемы	41
3.5 Преобразование Лапласа для уравнений реактивных элементов	42
3.6 Нормировка входных данных	44
<b>4 Прямые методы формирования математических моделей</b>	<b>46</b>
4.1 Табличный метод	46
4.2 Модификация табличного метода	51
4.3. Модифицированный метод узловых потенциалов	53
4.4. Модифицированный узловой метод с проверкой	56
<b>5 Эквивалентные модели</b>	<b>62</b>
5.1 Основные понятия	62
5.2 Модели полупроводникового диода	63
5.3 Модели биполярного транзистора	67
5.4 Модели полевого транзистора	76
5.5 Модели операционного усилителя	83
5.6 Модели связанных индуктивностей	88
5.7 Модели распределенных структур	90
<b>6 Методы решения линейных систем уравнений</b>	<b>92</b>
6.1 Алгоритм Гаусса	92
6.2 Алгоритм Гаусса - Жордана	97
6.3 Схема Халецкого (LU – факторизация)	100
6.4 LU- факторизация (алгоритм Краута)	102
6.5 Решение транспонированной системы уравнений	104
6.6 Метод ортогонализации (QR - факторизации)	105
6.7 QR - факторизация (алгоритм Грамма – Шмидта)	112

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию пособие представляет собой расширенный конспект лекций по основам автоматизированного схемотехнического проектирования радиоэлектронных устройств.

Пособие адресовано инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами автоматизации проектирования в радиоэлектронике, и студентам старших курсов радиотехнических специальностей, имеющих базовую подготовку по математике, программированию, теории цепей и сигналов и элементной базе радиоэлектронных устройств.

Имеющаяся литература по автоматизированному схемотехническому проектированию отражает в основном подход, базирующийся на методе переменных состояния, отличающегося повышенной сложностью формирования математической модели для цепей произвольного вида. В настоящее время при автоматизации схемотехнического проектирования предпочтение отдается подходу, использующему прямые методы формирования математической модели, в которых, соответствующая система уравнений, формируется непосредственно по схеме устройства. Суть данного подхода обстоятельно изложена в монографии: Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1988. - 560 с., вышедшей тиражом 20000 экземпляров.

В предлагаемом пособии сделана попытка адаптированного изложения подхода, развиваемого в упомянутой монографии, применительно к нашим условиям, в виде расширенного конспекта лекций по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств», читаемой студентам радиотехнического факультета ТУСУРа. При адаптации некоторые разделы исключены, другие – переработаны и дополнены, в соответствии с рабочей программой. В основном переработаны и дополнены разделы, посвященные моделям элементной базы, методам решения систем линейных алгебраических уравнений и методам оптимизации характеристик устройств.

Содержание данного пособия отражает опыт преподавания данной дисциплины для студентов специальности “Радиотехника” на радиотехническом факультете ТУСУРа с 1991 года, в соответствии с образовательным стандартом.

В заключение хотелось бы выразить слова благодарности всем сотрудникам кафедр РЗИ и СРС, оказавших помощь при постановке данной дисциплины и проведении занятий. Персонально слова благодарности выражаю коллегам, сотрудникам кафедры РЗИ М.Ю. Покровскому и А.С. Красько, которые в течение ряда лет помогали в проведении курсовых и лабораторных работ со студентами. Красько А.С. благодарен также за большую помощь, оказанную при подготовке электронного варианта конспекта лекций. Особые слова благодарности выражаю Г.Н. Глазову,

прочитавшему первый вариант рукописи и сделавшему целый ряд ценных замечаний.

## **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время инженер в процессе своей деятельности нередко использует ЭВМ для проведения различных вычислений, а в ряде случаев проектировщик современной аппаратуры просто не может обойтись без ЭВМ, как основного рабочего инструмента. При этом разработчик использует современные системы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств (РЭУ) либо решает нестандартные задачи проектирования, опираясь на системы для инженерных и научных расчетов.

Автоматизированное проектирование позволяет существенно сократить финансовые затраты и время на разработку радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), повышая точность расчетов и сокращая объем экспериментальных исследований. Продуктивное использование ЭВМ немислимо без развитого прикладного программного обеспечения, позволяющего быстро и надежно моделировать и оптимизировать предлагаемые решения. В связи, с выше указанным, актуальна подготовка современных специалистов, владеющих основами автоматизированного проектирования.

Предлагаемое вниманию пособие представляет собой расширенный конспект лекций по дисциплине «Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств» (Основы АПР РЭУ) и предназначено для подготовки студентов радиотехнических специальностей.

Цель данного пособия – раскрыть содержание, принципы и методологию современного состояния автоматизированного схемотехнического проектирования.

В задачи дисциплины входит – изучение: моделей элементной базы; современных методов и алгоритмов формирования математических моделей расчета режимов, частотных и временных характеристик, чувствительности к изменению параметров и оптимизация характеристик устройств.

Для достижения указанной цели и решения поставленных задач в конспекте лекций излагаются основные понятия и определения, модели элементной базы, совокупность современных методов и алгоритмов расчета основных характеристик, принципы построения программного обеспечения и методология автоматизированного схемотехнического проектирования.

При изложении материала, из всего многообразия тем, относящихся к автоматизированному схемотехническому проектированию, нами выбран минимум необходимый для овладения проблематикой, методологией, основными принципами, методами и алгоритмами, позволяющий решать широкий круг полезных задач.

Основное внимание при изложении дисциплины уделено расчету электронных схем, как электрическим моделям реальных узлов РЭУ. Однако

вопросы автоматизированного расчета и проектирования невозможно охватить в одном пособии, поэтому пришлось ограничиться в основном аналоговыми устройствами, хотя излагаемые методы могут быть, в большинстве своем, распространены и на дискретные или импульсные устройства. К сожалению, за пределами нашего внимания, кроме дискретных устройств, остаются: специфические моменты расчета и проектирования распределенных устройств СВЧ диапазона, спектральные задачи нелинейных устройств, электродинамический расчет конструкций и целый ряд других не менее важных вопросов. Частично с этими вопросами можно ознакомиться при изучении других дисциплин, а идеи и методы данного предмета помогут Вам успешно освоить перечисленные разделы моделирования, расчета и проектирования.

В пособии, для линейных и нелинейных аналоговых устройств, даны основные понятия и определения, рассмотрены модели основных элементов, изложены методы и алгоритмы формирования математических моделей, расчета частотных и временных характеристик, режима по постоянному току, чувствительности к изменению параметров и внешних факторов, методология и принципы автоматизированного проектирования с использованием методов параметрического синтеза.

В основу курса лекций вместо традиционного метода переменных состояния положены более простые, но не менее эффективные, прямые методы формирования математических моделей, совмещающие достоинства узлового и табличного методов, позволяющих реализовать идею сквозного проектирования. Суть данного подхода изложена в прекрасной монографии Влаха И. и Синкхала К. [1]. Этому подходу, как наиболее удачного, мы и придерживаемся в данном пособии. Структура конспекта лекций, методология и часть примеров заимствованы из этой монографии. Естественно, что, исходя из рабочей программы, собственного опыта и интересов, часть специфических разделов были исключены, сокращены или переработаны, но идеология изложения материала по возможности сохранена. Часть отсутствующего материала, разбросанного по разным учебникам, добавлена в качестве новых разделов.

Материал по разделам распределен следующим образом:

1. В первом разделе сформулированы цели, задачи и содержание автоматизированного проектирования РЭУ.
2. Во втором разделе даны основные элементы топологического описания электронных схем.
3. В третьем разделе дано обоснование классических методов (узлового и контурного) формирования математических моделей с позиций компонентного и топологического описания электронных схем.
4. В четвертом разделе дано развернутое содержание прямых методов формирования математических моделей, их сравнительная характеристика и основной идеи сквозного проектирования.

5. В пятом разделе рассмотрено содержание понятия модели, их классификация и описание моделей основных элементов РЭУ.
6. В шестом разделе излагаются основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида, на которых собственно и базируются все вычислительные алгоритмы.
7. В седьмом разделе изложены методы расчета передаточных характеристик электронных схем и сопутствующие вопросы.
8. Восьмой раздел посвящен алгоритмам расчета чувствительности электронных схем к изменению параметров и их использованию для вычисления других характеристик.
9. Девятый раздел посвящен расчету режимов цепей по постоянному току и вопросам сходимости алгоритмов.
10. Десятый раздел посвящен вопросам численного интегрирования дифференциальных уравнений, способам их формирования и расчету временного отклика цепей.
11. В последнем разделе рассмотрены постановка задачи оптимизации, основные понятия, методы и алгоритмы оптимизации, а также вопросы автоматизации проектирования РЭУ с заданными характеристиками.

По краткому содержанию пособия следует заметить, что первые три раздела закладывают основные понятия описания электронных схем, как моделей реальных устройств. Содержание подхода сквозного проектирования базируется на прямых методах формирования математических моделей и в этом смысле четвертый раздел наиболее важен. Модели элементной базы РЭУ лежат в основе их компьютерного моделирования. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений лежат в основе практически всех алгоритмов расчета характеристик. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений и проблема обеспечения их точности и устойчивости являются базовыми для расчета реакции устройств во временной области. Последующие разделы конкретизируют алгоритмы расчета основных характеристик в частотной и временной областях. Чувствительность характеристик к изменению параметров устройств важны, как на этапе производства, так и эксплуатации РЭУ. Расчет режимов цепей по постоянному току всегда предшествует расчету любых характеристик, так как режимы работы активных приборов (рабочие точки) в основном и определяет параметры реальных устройств. Оптимизация рассматривается в данной дисциплине, как основной прием автоматизированного проектирования узлов РЭУ с заданными характеристиками, именно параметрический синтез лежит в основе методологии автоматизированного проектирования.

Изучение всех перечисленных вопросов и их взаимосвязи и составляет основу автоматизированного проектирования РЭУ.



## **1 ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА «ОСНОВЫ АПР РЭУ»**

Цель курса - изучение комплекса вопросов связанных с использованием ЭВМ при автоматизации проектирования РЭУ, идеологии разработки и структуры современных систем, пакетов и универсальных программ АПР РЭУ.

Задачи курса - на базе, ранее полученных знаний, по математике, программированию, численным методам, теории цепей и сигналов, элементной базе РЭУ, аналоговым устройствам и т.п., сформулировать основные принципы построения программного обеспечения автоматизации проектирования, изучить основные методы и алгоритмы расчета и проектирования, ознакомиться с имеющимися пакетами машинного расчета РЭУ.

Под автоматизированным проектированием, в общем случае, понимают последовательность проектных операций от выдачи ТЗ до разработки необходимой документации на производство РЭУ. В связи с этим, применительно к автоматизированному проектированию, часто говорят о сквозном проектировании, выделяя при этом следующие этапы:

1. Системное или функциональное проектирование, в процессе которого возникает функциональная схема устройства, и просчитываются общесистемные характеристики.

2. Схемотехническое проектирование - каждому функциональному узлу ставится в соответствие схемное решение с учетом существующей элементной базы (для цифровых устройств этот этап называют логическим проектированием).

3. Конструкторское проектирование - прорабатываются основные конструктивные параметры устройства с учетом необходимой элементной базы, назначения, заданными массогабаритными параметрами, диапазоном частот, потребляемой мощностью, температурным режимом и т.п.

4. Технологическое проектирование – выбирается подходящая последовательность технологических операций, для каждой операции конкретная технология, материалы, режим технологического оборудования и т.п.

Каждый из этапов заканчивается выдачей необходимой документации. Процесс проектирования, чаще всего, является итерационной процедурой, при которой приходится неоднократно возвращаться к исходному варианту схемного решения. Полномасштабное автоматизированное проектирование, включающее все этапы, вероятно дело будущего, хотя известны его реализации при разработке БИС.

Разработка программного обеспечения, даже для отдельного этапа проектирования, требует огромных предварительных затрат. В разработке программного обеспечения обычно принимают участие, как программисты математики, так и инженеры соответствующих специальностей. В связи с тем, что ЭВМ все шире внедряется в инженерную практику, изучение

вопросов автоматизации проектирования входит в современные учебные планы радиотехнических специальностей. В частности, при подготовке студентов по специальности "Радиотехника", образовательным стандартом предусмотрено изучение вопросов автоматизированного схемотехнического проектирования.

При изучении курса автоматизированного проектирования электронных схем можно преследовать две основные цели:

1. Подготовку пользователей имеющихся программных продуктов для схемотехнического проектирования.

2. Подготовку специалистов, владеющих методологией, методами, алгоритмами и принципами построения программного обеспечения схемотехнического проектирования.

Второй подход, на наш взгляд более предпочтителен, так как доступных лицензионных продуктов не так много, они постоянно совершенствуются и зачастую отсутствуют подробные инструкции и описания. Кроме того, в рамках учебного пособия, трудно уследить за новинками, появляющимися на рынке программного обеспечения (ПО). В тоже время, освоение готовых программных продуктов не представляет особого труда для подготовленного специалиста. Зная идеологию построения, содержание и методы реализации, специалист может участвовать в разработке новых автоматизированных систем, их модернизации, быстром освоении и грамотной эксплуатации. При разработке РЭУ, часто возникают нестандартные задачи проектирования и специалист, владеющий принципами и методами вычислений, способен успешно их решить с помощью современных общематематических систем для инженерных и научных расчетов типа MathCad, MatLab, Maple V и т. д.

Под схемотехническим проектированием обычно понимают синтез схемного решения устройства, либо оптимизацию заданного исходного решения по совокупности требований технического задания (ТЗ).

При синтезе, ограничиваясь классом устройств на основе формализованных процедур, достаточно однозначно находят структуру устройства, либо, задавшись структурой, - варианты схемотехнических реализаций.

При оптимизации, задавшись одним из методов, исходным решением и требованиями в виде целевой функции, путём многократного расчета и перебора параметров, в соответствии со стратегией метода, находят приемлемую схемную реализацию.

При автоматизированном схемотехническом проектировании используют в основном различные методы оптимизации, поскольку процедура синтеза разработана лишь для отдельных классов устройств.

Схемотехническое проектирование РЭУ традиционно включает вопросы: выбора адекватной модели, автоматического формирования математической модели цепи, в виде соответствующей системы уравнений и решения уравнений математической модели с целью определения

интересующих токов и напряжений, их отношений, амплитуд и форм, при заданных входных сигналах, определение чувствительности характеристик к разбросу и изменению параметров устройства и внешних факторов, поиск оптимального по совокупности характеристик схемного решения.

Этап схемотехнического проектирования далеко продвинул в теоретическом и практическом отношениях, имеет свою историю и традиции, произошел отбор наиболее перспективных методов и алгоритмов, утвердилась методология и принципы, однако постоянно идет поиск новых направлений, подходов, адекватных моделей.

Машинный расчет электронных схем, как современная область знаний, использует результаты трех основных дисциплин:

1. Математика - матричный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы решения линейных и нелинейных алгебраических и дифференциальных систем уравнений.

2. Радиотехнические цепи и сигналы - основные законы теории цепей, топологические соотношения, модели основных элементов, теория сигналов, прохождение сигналов в цепях, спектральные и временные характеристики.

3. Программирование - операционные системы, языки программирования высокого уровня, технология программирования, численные методы, прикладное программное обеспечение и библиотеки научно-технических программ.

С математической точки зрения, используемые методы машинного схемотехнического проектирования, могут быть разделены на следующие группы:

1. Методы формирования математической модели исследуемой схемы устройства (метод узловых потенциалов, табличный, модифицируемый узловой и т.п.).

2. Методы решения линейных систем алгебраических уравнений общего вида (Гаусса, Гаусса-Жордана, LU- и QR- факторизации и т.п.).

3. Методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений (итерационные методы Ньютона-Рафсона, Гаусса-Зайделя, Якоби и т.п.).

4. Методы интегрирования систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений (прямые и обратные, простые и многошаговые).

5. Методы параметрической оптимизации (прямые - Хука-Дживса, Розенброка и т.п., градиентные – наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, Флетчера-Пауэла и т.п.).

Заметим, что схемотехническое проектирование не исчерпывается перечисленными методами и разделами фундаментальных дисциплин, они лишь отражают круг рассматриваемых вопросов.

Для технического обеспечения этапа схемотехнического проектирования требуется соответствующее аппаратное обеспечение, в частности, профессиональные либо персональные ЭВМ с набором периферийных устройств - принтеров, плоттеров, сканеров, составляющих в

совокупности автоматизированные рабочие места (АРМ) проектировщика. Большое распространение получили сети ЭВМ различной конфигурации.

Базовое программное обеспечение современных ЭВМ широкого распространения:

операционные системы - MS-DOS, MS Windows, Windows NT и т.п.

компиляторы с языков высокого уровня - Фортран, Паскаль, Си и т.п.

инструментальные интегрированные пакеты различного назначения - MathCad, MatLab, Maple V, Mathematica-4 и т.п.

текстовые редакторы - Lexicon, Word и т.п.

базы данных - dBase, FoxBase, FoxPro и т.п.

специализированные пакеты для автоматизированного проектирования электронных схем - Nap, MicroCap, PcSpice, Electronics WorkBanch (EWB) и т.п.

В основу курса положены идеи и методы, излагаемые в [1], которая по своему содержанию наиболее соответствует методике изложения курса Основы АПР РЭУ студентам специальности "Радиотехника". Примеры необходимые для иллюстрации излагаемых методов также заимствованы в основном из этой работы. Однако применительно к нашим условиям, часть материала была исключена по различным причинам, а используемая часть переработана и дополнена.

При подготовке методического пособия использовались и другие доступные источники. Список литературы существенно расширен и позволяет интересующимся ознакомиться с историей и современным состоянием вопроса и существенно углубить свои знания в нужном направлении.

Таким образом, в предлагаемом пособии по дисциплине «Основы АПР РЭУ» рассмотрен очерченный круг вопросов автоматизированного схемотехнического проектирования.

## 2 ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СХЕМ

### 2.1 Основные понятия теории графов

Под математической моделью понимают совокупность уравнений, описывающих цепь, решение которых позволяет определить ее характеристики. В качестве математических моделей обычно выступает системы линейных, нелинейных алгебраических и либо дифференциальных уравнений. В основе методов формирования математических моделей цепей лежит совокупность топологических и компонентных уравнений.

Топологию схем удобно описывать на языке теории графов, имеющей множество инженерных приложений. Топология схемы несет информацию о соединении элементов. Топологические уравнения цепи являются формой записи основных топологических законов (первый и второй законы Кирхгофа). Компонентные уравнения представляют собой запись законов Ома для компонент - элементов схемы.

Для описания топологии цепи каждый двухполюсный элемент замещается направленным отрезком линии, называемым ветвью графа. Соединение двух и более ветвей в точке называется узлом или вершиной графа. Пронумеруем ветви и узлы электрической схемы и соответствующего ей графа.

Сформулируем законы Кирхгофа для электрических цепей.

**Закон Кирхгофа для напряжений:** сумма падений напряжений вдоль любого замкнутого контура цепи равна нулю.

**Закон Кирхгофа для токов:**

1. Алгебраическая сумма токов, втекающих в узел и вытекающих из узла, равна нулю.
2. В любом сечении, разделяющем цепь на две части, алгебраическая сумма токов, протекающих по соединительным ветвям через сечение, равна нулю.

Направления отрезков линий (токов) пассивных ветвей можно выбирать произвольно, однако условимся, что для источников тока направление совпадает с истинным, а для источников напряжения направлено против ЭДС. Узлы схемы нумеруются в произвольном порядке непрерывной последовательностью цифр, общий (заземлённый узел) обычно считается нулевым.

### 2.2 Топологические матрицы

**Матрица инцидентий.** Применение закона Кирхгофа для токов в узлах позволяет получить матрицу инцидентий, отображающую топологические свойства цепи. Рассмотрим простую цепь и соответствующий ей граф (рисунок 2.1).

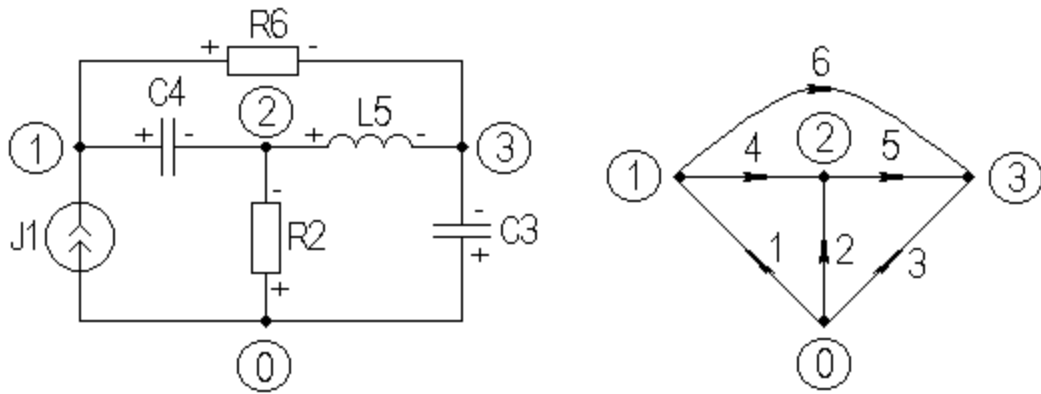


Рисунок 2.1 - Электрическая цепь и ее направленный граф

Запишем закон Кирхгофа для токов в узлах:

$$1: -i_1 + i_4 + i_6 = 0;$$

$$2: -i_2 - i_4 + i_5 = 0;$$

$$3: -i_3 - i_5 - i_6 = 0.$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме

$$A \cdot I_b = 0, \quad (2.1)$$

где  $A$  - матрица инцидентий.

Для рассматриваемого примера матрица  $A$  имеет вид:

узлы	1	2	3	4	5	6
1	-1	0	0	1	0	1
2	0	-1	0	-1	1	0
3	0	0	-1	0	-1	-1

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица содержит  $n$ - строк и  $b$ - столбцов, где  $n$ - число независимых (незаземленных) узлов;  $b$ - число ветвей графа. Строки матрицы указывают ветви, инцидентные соответствующему узлу, и их направленность. Столбцы матрицы указывают узлы, инцидентные соответствующей ветви и порядок обхода.

Напряжения ветвей и узловые потенциалы также связаны через матрицу инцидентий, соотношением, отвечающим закону Кирхгофа для напряжений

$$V_b = A^t \cdot V_n, \quad (2.2)$$

где  $A^t$  - транспонированная матрица инцидентий;  $V_b$  - напряжение ветвей,  $V_n$  - напряжения узлов.

**Матрицы сечений и контуров.** Изобразим на рисунке 2.2 граф предыдущей цепи, но с тремя сечениями. Положительное направление сечений укажем стрелками.

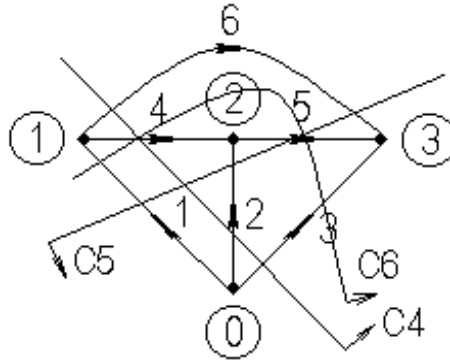


Рисунок 2.2 Граф схемы с сечениями

Составим уравнения для токов сечений

$$C4: \quad i_2 + i_3 + i_4 + i_6 = 0;$$

$$C5: \quad -i_1 - i_2 + i_5 + i_6 = 0;$$

$$C6: \quad i_1 + i_3 - i_4 + i_5 = 0.$$

Возникает вопрос - сколько необходимо иметь уравнений для определения всех токов и напряжений цепи? Для ответа следует воспользоваться понятием дерева графа.

Деревом связанного графа называется связанный подграф, включающий все узлы графа, но не содержащий замкнутых контуров. Ветви, не вошедшие в дерево графа, образуют дополнение дерева графа. Дерево графа цепи с  $n + 1$  узлами, имеет  $n$  ветвей. Ветви графа, входящие в дерево, называются ребрами. Ветви дополнения графа называются хордами.

Главным сечением графа называют сечение, проходящее через одно ребро и произвольное число хорд. Так как в дерево входит только  $n$  ветвей, то существует  $n$  главных сечений, что соответствует  $n$  независимым уравнениям для токов.

Нумерация ветвей и узлов схемы представляет произвольную процедуру и диктуется соображениями удобства. Многие выкладки существенно упростятся, если:

- 1) выбираем направления ветвей;
- 2) выбираем дерево графа;
- 3) нумеруем ветви графа, в начале ребра, затем хорды.

На рисунке 2.3 изображен один из вариантов такого выбора. Уравнения для токов сечений в этом случае будут

$$C1: \quad i_1 - i_4 - i_6 = 0;$$

$$C2: \quad i_2 + i_4 - i_5 = 0;$$

$$C3: \quad i_3 + i_5 + i_6 = 0.$$

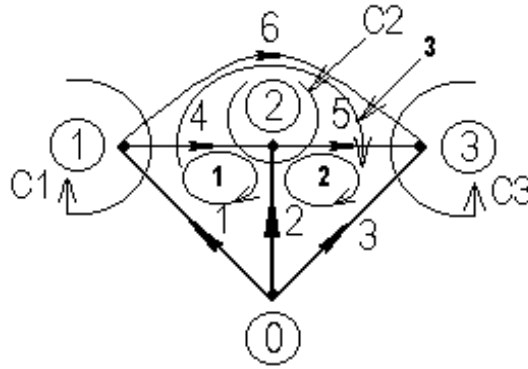


Рисунок 2.3 Граф схемы с выделенным деревом

В матричной форме эти уравнения можно записать в виде

$$Q \cdot I_b = 0, \tag{2.3}$$

где

		<i>ветви</i>					
<i>гл. сез</i>		1	2	3	4	5	6
	1	$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$					
	2						
	3						

- матрица главных сечений. Направление сечения определяется направлением соответствующего ребра. Строки матрицы указывают относительное направление рассеченных ветвей. Столбцы матрицы указывают сечения проходящее через ветвь и относительное направление. Напряжения ветвей можно выразить через напряжения ребер соотношением

$$V_b = Q^t \cdot V_p. \tag{2.4}$$

Рассмотрим, как изменится вид матрицы Q при другом выборе дерева графа и направлений его ветвей для той же цепи рисунок 2.4.

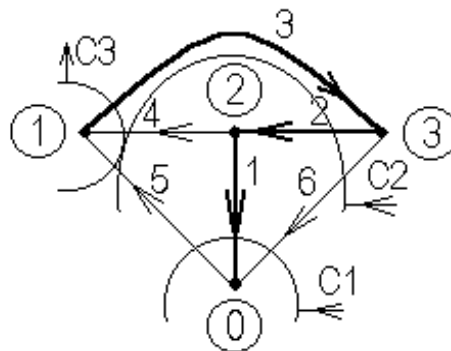


Рисунок 2.4 Граф схемы с другим деревом

Если будем следовать указанным правилам нумерации ветвей графа, то получим матрицу Q следующего вида



$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

В обоих случаях подматрица, соответствующая дереву графа, является единичной. Следовательно, матрицу  $Q$  можно записать

$$Q = [Q_p \quad Q_x] = [1 \quad Q_x], \quad (2.5)$$

где  $p$ - соответствует ребрам, а  $x$ - хордам. Ранг матрицы  $Q$  равен  $n$ . Из соотношений (2. 3) и (2. 5) следует

$$[1 \quad Q_x] \cdot \begin{bmatrix} I_p \\ I_x \end{bmatrix} = 0; \quad I_p = -Q_x \cdot I_x. \quad (2.6)$$

Использование закона Кирхгофа для напряжений приводит к другому описанию топологических свойств цепи, основанному на контурах. Ограничимся рассмотрением простых контуров, не проходящих два и более раза через одну ветвь или узел.

При этих ограничениях для графа цепи рисунке 2.1 можем записать систему уравнений

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 + v_4 &= 0; \\ v_2 - v_3 + v_5 &= 0; \\ v_4 + v_5 - v_6 &= 0; \\ v_1 - v_3 + v_5 &= 0; \\ v_2 - v_3 - v_4 + v_6 &= 0; \\ v_1 - v_2 - v_5 + v_6 &= 0; \\ v_1 - v_3 + v_4 + v_5 &= 0. \end{aligned}$$

Вновь необходимо решить, сколько и каких уравнений нужно взять, чтобы получить независимую систему? Опять на помощь приходят понятия дерева графа и его дополнения.

Определим главные контуры на основе выбранного дерева. Если возьмём некоторую хорду и добавим ее к дереву, то она совместно с ребрами образует замкнутый контур. Удалив эту хорду и добавив другую, получим следующий контур и т.д. Таким образом, для цепи с  $b$ - ветвями и  $n+1$ - узлом, граф содержит  $n$  ребер и  $b-n$  хорд, соответствующих количеству независимых контуров.

Последовательность записи уравнений и направлений обхода

контуров произвольны. Для упрощения записи системы контурных

уравнений будем придерживаться следующего порядка:

1. Пронумеруем рёбра и хорды графа, как было предложено ранее.
2. Переберем хорды в соответствии с их номерами и пронумеруем

контуры, начиная с единицы.

3. Направление обхода контура выбираем, совпадающим с направлением образующей хорды.

Запишем контурные уравнения для графов схемы рисунки 2.3, 2.4.

Для первого графа с учетом нумерации ветвей

$$v_1 - v_2 + v_4 = 0;$$

$$v_2 - v_3 + v_5 = 0;$$

$$v_1 - v_3 + v_6 = 0.$$

Для второго графа –

$$v_2 + v_3 + v_4 = 0;$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_5 = 0;$$

$$-v_1 - v_2 + v_6 = 0.$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$B \cdot V_b = 0, \quad (2.7)$$

где  $B$  - матрица контуров.

Токи ветвей выражаются через токи хорд (контуров) соотношением

$$I_b = B^t \cdot I_x. \quad (2.8)$$

Матрица  $B$  называется матрицей главных контуров. Вид матриц для указанных графов с выбранными деревьями следующий

<i>конт.</i>	1	2	3	4	5	6	<i>конт.</i>	1	2	3	4	5	6										
	<i>ветви</i>							<i>ветви</i>															
$B =$	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	;	$B =$	2	1	2	3	4	5	6	;	
	1	-1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0		1	1	1	0	1	0	0	0	
	2	0	1	-1	0	1	3	-1	-1	0	0	0	1		-1	-1	0	0	0	0	1		

Ранг матрицы  $B$  равен  $b - n$ . Строки матрицы указывают ветви образующие данный контур и их направленность. Столбцы матрицы указывают контура проходящие через ветвь и их направленность. Видим, что подматрицы  $B$ , соответствующие дополнению дерева, есть единичные матрицы, в результате можно записать

$$B = [B_p \quad B_x] = [B_p \quad 1]. \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.7), (2.9) следует

$$[B_p \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} V_p \\ V_x \end{bmatrix} = 0; \quad V_x = -B_p \cdot V_p. \quad (2.10)$$

## 2.3 Соотношения ортогональности

Между матрицами главных сечений и контуров существует фундаментальное соотношение. Если матрицы  $B$  и  $Q$  записать для одинаковой нумерации ветвей схемы, то выполняются соотношения

$$B \cdot Q^t = 0 \text{ или } Q \cdot B^t = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство: Согласно (2.7)  $B \cdot V_b = 0$ . Используя (2.4) можно записать  $B \cdot Q^t \cdot V_p = 0$ . Откуда, поскольку в общем случае  $V_p \neq 0$ , имеем  $B \cdot Q^t = 0$ .

Второе соотношение, доказывается исходя из выражений (2.3) и (2.8), либо на основе свойства транспонирования произведения матриц.

В качестве примера рассмотрим соотношение ортогональности для топологических матриц графа схемы рисунка 2.3

$$Q \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя блочное представление матриц, можно записать

$$B \cdot Q^t = \begin{bmatrix} B_p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ Q_x^t \end{bmatrix} = B_p + Q_x^t = 0; \text{ или } B_p = -Q_x^t. \quad (2.12)$$

Откуда следует

$$B = \begin{bmatrix} -Q^t & 1 \end{bmatrix}; \text{ либо } Q = \begin{bmatrix} 1 & B_p^t \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Т. е. матрицу главных контуров  $B$  легко получить из матрицы главных сечений  $Q$  и наоборот.

## 2.4 Независимые токи и напряжения

Результаты полученные в предыдущем разделе, используем для записи уравнений через независимые токи и напряжения. Согласно (2.6), токи ребер выражаются через токи хорд

$$I_p = -Q_x \cdot I_x.$$

Если воспользоваться (2.12), то можно записать

$$I_p = B_x^t \cdot I_x.$$

Эти соотношения можно переписать в виде

$$I_b = \begin{bmatrix} I_p \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_x \\ 1 \end{bmatrix} \cdot I_x = \begin{bmatrix} B_p^t \\ 1 \end{bmatrix} \cdot I_x = B^t \cdot I_x.$$

Т.е. токи хорд, как независимые переменные, определяют токи всех ветвей. Согласно (2.9) напряжения хорд выражаются через напряжения ребер

$$V_x = -B_p \cdot V_p.$$

На основании (2.12) можно также записать

$$V_b = \begin{bmatrix} V_p \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -B_p \end{bmatrix} \cdot V_p = \begin{bmatrix} 1 \\ Q_x^t \end{bmatrix} \cdot V_p = Q^t \cdot V_p.$$

Т.е. напряжения ребер графа являются независимыми переменными.

## 2.5 Включение независимых источников в граф

Рассмотрим особенности нумерации ветвей и выбора дерева графа для цепей содержащих независимые источники. Как было установлено в предыдущем разделе, токи хорд являются независимыми переменными. В то же время ток независимого источника не может быть зависимой переменной и его ветвь не должна входить в дерево графа. Напряжения ребер также являются независимыми переменными. Напряжение независимого источника не может быть зависимой переменной, это означает, что его ветвь не должна входить в дополнение графа, т.е. хорды.

Предложенный ранее способ нумерации ветвей приводил к тому, что подматрицы  $Q_p$  и  $B_x$  были единичным. Чтобы сохранить это свойство для цепей с независимыми источниками уточним правило нумерации ветвей:

1. Пронумеруем источники ЭДС и поместим их в дерево графа.
2. Дополним дерево за счет пассивных элементов и пронумеруем их последовательностью целых чисел, начиная с единицы.
3. Продолжим нумерацию остальных ветвей из пассивных элементов, попадающих в дополнение графа.
4. Пронумеруем источники тока, также попадающие в дополнение графа.

В результате, таким образом, дополненная матрица главных сечений, представима в виде

$$Q_d = [Q_E \quad Q \quad Q_J].$$

## 2.6 Логический алгоритм формирования дерева графа

Алгоритм формирования дерева графа является неотъемлемой частью некоторых методов формирования математической модели цепи, например, метода переменных состояния. Если выделено дерево графа, то сразу могут быть сформированы матрицы главных сечений и контуров. Выбор дерева графа в общем случае задача неоднозначная, т.к. общее количество деревьев (без учёта направления ветвей) для цепи с  $n$  узлами выражается формулой  $n^{n-2}$ . Обычно выделяют правильное дерево. Правильное дерево строится с учетом приоритета ветвей.

Приоритет ветвей при нумерации обусловлен методом формирования математической модели цепи и зависимостью переменных. В частности, для метода переменных состояния принят следующий приоритет ветвей:

- 1) управляемые источники напряжения;
- 2) независимые источники напряжения;

- 3) емкостные элементы;
- 4) резистивные элементы;
- 5) индуктивные элементы;
- 6) независимые источники тока;
- 7) управляемые источники тока.

Нумерацию начинаем с ветвей высшего приоритета, исчерпав очередную группу ветвей, переходим к следующей группе.

Информация о ветвях обычно содержит следующие данные: номер ветви, признак типа ветви, начальный и конечный узлы подключения ветви, в соответствии с выбранным направлением, и значения параметра или параметров.

Основное условие выделения дерева, это отсутствие контуров из ветвей, принадлежащих дереву. В связи с этим, алгоритм выделения дерева графа, может быть построен следующим образом.

1. Нумеруем ветви в соответствии с приоритетом.
2. Перебираем ветви, начиная с высшего приоритета, и фиксируем в списках начальный и конечный узлы подключения.
3. При считывании информации очередной ветви организуем проверку на отсутствие замкнутого контура с ранее просмотренными ветвями. Для этого достаточно, чтобы хотя бы один из узлов нового элемента не содержался в соответствующем списке, ранее перечисленных ветвей.
4. Если текущий элемент образует контур, то он перемещается в конец списка группы, и переходят к рассмотрению следующего элемента.
5. Если текущий элемент не образует контура, то переходят к анализу информации следующего элемента. Алгоритм завершается, если выделено  $n$  ветвей, принадлежащих дереву.

Ветви, не вошедшие в дерево (хорды), образуют дополнение дерева графа. На основе упорядоченного и переупорядоченного таким образом списка ветвей можно построить матрицу инциденций

$$A = \begin{bmatrix} A_p & A_x \end{bmatrix},$$

где  $A_p$  - блок, соответствующий дереву графа;  $A_x$  - блок соответствующий дополнению дерева графа. Для перехода к матрице главных сечений, учитывая, что блок  $A_p$  невырожденная квадратная подматрица, помножим оба блока на  $A_p^{-1}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & A_p^{-1} \cdot A_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Q_x \end{bmatrix}.$$

Проиллюстрируем данный алгоритм на конкретном примере, рисунок 2.5.

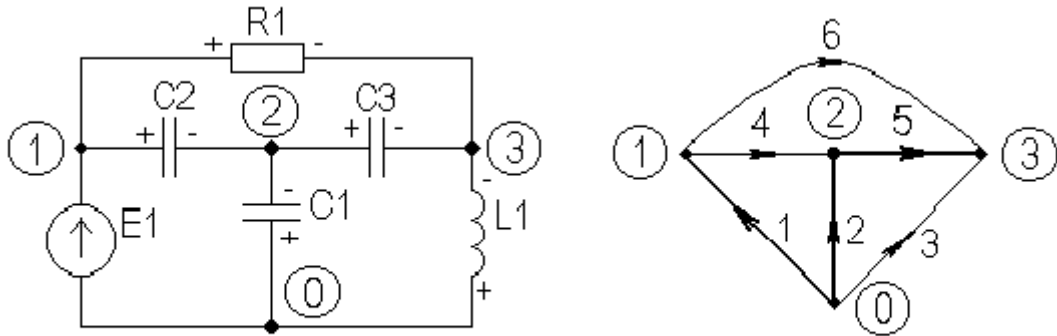


Рисунок 2.5 Электрическая схема и ее граф с выделенным деревом

Информацию о ветвях схемы приведем в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

**Входная информационная таблица ветвей схемы**

Номер ветви	1	2	3	4	5	6
Обозначение	E1	C1	L1	C2	C3	R1
Начальный узел	0	0	0	1	2	1
Конечный узел	1	2	3	2	3	3

Информацию о перенумерации ветвей схемы с учетом приоритета, результатах выделения дерева и повторной перенумерации также представим в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2.

**Выходная информационная таблица ветвей схемы**

Номер ветви	1	2	3	4	5	6
Обозначение	E1	C1	C3	C2	R1	L1
Начальный узел	0	0	2	1	1	0
Конечный узел	1	2	3	2	3	3

Из таблицы видно, что ветвь C2 не вошла в дерево графа так как образовала бы контур с первыми ветвями E1, C1. Первые три ветви E1, C1, C3 таблицы представляют дерево графа см. рисунок. 2.5. Матрица инциденций, переупорядоченных таким образом ветвей схемы, запишется

$$A = [A_p \quad A_x] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

После умножения этого соотношения справа на

$$A_p^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

получаем матрицу главных сечений

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## 2.7 Алгоритм формирования матрицы главных сечений

Формирование матрицы главных сечений  $Q$  производится в два этапа. На первом этапе, на основании входных данных с учетом приоритета ветвей формируется матрица инцидентий  $A$ . На следующем этапе, преобразуя матрицу инцидентий, получаем матрицу главных сечений с единичной подматрицей  $Q_p$ .

**Формирование матрицы инцидентий.** Припишем столбцы матрицы ветвям, а строки узлам графа. Зададим элементам матрицы  $a_{ij}$  следующие обозначения:

0 – если  $j$ -тая ветвь не подключена к  $i$ -му узлу;

1 – если  $j$ -тая ветвь подключена к  $i$ -му узлу и направлена от него;

-1 – если  $j$ -тая ветвь подключена к  $i$ -му узлу и направлена к нему.

Изложение алгоритма формирования матрицы главных сечений удобно вести на конкретном примере. Изобразим на рисунке 2.6 схему и её граф с пронумерованными узлами и ветвями, учитывая приоритет.

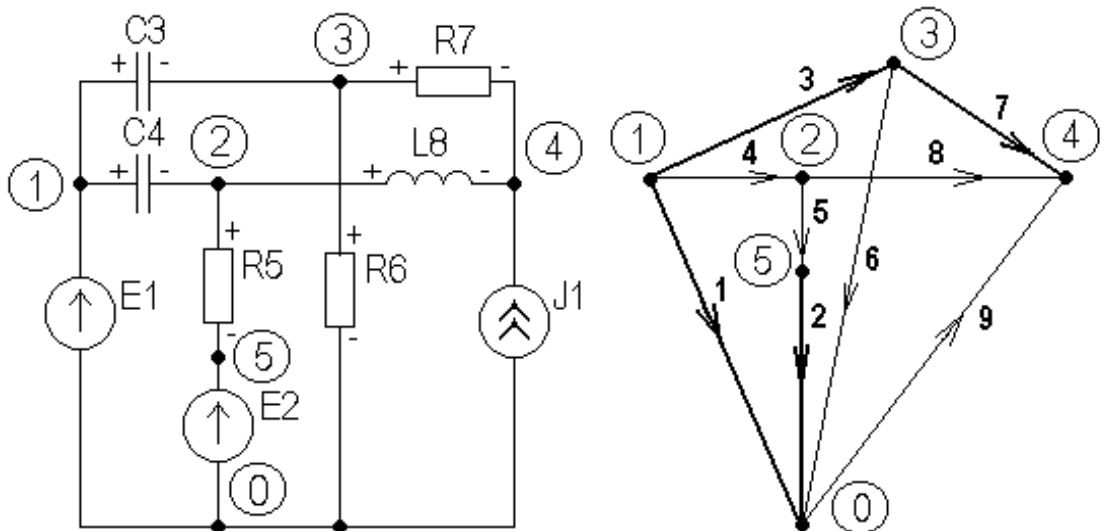


Рисунок 2.6 Электрическая схема и её граф с выделенным деревом

Матрица инцидентий для заданной нумерации ветвей при исключении общего узла имеет вид:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Раскроем содержимое матрицы инцидентий:

Каждая  $i$ -тая строка указывает ветви, подключенные к  $i$ -му узлу и их направление относительно узла;

Каждый  $j$ -тый столбец указывает, с какими узлами соединена  $j$ -ая ветвь.

Т. к. каждая ветвь подключена к двум узлам, то столбец расширенной матрицы инцидентий  $A$ , включающей общий узел, содержит два не нулевых элемента  $+1$  и  $-1$ . Следовательно, одна из строк расширенной матрицы  $A$  может быть определена через элементы других, таким образом, чтобы сумма значений по каждому столбцу равнялась нулю. Это означает, что одну из строк, например, соответствующую общему узлу, можно вычеркнуть. Т. е. из  $n+1$ -го узла,  $n$  узлов независимы.

Можно убедиться, что уравнение  $A \cdot I_b = 0$  соответствует системе

$$\begin{aligned} i_1 + i_3 + i_4 &= 0; \\ -i_4 + i_5 + i_8 &= 0; \\ -i_3 + i_6 + i_7 &= 0; \\ -i_7 - i_8 - i_9 &= 0; \\ i_2 - i_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для получения матрицы главных сечений  $Q$  необходимо данную систему уравнений разрешить относительно токов ребер. Эту операцию можно выполнить методом исключения переменных: из всех уравнений кроме первого исключается ток  $i_1$ , затем из всех оставшихся уравнений кроме второго исключается ток  $i_2$  и т. д. Операции исключения преобразуют матрицу  $A$  таким образом, что в левой ее части образуется единичная матрица, а правая соответствует  $Q_x$

$$A \Rightarrow Q = [1 \quad Q_x].$$

Преобразования сводятся к перестановке строк и столбцов матрицы и суммированию либо вычитанию строк. Допустимость этих операций обусловлена тем, что: перестановка строк соответствует перестановке уравнений; перестановка столбцов соответствует перестановке компонент уравнений; суммирование либо вычитание строк соответствует суммированию либо вычитанию уравнений, оставляя систему эквивалентной.

Алгоритм формирования матрицы главных сечений можно представить следующими действиями:

1. Задаём номер опорной строки, столбца  $i = 1$ .



2. Пропуская  $i-1$  этапов алгоритма, начиная с элемента  $a_{ii}$ , ищут первый ненулевой элемент в  $i$ -том столбце. Пусть это оказывается элемент  $a_{ji}$ , где  $j \leq n$ .

3. Если ненулевой элемент в  $i$ -том столбце найден и  $j \neq i$ , то  $i$ -тая и  $j$ -тая строки меняются местами.

4. Если после перестановки строк элемент  $a_{ii} = -1$ , то меняют знак в  $i$ -той строке, на обратный.

5. Если после перестановки строк в  $i$ -том столбце, кроме элемента  $a_{ii}$ , есть еще ненулевые элементы, то они обнуляются прибавлением либо вычитанием опорной строки к соответствующим строкам.

6. Если в опорном столбце не оказалось ненулевого элемента, то поиск ведут вдоль опорной строки. Пусть это элемент  $a_{ik}$ .

7. Если элемент найден в опорной строке и  $k=i$ , то  $k$ -ый столбец становится на место  $i$ -го, а столбцы от  $i$ -го до  $k-1$ -го сдвигаются вправо.

8. Увеличиваем номер опорной строки, столбца  $i=i+1$ . Если  $i \leq n$ , то переходим к пункту 2, иначе алгоритм заканчиваем.

В результате на месте матрицы инцидентий  $A$  имеем матрицу главных сечений  $Q$ .

Проиллюстрируем этапы предлагаемого алгоритма на рассматриваемом примере. Так после первого этапа матрица  $A$  останется неизменной. После второго этапа будут переставлены вторая и пятая строки

$$A_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

На третьем этапе будет изменен знак строки и удален ненулевой элемент на пересечении с первой строкой путем вычитания из фрагмента первой строки фрагмента третьей строки

$$A_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Четвёртый этап включает перестановку четвёртой и пятой строк, изменение знака и устранение ненулевого элемента на пересечении с первой строкой

$$A_4 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix}.$$

На пятом этапе седьмой столбец перемещается на место пятого, столбцы пятый и шестой сдвигаются, изменяется знак пятой строки и устраняются нулевые элементы на пересечении с первой третьей сороками

$$A_5 = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}.$$

В результате преобразований матрицы инцидентий трансформировалась в матрицу главных сечений  $Q = A_5$ .

На этом завершим раздел по топологическому описанию электронных схем. В заключение стоит отметить, что формирование матрицы инцидентий может быть произведено по схеме, поэтому в прямых методах формирования математических моделей ей отдается предпочтение [1].

### 3 КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

#### 3.1 Обобщенный метод узловых потенциалов

Займемся топологическим обоснованием обобщенного метода узловых потенциалов, т.е. представим его как совокупность топологических и компонентных уравнений. Перед применением метода узловых потенциалов все источники ЭДС схемы, если таковые имеются, должны быть преобразованы в эквивалентные источники тока, согласно преобразованиям Тевенина – Нортон. Это связано с тем, что свободные члены узловой системы уравнений представляют собой токи узлов.

Каждый пассивный элемент цепи можно описать законом Ома или компонентным уравнением

$$Y_b \cdot V_b = I_b, \quad (3.1)$$

где  $Y_b$  – диагональная матрица проводимости ветвей;  $V_b, I_b$  – векторы напряжений и токов.

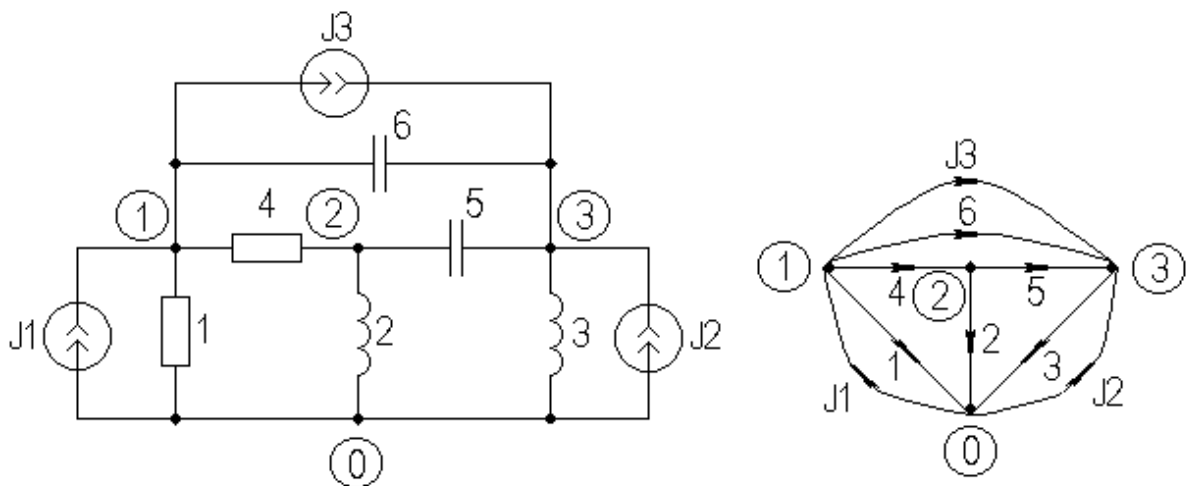


Рисунок 3.1 - Электрическая цепь и ее направленный граф

Для цепи, изображенной на рисунке 3.1, система компонентных уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} G_1 & & & & & \\ & 1/sL_2 & & & & \\ & & 1/sL_3 & & & \\ & & & G_4 & & \\ & & & & sC_5 & \\ & & & & & sC_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}.$$

Дополненная матрица инцидентий  $A_d$  пассивных элементов и источников тока схемы рисунка 3.1 имеет вид

$$A_d = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & J_1 & J_2 & J_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [A \quad A_J].$$

Порядок нумерации ветвей в матрицах  $Y_b$  и  $A$  должен быть одинаков. Согласно закону Кирхгофа для токов

$$A_d \cdot I_b = [A \quad A_J] \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ J_b \end{bmatrix} = 0,$$

запишем

$$A \cdot I_b = -A_J \cdot J_b,$$

где  $J_b$  – вектор известных источников токов.

Из последнего соотношения, используя (3.1), получаем

$$A \cdot Y_b \cdot V_b = -A_J \cdot J_b. \quad (3.2)$$

Соотношение, связывающее напряжения ветвей через узловые напряжения, имеет вид

$$V = A_d^t \cdot V_n = \begin{bmatrix} V_b \\ V_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t \\ A_J^t \end{bmatrix} \cdot V_n,$$

где  $V_J$  – напряжение на ветвях источников.

Последнее выражение можно представить двумя независимыми системами уравнений

$$V_b = A^t \cdot V_n,$$

$$V_J = A_J^t \cdot V_n.$$

Второе уравнение позволяет найти напряжения на источниках тока при найденных напряжениях на узлах. Если же первое из уравнений подставим в (3.2), то получим

$$A \cdot Y_b \cdot A^t \cdot V_n = -A_J \cdot J_b.$$

Если обозначить узловую матрицу проводимости

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t, \quad (3.3)$$

а вектор эквивалентных источников узловых токов

$$J_n = -A_J \cdot J_b, \quad (3.4)$$

то получим традиционную узловую систему уравнений

$$Y \cdot V_n = J_n. \quad (3.5)$$

Для схемы, изображенной на рисунке 3.1, в соответствии с (3.3) и (3.4), матрица проводимости и вектор узловых токов запишутся

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t =$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 + G_4 + sC_6 & -G_4 & -sC_6 \\ -G_4 & G_4 + sC_5 + 1/sL_2 & -sC_5 \\ -sC_6 & -sC_5 & sC_5 + sC_6 + 1/sL_3 \end{bmatrix},$$

$$J_n = -A_J \cdot J_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_3 \\ 0 \\ J_2 + J_3 \end{bmatrix}.$$

При топологическом обосновании обобщенного метода узловых потенциалов, кроме рассмотренного подхода, часто используют понятие обобщенной ветви (рисунок 3.2)

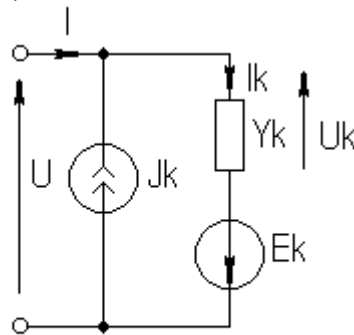


Рисунок 3.2 - Обобщенная ветвь

Компонентные уравнения в виде законов Ома для обобщенных ветвей запишутся

$$I = Y_k \cdot U, \quad (3.6)$$

где  $I = I_k - J_k$ ;  $U = U_k - E_k$ ;  $Y_k$  – диагональная матрица компонент. Если раскрыть равенство (3.6) и умножить обе части на матрицу инцидентий, то получим

$$A \cdot (I_k - J_k) = A \cdot Y_k \cdot (U_k - E_k).$$

Из предыдущего изложения известно, что

$$A \cdot I_k = 0;$$

$$A \cdot J_k = -J_n;$$

$$U_k = A^t \cdot U_n = A^t \cdot V_n.$$

В силу этих соотношений имеем

$$J_n = A \cdot Y_k \cdot A^t \cdot V_n - A \cdot Y_k \cdot E_k,$$

или учитывая (3.3), запишем

$$Y \cdot V_n = J_n + A \cdot Y_k \cdot E_k,$$

где  $J_n$  – вектор, обусловленный независимыми источниками тока;  $A \cdot Y_k \cdot E_k$  – вектор, обусловленный независимыми источниками напряжения и соответствует преобразованию источников ЭДС в источники тока, в соответствии с преобразованиями Тевенина – Ньютона.

Представляет также интерес обоснование метода узловых потенциалов при использовании управляемых источников тока, связанных индуктивностей и других многополюсных элементов.

Сразу оговоримся, что в обобщенном узловом методе речь может идти об источниках тока управляемых, как током, так и напряжением. Изложение будем вести на конкретных примерах, поскольку обобщение результатов не представляет сложностей.

Рассмотрим обобщенную линейную модель биполярного транзистора, содержащую источник тока управляемый током (рисунок 3.3).

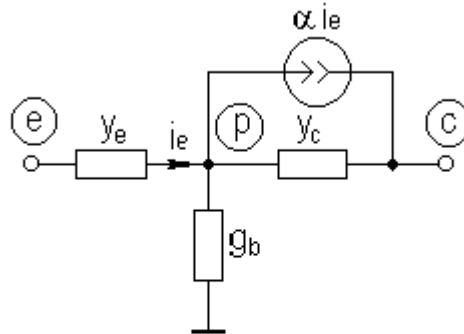


Рисунок 3.3 - Упрощенная линейная модель биполярного транзистора

Здесь  $\alpha \cdot i_e$  описывает источник тока, управляемый током ветви  $y_e$ , поэтому в рассмотрение, помимо пассивных ветвей, будет введена ветвь управляемого источника с эквивалентной крутизной  $\alpha \cdot i_e$ , где  $\alpha$  - коэффициент передачи по току в схеме с общей базой (ОБ), при коротком замыкании на выходе. В результате матрица инцидентий модели запишется в виде

$$A = \begin{matrix} & y_e & g_b & y_c & \alpha y_e \\ \begin{matrix} e \\ p \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица проводимостей ветвей схемы, в этом случае, запишется следующим образом

$$Y_b = \begin{bmatrix} y_e & & & \\ & g_b & & \\ & & y_c & \\ \alpha y_e & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что проводимость ветви управляемого источника тока записывается на пересечении строки, соответствующей номеру ветви

источника и столбца с номером управляющей ветви. Осуществляя перемножение матриц, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_e & -y_e & 0 \\ -(1-\alpha) \cdot y_e & (1-\alpha) \cdot y_e + g_b + y_c & -y_c \\ -\alpha \cdot y_e & \alpha \cdot y_e - y_c & y_c \end{bmatrix},$$

получаем матрицу проводимости биполярного транзистора, включенного по схеме с ОБ.

Аналогично можно получить матрицу проводимости для модели полевого транзистора, использующей источник тока, управляемый напряжением. Изобразим упрощенную линейную модель полевого транзистора по схеме с общим истоком (ОИ) (рисунок 3.4).

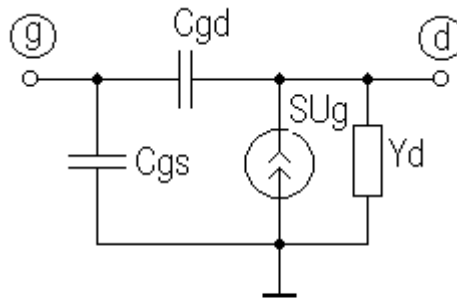


Рисунок 3.4 - Упрощенная линейная модель полевого транзистора

Матрица инцидентий изображенной модели

$$A = \begin{matrix} & C_{gs} & C_{gd} & S & Y_d \\ \begin{matrix} g \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Матрица проводимостей ветвей модели

$$Y_b = \begin{bmatrix} j\omega C_{gs} & & & \\ & j\omega C_{gd} & & \\ S & & 0 & \\ & & & y_d \end{bmatrix}.$$

Заметим, что крутизна  $S$  управляемого источника, как отдельной ветви записывается на пересечении соответствующей строки и столбца, с номером ветви с управляющим напряжением. После перемножения матриц, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} j \cdot \omega \cdot (C_{gs} + C_{gd}) & -j \cdot \omega \cdot C_{gd} \\ S - j \cdot \omega \cdot C_{gd} & j \cdot \omega \cdot C_{gd} + y_d \end{bmatrix},$$

получаем матрицу проводимости полевого транзистора, включенного по схеме с ОИ.

Теперь можно рассмотреть построение матрицы проводимости схемы, содержащей сложный элемент, на примере двух связанных индуктивностей (рисунок 3.5)





матрицы в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 & -x_1 + x_{12} & -x_{12} \\ -x_1 + x_{12} & j \cdot \omega \cdot C + x_1 + x_2 & x_{12} - x_2 \\ -x_{12} & x_{12} - x_2 & y_2 + x_2 \end{bmatrix},$$

получим матрицу проводимости схемы, содержащей связанные индуктивности.

Интересно также рассмотреть вопрос о построении матрицы проводимости схемы, содержащей подсхемы с известными матрицами проводимости. В качестве примера, рассмотрим транзисторный каскад, изображенный на рисунке 3.6, где транзистор, как подсхема, представлен известной матрицей проводимости.

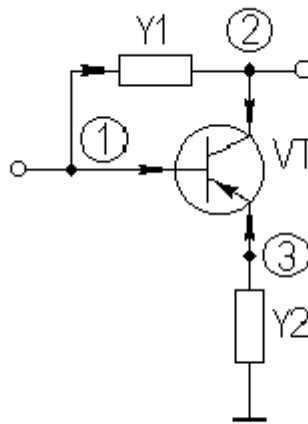


Рисунок 3.6 - Схема транзисторного каскада

Матрицу инцидентий схемы, в соответствии с указанными направлениями ветвей, можно записать

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & b & c & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

где второй блок, из трех последних столбцов, представляет матрицу инцидентий транзистора, как подсхемы. Матрица проводимостей транзистора, как трехполюсника, в общем виде, запишется

$$Y_T = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей компонент схемы в этом случае запишется следующим образом

$$Y_b = \begin{bmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & & \\ & & y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ & & y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ & & y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, в соответствии с (3.3)

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} y_1 + y_{11} & -y_1 + y_{12} & y_{13} \\ -y_1 + y_{21} & y_1 + y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_2 + y_{33} \end{bmatrix},$$

получим матрицу проводимости транзисторного каскада, выраженную через элементы матрицы проводимости транзистора.

### 3.2 Алгоритм формирования узловой системы уравнений

Формализованное изложение обобщенного метода узловых потенциалов, используя многополюсный подход, позволит сформулировать алгоритм формирования узловой системы уравнений на основе входной информации о ветвях схемы, без привлечения топологических матриц.

Суть многополюсного подхода заключается в следующем. Цепь представляется в виде тела многополюсника (рисунок 3.7) с  $n + 1$ - полюсами и один из них, обычно  $n + 1$ -ый, принимается за общий узел.

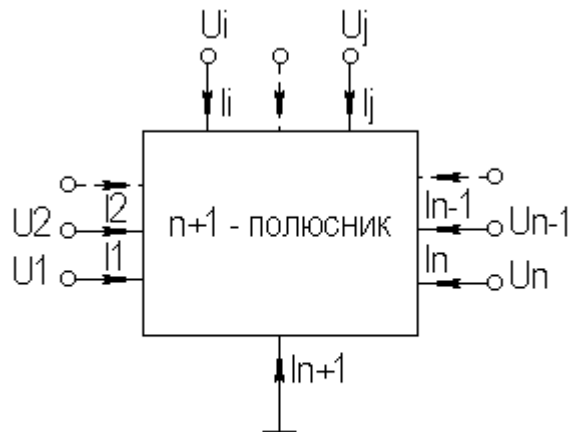


Рисунок 3.7 - Многополюсник

Все токи считаются направленными во внутрь многополюсника, а напряжения узлов (полюсов) отсчитываются относительно общего опорного узла. Такому представлению цепи соответствует система узловых уравнений ( $Y$ - параметров короткого замыкания), которая устанавливает связь между токами и напряжениями узлов

$$\begin{aligned}
 y_{11} \cdot u_1 + y_{12} \cdot u_2 + \dots + y_{1n} \cdot u_n &= i_1; \\
 y_{21} \cdot u_1 + y_{22} \cdot u_2 + \dots + y_{2n} \cdot u_n &= i_2; \\
 \dots & \\
 y_{n1} \cdot u_1 + y_{n2} \cdot u_2 + \dots + y_{nn} \cdot u_n &= i_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

В матричной форме эта система может быть записана

$$I = Y \cdot U.$$

Рассмотрим физический смысл  $Y$ - параметров. Из системы уравнений (3.7) следует, что

$$y_{ii} = I_i / U_i,$$

при  $U_k = 0$ , где  $k = 1, \dots, n$  и  $k \neq i$ . То есть, собственная проводимость может быть определена, путем подключения к  $i$ - ому узлу источника напряжения  $U_i$  и измерения тока этого узла  $I_i$ , при замкнутых на общий узел остальных узлах. Взаимная проводимость

$$y_{ij} = I_i / U_j,$$

при  $U_k = 0$ , где  $k = 1, \dots, n$  и  $k \neq j$ , может быть определена, путем подключения к  $j$ - ому узлу источника напряжения  $U_j$ , и измерения тока  $I_i$  при замкнутых остальных узлах.

Из рассмотрения следует, что в случае пассивной цепи, собственная проводимость узла  $y_{ii}$  равна сумме проводимостей ветвей, подключенных к  $i$ - му узлу, т.к. остальные узлы при этом закорачиваются. Взаимная проводимость  $y_{ij}$  равна суммарной проводимости ветвей, соединяющих узлы  $i$  и  $j$ , поскольку остальные узлы замкнуты. При определении собственной проводимости ток и напряжение измеряются на одном и том же узле, поэтому, учитывая их со направленность, собственную проводимость берут со своим знаком. При определении взаимной проводимости напряжение прикладывается к одному узлу, а ток измеряется в другом и, соответственно, имеет другое направление относительно узла, поэтому взаимная проводимость берется с противоположным знаком. Для наглядности представления смысла матрицы проводимости и правил формирования необходимо сделать ряд исходных предпосылок:

1. Если принять, что прикладываемое напряжение  $U_i = 1$ , в этом случае  $i \cong y$  - ток пропорционален проводимости.
2. ЭДС, прикладываемая к узлу, имеет направление от общего провода к узлу, а ток, возникающий под действием ЭДС, направлен навстречу, из узла.
3. Источник ЭДС идеальный (внутреннее сопротивление равно нулю), следовательно, его энергия бесконечна, и ток, в каждой из ветвей пропорционален ее проводимости, т. е. не зависит от наличия других ветвей (шунтирования нет).

4. Ток измеряется амперметром с внутренним сопротивлением равным нулю и его присутствие одновременно реализует режим короткого замыкания при измерении взаимных проводимостей.
5. При измерении ток, вытекающий из узла, считаем положительным, а втекающий - отрицательным.

С учетом этих предпосылок, проводя серию мысленных экспериментов, можно определить все элементы матрицы проводимости пассивной схемы. Для иллюстрации алгоритма заполнения матрицы проводимости компонентами пассивных ветвей изобразим на рисунке 3.8 отдельную пассивную ветвь с узлами подключения  $i$  и  $j$ .

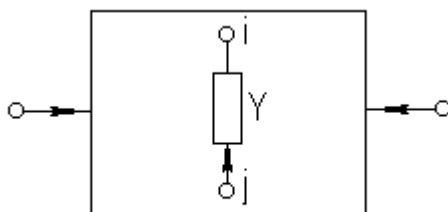


Рисунок 3.8 - Пассивная ветвь цепи

Компоненты матрицы проводимости пассивного элемента, в соответствии с выше сформулированными правилами и рисунка 3.8, можно изобразить следующим фрагментом

$$\begin{array}{c}
 i \quad j \\
 i \begin{bmatrix} +y & \cdot & -y \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -y & \cdot & +y \end{bmatrix} \\
 j
 \end{array}$$

С другой стороны, модели активных элементов содержат управляемые источники тока. В узловом методе без предварительных преобразований допустимы лишь источники тока управляемые токами ветвей и напряжениями на узлах. Моделирование активности и невзаимности активных схем приводит, в отличие от пассивных схем, к несимметричным матрицам.

Влияние управляемых источников на матрицу проводимости опирается на следующие исходные предпосылки, в дополнение, к ранее названным, для пассивных схем:

6. Источник тока идеальный, с бесконечным внутренним сопротивлением.
7. Управляемый источник активизируется лишь при приложении управляющих токов либо напряжений.
8. Важно исходное со направление управляющих воздействий и управляемого источника, относительно узлов подключения. При изменении направления управляющих воздействий изменяется полярность источника.

Заметим, что действие управляемого источника, в отличие от независимого источника, проявляется, лишь при возникновении

соответствующих управляющих токов либо напряжении. Наличие управляемых источников в цепи приводит к появлению дополнительных компонент матрицы проводимости.

Для физической интерпретации и выявления особенностей отражения управляемых источников, необходимо ввести в рассмотрение две пары полюсов (управляющих  $i, j$  и управляемых  $k, l$ ) в соответствии с рисунком 3.9. Здесь важно исходное направление, поскольку изменение знака управляющего тока либо напряжения ведет к изменению полярности источника.

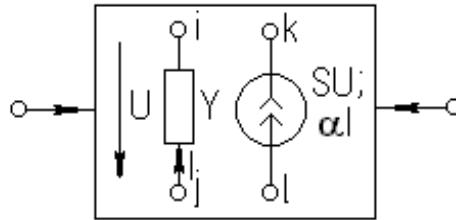


Рисунок 3.9 - Управляемые источники тока

Дополнительные составляющие матрицы проводимости, обусловленные управляемыми источниками, будут, в соответствии с вышеуказанными правилами, находиться на пересечении строк с номерами управляемых узлов и столбцов с номерами управляющих узлов. В соответствии с рисунком 3.9 и оговоренными правилами определения компонент матрицы проводимости, дополнительные компоненты, обусловленные управляемыми источниками, можно отразить следующими фрагментами матриц

$$\begin{matrix} & i & j \\ k & \left[ \begin{array}{cc} +\alpha y & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right] \\ l & \left[ \begin{array}{cc} -\alpha y & \cdot \\ \cdot & +\alpha y \end{array} \right] \end{matrix}; \quad \begin{matrix} & i & j \\ k & \left[ \begin{array}{cc} +S & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right] \\ l & \left[ \begin{array}{cc} -S & \cdot \\ \cdot & +S \end{array} \right] \end{matrix}$$

На основании предпосылок и правил можно сформулировать алгоритм формирования матриц проводимости электронных схем.

1. Любой пассивный элемент, подключенный к узлам  $i$  и  $j$ , входит в компоненты матрицы на пересечении соответствующих строк и столбцов, причем в диагональные элементы  $ii$  и  $jj$  проводимость входит со своим знаком, а в недиагональные -  $ij$  и  $ji$  - с противоположным знаком.

2. Управляемый источник отображается компонентами матрицы проводимости на пересечении строк с номерами управляемых узлов  $k$  и  $l$ , и столбцов с номерами управляющих узлов  $i$  и  $j$ , причем со направленные компоненты  $ik$  и  $jl$  содержат составляющие со своим знаком, а разнонаправленные  $il$  и  $jk$  - с противоположным.

Сформулированный алгоритм несложно реализовать в виде процедуры формирования матриц проводимости на основе информации о ветвях схемы, содержащей признаки, номиналы и узлы подключения.

Кроме матрицы проводимости необходимо также рассмотреть вопрос о формировании вектора свободных членов узловой системы, содержащей токи узлов, обусловленные независимыми источниками тока. Заметим еще раз, что независимые источники напряжения должны быть предварительно преобразованы в независимые источники тока. Хотя, как отмечалось ранее, при использовании обобщенных ветвей независимые источники напряжения допустимы и автоматически преобразуются в источники тока, однако при условии, что проводимость обобщенной ветви конечна. Поскольку в реальных схемах это не всегда соблюдается, в основном будем подразумевать обычные ветви.

Составляющие вектора, обусловленные независимыми источниками тока, формируются в соответствии с узлами подключения. Значение источника тока заносится в компоненты вектора свободных членов с плюсом, если источник направлен к узлу и с минусом, если направлен от узла. Кажущееся противоречие с правилом простановки знаков в зависимости от направления обусловлено тем, что вектор токов стоит справа от знака равенства. Проиллюстрируем это правило на примере рисунка 3.10, содержащего независимый источник тока.

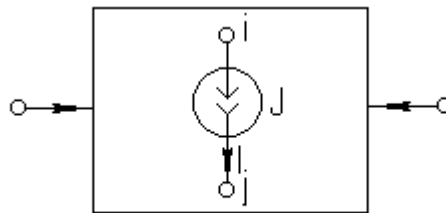


Рисунок 3.10 - Независимый источник тока

Компоненты вектора свободных членов, обусловленные источником в соответствии с рисунком 3.10 и сформулированными правилами, можно отобразить следующим фрагментом

$$i \begin{bmatrix} -J \\ \dots \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +J \end{bmatrix}.$$

Составляющие вектора, обусловленные источниками напряжения, предварительно преобразованные в источники тока, также формируется на основе узлов подключения. Т.к. направление ЭДС противоположно возникающему току, компоненты с номерами узлов, на которые указывает стрелка, следует брать с минусом, а компоненты с номерами узлов, откуда исходит стрелка - с плюсом. Кроме того, источники напряжения могут породить дополнительные компоненты вектора тока через управляемые источники тока, если управляющая ветвь содержит источники ЭДС.

Координаты компонент определяются узлами подключения управляемых источников тока, а значение определяется произведением крутизны на ЭДС с учетом направления источника, относительно узлов подключения и со направления с источниками ЭДС.

Если выполнены предварительные преобразования источников ЭДС в источники тока, то, перебирая значение сторонних источников и узлы подключения, вычисляем алгебраическую сумму сторонних токов каждого узла. Данная процедура формирования вектора свободных членов также просто реализуется на ЭВМ.

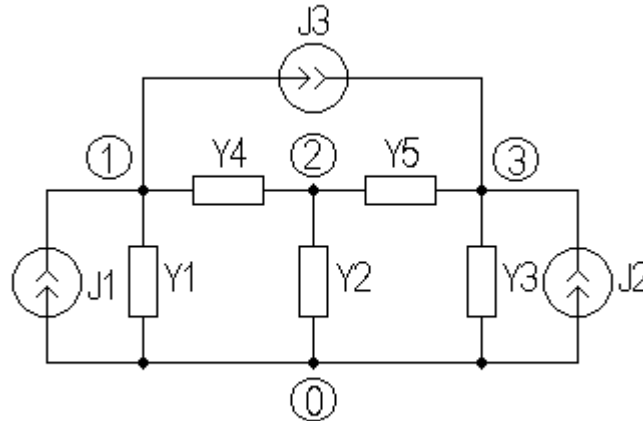


Рисунок 3.11 - Схема с источниками токов

Таким образом, нами сформулировано содержание алгоритма формирования узловой системы уравнений на основе исходной информации о ветвях схемы. Рассмотрим применение этого алгоритма на конкретном примере схемы рисунка 3.11.

В соответствии с изложенным алгоритмом, для приведенной схемы узловую систему уравнений, можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_4 & -y_4 & 0 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 \\ 0 & -y_5 & y_3 + y_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_3 \\ 0 \\ J_2 + J_3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матрицы проводимости схем с подсхемами. Подсхемой называется независимая часть схемы. Под независимостью понимается совместное присутствие управляемых и управляющих ветвей в пределах данной подсхемы. С точки зрения шумов, независимость предполагает отсутствие взаимной корреляции шумовых источников разных подсхем.

Из правил формирования узловой системы и физического смысла  $Y$ -параметров следует, что собственные и взаимные проводимости схемы включают, как проводимости отдельных элементов, так и проводимости подсхем, матрицы которых по тем же правилам были сформированы ранее. Вектор свободных членов формируется, как и при отсутствии подсхем. Поэтому сформулируем последовательность действий при формировании матрицы проводимостей схемы с подсхемами.

1. Изобразить схему с подсхемами и пронумеровать узлы.
2. Изобразить подсхемы с пронумерованными узлами и их подматрицы.
3. Сформировать матрицу проводимости схемы без подсхем и добавить в нее подматрицы подсхем, в соответствии с индексацией.

В качестве примера, рассмотрим формирование матрицы проводимости схемы на двух транзисторах (рисунок 3.12), заданных, в свою очередь, подматрицами проводимости.

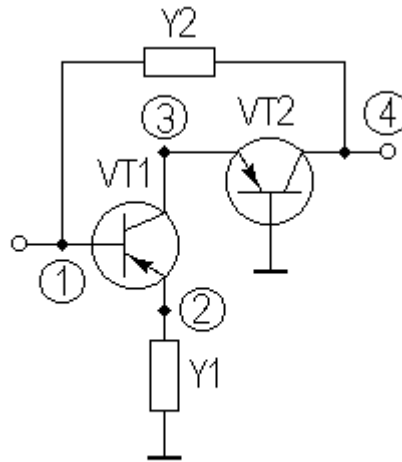


Рисунок 3.12 - Двухтранзисторная цепь

Выпишем матрицы проводимости компонент, включая двухполюсники обратных связей, как подсхем

$$Y_{VT1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11e} & y'_{12e} & y'_{13e} \\ y'_{21e} & y'_{22e} & y'_{23e} \\ y'_{31e} & y'_{32e} & y'_{33e} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad Y_{VT2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y''_{11e} & y''_{12e} & y''_{13e} \\ y''_{21e} & y''_{22e} & y''_{23e} \\ y''_{31e} & y''_{32e} & y''_{33e} \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$Y_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 \\ -y_1 & y_1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad Y_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_2 & -y_2 \\ -y_2 & y_2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Здесь индекс  $e$  - означает, что  $Y$ - параметры транзисторов измерялись в одной схеме включения (схеме с ОЭ). Для получения матрицы проводимости схемы достаточно свести подматрицы компонент в общую матрицу, в соответствии с индексацией

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11} + y_2 & y'_{13} & y'_{12} & -y_2 \\ y'_{31} & y'_{33} + y_1 & y'_{32} & 0 \\ y'_{21} & y'_{23} & y'_{22} + y''_{33} & y''_{32} \\ -y_2 & 0 & y''_{23} & y''_{22} + y_2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$



По поводу формирования матрицы проводимости схемы состоящей из подсхем можно сделать следующие замечания:

1. Собственные проводимости объединенной матрицы равны сумме собственных проводимостей подсхем подключенных к узлу.

2. Взаимные проводимости подсхем равны нулю в силу их независимости.

3. Проводимости объединенной матрицы равны алгебраической сумме соответствующих проводимостей подсхем.

В силу последнего замечания формирование матрицы проводимости сложной схемы легко реализовать в виде универсального алгоритма.

### 3.3 Метод контурных токов

Метод контурных токов, в силу ряда особенностей, не нашел широкого применения при реализации программ машинного анализа электрических схем, и представляет интерес, разве что в теоретическом плане. Прежде всего, это связано с некоторыми дополнительными трудностями определения главных контуров в не планарных схемах. Метод контурных токов применительно к машинным методам анализа электрических цепей описан в [1] и в данном пособии не рассматривается.

### 3.4 Основные элементы схемы

Базовыми элементами электрических цепей являются линейные, сосредоточенные и не зависящие от времени резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

Резистор - элемент, ток и напряжение которого связаны соотношением

$$v = R \cdot i = i / G, \quad (3.8)$$

где  $R$  - сопротивление [ $\Omega$ ];  $G$  - проводимость [ $\text{Sim}$ ];  $v$  - напряжение [ $V$ ];  $i$  - ток [ $A$ ]. Различают линейные и нелинейные, зависящие от тока или напряжения, резисторы.

Конденсатор - элемент, емкость которого обозначается  $C$ , единица измерения [ $F$ ]. Описывается уравнением

$$q = f(v), \quad (3.9)$$

где  $q$  - заряд [ $K$ ], либо

$$q = C \cdot v, \quad (3.10)$$

для линейной постоянной емкости. Ток, протекающий через конденсатор

$$i = \partial q / \partial t, \quad (3.11)$$

Для линейной постоянной емкости

$$i = C \cdot \partial v / \partial t, \quad (3.12)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

где  $v_0$  - напряжение на конденсаторе, при  $t = 0$ .

Индуктивность - элемент, обозначаемый  $L$ , единица измерения  $[Hn]$ .  
Описывается уравнением

$$\Phi = f(i), \quad (3.14)$$

где  $\Phi$  - магнитный поток  $[Wb]$ .

Напряжение на катушке индуктивности

$$v = \partial \Phi / \partial t, \quad (3.15)$$

$$\Phi = L \cdot i, \quad (3.16)$$

$$v = L \cdot \partial i / \partial t, \quad (3.17)$$

$$i = i_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

где  $i_0$  - ток, протекающий через катушку индуктивности, при  $t = 0$ .

Уравнения, определяющие взаимосвязь токов и напряжений на основных элементах, называются компонентными.

### 3.5 Преобразование Лапласа для уравнений реактивных элементов

Компонентные уравнения реактивных элементов (емкостей и индуктивностей) описываются дифференциальными соотношениями. Для линейных и постоянных элементов  $L$  и  $C$  компонентные уравнения, как простейшие дифференциальные уравнения, преобразованием Лапласа трансформируются в алгебраические уравнения и наоборот. В результате соотношения из временного представления (относительно переменной  $t$ ) переводятся в комплексную плоскость переменной  $s = \alpha + j \cdot \omega$ . При установившемся синусоидальном воздействии  $s = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f = j \cdot \omega$ .

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.12)

$$i = C \cdot \partial v / \partial t$$

получаем

$$I = s \cdot C \cdot V - C \cdot V_0. \quad (3.20)$$

Преобразование Лапласа уравнения (3.17)

$$v = L \cdot \partial i / \partial t,$$

дает

$$V = s \cdot L \cdot I - L \cdot I_0. \quad (3.21)$$

При нулевых начальных условиях  $V_0 = 0$  и  $I_0 = 0$

$$I = s \cdot C \cdot V; \quad (3.22)$$

$$V = s \cdot L \cdot I; \quad (3.23)$$

откуда

$$Y_C = s \cdot C; \tag{3.24}$$

$$Z_L = s \cdot L; \tag{3.25}$$

либо

$$Z_C = 1 / sC; \tag{3.26}$$

$$Y_L = 1 / sL. \tag{3.27}$$

Перепишем уравнения (3.20) и (3.21) в виде

$$I + C \cdot V_0 = s \cdot C \cdot V; \tag{3.28}$$

$$V + L \cdot I_0 = s \cdot L \cdot I, \tag{3.29}$$

здесь  $C \cdot V_0$ - источник тока, включенный параллельно  $C$ ;  $L \cdot I_0$  - источник напряжения, включенный последовательно с  $L$ . Можно также записать уравнения (3.20) и (3.21) в виде

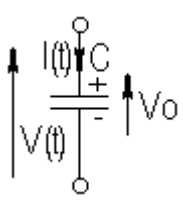
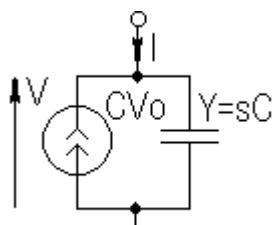
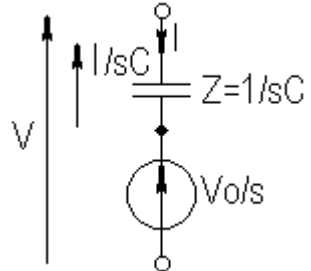
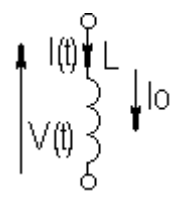
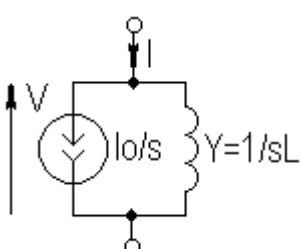
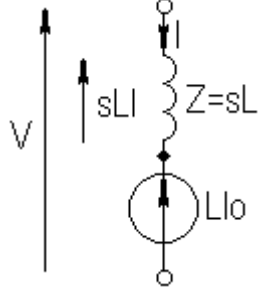
$$V - V_0 / s = (1 / sC) \cdot I; \tag{3.30}$$

$$I - I_0 / s = (1 / sL) \cdot V, \tag{3.31}$$

где  $V_0 / s$ - источник напряжения, включенный последовательно с  $C$ ;  $I_0 / s$ - источник тока, включенный параллельно с  $L$ .

Рассмотренные представления удобно свести в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Представление реактивных элементов

Элемент	Проводимость	Сопротивление
 $i(t) = C \cdot \partial v(t) / \partial t$ $v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$	 $I = s \cdot C \cdot V - C \cdot V_0$	 $V - \frac{V_0}{s} = (1 / sC) \cdot I$
 $v = L \cdot \partial i(t) / \partial t$ $i(t) = i_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v(\tau) d\tau$	 $I - \frac{I_0}{s} = (1 / sL) \cdot V$	 $V = s \cdot L \cdot I - L \cdot I_0$

### 3.6 Нормировка входных данных

В реальных схемах часто наблюдается большой разброс значений параметров. При решении уравнений описывающих подобные схемы может возникнуть потеря точности при вычислениях и переполнение разрядной сетки ЭВМ. Следует различать относительный и абсолютный разбросы. Абсолютный разброс представляет собой отношение верхнего предела номинала данного типа элемента к нижнему пределу. Относительный разброс - это абсолютный разброс, нормированный на среднегеометрическое значение верхнего и нижнего номинала. Если разброс симметричен относительно нуля, то абсолютный и относительный разбросы совпадают, и нормировка ничего не дает. Однако часто разброс несимметричен относительно нуля и нормировка позволяет существенно повысить точность результатов и снизить вероятность переполнения разрядной сетки.

В схемотехническом проектировании в качестве основных единиц измерения используются: напряжение  $U[V]$ , ток  $I[A]$ , сопротивление  $R[Om]$ , емкость  $C[F]$ , индуктивность  $L[Hn]$ , частота  $F[Hz]$ , время  $T[s]$ . Из семи возможных единиц только три могут быть независимыми, причем не любые, а такие, чтобы остальные могли быть выражены через них, в соответствии с соотношениями:

$$U = R \cdot I; T = R \cdot C; T = R / L; F = 1 / T; Z = j \cdot \omega \cdot L = 1 / (j \cdot \omega \cdot C);$$

где  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot F$ .

В качестве комбинаций независимых единиц могут выступать, например:  $U, R, \Omega$ ;  $I, R, T$ ;  $U, R, L$ ;  $U, R, C$ ;  $I, L, C$ .

С другой стороны, в качестве комбинаций независимых единиц, не могут выступать, например:  $R, L, \Omega$ ;  $U, \Omega, T$ ;  $R, C, T$ ;  $I, C, \Omega$ . Пусть имеем параметр  $x$  и масштабный коэффициент  $M_x$ , тогда нормированное значение параметра  $X = x / M_x$ . Если наоборот, вычислен нормированный параметр  $X$ , тогда истинное значение параметра  $x = X \cdot M_x$ .

В качестве нормирующего множителя (масштабного коэффициента), удобно брать, округленное до ближайшей степени десяти, среднегеометрическое значение верхнего и нижнего пределов.

На практике часто в качестве независимых единиц выбирают:  $U, R, \Omega$ ;  $U, R, L$ ;  $U, R, C$ . Очевидно, что вместо  $U$ , можно брать  $I$ , а вместо  $\Omega$ , можно брать  $T$ . Так, если комбинацией независимых единиц является  $(U, R, \Omega)$ , то масштабные коэффициенты зависимых единиц определяются как

$$M_I = M_U / M_R; M_T = 1 / M_\Omega; M_L = M_R / M_\Omega; M_C = 1 / M_R / M_\Omega.$$

В качестве независимых единиц можно взять комбинацию с меньшим числом единиц. В этом случае масштабные множители, оставшихся независимых единиц подразумеваются равными единице. Так, если в качестве независимой единицы взять  $\Omega$ , то масштабные множители остальных единиц равны

$$M_I = 1; M_U = 1; M_T = 1; M_L = 1 / M_{\Omega}; M_C = 1 / M_{\Omega}.$$

В заключение отметим, что классические методы формирования математических моделей отличаются относительной простотой и малой размерностью, однако они не позволяют описывать схемы с произвольным набором базовых элементов. Кроме того, классические методы не позволяют напрямую переходить из частотной области во временную область. От перечисленных недостатков свободны прямые методы формирования математических моделей, базирующиеся на табличном методе и его вариантах.

## 4 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

### 4.1 Табличный метод

Идея табличного метода заключается в объединении топологических и компонентных уравнений цепи. В качестве топологических уравнений используется уравнения для токов и напряжений ветвей, выраженные через матрицу инцидентий. При таком подходе все токи и напряжения ветвей и напряжения узлов рассматривается, как неизвестные переменные. Этот метод, очевидно, является наиболее общим, однако приводит к системе уравнений высокого порядка.

Допустим, что цепь имеет  $b$  ветвей и  $n$  независимых узлов, содержит  $R, L, C$  элементы, зависимые и независимые источники и другие, часто используемые элементы. Топологические свойства цепи можно отобразить матрицами инцидентий  $A$ , сечений  $Q$ , и контуров  $B$ . Т.к. матрица инцидентий, в отличие от матриц сечений и контуров, формируется непосредственно по схеме, именно она используется в табличном методе. Уравнение Кирхгофа для токов, как известно, запишется в виде

$$A \cdot I_b = 0. \quad (4.1)$$

Напряжения ветвей связаны с напряжениями узлов как

$$V_b = A^t \cdot V_n, \quad (4.2)$$

где  $V_b, I_b$  - напряжения и токи ветвей;  $V_n$  - напряжения узлов.

Компонентные уравнения в самом общем случае могут быть записаны как

$$\begin{array}{l} \text{токи} \\ \text{напряжения} \end{array} \begin{bmatrix} Y_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \cdot V_b + \begin{bmatrix} K_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \cdot I_b = \begin{bmatrix} W_{b1} \\ W_{b2} \end{bmatrix},$$

где  $Y_1, Z_2$  - соответственно проводимость и импеданс;  $K_1, K_2$  - безразмерные константы;  $W_{b1}, W_{b2}$  - токи и напряжения независимых источников, в том числе источников, учитывающих влияние начальных условий на конденсаторах и катушках индуктивности. Для компактности воспользуемся более краткой формой компонентных уравнений

$$Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b = W_b. \quad (4.3)$$

Заметим, что для различных типов ветвей  $Y_b$  и  $Z_b$  могут принимать конкретное значение: +1, -1, либо 0, а  $W_b$  - конкретное значение, либо 0.

В таблице 4.1 представлены значения  $Y_b, Z_b, W_b$  для некоторых типов ветвей.

Компонентные уравнения двухполюсников

Элемент	Компонентные уравнения	$Y_b$	$Z_b$	$W_b$
Резистор	$V_b - R_b \cdot I_b = 0$	1	$-R_b$	0
Проводимость	$G_b \cdot V_b - I_b = 0$	$G_b$	-1	0
Конденсатор	$s \cdot C_b \cdot V_b - I_b = C_b \cdot V_0$	$s \cdot C_b$	-1	$C_b \cdot V_0$
Катушка инд-ти	$V_b - s \cdot L_b \cdot I_b = -L_b \cdot I_0$	1	$-s \cdot L_b$	$-L_b \cdot I_0$
Источник напряж.	$V_b = E_b$	1	0	$E_b$
Источник тока	$I_b = J_b$	0	1	$I_b$

Заметим, что в таблице 4.1 конденсатор представлен как проводимость  $s \cdot C_b$ , а индуктивность как сопротивление  $s \cdot L_b$ .

В принципе, возможно и обратное представление, однако, забегаю вперед, можно отметить, что для формального перехода, от алгебраических уравнений в частотной области к дифференциальным уравнениям во временной области, недопустимы множители типа  $1/s$ .

Таким образом, это ограничение необходимо соблюдать, если на основании математической модели предполагается вычисление временных характеристик путем перехода от алгебраических уравнений к дифференциальным уравнениям и их последующего интегрирования.

Табличную систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_b - A^t \cdot V_n &= 0, \\ Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b &= W_b, \\ A \cdot I_b &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в блочной матричной форме

$$\begin{matrix} b & b & n \\ b & b & n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A^t \\ Y_b & Z_b & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b \\ I_b \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

или в общем, виде

$$T \cdot X = W. \quad (4.6)$$

Как следует из структуры уравнений, блочная матрица  $T$  имеет на главной диагонали квадратные матрицы. При табличном методе не различаются источники и пассивные компоненты, как в обобщенном узлом

методе. Нумерация элементов также может быть произвольной и лишь в специальных теоретических исследованиях желательно иногда соблюдать определенную нумерацию.

В качестве простейшего примера, рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 4.1.

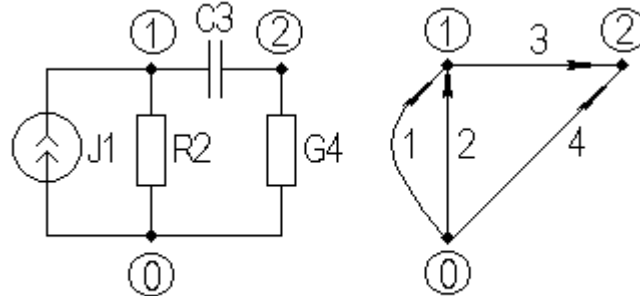


Рисунок 4.1 - Пассивная RC цепь

Матрица инцидентий схемы запишется

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Используя, матрицу инцидентий схемы и таблицу 4.1 компонентных уравнений ветвей, в соответствии с (4.5), получаем следующую табличную систему

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \cdot C_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Если в начальный момент времени на емкости  $C_3$  есть напряжение  $V_0$ , то седьмой элемент вектора источников равен  $w_7 = C_3 \cdot V_0$ .

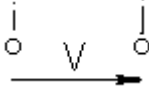
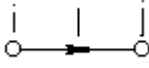
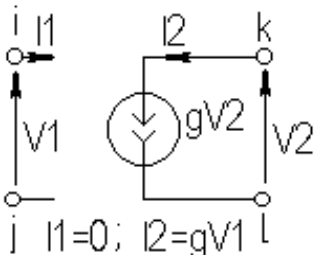
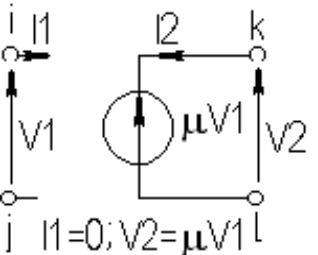
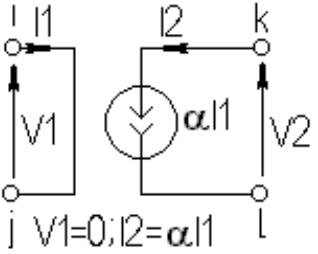
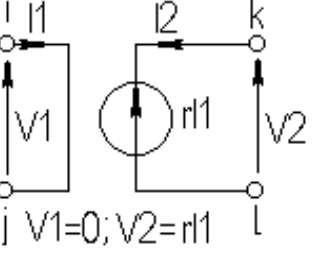
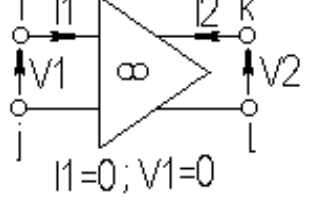
В качестве достоинств табличного метода в сравнении с узловым либо контурным методами, следует отметить возможность представления более широкого набора типов ветвей, а также возможность представления некоторых ветвей, как в виде проводимости, так и в виде сопротивления. Управление представлением реактивных ветвей становится актуальным при расчете временных характеристик цепей с использованием преобразования Лапласа для перехода от алгебраических уравнений к дифференциальным и их последующим интегрированием.



В реальных схемах, кроме двухполюсных элементов, используются и более сложные элементы, например управляемые источники активных схем, поэтому расширим таблицу компонентных уравнений.

Таблица 4.2

Компонентные уравнения идеальных элементов

Элемент	Обозначение	Компонентные уравнения
Разомкнутая цепь		$I = 0$
Короткозамк. цепь		$V = 0$
Источник тока, управляемый напряжением	 $i_1 = 0; i_2 = gV_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения, управляемый напряжением	 $i_1 = 0; V_2 = \mu V_1$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник тока, управляемый током	 $V_1 = 0; i_2 = \alpha i_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Источник напряжения, управляемый током	 $V_1 = 0; V_2 = r i_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Операционный усилитель	 $i_1 = 0; V_1 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Для иллюстрации табличного метода в качестве примера рассмотрим схему рисунка 4.2, содержащую источник напряжения управляемый напряжением.

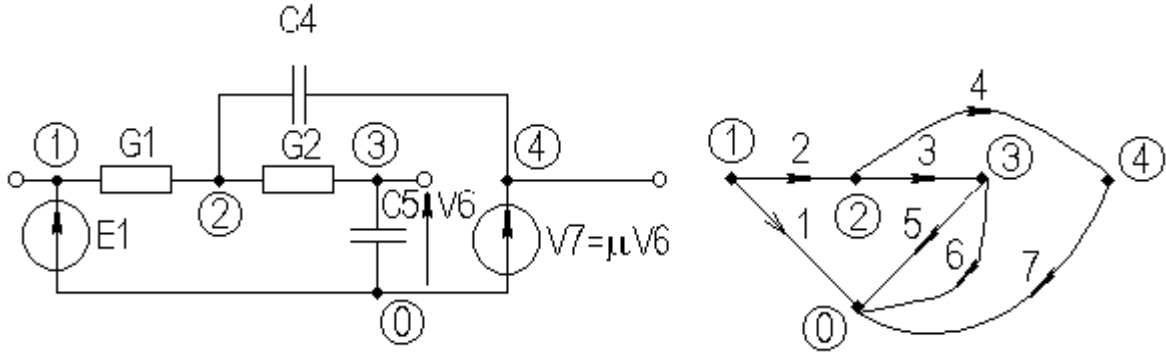


Рисунок 4.2 - Схема с источником напряжения управляемого напряжением

Ввиду громоздкости табличной матрицы, запишем лишь матрицу инцидентий

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и компонентные уравнения рассматриваемой схемы

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & G_2 & & & & & & & & \\ & & G_3 & & & & & & & \\ & & & sC_4 & & & & & & \\ & & & & sC_5 & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & \mu & -1 & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из примера видно, что коэффициенты табличной системы получаются чрезвычайно разреженными. Для сравнения различных методов удобно ввести показатель заполнения

$$D = \text{число ненулевых элементов} / \text{общее число элементов}.$$

Для данного примера табличная система размерностью  $18 \cdot 18$  имеет 39 ненулевых элементов. Следовательно,  $D = 39 / 18^2 = 12\%$ .

Недостаток табличного метода заключается в большом размере систем уравнений и требовании специальных алгоритмов решения разреженных систем уравнений. Причем структура уравнений такова, что затрудняет

использование более простых алгоритмов для разреженных матриц с симметричной структурой.

## 4.2 Модификация табличного метода

Недостаток табличного метода, высокая размерность связана с тем, что в результате решения сразу определяются напряжения ветвей  $V_b$ , токи ветвей  $I_b$  и напряжения узлов  $V_n$ . В тоже время, напряжения ветвей легко вычислить из узловых напряжений

$$V_b = A^t \cdot V_n.$$

В связи с этим исключим из табличной системы переменную  $V_b$ , преобразуя, соответствующим образом, исходную систему (4.4). Так если подставить первое уравнение во второе, то получим

$$Y_b \cdot A^t \cdot V_n + Z_b \cdot I_b = W_b, \quad (4.7a)$$

$$A \cdot I_b = 0, \quad (4.7b)$$

или в матричной форме

$$\begin{matrix} & n & b \\ b & \begin{bmatrix} Y_b \cdot A^t & Z_b \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{matrix} \quad (4.8)$$

Соотношения (4.7) и (4.8) и представляют собой модифицированную табличную систему уравнений. Модифицированная табличная система сохраняет все основные достоинства табличного метода, но имеет меньшую размерность. Так размер матрицы коэффициентов равен  $(n+b) \cdot (b+n)$ , где  $b$ - число ветвей, а  $n$ - число независимых узлов. Снижение размерности упрощает решение системы.

Реализация модифицированного табличного метода практически не отличается от табличного метода. Информация о каждой ветви отображается в общем случае во всех блоках системы. Единственным пунктом, требующим пояснений, является, пожалуй, блок  $Y_b \cdot A^t$ . Дело в том, что нет необходимости вычислять предварительно произведение  $Y_b \cdot A^t$ . Покажем это на основе простых рассуждений. Пусть имеем две независимые ветви проводимостью  $y_a$  и  $y_b$ , включенные соответственно между узлами  $i, j$  и  $k, l$ . Выполним умножение фрагментов матриц  $Y_b$  и  $A^t$

$$Y_b \cdot A^t = \begin{matrix} & i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} y_a & & & \\ & y_b & & \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b & \end{matrix} = \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b & -y_b \end{bmatrix} \\ b & \end{matrix} \end{matrix}.$$

Из анализа результатов умножения следует, что для формирования блока  $Y_b \cdot A^t$  из двухполюсных ветвей достаточно в транспонированной матрице инцидентий заменить  $\pm 1$  на  $\pm y_d$ . Более сложный случай

соответствует включению между узлами  $i, j$  управляющей ветви, а между узлами  $k, l$  управляемой ветви. В компонентной матрице этому фрагменту соответствует блок  $(2 \cdot 2)$ . Умножение фрагментов матриц  $Y_b$  и  $A^t$  в этом случае соответствует

$$Y_b \cdot A^t = \begin{matrix} & i & j & k & l & & i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} y_a & y_b \\ y_c & y_d \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_b & -y_b \\ y_c & -y_c & y_d & -y_d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Откуда следует, что на пересечении строк  $a, b$  и столбцов  $i, k$ , блок входит со знаком плюс, а на пересечении тех же строк и столбцов  $j, l$  - со знаком минус.

Установим взаимосвязь табличного и узлового методов. Если все ветви схемы, кроме независимых источников, описать через проводимости, а независимые источники преобразовать в источники тока, то компонентные уравнения

$$Y_b \cdot V_b + Z_b \cdot I_b = W_b$$

могут быть записаны в виде

$$I_b = Y_b \cdot V_b - J_b, \quad (4.9)$$

т.к., согласно таблице 4.1, в этом случае  $Z_b = -1$ , а  $I_b = J_b$ . Подставляя в (4.9) уравнения связи напряжений ветвей и узлов, получим

$$I_b = Y_b \cdot A^t \cdot V_n - J_b$$

Наконец, используя уравнение Кирхгофа для токов

$$A \cdot I_b = A \cdot (Y_b \cdot A^t \cdot V_n - J_b) = 0,$$

и, используя известные соотношения

$$\begin{aligned} A \cdot Y_b \cdot A^t &= Y, \\ A \cdot J_b &= J_n, \end{aligned}$$

можем записать

$$Y \cdot V_n = J_n. \quad (4.10)$$

Т.о., мы пришли к системе узловых уравнений и установили, при каких условиях табличная система преобразуется в узловую систему.

В заключение можно отметить, что табличный и модифицированный табличный методы позволяют представить, практически любые линейные и нелинейные ветви и в некоторых случаях (реактивные ветви при преобразовании алгебраических уравнений в дифференциальные) представлять ветви либо проводимостью, либо сопротивлением. Размерность уравнений остается, однако, довольно высокой и требуется алгоритмы для разреженных систем уравнений.

### 4.3 Модифицированный метод узловых потенциалов

В этом подразделе займемся модификацией узлового метода, с целью обеспечения возможности составления уравнений цепи, с произвольными идеальными элементами. Т.е. рассмотрим метод, совмещающий достоинства узлового и табличного методов. Идея модификации метода заключена в разбиении элементов схемы на группы:

- 1) ветви, которые можно описать через проводимости (ток через них не будет определяться);
- 2) ветви, которые нельзя описать через проводимости, либо можно описать, но важно определить протекающий через них ток;
- 3) ветви независимых источников тока.

В результате решения будем искать напряжения узлов  $V_n$  и токи ветвей второй группы  $I_2$ . Напряжения ветвей можно определить позже по уравнению связи напряжений ветвей и узлов  $V_b = A^t \cdot V_n$ , а токи ветвей первой группы на основании компонентных уравнений  $I_1 = Y_1 \cdot V_1$ .

Как и в табличном методе, при расчете во временной области начальные токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах учитываются с помощью эквивалентных источников, следующих из преобразования Лапласа.

Итак, упорядочим элементы, оговоренным выше образом, и запишем уравнения Кирхгофа для токов в виде

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \end{bmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Уравнения для напряжений групп ветвей упорядочиваются аналогично

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^t \\ A_2^t \\ A_3^t \end{bmatrix} \cdot V_n. \quad (4.12)$$

Это же уравнение можно расписать тремя независимыми уравнениями

$$V_1 = A_1^t \cdot V_n; \quad V_2 = A_2^t \cdot V_n; \quad V_J = A_3^t \cdot V_n. \quad (4.13)$$

Последнее уравнение используется для расчета напряжений на источниках тока. Компонентные уравнения для ветвей первой группы, как отмечалось выше, запишутся

$$Y_1 \cdot V_1 = I_1. \quad (4.14)$$

Запишем компонентные уравнения ветвей второй группы в виде

$$Y_2 \cdot V_2 + Z_2 \cdot I_2 = W_2, \quad (4.15)$$

где  $W_2$  содержит ненулевые элементы только для источников напряжения. Перепишем уравнения Кирхгофа для токов (4.11) в виде

$$A_1 \cdot I_1 + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J. \quad (4.16)$$

Используя компонентные уравнения первой группы (4.14), преобразуем их к виду

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot V_1 + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J. \quad (4.17)$$

В уравнениях (4.17) и (4.15) напряжения на ветвях первой группы выразим через узловые напряжения (4.13а)

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t \cdot V_n + A_2 \cdot I_2 = -A_3 \cdot J, \quad (4.18)$$

$$Y_2 \cdot A_2^t \cdot V_n + Z_2 \cdot I_2 = W_2. \quad (4.19)$$

Последние два уравнения запишем в матричном виде

$$\begin{bmatrix} A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t & A_2 \\ Y_2 \cdot A_2^t & Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_3 \cdot J \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Из узлового метода известно

$$A_1 \cdot Y_1 \cdot A_1^t = Y_{n1}; \quad (4.21a)$$

$$-A_3 \cdot J = J_n, \quad (4.21b)$$

где  $Y_{n1}$  - матрица узловых проводимостей ветвей первой группы;  $J_n$  - вектор эквивалентных узловых источников тока.

Конечная форма уравнений метода модифицированных узловых потенциалов имеет вид

$$\begin{bmatrix} Y_{n1} & A_2 \\ Y_2 \cdot A_2^t & Z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_n \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Таким образом, модифицированная узловая система представляет собой обычную узловую матрицу, построенную из ветвей первой группы и дополненную уравнениями ветвей второй группы по принципу модифицированных табличных уравнений. Вектор свободных членов, соответственно, представляет собой вектор эквивалентных узловых источников тока, дополненный напряжениями ветвей второй группы. Искомый вектор или вектор неизвестных содержит узловые напряжения и токи ветвей второй группы. Как следует из структуры уравнений, размерность системы равна  $(n + n_2) \cdot (n + n_2)$ , где  $n_2$  - число ветвей второй группы.

Реализация модифицированного узлового метода достаточно проста и состоит в анализе признака ветви и внесении определенных коэффициентов либо в узловую матрицу или в ее дополнение. Источники тока вносятся в первую часть вектора свободных членов, а источники напряжения во вторую. Как и в модифицированном табличном методе, требуются пояснения лишь относительно блока  $Y_2 \cdot A_2^t$ . Реализация модифицированного узлового метода естественно совмещает признаки узлового и модифицированного табличного метода. Информация о каждой ветви отображается, в общем случае, либо в

узловой матрице, либо в ее дополнении. Как и в модифицированном табличном методе, нет необходимости вычислять предварительно произведение  $Y_2 \cdot A_2^t$ . Повторим соответствующие выкладки еще раз. Две независимые ветви проводимостью  $y_a$  и  $y_b$ , включенные, соответственно, между узлами  $i, j$  и  $k, l$ , в результате умножения фрагментов матриц  $Y_2$  и  $A_2^t$  дают

$$Y_2 \cdot A_2^t = \begin{matrix} & i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} y_a & & & \\ & y_b & & \end{bmatrix} & \cdot & \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} & = & \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_b & -y_b \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Анализ результатов умножения показывает, что для формирования блока  $Y_2 \cdot A_2^t$  из двухполюсных ветвей достаточно в транспонированной матрице инцидентий заменить  $\pm 1$  на  $\pm y_d$ . Включению, между узлами  $i, j$ , управляющей ветви, а между узлами  $k, l$ , управляемой ветви, в компонентной матрице соответствует блок (2·2). Умножение фрагментов матриц  $Y_2$  и  $A_2^t$  в этом случае соответствует

$$Y_2 \cdot A_2^t = \begin{matrix} & i & j & k & l \\ \begin{bmatrix} y_a & y_b \\ y_c & y_d \end{bmatrix} & \cdot & \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} & = & \begin{matrix} a & \begin{bmatrix} y_a & -y_a & y_b & -y_b \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} y_c & -y_c & y_d & -y_d \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Отсюда следует, что на пересечении строк  $a, b$  и столбцов  $i, k$ , блок входит со знаком плюс, а на пересечении тех же строк и столбцов  $j, l$  - со знаком минус.

Модифицированная узловая система уравнений сохраняет достоинства как узловой, так и табличной систем уравнений. Пониженная размерность системы сочетается с гибкостью представления различных типов ветвей.

Проиллюстрируем возможности модифицированного узлового метода на том же примере, что и для табличного метода (схема рисунка 4.2). Матрица инцидентий и компонентные уравнения ветвей второй группы (независимый источник напряжения  $E_1$  и источник напряжения  $V_7$  управляемый напряжением  $V_6$ ) запишутся

$$A_2 = \begin{matrix} & E_1 & V_6 & V_7 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ b_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b_3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полная модифицированная узловая система уравнений для рассматриваемого примера примет вид

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & \begin{bmatrix} G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} -G_2 & G_2 + G_3 + sC_4 & -G_3 & -sC_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & -G_3 & G_3 + sC_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & -sC_4 & 0 & sC_4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \\ I_E \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что коэффициент заполнения для этого метода равен  $D = 17 / 49 = 34.69\%$ , и существенно больше, чем у табличного метода.

#### 4.4 Модифицированный узловый метод с проверкой

Модифицированный метод узловых потенциалов исключает из рассмотрения напряжения ветвей  $V_b$  и токи ветвей первой группы  $I_{b1}$ . При этом, однако, не исключаются лишние переменные, известные заранее (например, ток ветви ХХ источника тока управляемого напряжением, либо напряжение ветви КЗ источника тока управляемого током). Модифицированный узловый метод с проверкой свободен от этого недостатка, а также обходится без явного использования матрицы инцидентий. Все это делает его весьма привлекательным для реализации на ЭВМ.

Как и в модифицированном узловом методе, все ветви делятся аналогично на три группы. Внешне структура уравнений модифицированного узлового метода с проверкой также остается неизменной. Ветви независимых источников тока вносятся в первую часть вектора свободных членов. Ветви первой группы заносятся в блок, являющийся обычной подматрицей узловых проводимостей. Компонентные уравнения ветвей второй группы заносятся в дополнение блока узловой матрицы. Уравнения для напряжений, исходя из принятой структуры уравнений, заносятся в дополнительные строки, а для токов - в столбцы.



Для примера, пусть источник напряжения  $E$  включен между узлами  $i$  и  $j$ . Ток, протекающий от узла  $i$  к узлу  $j$ , обозначим как  $I$ . Тогда уравнение для напряжения и тока запишутся

$$V_i - V_j = E,$$

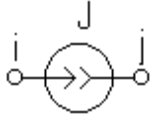
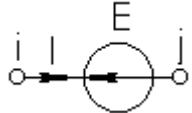
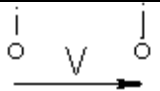
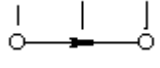
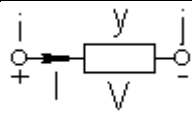
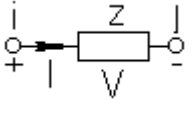
$$I_i = I, \quad I_j = -I.$$

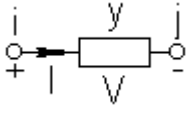
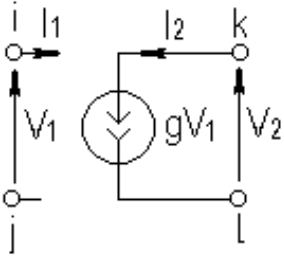
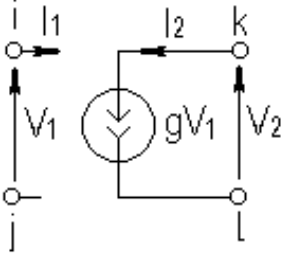
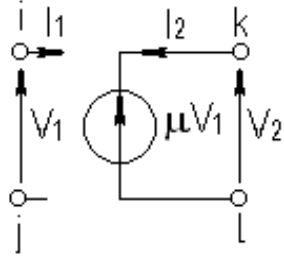
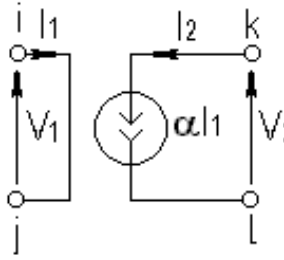
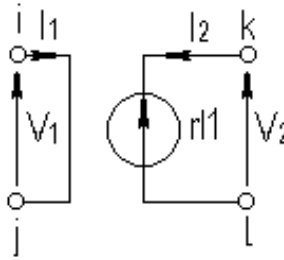
В результате, в текущую строку и столбец внесутся  $+1$  и  $-1$ , а в компоненту вектора свободных членов запишется ЭДС  $E$ . Аналогично записываются и отображаются уравнения и для других типов ветвей.

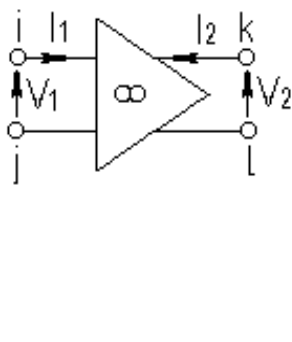
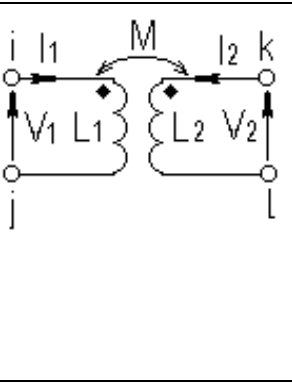
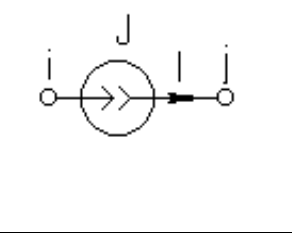
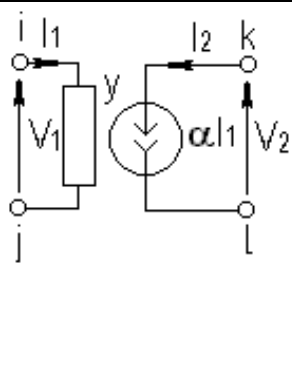
Представление элементов в модифицированной узловом методе с проверкой, показано в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Представление элементов в модифицированном узловом методе с проверкой

Элем.	Обозначения	Матрица / вектор	Уравнения
Ист. тока 3-гр.		$\begin{matrix} i & \begin{bmatrix} -J \\ \dots \\ J \end{bmatrix} \\ \dots & \dots \\ j & \end{matrix}$	$\begin{aligned} I_i &= J; \\ I_j &= -J. \end{aligned}$
Ист. напр. 2-гр.		$\begin{matrix} v_i & v_j & I \\ i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ E \end{bmatrix} \\ j & \\ m & \end{matrix}$	$\begin{aligned} V_i - V_j &= E; \\ I_i &= I; \\ I_j &= -I. \end{aligned}$
Цепь ХХ		-----	$V = V_i - V_j.$
Цепь КЗ 2-гр.		$\begin{matrix} v_i & v_j & I \\ i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ j & \\ m & \end{matrix}$	$\begin{aligned} V_i - V_j &= 0; \\ I_i &= I; \\ I_j &= -I. \end{aligned}$
Проводимость 1-гр.		$\begin{matrix} v_i & \cdot & v_j \\ i & \begin{bmatrix} y & \cdot & -y \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -y & \cdot & y \end{bmatrix} \\ \cdot & \\ j & \end{matrix}$	$\begin{aligned} I_i &= y(V_i - V_j); \\ I_j &= -y(V_i - V_j). \end{aligned}$
Сопротивление 2-гр.		$\begin{matrix} v_i & v_j & I \\ i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & -1 & -z \end{bmatrix} \\ j & \\ m & \end{matrix}$	$\begin{aligned} V_i - V_j - zI &= 0; \\ I_i &= I; \\ I_j &= -I. \end{aligned}$

Проводимость 2-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & I \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \\  j & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \\  m & \begin{bmatrix} y & -y & -1 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  y(V_i - V_j) - I &= 0; \\  I_i &= I; \\  I_j &= -I.  \end{aligned}  $
ИТУН Ист. тока, упр. током 1-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & \cdot & v_j \\  k & \begin{bmatrix} g & \cdot & -g \end{bmatrix} \\  \cdot & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\  l & \begin{bmatrix} -g & \cdot & g \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= I_j = 0; \\  I_k &= g(V_i - V_j); \\  I_l &= -g(V_i - V_j).  \end{aligned}  $
ИТУН Ист. тока, упр. током 2-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\  j & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\  k & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \\  l & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix} \\  m & \begin{bmatrix} g & -g & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_k &= -I_l = I_2; \\  g(V_i - V_j) &= I_2.  \end{aligned}  $
ИНУН Ист. напр., упр. напр. 2-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\  j & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \\  k & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{bmatrix} \\  l & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix} \\  m & \begin{bmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_k &= -I_l = I_2; \\  \mu(V_i - V_j) &= \\  v_k - v_l &= V_2.  \end{aligned}  $
ИТУТ Ист. тока, упр. током 2-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \\  j & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \\  k & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \alpha \end{bmatrix} \\  l & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \\  m & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= -I_j = I_1; \\  I_k &= -I_l = \alpha I_1; \\  v_i - v_j &= 0.  \end{aligned}  $
ИНУТ Ист. напр., упр. напр. 2-гр.		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I_1 & I_2 \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \\  j & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \end{bmatrix} \\  k & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \\  l & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \end{bmatrix} \\  m & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\  m+1 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -r & 0 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= -I_j = I_1; \\  I_k &= -I_l = I_2; \\  v_i - v_j &= 0; \\  v_k - v_l - rI_1 &= 0.  \end{aligned}  $

<p>ОУ Опер. усил. 2-гр.</p>		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I \\  i & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\  j \\  k \\  l \\  m \begin{bmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_k &= -I_l = I_2; \\  v_i - v_j &= 0.  \end{aligned}  $
<p>Транс- фор- матор 2-гр.</p>		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I_1 & I_2 \\  i & \begin{bmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \\  j \\  k \\  l \\  m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x_1 & x_m \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_m & x_2 \end{bmatrix} \\  m+1  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= -I_j = I_1; \\  I_k &= -I_l = I_2; \\  v_i - v_j &= \\  sL_1 I_1 + sMI_2; \\  v_k - v_l &= \\  sMI_1 + sL_2 I_2.  \end{aligned}  $
<p>Ист. тока 2-гр.</p>		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & I \\  i & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ J \end{bmatrix} \\  j \\  m  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= -I_j = I; \\  I &= J.  \end{aligned}  $
<p>Ист. тока упр., ТОКОМ ветви 2-гр.</p>		$  \begin{matrix}  v_i & v_j & v_k & v_l & I_1 & I_2 \\  i & \begin{bmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \\  j \\  k \\  l \\  m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 \end{bmatrix} \\  m+1  \end{matrix}  $	$  \begin{aligned}  I_i &= -I_j = I_1; \\  I_k &= -I_l = I_2; \\  v_i - v_j &= 0; \\  \alpha I_1 - I_2 &= 0.  \end{aligned}  $

Из таблицы видно, как записываются и отображаются уравнения для токов и напряжений основных типов элементов. Вывод уравнений для других типов элементов не представит затруднений.

При таком подходе может быть описан, в частности идеальный ключ с двумя состояниями – КЗ и ХХ. ХХ удобно описать через проводимость  $G \cdot (V_i - V_j) - I = 0$ , положив  $G = 0$ , а КЗ – через сопротивление  $V_i - V_j - R \cdot I = 0$ , положив  $R = 0$ . Для обоих состояний можно записать  $F \cdot V_i - F \cdot V_j - (F - 1) \cdot I = 0$ , полагая для ХХ  $F = 0$ , для КЗ  $F = 1$ . Фрагмент матрицы коэффициентов для ключа имеет вид

$$\begin{array}{c}
 V_i \quad V_j \quad I \\
 i \left[ \begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & -1 \\ F & -F & F-1 \end{array} \right] \\
 j \\
 m
 \end{array}$$

Размерность модифицированной узловой системы с проверкой равна  $(n + n'_2) \cdot (n + n'_2)$ , где  $n'_2$  – сокращенное число ветвей второй группы.

Проиллюстрируем возможности модифицированного узлового метода с проверкой на том же примере (схема рисунка 4.2.), что и предыдущие методы. Соблюдая преемственность с предыдущими методами, независимый  $E_1$  и зависимый  $V_7$  источники напряжения отнесем ко второй группе ветвей, ветвь XX управляющей ветви  $V_6$  из рассмотрения исключается, так как заранее известно, что  $I_{V_6} = 0$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\
 \begin{array}{l}
 1 \left[ \begin{array}{cccccc} G_2 & -G_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + s \cdot C_4 & -G_3 & -s \cdot C_4 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3 + s \cdot C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s \cdot C_4 & 0 & s \cdot C_4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \\ I_E \\ I_{V_7} \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Коэффициент заполнения для этого метода составил  $D = 15 / 36 = 41.67\%$ .

Таким образом, модифицированный метод узловых потенциалов с проверкой позволяет дополнительно понизить порядок и повысить плотность заполнения матрицы коэффициентов.

Здесь, как и в табличном, модифицированном табличном и модифицированным узловым методами, можем по своему усмотрению менять представление ветвей (проводимостью либо сопротивлением). Это дает нам возможность получать математические модели в виде алгебраических систем уравнений удобных для преобразования Лапласа в систему обыкновенных дифференциальных и последующего расчета временных характеристик. Для формального преобразования алгебраической системы уравнений в систему обыкновенных дифференциальных уравнений недопустимо появление операторного выражения  $1/s$  в матрице коэффициентов системы.

Это условие равносильно требованию, при расчете временных характеристик интегрированием дифференциальных уравнений, на этапе формирования математической модели конденсаторы представлять реактивными проводимостями  $j \cdot \omega \cdot C_i$ , а катушки индуктивности –

реактивными сопротивлениями  $j \cdot \omega \cdot L_i$ . Начальные условия в виде напряжений на конденсаторах  $C_i \cdot V_{0i}$  и токов через катушки индуктивности  $L_i \cdot I_{0i}$ , при необходимости, учитываются в векторе свободных членов  $W$ .

В результате матрица коэффициентов системы уравнений может быть разделена на действительную  $G$  и мнимую  $s \cdot C$  части

$$T \cdot X = (G + s \cdot C) \cdot X = W. \quad (4.23)$$

Применив преобразование Лапласа, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$C \cdot X' = -G \cdot X + W. \quad (4.24)$$

Таким образом, в этом разделе достаточно подробно рассмотрены прямые методы формирования математических моделей электронных схем, которые в дальнейшем будут использоваться при расчетах в частотной и временной областях, а также по постоянному току.

## 5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДЕЛИ

### 5.1 Основные понятия

При изучении сложных процессов и явлений обычно прибегают к моделям, выделяя из явления или процесса главное, позволяющее исследовать какую-либо его сторону в чистом виде – абсолютно твердое, упругое, черное - тела в физике, стационарная, расширяющаяся, пульсирующая - модели вселенной в астрономии и т.д.

В радиотехнике с первых шагов встречаемся с идеализированными моделями  $R, L, C$  элементов, накладывая условия квазистационарности электрических и магнитных полей, пренебрегая размерами, зависимостью от многих факторов. Токи и напряжения, также идеализация и производные понятия от напряженностей электрического и магнитного полей.

Таким образом, **модель** – это идеализация каких-то процессов и явлений путем отбрасывания несущественных факторов и взаимосвязей с целью выделить его из окружающего мира, оставляя наиболее важные связи.

Различают **математические и физические модели**. Математические модели обычно представляют собой системы уравнений (алгебраических, дифференциальных и т.д.). Физические модели чаще основываются на подобии закономерностей протекающих процессов и явлений разной природы. Для каждой модели существует свой диапазон применения – интервал изменения параметров.

**Эквивалентные модели**, используемые в радиотехнике, занимают промежуточное положение между математическими и физическими моделями. С одной стороны, в эти модели входят математические зависимости, описывающие процессы и явления. С другой стороны, построение эквивалентных моделей из идеализированных элементов ведется с учетом протекающих физических процессов. На основе эквивалентных моделей формируется математическая модель обычно в виде системы алгебраических либо дифференциальных уравнений. Построение модели с учетом физики работы сложного элемента либо устройства в какой-то степени гарантирует адекватность таких моделей.

В радиотехнике в качестве моделей и идеальных элементов используются сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$ , емкости  $C$ , а также такие идеализированные понятия, такие как, токи  $I$  и напряжения  $V$ . На основе идеализированных элементов строятся модели – эквивалентные схемы более сложных элементов (диоды, транзисторы, микросхемы). В зависимости от решаемых задач различают и используют линейные и нелинейные, сигнальные, шумовые, температурные и т.д. модели.

## 5.2 Модели полупроводникового диода

Полупроводниковый диод (рисунок 5.1) – достаточно широко распространенный элемент, выполненный из полупроводникового материала  $n$ - или  $p$ - типа, на котором с помощью диффузии или другим способом образован контакт с полупроводниковым материалом противоположного типа проводимости –  $p n$ - переход. Диоды с барьером Шоттки представляют собой контакт полупроводникового материала с металлом.

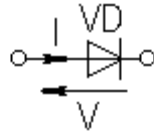


Рисунок 5.1 - Диод

**Нелинейная статическая модель диода.** Для полупроводникового диода характерна вольт-амперная зависимость (рисунок.5.2), описываемая выражением

$$I = I_r \cdot (\exp(q \cdot V / (k \cdot T)) - 1) = I_s - I_r, \quad (5.1)$$

где  $q$  – заряд электрона,  $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ ;  $k$  – постоянная Больцмана,  $k = 1.3806 \cdot 10^{-23}$ ;  $T$  – температура в градусах Кельвина ( $276.16^\circ \text{C} = 0^\circ \text{K}$ );  $V$  – напряжение приложенное к диоду;  $I_s, I_r$  – прямой и обратный токи диода. Обратный ток диода соответствует току насыщения.

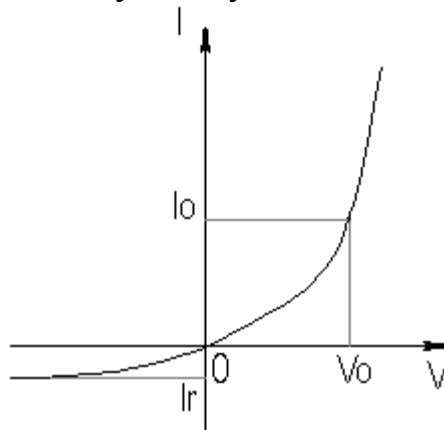


Рисунок 5.2 - ВАХ диода

Часто используют обозначение  $V_T = k \cdot T / q$ , называемое температурным потенциалом. Для полупроводникового диода он составляет  $V_T \cong 25.6$  мВ. Ток насыщения принимает значения порядка  $I_r \cong (10^{-6} \div 10^{-9})$  А. Для закрытого диода при  $V < -3 \cdot V_T$  ( $V \cong 75$  мВ),  $I \cong -I_r$ , т.е. ток насыщения соответствует величине тока диода в закрытом состоянии. Для открытого диода, при  $V > 4 \cdot V_T$ , выражение (5.1) можно упростить до

$$I = I_r \cdot \exp(V / V_T) = I_s. \quad (5.2)$$

В соответствии с рисунком.5.2, прикладывая к диоду напряжение  $V_0$ , получим ток диода  $I_0$ . Величины  $V_0$  и  $I_0$  определяют рабочую точку диода

$$I_0 = I_r \cdot (\exp(V_0 / V_T) - 1) = I_s - I_r. \quad (5.3)$$

Производная вольт-амперной характеристики по напряжению в рабочей точке

$$dI / dV = g(V_0) = (I_r / V_T) \cdot \exp(V_0 / V_T) = (I_0 + I_r) / V_T \quad (5.4)$$

является динамической проводимостью диода и равна крутизне характеристики в точке  $(V_0, I_0)$ .

Иногда для гибкости представления вольт-амперной зависимости различных типов диодов вводят дополнительный коэффициент  $m_d$

$$I_0 = I_r \cdot (\exp(V_0 / (m_d \cdot V_T)) - 1), \quad (5.5)$$

где  $m_d$  – эмпирический коэффициент, из диапазона  $(1 \div 2.5)$ .

Все изложенное выше относится к так называемой нелинейной статической модели диода, обычно используемой при расчете по постоянному току. Для расчета на высоких частотах в режиме большого сигнала используется нелинейная динамическая модель диода, содержащая барьерную (зарядную)  $C_b$ , и диффузионную  $C_d$ , емкости (рисунок 5.3).

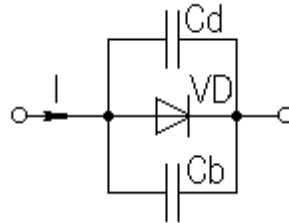


Рисунок 5.3 - Нелинейная динамическая модель диода

**Нелинейная динамическая модель диода.** Динамическая нелинейная модель, кроме диода, описываемого вольт – амперной характеристикой (соотношения (5.1-5.5)), содержит барьерную (зарядную)  $C_b$ , и диффузионную  $C_d$ , емкости диода, отражающие его инерционные свойства на высоких частотах.

**Барьерная емкость.** Заряды, накапливаемые на обратном смещенном переходе, вызывают запаздывание напряжения относительно тока. Для отражения этого эффекта в эквивалентную модель диода включают барьерную емкость  $C_b$ , зависящую от напряжения на диоде

$$C_b = \begin{cases} \frac{C_{b0}}{(1-V/V_z)^\gamma} & \text{при } V \leq V_z - V, \\ K_1 \cdot V + K_2 & \text{при } V > V_z - V, \end{cases} \quad (5.6)$$

где  $K_1 = dC_b / dV$ , при  $V = V_z - Z$ ;  $K_2 = -K_1 \cdot (V_z - Z) + C_b$ , при  $V = V_z - Z$ . Значение  $V_z$  определяется материалом ( $\cong 0.8$  В- для кремния и  $\cong 0.4$  В- для германия). Коэффициент  $\gamma$  принимает значения в интервале  $(1/2 \div 1/3)$ .



Емкость  $C_{b0}$  обычно составляет единицы либо доли пФ. Зависимость барьерной емкости от напряжения, в диапазоне от нуля до  $V = V_z - Z$ , подчиняется первой зависимости (5.6), а затем наблюдается довольно резкий максимум. Вторая зависимость (5.6), соответствует поведению производной в точке  $V = V_z - Z$ , где  $Z$  – принимает значения (0.05÷0.5). При такой аппроксимации, правда, не учитывается последующее падение емкости с ростом сопротивления, однако в ряде случаев такого представления достаточно. Для более точной аппроксимации можно воспользоваться сплайнами.

**Диффузионная емкость.** Диффузионная емкость  $C_d$  отображает явление диффузии носителей на открытом переходе

$$C_d = \begin{cases} \tau \cdot \frac{dI}{dV} & \text{при } V > 0, \\ 0 & \text{при } V \leq 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

где  $\tau = 1 / (2 \cdot \pi \cdot f_{gr})$  – постоянная времени, определяющая граничную частоту диода  $f_{gr}$ ;  $dI / dV$  – динамическая проводимость диода в соответствии с (5.4).

**Температурная модель диода.** Вольт–амперная характеристика диода (5.1, 5.5) зависит от температуры. Прежде всего, необходимо учесть изменение температурного потенциала

$$V_T = (k \cdot T / q) \cdot (T / T_i), \quad (5.8)$$

где  $T_i$  – комнатная температура (293°K). Ток насыщения диода также зависит от температуры

$$I_r = I_{r0} \cdot (T_i / T) \cdot \exp((k_d \cdot (1 / T_i - 1 / T))), \quad (5.9)$$

где  $I_{r0}$  – ток насыщения диода при температуре 293°K;  $k_d$  – эмпирически определяемый коэффициент. Учет этих простейших зависимостей позволит производить расчет схем с полупроводниковыми диодами в довольно широком температурном интервале.

**Линеаризованная модель диода.** На низких частотах линеаризованная модель диода определяется средней составляющей тока диода и приращением, обусловленным сигналом (рисунок 5.4.)

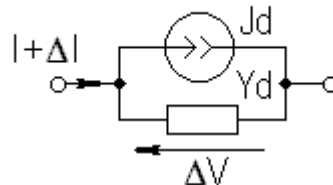


Рисунок 5.4 - Модель диода для приращений

На основании (5.1) и (5.4) имеем

$$I + dI = I_r \cdot (\exp(V / V_T) - 1) + (I_r / V_T) \cdot \exp(V / V_T) \cdot dV \quad (5.10)$$

или через приращения

$$I + \Delta I = I_r \cdot (\exp(V / V_T) - 1) + (I_r / V_T) \cdot \exp(V / V_T) \cdot \Delta V = J_d + Y_d \cdot \Delta V \quad (5.11)$$

Соотношение (5.11) соответствует представлению диода, как нелинейного резистора, в виде параллельного соединения источника тока  $J_d$  и эквивалентной проводимости диода  $Y_d$ . Такое представление диода иллюстрирует линеаризацию любого нелинейного элемента.

На малом сигнале, поскольку проводимость  $Y_d$  не зависит от тока источника  $J_d$ , последний исключают из рассмотрения.

**Высокочастотная малосигнальная модель диода.** На высоких частотах начинают сказываться дополнительные физические эффекты и диод нельзя трактовать как проводимость (рисунок 5.5).

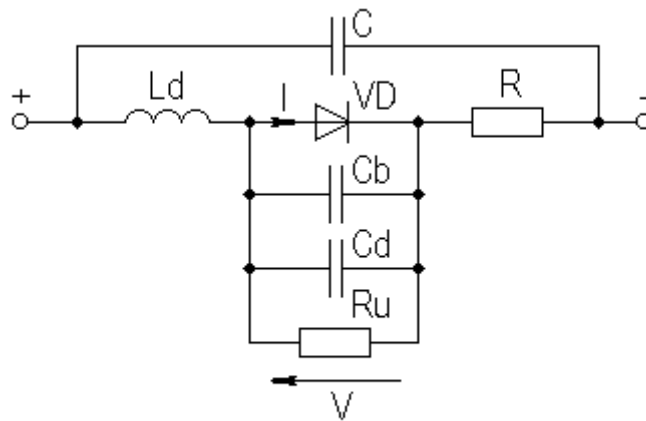


Рисунок 5.5 - Модель диода для высоких частот

Здесь  $R$  – объемное сопротивление материала;  $C$  – межэлектродная емкость;  $L_d$  – индуктивность выводов;  $R_u$  – сопротивление утечки;  $C_b$  – барьерная емкость перехода;  $C_d$  – диффузионная емкость перехода.

Объемное сопротивление материала полупроводника для разных типов диодов составляет  $R \cong (0.1 \div 100)$  Ом. Межэлектродная емкость зависит от конструкции и колеблется в пределах  $C \cong (0.1 \div 50)$  пФ. Индуктивности выводов также определяются конструкцией и примерно равны  $L \cong (0.1 \div 50)$  нГ. Сопротивление утечки зависит от материала и технологии, и оценивается примерно  $R_u \cong (1 \div 10)$  МОм. Барьерная и диффузионная емкости составляют от долей до единиц пФ для маломощных высокочастотных диодов и от единиц до десятков пФ для маломощных низкочастотных диодов. Более конкретные данные можно почерпнуть из справочных материалов.

**Шумовая модель диода.** Шумовые модели полупроводникового диода используются обычно в режиме малого сигнала. С диодом связывают три различных вида источников шума: тепловые – обусловленные омическими потерями, дробовые – обусловленные протеканием тока через  $p-n$  переход и фликкер шумы – зависящие от технологии изготовления и чистоты обработки поверхностей материала полупроводника. Интенсивность шумов принято выражать спектральной плотностью имеющей размерность

$[Вт \cdot Гц]$  либо пропорциональными величинами  $[В^2 \cdot Гц]$  или  $[А^2 \cdot Гц]$ . На схеме шумовые источники отображаются соответственно, либо последовательно включенным источником напряжения, либо параллельно включенным источником тока заданной интенсивности.

Тепловые шумы могут быть описаны следующими соотношениями

$$\overline{U_t}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot \Delta f, \quad (5.12)$$

$$\overline{I_t}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot G \cdot \Delta f, \quad (5.13)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана;  $T$  - температура в градусах Кельвина;  $R, G$  - соответственно, сопротивление и проводимость потерь;  $\Delta f$  - полоса пропускания. Черта сверху означает усреднение по времени.

Дробовые шумы  $p-n$  - перехода определяются током диода

$$\overline{I_f}^2 = 2 \cdot q \cdot I_d \cdot \Delta f, \quad (5.14)$$

либо с учетом (5.2) и раскрывая  $V_T$ , можем записать

$$\overline{I_f}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot G_d \cdot \Delta f, \quad (5.15)$$

где  $G_d = (q \cdot I_d) / (2 \cdot k \cdot T) = 0.5 \cdot g_d$ .

Тепловые и дробовые шумы имеют белый спектр, т.е. спектральная плотность постоянна и не зависит от частоты.

Фликкер шумы имеют спектр типа  $1/f$  и описываются эмпирической формулой

$$\overline{I_q}^2 = K \cdot I^\nu \cdot f^{-\psi} \cdot \Delta f, \quad (5.16)$$

где  $K, \nu, \psi$  - эмпирические коэффициенты, зависящие от типа диода. Фликкер шумы проявляются в основном в области низких частот, так как их интенсивность становится ниже тепловых и дробовых шумов на частотах порядка (0.5-1.0) МГц.

Спектральные плотности шумовых источников или квадраты напряжений и токов пересчитываются через квадраты коэффициентов передачи либо квадраты передаточных проводимостей и сопротивлений.

Шумовые источники имеют случайную фазу, поэтому должны пересчитываться на выход схемы независимо.

### 5.3 Модели биполярного транзистора

Биполярный транзистор - это полупроводниковый элемент с двумя близко расположенными  $p-n$  - переходами, образованными на подложке  $n$  - или  $p$  - типа. Материал подложки образует так называемую область базы, а области отделенные  $p-n$  переходами с противоположной проводимостью,

называют, соответственно, эмиттерной и коллекторной областями. Конфигурации и размеры  $p-n$ - переходов зависят от мощности рассеиваемой на транзисторе, рабочих токов и напряжений, частотного диапазона. Для более эффективного отвода тепла коллекторная область имеет обычно большую площадь. В зависимости от материала подложки различают транзисторы  $n-p-n$  и  $p-n-p$  типа (рисунок 5.6).

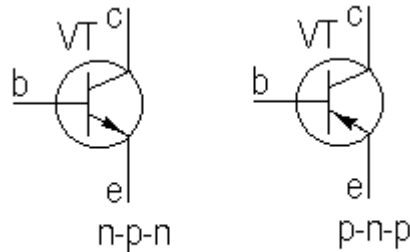


Рисунок 5.6 - Биполярные транзисторы

Внешние выводы транзистора называются, соответственно:  $b$  - база,  $c$  - коллектор,  $e$  - эмиттер.

**Статическая модель транзистора** представляет собой выражения для токов эмиттера и коллектора, как функций разности напряжений на переходах  $b e$  и  $b c$

$$I_e = f(V_{be}, V_{bc});$$

$$I_c = f(V_{be}, V_{bc}).$$

Для определенности будем рассматривать  $p-n-p$  транзистор,  $n-p-n$  транзистор отличается лишь полярностью прикладываемых напряжений и направлением токов.

Статическая модель описывает так называемую активную область транзистора образованную двумя  $p-n$ - переходами без учета объемного сопротивления области базы (рисунок 5.7).

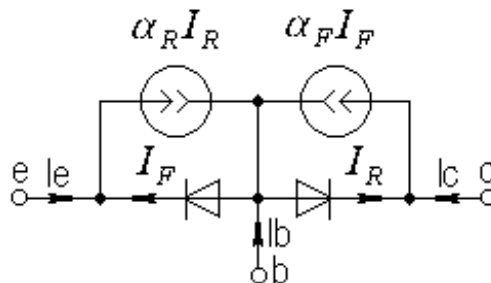


Рисунок 5.7 - Инжекционный вариант модели Эберса - Молла

Объемное сопротивление базы учитывают позже включением в модель соответствующего резистора.

Наиболее известной моделью биполярных транзисторов является модель Эберса – Молла (инжекционный вариант)

$$\begin{aligned} I_e &= -I_F + \alpha_R \cdot I_R; \\ I_c &= -I_R + \alpha_F \cdot I_F, \end{aligned} \quad (5.17)$$

при

$$\begin{aligned} I_F &= I_{e0} \cdot [\exp(V_{be} / V_T) - 1], \\ I_R &= I_{c0} \cdot [\exp(V_{bc} / V_T) - 1], \end{aligned} \quad (5.18)$$

где  $I_{e0}, I_{c0}$  – токи насыщения (обратные токи) переходов  $b e$  – база - эмиттер и  $b c$  – база - коллектор;  $V_{be}, V_{bc}$  – напряжения на переходах  $b e$  и  $b c$ ;  $\alpha_F, \alpha_R$  – коэффициенты прямой и обратной передачи тока транзистора в схеме с общей базой;  $V_T$  – температурный потенциал равный

$$V_T = k \cdot T / q. \quad (5.19)$$

В инжекционной модели константы  $\alpha_F, \alpha_R$  и токи насыщения  $I_{e0}, I_{c0}$  независимы, однако физические свойства транзистора требуют, чтобы выполнялось условие обратимости

$$\alpha_F \cdot I_{e0} = \alpha_R \cdot I_{c0} = I_0. \quad (5.20)$$

Используя это условие, можно сократить число независимых констант до трех и перейти к передаточному варианту модели Эберса - Молла (рисунок 5.8).

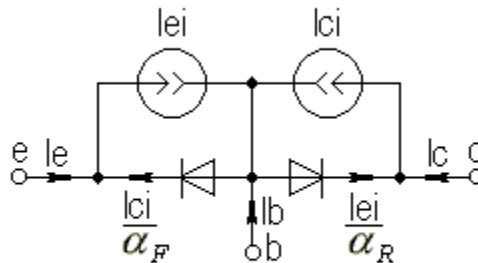


Рисунок 5.8 - Передаточный вариант модели Эберса - Молла

Это упрощение делает ее более предпочтительной для использования в автоматизированном проектировании. Уравнения передаточной модели запишутся

$$\begin{aligned} I_e &= I_{ei} - I_{ci} / \alpha_F; \\ I_c &= I_{ci} - I_{ei} / \alpha_R, \end{aligned} \quad (5.21)$$

при

$$\begin{aligned} I_{ei} &= I_0 \cdot [\exp(V_{be} / V_T) - 1] = I_{es} - I_{er}; \\ I_{ci} &= I_0 \cdot [\exp(V_{bc} / V_T) - 1] = I_{cs} - I_{cr}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $I_{es}, I_{er}, I_{cs}, I_{cr}$  – можно интерпретировать, как прямые и обратные токи эмиттерного и коллекторного переходов.

Часто, чтобы подчеркнуть зависимость от типа транзистора уравнения (5.22) записывают в виде

$$\begin{aligned} I_{ei} &= I_0 \cdot [\exp(V_{be} / (m_e \cdot V_T)) - 1]; \\ I_{ci} &= I_0 \cdot [\exp(V_{bc} / (m_c \cdot V_T)) - 1], \end{aligned} \quad (5.23)$$

где  $m_e, m_c$  – эмпирически определяемые коэффициенты.

Матричная форма записи передаточной модели Эберса – Молла имеет вид

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & -I_0 / \alpha_F \\ -I_0 / \alpha_R & I_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(V_{be} / V_T) - 1 \\ \exp(V_{bc} / V_T) - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Рассмотренные модели отображают лишь зависимости токов и напряжений активной области. Для более полного учета поведения транзистора на постоянном токе необходимо учесть объемные сопротивления  $r'_b, r'_c, r'_e$  – базовой, коллекторной и эмиттерной области.

**Динамическая модель – режим большого сигнала.** На переменном токе, особенно в области ВЧ, необходим учет барьерных и диффузионных емкостей  $C_{eb}, C_{ed}, C_{cb}, C_{cd}$  – эмиттерного и коллекторного переходов, отображающих динамические эффекты накопления заряда (рисунок 5.9).

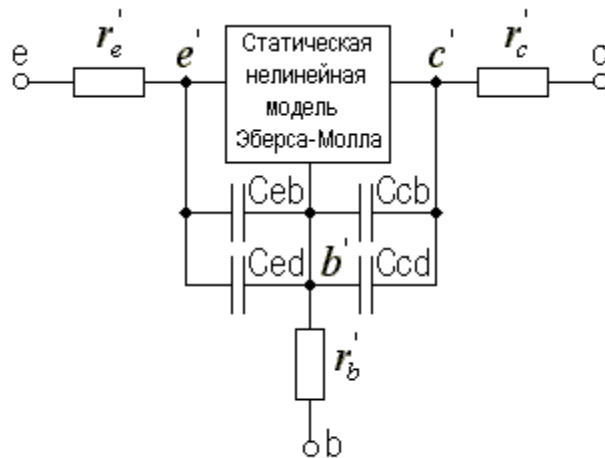


Рисунок 5.9 - Динамическая модель Эберса-Молла

**Барьерные емкости переходов  $C_{be}, C_{bc}$**  – являются, как и в случае с диодом, функциями напряжений на переходах. Так для барьерной емкости эмиттерного перехода можем записать

$$C_{be} = \begin{cases} \frac{C_{e0}}{(1 - V_{be}/V_e)^{\gamma_e}} & \text{при } V_{be} \leq V_e - Z_e, \\ K_1 \cdot V_{be} + K_2 & \text{при } V_{be} > V_e - Z_e, \end{cases} \quad (5.25)$$

где  $K_1 = dC_e / dV_{be}$ , при  $V_{be} = V_e - Z_e$ ;  $K_2 = -K_1 \cdot (V_e - Z_e) + C_{be}$ , при  $V_{be} = V_e - Z_e$ . Значение  $V_e$  для эмиттерного перехода  $\cong 0.6$  В. Коэффициент  $\gamma_e$  принимает значение  $\cong 1/3$ . Емкость  $C_{be}$  обычно составляет единицы либо доли пФ. Коэффициент  $Z_e$  принимает значения (0.05÷0.5). Аналогичные

уравнения описывают барьерную емкость коллекторного перехода. В выражениях (5.25) достаточно для этого заменить индекс  $e$  индексом  $c$ . Для коллекторного перехода  $V_c \cong 0.8$  В,  $\gamma_c \cong 1/2$ . При постановке сопротивлений  $r'_b, r'_c, r'_e$ , в приведенных соотношениях,  $V_{be}, V_{bc}$  заменяют на  $V'_{be}, V'_{bc}$ .

**Диффузионная емкость эмиттерного перехода**  $C_{de}$  отображает изменение концентрации носителей на открытом переходе на ВЧ

$$C_{de} = \begin{cases} \tau_F \cdot g_e & \text{при } V_{be} > 0, \\ 0 & \text{при } V_{be} \leq 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

где

$$\tau_F = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_T} & \text{при } I_c = 0, \\ \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_T} - (V_T / I_{cF}) [C_e + C_c (1 + r'_c / (V_T / I_{cF}))] & \text{при } I_c \neq 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

и

$$g_e = dI_e / dV_{be} = (I_0 / V_T) \cdot \exp(V_{be} / V_T) = (I_{es} + I_{er}) / V_T. \quad (5.28)$$

Постоянная времени  $\tau_F$  полуэмпирически определяется из так называемой зарядо - управляемой модели транзистора, которая здесь не рассматривается. Через  $f_T$  обозначают верхнюю граничную частоту, при которой коэффициент передачи по току  $\beta$ , в схеме с ОЭ, становится равным единице;  $g_e$  - дифференциальная проводимость эмиттерного перехода в рабочей точке.

**Диффузионная емкость коллекторного перехода**  $C_{dc}$  - отображает изменение концентрации подвижных носителей заряда в коллекторной области при быстром изменении полярности

$$C_{dc} = \begin{cases} \tau_R \cdot g_c & \text{при } V_{bc} > 0, \\ 0 & \text{при } V_{bc} \leq 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

где

$$\tau_R = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta_R = 0 \\ \frac{\tau_{sat}}{\beta_R} \cdot [1 + \beta_R - \frac{\beta_F \cdot \beta_R}{(1 + \beta_F)}] - [\frac{\beta_F \cdot (1 + \beta_F)}{\beta_R \cdot (1 + \beta_R)}] \cdot \tau_F & \text{при } \beta_R \neq 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

$$g_c = dI_c / dV_{bc} = (I_0 / V_T) \cdot \exp(V_{bc} / V_T) = (I_{cs} + I_{cr}) / V_T, \quad (5.31)$$

$$\beta_F = \alpha_F / (1 - \alpha_F); \quad \beta_R = \alpha_R / (1 - \alpha_R). \quad (5.31)$$

Постоянные времени  $\tau_R$  и  $\tau_{sat}$  - полуэмпирически определяемые величины из так называемой зарядо - управляемой модели транзистора,  $g_c$  - дифференциальная проводимость коллекторного перехода.

**Температурные модели полупроводниковых транзисторов.** Вольт-амперные зависимости коллекторного и эмиттерного переходов транзистора (5.17, 5.18, 5.21, 5.22) зависят от температуры. Прежде всего, необходимо учесть изменение температурного потенциала (5.19)

$$V_T = (k \cdot T / q) \cdot (T / T_i), \quad (5.33)$$

где  $T_i$  – комнатная температура (293°K).

Токи насыщения переходов также зависят от температуры

$$I_{e0} = I_{e00} \cdot (T_i / T)^3 \cdot \exp(k_e \cdot (1 / T_i - 1 / T)), \quad (5.34)$$

$$I_{c0} = I_{c00} \cdot (T_i / T)^3 \cdot \exp(k_c \cdot (1 / T_i - 1 / T)), \quad (5.35)$$

где  $I_{e00}, I_{c00}$  – токи насыщения эмиттерного и коллекторного переходов при температуре (293°K);  $k_e, k_c$  – эмпирически определяемые коэффициенты. В случае передаточного варианта модели следует положить

$$I_{e0} = I_{c0} = I_0; \quad I_{e00} = I_{c00} = I_{00}; \quad k_e = k_c = k.$$

Температурной зависимостью  $\alpha_F, \alpha_R$  – коэффициентов прямой и обратной передачи тока в схеме с общей базой в первом приближении можно пренебречь.

Учет этих простейших зависимостей позволит производить расчет схем с полупроводниковыми транзисторами в довольно широком температурном интервале.

**Малосигнальная модель.** При малых, относительно постоянных составляющих токов в рабочей точке, сигналах используют малосигнальные линейные модели. Малосигнальные линейные модели можно получить дифференцированием вольт-амперных характеристик транзистора. Так для транзистора, включенного, например, по схеме с общей базой, в общем случае имеем

$$\begin{aligned} I_e &= f_1(V_{be}, V_{bc}); \\ I_c &= f_2(V_{be}, V_{bc}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Рабочая точка определяется подачей постоянных напряжений  $V_{be0}, V_{bc0}$ . Выражая дифференциалы этих функций по независимым переменным, в окрестности рабочей точки, получим

$$\begin{aligned} dI_e &= (\partial f_1 / \partial V_{be}) \cdot dV_{be} + (\partial f_1 / \partial V_{bc}) \cdot V_{bc}; \\ dI_c &= (\partial f_2 / \partial V_{be}) \cdot dV_{be} + (\partial f_2 / \partial V_{bc}) \cdot V_{bc}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Интерпретируя дифференциалы токов и напряжений, как изменения токов и напряжений в окрестности рабочей точки, получим систему  $Y$ -параметров активной области транзистора, включенного по схеме с общей базой

$$\begin{aligned} I_e &= y_{11} \cdot V_{be} + y_{12} \cdot V_{bc}; \\ I_c &= y_{21} \cdot V_{be} + y_{22} \cdot V_{bc}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная модель с двумя управляемыми источниками (рисунок 5.10).



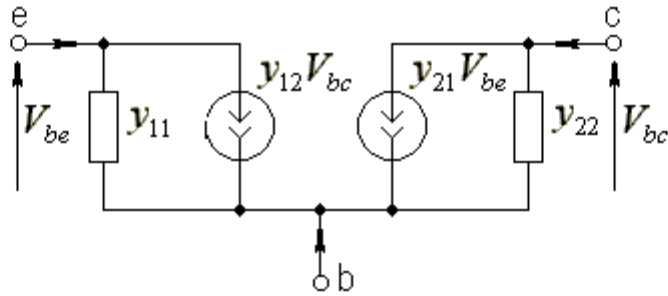


Рисунок 5.10 - Модель транзистора как активного четырехполюсника

Пренебрегая обратной крутизной  $y_{12}$  и производя очевидные замены

$$y_{11} = \partial I_e / \partial V_{be} = y_e = g_e + j \cdot \omega \cdot C_e;$$

$$y_{21} = \partial I_c / \partial V_{bc} = S = (\partial I_c / \partial I_e) \cdot (\partial I_e / \partial V_{be}) = \alpha \cdot y_e;$$

$$y_{22} = \partial I_c / \partial V_{bc} = j \cdot \omega \cdot C_c,$$

приходим к малосигнальной модели активной области транзистора (рисунок 5.11).

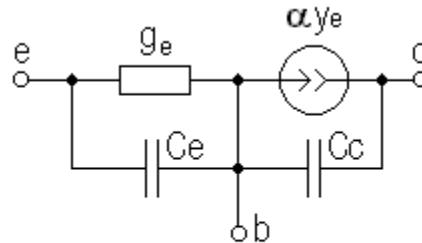


Рисунок 5.11 - Малосигнальная модель активной области транзистора

**Высокочастотная линейная модель.** Дополняя эту модель, объемным сопротивлением области базы  $r_b$ , контактным сопротивлением эмиттерного вывода  $\Delta r_e$ , межэлектродными емкостями  $C_{be}, C_{bc}$ , индуктивностями выводов  $L_e, L_b, L_c$ , и, разделяя коллекторную емкость  $C_c$ , из физико-топологических соображений, на активную  $C_{ca}$  и пассивную  $C_{cp}$  части, получим физическую малосигнальную высокочастотную модель биполярного транзистора (рисунок 5.12).

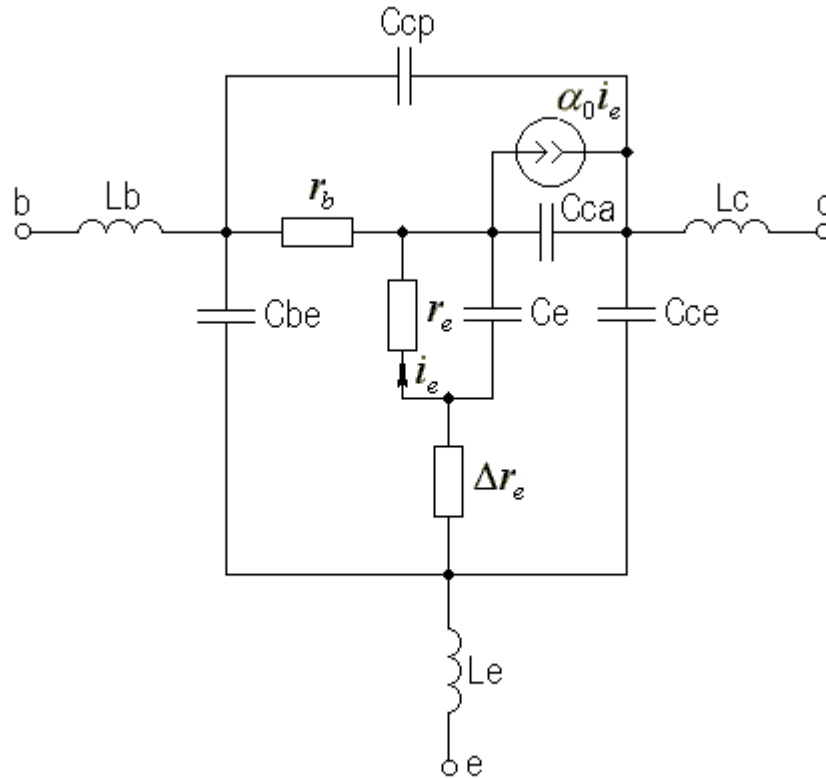


Рисунок 5.12 - Высокочастотная модель биполярного транзистора

В области СВЧ применяют и более сложные модели, в которых, с целью отображения распределенного характера структуры транзистора, сравнимой с длиной волны рабочего диапазона, область базы, сопротивление и пассивную емкость коллектора, разбивают на несколько участков. В аппроксимацию частотной зависимости коэффициента передачи по току, в схеме с общей базой, включают постоянные времени и фазовые поправки за счет эмиттерной, коллекторной и базовой областей, и за счет времени пролета носителей через базовую область.

**Шумовые модели биполярных транзисторов.** Для биполярных транзисторов характерны тепловые шумы, обусловленные объемным сопротивлением области базы и другими резистивными потерями, дробовые шумы (шумы генерации-рекомбинации) эмиттерного и коллекторного  $p-n$ -переходов, за счет протекания токов, и шумы разделения, обусловленные флуктуациями разделения тока эмиттера на токи коллектора и базы. Спектр тепловых, дробовых и шумов разделения считается белым. Необходимо отметить, что природа возникновения дробовых шумов и шумов разделения сходна, поэтому в некоторых моделях шумы разделения не выделяют и они как бы входят в состав дробовых шумов. Кроме перечисленных высокочастотных шумов, различают и низкочастотные шумы, имеющие ограниченный спектр. Это, прежде всего, фликкер-шумы, со спектром вида  $1/f^n$ , обусловленные поверхностными эффектами и утечкой. Наибольшее распространение среди прочих получили шумовые модели Джаколетто и Ван-дер-Зила (рисунок 5.13).

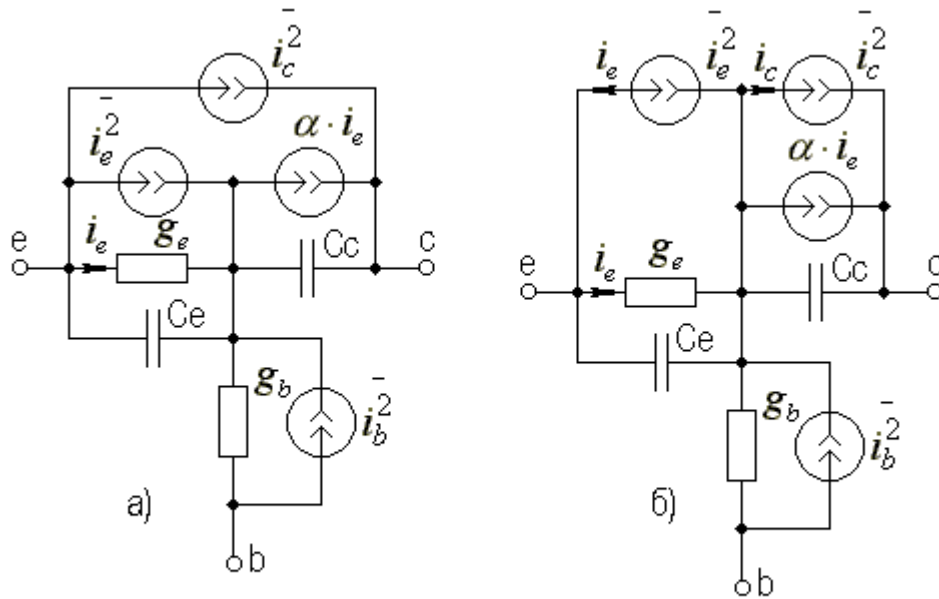


Рисунок 5.13 - Шумовые модели Джиаколетто (а) и Ван-дер-Зила (б)

Из рисунка 5.13 видна локализация тепловых и дробовых источников шума. Фликкер-шумы локализуются, в основном, на коллекторном переходе, поскольку его площадь превышает площадь эмиттерного перехода.

Шумовые источники представляют генераторами усредненных по времени квадратов напряжения либо тока. Мы, в силу разных причин, отдадим предпочтение представлению в виде источника тока, тем более что преобразование генератора тока в генератор напряжения в соответствии с соотношениями Тевенина - Нортона элементарны.

Тепловые шумы базы для приведенных моделей запишутся

$$i_b = 4 \cdot k \cdot T \cdot \Delta f \cdot g_b, \quad (5.39)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура среды в градусах Кельвина;  $\Delta f$  – полоса пропускания;  $g_b = 1/r_b$  – проводимость области базы.

Некоррелированные источники дробовых шумов для модели Джиаколетто запишутся

$$i_e = 2 \cdot q \cdot I_b \cdot \Delta f = 2 \cdot q \cdot (1 - \alpha) \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot (1 - \alpha) \cdot g_e \cdot \Delta f, \quad (5.40)$$

$$i_c = 2 \cdot q \cdot I_c \cdot \Delta f = 2 \cdot q \cdot \alpha \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot g_e \cdot \Delta f. \quad (5.41)$$

где  $q$  – заряд электрона;  $g_e \cong I_e / V_T$ .

Величина фликкер – шума может быть определена по формуле

$$i_g = K \cdot I^2 \cdot f^{-n} \cdot \Delta f, \quad (5.42)$$

где  $K$  – постоянная, зависящая от материала объема полупроводника;  $I$  – ток соответствующего перехода;  $n$  – эмпирический коэффициент,  $n \cong (0.9 \div 1.2)$ .

В модели Ван-дер-Зила используется иная локализация шумовых источников, но уже коррелированных и имеющих другие значения.

Источники дробовых шумов, на эмиттерном и коллекторном переходах, запишутся

$$\overline{i_e^2} = 2 \cdot q \cdot I_e \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot g_e \cdot \Delta f, \quad (5.43)$$

$$\overline{i_c^2} = 2 \cdot q \cdot I_c \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot g_e \cdot \Delta f. \quad (5.44)$$

Корреляция между этими источниками описывается следующим соотношением

$$\overline{i_e \cdot i_c} = 2 \cdot k \cdot T \cdot \alpha \cdot y_e \cdot \Delta f, \quad (5.45)$$

где  $y_e = g_e + j \cdot \omega \cdot C_e$ .

Модели Джаколетто и Ван-дер-Зила, на первый взгляд, существенно отличаются друг от друга, однако, если для каждой из них записать матрицу спектральных плотностей шумовых источников, то обнаружится, что они практически совпадают. Имеющиеся отличия проявятся лишь на очень высоких частотах из-за того, что  $y_e \neq g_e$ .

Кроме рассмотренных, известно большое число других шумовых моделей, однако, при детальном рассмотрении доказывається их практически полная эквивалентность. Это касается таких моделей, как Монтгомери и Кларка, Гугенбилля и Струтта.

## 5.4 Модели полевого транзистора

Полупроводниковые приборы, использующие модуляцию сопротивления полупроводникового материала поперечным электрическим полем, называют полевыми транзисторами (ПТ). Электрический ток в полевых транзисторах образуется либо электронами, либо дырками.

Транзистор представляет собой пластину или слой полупроводникового материала, нанесенного на металлическую либо полупроводниковую (с противоположным типом проводимости) подложку. Этот полупроводник образует канал, на концах которого сделаны электроды - выводы истока  $s$  и стока  $d$ . На канале между истоком и стоком определенным технологическим приемом выполняется затвор  $g$  в виде контакта с областью канала, который является еще одним электродом - выводом.

В зависимости от типа исполнения контакта, различают: МДП-транзисторы с контактом металл-диэлектрик-полупроводник; МОП-транзисторы с контактом металл-окисел-полупроводник; транзисторы с  $pn$ -переходом - контактом между полупроводниками разного типа проводимости; транзисторы с барьером Шоттки с контактом металл-полупроводник. Некоторое представление о типах ПТ и об их схемных обозначениях дает рисунок 5.14.

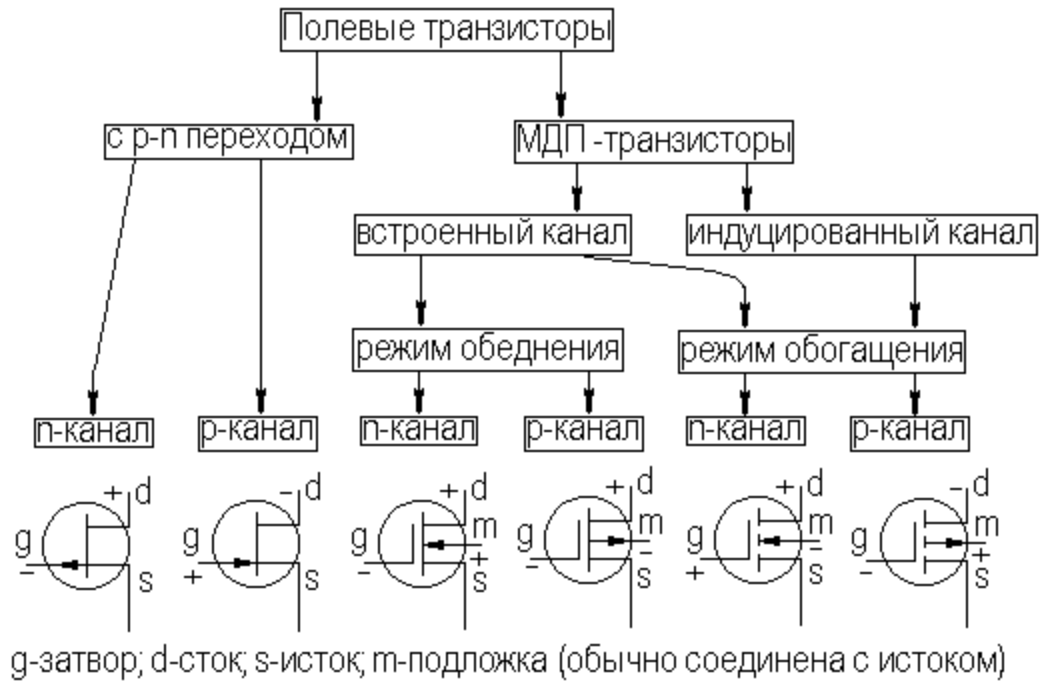


Рисунок 5.14 - Основные типы ПТ

МДП и МОП - транзисторы практически одинаковые, только в МОП транзисторах, вместо диэлектрика, используется оксид (диоксид) кремния. Эти типы транзисторов отличаются повышенным входным сопротивлением и, соответственно, большей инерционностью по сравнению транзисторами с  $pn$ - переходом и барьером Шоттки. В МДП и МОП транзисторах принципиально наличие подложки  $m$  из полупроводникового материала противоположной проводимости с выводом в качестве дополнительного электрода. Подавая потенциал на электрод подложки, можно аналогично потенциалу затвора управлять характеристиками транзистора.

В основном принцип работы всех типов транзисторов примерно одинаков, поэтому в качестве примера для изложения возьмем транзисторы с  $pn$ - переходом. Различают транзисторы с каналами  $p$ - и  $n$ - типа и соответственно полярностью напряжений на электродах, однако все рассуждения сохранят смысл при изменении полярности на электродах. Для определенности рассмотрим транзистор с каналом  $p$ - типа.

Приложение напряжения между истоком и стоком при постоянном напряжении на затворе вначале будет приводить почти к линейному возрастанию тока канала - это режим управляемого сопротивления. Дальнейшее увеличение напряжения сток-исток  $V_{ds}$  приведет к перекрытию канала под затвором со стороны стока, за счет возрастания разности потенциалов между затвором и каналом, из-за падения напряжения вдоль канала, за счет протекающего тока. Причем произойдет практическая стабилизация тока - это режим насыщения. При этом увеличение напряжения  $V_{ds}$  практически не приводит к увеличению тока, т.к. пропорционально увеличивается падение напряжения вдоль канала и переход

запирается еще больше и перекрывает канал. Напряжение сток-исток, при котором наступает режим насыщения, называется напряжением насыщения  $V_N$ , а соответствующий ток - током насыщения  $I_N$ . При нулевом смещении на затворе напряжение и ток насыщения обозначим соответственно  $V_{0N}, I_{0N}$ .

Если на затвор подавать отрицательное относительно канала, а значит и затвора, напряжение  $V_{gs}$ , то это приведет к смещению перехода в обратном направлении, соответственно увеличению его размеров и уменьшению тока канала за счет перекрытия канала электрическим полем запираемого перехода. Увеличение отрицательного смещения на затворе будет приводить вначале к пропорциональному уменьшению тока. Однако, начиная с некоторой величины смещения, канал почти полностью перекрывается, и незначительной величины ток будет обусловлен поверхностными эффектами и утечками. Напряжение на затворе  $V_{gs}$ , при котором исчезает ток канала, называется напряжением отсечки  $V_0$ .

Вольт-амперные характеристики полевого транзистора в схеме включения с общим истоком (ОИ) могут быть представлены следующими зависимостями

$$I_g = 0;$$

$$I_d = f(V_{gs}, V_{ds}).$$

**Статическая нелинейная модель полевого транзистора.** Током затвора  $I_g$ , в первом приближении, можно пренебречь. Вольт-амперные выходные характеристики полевого транзистора определяется следующими выражениями:

для линейной области, где  $V_{ds} < V_{gs} - V_0 - V_c$ ,

$$\frac{I_d}{I_{0N}} = 3V_{ds} / V_0 - 2[ ((V_{gs} - V_0 + V_c) / V_0)^{1.5} - ((V_{gs} + V_c) / V_0)^{1.5} ] \quad (5.46)$$

для области насыщения, где  $V_{ds} > V_{gs} - V_0 - V_c$ ,

$$\frac{I_d}{I_{0N}} = 1 - 3(V_{gs} - V_0 + V_c) / V_0 + 2((V_{gs} - V_{ds} + V_c) / V_0)^{1.5} ], \quad (5.47)$$

где  $V_0$  - напряжение отсечки канала (обычно около 4 В);  $V_c$  - контактная разность потенциалов (порядка 0.7В), отрицательная, для  $n$ -канального и положительная, для  $p$ -канального полевых транзисторов. Приведенные соотношения соответствуют статической модели полевого транзистора (рисунок 5.15).

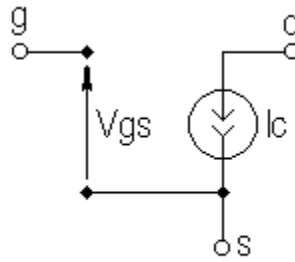


Рисунок 5.15 - Статическая модель ПТ

**Динамическая нелинейная модель полевого транзистора.** Для учета динамических эффектов в режиме большого сигнала статическую модель рисунка 5.15 необходимо дополнить нелинейной емкостью затвор – исток

$$C_{gs} = 2C_0 [1 + ((V_{gs} + V_c) / V_0)^{0.5}] / [1 + 2((V_{gs} + V_c) / V_0)^{0.5}]^2, \quad (5.48)$$

где  $C_0$  - половина полной емкости затвор-исток, при  $V_{gs} + V_c = 0$  и  $V_{ds} = -V_0$ . Кроме того, обычно включают линейную емкость затвор-сток  $C_{gs}$ , величиной порядка (0.1÷0.01) пФ. В результате нелинейная динамическая модель имеет вид, показанный на рисунке 5.16.

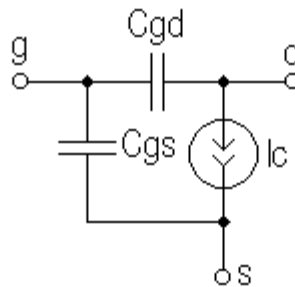


Рисунок 5.16 - Нелинейная динамическая модель ПТ

В режиме большого сигнала для вычисления крутизны и выходной проводимости, на основании выражений (5.46, 5.47), необходимо взять отношения конечных приращений  $\Delta I_d / \Delta V_{gs}$  и  $\Delta I_d / \Delta V_{dc}$ .

**Температурные эффекты в полевом транзисторе.** Влияние температуры на характеристики полевого транзистора с  $pn$ - переходом проявляется через изменение следующих параметров: скорости генерации неосновных носителей в области пространственного заряда (ОПЗ); удельного сопротивления канала; величины барьерного потенциала перехода затвор - канал.

**Зависимость тока затвора от температуры.** Ток обратного смещенного кремниевого перехода определяется, в основном, процессами генерации и рекомбинации в ОПЗ. При постоянной плотности генерационно - рекомбинационного тока, обратный ток  $I_g$  линейно зависит от толщины ОПЗ и экспоненциально от температуры, так что при  $V_{gs} \geq 0.1$  В

$$\Delta I_g = I_g - I_{g0} = V_{gs}^\gamma \cdot \exp(-E_a / V_T), \quad (5.49)$$

где  $I_{g0}$  - константа;  $\gamma$  - коэффициент, зависящий от распределения примеси

на переходе ( $\gamma \approx 1/2 \div 1/3$ );  $E_a$ - энергия активации, при температурах близких к комнатной, составляет ( $E_a \approx 0.55$  эВ- половина ширины запрещенной зоны);  $V_T = k \cdot T / q$ - температурный потенциал. При температурах, более  $100^\circ$  С, начинает преобладать диффузионный ток, величина  $E_a$  в этом случае  $\approx 1.1$  эВ, а обратный ток, практически не зависит от  $V_{gs}$ , при ( $V_{gs} \geq 0.1$  В).

Зависимость  $I_g(V_{gs})$  достаточно сложна, так как, например, напряжение смещения изменяется вдоль перехода и зависит от  $V_{gs}$  до  $V_{ds}$ , а в обратный ток  $I_g$  дают вклад области ОПЗ, лежащие вне канала, однако влияние температуры по-прежнему описывается экспоненциальным множителем выражения (5.49).

**Влияние температуры на канал.** Температурная зависимость тока стока определяется в основном изменением величины удельной проводимости  $\chi$ , необедненной области канала, и барьерного потенциала  $V_c$ . Эти факторы влияют на ток стока в противоположных направлениях, что позволяет путем соответствующего выбора рабочей точки (термостабильная точка) добиться их взаимной компенсации.

Запишем условие выполнения равенства  $dI_d / dT = 0$  в режиме насыщения

$$I_{dz} / g_{mz} = -(dV_c / dT) / ((1 / \chi) \cdot (d\chi / dT)) \quad (5.50)$$

где индекс  $z$ - обозначает величины соответствующие нулевому температурному коэффициенту;  $g_m$ - крутизна в режиме насыщения.

Так как  $(1 / \chi) \cdot (d\chi / dT)$  является функцией температуры, точная компенсация возможна лишь при одном значении  $T$ . На практике, однако, удается получить весьма малые изменения  $V_{gs}$  в широком диапазоне температур.

Часто представляет интерес связь величин температурного дрейфа  $V_{gs}$  и  $V_c$  в заданной рабочей точке

$$dV_{gs} / dT = dV_c / dT \cdot (1 - (I_d / I_{dz})^{1/n}), \quad (5.51)$$

где  $n$  – эмпирически определенный коэффициент,  $n \cong 2$ .

Это соотношение описывает температурную зависимость напряжения затвора, обеспечивающую постоянство тока стока. Из соотношения также следует, что температурный коэффициент напряжения затвора может быть положительным, нулевым и отрицательным в зависимости от соотношения  $I_d / I_{dz}$ .

Напряжение на затворе  $V_{gs}$ , обеспечивающее нулевой температурный дрейф описывается соотношением



$$|V_{gs}| = |V_{p0}| - n \cdot I_{dz} / g_{mz}, \quad (5.52)$$

где  $V_{p0}$  – напряжение смыкания (напряжение затвор – сток соответствующее смыканию ОПЗ).

Поскольку величина  $|V_{p0}|$  обычно лежит в пределах ( $1 \div 5$  В), нулевой температурный коэффициент часто реализуется при  $V_{gs}$ , близким к напряжению отсечки, когда крутизна  $g_m$  обычно мала.

**Малосигнальная высокочастотная модель ПТ.** Продифференцировав соотношения (5.46, 5.47), можно определить крутизну и проводимость канала, вычислив производные  $g_m = dI_d / dV_{gs}$  и  $y_d = dI_d / dV_{gs}$  в окрестности рабочей точки. В результате получим малосигнальную высокочастотную модель полевого транзистора (рисунок 5.17).

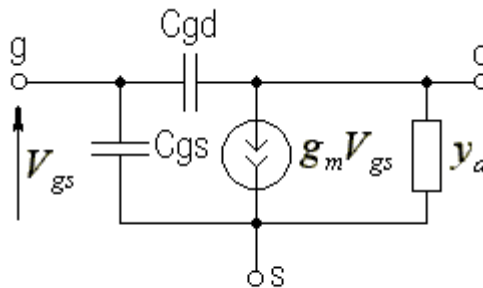


Рисунок 5.17 - Малосигнальная модель ПТ

Уточненная малосигнальная модель полевого транзистора может включать контактные сопротивления электродов. С точки зрения корректного учета шумов затвора, в цепь затвора последовательно с  $C_{gs}$  включают сопротивление потерь  $r_{gs}$ . В диапазоне СВЧ в эквивалентную модель включают межэлектродные емкости и индуктивности выводов.

**Шумовые модели полевых транзисторов.** Среди основных источников шумов полевых транзисторов можно назвать: дробовые шумы затвора; тепловые шумы канала; тепловые шумы затвора, которые интерпретируются как наведенные (индуцированные) шумы затвора тепловым шумом канала через емкость канал-затвор.

Как известно, тепловые и дробовые шумы являются белыми. Наведенные шумы канала пропорциональны квадрату частоты. Кроме того, в силу своей природы наведенные шумы затвора и тепловые шумы канала взаимно коррелированы со взаимной спектральной плотностью, пропорциональной частоте. Тепловые шумы возникают на последовательных контактных сопротивлениях и сопротивлениях потерь затвора, стока, истока.

В области низких частот, наряду с упомянутыми шумами, заметно сказывается шум, возрастающий с уменьшением частоты. Основной причиной его возникновения является флуктуация плотности носителей заряда, протекающих через канал, обусловленная процессами генерации-

рекомбинации на дефектных центрах канала и в обедненной области  $pn$ -перехода затвора. Упрощенная эквивалентная шумовая модель полевого транзистора приведена на рис. 5.18.

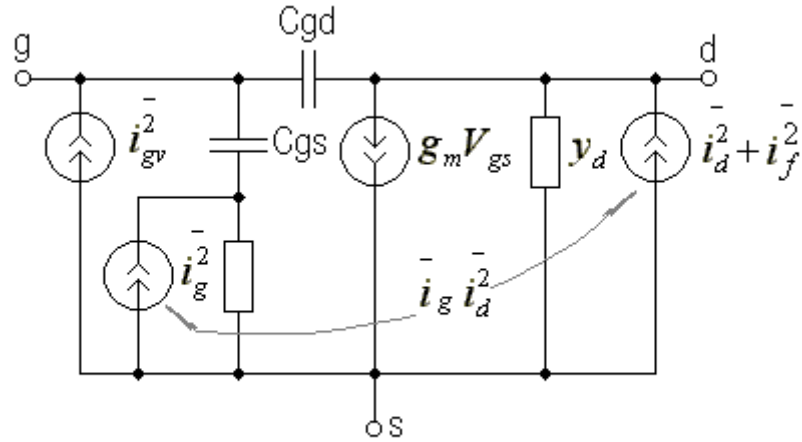


Рисунок 5.18 - Шумовая модель ПТ

На рисунке 5.18 показана локализация основных источников шума полевого транзистора. Опишем собственные и взаимные спектральные плотности шумов перечисленных источников.

Источник дробовых шумов затвора представляется выражением

$$i_{gv}^2 = 2 \cdot q \cdot I_g \cdot \Delta f = 2 \cdot k \cdot T \cdot g_{igs} \cdot \Delta f, \quad (5.53)$$

где  $g_{igs} = I_g / V_T$  – проводимость обратно смещенного  $pn$ -перехода.

Тепловые шумы затвора и канала можно представить выражениями

$$i_g^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_{gs} \cdot \Delta f, \quad (5.54)$$

$$i_d^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_m \cdot \Delta f, \quad (5.55)$$

где  $g_{gs} = 1/r_{gs}$  – проводимость активной части входного сопротивления полевого транзистора.

При интерпретации тепловых шумов затвора, как наведенных тепловыми шумами канала, и включенных параллельно затвору в целом, используют выражение

$$i_g^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot (R / g_m) \cdot \Delta f, \quad (5.56)$$

где  $R$  – константа, зависящая от режима транзистора и составляющая в режиме насыщения величину  $\cong (0.2 \div 0.25)$ . Пренебрегая влиянием проходной емкости  $C_{gd}$ , запишем входное сопротивление полевого транзистора

$$Z_{GS} = r_{gs} + 1 / (j \cdot \omega \cdot C_{gs}) = (1 + j \cdot \omega \cdot C_{gs} \cdot r_{gs}) / (j \cdot \omega \cdot C_{gs}). \quad (5.57)$$

Сделав необходимые преобразования, перейдем к выражению для входной проводимости

$$Y_{GS} = G_{GS} + j \cdot \omega \cdot C_{gs} = \frac{\omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}}{1 - \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2} + j \cdot \omega \cdot \frac{C_{gs}}{1 - \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2}. \quad (5.58)$$

Учитывая, что в рабочем диапазоне частот ( $1 \geq \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}^2$ ), получаем приближенное выражение для активной составляющей входной проводимости

$$G_{GS} = \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs}. \quad (5.59)$$

Теперь запишем тепловые шумы, обусловленные активной составляющей входной проводимости

$$i_g^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot \omega^2 \cdot C_{gs}^2 \cdot r_{gs} \cdot \Delta f, \quad (5.60)$$

Простое сравнение выражений (5.56) и (5.60) приводит нас к известному соотношению

$$r_{gs} = R / g_m, \quad (5.61)$$

показывающему, что наведенные шумы не что иное, как тепловые шумы затвора, обусловленные  $r_{gs}$  и пересчитанные на затвор в целом, при представлении цепи затвора в виде параллельного соединения активной и реактивной составляющей входной проводимости.

Взаимная спектральная плотность тепловых шумов канала и наведенных шумов затвора записывается в виде

$$i_g \cdot i_d = 4 \cdot k \cdot T \cdot j \cdot \omega \cdot C_{gs} \cdot \Delta f. \quad (5.62)$$

Низкочастотные шумы генерации - рекомбинации описываются следующим выражением

$$i_f^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot g_m^2 \cdot \left[ \frac{\rho_0}{f} + \frac{\rho'_0}{1 + (f/f_0)} \right] \cdot \Delta f, \quad (5.63)$$

где  $\rho_0$ ,  $\rho'_0$ ,  $f_0$  - постоянные, определяемые материалом и внутренней геометрией транзистора, а также, зависящие от температуры.

Иногда для согласования расчетных и экспериментальных данных в перечисленные соотношения вводят поправочные коэффициенты, зависящие от режима работы и геометрии. Так или иначе, подобные попытки усовершенствовать модели, дополняя классические зависимости, скорее просто свидетельствуют о несовершенстве моделей.

## 5.5 Модели операционного усилителя

Идеальный операционный усилитель (ОУ) представляет собой активный элемент с двумя входами (неинвертирующий и инвертирующий) и одним выходом, имеющий бесконечно большое усиление, бесконечно

большое входное и бесконечно малое выходное сопротивления (рисунок 5.19).

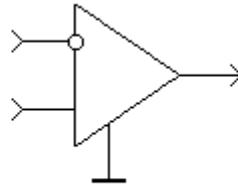


Рисунок 5.19 - Операционный усилитель

Модель идеального операционного усилителя может быть построена на основе источника напряжения управляемого напряжением (рисунок 5.20).

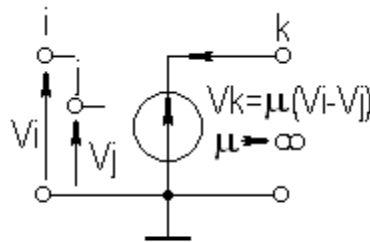


Рисунок 5.20 - Модель идеального ОУ

Неидеальный операционный усилитель отличается от идеального усилителя многими аспектами. Точную модель операционного усилителя можно получить заменой содержащихся в нем транзисторов и диодов их схемными моделями. Однако, учитывая сложность подобных моделей, обычно используют так называемые макромоделли. С помощью макромоделей можно отобразить конечные значения входных и выходного сопротивлений, конечность коэффициента передачи и их частотную зависимость. В случае нелинейной макромоделли можно также отобразить режим ограничения выходного напряжения и конечное значение скорости изменения выходного напряжения.

Ограничение выходного напряжения  $|V_0| < V_{0max}$  может имитироваться в модели использованием нелинейного сопротивления с характеристикой рисунка 5.21.

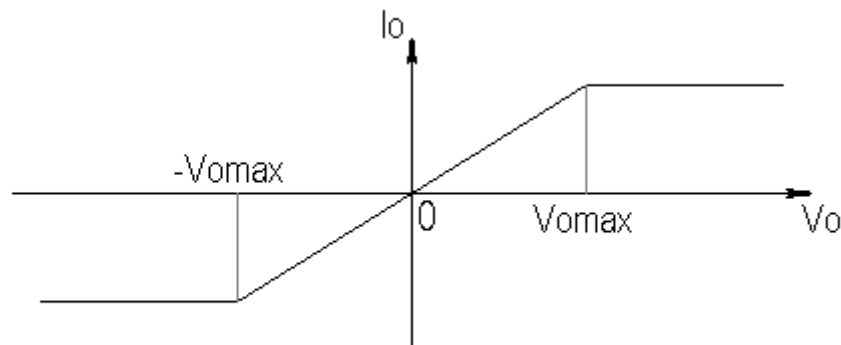


Рисунок 5.21 - Характеристика нелинейного сопротивления

Для имитации конечной скорости нарастания следует воспользоваться нелинейным блоком (рисунок 5.22), где нелинейный управляемый

напряжением источник тока характеризуется кривой насыщения (рисунок 5.23).

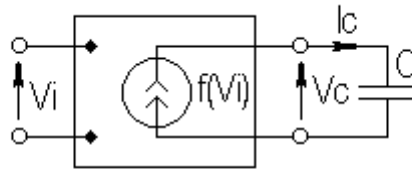


Рисунок 5.22 - Нелинейный блок имитации конечной скорости

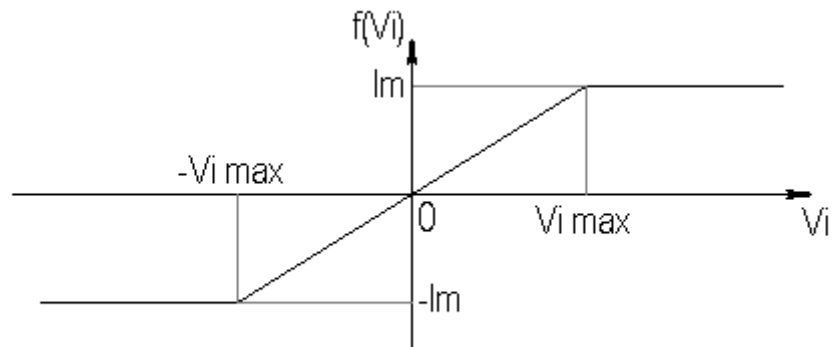


Рисунок 5.23 - Характеристика ограничения нелинейного блока

Скорость нарастания выходного напряжения будет определяться выходной емкостью  $C$ . Так как выходной ток управляемого источника не может быть больше  $I_m$ , то можно записать

$$|dV_c / dt| = |I_c| / C \leq I_m / C \cong S_r. \quad (5.64)$$

На рисунке 5.24 показаны типовые амплитудно - и фазочастотные зависимости (диаграммы Боде) коэффициента передачи операционного усилителя.

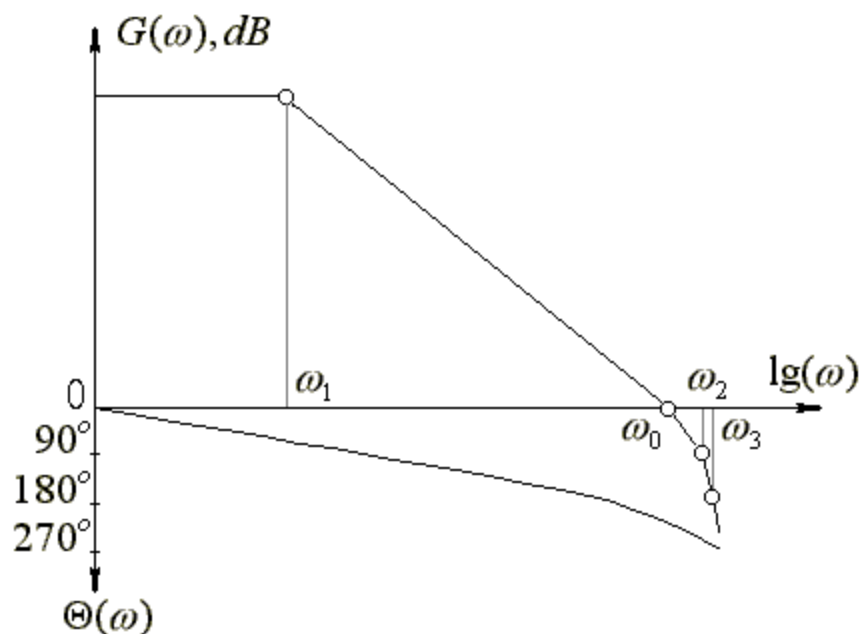


Рисунок 5-24 - Диаграмма Боде операционного усилителя

Первая угловая частота  $\omega_1$ , называется доминантно-поллюсной частотой; частота  $\omega_0$ , при которой кривая  $G(\omega)$  пересекает ось абсцисс, называется частотой единичного усиления.

Используя предшествующие рассуждения, получаем возможную макромоделю операционного усилителя (рисунок 5.25).

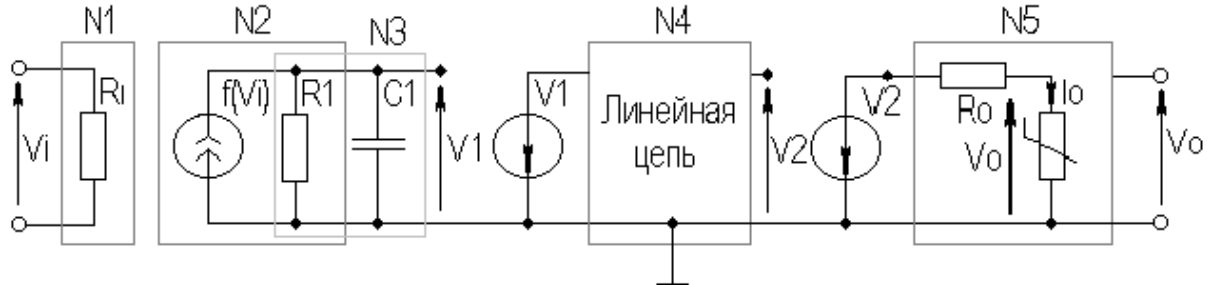


Рисунок 5.25 Макромоделю операционного усилителя

Модель состоит из пяти ступеней – каскадов: входной –  $N_1$ ; ступени ограничения скорости изменения (выходного напряжения) и коэффициента передачи  $N_2$ ; ступени доминантного полюса  $N_3$ ; ступени единичного усиления высшей полюсной частоты  $N_4$ ; выходной ступени ограничения выходного напряжения  $N_5$ .

Входная ступень с помощью  $R_1$ , моделирует входное сопротивление в дифференциальном режиме. Вторая ступень содержит нелинейный управляемый напряжением источник тока, нагруженный на емкость  $C_1$ . При выборе большого сопротивления  $R_1$ , соединение из  $N_2, N_3$ , моделирует скорость изменения выходного напряжения, в соответствии с (5.64), путем выбора  $I_m$  и  $C_1$ . Третья ступень - цепь  $R_1 C_1$  моделирует доминантный полюс

$$\omega_1 = 1 / (R_1 \cdot C_1), \quad (5.65)$$

в соответствии с диаграммой Бode (рисунок 5.25), предполагающей, что коэффициент передачи спадает обычно 6 dB на октаву (20 dB на декаду). Емкость  $C_1$  в этой модели входит одновременно в ступени  $N_2$  и  $N_3$ , поэтому цепь  $R_1 C_1$  выбирается как из условия нешунтирования нелинейного источника, так и доминантной частоты. Если частота доминантного усиления не указана в паспортных данных, то она может быть приближенно оценена из следующего соотношения

$$\omega_1 = \omega_0 / B_0, \quad (5.66)$$

где  $B_0$  - статический коэффициент передачи. Вывод соотношения (5.66) основан на том факте, что на частотах, соизмеримых с  $\omega_0$ , большая часть тока нелинейного источника замыкается через  $C_1$ , и можно записать

$$V_1 \cong g_m \cdot V_i / (j \cdot \omega_0 \cdot C_1), \quad (5.67)$$

где  $g_m$  - крутизна нелинейного источника. Откуда для частоты единичного усиления можно записать

$$|V_1 / V_i| \cong g_m / (\omega_0 \cdot C_1) = 1. \quad (5.68)$$

Если при этом сделать замену

$$g_m = B_0 / R_1, \quad (5.69)$$

то с учетом (5.65) получаем соотношение (5.66).

Четвертая ступень является в общем случае линейным четырехполюсником, имитирующим точки перегиба АЧХ и ФЧХ (диаграмма Боде), на высших полюсных частотах. Для этой цели можно предложить большое количество RC-схем, с уточнением их параметров известными методами аппроксимации и оптимизации. Обычно операционные усилители реализуют с минимально-фазовой передаточной функцией. Тогда в соответствии с интегральным соотношением Гильберта с помощью  $N_4$  достаточно имитировать АЧХ, либо ФЧХ, так как между ними существует в этом случае связь.

Пятая ступень состоит из линейного и нелинейного сопротивлений, причем  $R_0$  выбирается равным выходному сопротивлению операционного усилителя. Нелинейное сопротивление с характеристикой  $V(I)$  (рисунок 5.21) выбирается так, чтобы точка перегиба напряжения, определяющая пиковое выходное напряжение операционного усилителя  $V_{0max}$  соответствовала паспортным данным. Заметим, что нелинейное сопротивление ведет себя как разомкнутая цепь для всех выходных напряжений  $|V_0| < V_{0max}$ . Следовательно, данная ступень используется для имитации, как выходного сопротивления, так и ограничения выходного напряжения.

Остановимся на определении параметров  $I_m$  и  $g_m$  нелинейного блока на основе нелинейного источника тока управляемого напряжением. Поскольку статическое усиление  $N_4$ , принимается равным единице, то при  $-V_{0max} \leq V_0 \leq +V_{0max}$ , можно записать

$$V_0 = V_1 = (g_m \cdot V_i) \cdot R_1. \quad (5.70)$$

Откуда находим крутизну

$$g_m = V_0 / (V_1 \cdot R_1) = B_0 / R_1. \quad (5.71)$$

Значение максимального тока  $I_m$  можно получить, подставляя  $C_1$  из (5.65) в (5.64)

$$I_m = S_r / (\omega_1 \cdot R_1). \quad (5.72)$$

В свою очередь, из (5.71) и (5.72), следует

$$V_{imax} = I_m / g_m. \quad (5.73)$$

Заметим, что крутизны управляемых источников, ступеней  $N_4$  и  $N_5$ , используемых для развязки, равны единице.

В результате все параметры модели операционного усилителя могут быть определены из паспортных данных, либо измерены экспериментально.

В случае линейной модели достаточно лишь имитировать входное и выходное сопротивления, коэффициент передачи и несколько ближайших полюсов. Причем, вместо источника напряжения, управляемого напряжением, часто используют источник тока управляемого напряжением с крутизной

$$g_m = \mu / R_{out}, \quad (5.74)$$

где  $R_{out}$  - выходное сопротивление ступени.

Один из вариантов линейной модели с имитацией первых двух полюсов приведен на рисунке 5.26.

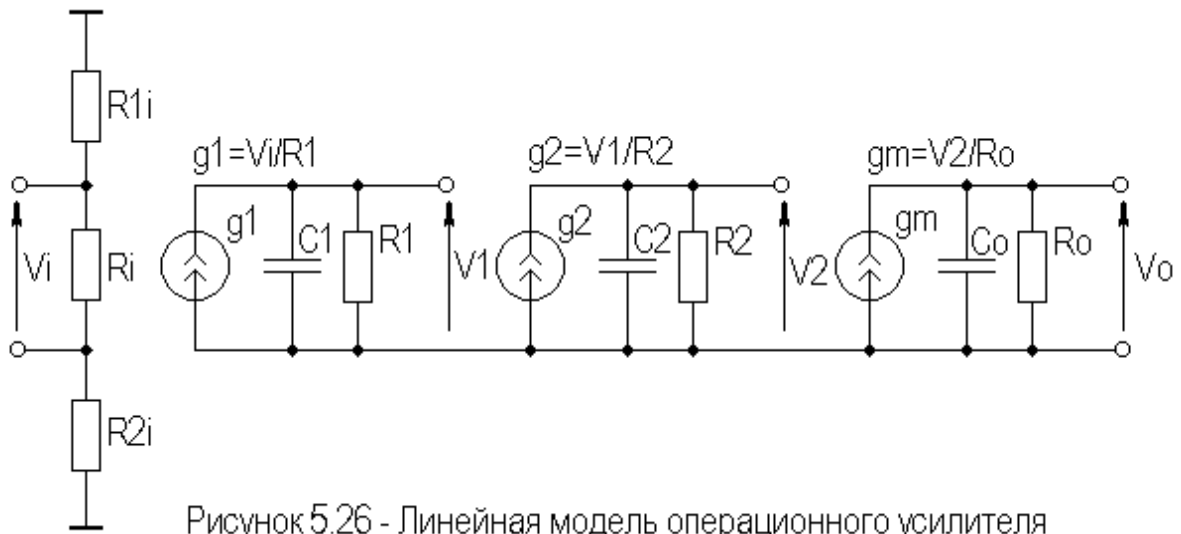


Рисунок 5.26 - Линейная модель операционного усилителя

В этой модели входная цепь имитирует входное сопротивление дифференциального операционного усилителя. Первые две ступени с единичным коэффициентом передачи имитируют две ближайшие полюсные частоты

$$\omega_1 = 1 / (R_1 \cdot C_1); \quad \omega_2 = 1 / (R_2 \cdot C_2).$$

Третья ступень имитирует коэффициент передачи операционного усилителя  $\mu = g_m \cdot R_0$  и выходной импеданс операционного усилителя параллельным соединением  $R_0, C_0$ .

## 5.6 Модели связанных индуктивностей

На практике часто встречаются магнитно-связанные катушки индуктивности, которые необходимо отобразить в виде модели. Пусть имеем пару связанных катушек (рисунок 5.27).



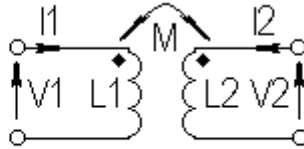


Рисунок 5.27 - Связанные катушки индуктивности

Здесь  $L_1$ ,  $L_2$  - собственные индуктивности первой и второй катушек, измеренные в связанной системе при режиме холостого хода. В связанных катушках  $M$  означает взаимоиנדуктивность, обозначаемую часто, как  $L_{12}$ . Символы  $\bullet$  призваны отображать со направленность токов катушек или, что тоже самое, знак взаимоиנדуктивности. Взаимосвязь катушек иногда удобнее отображать через коэффициент связи

$$k_{c0} = M / \sqrt{L_1 \cdot L_2} = L_{12} / \sqrt{L_1 \cdot L_2}, \quad (5.75)$$

модуль которого, по физическим соображениям, меньше единицы.

Запишем матрицу сопротивлений холостого хода для двух связанных катушек образующих два контура

$$Z = \begin{bmatrix} j \cdot \omega \cdot L_1 & j \cdot \omega \cdot L_{12} \\ j \cdot \omega \cdot L_{12} & j \cdot \omega \cdot L_2 \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

Для того чтобы представить связанные индуктивности набором несвязанных эквивалентных индуктивностей от матрицы сопротивлений перейдем к матрице проводимости короткого замыкания

$$Y = Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} & \frac{-L_{12}}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} \\ \frac{-L_{12}}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} & \frac{L_1}{j \cdot \omega \cdot (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2)} \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Из матрицы проводимости просматривается следующая простейшая структура модели связанных индуктивностей, через несвязанные эквивалентные индуктивности (рисунок 5.28).

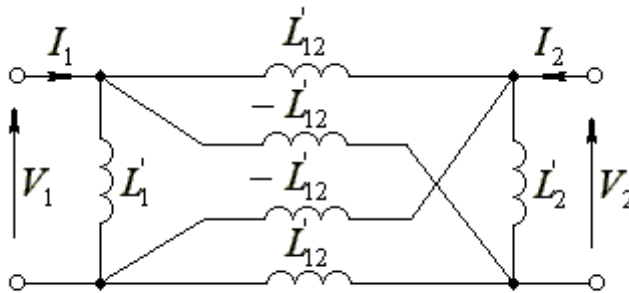


Рисунок 5.28 - Модель связанных индуктивностей

Выражения для эквивалентных индуктивностей, через исходные, непосредственно следуют из матрицы проводимости связанных индуктивностей (5.77)

$$L'_1 = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_2, \quad (5.78)$$

$$L'_2 = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_1, \quad (5.79)$$

$$L'_{12} = (L_1 \cdot L_2 - L_{12}^2) / L_{12}. \quad (5.80)$$

Выражения эквивалентных индуктивностей (5.78÷5.80), через исходные, используя выражение для коэффициента связи (5.75), легко представить в виде

$$L'_1 = L_1 \cdot (1 - k_{c0}^2), \quad (5.81)$$

$$L'_2 = L_2 \cdot (1 - k_{c0}^2), \quad (5.82)$$

$$L'_{12} = L_{12} \cdot (1 - k_{c0}^2) / k_{c0}^2. \quad (5.83)$$

Данное представление легко распространяется на магнитно-связанные катушки с отводами и произвольное число магнитно-связанных катушек индуктивности. Принцип построения модели, для каждой пары связанных катушек, при этом остается прежним, однако выражения для эквивалентных индуктивностей значительно усложнятся.

## 5.7 Модели распределенных структур

Различают однородные и неоднородные, одно - и многосвязанные, активные и пассивные распределенные структуры. Мы остановимся лишь на простейших однородных, одно-связанных пассивных структурах.

Модели распределенных структур обычно описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называемых телеграфными. При периодическом воздействии, уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные уравнения с постоянными коэффициентами. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют аналитические решения, раскрывая которые, с учетом граничных условий, получают матрицу передачи конечного отрезка распределенной структуры. Определив матрицу передачи, легко перейти к любой другой системе параметров.

Матрицы передачи либо проводимости полученные в результате решения дифференциальных уравнений записывается через характеристические параметры распределенных структур.

**Модель LC- линии.** Наиболее распространенной распределенной структурой является LC- линии самого разнообразного вида. Это могут быть и отрезки кабеля, симметричные и несимметричные полосковые линии и так далее. В случае распределенных структур корректно говорить лишь о модели бесконечно малого отрезка выраженной через погонные параметры. Погонные параметры - это параметры, отнесенные к единице длины. Так для LC- линии с потерями модель дифференциального участка приведена на рисунке 5.29а.

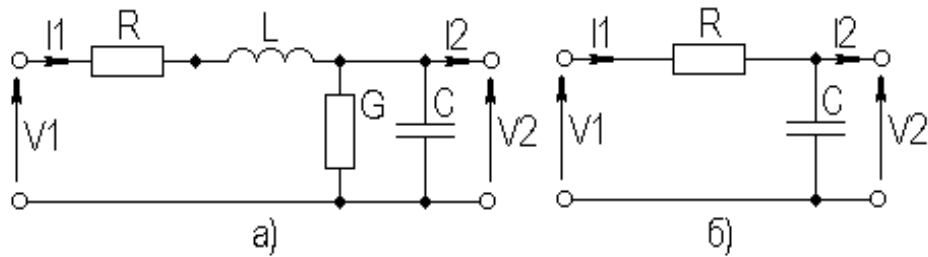


Рисунок 5.29 - Дифференциальные модели линий передачи

Характеристические параметры  $LC$ - линии, волновое сопротивление  $\rho$  и постоянная распространения  $\Theta$ , определяются выражениями

$$\rho = \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) / (G + j \cdot \omega \cdot C)}, \quad (5.84)$$

$$\Theta = l \cdot \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)}, \quad (5.85)$$

где  $l$  - длина отрезка  $LC$ - линии.

**Модель  $RC$ - линии.** Следующей распространенной простейшей распределенной структурой является  $RC$ - линия, представляющая собой частный случай  $LC$ - линии.  $RC$ - линии нашли применение в микроэлектронике, при реализации активных фильтров. Модель дифференциального участка  $RC$ - линии приведена на рисунке 5.29б.

Характеристические параметры  $RC$ - линии, характеристическое сопротивление  $\rho$  и постоянная распространения  $\Theta$ , определяются

$$\rho = \sqrt{R / C}, \quad (5.86)$$

$$\Theta = l \cdot \sqrt{R \cdot C}, \quad (5.87)$$

где  $l$  - длина  $RC$ - линии.

Структура матриц  $Y$ - параметров отрезка  $LC$ - линии с потерями и  $RC$ - линии одинакова и может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 / (\rho \cdot th(\Theta)) & -1 / (\rho \cdot sh(\Theta)) \\ -1 / (\rho \cdot sh(\Theta)) & 1 / (\rho \cdot th(\Theta)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (5.88)$$

где  $I_1, I_2, V_1, V_2$  - токи и напряжения на входе и выходе отрезка структуры;  $sh, th$  - функции гиперболического синуса и тангенса комплексного аргумента.

Для  $LC$ - линии, в случае отсутствия потерь, характеристические параметры становятся вещественными, и гиперболические функции вырождаются в тригонометрические функции.

## 6 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

### 6.1 Алгоритм Гаусса

Наиболее известным и эффективным из алгоритмов решения систем линейных уравнений общего вида является алгоритм Гаусса. В алгоритме Гаусса исходная линейная система уравнений

$$A \cdot X = Y \quad (6.1)$$

решается в два этапа.

На первом этапе, путем элементарных операций со строками и столбцами, матрица  $A$  приводится к треугольному виду. На втором этапе, путем обратной подстановки, находится вектор решения  $X$ . Чаще всего вектор решений  $X$  формируется на месте вектора свободных членов  $Y$ .

Для удобства изложения ограничимся порядком системы уравнений  $n = 4$ , а вектор свободных членов  $Y$  присоединим к матрице коэффициентов  $A$ , в качестве  $(n + 1)$ -го столбца. В результате имеем следующую матрицу коэффициентов и свободных членов

$$[A \quad Y] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

На первом, этапе для приведения матрицы коэффициентов к треугольному виду, необходимо путем элементарных операций, столбец за столбцом, все коэффициенты ниже диагонали, преобразовать в нули. В качестве первого шага, для обнуления коэффициентов первого столбца ниже диагонали: вычтем последовательно из второй строки первую умноженную на  $a_{21}/a_{11}$ ; - из третьей строки первую умноженную на  $a_{31}/a_{11}$ ; - и, наконец, из последней – первую умноженную на  $a_{41}/a_{11}$ . Покомпонентная запись этих операций имеет вид

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.2)$$

где  $i$  – текущий номер строки  $(1, \dots, n)$ ;  $j$  – текущий номер столбца  $(k + 1, \dots, n + 1)$ ;  $k$  – номер опорной строки (столбца)  $(1, \dots, n - 1)$ . После первого шага система имеет вид

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix},$$

где верхний индекс  $(i)$  – означает номер шага.

На втором шаге за опорную считаем вторую строку, полученную после

первого шага, и вычтем ее последовательно из 3-ей и 4-ой строк, предварительно умножив соответственно на  $a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$  и  $a_{42}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$ , после чего получаем

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Выполняя третий шаг, приходим к треугольному виду матрицы

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} & a_{45}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

На этом заканчивается первый этап и начинается второй – обратная подстановка.

Из последнего уравнения треугольной системы следует

$$a_{44}^{(4)} \cdot x_4 = a_{45}^{(4)} = y_4^{(4)},$$

в результате получаем

$$x_4 = a_{45}^{(4)} / a_{44}^{(4)} = y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)}.$$

Из предпоследнего уравнения треугольной системы имеем

$$a_{33}^{(3)} \cdot x_3 + a_{34}^{(3)} \cdot x_4 = a_{35}^{(3)} = y_3^{(3)},$$

или

$$x_3 = (a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot x_4) / a_{33}^{(3)},$$

а, подставив в него значение  $x_4$ , получим

$$x_3 = (a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot a_{45}^{(4)} / a_{44}^{(4)}) / a_{33}^{(3)} = (y_3^{(3)} - a_{34}^{(3)} \cdot y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)}) / a_{33}^{(3)}.$$

Распространив далее подобные рассуждения, получим общее соотношение для произвольного шага обратной подстановки

$$x_i = \left( a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j \right) / a_{ii}, \quad (6.3)$$

где, перебирая значения  $i=1, \dots, n$ , последовательно определим все компоненты вектора решений из рекуррентного выражения.

Рассмотрим обратную подстановку более подробно, чтобы полнее раскрыть ее содержание, как набор базовых операций над строками.

Прежде всего, учитывая, что общее решение линейной системы уравнений (6.1) может быть представлено в виде

$$x = A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y, \quad (6.4)$$

делаем вывод, что во время обратного хода исходная (треугольная) матрица должна быть приведена к единичной. Это означает, что элементы выше диагонали должны быть обнулены в результате элементарных операций над строками и строки должны быть нормированы относительно диагональных элементов. В соотношении (6.3) выражение в скобках как раз и соответствует операции над текущей строкой, а деление на  $a_{ii}$  – нормировке строки.

Так, в качестве первого шага обратной подстановки, для обнуления 4-го столбца над диагональю, необходимо из строк с 3-ей по 1-ую, вычесть 4-ую строку умноженную последовательно на

$$a_{34}^{(3)} / a_{44}^{(4)}, a_{24}^{(2)} / a_{44}^{(4)}, a_{14}^{(1)} / a_{44}^{(4)},$$

после чего нормировать 4-ую строку относительно  $a_{44}$ . Для экономии операций целесообразно вначале нормировать текущую строку, а затем вычитать ее из других строк, предварительно умножив ее на соответствующий элемент строки текущего столбца.

В результате после первого шага обратной подстановки имеем

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(5)} & a_{12}^{(5)} & a_{13}^{(5)} & 0 & y_1^{(5)} \\ 0 & a_{22}^{(5)} & a_{23}^{(5)} & 0 & y_2^{(5)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(5)} & 0 & y_3^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4^{(4)} / a_{44}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

На втором шаге нормируем третье уравнение и обнуляем, третий столбец выше диагонали и т.д., пока не дойдем до первой строки, и не нормируем ее.

В покомпонентной записи это соответствует операциям: нормировки для опорной строки  $k$

$$a'_{kj} = a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.5)$$

при  $k = n, \dots, 1; j = k, \dots, n + 1$ ; и обнуления элементов опорного столбца для строк, лежащих выше опорной

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad (6.6)$$

при  $k = n, \dots, 1; i = k + 1, \dots, 1; j = k, \dots, n + 1$ .

Таким образом, в результате прямого и обратного хода алгоритма Гаусса в  $n + 1$ -ом столбце расширенной матрицы будет сформирован вектор решений  $X$ .

Сделаем несколько важных замечаний по алгоритму Гаусса.

1. Прямой ход Гаусса совершается элементарными операциями над строками, как известно, не изменяющими значение ранга. В данном случае элементарные операции не изменяют и значение определителя, поэтому, перемножив диагональные элементы (до нормировки), после прямого хода, получим значение определителя. Обычно на практике при решении линейной системы значение определителя получают как побочный продукт процедуры, предварительно заведя в ней

соответствующую переменную, с начальным значением единица, и умножая эту переменную на каждом шаге прямого хода на диагональный элемент опорной строки.

2. Нормировка опорных элементов возможна и при прямом ходе, при этом перед нормировкой каждой строки значение опорного элемента умножается на текущее значение переменной определителя. В результате прямого хода получается верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Необходимость нормировки во время обратного хода в этом случае отпадает. Необходимо лишь скорректировать покомпонентные выражения, реализующие преобразования прямого и обратного хода.
3. Как отмечалось ранее (6.4), решение линейной системы, в соответствии с алгоритмом Гаусса, эквивалентно умножению исходной системы на обратную матрицу коэффициентов  $A^{-1}$ . Отсюда следует простейший алгоритм получения обратной матрицы: если исходную матрицу расширить единичной матрицей, то в соответствии с выражениями

$$A^{-1} \cdot [A \ 1] = [1 \ A^{-1}]$$

на месте единичной будет сформирована обратная матрица.

4. Алгоритм Гаусса легко интерпретировать как для нахождения вектора решения  $X$ , так и для обратной матрицы  $B = A^{-1}$ , не прибегая к расширенной матрице в целях экономии памяти.
5. С целью уменьшения ошибки вычислений, и исключения деления на нулевой диагональный элемент, обычно на каждом шаге прямого хода, ищут максимальный по модулю элемент, в оставшейся части матрицы - в оставшихся строках, либо столбцах, и путем перестановок строк, и если нужно столбцов, делают его диагональным. Произведенные перестановки учитываются в результирующем векторе решений и знаке определителя. Модификация алгоритма с полным либо частичным выбором главного значения требует большого числа операций, однако, обладает повышенной точностью.
6. Соотношения (6.2) алгоритма Гаусса, как его модификация используется для понижения порядка линейной системы уравнений, путем исключения части переменных. При этом коэффициенты исходной системы преобразуются, оставляя ее инвариантной по отношению к оставшимся переменным.

Поясним суть исключения переменных, на примере блочного представления системы

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix},$$

где  $X_1$  – остающиеся переменные;  $X_2$  – исключаемые переменные.

Записывая систему в виде

$$\begin{aligned} A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 &= Y_1 \\ A_{21} \cdot X_1 + A_{22} \cdot X_2 &= Y_2 \end{aligned}$$

выражая  $X_2$  из второго уравнения

$$X_2 = -A_{22}^{-1} \cdot A_{21} \cdot X_1 + A_{22}^{-1} \cdot Y_2,$$

и подставляя в первое уравнение, получим укороченную эквивалентную систему уравнений - блочную форму алгоритма Гаусса - понижения порядка линейной системы уравнений

$$(A_{11} - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot A_{21}) \cdot X_1 = Y_1 - A_{12} \cdot A_{22}^{-1} \cdot Y_2. \quad (6.7)$$

Это соотношение показывает, как трансформируется матрица коэффициентов и вектор свободных членов при понижении порядка системы.

Покомпонентная форма, соответствующая исключению по одной переменной, как следствие соотношения (6.7) имеет знакомый вид (см. (6.2))

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.8)$$

где  $k$  – индекс исключаемой переменной (строки, столбца).

Для вектора свободных членов исключение  $k$ -ой переменной соответствует выражению

$$y'_i = y_i - a_{ik} \cdot y_k / a_{kk}, \quad (6.9)$$

которое при желании можно трактовать как преобразование  $(n+1)$ -го столбца расширенной матрицы.

В соответствии с (6.8, 6.9), на каждом этапе исключения преобразуют все элементы, остающихся на данный момент строк и столбцов матрицы  $A$  и компонент вектора  $Y$ . Приведенные соотношения, соответствуют исключению одноименных компонент векторов  $X$  и  $Y$ , однако их можно трансформировать и на исключение разноименных компонент, что также имеет физическую интерпретацию.

7. Инверсию или обращение матрицы, также можно интерпретировать через блочный алгоритм исключения. Так, рассматривая в качестве исходной систему

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

и, исключая, по аналогии с (6.7), первую группу переменных на месте блока  $A_{22}$ , получим  $A_{22} = A^{-1}$ .

Таким образом, один и тот же алгоритм или соотношения Гаусса, применяются при решении линейных систем уравнений, исключении части переменных с целью сокращения размерности системы и при вычислении обратных матриц коэффициентов.



## 6.2 Алгоритм Гаусса – Жордана

Известно несколько модификаций алгоритма Гаусса, в частности, Жорданом была предложена модификация алгоритма позволяющая решать систему уравнений за один проход.

Отличие заключается в том, что после выбора и нормировки опорной строки, элементы опорного столбца обнуляются с помощью элементарных операций, как под, так и над диагональю.

Для пояснения вновь, ограничившись порядком  $n = 4$ , обратимся к расширенной, за счет вектора свободных членов, матрице коэффициентов

$$[A \ Y] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & y_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}.$$

Пусть первая строка является опорной, а диагональный элемент  $a_{11}$  – ведущий. Нормируем опорную строку, относительно ведущего элемента и, для обнуления первого столбца за исключением ведущего элемента, вычтем из остальных строк первую – опорную, умноженную на элементы ведущего столбца соответствующих строк. В результате первого шага получим

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & a_{14}/a_{11} & a_{15}/a_{11} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & a_{35}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

На втором шаге нормируем вторую строку относительно  $a_{22}^{(2)}$  и вычтем ее из остальных, предварительно умножая на соответствующий элемент ведущего столбца

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & a_{35}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Продолжая выбор ведущей строки до последней, на месте исходной матрицы получим единичную матрицу, а на месте вектора свободных членов образуется вектор решений. Доказательство данного факта следует, хотя бы, из эквивалентности решения системы, действию на нее обратной матрицы

$$A^{-1} \cdot [A \ Y] = [I \ X].$$

Последовательность операций алгоритма Гаусса – Жордана может быть представлена в виде

$$a'_{kj} = a_{kj} / a_{kk}, \quad (6.10)$$

при  $k = 1, \dots, n; j = k, \dots, n + 1;$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad (6.11)$$

при  $k = 1, \dots, n; j = k, \dots, n + 1; i = 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$ , где  $k$  – номер опорной строки.

Отметим некоторые особенности и модификации алгоритма Гаусса – Жордана:

1. Для повышения точности и надежности алгоритма также используют модификацию, с полным либо частичным выбором главного значения.
2. Используя дополнительную переменную, с единичным начальным значением, и умножая ее перед нормировкой очередной строки на ведущий элемент, получим в результате значение определителя.
3. Известный метод оптимального исключения, позволяющий решать большие системы с малой оперативной памятью ЭВМ, является модификацией алгоритма Гаусса – Жордана, при котором вся матрица коэффициентов храниться во внешней памяти, а в оперативной памяти хранятся попарно опорная и текущая строки. В результате, появляется возможность работать с системами уравнений, объем которых превышает оперативную память, но требуется многократный обмен с оперативной памятью, а значит и время, кроме того, затрудняется выбор ведущего элемента.
4. Как и в алгоритме Гаусса, используя матрицу коэффициентов  $A$ , расширенную единичной матрицей, в результате преобразований на месте единичной получим обратную матрицу.
5. Возможна модификация алгоритма для вычисления вектора решения  $X$  и вычисления обратной матрицы  $A^{-1}$ , без использования расширенной матрицы коэффициентов.
6. Интересна также модификация алгоритма Гаусса – Жордана, для вычисления обратной матрицы на месте исходной:

а) среди оставшихся строк и столбцов, ищем ведущий элемент, и перестановкой строк и столбцов, устанавливаем его на диагональ в опорной строке – вариант полного выбора главного значения;

б) заменяем ведущий элемент на обратный  $a'_{kk} = 1/a_{kk}$ ;

в) элементы ведущей строки умножаем на обратное значение ведущего элемента  $a'_{kj} = a_{kj} \cdot a'_{kk} = a_{kj}/a_{kk}$ , где  $j \neq k$ ;

г) элементы на пересечении текущих строк и опорного столбца умножаем на  $(-a'_{kk})$  т.е.  $a'_{ik} = -a_{ik} \cdot a'_{kk} = -a_{ik}/a_{kk}$ , где  $i \neq k$ ;

е) остальные элементы текущих строк преобразуются в соответствии с выражением  $a'_{ij} = a_{ij} + a'_{ik} \cdot a'_{kj} / a'_{kk} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj} / a_{kk}$ , где  $i, j \neq k$ , что соответствует вычитанию из текущих строк опорной взвешенной на соответствующий элемент опорного столбца.

В алгоритме обращения матрицы на месте исходной важно строго соблюдать последовательность действий. Кроме перечисленной

последовательности возможна следующая: вначале можно выполнить пункт е), пропустив элементы текущей строки и столбца, затем пункт с), пропустив ведущий элемент, за ним пункт б) и, наконец, пункт д), заменяя деление умножением на обратное значение опорного элемента – другими словами последовательность – а); е); с); б); д). Приемлема также последовательность – а); с); б); д); е).

Рассмотрим пример обращения матрицы на месте исходной для матрицы второго порядка по основной последовательности.

Изложение приведем в символьном виде, поэтому выбор главного значения будет отсутствовать. Пусть задана матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Первый шаг алгоритма по основной последовательности. Выбираем в качестве опорной 1-ую строку и ведущий элемент  $a_{11}$ . В результате нормировки ведущего элемента – пункт б), имеем

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Умножим элементы первой строки на обратное значение ведущего элемента – пункт с)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Нормируем элементы опорного столбца - пункт д)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Преобразуем элементы остальных строк и столбцов – пункт е)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}/a_{11} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что элемент  $a'_{22} = a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}/a_{11} = \Delta/a_{11}$ , где  $\Delta$  - определитель матрицы второго порядка.

Второй шаг алгоритма – опорной является вторая строка, а ведущим элементом  $a_{22}$ . В результате нормировки ведущего элемента – пункт б) имеем

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Умножим элементы второй строки на обратное значение ведущего элемента – пункт с)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Нормируем элементы опорного столбца – пункт д)

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Преобразуем элементы остающихся строк и столбцов – пункт е) и, учитывая, что  $a'_{11} = 1/a_{11} + (-a_{21}/\Delta) \cdot (-a_{12}/\Delta)/(a_{11}/\Delta) = a_{22}/\Delta$ , окончательно имеем

$$\begin{bmatrix} a_{22}/\Delta & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}.$$

Результат, как мы видим, полностью совпадает с обратной матрицей. Другое замечание, которое можно сделать, анализируя алгоритм, – это принципиальная важность выполнения пунктов с) и d), до либо после пункта е).

Таким образом, алгоритмы Гаусса и Гаусса – Жордана позволяют решать системы уравнений общего вида, находить обратные матрицы, понижать порядок уравнений и вычислять определители.

### 6.3 Схема Халецкого (LU – факторизация)

Одним из лучших методов решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида является метод, основанный на разложении исходной матрицы на произведение треугольных, или метод  $LU$ –факторизации. Алгоритмы этого метода близки к алгоритмам метода Гаусса, хотя вычисления могут производиться в различной последовательности. Главным преимуществом метода  $LU$ –факторизации в сравнении с методом Гаусса является возможность более быстрого получения решений для различных векторов свободных членов, а также для транспонированной системы уравнений.

Это обстоятельство можно объяснить следующим образом. По числу операций необходимых для решения конкретной системы методы Гаусса и  $LU$ –факторизации практически неразличимы. Однако из всех операций решения в методе  $LU$ –разложения почти половину приходится на этап факторизации и следующая половина на собственно решение двух треугольных систем. В силу этого факта, при необходимости решения системы, отличающейся лишь вектором свободных членов, получаем экономию на операциях разложения. Аналогично, когда необходимо решать транспонированную систему после исходной, можно воспользоваться предыдущей факторизацией и лишь сменить порядок решения треугольных систем в силу операции транспонирования.

В методе решения систем линейных уравнений, основанном на факторизации, предполагается, что исходная система

$$A \cdot X = Y, \quad (6.12)$$

может быть представлена в виде

$$L \cdot U \cdot X = Y, \quad (6.13)$$

т.е.

$$A = L \cdot U \quad (6.14)$$

Причем для определенности полагается, что матрица  $L$  является нижнетреугольной, а  $U$  – верхнетреугольной, причем с единичной диагональю.

Забегая несколько вперед, сразу отметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Откуда следует, что определитель матрицы  $A$  равен произведению диагональных элементов нижнетреугольной матрицы  $L$

$$\Delta = \prod_{i=1}^n l_{ii}. \quad (6.15)$$

Ограничившись для наглядности порядком  $n = 4$ , запишем  $L$  и  $U$  матрицы

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Схема Халецкого.** Предполагая возможным разложение (6.14), вводя вспомогательный вектор  $Z$

$$U \cdot X = Z, \quad (6.16)$$

и подставив в уравнение (6.13), получим

$$L \cdot Z = Y \quad (6.17)$$

две треугольные системы, эквивалентные исходной системе. Поскольку обе системы (6.16) и (6.17) треугольные, их решения достаточно тривиальны, причем в начале решаем систему (6.17) и находим вектор  $Z$ , а затем из (6.16) окончательно находим  $X$ .

Распишем подробнее алгоритм решения. Записывая систему (6.17) в виде

$$\begin{aligned} l_{11} \cdot z_1 + \dots &= y_1 \\ l_{21} \cdot z_1 + l_{22} \cdot z_2 + \dots &= y_2 \\ l_{31} \cdot z_1 + l_{32} \cdot z_2 + l_{33} \cdot z_3 + \dots &= y_3 \cdot \\ \dots & \\ l_{n1} \cdot z_1 + l_{n2} \cdot z_2 + l_{n3} \cdot z_3 + \dots + l_{nn} \cdot z_n &= y_n \end{aligned}$$

Для первых компонент вектора  $Z$  можем записать

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 / l_{11}, \\ z_2 &= (y_2 - l_{21} \cdot z_1) / l_{22}, \\ z_3 &= (y_3 - l_{31} \cdot z_1 - l_{32} \cdot z_2) / l_{33}. \end{aligned}$$

Обобщая последовательность этих операций, называемых прямой подстановкой или прямым ходом, можем записать

$$z_1 = y_1 / l_{11}; \quad z_i = \left( y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot z_j \right) / l_{ii}, \quad (6.18)$$

при  $i = 2, \dots, n$ .

Для того чтобы, соотношение (6.18) имело смысл,  $l_{ii}$  не должны равняться нулю.

Теперь решим систему (6.16) в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \dots + u_{1,n-2} \cdot x_{n-2} + u_{1,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{1n} \cdot x_n &= z_1, \\ \dots \dots \dots x_2 + \dots + u_{1,n-2} \cdot x_{n-2} + u_{2,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{2n} \cdot x_n &= z_2, \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots x_{n-2} + u_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1} + u_{n-2,n} \cdot x_n &= z_{n-2}, \\ \dots \dots \dots x_{n-1} + u_{n-2} \cdot x_n &= z_{n-1}, \\ \dots \dots \dots x_n &= z_n. \end{aligned}$$

Начиная с последней формулы, запишем выражения для нескольких компонент вектора решений  $X$

$$\begin{aligned} x_n &= z_n, \\ x_{n-1} &= z_{n-1} - u_{n-2,n} \cdot x_n, \\ x_{n-2} &= z_{n-2} - u_{n-2,n-1} \cdot x_{n-1} - u_{n-2,n} \cdot x_n. \end{aligned}$$

Обобщая эту последовательность действий, называемую обратной подстановкой или обратным ходом, запишем

$$x_n = z_n, \quad x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \cdot x_j, \quad (6.19)$$

при  $i = n-1, \dots, 1$ .

Число операций, требуемых для выполнения, как прямой, так и обратной подстановок, равно примерно  $n^2 / 2$ , а в сумме для решения вместе с разложением требуется примерно  $n^2$  операций.

Изучение соотношений (6.16, 6.17) показывает, что компоненты  $y_i$  используются только для определения  $z_i$  и позднее не требуются. Аналогично  $z_i$  не нужны после вычисления  $x_i$ . Следовательно, при такой системе расчетов векторы  $Y, Z$  и  $X$  могут быть размещены в одних и тех же ячейках памяти ЭВМ. Коэффициенты треугольных систем – матрицы  $L$  и  $U$ , если не хранить единичную диагональ матрицы  $U$ , могут быть размещены на месте исходной матрицы коэффициентов  $A$ . Следует также отметить эквивалентность обратных подстановок в схеме Халецкого и в методе Гаусса.

#### 6.4 LU – факторизация (алгоритм Краута)

При изложении алгоритмов разложения для наглядности ограничимся порядком системы  $n = 4$ , что не повлияет на общность рассуждений.

Суть алгоритма Краута. Предполагая, что разложение  $A = L \cdot U$  существует, запишем произведение  $L \cdot U$

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & l_{11}u_{14} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + l_{33}u_{34} \\ l_{41} & l_{41}u_{12} + l_{42} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{34}u_{34} + l_{44} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая компоненты этого произведения, с компонентами матрицы  $A$ , видим, что первый столбец произведения  $L \cdot U$ , равен первому столбцу матрицы  $A$ , т.е.  $l_{i1} = a_{i1}$ , при  $i = 1, \dots, 4$ . Первая строка произведения может быть использована для определения первой строки матрицы  $U$ . Действительно, т.к.

$$l_{11} \cdot u_{1j} = a_{1j},$$

при  $j = 2, \dots, 4$ , получаем

$$u_{1j} = a_{1j} / l_{11}.$$

Поскольку во втором столбце элементы  $u_{12}$  и  $l_{i1}$  известны, можем определить второй столбец матрицы  $L$

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12},$$

где  $i = 2, \dots, 4$ . Теперь, т.к. известны  $l_{21}, l_{22}$  и  $u_{1j}$ , можно по второй строке произведения определить вторую строку матрицы  $U$

$$u_{2j} = (a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}) / l_{22},$$

при  $j = 3, \dots, 4$ . Далее, чередуя строки и столбцы, можно аналогичным образом найти остальные элементы матриц  $L$  и  $U$ .

Чтобы получить общие соотношения, запишем произвольный элемент произведения  $L \cdot U$

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^n l_{im} \cdot u_{mj} = \sum_{m=1}^{\min(i,j)} l_{im} \cdot u_{mj},$$

где верхний предел суммы учитывает наличие нулевых элементов в матрицах  $L$  и  $U$ . Рассмотрим произвольный элемент, на или под главной диагональю матрицы  $A$ , для которого  $i \geq j$ , и заменим индекс  $j$  на  $k$ . Учитывая при этом, что  $u_{kk} = 1$ , получим

$$a_{ik} = \sum_{m=1}^k l_{im} \cdot u_{mk} = l_{ik} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \cdot u_{mk},$$

откуда

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \cdot u_{mk}, \quad (6.20)$$

при  $i \geq k$  и  $k = 1, \dots, n$ . Аналогичным образом, рассматривая произвольный элемент над главной диагональю, для которого  $i < j$  и, используя  $k$  вместо  $i$ , находим

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^k l_{mk} \cdot u_{mj} = l_{kk} \cdot u_{kj} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \cdot u_{mj},$$

откуда

$$u_{kj} = \left( a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} * u_{mj} \right) / l_{kk}, \quad (6.21)$$

при  $j > k$  и  $k = 1, \dots, n$ .

Эти соотношения для  $l_{ik}$  и  $u_{kj}$ , есть алгоритм разложения на треугольные матрицы – алгоритм Краута. Заметим, что текущие элементы матриц  $L$  и  $U$  определяются текущим элементом матрицы  $A$  и предыдущими элементами матриц  $L$  и  $U$ . Отсюда, т.к. нулевые элементы и единичную диагональ матрицы  $U$  запоминать не нужно, в процессе вычислений, матрицы  $L$  и  $U$ , могут быть записаны на месте матрицы  $A$ , причем  $L$  расположена в нижнем треугольнике ( $i \geq j$ ), а  $U$  – соответственно в верхнем треугольнике ( $i < j$ ) матрицы  $A$ .

Коротко, алгоритм Краута, как вариант чередования столбцов и строк можно представить следующей последовательностью действий:

- 1) положим  $k = 1$  и перейдем к пункту 3;
- 2) используя выражение (6.20), рассчитываем  $k$ -тый столбец матрицы  $L$ , и если  $k = n$ , закончим процедуру разложения;
- 3) используя выражение (6.21), рассчитываем  $k$ -тую строку матрицы  $U$ ;
- 4) положим  $k = k + 1$  и перейдем к пункту 2.

Кроме варианта чередования столбцов и строк на основе соотношений (6.20) и (6.21) возможны варианты последовательного обхода по строкам либо по столбцам.

Если последовательно обходить  $L \cdot U$  произведение по строкам, то можно заметить, что, используя предыдущие соотношения (6.20), для  $l_{ik}$ , при  $i \geq k$  и (6.21) для  $u_{kj}$ , при  $k < j$ , можно беспрепятственно определить все элементы матриц  $L$  и  $U$ . Аналогично можно организовать алгоритм вычисления элементов матриц  $L$  и  $U$ , совершая обход по столбцам.

Преимущества этих вариантов алгоритма Краута проявляются при матрицах большого размера.

Известен также вариант алгоритма  $LU$ -факторизации, основанный на приведении исходной матрицы к верхней треугольной форме по Гауссу [1], однако по сравнению с алгоритмом Краута, он требует более частого обращения к матрице  $A$ .

## 6.5 Решение транспонированной системы уравнений

Транспонированная или присоединенная система уравнений соответствует транспонированной матрице коэффициентов

$$A^t \cdot X = Y. \quad (6.22)$$

В соответствии с операцией транспонирования соотношение (6.14) запишется в виде

$$A^t = U^t \cdot L^t. \quad (6.23)$$



В результате, используя  $LU$ -разложение исходной системы, присоединенная система запишется

$$U^t \cdot L^t \cdot X = Y. \quad (6.24)$$

Вводя промежуточный вектор  $Z$

$$L^t \cdot X = Z, \quad (6.25)$$

и подставляя его в (6.24) получим

$$U^t \cdot Z = Y. \quad (6.26)$$

В результате, операции транспонирования нижнетреугольные матрицы становятся верхнетреугольными и наоборот. Так ограничившись  $n = 4$ , запишем транспонированные системы (6.25) и (6.26)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & 1 & 0 & 0 \\ u_{13} & u_{23} & 1 & 0 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (6.25) и (6.26) следует, что для решения сопряженной системы (6.22) необходимо вначале решить нижнетреугольную систему (6.26), а затем верхнетреугольную систему (6.25).

Алгоритм вычисления компонент вектора  $Z$  из системы (6.26) запишется

$$z_1 = y_1; \quad z_j = y_j - \sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} \cdot z_i, \quad (6.27)$$

при  $j = 2, \dots, n$ .

Вычисление компонент вектора неизвестных  $X$  из системы (6.25) в свою очередь запишется

$$x_n = z_n / l_{nn}; \quad x_j = \left( z_j - \sum_{i=j+1}^n l_{ij} \cdot x_i \right) / l_{jj}, \quad (6.28)$$

при  $j = n-1, \dots, 1$ .

Таким образом, решение присоединенной системы уравнений может быть выполнено на основе  $LU$ -разложения исходной системы.

Сделаем ряд важных замечаний относительно методов основанных на  $LU$ -факторизации матриц.

1. Определитель исходной матрицы  $A$  равен  $\Delta_A = \prod_{i=1}^n l_{ii}$ .
2. Результат факторизации матрицы  $A$ , т.е. матрицы  $L$  и  $U$  могут храниться на месте исходной.
3. Для нахождения нового решения системы при смене вектора свободных членов  $LU$ -разложение не повторяют, а лишь производят прямую и обратную подстановки.
4. Решение для транспонированной, по отношению к исходной, системы  $A^t \cdot X = Y$ , основывается на том же разложении, только

верхнетреугольные системы становятся нижнетреугольными и наоборот.

5. Число операций  $LU$ -разложения оценивается выражением

$$\sum_{j=1}^{n-1} [(n-j) + (n-j)^2] = n^3/3 - n/3.$$

6. Известны также эффективные алгоритмы обращения матриц на основе  $LU$ -разложения.

С точки зрения объема вычислений метод решений основанный на методе  $LU$ -факторизации эквивалентен методу исключения Гаусса. Преимущества метода факторизации проявляются лишь при повторном нахождении решений, например, при вычислении чувствительности либо переходных процессов с использованием сопровождающих моделей и решении транспонированной системы наряду с исходной, например, при вычислении чувствительности методом сопряженной системы.

## 6.6 Метод ортогонализации (QR - факторизации)

**Основные понятия и определения.** Существует серия матричных алгоритмов решения линейных систем уравнений общего вида, основанных на идее ортогонализации. Однако прежде чем изложить содержание некоторых из них, дадим необходимые понятия и определения.

Два вектора  $X$  и  $Y$  называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0,$$

или

$$X^t \cdot Y = 0.$$

В комплексной плоскости операции транспонирования соответствует операция эрмитового сопряжения – знак ‘+’

$$X^+ \cdot Y = 0,$$

что соответствует понятию унитарности. Эрмитово сопряжение означает применение операции транспонирования и комплексного сопряжения  $*$ .

Длина вектора  $X$ , обозначаемая через  $|X|$ , и, называемая нормой вектора  $X$ , определяется выражением

$$|X| = \sqrt{(X, X^+)} = \sqrt{x_1 * x_1^* + x_2 * x_2^* + \dots + x_n * x_n^*}.$$

Вектор называется единичным, если его длина равна единице, при этом  $(X, X^+) = 1$ . В связи с этим различают нормированную и ненормированную системы векторов.

Так, если интерпретировать матрицы, как систему нормированных по строкам либо столбцам векторов, то можно дать следующие важные определения.

Матрица называется ортогональной, если выполняется соотношение

$$A^t = A^{-1}.$$

Матрица  $A^+$  называется эрмитовой, если для ее элементов выполняется соотношение

$$a_{ij} = a_{ji}^*,$$

это означает, что диагональные элементы эрмитовых матриц вещественны.

Матрица называется унитарной, если

$$A^+ = A^{-1}.$$

Для ненормированных ортогональных и унитарных матриц имеют место соотношения

$$\begin{aligned} A^t &= D \cdot A^{-1}; & A \cdot A^t &= A^t \cdot A = D; \\ A^+ &= D \cdot A^{-1}; & A \cdot A^+ &= A^+ \cdot A = D, \end{aligned}$$

где  $D$  – диагональная матрица. Из этого соотношения следует, что элементы диагональной матрицы представляют собой скалярные произведения строк либо столбцов ортогональных по строкам либо столбцам матриц

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^2; & d_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a_{ij}^*; \\ d_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ji}^2; & d_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ji} \cdot a_{ji}^*, \end{aligned}$$

при  $j = 1, \dots, n$ .

Для ортогональных и унитарных матриц соответственно имеем

$$\begin{aligned} A^t &= A^{-1}; & A \cdot A^t &= A^t \cdot A = 1; \\ A^+ &= A^{-1}; & A \cdot A^+ &= A^+ \cdot A = 1, \end{aligned}$$

т.к. ортогональность, есть частный случай унитарности, то в дальнейшем при изложении для упрощения будем использовать термин ортогональность, подразумевая его расширение до унитарности для комплексных матриц.

Из введенных понятий и определений следуют основные свойства ортогональных матриц:

- 1) строки (столбцы) ортогональных матриц, ортогональны;
- 2) сумма квадратов элементов любой строки (столбца) ортогональной нормированной (ортонормированной) матрицы равна 1;
- 3) определитель ортонормальной матрицы равен  $\pm 1$ ;
- 4) транспонированная (эрмитово - сопряженная) ортогональной (унитарной) матрицы или, что тоже самое, матрица обратная ортогональной (унитарной) – ортогональна (унитарна).

Из линейной алгебры известно, что любую невырожденную матрицу можно разложить (факторизовать) на произведение ортогональной и верхней либо нижней треугольной матриц. Существует несколько алгоритмов ортогональной факторизации, для обобщенного названия которых, воспользуемся термином  $QR$ – факторизация, подразумевая под  $R$ – ортогональную, а под  $Q$ – треугольную матрицы. На основе  $QR$ –

факторизации, можно реализовать решение линейных систем уравнений общего вида. Вначале рассмотрим идеи алгоритмов решения, основанных на  $QR$ -факторизации, а затем – алгоритмы  $QR$ -факторизации, как на основе ортогонализации матриц по Грамму-Шмидту, так и на основе элементарных операций над строками и столбцами исходной матрицы. При изложении алгоритмов решения подразумевается, что  $QR$ -факторизация реализована.

**Ортогональные алгоритмы решения.** Рассмотрим алгоритмы решения линейных систем основанные на ортогонализации исходной матрицы. Перейдем непосредственно к изложению алгоритмов решения линейных систем уравнений

$$A * X = Y, \quad (6.29)$$

основанных на различных способах ортогонального разложения матрицы коэффициентов исходной системы уравнений.

**Вариант ортогонализации по столбцам.** Используя алгоритм ортогонализации по столбцам, исходную систему можно записать в виде

$$R \cdot Q \cdot X = Y, \quad (6.30)$$

где  $R$  – ортогональная по столбцам матрица либо ортонормированная матрица;  $Q$  – верхнетреугольная матрица с единичной диагональю либо обычная.

Умножая уравнение (6.30) справа на  $R^t$ , в соответствии с соотношениями ортогональности, получаем

$$R^t \cdot R \cdot Q \cdot X = D \cdot Q \cdot X = R^t \cdot Y,$$

где  $D = R^t \cdot R$  – диагональная матрица. Вводя обозначение

$$R^t \cdot Y = Z, \quad (6.31)$$

запишем

$$D \cdot Q \cdot X = Z,$$

откуда формально следует

$$X = (D \cdot Q)^{-1} \cdot Z = Q^{-1} \cdot D^{-1} \cdot Z.$$

Последнее соотношение, если ввести обозначение

$$D^{-1} \cdot Z = W, \quad (6.32)$$

можно записать в виде

$$X = Q^{-1} \cdot W \quad (6.33)$$

либо

$$Q \cdot X = W. \quad (6.34)$$

При этом, учитывая, что матрица  $Q$ - верхнетреугольная, мы фактически свели решение исходной системы к обратному ходу алгоритма Гаусса. Рассматривая расширенную вектором  $W$  матрицу  $Q$ , в соответствии с обратным ходом алгоритма Гаусса без нормировки имеем

$$q'_{ij} = q_{ij} - q_{kj} \cdot q_{ik}, \quad (6.35)$$

где  $k = n - 1, \dots, 1$ ;  $i = k, \dots, 1$ ;  $j = n + 1, \dots, k$ . В результате на месте вектора  $W$  будет сформирован вектор решений  $X$ . Для этих же целей, можно воспользоваться алгоритмом Гаусса - Жордана, исключив нормировку и ограничив перебор строк от 1 до  $k - 1$ , где  $k = (2, \dots, n - 1)$  – номер ведущей строки.

Отметим, что вычисление векторов  $Z$  по выражению (6.31) и  $W$  по выражению (6.32), включая обращение диагональной матрицы  $D$ , достаточно тривиальны.

Так, если воспользоваться ортонормальным разложением, то, как следует из соотношения ортогональности  $R^t \cdot R = R^{-1} \cdot R = D = 1$ , решение определится выражением

$$Q \cdot X = Z, \quad (6.36)$$

где  $Q$  – обычная верхнетреугольная матрица.

**Вариант ортогонализации по строкам.** В случае факторизации основанной на ортогонализации по строкам исходная система представляется в виде

$$Q \cdot R \cdot X = Y, \quad (6.37)$$

где  $Q$  – нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная;  $R$  – ортогональная по строкам матрица, либо ортонормированная матрица.

Умножая соотношение (6.37) на  $Q^{-1}$  справа, получаем систему

$$R \cdot X = Q^{-1} \cdot Y,$$

или обозначая

$$Q^{-1} \cdot Y = W,$$

имеем

$$R \cdot X = W. \quad (6.38)$$

Решение этой системы с учетом соотношений ортогональности запишется

$$X = D^{-1} \cdot R^t \cdot W, \quad (6.39)$$

а в случае ортонормальной матрицы  $R$  имеем

$$X = R^t \cdot W. \quad (6.40)$$

Очень важно отметить тот факт, что, если факторизация, основанная на ортогонализации по строкам, осуществляется над, расширенной вектором  $Y$ , матрицей  $A$ , то на месте  $n + 1$ -го столбца формируется вектор  $W$ . В противном случае, алгоритм факторизации, основанный на ортогонализации строк, требует обращения нижнетреугольной матрицы. Для этой цели можно воспользоваться алгоритмом Гаусса – Жордана с учетом треугольности. Кроме того, алгоритм обращения треугольных матриц легко получить следующим способом.

**Обращение треугольной матрицы.** Обозначив элементы обратной матрицы, через  $\alpha_{ij}$ , и, ограничившись, для наглядности, порядком матрицы  $n = 3$ , распишем произведение  $A \cdot A^{-1}$  для нижнетреугольных матриц

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{22}\alpha_{22} & 0 \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} & a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} & a_{33}\alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализировав соотношения, описываемые этим выражением, легко записать алгоритм определения элементов матрицы обратной к нижнетреугольной

$$\alpha_{ij} = 0, \quad (6.41)$$

при  $i < j; i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n;$

$$\alpha_{ii} = 1/a_{ii}, \quad (6.42)$$

при  $i = j; i = 1, \dots, n;$

$$\alpha_{ij} = - \left( \sum_{k=j}^{i-1} a_{ik} \cdot \alpha_{kj} \right) / a_{ii}, \quad (6.43)$$

при  $i > j; i = 2, \dots, n; j = 1, \dots, n-1.$

Аналогичным образом можно получить выражения для обращения верхнетреугольной матрицы.

Ортогональные алгоритмы решения линейных алгебраических систем уравнений можно интерпретировать через ортогонализацию исходной матрицы коэффициентов системы элементарными операциями над строками либо столбцами.

**Вариант элементарных операций над строками.** Факторизация на основе элементарных операций над строками в силу соотношения

$$R = Q^{-1} \cdot A \quad (6.44)$$

преобразует исходную систему (6.29) к виду

$$Q^{-1} \cdot A \cdot X = Q^{-1} \cdot Y \quad (6.45)$$

или

$$R \cdot X = Q^{-1} \cdot Y = W. \quad (6.46)$$

Умножив правую и левую части выражения (6.46) на  $R^t$  и, учитывая соотношение ортогональности, запишем решение в виде

$$X = D^{-1} \cdot R^t \cdot W, \quad (6.47)$$

где  $R$  – ортогональная, либо ортонормированная по строкам матрица;  $Q$  – нижнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная.

В случае ортонормальной матрицы  $R$ , из соотношений ортогональности следует  $D = 1$ , и решение системы запишется в виде

$$X = R^t \cdot W. \quad (6.48)$$

Видим, что принципиальной разницы между данным алгоритмом решения, на основе факторизации, путем элементарных операций над

строками, и предыдущим вариантом, основанном на факторизации, путем ортогонализации строк, практически нет. При изложении алгоритмов факторизации доказывається, что эти алгоритмы отличаются лишь порядком выполнения операций над строками.

Как и в предыдущем варианте алгоритма, на этапе факторизации, можно рассматривать матрицу  $A$ , расширенную вектором  $Y$ , тогда в результате преобразований на месте  $n + 1$ -го столбца образуется вектор  $W$ . В противном случае необходимо вычислять обратную матрицу  $Q^{-1}$ .

**Вариант элементарных операций над столбцами.** Факторизация на основе элементарных операций над столбцами, в силу соотношения

$$R \cdot Q = A, \quad (6.49)$$

преобразует исходную систему (6.32) к виду

$$R^t \cdot A \cdot X = R^t \cdot Y,$$

или

$$D \cdot Q \cdot X = R^t \cdot Y.$$

Вводя обозначение

$$R^t \cdot Y = Z, \quad (6.50)$$

можем записать

$$D \cdot Q \cdot X = Z,$$

откуда следует

$$X = (D \cdot Q)^{-1} \cdot Z = Q^{-1} \cdot D^{-1} \cdot Z.$$

Последнее соотношение, если ввести обозначение

$$D^{-1} \cdot Z = W, \quad (6.51)$$

то можно записать

$$X = Q^{-1} \cdot W, \quad (6.52)$$

либо

$$Q \cdot X = W, \quad (6.53)$$

где  $R$  – ортогональная, либо ортонормированная по столбцам матрица;  $Q$  – верхнетреугольная матрица с единичной диагональю, либо обычная.

В случае ортонормальной матрицы  $R$ , из соотношения ортогональности следует,  $D = 1$ , и решение системы запишется в виде

$$Q \cdot X = Z. \quad (6.54)$$

Видим, что принципиальной разницы между данным алгоритмом решения, на основе факторизации путем элементарных операций над столбцами и предыдущим вариантом, основанном на факторизации путем ортогонализации столбцов, практически нет. При изложении алгоритмов факторизации доказывається, что эти алгоритмы отличаются лишь порядком выполнения операций над столбцами.

Метод  $QR$ – факторизации матрицы коэффициентов исходной системы уравнений, как и метод  $LU$ – факторизации, имеют преимущества перед методами исключения Гаусса и Гаусса – Жордана при многократном

решении системы с разными правыми частями, встречающимися при вычислении чувствительности и численном интегрировании систем дифференциальных уравнений. Это обстоятельство, объясняется тем фактом, что разложение производится один раз и храниться в матрицах  $Q$  и  $R$ , что составляет примерно половину операций необходимых для решения.

Методы решений систем уравнений основанные на ортогональном разложении исходной матрицы коэффициентов отличаются повышенной устойчивостью и точностью вычислений. Дело в том, что погрешности вычислений при ортогональных преобразованиях минимизируются.

Остановимся подробнее на алгоритмах  $QR$ -факторизации на основе ортогонализации по Грамму-Шмидту и элементарных операций над строками и столбцами.

### 6.7 QR – факторизация (алгоритм Грамма - Шмидта)

Наиболее известным алгоритмом разложения матрицы на произведение ортогональной и треугольной матриц является алгоритм Грамма – Шмидта.

**Вариант ортогонализации по столбцам.** Суть алгоритма основана на утверждении, что всякую неособенную матрицу  $A$  можно представить в виде произведения, матрицы  $R$  с ортогональными столбцами на верхнетреугольную матрицу  $Q$  с единичной диагональю, либо в виде произведения ортонормальной по столбцам матрицы  $R$  на обычную верхнетреугольную матрицу  $Q$

$$A = R \cdot Q. \quad (6.55)$$

Представим исходную матрицу как совокупность векторов – столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(n)} \end{bmatrix},$$

где  $a^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{nj} \end{bmatrix}$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

Т.к. матрица  $A$  неособенная, то векторы  $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$  линейно независимы. Будем искать матрицу  $R$  в виде

$$R = \begin{bmatrix} r^{(1)} & r^{(2)} & \dots & r^{(n)} \end{bmatrix},$$

где  $r^{(j)}$  – искомые ортогональные столбцы.

Вначале положим  $r^{(1)} = a^{(1)}$ . Следующий вектор  $r^{(2)}$  должен быть построен из  $a^{(2)}$ , ортогонально  $r^{(1)}$ . Для этого вектор  $a^{(2)}$  разложим на составляющие

$$a^{(2)} = q_{12} \cdot r^{(1)} + r^{(2)},$$

при условии  $(r^{(1)}, r^{(2)}) = 0$ . Умножая это выражение, скалярно на  $r^{(1)}$ , с учетом ортогональности, получаем

$$q_{12} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot r^{(1)}.$$

Аналогично, вектор  $a^{(3)}$ , раскладываем на три составляющие



$$a^{(3)} = q_{13} \cdot r^{(1)} + q_{23} \cdot r^{(2)} + r^{(3)},$$

при условиях  $(r^{(1)}, r^{(3)}) = 0$  и  $(r^{(2)}, r^{(3)}) = 0$ .

Последовательно умножая это выражение, скалярно на  $r^{(1)}$ , затем на  $r^{(2)}$ , получим

$$\begin{aligned} q_{13} &= (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}), \\ q_{23} &= (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}), \\ r^{(3)} &= a^{(3)} - q_{13} \cdot r^{(1)} - q_{23} \cdot r^{(2)}. \end{aligned}$$

В общем виде, разложение исходных векторов  $a^{(j)}$ , на ортогональные вектора  $r^{(j)}$ , запишем

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^j q_{kj} \cdot r^{(k)}, \quad (6.56)$$

где  $q_{jj} = 1$ .

В соответствии с матричными операциями, разложение (6.56) исходной матрицы  $A$ , соответствует произведению ортогональной матрицы  $R$  на верхнетреугольную матрицу  $Q$ , с единичной диагональю.

Продолжая дальше процесс ортогонализации, приходим к следующей форме записи алгоритма

$$r^{(1)} = a^{(1)}, \quad (6.57)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki} \cdot r^{(k)}, \quad (6.58)$$

где  $i = 2, \dots, n$ ,

$$q_{ij} = (a^{(j)}, r^{(i)}) / (r^{(i)}, r^{(i)}), \quad (6.59)$$

где  $i < j$ ;  $i = 1, \dots, j-1$ ;  $j = 2, \dots, n$ .

В результате данного алгоритма окажутся сформированными, ортогональная по столбцам матрица  $R$  и верхнетреугольная матрица  $Q$ , с единичной диагональю.

Если необходимо получить, вместо ортогональной, ортонормированную матрицу  $R$  (сумма квадратов элементов столбца равна 1), то следует нормировать каждый текущий вектор

$$\hat{r}^{(j)} = r^{(j)} / |r^{(j)}|, \quad (6.60)$$

где  $|r^{(j)}| = \sqrt{(r^{(j)}, r^{(j)})}$ . Заметим также, что скалярное произведение вектора самого на себя, равно квадрату длины вектора

$$(r^{(j)}, r^{(j)}) = |r^{(j)}|^2. \quad (6.61)$$

В случае нормировки, разложение исходных векторов  $a^{(j)}$ , на ортонормальные вектора  $\hat{r}^{(j)}$  запишется

$$a^{(j)} = \sum_{k=1}^j q_{kj} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.62)$$

где  $q_{jj} = |\hat{r}^{(j)}|$ .

В соответствии с матричными операциями, разложение (6.62) исходной матрицы  $A$ , соответствует произведению ортонормальной матрицы  $R$  на верхнетреугольную матрицу  $Q$ .

Процесс ортогонализации и нормировки, соответствующий разложению матрицы  $A$  на ортонормальную и верхнетреугольную с учетом (6.57) – (6.59) и (6.60), можно записать соотношениями

$$\hat{r}^{(1)} = a^{(1)} / |a^{(1)}|, \quad (6.63)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.64)$$

где  $i = 2, \dots, n$ ,

$$\hat{r}^{(i)} = r^{(i)} / |r^{(i)}|, \quad (6.65)$$

$$q_{ij} = (a^{(j)}, \hat{r}^{(i)}). \quad (6.66)$$

где  $i \leq j$ ;  $i = 1, \dots, j-1$ ;  $j = 2, \dots, n$ . Этот процесс называется ортогонализацией Грамма – Шмидта.

Проиллюстрируем разложение матрицы, на ортогональную и верхнетреугольную с единичной диагональю, на простейшем примере матрицы порядка  $n = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 1 & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Зададимся конкретными значениями элементов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Согласно алгоритму, полагаем вначале

$$r^{(1)} = a^{(1)} = [0 \ 1 \ 2]^T.$$

Тогда

$$q_{12} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}) = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) / (0^2 + 1^2 + 2^2) = 2/5 = 0.4.$$

После чего находим

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot r^{(1)} = [1 \ 2 \ 0]^T - 0.4 \cdot [0 \ 1 \ 2]^T = [1 \ 1.6 \ -0.8]^T.$$

Для определения  $r^{(3)}$ , вычисляем

$$q_{13} = (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}) = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2) / 5 = 0.4,$$

$$q_{23} = (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}) =$$

$$= (2 \cdot 1 + 0 \cdot 1.6 + 1 \cdot (-0.8)) / (1^2 + 1.6^2 + 0.8^2) = 1.2 / 4.2 \cong 0.3.$$

Откуда

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{13} \cdot r^{(1)} - q_{23} \cdot r^{(2)} =$$

$$= [2 \ 0 \ 1]^t - 0.4 \cdot [0 \ 1 \ 2]^t - 0.3 \cdot [1 \ 1.6 \ -0.8]^t = [1.7 \ -0.88 \ 0.44]^t.$$

Проверяем результат разложения

$$R * Q = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.7 \\ 1 & 1.6 & -0.88 \\ 2 & -0.8 & 0.44 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и взаимную ортогональность векторов  $r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}$

$$(r^{(1)}, r^{(2)}) = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1.6 + 2 \cdot (-0.88)) = 0,$$

$$(r^{(1)}, r^{(3)}) = (0 \cdot 1.7 + 1 \cdot (-0.88) + 2 \cdot 0.44) = 0,$$

$$(r^{(2)}, r^{(3)}) = (1 \cdot 1.7 + 1.6 \cdot (-0.88) + (-0.8) \cdot 0.44) \cong 0.$$

Правильность разложения и ортогональность векторов выполняется, однако вектора не нормированы.

Используя данный пример, рассмотрим процесс разложения матрицы на произведение ортонормальной и верхнетреугольной матриц.

Нормируем первый вектор

$$\hat{r}^{(1)} = r^{(1)} / |r^{(1)}| = 1/\sqrt{5} \cdot [0 \ 1 \ 2]^t \cong [0 \ 0.45 \ 0.9] \text{ } 0:0.45:0.9|^t.$$

Вычислим

$$q_{11} = (a^{(1)}, \hat{r}^{(1)}) = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.9) = 2.25,$$

$$q_{12} = (a^{(2)}, \hat{r}^{(1)}) = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.9) = 0.9.$$

Теперь можем найти

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{12} \cdot \hat{r}^{(1)} = [1 \ 2 \ 0]^t - 0.9 \cdot [0 \ 0.45 \ 0.9]^t \cong [1 \ 1.6 \ -0.81]^t.$$

Вычисляем норму

$$|r^{(2)}| \cong \sqrt{(1^2 + 1.6^2 + 0.81^2)} \cong \sqrt{4.22} \cong 2.05$$

и нормируем вектор

$$\hat{r}^{(2)} = r^{(2)} / |r^{(2)}| \cong 1/2.05 \cdot [1 \ 1.6 \ -0.81]^t \cong [0.49 \ 0.78 \ -0.4]^t.$$

Для определения  $r^{(3)}$ , вычислим

$$q_{13} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(1)}) \cong (2 \cdot 0 + 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.9) \cong 0.9,$$

$$q_{22} = (a^{(2)}, \hat{r}^{(2)}) \cong (1 \cdot 0.49 + 2 \cdot 0.78 + 0 \cdot (-0.4)) \cong 2.05,$$

$$q_{23} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(2)}) \cong (2 \cdot 0.49 + 0 \cdot 0.78 + 1 \cdot (-0.4)) \cong 0.58.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} r^{(3)} = a^{(3)} - q_{13} \cdot \hat{r}^{(1)} - q_{23} \cdot \hat{r}^{(2)} &\cong [2 \ 0 \ 1]^t - 0.9 \cdot [0 \ 0.45 \ 0.9]^t - \\ &- 0.58 \cdot [0.49 \ 0.78 \ -0.4]^t \cong [1.72 \ -0.86 \ 0.42]^t. \end{aligned}$$

Вычислим норму

$$|r^{(3)}| \cong \sqrt{(1.72^2 + 0.86^2 + 0.42^2)} \cong \sqrt{3.87} \cong 1.97$$

и нормируем вектор

$$\hat{r}^{(3)} = r^{(3)} / |r^{(3)}| \cong 1/1.97 \cdot [1.72 \ -0.86 \ 0.42]^t \cong [0.87 \ -0.44 \ 0.21]^t.$$

Вычислим

$$q_{33} = (a^{(3)}, \hat{r}^{(3)}) \cong (2 \cdot 0.87 + 0 \cdot (-0.44) + 1 \cdot 0.21) \cong 1.95.$$

Проверим результат разложения

$$R * Q \cong \begin{bmatrix} 0 & 0.49 & 0.87 \\ 0.45 & 0.78 & -0.44 \\ 0.9 & -0.4 & 0.21 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2.25 & 0.9 & 0.9 \\ & 2.05 & 0.58 \\ & & 1.95 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и взаимную ортогональность векторов  $\hat{r}^{(1)}$ ,  $\hat{r}^{(2)}$ ,  $\hat{r}^{(3)}$

$$(\hat{r}^{(1)}, \hat{r}^{(2)}) \cong (0 \cdot 0.49 + 0.45 \cdot 0.78 + 0.9 \cdot (-0.4)) \cong 0,$$

$$(\hat{r}^{(1)}, \hat{r}^{(3)}) \cong (0 \cdot 0.87 + 0.45 \cdot (-0.44) + 0.9 \cdot 0.21) \cong 0,$$

$$(\hat{r}^{(2)}, \hat{r}^{(3)}) \cong (0.49 \cdot 0.87 + 0.78 \cdot (-0.44) + (-0.4) \cdot 0.21) \cong 0.$$

Обратим внимание, что значения матриц  $R$  и  $Q$  существенно изменились в результате нормировки системы ортогональных векторов.

**Вариант ортогонализации по строкам.** Суть алгоритма основана на альтернативном утверждении, что всякую неособенную матрицу  $A$ , можно представить в виде произведения матрицы  $R$  с ортогональными строками и нижнетреугольной матрицы  $Q$  с единичной диагональю, либо, в виде произведения ортонормальной по строкам матрицы  $R$  и обычной нижнетреугольной матрицы  $Q$

$$A = Q \cdot R. \quad (6.67)$$

Представим исходную матрицу, как совокупность векторов – строк

$$A = [a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \dots \quad a^{(n)}],$$

где  $a^{(i)} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Т.к. матрица  $A$  неособенная, то векторы  $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ , линейно независимы. Будем искать матрицу  $R$  в виде

$$R = [r^{(1)} \quad r^{(2)} \quad \dots \quad r^{(n)}],$$

где  $r^{(i)}$  - искомые ортогональные строки.

Вначале положим  $r^{(1)} = a^{(1)}$ . Следующий вектор  $r^{(2)}$  должен быть построен из  $a^{(2)}$ , ортогонально  $r^{(1)}$ . Для этого вектор  $a^{(2)}$  разложим на составляющие

$$a^{(2)} = q_{21} \cdot r^{(1)} + r^{(2)},$$

где  $(r^{(1)}, r^{(2)}) = 0$ . Умножая это выражение скалярно на  $r^{(1)}$ , с учетом ортогональности, получаем

$$q_{21} = (a^{(2)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$r^{(2)} = a^{(2)} - q_{21} \cdot r^{(1)}.$$

Аналогично, вектор  $a^{(2)}$ , раскладываем на три составляющие

$$a^{(3)} = q_{31} \cdot r^{(1)} + q_{32} \cdot r^{(2)} + r^{(3)},$$

при условиях  $(r^{(1)}, r^{(3)}) = 0$  и  $(r^{(2)}, r^{(3)}) = 0$ .

Последовательно умножая это выражение, скалярно на  $r^{(1)}$ , а затем на  $r^{(2)}$ , получим

$$q_{31} = (a^{(3)}, r^{(1)}) / (r^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$q_{32} = (a^{(3)}, r^{(2)}) / (r^{(2)}, r^{(2)}),$$

$$r^{(3)} = a^{(3)} - q_{31} \cdot r^{(1)} - q_{32} \cdot r^{(2)}.$$

В общем виде, разложение исходных векторов  $a^{(i)}$ , на ортогональные вектора  $r^{(i)}$ , запишется

$$a^{(i)} = \sum_{k=1}^i q_{ik} \cdot r^{(k)}, \quad (6.68)$$

где  $q_{ii} = 1$ .

В соответствии с матричными операциями разложения (6.68) исходной матрицы  $A$ , соответствует произведение нижнетреугольной матрицы  $Q$ , с единичной диагональю, на ортогональную матрицу  $R$ .

Продолжая дальше процесс ортогонализации, приходим к следующей форме записи алгоритма

$$r^{(1)} = a^{(1)}, \quad (6.69)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik} \cdot r^{(k)}, \quad (6.70)$$

где  $i = 2, \dots, n$ ,

$$q_{ij} = (a^{(j)}, r^{(i)}) / (r^{(i)}, r^{(i)}), \quad (6.71)$$

где  $i < j$ ;  $i = 1, \dots, j-1$ ;  $j = 2, \dots, n$ .

В результате данного алгоритма окажутся сформированными ортогональная по строкам матрица  $R$  и нижнетреугольная матрица  $Q$  с единичной диагональю.

В случае нормировки, разложение исходных векторов  $a^{(i)}$  на ортонормальные вектора  $\hat{r}^{(i)}$ , запишется

$$a^{(i)} = \sum_{k=1}^i q_{ik} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.72)$$

где  $q_{ii} = |r^{(i)}|$ .

В соответствии с матричными операциями разложение (6.72) исходной матрицы  $A$  соответствует произведению нижнетреугольной матрицы  $Q$  на ортонормальную матрицу  $R$ .

Процесс ортогонализации нормировки, соответствующий разложению матрицы  $A$  на ортонормальную и верхнетреугольную, с учетом (6.69) – (6.71) и (6.60), можно записать соотношениями

$$\hat{r}^{(1)} = a^{(1)} / |a^{(1)}|, \quad (6.73)$$

$$r^{(i)} = a^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik} \cdot \hat{r}^{(k)}, \quad (6.74)$$

где  $i = 2, \dots, n$ ,

$$\hat{r}^{(i)} = r^{(i)} / |r^{(i)}|, \quad (6.75)$$

$$q_{ji} = (a^{(j)}, \hat{r}^{(i)}), \quad (6.76)$$

где  $i \leq j$ ;  $i = 1, \dots, j-1$ ;  $j = 2, \dots, n$ . Этот процесс, также соответствует ортогонализации Грамма – Шмидта.

При факторизации матрицы, с целью решения линейной системы, удобно рассмотреть матрицу, расширенную вектором свободных членов, в качестве  $n+1$ -го столбца. В результате процесса ортогонализации на месте вектора свободных членов

$$Q^{-1} \cdot A \cdot X = Q^{-1} \cdot Y$$

или

$$R \cdot X = W \quad (6.77)$$

окажется трансформированный вектор  $W$ .

Помимо процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, к ортогональным матрицам или  $QR$ - факторизации, можно прийти и в результате элементарных операций над строками либо столбцами. Под элементарными операциями, здесь понимаются операции алгебраического суммирования

одной строки или столбца с другими, умноженными на коэффициенты и оставляющими неизменным ранг исходной матрицы, а в данном случае и определитель.

**Ортогонализация на основе элементарных операций над строками.** Утверждается, что в результате элементарных операций над строками, исходная матрица трансформируется в ортогональную по строкам матрицу

$$R = Q^{-1} \cdot A, \quad (6.78)$$

где  $Q$  - нижнетреугольная матрица с единичной диагональю и соответствующая последовательности элементарных операций.

**Ортогонализация на основе элементарных операций над столбцами.** Утверждается, что в результате элементарных операций над столбцами, исходная матрица трансформируется в ортогональную по столбцам матрицу

$$R = A \cdot Q^{-1}, \quad (6.79)$$

где  $Q$  - верхнетреугольная матрица с единичной диагональю и соответствующая последовательности элементарных операций.

Более детально на данных алгоритмах останавливаться не будем в силу ограниченности объема учебного пособия. Можно лишь отметить, что алгоритмы ортогонализации на основе элементарных операций над строками и столбцами дают те же самые результаты, что и алгоритмы Грамма-Шмидта и представляют собой их модификацию.

В алгоритмах, основанных на ортогонализации Грамма-Шмидта, последовательно обходятся исходные вектора и каждый  $k$ -тый вектор разбивается на  $k$  ортогональных составляющих. В алгоритмах ортогонализации, основанных на элементарных операциях над векторами, обход повторяется  $n - 1$  раз со смещением и на каждом проходе выделяется очередная ортогональная составляющая.

Таким образом, эти алгоритмы отличаются лишь последовательностью действий и соответственно порядком определения компонент результирующих матриц.

На основе ортогонального разложения можно построить алгоритм обращения исходной матрицы, имея результат  $QR$ -разложения. На данном алгоритме также не будем акцентировать внимание.

Таким образом, на основе факторизации матрицы на произведение ортогональной и треугольной матриц, можно решать линейные системы алгебраических уравнений, вычислять определитель и обращать матрицы. Алгоритмы ортогональной факторизации отличает устойчивость и повышенная точность вычислений. Единственно, что требует доработки по сравнению с алгоритмами  $LU$ -факторизации, это вопрос о рациональном хранении результатов факторизации.

Методы  $QR$ -факторизации имеют аналогичные преимущества перед методами Гаусса и Гаусса – Жордана, что и методы  $LU$ -факторизации при многократном решении систем уравнений с изменяющейся правой частью.

Таким образом, нами рассмотрены основные универсальные алгоритмы решения линейных систем уравнений общего вида, которые находят самое широкое применение при реализации алгоритмов расчета и проектирования РЭУ.