Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

Кологривов В.А.

ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ

Часть 1. Аналоговые системы

Учебное пособие
для студентов радиотехнических специальностей

2012

Рецензент: кандидат физико–математических наук, профессор кафедры радиотехнических систем, Томского университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) **Чумаков А.С.**

Кологривов В.А.

Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях. Часть 1 – Аналоговые системы: Учебное пособие для студентов направлений радиотехника и телекоммуникации. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. - 159 с.

В учебном пособии излагается методика определения основных характеристик аналоговых, дискретных и цифровых устройств и систем с привлечением матричного аппарата, операционного исчисления (Лапласа и Z- преобразований), обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений. Изложение материала сопровождается большим числом примеров определения передаточных (системных), переходных и импульсных характеристик аналоговых и дискретных цепей, как моделей реальных устройств.

Используемая методика позволяет определять реакцию аналоговых, дискретных и цифровых устройств на произвольное воздействие и актуальна при моделировании реальных устройств с использованием современных компьютерных систем для инженерных и научных исследований.

Пособие предназначено для студентов младших курсов радиотехнических и связных специальностей и призвано привить навыки математической формулировки и решения прикладных задач радиотехники, радиоэлектроники и связи. Может использоваться студентами других специальностей по направлениям связь, телекоммуникации, промышленная электроника.

По техническим причинам учебное пособие разбито на 2 части: часть 1 – Аналоговые системы; часть 2 – Дискретные и цифровые системы

В конце второй части пособия приведены учебно-методические материалы контроля знаний по дисциплине «Прикладные математические методы в радиотехнике»: тематика и содержание компьютерных контрольных работ, экзаменационные вопросы компьютерной системы тестирования; вопросы для подготовки к экзамену и/или зачету.

АННОТАЦИЯ

Предлагаемое учебное пособие по дисциплине «Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР) предназначено для студентов младших курсов направлений радиотехника и телекоммуникации.

Содержит изложение базовых понятий и задач радиотехники, электроники и связи и их математическую интерпретацию. В частности подробно рассмотрены передаточные, частотные, переходные и импульсные характеристики непрерывных и дискретных систем, методы их математического анализа и расчета с привлечением матричного аппарата, операционного исчисления, дифференциальных и разностных уравнений.

Данная дисциплина призвана развить опыт математической постановки и решения задач радиотехники, электроники и связи и способствовать более глубокому усвоению специальных предметов.

Учебное пособие может быть рекомендовано для постановки аналогичных дисциплин для студентов специальностей по связи, телекоммуникациям, промышленной электронике и других направлений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР) включена в учебный план специальности «Радиотехника» (200700) с 1999 года решением совета университета.

Основным мотивом включения данной дисциплины в учебный план явилась идея обеспечения фундаментальности образования по специальности «Радиотехника». Дело в том, что, несмотря на изучение традиционного курса высшей математики, наблюдается отрыв теоретических знаний по математике от прикладных вопросов радиотехники, электроники и связи.

Согласно учебному плану, основные разделы математики изучаются в течение трех первых семестров. В это время студенты еще не владеют даже основными понятиями по радиотехнике и электронике и естественно, что какой либо взаимной связи радиоэлектроники и математики не осознают.

С третьего семестра начинается изучение общетехнических дисциплин: основ теории цепей, радиотехнических сигналов, микроэлектроники, аналоговых электронных устройств и так далее. К этому времени формальные математические знания, не закрепленные решением конкретных прикладных задач, частично забываются. Хотя изложение общетехнических и специальных дисциплин ведется с широким использованием математического аппарата, но студентами это воспринимается в отрыве от ранее полученных знаний, что существенно затрудняет усвоение материала.

Основная трудность заключается в отсутствии навыка математической формулировки прикладных задач. Математическая интерпретация основных понятий и задач радиотехники и электроники предполагает свободное владение, как математическим аппаратом, так и основными понятиями радиоэлектроники. Математическая формулировка традиционных разделов радиоэлектроники позволяет существенно сократить время на изложение материала и сформировать общий взгляд на прикладные вопросы радиотехники. В тоже время количество отведенных на предмет часов, как всегда, ограничено, что требует оптимизации учебного плана и поиска новых концепций подготовки будущих специалистов.

Способность обобщенного формализованного восприятия технических вопросов как раз и отличает фундаментальное инженерное образование от технического образования. В связи с этим и появилась идея непрерывного математического образования в процессе обучения. Для того чтобы облегчить переход от чисто математических задач к радиотехническим задачам, а также способствовать лучшему усвоению общетехнических и специальных курсов в учебный план была введена дисциплина «Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР). Дисциплина ПММР читается в четвертом семестре, сразу после завершения курса математики и параллельно с такими дисциплинами, как: основы теории цепей, радиотехнические сигналы и микроэлектроника.

Местоположение предмета в учебном плане и определило основное содержание дисциплины ПММР. Основной упор, в плане специальности, сделан на основные характеристики непрерывных и дискретных цепей и систем, методы их математического описания и анализа. Широко использованы такие разделы математики, как: линейная алгебра, теория матриц, операционное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, разностные уравнения. При этом затронуты такие важные вопросы как: проблема собственных векторов и значений, аналитические функции от матриц, функции комплексного переменного, обобщенные и решетчатые функции. Основное внимание уделено аналитическим методам решения алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений и методам их рационального вычисления с использованием современных систем для инженерных и научных расчетов типа **MatLab, SciLab, Maple-V, MathCad**.

Из всех известных систем инженерных для научных расчетов предпочтение отдано системам **MatLab** и **SciLab,** отличающимся богатыми функциональными средами для программирования, большим числом пакетов расширений для решения прикладных технических, физических и математических задач и получившие широкое распространение в известных университетских центрах.

Предметом аналитических исследований являются частотные и временные характеристики аналоговых и дискретных цепей и систем, как реакций на специфические входные воздействия, типа: гармонический сигнал, единичный скачок, дельта импульс, гармоническая последовательность дельта импульсов, периодическая последовательность единичных δ - импульсов и одиночный единичный δ - импульс.

Для получения передаточных характеристик аналоговых (непрерывных) устройств заданных принципиальной схемой используется метод узловых потенциалов. Должное внимание уделено исследованию функциональных модулей на основе идеальных операционных усилителей (ОУ). Системные функции дискретных (цифровых) систем записываются непосредственно по функциональной схеме устройства. В качестве наиболее известных приложений дискретных и цифровых устройств рассмотрены цифровые фильтры.

Переходные и импульсные характеристики аналоговых (непрерывных) устройств исследуются операторным методом по передаточной характеристике и посредством интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Формирование ОДУ линейных систем и цепей реализуется преобразованием передаточной характеристики путем замены оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt. Для интегрирования ОДУ использованы универсальные методы (Лагранжа и Коши), пригодные для уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

Подробно рассмотрены вопросы определения начальных условий дифференциальных уравнений на основе обобщенной теоремы операционного исчисления о начальном значении функции и переход от

ОДУ n- го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрен матричный вариант метода Коши интегрирования систем ОДУ с использованием аналитической функции от матрицы коэффициентов. Введение понятия функции от матричного аргумента привело к необходимости рассмотрения полной проблемы собственных векторов и значений, а также жордановой формы канонического представления матриц коэффициентов систем при кратных собственных значениях.

Переходные и импульсные характеристики дискретных (цифровых) устройств исследуются операторным методом (Z- преобразования) по системной (передаточной) характеристике и посредством решения разностных уравнений (РУ). Формирование РУ линейных цифровых систем и цепей реализуется преобразованием системной характеристики путем замены оператора z оператором сдвига E. Для решения РУ использованы аналоги универсальных методов интегрирования ОДУ (Лагранжа и Коши), пригодные для решения разностных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

Рассмотрены вопросы определения начальных условий разностных уравнений на основе дискретного аналога теоремы операционного исчисления о начальном значении решетчатой функции и переход от РУ n-го порядка к системе n разностных уравнений первого порядка. Рассмотрен матричный вариант метода Коши решения систем РУ с использованием степенной функции от матрицы коэффициентов.

Разностные уравнения являются дискретным (конечно-разностным) аналогом обыкновенных дифференциальных уравнений. При записи РУ вместо оператора дифференцирования используется оператор сдвига (упреждения или задержки на период дискретной последовательности) либо разностный оператор. Соответственно, вместо оператора интегрирования в данном случае используется обратный разностный оператор. Обратный разностный оператор раскрывается суммой функциональной последовательности, которая представляется суммой геометрической либо арифметической прогрессий, либо суммой факториального многочлена.

Рабочая программа дисциплины ПММР для студентов очной формы обучения наряду с лекциями предполагает практические занятия, цикл лабораторных работ. В первые годы введения дисциплины рабочие программы содержали и курсовую работу по исследованию передаточных и переходных характеристик функциональных звеньев на основе идеальных ОУ.

Изложение теоретического материала сопровождается большим числом подробно разобранных примеров, призванных иллюстрировать наиболее важные ситуации анализа.

Практические занятия кроме лекционного материала затрагивают дополнительный круг вопросов, связанный с построением типовых схем на основе ОУ, моделями идеальных ОУ, особенностями анализа функциональных звеньев на основе идеальных ОУ.

Лабораторные работы выполняются в функциональной среде системы для инженерных и научных расчетов **MatLab** либо **SciLab** и предполагают знакомство: с элементами программирования; многополюсным представлением электронных схем; преобразованием систем параметров; переходом от многополюсника к четырехполюснику общего вида; методами исследования передаточных и переходных характеристик простых аналоговых и дискретных цепей и их графическим представлением; исследованием связи частотных характеристик и переходного процесса при гармоническом воздействии на основе анализа реакций цепей на гармонический и амплитудно-модулированный сигналы.

Курсовая работа проводилась в счет часов самостоятельной работы студентов и включала в себя аналитическое исследование характеристик предложенной схемы функционального модуля на основе идеального ОУ: передаточной – на основе метода узловых потенциалов; переходной – тремя методами – операторным, Лагранжа и Коши. Результаты аналитического исследования иллюстрировались с использованием функциональной среды системы для инженерных и научных расчетов **MatLab.** С целью дополнительной проверки результатов исследований производился расчет частотной и переходной характеристик на основе принципиальной схемы функционального звена в среде пакета схемотехнического моделирования **Electronics Work Bench (EWB)**.

Полный набор учебно-методического обеспечения по дисциплине ПММР включает: учебное пособие по теоретической части; методическое пособие для практических занятий; методическое пособие по лабораторным работам; методическое руководство по лабораторным работам; методические указания по курсовой работе; справочное пособие по функциональной среде системы **MatLab** (приложение к лабораторному циклу и курсовой работе); дополнительное пособие по схемным решениям на основе идеальных ОУ (приложение для практических занятий).

Предлагаемое учебное пособие, предназначенное для студентов очной и дистанционной формы обучения, является составной частью учебно-методического обеспечения дисциплины ПММР.

Таким образом, рассматриваемый круг приложений математического аппарата к задачам радиотехники, электроники и связи должен адаптировать студентов к восприятию материала специальных дисциплин и привить навыки математической интерпретации радиотехнических задач.

Излагаемый материал, по нашему мнению, может быть полезен студентам других специальностей радиотехнического и связного профиля, включая такие направления как связь, телекоммуникации, промышленная электроника и другие.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР) предназначена для студентов младших курсов специальностей: 210402 (201200) «Средства связи с подвижными объектами», 210302 (200700) «Радиотехника», 090104 (0754) «Комплексная защита объектов информатизации» и других родственных специальностей радиотехнического профиля.

Дисциплина введена в учебные планы этих специальностей, как региональный компонент, решением совета университета и призвана обеспечить непрерывность математического образования, развить опыт математической формулировки и решения задач радиотехники и электроники, способствовать усвоению материала специальных дисциплин и в конечном итоге качественной подготовке инженеров в области радиотехники, связи и защиты информации.

Основная концепция дисциплины ПММР включает **изложение основных понятий и характеристик непрерывных и дискретных цепей, устройств и систем с использованием математического аппарата – векторно-матричного представления и решения систем алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений.**

Учебное пособие содержит, в частности, определения частотных и временных характеристик непрерывных (аналоговых) и дискретных (цифровых) систем, как реакций на специфические входные воздействия.

Аналоговые системы. В качестве основного метода получения передаточных (частотных) характеристик непрерывных (аналоговых) электронных схем изложен метод узловых потенциалов с позиций многополюсного подхода и векторно-матричного представления.

Связующим звеном частотного и временного представлений является **операционное исчисление,** базирующееся на **интегральном преобразовании Лапласа.** Как известно, переходные процессы в цепях и системах при подаче на вход произвольного воздействия могут быть описаны **дифференциальными уравнениями.** В учебной литературе при этом используется в основном **операторный метод.** Суть метода, используя **прямое преобразование Лапласа**, для перехода от оригиналов во времени к изображениям в частотной области, перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям и, получив решение в области изображений, вернуться к оригиналу, используя **обратное преобразование Лапласа**.

В нашем подходе исходным является **передаточная характеристика (функция) цепи,** заданная в алгебраической дробно-рациональной форме. Для получения реакции цепи во временной области достаточно перемножить изображение входного воздействия на передаточную функцию и, получив изображение выходной реакции, с помощью обратного преобразования Лапласа, найти оригинал реакции цепи.

Известно, что **классическое преобразование Лапласа** применимо лишь в случае правильных дробно-рациональных выражений (функций), когда степень числителя ниже степени знаменателя, что соответствует физически реализуемым системам. В общем случае, когда степень числителя дробно-рациональной функции равна или превышает степень знаменателя, приходится выделять целую и дробную части. При этом оригинал целой части содержит δ- функцию и ее производные, которые относятся к классу обобщенных функций или распределений. Формально распространяя преобразование Лапласа на обобщенные функции, мы переходим к операторной алгебре, предложенной в свое время Я. Микусинским и Л. Шварцом.

Как альтернатива операторного метода, в нашем пособии рассмотрены также аналитические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, без перехода в область изображений. При этом привлекается и иллюстрируется не менее плодотворный математический аппарат **теории обыкновенных дифференциальных уравнений,** недостаточно освещенный в современных учебниках по радиотехнике и электронике.

Для перехода от передаточных функций к дифференциальным уравнениям, с целью исследования реакции цепей во временной области, можно воспользоваться заменой оператора Лапласа p, оператором дифференцирования d/dt, в предположении нулевых начальных условий. Истинные начальные условия в этом случае учитываются при интегрировании дифференциальных уравнений и определении частных решений. В качестве независимых условий, при определении частных решений дифференциальных уравнений, в нашем случае используются **начальные условия.**

Определение начальных условий для цепей общего вида является отдельной, не совсем тривиальной задачей. В нашем пособии предлагается воспользоваться дробно-рациональным выражением передаточной функции и предельной теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала. В том случае, когда дробно-рациональное выражение передаточной функции соответствует неправильной дроби приходится прибегать к операторной алгебре и начальные условия будут содержать δ-функцию и ее производные. Необходимое число начальных условий совпадает с порядком дифференциального уравнения либо порядком системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Сложные цепи описываются дифференциальными уравнениями высоких порядков и часто целесообразно, используя замену переменных, **перейти от дифференциального уравнения n- го порядка к n дифференциальным уравнениям первого порядка.** При этом удается воспользоваться векторно-матричной символикой и представить решение в компактном виде.

Наиболее универсальными методами аналитического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), справедливыми для уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, являются: метод вариации произвольных постоянных **(метод Лагранжа) и метод или форма Коши** в векторно-матричной постановке.

Идея метода Лагранжа заключается в том, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения n- го порядка ищется в той же форме, что и однородного уравнения, только вместо констант используются неизвестные функции – варьируемые постоянные. Общее решение имеет вид линейной суперпозиции фундаментальных решений однородного уравнения. Коэффициентами линейной суперпозиции являются варьируемые постоянные – неизвестные функции. Для определения варьируемых постоянных Лагранж предложил **алгоритм построения разрешающей системы уравнений.** Суть алгоритма заключается в том, что при дифференцировании общего вида решения, с целью подстановки в исходное уравнение, накладываются ограничения на рост порядка производных от неизвестных функций. Таких ограничений и, соответственно, уравнений получается $n-1$. Последнее уравнение определяющей системы получается в результате подстановки общего решения и его производных, с учетом наложенных ограничений, в исходное дифференциальное уравнение и сокращения фундаментальных решений однородных уравнений равных нулю. Полученная в результате линейная, относительно производных неизвестных функций, система алгебраических уравнений n- го порядка, вполне разрешима, так как коэффициенты этой системы совпадают с определителем Вронского, не равным нулю и построенным из фундаментальной системы независимых решений. Интегрируя найденные производные неизвестных функций, получаем общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения с **новыми постоянными интегрирования.** Наконец, воспользовавшись начальными условиями, также формируем систему уравнений, решая которую определяем постоянные интегрирования и, соответственно, **частное решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.**

Идея метода Коши или решения в форме Коши заключается в том, что он, воспользовавшись известными начальными условиями, записал решение системы дифференциальных уравнений первого порядка в явном виде через матричную экспоненту и начальные значения.

Как известно из линейной алгебры, **определение аналитической функции от матричного аргумента** предполагает предварительное **решение проблемы собственных векторов и значений. Собственные вектора** h_i, как известно, при умножении на исходную матрицу A, как оператор, остаются коллинеарными, и изменяется лишь масштаб $A \cdot h_i = \lambda_i \cdot h_i$. Масштабный коэффициент λ_i изменения соответствующего собственного вектора h_i называется **собственным значением.** В общем случае число собственных векторов и собственных значений равны порядку матрицы.

Собственные вектора образуют собственный независимый **канонический базис.** Матрица $H = h_i$, построенная из собственных векторов, как столбцов, называется **модальной матрицей.** Преобразование системы координат, в соответствии с **модальной матрицей** исходной невырожденной системы уравнений, в общем случае приводит ее к **каноническому диагональному виду.**

Таким образом, модальная матрица определяет каноническое разложение исходной матрицы $A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1}$. Матрица $A - \Lambda$, представляющая собой разность исходной и неизвестной пока диагональной матрицы собственных значений, называется **характеристической матрицей.** Равенство нулю определителя характеристической матрицы определяет характеристическое уравнение. **Характеристическое уравнение** представляет собой степенной полином относительно неизвестной переменной λ

$$\det(A - \Lambda) = P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \lambda^i + \lambda^n = 0 .$$

Собственные значения λ_i определяются как корни характеристического уравнения. Собственные вектора h_i могут быть определены из решения однородных систем уравнений при подстановке в характеристическую матрицу по диагонали поочередно соответствующего собственного значения $A - \Lambda_i \cdot h_i = 0$. Собственные вектора, как нетривиальные решения однородных систем уравнений, определяются с точностью до произвольной постоянной.

Аналитическая функция от матрицы, имеющей различные собственные значения отличные от нуля, может быть выражена через каноническое разложение матрицы, при замене собственных значений диагональной матрицы на соответствующую функцию от собственных значений $F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1}$.

В общем случае могут быть нулевые и кратные собственные значения, тогда определение собственных векторов и функций от матрицы существенно усложняется. Известно, что при кратных собственных значениях матрицы коэффициентов она может быть приведена преобразованием подобия к канонической **форме Жордана,** имеющей блочно-диагональную структуру, причем **клетки Жордана** определяются с точностью до перестановки. Число независимых векторов при этом может не соответствовать порядку матрицы и определяется в результате анализа **дефекта характеристической матрицы.** Недостающие вектора базиса определяются при этом, как **присоединенные вектора,** через соответствующую характеристическую матрицу.

Однако при аналитическом решении задачи всегда можно временно положить собственные значения различными и не равными нулю, довести решение задачи до конца, а затем выполнить **предельный переход к**

истинным значениям. При этом конечные выражения преобразуются к нужному виду. Именно этот подход, позволяющий избежать сложностей с кратными и нулевыми собственными значениями, используется в нашем пособии.

Дискретные и цифровые системы. Системные (передаточные) характеристики дискретных систем могут быть получены непосредственно по функциональным схемам устройств.

Дискретные сигналы и системы, в отличие от аналоговых, описываются дискретными функциями времени, а **исчисление конечных разностей** является аналогом дифференциального и интегрального исчисления непрерывных функций.

Связь относительного частотного и дискретного временного представлений, в данном случае, базируется на **интегральном дискретном преобразовании Лапласа или Z-преобразовании.** Как известно, переходные процессы в дискретных (цифровых) системах при подаче на вход произвольной последовательности единичных δ- импульсов могут быть описаны **разностными уравнениями.** В учебной литературе при этом используется в основном **операторный метод.** Суть метода, используя **прямое Z- преобразование**, для перехода от оригиналов, как дискретной функции времени, к изображениям в относительной частотной области, удается перейти от разностных уравнений к алгебраическим уравнениям и, получив решение в области изображений, вернуться к оригиналу, используя **обратное Z- преобразование.**

В нашем подходе исходным является **системная функция** (характеристика) цепи, заданная в алгебраической дробно-рациональной форме. Для получения реакции цепи во временной области достаточно перемножить изображение входного воздействия на системную функцию и, получив изображение выходной реакции, с помощью обратного Z-преобразования, найти оригинал реакции цепи.

Таблицы обратного Z-преобразования определены лишь для правильных дробно-рациональных выражений (функций), когда степень числителя не превышает степени знаменателя, что соответствует физически реализуемым системам. В общем случае, когда степень числителя дробно-рациональной функции превышает степень знаменателя либо выражение отсутствует в таблицах, обратное Z- преобразование приходится выполнять либо непосредственным интегрированием, либо **разложением функции в ряд Лорана** по обратным степеням оператора z, используя частный случай формулы геометрической прогрессии, либо **разложением дробно рационального выражения на элементарные дроби.**

В качестве альтернативы операторного метода, в нашем пособии рассмотрены также аналитические методы решения **разностных уравнений,** без перехода в область изображений. При этом привлекается и иллюстрируется не менее плодотворный математический аппарат теории разностных уравнений, также недостаточно освещенный в современных учебниках по радиотехнике и электронике.

Для перехода от системных функций к разностным уравнениям, с целью исследования реакции цепей во временной области, можно воспользоваться заменой оператора z оператором сдвига E, в предположении нулевых начальных условий. Истинные начальные условия в этом случае учитываются при решении разностных уравнений и определении частных решений.

Определение начальных условий для произвольных систем является отдельной не совсем тривиальной задачей. В нашем случае предлагается воспользоваться дробно-рациональным выражением системной (передаточной) функции и предельной теоремой Z-преобразования о начальном значении функции либо непосредственно разностным уравнением, последовательно полагая текущее значение индекса выходной функции равным $k = -n,\ -(n-1),\ \cdots\ ,\ -1$, где n- порядок разностного уравнения. Необходимое число начальных условий совпадает с порядком разностного уравнения либо порядком системы разностных уравнений первого порядка. Заметим, что **порядок разностного уравнения** равен разности старшей и младшей степеней оператора сдвига.

Сложные цепи описываются разностными уравнениями высоких порядков и часто целесообразно, используя замену переменных, перейти от разностного уравнения n- го порядка к n разностным уравнениям первого порядка. При этом удается воспользоваться векторно-матричной символикой и представить решение в компактном виде.

Наиболее универсальными методами аналитического решения разностных уравнений (РУ), справедливыми для уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, являются аналоги: метода вариации произвольных постоянных **(метод Лагранжа) и метода или формы Коши** в векторно-матричной постановке.

Идея метода Лагранжа заключается в том, что общее решение неоднородного разностного уравнения n- го порядка ищется в той же форме, что и однородного уравнения, только вместо констант используются неизвестные функции – варьируемые постоянные. Общее решение имеет вид линейной суперпозиции фундаментальных решений однородного уравнения. Коэффициентами линейной суперпозиции являются варьируемые постоянные – неизвестные функции. Для определения варьируемых постоянных используется алгоритм построения **разрешающей системы уравнений.** Суть алгоритма заключается в том, что при действии разностного оператора на решение общего вида, с целью подстановки в исходное уравнение, накладываются ограничения на рост порядка разности от неизвестных функций. Таких ограничений и, соответственно, уравнений получается $n-1$. Последнее уравнение определяющей системы получается в результате подстановки общего решения и его разностей с учетом наложенных ограничений в исходное разностное уравнение и сокращения фундаментальных решений однородных уравнений равных нулю.

Полученная в результате линейная, относительно разностей неизвестных функций, система алгебраических уравнений n- го порядка, вполне разрешима, так как коэффициенты этой системы совпадают с определителем Касорати, не равным нулю и построенным из фундаментальной системы независимых решений. Применяя, **обратный разностный оператор,** к разностям неизвестных функций, получаем общее решение исходного уравнения с **постоянными суммирования.** Отметим, что обратный разностный оператор раскрывается суммой функциональной последовательности. Наконец, воспользовавшись начальными условиями, формируем систему уравнений, решая которую определяем постоянные суммирования и, соответственно, частное решение исходного неоднородного разностного уравнения.

Идея метода Коши заключается в том, что, используя известные начальные условия, записывается решение системы разностных уравнений первого порядка в явном виде через степенную функцию матрицы коэффициентов системы и начальные значения. При этом необходимо предварительно решить проблему собственных значений и векторов.

Матричная формулировка метода Коши для дифференциальных и разностных уравнений позволяет представить решение в компактной векторно-матричной форме, а также воспользоваться для решения, анализа и вычислений современными математическими системами типа **MatLab, Maple-V, MathCad**, имеющими встроенное ядро символьной математики.

В заключение, в качестве приложения дискретных систем, рассмотрены вопросы цифровой фильтрации. Структура разностных уравнений увязана со структурой дискретных и цифровых систем. Приведены функциональные канонические схемы цифровых фильтров. Сформулированы основные подходы к синтезу и проектированию цифровых фильтров.

Эта часть введения, написанная в виде краткого реферата учебного пособия, позволит студенту, неоднократно возвращаясь к нему, по мере изучения дисциплины, самому оценить степень усвоения материала. Перечитывая этот реферат, студент по нашему мнению, сможет самостоятельно понять какой раздел следует перечитать еще раз.

В качестве краткого введения в содержание дисциплины рассмотрим некоторые моменты исследования характеристик простых цепей, опираясь на известный материал, и наметим круг вопросов подлежащих развитию и углублению.

Любая дисциплина включает круг базовых понятий и определений. Так в геометрии вводят понятия точки, линии, поверхности, фигуры и т.д. Алгебра оперирует с понятиями скаляра, вектора, матрицы, тензора и т.д. Математический анализ использует понятия числа, функции, предела, производной, дифференциала, интеграла и т.д.

Радиотехника и электроника включает различные технические направления, связанные с формированием, излучением, распространением, приемом, передачей, преобразованием и обработкой сигналов на фоне естественных и искусственных помех. При этом каждое направление использует серию специфических понятий и определений, позволяющих описать явления, процессы и функционирование устройств данной области. Остановимся кратко на основных понятиях систем передачи сигналов.

Под сигналом, в общем случае, понимают электрические процессы или колебания в радиотехнических цепях, устройствах и системах, обусловленные передаваемым сообщением либо исследуемым физическим процессом. Электрические процессы, обусловленные сторонними факторами, называют помехами или шумами.

Описание, как правило, ведется параллельно на физическом и математическом уровне с привлечением дополнительных физико-математических понятий и моделей. Набор устройств, для передачи, приема и обработки сигналов определенного назначения, называют системами, подчеркивая этим сложность объекта исследований. Отметим, что в радиотехнике, электронике и связи различают энергетический и информационный подходы к передаче и преобразованию сигналов.

Среду и/или совокупность устройств передачи сигнала называют трактом либо каналом передачи. Различают одно- и многоканальные системы. Элементы и узлы тракта, то есть устройства, реализующие определенные функции передачи и обработки сигналов математически описывают в виде математической модели - определенных систем уравнений – алгебраических, дифференциальных, разностных, интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных и т.д. При этом широко используется векторно-матричное представление систем уравнений описывающих одно и многоканальные устройства и системы. Кроме того, используется описание систем и устройств в виде принципиальных и функциональных схем, представляющих собой графические модели объектов исследований и позволяющих перейти к математическим моделям – системам уравнений. С позиций теории цепей, устройства и системы описываются в виде соединений четырехполюсников, проходных многополюсников и многополюсников общего вида.

Входные воздействия и выходные реакции описываются при этом в векторной форме, а сами устройства матрицами, то есть коэффициентами систем уравнений в той или иной системе параметров.

Источники сигналов и помех описываются, обычно генераторами напряжения либо тока, как детерминированные и, соответственно, случайные функции времени. В частотной области генераторы описываются спектрами либо спектральными плотностями. Совокупность сигналов либо помех в различных точках системы либо на входе или выходе многоканальных систем описываются детерминированными либо случайными векторами, либо корреляционными или спектральными матрицами.

Поведение или реакцию систем и устройств на определенные входные воздействия принято описывать с помощью ряда характеристик. В литературе наряду с термином характеристика используется термин функция, поэтому в данном пособии эти термины используются как равноценные (синонимы).

Системы, реакция которых на совокупность воздействий, равна сумме реакций на каждое воздействие, называются линейными, иначе нелинейными. Наиболее просто описываются линейные системы, так как при этом в полной мере применим векторно-матричный аппарат линейной алгебры. Говорят, что для линейных систем, справедлив **принцип суперпозиции,** то есть, реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на составляющие.

Для начального ознакомления с математическим описанием систем и устройств радиотехники, электроники и связи достаточно рассмотреть именно линейные системы. С точки зрения математического описания линейные системы характеризуются тем, что коэффициенты систем уравнений линейно зависят от независимых переменных. Частным случаем линейных систем являются системы с постоянными параметрами, при этом коэффициенты соответствующих уравнений являются константами. Основными переменными при описании радиотехнических систем и устройств являются напряжения, токи, мощности, падающие и отраженные волны и т.д. В качестве независимых переменных обычно используют время либо частоту.

Различают **непрерывные (аналоговые) и дискретные или цифровые линейные системы.** Иногда, для классификации систем используют термины стационарные и нестационарные, подчеркивая статистическую особенность поведения сигналов и систем во времени.

Непрерывные системы отличаются тем, что их реакция на входное воздействие непрерывна во времени. Дискретные системы реагируют на входное воздействие в определенные дискретные моменты времени. Временной интервал между дискретными отсчетами сигнала называется периодом последовательности. Непрерывные (аналоговые) сигналы представляют собой непрерывные функции времени. Сигналы дискретных систем принято описывать дискретными или решетчатыми функциями времени. Простейшими преобразователями непрерывного сигнала в дискретный является модулятор или стробирующее устройство на основе электронных ключей. Дискретный сигнал, чаще всего представляет собой периодическую последовательность мгновенных импульсов с амплитудой пропорциональной мгновенной амплитуде входного сигнала **(АИМ)** либо последовательность единичных импульсов длительностью (шириной), пропорциональной мгновенной амплитуде входного сигнала **(ШИМ).** Встречаются и другие способы представления дискретных сигналов, например, время - импульсное представление дискретного сигнала **(ВИМ)** предполагает задержку очередного единичного импульса на время пропорциональное мгновенному значению амплитуды непрерывного сигнала.

Цифровое представление сигнала (ЦС) подразумевает преобразование мгновенного значения непрерывного сигнала в последовательность двоичных кодов определенной разрядности. Естественно, что при этом период следования кодовой последовательности сокращается пропорционально используемой разрядности двоичного представления. Для преобразования непрерывных сигналов в цифровые и наоборот используются аналого-цифровые преобразователи **(АЦП)** и цифро-аналоговые преобразователи **(ЦАП).** Аналого-цифровые преобразователи производят периодическое амплитудное квантование и представление дискретных отсчетов непрерывного сигнала двоичной последовательностью единичных импульсов. Рассматриваемое нами описание дискретных систем подразумевает последовательность мгновенных импульсов с постоянным периодом следования, то есть АИМ сигналы и цифровые сигналы (ЦС). Другие формы представления дискретных сигналов и систем используют несколько иное математическое описание.

Основными характеристиками (функциями) линейных устройств и систем в частотном и временном представлениях, являются соответственно - **передаточные, частотные, переходные и импульсные характеристики, как реакции на специфические входные воздействия.** Знание этих характеристик позволяет провести сравнительный анализ различных систем и оценить их предельные возможности по обработке реальных сигналов. Реакция на произвольное входное воздействие или реальный сигнал может быть определена через переходные или импульсные характеристики, например, с использованием интеграла Дюамеля.

В качестве реакций систем будем рассматривать любой электрический параметр состояния системы в виде напряжений, токов, их отношений и т.д. Реакция системы существенно зависит от ее начального (исходного) состояния. При определении передаточных, частотных и временных характеристик всегда будем подразумевать **исходное состояние покоя.**

Под состоянием покоя понимается полное установление реакции на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников возмущений. Для пассивных цепей и устройств состояние покоя, как правило, соответствует нулевым начальным условиям, однако для цепей типа дифференцирующих (форсирующих) и активных устройств, содержащих цепи питания, начальные условия могут быть отличными от нуля. Истинные начальные условия нулевые либо отличные от нуля учитываются при интегрировании дифференциальных уравнений или решении разностных уравнений.

Начальные условия соответствуют значению выходной переменной и ее производных (или разностей), как функций независимой переменной, например, времени, при значении независимой переменной равной нулю.

Непрерывные (аналоговые) системы. Рассмотрим основные характеристики аналоговых систем в частотной и временной областях - передаточную, частотную, переходную и импульсную функции. Реакции аналоговых систем на входное воздействие непрерывны во времени.

Передаточная характеристика определяется обычно как отношение изображения выходной реакции системы к изображению входного воздействия и описывается дробно-рациональной функцией комплексной переменной $p = \sigma + j \cdot \omega$

$$K(p) = \frac{V_{out}(p)}{E(p)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k},$$

где $m \leq n$ - показатели степени полиномов числителя и знаменателя. Данное определение передаточной характеристики линейных и нелинейных систем является общим, и не подчеркивает характер воздействия, состояния системы и особенности выходной реакции.

Кроме передаточной характеристики удобно ввести производное понятие, **передаточного соотношения**, выражающего изображение, какой либо переменной состояния системы, например, напряжения или тока.

При замене в передаточной характеристике или соотношении переменной p, как оператора Лапласа, на $j \cdot \omega$ получаем соответственно **комплексную частотную характеристику (ЧХ)** системы. Частотные зависимости модуля и аргумента комплексной ЧХ называются, соответственно, **амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками системы**.

Частотная характеристика линейной аналоговой системы может быть определена по установившейся реакции системы, находящейся в состоянии покоя, на единичное гармоническое воздействие определенной частоты. При этом установившееся значение амплитуды реакции соответствует точке АЧХ, а временной сдвиг реакции относительно воздействия соответствует точке ФЧХ. Данное определение частотной характеристики является на наш взгляд конструктивным и устанавливает взаимосвязь частотного описания с реакцией во времени на гармоническое воздействие. Таким образом, собственно и производится измерение АЧХ и ФЧХ реальных аналоговых устройств.

Частотная характеристика определяет условия прохождения спектральных составляющих сложного сигнала, причем АЧХ определяет зависимость амплитуды реакции от частоты, а ФЧХ определяет зависимость фазового сдвига реакции от частоты. По форме различают АЧХ типа: фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосно-пропускающего фильтра (ППФ) и полосно-заграждающего фильтра (ПЗФ). Кроме того, используется **понятие граничной частоты или частоты среза**, на которой спад АЧХ достигает заданной величины, обычно $-3\,dB$.

Переходной характеристикой (функцией) линейной аналоговой системы, находящейся в состоянии покоя, называется ее реакция на единичный скачок (функцию Хевисайда). Функция Хевисайда относится к классу так называемых обобщенных функций и определяется следующим образом

$$1(t-t_0)=\begin{cases} 0 \ \ при \ \ t<t_0 \\ не \ \ определена \ \ при \ \ t=t_0 \\ 1 \ \ при \ \ t>t_0 \end{cases}$$

или

$$1(t-t_0)=\begin{cases} 0 \ \ при \ \ t<t_0 \\ 1 \ \ при \ \ t>t_0 \end{cases}.$$

Чаще всего начальный отсчет t_0 полагают равным нулю. Согласно преобразованию Лапласа, либо операторной алгебры, изображение функции Хевисайда равно $1(t)\Leftrightarrow 1/p$, где $p=j\cdot\omega\Leftrightarrow d/dt$ - оператор Лапласа в области изображений, который при нулевых начальных условиях в области оригиналов соответствует оператору дифференцирования.

Основным параметром переходной характеристики является **время нарастания,** равное времени изменения амплитуды реакции от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения. Время нарастания позволяет сравнить быстродействие реакций цепей на сигналы с резкими перепадами уровней.

Импульсная характеристика (функция) линейной аналоговой системы определяется как ее реакция на δ-импульс (функцию Дирака или δ-функцию) при исходном состоянии покоя. Функция Дирака определена как

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} \infty \ \ при \ \ t=t_0 \\ 0 \ \ при \ \ t\neq t_0 \end{cases}$$

или другое определение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\delta(t-t_0)\,dt=1,$$

где ε- окрестность аргумента t_0, обычно полагаемого равным нулю. Функция Дирака относится к классу обобщенных функций и, согласно операторной алгебре, ее изображение равно $\delta(t)\Leftrightarrow 1$. Функция Дирака является производной от функции Хевисайда

$$\frac{d(1(t))}{dt}=\delta(0).$$

Отметим, что в данном пособии, из соображений краткости аналитических выражений используется запись δ - функции в виде $\delta(0)$ вместо $\delta(t-0)=\delta(t)$.

Тот факт, что изображение δ- функции равно единице приводит к тому, что изображение выходной реакции на δ- функцию совпадает с передаточной характеристикой и, соответственно, **импульсная характеристика является обратным преобразованием Лапласа передаточной характеристики.**

Импульсная характеристика определяет способность цепей передавать мгновенные импульсные составляющие входного сигнала.

Ограничившись столь кратким описанием анализа основных характеристик аналоговых цепей, перейдем к анализу основных характеристик дискретных и цифровых цепей, рассмотрев основные понятия и элементы методики исследования.

Дискретные и цифровые системы. Наряду с непрерывными системами большое распространение получили дискретные и цифровые схемы, устройства и системы, реагирующие на входное воздействие в определенные дискретные моменты времени. В связи с этим входные воздействия дискретных систем принято описывать последовательностью мгновенных по длительности импульсов. На практике мгновенными или δ- импульсами являются импульсы, длительность которых много меньше постоянной времени цепи.

Дискретные импульсные последовательности получаются из непрерывного сигнала путем стробирования непрерывного сигнала, а цифровые последовательности путем квантования дискретного отсчета по уровню и представления его двоичной последовательностью импульсов единичной амплитуды. Для упрощения анализа рассматривают δ- импульсные последовательности с постоянным периодом следования T.

Период цифровой последовательности двоичных импульсов определяется разрядностью двоичного кода r

$$T_p = T / r .$$

С математической точки зрения последовательности мгновенных или δ- импульсов соответствуют дискретным или решетчатым функциям времени $x(kT) = x(k) = x_k$.

Системная (передаточная) функция дискретных и цифровых систем, как и непрерывных, определяется отношением изображения выходной реакции к изображению входного воздействия и при использовании Z- преобразования является дробно-рациональной функцией комплексной переменной или оператора z

$$S(z) = \frac{V_{out}(z)}{E(z)} = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k \cdot z^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k},$$

где $m \le n$ - показатели степени числителя и знаменателя.

При замене комплексной переменной z на $e^{j \cdot \omega \cdot T}$ получаем соответственно **комплексную частотную характеристику (ЧХ)** дискретной или цифровой системы. Частотные зависимости модуля и аргумента комплексной ЧХ называются **амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ)** характеристиками дискретных или цифровых систем. Заметим, что $e^{j \cdot \omega \cdot T}$ является периодической функцией частоты, в силу этого, частотная характеристика дискретных и цифровых устройств также будет периодической функцией частоты.

Частотная характеристика линейной дискретной системы может быть определена по установившейся реакции системы, находящейся в состоянии покоя, на единичное дискретное гармоническое воздействие определенной частоты. При этом установившееся значение амплитуды реакции соответствует точке АЧХ, а временной сдвиг реакции относительно воздействия соответствует точке ФЧХ. Данное определение частотной характеристики является на наш взгляд конструктивным и устанавливает взаимосвязь частотного описания с реакцией во времени на дискретное гармоническое воздействие. В соответствии с данным определением, собственно и производится измерение АЧХ и ФЧХ реальных дискретных и цифровых устройств.

Переходной характеристикой (функцией) линейной дискретной системы, находящейся в состоянии покоя, называется ее реакция на последовательность единичных δ- импульсов. Последовательность единичных δ- импульсов относится к классу решетчатых функций и определяется следующим образом

$$1_n = \{1_0,\, 1_1,\, 1_2,\, \cdots,\, 1_k\} = \{1_k\},$$

где $k = 0,\, 1,\, \cdots,\, \infty$ номер дискрета или отсчета. При отрицательных значениях k амплитуда импульсов последовательности равна нулю. Согласно Z- преобразования, изображение последовательности единичных δ- импульсов равно $1_n = \{1_k\} \Leftrightarrow z/(z-1)$, где $z \Leftrightarrow E$ оператор в области изображений, который при нулевых начальных условиях в области оригиналов соответствует оператору сдвига последовательности на период следования.

Импульсная характеристика (функция) линейной дискретной системы, находящейся в состоянии покоя, определяется как ее реакция на одиночный единичный δ- импульс. Одиночный единичный δ- импульс определяется как последовательность вида

$$1_0 = \{\cdots,\, 0_{-1}\, ,1_0\, ,\, 0_1\, ,\, \cdots\}.$$

Одиночный единичный δ- импульс относится к классу решетчатых функций и, согласно Z- преобразования, его изображение равно $1_0 \Leftrightarrow 1$.

Заметим, что по определению импульсная характеристика определена лишь при $k \geq 1$.

Таким образом, нами кратко обозначен круг вопросов рассматриваемых в данной дисциплине. Естественно, что здесь мы совершенно не касались теоретических вопросов обоснования методов решений, правда, предполагали знакомство с преобразованием Лапласа, Z- преобразованием и элементами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной целью раздела являлось введение базовых понятий и определений, математическая постановка задач исследования основных характеристик с привлечением известного математического аппарата.

Формулировка целей и задач учебного пособия. Прежде чем перейти к исследованию основных характеристик схемных решений целесообразно развить методику исследования, предварительно рассмотрев ряд теоретических вопросов.

Применительно к исследованию характеристик аналоговых устройств, следует остановиться на формальных методах формирования математической модели цепи в частотном представлении или области изображений, с целью получения передаточных и частотных характеристик произвольных схемных решений.

В связи с этим следует обратиться, например, к методу узловых потенциалов и элементам теории многополюсников. Элементы операционного исчисления следует корректно распространить на дробно-рациональные выражения произвольного вида, используя формальный аппарат операторной алгебры.

Целесообразно подробно остановиться на аналитических методах интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, как альтернативы операторного метода. Предпочтение здесь следует отдать методам интегрирования применимым к обыкновенным дифференциальным уравнениям, как с постоянными, так и переменными коэффициентами. Следует акцентировать внимание на особенностях интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка и эквивалентных им систем дифференциальных уравнений первого порядка, привлекая понятие функции от матричного аргумента.

Введение понятия аналитических функций от матриц требует рассмотрения проблемы собственных векторов и собственных значений, а также сопутствующих вопросов линейной алгебры.

Применительно к аналитическим исследованиям дискретных и цифровых систем, необходимо рассмотреть дискретные функции времени, исчисление конечных разностей и элементы теории Z- преобразований, как разновидности операторного метода.

По аналогии с дифференциальными уравнениями для аналоговых цепей, дискретные системы описываются во временной области разностными уравнениями. В связи с этим, как альтернативу операторного метода, целесообразно рассмотреть теорию и аналитические методы решения разностных уравнений высокого порядка и эквивалентных им систем разностных уравнений первого порядка. Следует обратить особое внимание на аналогию методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и методов решения разностных уравнений.

Все предлагаемые методы исследования характеристик аналоговых и дискретных систем: передаточных (системных), частотных и временных характеристик, должны рассматриваться на предмет получения результата не только в аналитической, но и в численной и графической форме.

Исследование предполагает привлечение современных компьютерных технологий и, в частности, знакомство с современными пакетами для инженерных и научных расчетов типа **MathCad, MatLab, Maple V.**

Таким образом, целью основного материала учебного пособия является детализация, развитие и углубление базовых понятий, связанных с усложнением прикладных задач, обоснование привлекаемого математического аппарата и методики аналитического и численного исследования непрерывных и дискретных систем передачи и обработки сигналов.

1 ОПИСАНИЕ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ В РАДИОТЕХНИКЕ

1.1 Общие сведения о радиотехнических сигналах

Электрические процессы в радиотехнических устройствах и системах связанные с излучением, передачей, приемом и обработкой информации называют электрическими сигналами. С математической точки зрения радиотехнический сигнал представляет собой функцию времени $x(t)$. С физической точки зрения сигнал это изменение мгновенных значений напряжения, тока или заряда на входе, выходе или внутренней точке устройства или системы. На схеме цепи или устройства источник сигнала отображается независимым источником напряжения либо тока. При этом значения напряжения либо тока являются функциями времени.

В радиотехнике и электронике используют разнообразные электрические сигналы, и описание их функциями времени соответствует математическому моделированию реальных сигналов с той или иной степенью приближения. Информационными параметрами радиотехнических сигналов могут быть: амплитуда, частота, фаза, задержка по времени и поляризация.

В зависимости от поведения во времени, сигналы можно условно разделить на аналоговые (непрерывные) и дискретные (импульсные). Аналоговым является сигнал, основной информационный параметр которого является непрерывной функцией времени, включая конечное число точек разрыва. Для дискретного сигнала характерно прерывистое (скачкообразное) изменение основного параметра в определенные моменты времени. Распространенной разновидностью дискретного сигнала является цифровой сигнал. Цифровой сигнал образуется из непрерывного сигнала дискретизацией по времени, квантованием полученных отсчетов по уровню и представлением уровней двоичной последовательностью импульсов определенной разрядности.

С другой стороны все сигналы делятся на детерминированные и случайные сигналы. У детерминированных сигналов основной параметр однозначно предсказуем в любой момент времени, в соответствии с функциональным представлением, поэтому, строго говоря, детерминированные сигналы не несут информации и используются в основном при тестировании работоспособности устройств и систем. Случайными называются сигналы, основной параметр которых является случайной функцией времени. Для описания случайных сигналов используется случайные функции времени с определенным законом распределения вероятности значения информационного параметра.

Различают простые и сложные сигналы. К простым сигналам можно отнести тестовые воздействия типа гармонического, единичного скачка, δ-импульса, гармонической последовательности δ- импульсов, последовательности единичных δ- импульсов и одиночного единичного δ-

импульса, используемые при исследовании основных характеристик цепей, непрерывных и дискретных устройств и систем. К сложным сигналам - относятся сигналы с нетривиальным характером изменения параметров во времени, например, модулированные колебания.

В радиотехнике для описания сигналов сложных по структуре систем, например, многоканальных систем, наряду со скалярным представлением сигналов используют и векторное представление. Векторный сигнал соответствует совокупности скалярных сигналов представленных в математическом отношении в векторной форме, с целью упрощения математического описания, с точки зрения многомерных пространств сигналов.

В зависимости от приложений используются аналитическое (алгебраическое) либо геометрическое представления сигналов, которые различаются удобством интерпретации процесса преобразования и обработки сигналов в системах различного назначения.

С точки зрения частотной интерпретации передачи и преобразования сигналов системами, наряду с временным представлением, используется и спектральное представление, основанное на преобразовании Фурье соответствующих временных электрических процессов набором спектральных составляющих. Спектральное представление удобно при описании полосно-пропускающих и нелинейных устройств, с точки зрения прохождения основных и порождения новых спектральных составляющих. Спектральное (частотное) представление, в ряде случаев является основным и удачно дополняет временное описание сигналов.

При решении рассматриваемых в данной дисциплине задач мы будем пользоваться временным и спектральным представлением тестовых детерминированных сигналов независимыми источниками напряжения или тока, в виде непрерывных и дискретных функций времени или функций частоты.

1.2 Радиотехнические цепи, устройства и системы

Описание устройств и систем радиотехники и электроники ведется, как правило, на уровне принципиальных схем с использованием теории электрических цепей, либо на уровне функциональных (структурных) схем.

Принципиальная схема представляет собой по существу графическую модель устройства или системы в виде соединения изображений базовых элементов в электрическую цепь. В связи с этим понятия цепь и схема часто используются как синонимы.

К базовым элементам электрических цепей (схем) относят в частности такие идеализированные элементы как: независимые и управляемые источники напряжения и тока, резисторы, катушки индуктивностей, конденсаторы, трансформаторы и т.д. Кроме базовых элементов радиотехнические цепи могут содержать и более сложные элементы (приборы): диоды, полевые и биполярные транзисторы, операционные усилители, аналоговые и цифровые микросхемы и т.д. Сложные элементы, в свою очередь, при необходимости также моделируются эквивалентными схемами или схемами замещения.

Эквивалентные схемы строятся, как правило, на основе представлений о протекающих физических процессах, из набора базовых элементов и призваны, на электрическом уровне, отображать частотные, временные, шумовые, температурные и иные свойства сложных элементов с той или иной степенью точности.

Электрические цепи представляют, таким образом, электрическую модель реального устройства или системы. Имея принципиальную схему устройства или системы в виде электрической цепи можно, используя тот или иной метод, сформировать математическую модель в виде систем алгебраических, дифференциальных, разностных и других уравнений.

Функциональные схемы представляют собой графическое отображение соединения функциональных звеньев (блоков), соответствующих основным операциям преобразования или обработки сигнала. Наличие функциональной схемы позволяет, как правило, непосредственно записать передаточную (системную) функцию, либо, соответственно, дифференциальное уравнение непрерывной системы либо разностное уравнение дискретной системы.

Электрические цепи (схемы), как модели реальных устройств несут информацию о типах элементов (компонент) и об их соединении. С математической точки зрения это соответствует описанию цепи совокупностью компонентных и топологических уравнений.

Компонентные уравнения отображают взаимосвязь напряжений и токов на зажимах элементов. Примерами компонентных уравнений являются соотношения для элементов RLC- типа

$$v = R \cdot i; \quad v = L \cdot di/dt; \quad i = C \cdot dv/dt.$$

Уместно отметить, что компонентные уравнения, так называемых реактивных элементов L- и C- типа, связывают одну переменную с производной другой переменной и призваны отображать инерционные свойства цепей.

Топологические уравнения отображают взаимосвязь элементов в схеме без указания их типа. Топологические уравнения соответствуют в частности законам Кирхгофа для токов и напряжений.

Закон Кирхгофа для токов, как известно, гласит, что алгебраическая сумма токов в узле и любом сечении цепи равна нулю.

Закон Кирхгофа для напряжений утверждает, что сумма ЭДС и напряжений по любому замкнутому контуру цепи равна нулю.

Для записи топологических уравнений, соответствующих закону Кирхгофа, удобно привлечь элементы теории графов.

1.3 Элементы теории графов

Согласно этой теории, ветви электрической цепи представляются направленными отрезками линий указывающих направление протекающего тока, соответственно **вся цепь представляется совокупностью связанных отрезков линий, то есть графом.** Число ветвей схемы обозначим через n_b. Общее число узлов схемы обозначим через n, тогда выделяя один из узлов, относительно которого измеряются потенциалы остальных узлов, получаем число независимых узлов $n_u = n-1$.

Место соединения двух и более отрезков (ветвей**) называется вершиной или узлом графа.** Замкнутый путь на **графе называется контуром.** Линия, разделяющая граф на две части **называется сечением.**

Направление ветвей графа удобно выбирать следующим образом: ветви источников тока направляют в соответствии с направлением протекающего тока; ветвям источников напряжений задают направление противоположное ЭДС; направление остальных ветвей выбирается произвольно.

Относительно токов узлов поступают следующим образом: ток, вытекающий из узла, определяется как положительный, а ток, втекающий в узел, считается отрицательным.

Основополагающим понятием графа является его дерево. **Деревом графа называется** связанный подграф графа, касающийся всех вершин и не образующий ни одного замкнутого контура. Ветви, не вошедшие в дерево графа, **образуют дополнение дерева** до полного графа.

Ветви дерева графа называются **ребрами.** Ветви дополнения графа называются **хордами.**

Основной смысл введения понятия дерева заключается в том, что число ребер n_p соответствует числу независимых узлов n_u, а число хорд n_x соответствует числу независимых контуров n_k. Поочередное введение хорд, в соответствии с определением дерева, приводит к появлению очередного контура, что позволяет реализовать автоматический выбор независимых контуров. Таким образом, общее число ветвей схемы равно $n_b = n_p + n_x = n_u + n_k$.

В связи с использованием понятия дерева удобно ввести понятия главных сечений и главных контуров. **Главным сечением** называется сечение, проходящее через одно ребро и произвольное число хорд, направление сечения определяется направлением ребра. **Главным контуром** называется контур образованный одной хордой и произвольным числом ребер, направление главного контура определяется направлением хорды.

При использовании графа с выделенным деревом нумерацию ветвей целесообразно производить следующим образом, вначале нумеруются ребра, а затем хорды. В этом случае номер главного сечения определяется номером ребра $N_c = n_p$, а номер контура N_k определяется номером хорды N_x, в соответствии с формулой $N_k = N_x - n_p$.

На графе может быть построено несколько деревьев и существует соотношение, описывающее число возможных деревьев. На практике, однако, используют так называемые **правильные деревья**, когда ветви графа нумеруются в соответствии с приоритетом типов ветвей. Тем самым создаются условия, при которых определенные ветви имеют преимущество попасть в дерево графа. Ветви с более низким приоритетом попадают в дополнение дерева графа.

На рисунке 1.1 приведем цепь и граф цепи с выделенным деревом, главными сечениями и контурами

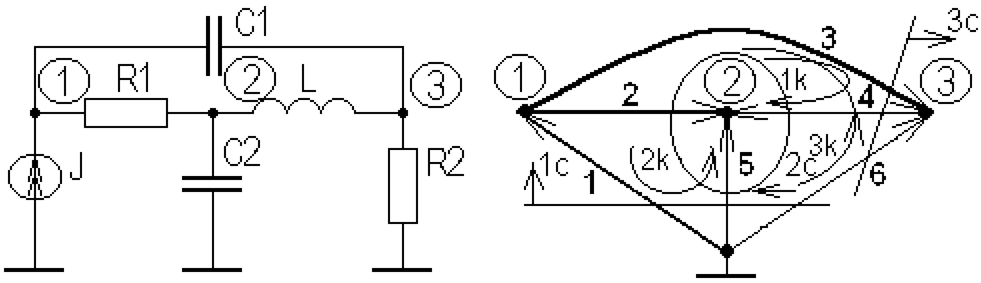

Рисунок 1.1 - Цепь и граф цепи с выделенным деревом, главными сечениями и контурами

Ветви, образующие дерево графа, выделены «жирными» линиями. Нумерация главных сечений отмечена номером и символом c, а – главных контуров номером и символом k.

Теория графов, позволяет записать топологические уравнения, то есть законы Кирхгофа в аналитическом виде, используя топологические матрицы: инциденций, сечений и контуров.

Матрица инциденций. Для схемы изображенной на рисунке 1.1, запишем суммы токов узлов, в соответствии с законом Кирхгофа для токов

$$1u: -i_1 + i_2 + i_3 = 0;$$

$$2u: -i_2 - i_4 - i_5 = 0;$$

$$3u: -i_3 + i_4 - i_6 = 0.$$

Переписывая эту систему в матричном виде

$$A \cdot I_b = 0$$

приходим к матрице инциденций

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1b & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \end{array} \\ A = \begin{array}{c} 1u \\ 2u \\ 3u \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{array}$$

записанной в координатах узлы – ветви. Соответствующая строка матрицы инциденций указывает, какие ветви и как соединены с данным узлом. Столбцы матрицы инциденций показывают, к каким узлам и как присоединена данная ветвь. Поскольку двухполюсная ветвь соединяется с двумя узлами, в любом столбце матрицы инциденций содержится не более двух отличных от нуля элементов.

Используя матрицу инциденций, можно выразить напряжения ветвей V_b через потенциалы узлов V_n

$$V_b = A^t \cdot V_n .$$

Отметим, что матрица инциденций может быть легко сформирована на основании массива описания ветвей схемы. При реализации алгоритма формирования предполагается, что порядок перечисления узлов подключения двухполюсного элемента задает направление ветви графа.

Матрица сечений. Запишем соотношения для токов сечений графа схемы изображенной на рисунке 1.1, в соответствии с законом Кирхгофа для токов

$$1c: i_1 + i_5 + i_6 = 0;$$

$$2c: i_2 + i_4 + i_5 = 0;$$

$$3c: i_3 - i_4 + i_6 = 0.$$

Матричная запись этой системы уравнений

$$Q \cdot I_b = 0$$

приводит к матрице сечений, в данном случае главных сечений

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1c \\ 2c \\ 3c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1b & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

записанной в координатах сечения – ветви. Строки матрицы сечений указывают, какие ветви и как проходят через соответствующее сечение. Столбцы матрицы сечений показывают, какие сечения и как пересекает данная ветвь. Заметим, что матрица главных сечений всегда имеет следующую структуру

$$Q = \begin{bmatrix} Q_p & Q_x \end{bmatrix} = 1 \quad Q_x \ ,$$

то есть блок Q_p, соответствующий ребрам, является единичной подматрицей.

По аналогии с матрицей инциденций, используя матрицу сечений, можно выразить напряжения ветвей V_b через напряжения ребер V_p

$$V_b = Q^t \cdot V_p .$$

Из этого соотношения следует, что напряжения ребер являются независимыми величинами.

Матрица контуров. Запишем соотношения для падения напряжений на ветвях образующих контура, по закону Кирхгофа для ЭДС, согласно, схемы и графа, изображенных на рисунке 1.1

$$1k: -v_2 + v_3 + v_4 = 0;$$

$$2k: -v_1 - v_2 + v_5 = 0;$$

$$3k: -v_1 - v_3 + v_6 = 0.$$

Матричная запись этой системы уравнений

$$B \cdot V_b = 0$$

приводит к матрице контуров, в данном случае главных контуров

$$B = \begin{array}{c} \\ 1k \\ 2k \\ 3k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1b & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

записанной в координатах контуры – ветви. Строки матрицы контуров указывают, какие ветви и как входят в соответствующий контур. Столбцы матрицы контуров показывают, в какие контура и как входит данная ветвь. Отметим, что матрица главных контуров всегда имеет следующую структуру

$$B = \begin{bmatrix} B_p & B_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_p & 1 \end{bmatrix},$$

то есть блок B_x, соответствующий хордам, является единичной подматрицей.

Транспонированная матрица контуров связывает токи ветвей I_b с контурными токами I_k или токами хорд I_x

$$I_b = B^t \cdot I_k = B^t \cdot I_x.$$

Данное соотношение показывает, что токи хорд являются независимыми величинами.

Соотношение ортогональности. Матрицы сечений и контуров, построенные на одном и том же дереве, удовлетворяют так называемому соотношению ортогональности

$$Q \cdot B^t = B \cdot Q^t = 0.$$

Доказательство этих соотношений производится следующим образом. Распишем первое из соотношений, с учетом приведенных выше выражений

$$Q \cdot I_b = 0 = Q \cdot B^t \cdot I_x = 0.$$

В связи с тем, что в общем случае $I_x \neq 0$, приходим к выводу $Q \cdot B^t = 0$. Второе соотношение доказывается аналогично.

Приоритет ветвей. Исходя из полученных выше соотношений, напряжения ребер и токи хорд являются независимыми величинами. В связи с этим необходимо предусмотреть, чтобы ветви источников напряжений попали в дерево, а ветви источников токов попали в его дополнение. Кроме того, напряжения на индуктивностях определяются производной протекающего тока, а токи конденсаторов определяются производной потенциала, поэтому необходимо, чтобы емкостные ветви попали в дерево, а индуктивные ветви в его дополнение.

Для обеспечения заданных условий и, предполагая, что первые ветви имеют преимущество попасть в дерево при его автоматическом построении, вводят приоритет нумерации ветвей. Нумерацию всех ветвей ведут по типам ветвей, располагая их в списке следующим образом:

1) независимые источники напряжений E;
2) управляемые источники напряжений V_y;
3) конденсаторы C;
4) резисторы R;
5) катушки индуктивностей и трансформаторы $L,\ M$;
6) управляемые источники токов I_y;
7) независимые источники токов J.

Отметим, что порядок перечисления узлов подключения элементов при описании схемы, автоматически задает направление линий графа, что позволяет легко построить матрицу инциденций. Топологические матрицы сечений и контуров сформировать гораздо труднее. Чаще всего путем преобразования матрицы инциденций формируют матрицу главных сечений, а при необходимости, используя соотношение ортогональности, находят матрицу главных контуров**.**

Алгоритм формирования матрицы главных сечений основан на приведении прямоугольной матрицы A инциденций к каноническому виду $1\ \ A_x$ путем элементарных операций над строками и столбцами. По существу алгоритм представляет собой целочисленный вариант алгоритма Гаусса. Единичная подматрица, полученная в результате преобразования, соответствует блоку $Q_p = 1$, а другая часть преобразованной матрицы инциденций A_x, соответствует блоку Q_x.

Наряду с этим алгоритмом часто используют достаточно простой алгоритм выделения дерева, то есть из упорядоченного по приоритету списка ветвей схемы выделяют набор ветвей, который был бы инцидентен всем узлам и не образовывал ни одного замкнутого контура.

Алгоритм выделения дерева. Простейший алгоритм выделения дерева, на основании упорядоченного по приоритетам списка ветвей схемы, реализуется следующим образом:

1) производится анализ узлов подключения ветви в схему на предмет отнесения к ребрам при условии, что хотя бы один из узлов ранее не встречался в списке;
2) если условие отнесения к ребрам не выполняется, запись данной ветви перемещается в конец, соответствующей группы ветвей и переходят к анализу следующей ветви;
3) алгоритм завершается при условии, выбора числа ветвей равного числу независимых узлов схемы.

Таким образом, данный алгоритм выделяет n_u ветвей образующих дерево графа, остальные ветви образуют его дополнение.

Топологические матрицы позволяют не только записать законы Кирхгофа в математической форме, но и обосновать методы анализа и расчета электрических цепей. В полной мере приведенные фрагменты топологического описания цепей, в частности матрицы сечений и контуров используются в широко известном методе переменных состояния, позволяющем формировать математическую модель произвольной цепи в наиболее компактном виде. В последнее время, однако, предпочтение отдается прямым методам формирования математических моделей цепей в частотной и временной областях. Математическая модель в этом случае имеет более высокую размерность, но использование современных методов решения систем уравнений с учетом разреженности позволяет преодолеть этот недостаток.

Для нашей цели расчета передаточных характеристик электронных схем, достаточно использования, в качестве метода формирования математической модели, классического метода узловых потенциалов. В связи с этим, остановимся подробнее на обосновании метода узловых потенциалов.

1.4 Топологическое обоснование метода узловых потенциалов

Как известно, метод узловых потенциалов основан на записи уравнений цепи для токов узлов. Все ветви при этом описываются проводимостями и источниками тока. Ветви источников напряжений недопустимы и должны быть предварительно преобразованы в источники тока с использованием, например, соотношений Тевенина-Нортона. Некоторые ветви, типа идеальных трансформаторов, не представимые через проводимости, вообще не допустимы, что является серьезным ограничением метода узловых потенциалов. Правда, элементы, не описываемые проводимостями, можно использовать в узловом методе, заменяя их соответствующими электрическими моделями (эквивалентными моделями). Обоснование метода узловых потенциалов основано на использовании закона Кирхгофа для токов и, соответственно, матрицы инциденций.

Математическая модель цепи, сформированная по методу узловых потенциалов, связывает узловые токи I_n и узловые напряжения V_n через узловую матрицу проводимостей Y

$$Y_n \cdot V_n = Y \cdot V_n = I_n .$$

Как видим, запись этой системы уравнений является обобщением закона Ома для отдельной ветви на схему в целом. В связи с этим, представляет интерес подробное обоснование метода узловых потенциалов.

Как уже упоминалось, любой метод формирования математической модели цепи соединяет в себе компонентные и топологические уравнения.

Компонентные уравнения электрической цепи, применительно к узловому методу, записываются в виде несвязанных уравнений ветвей по закону Ома

$$Y_b \cdot V_b = I_b,$$

где Y_b- диагональная или блочно-диагональная матрица проводимостей ветвей схемы.

Электрическая цепь, как таковая, содержит в общем случае и ветви независимых источников тока J_b. Запись топологических уравнений по закону Кирхгофа содержащих независимые источники тока при использовании дополненной матрицы инциденций имеет вид

$$A_d \cdot I_d = \begin{bmatrix} A & A_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ J_b \end{bmatrix} = 0.$$

Из этого соотношения следует

$$A \cdot I_b = -A_J \cdot J_b = I_n,$$

где I_n- узловые токи. Далее, подставляя выражение для токов ветвей, получаем

$$A \cdot I_b = A \cdot Y_b \cdot V_b = I_n.$$

Наконец, выражая напряжения ветвей через узловые напряжения, получаем

$$A \cdot Y_b \cdot V_b = A \cdot Y_b \cdot A^t \cdot V_n = Y_n \cdot V_n = I_n.$$

Таким образом, узловая матрица проводимостей формируется из блочно-диагональной матрицы проводимостей ветвей в соответствии с выражением

$$Y_n = A \cdot Y_b \cdot A^t,$$

а вектор узловых токов формируется из токов независимых источников следующим образом

$$I_n = -A_J \cdot J_b.$$

Для уточнения отдельных моментов обоснования узлового метода рассмотрим пример формирования узловой системы уравнений для схемы изображенной на рисунке 1.2.

Система компонентных уравнений ветвей схемы, исключая независимые источники тока, имеет вид

$$Y_b \cdot V_b = I_b = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega C & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{b1} \\ v_{b2} \\ v_{b3} \\ v_{b4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \\ i_{b4} \end{bmatrix}.$$

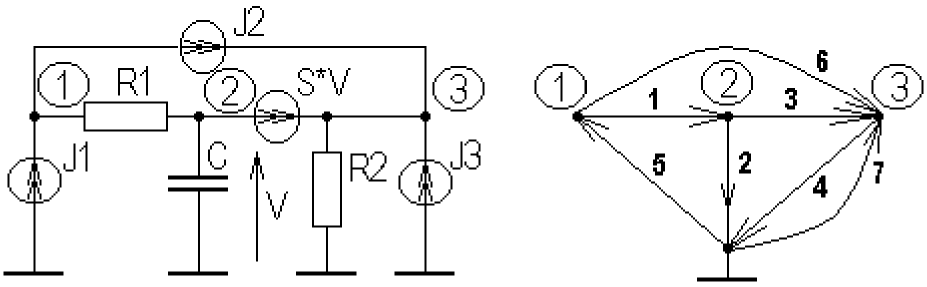

Рисунок 1.2 - Активная цепь и граф цепи с набором независимых источников тока

Расширенная матрица инциденций схемы с набором независимых источников тока имеет вид

$$A_d = \begin{bmatrix} A & A_J \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1u \\ 2u \\ 3u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1b & 2b & 3b & 4b & 5b & 6b & 7b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Узловую матрицу проводимостей активной цепи и вектор узловых токов получаем в виде

$$Y_n = A \cdot Y_b \cdot A^t = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + j\omega C & 0 \\ 0 & -S & G_2 \end{bmatrix},$$

$$I_n = -A_J \cdot J_b = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_2 \\ 0 \\ J_2 + J_3 \end{bmatrix}.$$

Как видим, диагональные элементы матрицы проводимостей содержат суммы проводимостей ветвей инцидентных узлу, а недиагональные элементы - суммы проводимостей ветвей с обратным знаком, включенных между соответствующей парой узлов. Элементы вектора узловых токов представляют собой алгебраические суммы токов источников инцидентных соответствующему узлу. Так как, теперь вектор токов располагается за знаком равенства, направление «к узлу» является положительным направлением.

В результате узловая система уравнений может быть записана в виде

$$Y_n \cdot V_n = I_n = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + j\omega C & 0 \\ 0 & -S & G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 - J_2 \\ 0 \\ J_2 + J_3 \end{bmatrix}.$$

Решая данную систему уравнений, находим узловые потенциалы, обусловленные влиянием набора независимых источников тока.

Таким образом, узловая система уравнений описывает взаимосвязь узловых токов и узловых напряжений. Размерность узловой система уравнений определяется числом независимых узлов схемы.

Изложенный выше подход к содержанию узлового метода использован с целью более глубокого его обоснования. На практике обычно используется прагматичный и формализованный подход к формированию узловой системы уравнений. Этот подход основан на многополюсном представлении электронных схем.

1.5 Многополюсный подход к узловому методу

Согласно теории многополюсников, любая цепь, относительно своих узлов, может быть представлена в виде некоторого объекта, имеющего $n+1$-вывод (см. рисунок 1.3).

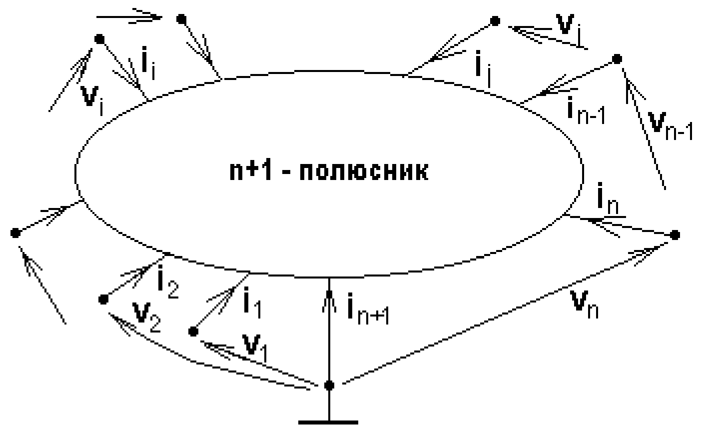

Рисунок 1.3 - Многополюсное представление цепи

Один из узлов, например $n+1$- й узел, принимается за общий, то есть соединенный с общим электродом, имеющим нулевой потенциал. Все токи узлов направляются во внутрь, а потенциалы узлов отсчитываются относительно общего электрода.

Узловая система уравнений многополюсника записывается в виде

$$i_1 = y_{11} \cdot v_1 + y_{12} \cdot v_2 + \cdots + y_{1n} \cdot v_n$$

$$i_2 = y_{21} \cdot v_1 + y_{22} \cdot v_2 + \cdots + y_{2n} \cdot v_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$i_n = y_{n1} \cdot v_1 + y_{n2} \cdot v_2 + \cdots + y_{nn} \cdot v_n$$

и в матричной форме записи представляет собой обобщение закона Ома на многополюсную цепь

$$I = Y \cdot V .$$

Физический смысл коэффициентов системы уравнений, то есть матрицы Y- параметров можно установить на основании элементарных рассуждений (мысленного эксперимента).

Так, из записи системы уравнений следует, что любая **собственная проводимость** i - го узла равна

$$y_{ii} = \frac{i_i}{v_i},$$

при $v_k = 0$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, и $k \neq i$. Эта запись означает, что для измерения собственной проводимости y_{ii}, необходимо к i- му узлу подключить последовательно идеальный источник ЭДС и идеальный амперметр, а остальные узлы соединить накоротко с общим проводом. При этом условии, собственная проводимость представляет собой отношение i- го узлового тока к ЭДС i- го узла и численно равна сумме проводимостей инцидентных узлу. Сумма проводимостей берется со своим знаком, так как проводимость пропорциональна току узла, который по условиям мысленного эксперимента вытекает из узла.

Любая **взаимная проводимость** между i- тым и j- тым узлами равна

$$y_{ij} = \frac{i_i}{v_j},$$

при $v_k = 0$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, и $k \neq j$. Из выражения и условий следует, что для измерения взаимной проводимости y_{ij}, необходимо к i- му узлу подключить идеальный амперметр, к j- му узлу - идеальный источник ЭДС, а остальные узлы соединить накоротко с общим проводом. При этом условии, взаимная проводимость представляет собой отношение i- го узлового тока к ЭДС j- го узла и численно равна сумме проводимостей между узлами, взятой с обратным знаком. Обратный знак взаимной проводимости обусловлен тем, что ЭДС прикладывается к одному узлу, а амперметр присоединен к другому узлу, то есть ток оказывается втекающим в узел.

Отметим, что идеальный источник ЭДС имеет нулевое сопротивление и, следовательно, обладает бесконечной энергией. Идеальность источника ЭДС приводит к тому, что токи ветвей оказываются прямо пропорциональными проводимостям. Идеальный амперметр также обладает нулевым внутренним сопротивлением, то есть он не препятствует реализации режима короткого замыкания. Условие реализации режима короткого замыкания в процессе измерения проводимостей отражается в названии матрицы коэффициентов узловой системы уравнений. В литературе ее называют часто матрицей проводимостей короткого замыкания.

Кроме пассивных ветвей RLCM- типа электрические модели активных элементов и устройств могут содержать источники тока управляемые током либо напряжением управляющей ветви. **Управляемые источники моделируют невзаимные свойства цепей и устройств.** Управляемые источники имеют бесконечное внутреннее сопротивление и генерируют ток при возникновении в управляющей цепи тока либо напряжения (в зависимости от типа источника). Направление тока меняется с изменением полярности управляющего воздействия. Исходное сонаправление (взаимное направление) управляющей и управляемой ветвей обусловлено протекающими физическими процессами.

В качестве примера формирования матрицы проводимостей короткого замыкания, рассмотрим эквивалентную модель биполярного транзистора на основе источника тока управляемого током (см. рисунок 1.4).

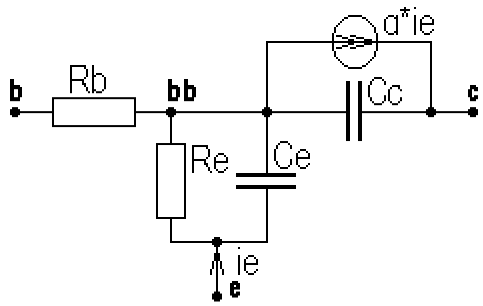

Рисунок 1.4 - Эквивалентная модель биполярного транзистора

Проведя мысленный эксперимент измерения собственных и взаимных проводимостей, получаем следующий вид матрицы проводимостей эквивалентной модели биполярного транзистора

$$Y_T = \begin{array}{c} \\ b \\ bb \\ c \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & bb & c & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} g_b & -g_b & 0 & 0 \\ -g_b & (1-\alpha)y_e + g_b + j\omega C_c & \alpha \cdot y_e - j\omega C_c & -(1-\alpha)y_e \\ 0 & \alpha \cdot y_e - j\omega C_c & j\omega C_c & -\alpha \cdot y_e \\ 0 & -y_e & 0 & y_e \end{bmatrix} \end{array}.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $g_b = 1/R_b$ - проводимость области базы; R_b - объемное сопротивление области базы; $y_e = g_e + j\omega C_e$ - комплексная проводимость эмиттерного перехода; $g_e = 1/R_e$ - активная часть проводимости эмиттерного перехода; R_e - сопротивление эмиттерного перехода; C_e - емкость эмиттерного перехода, включающая зарядную (барьерную) и диффузионную емкости; $\alpha = \dfrac{\alpha_0 \cdot e^{-j\omega/\omega_T}}{1 + j\omega/\omega_T}$ - частотно-зависимый коэффициент передачи по току схемы с общей базой (ОБ), при коротком замыкании (к.з.) на выходе; α_0 - низкочастотное значение коэффициента передачи по току схемы с общей базой; $e^{-j\omega/\omega_T}$ - фазовый множитель; $\omega_T = \dfrac{1}{R_e C_e}$ - верхняя граничная частота коэффициента передачи по току в схеме с общим эмиттером (ОЭ), при $|\beta| = |\alpha/(1-\alpha)| = 1$, определяемая постоянной времени эмиттерной цепи $\tau_e = R_e \cdot C_e$.

Расписывая частотно-зависимый коэффициент передачи по току в виде

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j\omega / \omega_T} = \frac{\alpha_0 \cdot g_e}{g_e + j\omega C_e} = \frac{\alpha_0 \cdot g_e}{y_e},$$

приходим к выводу, что

$$\alpha \cdot y_e = \alpha_0 \cdot g_e,$$

то есть в качестве управляющего тока можно взять не полный ток эмиттерного перехода, а лишь его часть, протекающую через сопротивление R_e и при этом не учитывать частотную зависимость коэффициента передачи по току. Матрицы проводимостей для этих двух случаев эквивалентны.

Анализируя структуру матрицы проводимостей и систему уравнений схемы предыдущего примера, можно сформулировать обобщенные правила формирования узловой системы уравнений.

1. Проводимость двухполюсника RLC- типа y_d, включенная между узлами $i,\ j$, добавляется во фрагмент матрицы проводимостей цепи в виде

$$Y = \begin{array}{c} \\ i \\ \vdots \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \cdots & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} +y_d & \cdots & -y_d \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -y_d & & +y_d \end{bmatrix} \end{array}.$$

2. Зависимый источник тока, включенный между узлами k, l и управляемый током либо напряжением ветви y_u между узлами $i,\ j$, с параметром α либо S, отображается соответственно фрагментами матриц проводимостей в виде

$$Y = \begin{array}{c} \\ k \\ \vdots \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \cdots & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} +\alpha \cdot y_u & \cdots & -\alpha \cdot y_u \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha \cdot y_u & \cdots & +\alpha \cdot y_u \end{bmatrix} \end{array}; \quad Y = \begin{array}{c} \\ k \\ \vdots \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & \cdots & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} +S & \cdots & -S \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -S & \cdots & +S \end{bmatrix} \end{array}.$$

3. Независимый источник тока J, включенный между узлами $i,\ j$, добавляется во фрагмент вектора узловых токов в виде

$$I = \begin{array}{c} i \\ \vdots \\ j \end{array} \begin{bmatrix} -J \\ \vdots \\ +J \end{bmatrix}.$$

Приведенные правила формирования узловой системы уравнений достаточно просты и легко программируются.

Заметим, что приведенная модель биполярного транзистора не имеет общего узла, и потенциалы узлов отсчитываются относительно внешнего нулевого узла. В этом случае матрица проводимостей называется неопределенной и, в соответствии с законом Кирхгофа для токов, суммы проводимостей по любой строке и столбцу равны нулю. Определитель неопределенной матрицы проводимостей также равен нулю.

Матрица проводимостей определенной схемы включения получается из неопределенной матрицы путем вычеркивания строки и столбца, соответствующих номеру узла заземляемого электрода.

Из равенства нулю сумм элементов матрицы проводимостей по любой строке и столбцу следует простой алгоритм вывода соотношений для пересчета параметров проводимостей транзисторов с различными схемами включения.

Алгоритм пересчета Y- параметров различных схем включения транзистора рассмотрим на примере пересчета 4-х полюсных параметров для схемы с ОЭ в параметры схемы с ОБ. Пусть заданы 4-х полюсные параметры биполярного транзистора включенного по схеме с ОЭ

$$Y_e = \begin{array}{c} \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_{11e} & y_{12e} \\ y_{21e} & y_{22e} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Достроим матрицу до неопределенной матрицы, вводя в рассмотрение эмиттерный электрод

$$Y_T = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & c & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_{11e} & y_{12e} & -(y_{11e}+y_{12e}) \\ y_{21e} & y_{22e} & -(y_{21e}+y_{22e}) \\ -(y_{11e}+y_{21e}) & -(y_{12e}+y_{22e}) & \sum y_e \end{bmatrix} \end{array},$$

где $\sum y_e = y_{11e} + y_{12e} + y_{21e} + y_{22e}$. Теперь, заземляя электрод базы транзистора, то есть, вычеркивая соответствующие строку и столбец, получаем соотношения для пересчета Y- параметров из схемы включения с ОЭ в схему с ОБ

$$Y_b = \begin{array}{c} \\ e \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} y_{11b} & y_{12b} \\ y_{21b} & y_{22b} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ e \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum y_e & -(y_{12e}+y_{22e}) \\ -(y_{21e}+y_{22e}) & y_{22e} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Поэлементное сравнение матриц проводимостей этих схем включения транзистора, дает соотношения для вычисления Y- параметров транзистора, включенного по схеме с ОБ, через известные Y- параметры схемы с ОЭ.

Аналогичным образом могут быть получены и другие формулы пересчета Y- параметров одной схемы включения в другую.

1.6 Расчет передаточных характеристик узловым методом

Передаточная характеристика аналоговой системы определяется как отношение изображения реакции к изображению воздействия. Таким образом, определение передаточной характеристики не связано с конкретным типом воздействия. В тоже время, **частотная характеристика,** тесно связанная с передаточной характеристикой, определяется как установившаяся реакция системы, находящейся в состоянии покоя, на единичное гармоническое воздействие. Причем в качестве реакции будем понимать любую реакцию электрической природы – напряжения, токи, их отношения и т.д., то есть наше определение шире обычно используемого в учебной литературе.

В радиотехнике и электронике **под состоянием покоя понимается** полное установление реакции на предыдущие воздействия, например, на включение источника питания, и отсутствие сторонних воздействий.

Аналитически передаточная функция записывается в виде дробно-рационального соотношения относительно переменной $p = \sigma + j \cdot \omega$

$$K(p) = \frac{Vout(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot p^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k}.$$

Для физически реализуемых устройств степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то есть $m \le n$.

Частотная характеристика получается из передаточной путем замены оператора Лапласа p на $j \cdot \omega$, то есть, полагая $\sigma = 0$. Частотная характеристика **(ЧХ)** для цепей, содержащих реактивные элементы, соответствует комплексной функции. Модуль и аргумент частотной характеристики называются, соответственно, амплитудно-частотной характеристикой **(АЧХ)** и фазочастотной характеристикой **(ФЧХ).**

Физически частотные характеристики соответствуют изменению амплитуды и/или фазы выходной реакции от частоты входного гармонического воздействия.

Таким образом, различие в аналитическом представлении частотной и передаточной характеристик чисто формальное и определение одной из них соответствует определению второй.

Наиболее простым способом получения передаточных и частотных характеристик электронных схем, как электрических моделей реальных устройств, является использование метода узловых потенциалов.

Для получения выражений основных передаточных характеристик узловым методом удобно воспользоваться правилом Крамера. Предположим, что вход и/или выход схемы образованы одним узлом относительно общего провода. Для более сложных ситуаций, когда вход и/или выход образован парами узлов, вывод соотношений будет достаточно очевидным.

Схема устройства с входом на i - тый узел и выходом на j - тый узел описывается узловой системой уравнений в виде

$$I = Y \cdot V = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1i} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i1} & \cdots & y_{ii} & \cdots & y_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{ni} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_i \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Напряжения на входе и выходе схемы, в соответствии с правилом Крамера, определяются соотношениями

$$v_i = \frac{{}_i\Delta}{\Delta}, \quad v_j = \frac{{}_j\Delta}{\Delta},$$

где Δ- определитель исходной матрицы Y- параметров; ${}_i\Delta$, ${}_j\Delta$- определители матриц полученных заменой соответственно i- го и j- го столбцов вектором свободных членов.

Раскрывая определители в числителях по соответствующим столбцам, получим

$$v_i = \frac{J \cdot \Delta_{ii}}{\Delta}, \quad v_j = \frac{J \cdot \Delta_{ij}}{\Delta}.$$

Из первого соотношения непосредственно следуют выражения, соответственно, для входных проводимости и сопротивления

$$Y_{in\_i} = \frac{J}{v_i} = \frac{\Delta}{\Delta_{ii}},$$

$$Z_{in\_i} = \frac{v_i}{J} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}.$$

Здесь предполагается, что проводимость источника сигнала Y_{S_i} не внесена в исходную матрицу проводимостей. В противном случае, для получения «чистой» входной проводимости схемы из полученного значения необходимо вычесть проводимость Y_{S_i}.

Из второго соотношения получаем передаточное сопротивление с j- го выхода на i- тый вход

$$Z_{ji} = \frac{v_j}{J} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}.$$

Заменяя во втором соотношении напряжение на выходе соотношением $v_j = Z_{L\_j} \cdot I_j = I_j / Y_{L\_j}$, получаем выражение для коэффициента передачи по току

$$K_{I\_ij} = \frac{I_j}{J} = \frac{Z_{L\_j} \cdot \Delta_{ij}}{\Delta} = \frac{\Delta_{ij}}{Y_{L\_j} \cdot \Delta},$$

где Z_{L_j}, Y_{L_j}- соответственно сопротивление и проводимость нагрузки на j- том выходе; Δ_{ij}- алгебраическое дополнение, равное определителю (минору) матрицы, полученной при вычеркивании i- той строки и j- го столбца и умноженному на коэффициент $(-1)^{(i+j)}$.

Отношение выходного напряжения к входному напряжению дает коэффициент передачи по напряжению с i- го входа на j- тый выход

$$K_{V\_ij}=\frac{v_j}{v_i}=\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ii}}.$$

Во всех приведенных соотношениях, за исключением коэффициента передачи по току, понимается, что проводимость нагрузки Y_{L_j} внесена в исходную матрицу проводимости. В этом случае, раскрывая определители и алгебраические дополнения относительно Y_{L_j}, получим

$$\Delta=\bar{\Delta}+\Delta_{jj}\cdot Y_{L\_j},$$

$$\Delta_{ii}=\bar{\Delta}_{ii}+\Delta_{ii,jj}\cdot Y_{L\_j}.$$

Здесь $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}_{ii}$ - определитель и алгебраическое дополнение матрицы, не содержащей проводимости нагрузки Y_{L_j}; $\Delta_{ii,jj}$ - двойное алгебраическое дополнение, равное определителю матрицы полученной при вычеркивании i - той и j- той строк и столбцов, умноженному на $(-1)^{(i+j+i+j+\chi)}$, где $i,\ j$ - индексы вычеркиваемых строк и столбцов; χ - число перестановок индексов.

Аналогичным образом выводятся и другие соотношения для передаточных характеристик.

В том случае, когда вход образован парой узлов $i,\ j$, а выход узлами $k,\ l$, вектор токов имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ I^t = & 0 & \cdots & J & \cdots & -J & \cdots & 0 \end{array}.$$

В результате напряжения на входе и выходе схемы определятся следующими выражениями

$$v_{in}=\frac{J\cdot\Delta_{i+j,i+j}}{\Delta},\ v_{out}=\frac{J\cdot\Delta_{i+j,k+l}}{\Delta}.$$

В соответствии с теоремой Якоби для определителей, суммарные алгебраические дополнения могут быть представлены в виде

$$\Delta_{i+j,i+j}=\Delta_{ii}-\Delta_{ij}-\Delta_{ji}+\Delta_{jj},$$

$$\Delta_{i+j,k+l}=\Delta_{ik}-\Delta_{il}-\Delta_{jk}+\Delta_{jl}.$$

Далее, вывод соотношений для передаточных характеристик не представляет труда. Так, в случае, когда вход и выход образованы выше перечисленными парами узлов, коэффициент передачи по напряжению имеет вид

$$K_{V\_ij,kl} = \frac{\Delta_{ik} - \Delta_{il} - \Delta_{jk} + \Delta_{jl}}{\Delta_{ii} - \Delta_{ij} - \Delta_{ji} + \Delta_{jj}}.$$

Другие соотношения для передаточных характеристик, в том числе при различных ситуациях образования входа и выхода выводятся аналогичным образом.

Учитывая, что проводимости реактивных элементов являются функциями параметра $p = j \cdot \omega$, то, раскрывая в полученных выражениях алгебраические дополнения и, приводя подобные, приходим к дробно-рациональным представлениям передаточных и частотных характеристик.

Для иллюстрации вычисления передаточной и частотной характеристик электронной схемы рассмотрим каскад на полевом транзисторе, приведенный на рисунке 1.5.

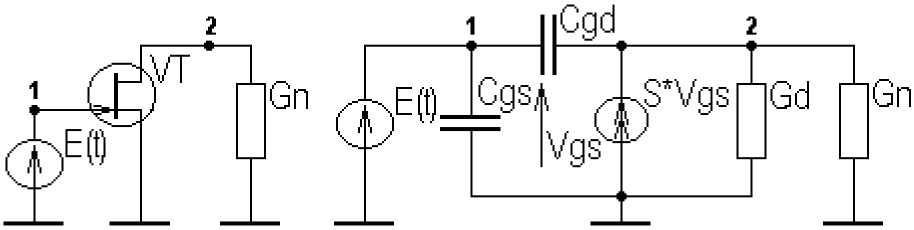

Рисунок 1.5 - Схема каскада на полевом транзисторе и его модель

Полевой транзистор раскрыт простейшей эквивалентной схемой с использованием источника тока канала управляемого напряжением на затворе.

Используя формализованные правила, сформируем матрицу проводимостей апериодического каскада на полевом транзисторе

$$Y = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} p \cdot (C_{gs} + C_{gd}) & -p \cdot C_{gd} \\ -p \cdot C_{gd} + S & G_d + G_n + p \cdot C_{gd} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} j\omega \cdot (C_{gs} + C_{gd}) & -j\omega \cdot C_{gd} \\ -j\omega \cdot C_{gd} + S & G_d + G_n + j\omega \cdot C_{gd} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с полученной выше формулой для коэффициента передачи по напряжению, получаем передаточную характеристику в виде

$$K_{V\_12}(p) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2(p)}{E(p)} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{p \cdot C_{gd} - S}{G_d + G_n + p \cdot C_{gd}} =$$

$$= \frac{p - S / C_{gd}}{p + (G_d + G_n) / C_{gd}} = \frac{p + b_0}{p + a_0},$$

где $b_0 = -S / C_{gs}$; $a_0 = (G_d + G_n) / C_{gd}$.

Заменяя, оператор Лапласа p на $j\omega$, получаем частотную характеристику (ЧХ) коэффициента передачи по напряжению. Выделяя модуль и аргумент ЧХ, получим АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению апериодического каскада на полевом транзисторе.

Из полученного соотношения, легко записать изображение выходного напряжения каскада, как реакцию на входное воздействие $E(p)$

$$v_2(p) = E(p) \cdot K_V(p) = \frac{E(p) \cdot (p + b_0)}{p + a_0}.$$

Оригиналы и изображения некоторых видов входного воздействия приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Оригиналы и изображения наиболее распространенных воздействий

Оригинал - E(t)	Изображение - E(p)
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$1/p$
$e^{-\alpha \cdot t}$	$1/(p+\alpha)$
$\sin(\omega_0 \cdot t)$	$\omega_0/(p^2+\omega_0^2)$
$\cos(\omega_0 \cdot t)$	$p/(p^2+\omega_0^2)$
$t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$2 \cdot \omega_0 \cdot p/(p^2+\omega_0^2)^2$
$t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$(p^2-\omega_0^2)/(p^2+\omega_0^2)^2$
$e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$\omega_0/[(p+\gamma)^2+\omega_0^2]$
$e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$	$(p+\gamma)/[(p+\gamma)^2+\omega_0^2]$
$e^{-\gamma \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$	$2 \cdot \omega_0 \cdot (p+\gamma)/[(p+\gamma)^2+\omega_0^2]^2$
$e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$	$[(p+\gamma)^2-\omega_0^2]/[(p+\gamma)^2+\omega_0^2]^2$

Подставляя в последнее выражение оригинал конкретного входного воздействия, находим изображение выходной реакции схемы, в данном случае выходного напряжения. Далее используя, обратное преобразование Лапласа, находим оригинал выходного напряжения, как функции времени, а, заменяя, оператор Лапласа p на $j\omega$, получаем частотную зависимость выходного напряжения.

Таким образом, мы проиллюстрировали процедуру получения передаточных характеристик электронных схем методом узловых потенциалов.

Математическая модель линейной цепи в частотной области или области изображений, полученная узловым методом, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

При аналитическом подходе к представлению передаточных характеристик, их обычно выражают в виде отношений соответствующих алгебраических дополнений матрицы проводимостей, подразумевая, что входное воздействие единичное. Раскрывая алгебраические дополнения и приводя подобные, получают соответствующие дробно-рациональные представления передаточных характеристик относительно оператора $p = j \cdot \omega$. При использовании в качестве независимой переменной параметра $j \cdot \omega$, передаточная характеристика преобразуется в комплексную частотную характеристику (ЧХ).

2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АНАЛОГОВЫХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ

2.1 Основные понятия и определения

Временные характеристики аналоговых (непрерывных) устройств и систем используются для оценки их быстродействия, то есть способности обрабатывать и передавать быстро изменяющиеся во времени сигналы. В качестве тестовых воздействий при исследовании быстродействия аналоговых систем используются идеальные воздействия типа единичного скачка и единичного импульса (δ - импульс). Временные характеристики, по существу, являются реакциями устройств и систем на соответствующие воздействия. В качестве реакций будем рассматривать электрический отклик устройства или системы в виде напряжений, токов и их отношений.

1. **Единичный скачок или функция Хевисайда** приведен на рисунке 2.1 и определяется условной зависимостью

$$1(t)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ t<0 \\ \textit{не \ определена \ при} \ \ t=0 \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ t>0 \end{cases}.$$

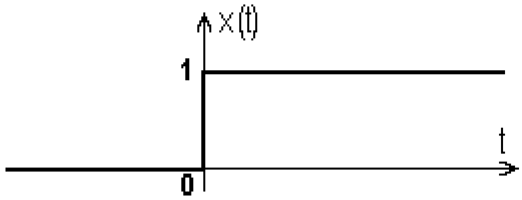

Рисунок 2.1 - Воздействие типа единичного скачка

Отметим, что преобразование Лапласа от единичного скачка в области изображений имеет вид $L(1(t))=1/p$,

где L- операторная запись прямого преобразования Лапласа. Взаимосвязь оригинала и изображения, соответствующую прямому L либо обратному L^{-1} преобразованиям Лапласа, удобно отображать в виде

$$1(t)\Leftrightarrow 1/p.$$

2. **Единичный импульс (δ- функция)** приведен на рисунке 2.2 и определяется условной зависимостью

$$\delta(t)=\begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \ t<0 \\ \infty \ \ \textit{при} \ \ t=0 \\ 0 \ \ \textit{при} \ \ t>0 \end{cases}.$$

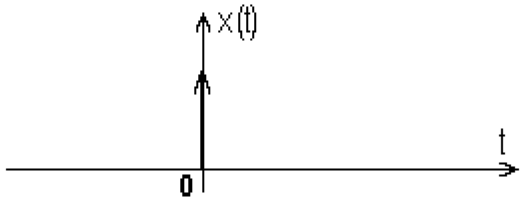

Рисунок 2.2 - Воздействие типа единичного импульса

Прямое преобразование Лапласа от δ- функции в области изображений имеет вид

$$L(\delta(t)) = 1$$

или

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1.$$

Таким образом, оба этих воздействия примечательны тем, что единичный скачок в области оригиналов соответствует единичной функции, при $t > 0$, а единичный импульс соответствует единичной функции в области изображений.

Обе этих функции относятся к классу обобщенных функций или распределений, основу теории которых заложили Лоран Шварц и Ян Микусинский. Условное определение δ- функции не является конструктивным и чаще она определяется интегральным соотношением вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) \cdot dt = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что δ- функция является производной от единичного скачка

$$\delta(t) = \frac{d(1(t))}{dt} = 1'(t).$$

Реакция цепей или устройств, находящихся в состоянии покоя, на единичный скачок называется **переходной характеристикой или функцией** и обозначается через $h(t)$. **Под состоянием покоя** понимается установление реакции на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников.

Переходная функция характеризует быстродействие устройств и систем с точки зрения времени установления выходной реакции на единичный перепад сигнала на входе.

Любая цепь, содержащая реактивные элементы (типа L, C), обладает инерционностью, то есть конечным временем реакции. Физическое объяснение этого факта сводится к тому, что напряжение на катушке индуктивности пропорционально производной протекающего тока $v = L \cdot di/dt$, а ток индуктивности не может измениться мгновенно, так как в начальный момент времени возникает противо- ЭДС за счет самоиндукции. Соответственно, ток конденсатора пропорционален производной накопленного потенциала $i = C \cdot dv/dt$ и напряжение на конденсаторе изменяется не мгновенно, а по мере накопления заряда $q = C \cdot v$.

Инерционность цепи приводит к тому, что реакция запаздывает относительно входного воздействия. Скорость нарастания реакции связана с постоянной времени цепей, обусловленной перезарядом конденсатора $\tau = R \cdot C$ и установлением тока катушки индуктивности $\tau = L / R$.

Типовая переходная характеристика приведена на рисунке 2.3.

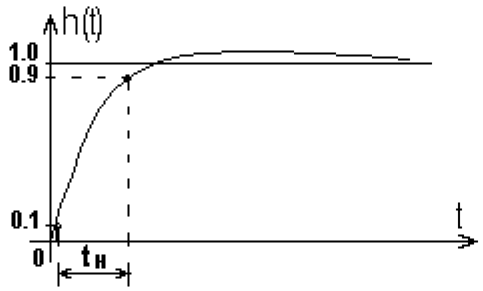

Рисунок 2.3 - Типовая переходная характеристика

Инерционность цепи принято характеризовать **временем нарастания** выходной реакции $t_н$. Время нарастания определяется интервалом времени изменения реакции цепи от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения. Для простых RC- и RL- цепей с одной постоянной времени время нарастания определяется как

$$t_н \approx 2.2 \cdot \tau ,$$

где $\tau = R \cdot C$ - или $\tau = L / R$ - постоянная времени соответствующей цепи.

В свою очередь, **постоянная времени RC- или RL- цепи** соответствует времени, за которое напряжение на конденсаторе и, соответственно, ток катушки индуктивности изменяются в $e \approx 2.718282$ раз после скачкообразного изменения.

Затухание колебательного процесса в резонансных LC- системах, обусловленное потерями, принято **характеризовать параметром добротности** Q. При этом добротность равна числу периодов колебаний, за которое их амплитуда напряжения или тока спадает в $e \approx 2.718282$ раз, после скачкообразного воздействия.

Демпфирующие свойства цепей оцениваются также временем установления, то есть временем, по истечении которого переходная характеристика становится постоянной. Для простых RC- и RL- цепей в технических приложениях принимается, что **время установления** соответствует $t_у \approx (3 \div 5) \cdot \tau$.

Кроме времени нарастания переходная характеристика может оцениваться **величиной выброса,** при появлении затухающего колебательного характера выходной реакции цепей выше первого порядка. Выброс обычно выражают в процентах превышения (отклонения от) установившегося значения.

Реакция цепи, находящейся в состоянии покоя, на единичный импульс называется **импульсной характеристикой или функцией** и обозначается через $g(t)$. Под **состоянием покоя,** как и прежде, понимается установление реакции на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников.

Типовая импульсная характеристика приведена на рисунке 2.4.

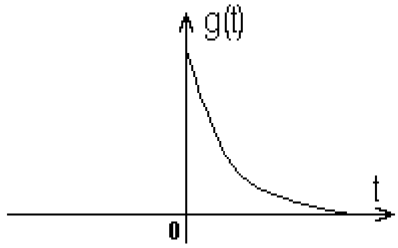

Рисунок 2.4 - Типовая импульсная характеристика

Импульсная функция характеризует быстродействие устройств и систем с точки зрения времени установления выходной реакции на единичный импульс сигнала на входе. При воздействии δ - импульса на вход реакция на выходе в зависимости от типа электрической цепи появляется мгновенно либо нарастает до определенного уровня, а затем спадает и стремится к исходному, например, нулевому значению. Как и в случае с переходной характеристикой, поведение импульсной характеристики обусловлено постоянными времени электрической цепи, то есть процессами перезаряда конденсаторов и установления тока в катушках индуктивностей.

Так как входное воздействие в данном случае является δ - функцией, то есть производной от единичного скачка $1(t)$, то и выходная реакция может быть определена операцией дифференцирования переходной характеристики. В соответствии с теоремой операционного исчисления о дифференцировании оригинала, импульсная характеристика получается из переходной, в соответствии с выражением

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h({}_{+}0),$$

то есть кроме производной переходной характеристики необходимо учитывать отличное от нуля начальное значение этой характеристики.

Дополнительное обоснование воздействий типа единичного скачка $1(t)$ и единичного импульса (δ - импульса) $\delta(t)$. Единичный скачок, как уже отмечалось, равен единице $1(t) = 1$, при $t > 0$. Оригинал выходной реакции $y(t)$ аналоговой системы на входное воздействие $x(t)$ определяется сверткой входного воздействия с импульсной характеристикой $g(t)$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \cdot x(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot x(t-\tau)\, d\tau .$$

При воздействии типа единичного скачка $x(t) = 1(t)$, выходная реакция, являющаяся переходной характеристикой $h(t)$ аналоговой системы определится сверткой импульсной характеристики с единичной функцией

$$y(t)=h(t)=\int\limits_0^t g(t-\tau)\cdot 1(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t g(\tau)\cdot 1(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t g(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Таким образом, **переходная характеристика** представляется интегралом с переменным верхним пределом от импульсной характеристики и **определяется лишь свойствами самой аналоговой системы.**

Изображение δ- импульса, как отмечалось, соответствует единичной функции $\delta(t)\Leftrightarrow 1$. Передаточная функция аналоговой системы, как известно, представляет собой отношение изображения выходной реакции $V_{out}(p)$ к изображению входного воздействия $V_{in}(p)$

$$K(p)=\frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)}=\frac{V_{out}(p)}{E(p)}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k\cdot p^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\cdot p^k}\,.$$

При воздействии на систему δ- импульса изображение выходной реакции $V_{out}(p)=V_{in}(p)\cdot K(p)=K(p)=L^{-1}\cdot\ g(t)$, совпадает с передаточной характеристикой аналоговой системы, так как в данном случае $V_{in}(p)=1$ и представляет собой обратное преобразование Лапласа от импульсной характеристики.

Таким образом, преобразование Лапласа от передаточной характеристики, есть **импульсная характеристика**

$$g(t)=L\cdot\ K(p)\ ,$$

которая **определяется лишь свойствами самой аналоговой системы.**

С другой стороны, записывая оригинал выходной реакции аналоговой системы при воздействии на вход δ- импульса, в виде свертки импульсной характеристики с δ- функцией, и, учитывая, что реакция представляет собой импульсную характеристику

$$y(t)=g(t)=\int\limits_0^t g(t-\tau)\cdot\delta(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t g(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau\,,$$

приходим к важному интегральному соотношению. Из этого соотношения следует, что интеграл от произведения любой функции на δ- функцию равен значению этой функции в точке, совпадающей со смещением δ- импульса, так называемое **селектирующее свойство δ- функции.**

Импульсная характеристика связана интегральным соотношением преобразования Фурье с частотной характеристикой

$$K(\omega)=\frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}\cdot dt\,;$$

$$g(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}\cdot d\omega\,.$$

Таким образом, импульсной характеристике как функции времени, соответствует частотная характеристика как спектральная функция.

Интегральные соотношения, связывающие импульсную и частотную характеристики, можно интерпретировать, как свертки соответствующих функций с экспоненциальной функцией аргумента $j \cdot \omega \cdot t$, которые соответствуют взаимной корреляции поведения функции и гармонического осциллятора. Экспоненциальная функция является в данном случае, как функцией времени, так и частоты. Из этого представления преобразования Фурье следует, что малым временам $g(t)$ соответствуют высокие частоты $K(\omega)$, и наоборот, низким частотам $K(\omega)$ соответствуют большие времена $g(t)$.

Иначе, смысл преобразования Фурье можно пояснить следующим образом. Спектральный или гармонический состав временной реализации функции определяется путем свертки этой функции с гармоническими осцилляторами описываемых экспонентой $e^{j \cdot \omega \cdot t}$. При этом уровень спектральной компоненты оказывается пропорциональным степени «родства» поведения функции времени и частоты гармонического колебания осциллятора. Импульсная характеристика, в свою очередь, оказывается пропорциональной степени «родства» поведения частотной характеристики и периода колебаний гармонического осциллятора. В результате быстрые изменения функции времени будут давать конечное значение интеграла свертки при умножении на гармоники осциллятора с высокими частотами, и наоборот, низкочастотные гармоники дадут конечное значение интеграла при больших периодах гармоник осциллятора. Другими словами резкие изменения реакции во времени будут определяться свойствами цепи на высоких частотах, а медленные изменения реакции во времени будут определяться свойствами цепи в области нижних частот.

Тестовые воздействия типа единичного скачка и единичного импульса используются для оценки инерционных свойств электрических цепей еще и потому, что любое сложное воздействие можно представить суперпозицией скачков соответствующей полярности и амплитуды со сдвигом во времени либо дискретным набором узких δ- импульсов, пропорциональных амплитуде воздействия. Далее, суммируя преобразования отдельных слагаемых при устремлении их числа к бесконечности, приходим к известным представлениям **интеграла Дюамеля.** Таким образом, выходную реакцию цепи на любое сложное воздействие можно определить, используя одно из представлений интеграла Дюамеля.

Заметим, что установление реакции цепи на произвольное воздействие обобщенно называют **переходным процессом**.

Для исследования временных характеристик используются, как численные, так и аналитические методы. В свою очередь все методы могут быть разделены на точные и приближенные. В соответствии с концепцией дисциплины «Прикладные математические методы в радиотехнике», основной целью является, в частности, ознакомление с аналитическими методами определения временных характеристик радиотехнических цепей. Аналитические методы, в отличие от численных, позволяют производить анализ полученных результатов, то есть получить более полное понимание процессов и явлений, и в тоже время, в конечном итоге получить и численные результаты.

2.2 Элементы методики исследования временных характеристик

Основным объектом изучения временных характеристик в нашем случае будут достаточно простые RC- и RL- цепи, в том числе, функциональные звенья на основе идеальных операционных усилителей (ОУ), как наиболее доступные для «ручных» аналитических исследований. В тоже время, **полученные навыки и результаты могут быть распространены на более сложные устройства и другие типы воздействия.**

В качестве аналитических методов исследования временных характеристик цепей воспользуемся такими традиционными для радиотехники методами, как операторный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа, и методами формирования и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

В основе всех подходов к аналитическому определению временных характеристик используется передаточная характеристика цепи, как наиболее доступная в плане представления ее, по заданной схеме либо модели, в виде дробно-рациональной функции

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Заметим, что для физически реализуемых цепей, степень числителя дробно-рациональной функции $N(p)$ всегда меньше степени знаменателя $M(p)$. Используемая нами формализованная методика позволяет проводить аналитические исследования, как физически реализуемых цепей, так и нереализуемых цепей.

Операторный метод. Операторный метод определения временных характеристик подразумевает использование обратного преобразования Лапласа для получения оригинала по изображению заданному в виде дробно-рациональной функции. Обратное преобразование Лапласа предполагает, использование соответствующих таблиц, либо теории вычетов для выполнения интегрального преобразования. Для физически нереализуемых цепей, когда степень числителя дробно-рационального представления выходной переменной равна или выше степени знаменателя, воспользуемся обобщением операционного исчисления и операторной алгеброй, основы которой заложены в работах Яна Микусинского.

Дифференциальные уравнения. Для аналитического исследования временных характеристик можно воспользоваться и дифференциальными уравнениями, составленными относительно выходной переменной цепи. Дифференциальные уравнения можно сформировать непосредственно по принципиальной или функциональной схеме, однако, проще всего это сделать на основе передаточной характеристики или передаточного соотношения. При этом в операторном выражении дробно-рациональной функции параметр p, понимаемый как оператор Лапласа, в предположении нулевых начальных условий, заменяется оператором дифференцирования d/dt, и осуществляется переход к дифференциальному уравнению относительно выходной переменной. Истинные начальные условия учитываются непосредственно при интегрировании полученного таким образом дифференциального уравнения.

Для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений воспользуемся наиболее универсальными методами – вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и представлением решения в форме Коши (метод Коши). Для дифференциальных уравнений выше первого порядка, метод Коши предполагает переход от дифференциального уравнения n- го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка и выражении частного решения через начальные условия и матричную экспоненту.

Начальные условия. Определение начальных условий, необходимых для однозначного интегрирования дифференциальных уравнений, в рамках используемой методики имеет свои особенности. Определение начальных условий также производиться по передаточной функции или передаточному соотношению с использованием модифицированной теоремы операционного исчисления о начальном значении функции. Модификация теоремы о начальном значении функции оригинала обусловлена распространением методики исследования характеристик систем с передаточными характеристиками, описываемых дробно-рациональными функциями общего вида. Дробно-рациональные функции общего вида возникают при исследовании характеристик форсирующих систем и производных реакции систем.

Прежде чем перейти к изложению необходимых теоретических вопросов рассмотрим в качестве иллюстрации простейшие примеры исследования временных характеристик простейших RC- и RL- цепей первого порядка с использованием передаточных функций, операторного метода и аналитических методов интегрирования дифференциальных уравнений Лагранжа и Коши.

2.3 Иллюстрация методики исследования временных характеристик

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик детально рассмотрим несколько примеров простейших цепей первого порядка. В отличие от введения, где подобный пример был рассмотрен без привлечения конкретных методов интегрирования, здесь все используемые методы конкретизированы. Кроме того, заметим, что приведенные примеры предшествуют изложению теоретического материала по интегрированию дифференциальных уравнений, однако вполне доступны для понимания на базе ранее изученных разделов по высшей математике. При этом предполагается, что вопросы, возникшие при разборе примеров, найдут свое разрешение при последующем чтении теоретического материала. На наш взгляд, такой методический прием имеет свои положительные моменты. По крайней мере, теоретический материал в данном случае будет восприниматься более осознанно.

Интегрирующая RC- цепь. На рисунке 2.5 изображена простая интегрирующая RC- цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

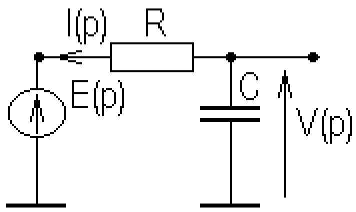

Рисунок 2.5 - Интегрирующая RC - цепь

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p)=\frac{E(p)}{R+1/p\cdot C}=\frac{E(p)\cdot p\cdot C}{1+p\cdot R\cdot C}.$$

Далее, сразу получаем интересующее нас напряжение на конденсаторе, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p)=I(p)\cdot\frac{1}{p\cdot C}=\frac{E(p)}{1+p\cdot R\cdot C}=\frac{E(p)}{1+p\cdot\tau}=\frac{E(p)\cdot\alpha}{p+\alpha},$$

где $\tau=R\cdot C$- постоянная времени RC- цепи; $-\alpha=-1/\tau$- значение корня характеристического уравнения $p+\alpha=0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя передаточного соотношения, приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{1}{1+p\cdot\tau}=\frac{\alpha}{p+\alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p) = E(p) \cdot \frac{\alpha}{p+\alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $\frac{V(p)}{E(p)} = K(p) = p \cdot V(p)$, при $p = 0$ и $p \to \infty$, принимая $E(p) = 1/p$. Так, при $p = 0$, получаем $K(0) = 1$, а при $p \to \infty$, соответственно, имеем $K(\infty) = 0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p) = 1/p \Leftrightarrow 1(t) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\alpha}{(p+\alpha)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p \cdot (p+\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t}).$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике интегрирующей RC - цепи

$$V(p) = \frac{\alpha}{p \cdot (p+\alpha)} \Leftrightarrow (1 - e^{-\alpha \cdot t}) = v(t) = h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики равно нулю $h(0) = 0$, при $t = 0$. Установившееся значение переходной характеристики равно единице $h(\infty) = 1$, при $t \to \infty$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = h(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} K(p) = 0;$$

$$v(\infty) = h(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = \lim_{p \to 0} K(p) = 1.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени при изменении значения от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения

$$(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0.1;\ e^{-t_1/\tau} = 0.9;\ e^{t_1/\tau} = 1/0.9;\ t_1/\tau = \ln(1) - \ln(0.9);\ t_1 = -\tau \cdot \ln(0.9);$$

$$(1 - e^{-t_2/\tau}) = 0.9;\ e^{-t_2/\tau} = 0.1;\ e^{t_2/\tau} = 1/0.1;\ t_2/\tau = \ln(1) - \ln(0.1);\ t_2 = -\tau \cdot \ln(0.1);$$

$$t_н = t_2 - t_1 = -\tau \cdot (\ln(0.1) - \ln(0.9)) \approx 2.19722 \cdot \tau \approx 2.2 \cdot \tau.$$

Вид переходной характеристики интегрирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 2.6.

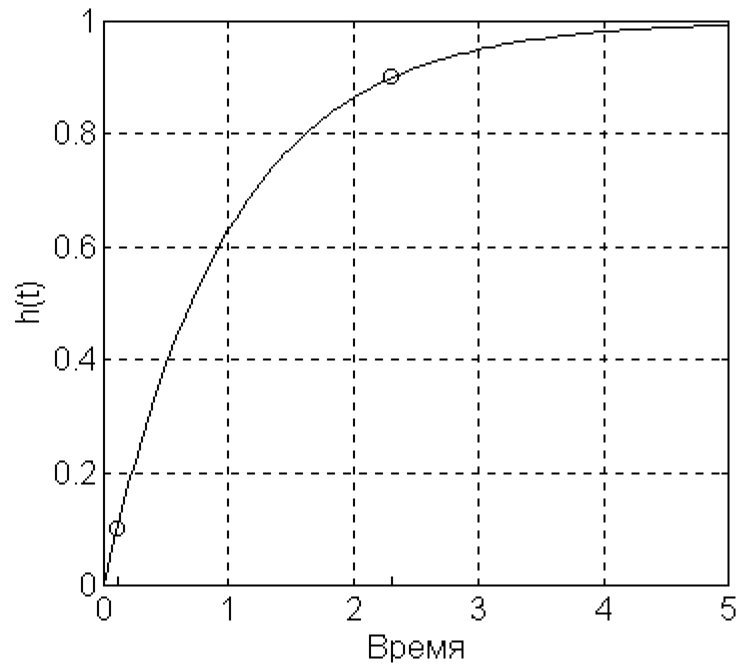

Рисунок 2.6 - Переходная характеристика интегрирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения удобно формировать на основе передаточной характеристики или передаточного соотношения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p) = E(p) \cdot \frac{\alpha}{p+\alpha} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\alpha}{(p+\alpha)} \to v(t) = \frac{1(t) \cdot \alpha}{(d/dt + \alpha)}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения интегрирующей RC - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \alpha \cdot 1(t).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \alpha \cdot 1(t).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{\alpha}{p + \alpha} = 0.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика интегрирующей RC - цепи на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени – варьируемой постоянной

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения и его производной в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \alpha \cdot 1(t),$$

откуда

$$C^{'}(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = \alpha \cdot 1(t)$$

или

$$C^{'}(t) = \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t) = \int \alpha \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = e^{\alpha \cdot t} + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования.

Эту постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (e^{\alpha \cdot t} + C) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = 1 + C \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Из начального условия $v(0) = 0$, при $t = 0$, следует, что

$$0 = 1 + C,$$

откуда получаем

$$C = -1.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике интегрирующей RC - цепи, получаем в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение дифференциального уравнения первого порядка либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов системы, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int\limits_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов системы.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int\limits_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \alpha \cdot 1(\tau) \cdot d\tau.$$

Так как $v(0) = 0$, то, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике интегрирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = 1 - e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику интегрирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс (δ - функция)

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = 1 \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p + \alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha \cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи

$$V(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha} \Leftrightarrow \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = v(t) = g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0) = \alpha$, при $t = 0$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \alpha;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0.$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h'(t) + \delta(0) \cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h'(t) = (1 - e^{-\alpha \cdot t})' = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Вид импульсной характеристики интегрирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 2.7.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = E(p) \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha} = 1 \cdot \frac{\alpha}{p + \alpha} \rightarrow v(t) = \frac{\delta(0) \cdot \alpha}{d/dt + \alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения интегрирующей RC - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \alpha \cdot \delta(0).$$

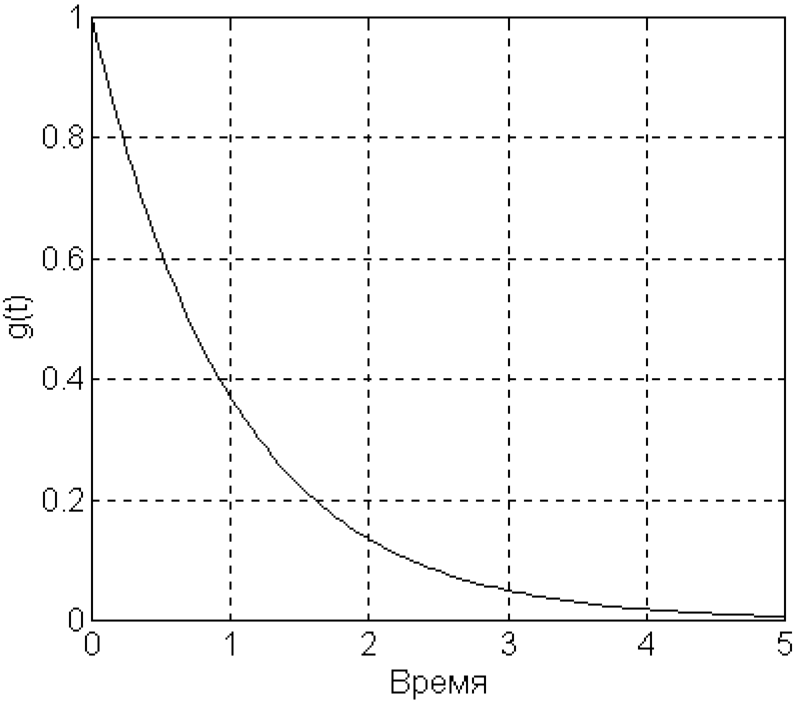

Рисунок 2.7 - Импульсная характеристика интегрирующей RC - цепи

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части δ- функцию. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \alpha \cdot \delta(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0) = \lim_{t \to +0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{\alpha \cdot p}{p + \alpha} = \alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика интегрирующей RC- цепи на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени – варьируемой постоянной

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения и его производной в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\alpha\cdot\delta(0),$$

или

$$C^{'}(t)=\alpha\cdot\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t)=\int\alpha\cdot\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=\alpha+C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt=f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t)=(\alpha+C)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}+C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального условия $v(0)=\alpha$, при $t=0$, следует, что

$$\alpha=\alpha+C,$$

откуда получаем

$$C=0.$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC- цепи, получаем в виде

$$v(t)=e^{-\alpha\cdot t}=g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение дифференциального уравнения первого порядка либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t)=A\cdot y(t)+F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов системы, может быть представлено в виде

$$y(t)=e^{A\cdot t}\cdot y(0)+\int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $e^{A\cdot t}$- в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов системы.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \alpha \cdot \delta(0) \cdot d\tau .$$

Принимая во внимание, что $v(0) = \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}} + \underset{t=0}{\alpha} = g(t) .$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t > 0$, а второе слагаемое, при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t) .$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику интегрирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Дифференцирующая RC **- цепь.** На рисунке 2.8 изображена простая дифференцирующая RC - цепь и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

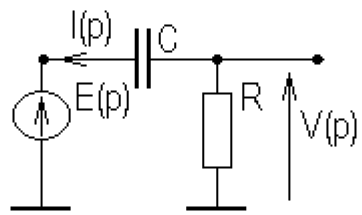

Рисунок 2.8 - Дифференцирующая RC - цепь

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику цепи, используя закон Ома. Вначале выразим ток в цепи

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + 1/p \cdot C} = \frac{E(p) \cdot p \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C} .$$

Далее, умножая ток на сопротивление, получаем интересующее нас напряжение на резисторе, соответствующее выходному напряжению цепи

$$V(p) = I(p) \cdot R = \frac{E(p) \cdot p \cdot R \cdot C}{1 + p \cdot R \cdot C} = \frac{E(p) \cdot p \cdot \tau}{1 + p \cdot \tau} = \frac{E(p) \cdot p}{p + \alpha},$$

где $\tau = R \cdot C$ - постоянная времени RC - цепи; $-\alpha = -1/\tau$ - значение корня характеристического уравнения $p + \alpha = 0$. Характеристическое уравнение, в случае использования дробно-рационального представления выходной переменной, соответствует выражению знаменателя передаточного соотношения, приравненного нулю.

Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{p\cdot\tau}{1+p\cdot\tau}=\frac{p}{p+\alpha}.$$

При исследовании временных характеристик, в качестве реакции цепи на входное воздействие возьмем выходное напряжение

$$V(p)=E(p)\cdot\frac{p}{p+\alpha}.$$

Найдем значения передаточной функции $\frac{V(p)}{E(p)}=K(p)=p\cdot V(p)$, при $p=0$ и $p\to\infty$, принимая $E(p)=1/p$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=0$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=1$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+\alpha}=\frac{1}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{p+\alpha}\Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t}.$$

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике дифференцирующей RC - цепи

$$V(p)=\frac{1}{p+\alpha}\Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t}=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно единице $h(0)=1$. Установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $h(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K(p)=1;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot V(p)=\lim_{p\to 0}K(p)=0.$$

Определим время нарастания переходной характеристики, как интервал времени при изменении значения от уровня 0.9 до уровня 0.1 от установившегося значения

$$e^{-t_1/\tau}=0.9;\ e^{t_1/\tau}=1/0.9;\ t_1/\tau=\ln(1)-\ln(0.9);\ t_1=-\tau\cdot\ln(0.9);$$

$$e^{-t_2/\tau}=0.1;\ e^{t_2/\tau}=1/0.1;\ t_2/\tau=\ln(1)-\ln(0.1);\ t_2=-\tau\cdot\ln(0.1);$$

$$t_н = t_2 - t_1 = -\tau \cdot (\ln(0.1) - \ln(0.9)) \approx 2.19722 \cdot \tau \approx 2.2 \cdot \tau .$$

Вид переходной характеристики дифференцирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 2.9.

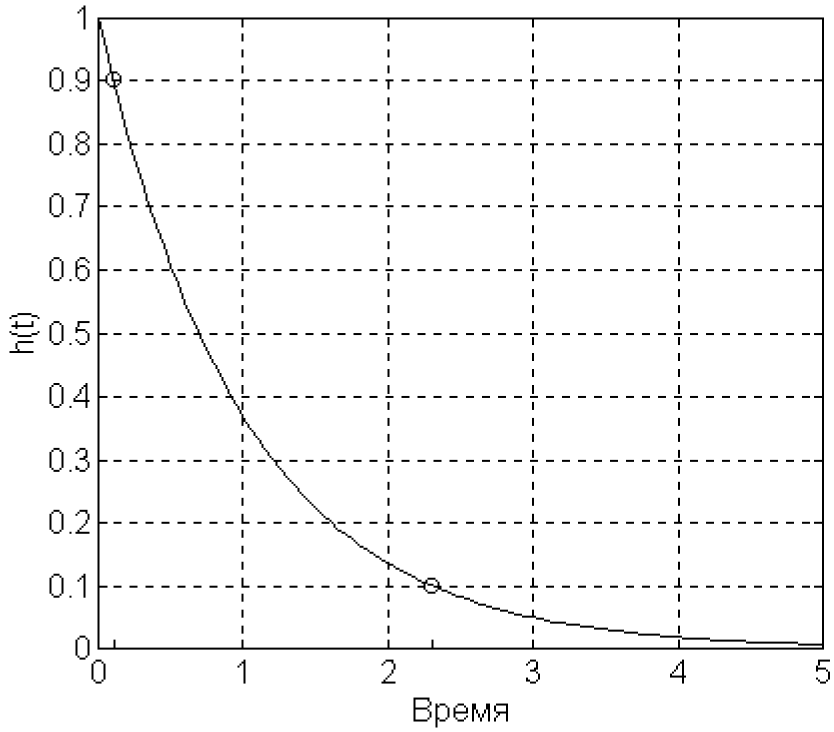

Рисунок 2.9 - Переходная характеристика дифференцирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения формируем на основе передаточных характеристик, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения, получаем

$$V(p) = E(p) \cdot \frac{p}{p+\alpha} = \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p+\alpha} = \frac{1}{p+\alpha} \rightarrow v(t) = \frac{\delta(0)}{d/dt + \alpha} .$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения дифференцирующей RC - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \delta(0) .$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \delta(0) .$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции оригинала

$$v(0)=\lim_{t\to_{+}0} v(t)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{p+\alpha}=1.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением переходной характеристики, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика дифференцирующей RC - цепи на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени – варьируемой постоянной

$$v(t)=C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения и его производной в исходное уравнение дает

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=-\alpha\cdot C(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0),$$

откуда

$$C^{'}(t)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=\delta(0)$$

или

$$C^{'}(t)=\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем последнее выражение

$$C(t)=\int\delta(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}dt=1+C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta(0)\cdot dt=f(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t)=(1+C)\cdot e^{-\alpha\cdot t}=e^{-\alpha\cdot t}+C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального условия $v(0)=1$, при $t=0$, следует, что

$$1=1+C,$$

откуда получаем

$$C=0.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике дифференцирующей RC-цепи, получаем в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение Дифференциального уравнения первого порядка либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'(t) = A \cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y'(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов системы, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A \cdot t} \cdot y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов системы.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v(0) + \int_0^t e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot \delta(0) \cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = 1$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее переходной характеристике дифференцирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = \underset{t>0}{e^{-\alpha \cdot t}} + \underset{t=0}{1} = h(t).$$

Учитывая, что первое слагаемое определено, при $t > 0$, а второе слагаемое, при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет переходную характеристику дифференцирующей RC - цепи, где в качестве реакции на единичный скачок на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс (δ - функция)

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p)=1\cdot\frac{p}{p+\alpha}.$$

Отметим, что в данном случае дробно-рациональное выражение для изображения выходного напряжения имеет одинаковые степени числителя и знаменателя. Для перехода в область оригиналов необходимо, чтобы степень знаменателя была выше степени числителя, в связи с чем, разобьем дробно-рациональное выражение на элементарные дроби, поделив числитель на знаменатель

$$V(p)=\frac{p}{p+\alpha}=1-\frac{\alpha}{p+\alpha}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображениями и оригиналами

$$1\Leftrightarrow\delta(0);\quad \frac{1}{p+\alpha}\Leftrightarrow e^{-\alpha\cdot t}.$$

На основании установленных соответствий, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике дифференцирующей RC - цепи

$$V(p)=1-\frac{\alpha}{p+\alpha}\Leftrightarrow\delta(0)-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=v(t)=g(t).$$

Заметим, что в этом случае $g(0)=\delta(0)-\alpha$, при $t=0$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t\to\infty$, равно нулю $g(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=g(0)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\delta(0)-\alpha;$$

$$v(\infty)=g(\infty)=\lim_{p\to 0}p\cdot V(p)=0.$$

Отметим, что импульсная характеристика может быть получена из переходной характеристики на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t)\Rightarrow p\cdot V(p)-v(_{+}0).$$

Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p\cdot V(p)\Rightarrow v^{'}(t)+v(_{+}0)\cdot\delta(0).$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p\cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t)=h^{'}(t)+\delta(0)\cdot h(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0)=1$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t)=h^{'}(t)+\delta(0)\cdot h(0)=(e^{-\alpha\cdot t})^{'}+\delta(0)\cdot 1=\delta(0)-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Поскольку начальное значение ненулевое, импульсная характеристика содержит δ - функцию.

Вид импульсной характеристики дифференцирующей RC - цепи, при $\tau = 1$, приведен на рисунке 2.10.

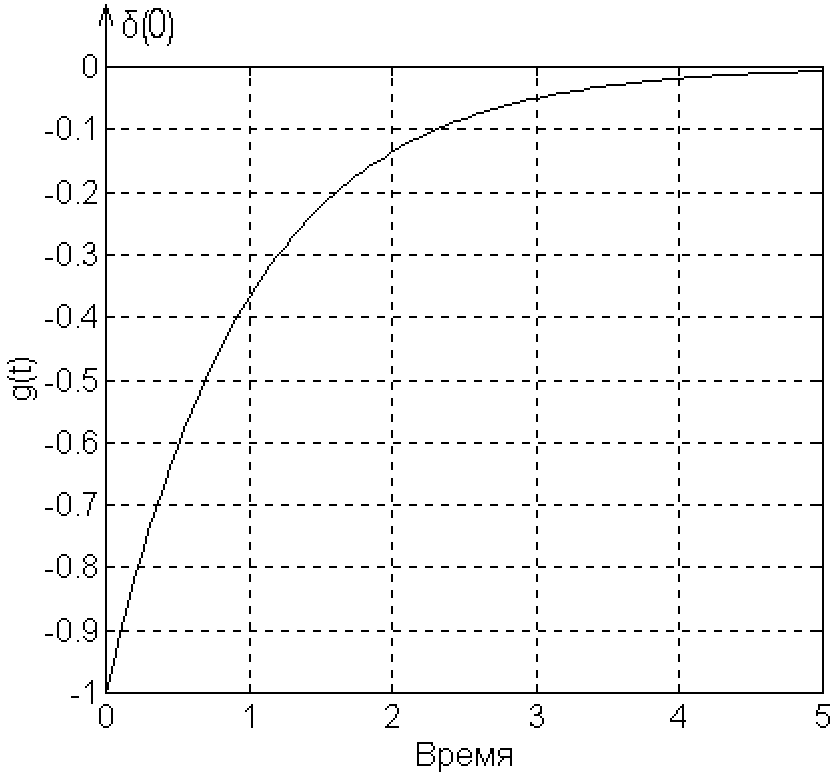

Рисунок 2.10 - Импульсная характеристика дифференцирующей RC - цепи

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе операторного выражения для выходного напряжения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = E(p) \cdot \frac{p}{p+\alpha} = 1 \cdot \frac{p}{p+\alpha} \rightarrow v(t) = \frac{d(\delta(0))/dt}{d/dt+\alpha} = \frac{\delta'(0)}{d/dt+\alpha}.$$

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения дифференцирующей RC - цепи

$$v'(t) + \alpha \cdot v(t) = \delta'(0).$$

Полученное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, содержащим в правой части производную δ - функции. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v'(t) = -\alpha \cdot v(t) + \delta'(0).$$

При интегрировании полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, нам понадобятся начальные условия.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий воспользуемся модифицированной теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2}{p + \alpha}.$$

Отметим, что в полученном дробно-рациональном отношении степень числителя выше степени знаменателя и простое взятие предела дает сразу ∞, скрадывая конечные составляющие начального значения.

В данной ситуации целесообразно воспользоваться модификацией теоремы операционного исчисления о начальном значении функции.

Модификация теоремы о начальном значении заключается в том, что вначале путем последовательного деления числителя на знаменатель выделяем целую и дробную части. Составляющие целой части дадут δ-функцию и ее производные, а остаток от деления в пределе, при $p \to \infty$, даст конечную часть начального условия.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v(0) = \lim_{t \to {}_{+}0} v(t) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2}{p + \alpha} = \lim_{p \to \infty} (p \cdot 1 - \frac{\alpha \cdot p}{p + \alpha}) = \delta(0) - \alpha.$$

Заметим, что полученное начальное условие, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t = 0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика дифференцирующей RC- цепи на единичный импульс на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается по аналогии с решением однородного уравнения, только константа при фундаментальном решении заменяется неизвестной функцией времени – варьируемой постоянной

$$v(t) = C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Подстановка предполагаемого решения и его производной в исходное уравнение дает

$$C'(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} = -\alpha \cdot C(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta'(0),$$

или

$$C'(t) = \delta'(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}.$$

Для определения варьируемой постоянной $C(t)$ проинтегрируем полученное выражение

$$C(t) = \int \delta'(0) \cdot e^{\alpha \cdot t} dt = -\alpha + C,$$

где C - новая постоянная интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство производной от δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta^{'}(0)\cdot dt = -f^{'}(0).$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. Для этого подставим выражение $C(t)$ в общее решение

$$v(t) = (-\alpha + C)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = -\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} + C\cdot e^{-\alpha\cdot t}.$$

Из начального условия $v(0) = \delta(0) - \alpha$, при $t = 0$, следует, что

$$\delta(0) - \alpha = -\alpha + C,$$

откуда получаем

$$C = \delta(0).$$

В результате, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике интегрирующей RC - цепи, получаем в виде

$$v(t) = (\delta(0) - \alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t} = \delta(0) - \alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t} = g(t).$$

Заметим, что полученное выражение совпадает с решением, полученным операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, непосредственно записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение Дифференциального уравнения первого порядка либо системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y^{'}(t) = A\cdot y(t) + F(t),$$

где $y(t),\ y^{'}(t),\ F(t)$ - в общем случае векторы функций; A - матрица коэффициентов системы, может быть представлено в виде

$$y(t) = e^{A\cdot t}\cdot y(0) + \int\limits_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot F(\tau)\cdot d\tau,$$

где τ - параметр времени; $e^{A\cdot t}$ - в случае системы уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов системы.

Применительно к нашему дифференциальному уравнению, решение запишется в виде

$$v(t) = e^{-\alpha\cdot t}\cdot v(0) + \int\limits_0^t e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot\delta^{'}(0)\cdot d\tau.$$

Принимая во внимание, что $v(0) = \delta(0) - \alpha$, и, интегрируя второе слагаемое, получаем решение, соответствующее импульсной характеристике дифференцирующей RC - цепи, в виде

$$v(t) = e^{-\alpha\cdot t}\cdot(\delta(0) - \alpha) - \alpha = \delta(0) - \underset{t>0}{\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}} - \underset{t=0}{\alpha} = g(t).$$

Учитывая, что второе слагаемое определено, при $t > 0$, а первое и третье слагаемые, при $t = 0$, после их объединения, окончательно получаем

$$v(t) = \delta(0) - \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} = g(t).$$

Как видим, полученное решение совпадает с предыдущими решениями и представляет импульсную характеристику дифференцирующей RC- цепи, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

Применение конкретного метода, определяется, как правило, субъективными и объективными факторами. Так операторный метод подкупает своей простотой, но проблематичен при автоматизации численно-аналитических исследований. Метод Коши, напротив, наиболее формализован и прост для реализации в современных системах аналитического исследования. Метод Лагранжа занимает в этом отношении промежуточное положение. Овладение каждым из проиллюстрированных методов позволит приобрести навык математических исследований, который пригодится при освоении специальных дисциплин и последующей инженерной и исследовательской деятельности.

Рассмотренные нами примеры определения временных характеристик простых RC- цепей, призваны проиллюстрировать основные понятия и определения, предлагаемую методику исследования, а также подчеркнуть актуальность математического обоснования элементов методики исследования.

2.4 Функциональные модели аналоговых систем

Функциональные модели аналоговых систем строятся путем соединения базового набора функциональных звеньев в соответствии со структурой дифференциального уравнения. В качестве базового набора функциональных звеньев дискретных систем используются звенья интеграторов, масштабные или пропорциональные звенья и звенья сумматоров.

Функциональная модель фактически отображает структуру соответствующего дифференциального уравнения. Звенья дифференциаторов, которые напрямую следуют из записи дифференциального уравнения, обычно не используют, так как они имеют частотную характеристику типа фильтров верхних частот и способствуют прохождению высокочастотных помех, что делает модели с такими звеньями менее устойчивыми. Здесь имеются в виду не только программные модели, но и реальные физические модели, например, на основе операционных усилителей, либо, реализованные на базе аналоговых ЭВМ.

С помощью набора операций реализуемых этими звеньями можно отобразить функционирование любой линейной аналоговой системы. Кроме того, известны пакеты функционального моделирования типа **Simulink** системы **MatLab,** позволяющие программно моделировать аналоговые и дискретные системы. В среде пакета **Simulink** с помощью “мыши” из библиотеки функциональных элементов выбираются соответствующие элементы, выносятся на поле графического редактора, соединяются между собой, подключаются дисплеи-индикаторы, выставляются параметры звеньев и производится запуск модели. На экранах дисплеев графически отображаются все необходимые характеристики моделируемой системы.

Так как функциональная модель связана со структурой дифференциального уравнения, то возможен и обратный переход от модели к дифференциальному уравнению.

Остановимся кратко на особенностях построения функциональных моделей дифференциальных уравнений аналоговых систем. В функциональных моделях или схемах аналоговых систем предполагается, что переменная $y^{(n)}(t)$ доступна для измерения. Сигнал, описываемый этой переменной, последовательно пропускается через звенья интеграторов, до тех пор, пока не получится $y(t)$. Соединение звеньев функциональной схемы производится в соответствии с дифференциальным уравнением, описывающим связь входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов и их производных соответствующего порядка.

На рисунке 2.11 изображена функциональная схема аналоговой системы, с рекурсией выходной переменной и ее производных, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка

$$y'''(t)+a_2\cdot y''(t)+a_1\cdot y'(t)+a_0\cdot y(t)=x(t),$$

где $x(t)$ - соответствует входной переменной, то есть внешнему воздействию на систему.

Отметим, что в данном случае правая часть дифференциального уравнения содержит только входное воздействие. Здесь задержанные и масштабированные производные выходной переменной по петле (каналу) обратной связи поступают на вход сумматора. В этом случае можно говорить о рекурсии (повторной обработке) выходной переменной и эту часть функциональной схемы аналоговой системы можно называть рекурсивной.

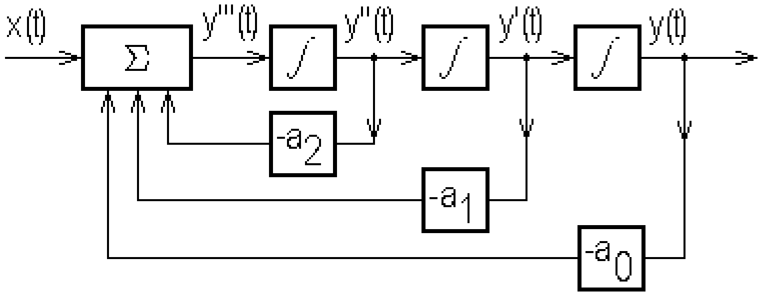

Рисунок 2.11 - Функциональная схема аналоговой системы с рекурсией выходной переменной и ее производных

В общем случае, правая часть дифференциального уравнения также может содержать взвешенную сумму входной переменной и ее производных. При этом потребуются дополнительные блоки дифференцирования и масштабирования входной переменной. Обычно, как уже отмечалось, стараются исключить блоки дифференцирования и минимизировать число блоков интегрирования, используя одни и те же блоки для интегрирования как входной, так и выходной переменной. В этом случае говорят о канонических функциональных схемах аналоговых систем.

На рисунке 2.12 изображена каноническая функциональная схема аналоговой системы, с рекурсией выходной переменной и ее производных и интегрированием входной переменной, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка

$$y'''(t)+a_2\cdot y''(t)+a_1\cdot y'(t)+a_0\cdot y(t)=b_3\cdot x'''(t)+b_2\cdot x''(t)+b_1\cdot x'(t)+b_0\cdot x(t).$$

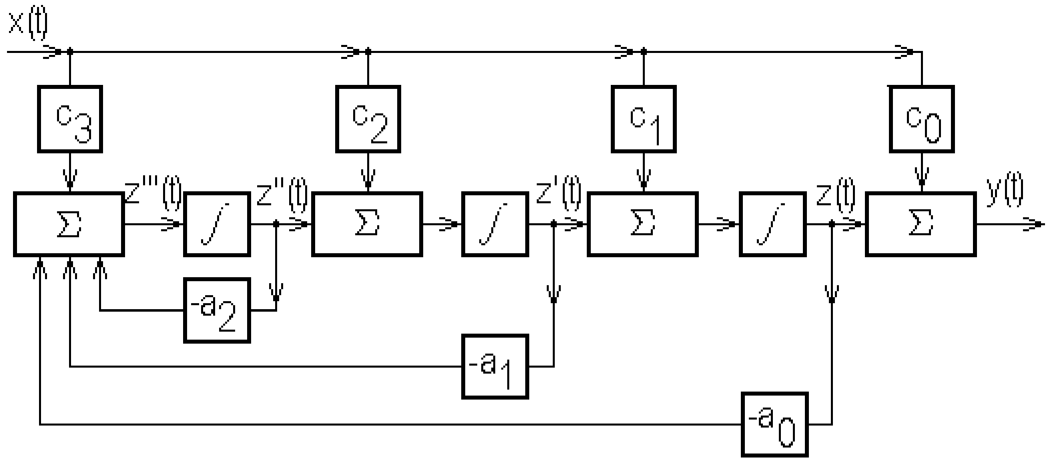

Рисунок 2.12 - Функциональная схема аналоговой системы с рекурсией выходной переменной и ее производных и интегрированием входной переменной

Здесь поток сигнала внутри аналоговой системы $z^{(i)}(t)$ представляет собой взвешенную сумму входной и выходной переменных и их производных, то есть является внутренней переменной состояния аналоговой системы. Звенья интегрирования являются общими для входной и выходной переменных. Функциональные схемы с минимальным числом интегрирующих звеньев, как уже отмечалось, называются каноническими, и существует несколько способов их построения. В данном случае построение функциональной схемы осуществляется на основе дифференциального уравнения аналоговой системы. Функциональная схема, как видим, содержит, как рекурсивную часть, так и нерекурсивную часть, связанную с передачей входной переменной и ее производных.

Заметим, что при такой канонической реализации дискретной системы значения масштабных множителей c_i отличаются от значений коэффициентов правой части дифференциального уравнения b_i.

Для установления взаимосвязи между масштабными множителями функциональной схемы и коэффициентами дифференциального уравнения запишем выражения для значений переменной состояния на выходах первого и последнего сумматоров, а также во внутренних точках схемы, соответствующих внутреннему состоянию аналоговой системы

$$y(t) = z(t) + c_0 \cdot x(t); \quad z(t) = y(t) - c_0 \cdot x(t);$$

$$z'(t) = y'(t) - c_0 \cdot x'(t) - c_1 \cdot x(t);$$

$$z''(t) = y''(t) - c_0 \cdot x''(t) - c_1 \cdot x'(t) - c_2 \cdot x(t);$$

$$z'''(t) = y'''(t) - c_0 \cdot x'''(t) - c_1 \cdot x''(t) - c_2 \cdot x'(t) =$$

$$= c_3 \cdot x(t) - a_2 \cdot z''(t) - a_1 \cdot z'(t) - a_0 \cdot z(t).$$

Раскрывая последнее выражение системы через предыдущие выражения, приходим к записи

$$y'''(t) - c_0 \cdot x'''(t) - c_1 \cdot x''(t) - c_2 \cdot x'(t) =$$

$$= -a_2 \cdot y''(t) + a_2 \cdot c_0 \cdot x''(t) + a_2 \cdot c_1 \cdot x'(t) + a_2 \cdot c_2 \cdot x(t) -$$

$$- a_1 \cdot y'(t) + a_1 \cdot c_0 \cdot x'(t) + a_1 \cdot c_1 \cdot x(t) -$$

$$- a_0 \cdot y(t) + a_0 \cdot c_0 \cdot x(t) +$$

$$+ c_3 \cdot x(t).$$

Приводя подобные составляющие, приходим к дифференциальному уравнению вида

$$y'''(t) + a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) =$$

$$= c_0 \cdot x'''(t) + c_1 \cdot x''(t) + c_2 \cdot x'(t) + c_3 \cdot x(t) +$$

$$+ a_2 \cdot c_0 \cdot x''(t) + a_2 \cdot c_1 \cdot x'(t) + a_2 \cdot c_2 \cdot x(t) +$$

$$+ a_1 \cdot c_0 \cdot x'(t) + a_1 \cdot c_1 \cdot x(t) +$$

$$+ a_0 \cdot c_0 \cdot x(t).$$

Сравнивая исходное дифференциальное уравнение с уравнением, полученным по функциональной схеме, приходим к выводу, что масштабные множители нерекурсивной части схемы c_i связаны с коэффициентами правой a_i и левой b_i частей исходного дифференциального уравнения рекуррентными соотношениями вида

$$c_0 = b_3;$$

$$c_1 = b_2 - a_2 \cdot c_0;$$

$$c_2 = b_1 - a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0;$$

$$c_3 = b_0 - a_2 \cdot c_2 - a_1 \cdot c_1 - a_0 \cdot c_0.$$

В общем виде, значения масштабных множителей нерекурсивной части использованной функциональной схемы реализации аналоговой системы, могут быть определены из рекуррентного соотношения

$$c_i = b_{n-i} - \sum_{k=1}^{i} a_{n-k} \cdot c_{i-k} \,,$$

где n - порядок дифференциального уравнения.

Из последней записи следует, что исходные коэффициенты правой части дифференциального уравнения связаны с масштабными множителями нерекурсивной части функциональной схемы матричным соотношением

$$\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \cdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Наоборот, масштабные коэффициенты нерекурсивной части функциональной схемы могут быть определены путем обращения указанной матрицы коэффициентов либо из приведенного рекуррентного соотношения.

В общем случае уравнение аналоговой физически реализуемой системы может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x^{(k)}(t) \,,$$

где $m \le n$ и называется дифференциальным уравнением.

В литературе используются также функциональные канонические модели, построенные на основе передаточных характеристик аналоговых систем, в частности, полученные на основе разложения передаточных характеристик в элементарные дроби. Для многоканальных аналоговых систем используются функциональные модели систем приведенных к нормальному виду. На этих моделях мы не будем здесь акцентировать внимания, так как они обычно рассматриваются в более специальных дисциплинах. Нашей задачей здесь является ознакомление с элементами функционального моделирования аналоговых систем.

3 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

3.1 Основные понятия и определения

Дифференциальным - называется уравнение связи неизвестной функции и/или ее производных.

Аргумент или аргументы функции называются независимыми переменными. В случае одной независимой переменной, **дифференциальное уравнение называется обыкновенным**, в противном случае, называется **уравнением в частных производных**.

Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение означает найти из уравнения связи неизвестную функцию, используя начальные или граничные условия.

Для однозначного определения частного решения дифференциального уравнения, кроме уравнения связи необходимы **дополнительные или независимые условия.** В качестве дополнительных условий часто используются начальные условия. Количество дополнительных условий, необходимых для определения частного решения, совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Начальные условия задают значения функции и/или ее производных при определенных значениях аргумента и позволяют из множества возможных решений выделить единственное или частное решение. В качестве начальных условий используются начальные значения функции решения и ее производных.

Граничные или краевые условия задают поведение функции решения и/или ее производных на границах интервала интегрирования и используются при решении граничных или краевых задач.

Задача Коши заключается в определении по дифференциальному уравнению неизвестной функции, удовлетворяющей начальному условию. Задача Коши имеет единственное решение обыкновенного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Граничная задача заключается в определении неизвестной функции, удовлетворяющей набору граничных условий. Граничные условия определяют поведение искомой функции на границах области решения. В отличие от задачи Коши, граничная задача может не иметь решения либо иметь одно или несколько решений.

Старшая степень, входящей в уравнение **производной**, **определяет порядок обыкновенного дифференциального уравнения**.

Уравнение, разрешенное относительно старшей производной, называется уравнением приведенным к **нормальной форме Коши**.

Если в уравнение, кроме неизвестной функции, и ее производных, входит заданная функция или совокупность функций, включая константы, то уравнение называется **неоднородным**, в противном случае - **однородным**.

Коэффициенты, стоящие при неизвестной функции, и ее производных, называются коэффициентами дифференциального уравнения. Если коэффициенты дифференциального уравнения являются функцией независимой переменной, то уравнение называется уравнением с **переменными коэффициентами**, иначе с **постоянными коэффициентами**. Если коэффициенты являются линейными функциями независимой переменной, то уравнение называется **линейным,** иначе **нелинейным.** Уравнения с постоянными коэффициентами являются частным случаем линейных уравнений. Если коэффициенты являются периодическими функциями независимой переменной, то уравнение называется уравнением с **периодическими коэффициентами.**

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения наиболее изученный в математике вид дифференциальных уравнений. Многие задачи физики, техники, радиотехники и радиоэлектроники формулируются и решаются в виде линейных дифференциальных уравнений.

В данной дисциплине рассмотрим постановку и решение задачи Коши, применительно к решению прикладных задач радиотехники и радиоэлектроники.

3.2 Методы интегрирования дифференциальных уравнений

Из всего множества известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в данной дисциплине акцентируем основное внимание на наиболее универсальных методах, используемых при интегрировании дифференциальных уравнений, как с переменными, так и постоянными коэффициентами. Такими методами являются – операторный, Лагранжа и Коши. В учебной литературе обычно выделяется решение в форме Коши, однако особенности представления решения в форме Коши вполне можно трактовать как отдельный метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. На отбор методов интегрирования в данном случае повлияли их универсальность, широкое распространение и пригодность методов Лагранжа и Коши для численно-аналитических исследований.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Знакомство с методами интегрирования дифференциальных уравнений начнем с уравнений первого порядка. Запишем неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом

$$D(y) = y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x),$$

где $D(y)$- линейный дифференциальный оператор от функции $y(x)$; $y(x)$, $y'(x)$- неизвестная функция, и ее производная; $a_0(x)$- переменный коэффициент; $f(x)$- известная функция, определяемая в технических задачах внешним воздействием на физическую систему. Предполагается, что $a_0(x),\ f(x)$- непрерывные функции от аргумента x в некотором интервале (a,b). Соответствующее однородное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y'(x)+a_0(x)\cdot y(x)=0.$$

Дифференциальные уравнения первого порядка однородное и неоднородное, но с постоянными коэффициентами, имеют вид

$$y'(x)+a_0\cdot y(x)=0,$$

$$y'(x)+a_0\cdot y(x)=f(x).$$

Наиболее простым и распространенным в учебной литературе является операторный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа. Наиболее просто суть метода изложить на примере дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. На уравнения с переменными коэффициентами операторный метод распространяется лишь в определенных случаях.

Заметим сразу, что операторный метод применим лишь в случае существования преобразования Лапласа от функций правой части дифференциального уравнения.

Операторный метод интегрирования дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. В этом методе дифференциальное уравнение относительно оригинала неизвестной функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$ переводится в область изображений. Переход в область изображений осуществляется с помощью преобразования Лапласа правой и левой частей уравнения, при соблюдении соответствующих условий.

Пусть оригиналам функций $y(x)$ и $f(x)$ соответствуют изображения, $Y(p)$ и $F(p)$. Оригинал производной искомой функции $y'(x)$ определяется на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$y'(x)\Leftrightarrow p\cdot Y(p)-y(0),$$

где $y(0)$- начальное значение функции $y(x)$, соответствующее начальному условию исходного дифференциального уравнения.

Заменяя в исходном дифференциальном уравнении правую и левую части их изображениями, приходим к алгебраическому уравнению

$$p\cdot Y(p)-y(0)+a_0\cdot Y(p)=F(p).$$

Здесь предполагается, что начальное значение функции правой части уравнения равно нулю $f(0)=0$.

Выделяя изображение неизвестной функции

$$Y(p)=\frac{F(p)+y(0)}{p+a_0}=\frac{M(p)}{N(p)}=Q(p),$$

приходим к дробно-рациональному представлению.

Далее, применяя обратное преобразование Лапласа к изображению искомой функции, находим ее оригинал, соответствующий решению исходного дифференциального уравнения при заданном начальном условии $y(0)$.

Заметим, что начальное условие оказывается в числителе дробно-рационального соотношения в сумме с изображением входного воздействия. Знаменатель дробно-рационального соотношения соответствует левой части дифференциального уравнения в виде характеристической части. Приравнивая знаменатель дробно-рационального соотношения нулю, получаем характеристическое уравнение $p+a_0=0$. В данном случае видим, что корень характеристического уравнения равен $\alpha=-a_0$.

Отметим также, что, в соответствии с классическим операционным исчислением, оригинал определен лишь для правильных дробно-рациональных отношений, когда степень числителя ниже степени знаменателя. В противном случае необходимо выделить целую и дробную части выражения и применить преобразование Лапласа и элементы операторной алгебры. Целым частям при этом будут соответствовать δ-функция и ее производные.

В том случае, когда изначально известно лишь схемное решение исследуемого устройства, мы сразу получаем дробно-рациональное соотношение для выходной переменной в виде передаточной функции в операторной форме и, применяя обратное преобразование Лапласа, находим оригинал искомой функции, как реакцию на входное воздействие. При таком подходе начальные условия выходной переменной не задаются, так как они уже содержатся в числителе дробно-рационального выражения передаточной функции.

В том случае, если оригинал входного воздействия соответствует δ-функции $f(x)=\delta(x)\Leftrightarrow F(p)=1$ и начальные условия нулевые, в данном случае $y(0)=0$, то оригинал выходной реакции соответствует обратному преобразованию Лапласа от выражения $\dfrac{1}{N(p)}\Leftrightarrow G(x)$ и называется функцией Грина.

Таким образом, функция Грина определяет реакцию на δ- функцию при нулевых начальных условиях. Реакция на истинное воздействие при этом может быть определена интегралом свертки

$$y(x)=G(x)\otimes M(x)=\int_0^x G(\xi)\cdot M(x-\xi)\cdot d\xi\,,$$

где $M(x)\Leftrightarrow M(p)=F(p)+y(0)$- преобразование Лапласа от истинного входного воздействия и начальных условий.

При входном воздействии соответствующем единичному скачку или функции Хевисайда $f(x)=1(x)\Leftrightarrow F(p)=1/\,p$ и нулевых начальных условиях

$y(0)=0$, оригинал выходной реакции соответствует обратному преобразованию Лапласа от выражения $\dfrac{1}{p\cdot N(p)}=Z(p)\Leftrightarrow Z(x)$. Изображение выходной функции на произвольное воздействие определяется при этом выражением

$$Y(p)=p\cdot Z(p)\cdot M(p).$$

Оригинал выходной реакции на истинное воздействие определяется при этом интегралом Дюамеля

$$y(x)=Z^{'}(x)\otimes M(x)=\int_0^x Z^{'}(\xi)\cdot M(x-\xi)\cdot d\xi,$$

где $M(x)\Leftrightarrow M(p)=F(p)+y(0)$.

На дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами операторный метод удается распространить лишь в случае, когда коэффициенты являются многочленами относительно независимой переменной. Иногда удается решить дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, преобразуя его к простому виду путем соответствующей замены переменных, используя метод подобия. Более подробно на этих подходах останавливаться не будем.

Среди известных методов интегрирования наиболее сильным является метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа. Метод Лагранжа применим к дифференциальным уравнениям, как с переменными, так и с постоянными параметрами. В связи с этим, изложение метода проведем для уравнений с переменными параметрами.

Метод Лагранжа для дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Запишем однородное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме Коши, то есть разрешенное относительно производной

$$y^{'}(x)=-a_0(x)\cdot y(x).$$

Можно убедится, что общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x)=C\cdot e^{-\int a_0(x)dx},$$

где C - некоторая постоянная, определяемая из начальных условий. На самом деле, подставляя предполагаемое решение в уравнение, приходим к тождеству

$$-C\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx}=-C\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx}.$$

Теперь запишем неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме Коши

$$y^{'}(x)=-a_0(x)\cdot y(x)+f(x).$$

Общее решение неоднородного уравнения предлагается искать в виде

$$y(x)=C(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx},$$

где $C(x)$ - теперь некоторая функция от независимой переменной, или варьируемая постоянная, определяемая из условия удовлетворения решения неоднородному уравнению.

Для определения варьируемой постоянной подставим предполагаемое решение в исходное уравнение

$$-C(x)\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx}+C^{'}(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx}= \\ =-C(x)\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int a_0(x)dx}+f(x),$$

откуда приходим к уравнению

$$C^{'}(x)=e^{\int a_0(x)dx}\cdot f(x).$$

Теперь, для определения варьируемой постоянной, проинтегрируем последнее соотношение

$$C(x)=\int e^{\int a_0(x)dx}\cdot f(x)dx+C,$$

где C- новая постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Подставляя выражение для варьируемой постоянной $C(x)$ в общее решение, получаем

$$y(x)=e^{-\int a_0(x)dx}\cdot(\int e^{\int a_0(x)dx}\cdot f(x)dx+C)$$

или

$$y(x)=C\cdot e^{-\int a_0(x)dx}+e^{-\int a_0(x)dx}\cdot\int e^{\int a_0(x)dx}\cdot f(x)dx.$$

Из последнего соотношения следует известный из общей теории факт, что общее решение неоднородного уравнения можно представить суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения находится после определения постоянной интегрирования C из начального условия, то есть по известному значению $y_0=y(x_0)$.

Следующим методом интегрирования дифференциальных уравнений является метод Коши, позволяющий в явной форме записать частное решение через известные начальные условия.

Метод Коши для дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Запишем неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме Коши

$$y^{'}(x)=-a_0(x)\cdot y(x)+f(x).$$

Общее решение неоднородного уравнения предлагается искать в виде

$$y(x)=C(x)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a_0(x)dx},$$

где $C(x)$- теперь некоторая функция от независимой переменной, такая, что $C(x_0)=y(x_0)=y_0$.

Подставляя предполагаемое решение в исходное уравнение

$$-C(x)\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} + C'(x)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} =$$
,
$$= -C(x)\cdot a_0(x)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} + f(x)$$

приходим к уравнению

$$C'(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} \cdot f(x).$$

Для определения варьируемой постоянной, проинтегрируем последнее соотношение

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} \cdot f(x)dx + y_0,$$

где y_0 - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Подставляя выражение для варьируемой постоянной $C(x)$ в общее решение, получаем

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} \cdot y_0 + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{x} a_0(x)dx} \cdot f(x)dx$$

решение неоднородного уравнения в форме Коши, где y_0 - произвольное, а x_0 - фиксированное число из интервала (a,b). Это выражение при фиксированном y_0 дает решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения с начальными данными x_0, y_0.

Из общего решения задачи Коши неоднородного линейного дифференциального уравнения следует, что начальное значение y_0 можно задавать произвольно, если начальное значение x_0 принадлежит интервалу непрерывности функций $a_0(x)$ и $f(x)$. Кроме того, решение задачи Коши определено при всех значениях x из интервала непрерывности функций $a_0(x)$ и $f(x)$.

Из общего решения также следует, что всякое решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией, как независимой переменной x, так и начальных данных x_0 и y_0.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка. Продолжим знакомство с методами интегрирования дифференциальных уравнений на примере уравнений второго порядка. На уравнениях второго порядка начинают в полной мере проявляться особенности методов интегрирования. Запишем общий вид неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$D(y) = y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x),$$

где $D(y)$- линейный дифференциальный оператор от функции $y(x)$; $y(x),\ y'(x),\ y''(x)$- неизвестная функция, и ее производные; $a_i(x)$- переменные коэффициенты; $f(x)$- известная функция. Предполагается, что $a_i(x),\ f(x)$- непрерывные функции от аргумента x в некотором интервале (a,b).

Операторный метод интегрирования дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$D(y) = y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x).$$

В этом методе дифференциальное уравнение относительно оригинала неизвестной функции $y(x)$ и ее производных $y'(x)$ и $y''(x)$ переводится в область изображений. Переход в область изображений осуществляется с помощью преобразования Лапласа правой и левой частей уравнения, при соблюдении соответствующих условий.

Пусть оригиналам функций $y(x)$ и $f(x)$ соответствуют изображения, $Y(p)$ и $F(p)$. Оригиналы производных искомой функции $y'(x)$ и $y''(x)$ определяются на основании теоремы операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$y'(x) \Leftrightarrow p \cdot Y(p) - y(0),$$

$$y''(x) \Leftrightarrow p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0),$$

где $y(0),\ y'(0)$- начальное значение функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$.

Заменяя в исходном дифференциальном уравнении правую и левую части их изображениями, приходим к алгебраическому уравнению

$$p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) + a_1 \cdot p \cdot Y(p) - a_1 \cdot y(0) + a_0 \cdot Y(p) = F(p).$$

Здесь предполагается, что начальное значение функции правой части и ее производной равны нулю $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$.

Выделяя изображение неизвестной функции

$$Y(p) = \frac{F(p) + y'(0) + (p + a_1) \cdot y(0)}{p^2 + a_1 \cdot p + a_0} = \frac{M(p)}{N(p)} = Q(p),$$

приходим к дробно-рациональному представлению.

Заметим, что начальные условия оказываются в числителе дробно-рационального соотношения в сумме с изображением входного воздействия. Знаменатель дробно-рационального соотношения соответствует левой части дифференциального уравнения в виде характеристической части.

Приравнивая знаменатель дробно-рационального соотношения нулю, получаем характеристическое уравнение $p^2 + a_1 \cdot p + a_0 = (p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2) = 0$, где $-\alpha_1,\ -\alpha_2$ - корни характеристического уравнения.

Далее, применяя обратное преобразование Лапласа к изображению искомой функции, находим ее оригинал, соответствующий решению исходного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях $y(0)$ и $y^{'}(0)$.

Применительно к исследованию реакции цепей на произвольное входное воздействие при заданном схемном решении, мы сразу получаем передаточное соотношение, относительно выходной переменной в виде дробно рациональной функции, не обращаясь к дифференциальному уравнению. Далее, применяя обратное преобразование Лапласа, находим оригинал выходной переменной, как реакции на входное воздействие. Начальные данные при этом уже автоматически учтены в передаточной функции.

Как уже отмечалось, операторный метод удается распространить на дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами лишь в частных случаях.

Метод Лагранжа для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Перейдем к изложению метода Лагранжа применительно к дифференциальному уравнению второго порядка.

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$D(y) = y^{''}(x) + a_1(x) \cdot y^{'}(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x).$$

Как известно, общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка запишется в виде

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x),$$

где $y_1(x),\ y_2(x)$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения, найденная одним из способов; $C_1,\ C_2$ - постоянные, определяемые из начальных условий.

Заметим, что фундаментальная система решений представляет собой независимый набор функций, через которые любое решение уравнения выражается в виде линейной комбинации фундаментальных решений.

Общее решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x),$$

где $C_1(x),\ C_2(x)$ - некоторые варьируемые постоянные, подлежащие определению из условия удовлетворения неоднородному уравнению

$$D(y(x)) = D(C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)) = f(x).$$

Как видим, при подстановке предполагаемого решения в исходное уравнение вместо одного уравнения второго порядка относительно функции $y(x)$, мы получим уравнение второго порядка, но уже относительно функций

$y_1(x),\ y_2(x),\ C_1(x),\ \ C_2(x)$. Можно, однако искомые функции $C_1(x),\ \ C_2(x)$ подчинить дополнительному условию, при котором вторые производные от этих функций не появятся.

Рассмотрим эти дополнительные условия, называемые условиями Лагранжа. Вначале продифференцируем предполагаемое решение по аргументу x

$$y'(x) = C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) + C_2(x)\cdot y_2'(x).$$

В качестве дополнительного условия положим

$$C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0,$$

тогда первая производная перепишется в виде

$$y'(x) = C_1(x)\cdot y_1'(x) + C_2(x)\cdot y_2'(x).$$

Найдем теперь вторую производную от предполагаемого решения

$$y''(x) = C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_1(x)\cdot y_1''(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) + C_2(x)\cdot y_2''(x).$$

Подставим выражения для $y(x),\ \ y'(x),\ \ y''(x)$ в исходное неоднородное уравнение и приведем подобные

$$C_1(x)\cdot D(y_1(x)) + C_2(x)\cdot D(y_2(x)) + C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x).$$

Так как фундаментальная система решений удовлетворяет однородным уравнениям

$$D(y_1(x)) = 0,\quad D(y_2(x)) = 0,$$

то результат подстановки представится в виде

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x).$$

В итоге дополнительное условие Лагранжа и результат подстановки дают разрешающую систему уравнений

$$\begin{matrix} C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_2'(x)\cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x) + C_2'(x)\cdot y_2'(x) = f(x) \end{matrix},$$

позволяющих определить варьируемые постоянные $C_1(x),\ C_2(x)$.

Относительно $C_1'(x),\ C_2'(x)$, данная система является линейной алгебраической, поэтому, решая ее, например, по правилу Крамера, найдем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_2(x)\cdot y_1'(x);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -y_2(x)\cdot f(x);\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\cdot f(x).$$

Откуда непосредственно можем записать

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \varphi_1(x),\quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ - непрерывные функции от аргумента x, в некотором интервале $(a,\ b)$.

Проинтегрировав найденные функции, найдем варьируемые постоянные $C_1(x),\ C_2(x)$

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1 = \psi_1(x) + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2 = \psi_2(x) + C_2,$$

где $C_1,\ C_2$ - новые постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Подставляя, определенные таким способом, варьируемые постоянные $C_1(x),\ C_2(x)$, в общее решение неоднородного уравнения, получим

$$y(x) = (\psi_1(x) + C_1) \cdot y_1(x) + (\psi_2(x) + C_2) \cdot y_2(x)$$

или

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \psi_1(x) \cdot y_1(x) + \psi_1(x) \cdot y_2(x).$$

Из последнего соотношения видно, что общее решение неоднородного уравнения можно представить суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения находится после определения постоянных интегрирования C_1, C_2 из начальных условий, то есть, по известным значениям $y_0 = y(x_0),\ y_0^{'} = y^{'}(x_0)$.

Метод Коши для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$D(y) = y^{''}(x) + a_1(x) \cdot y^{'}(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x).$$

Требуется найти решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y^{'}(x_0) = y_0^{'}$, для любого x_0 из интервала (a, b).

Для вывода решения в форме Коши воспользуемся общим решением неоднородного дифференциального уравнения полученного методом Лагранжа

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \psi_1(x) \cdot y_1(x) + \psi_1(x) \cdot y_2(x)$$

и представим его в виде

$$y(x) = \begin{matrix} y_1(x) & y_2(x) \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x) + C_1 \\ \psi_2(x) + C_2 \end{bmatrix},$$

где $\psi_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_1(x)dx;\quad \psi_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_2(x)dx.$

Производная общего решения, соответственно, будет иметь вид

$$y^{'}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x) + C_1 \\ \psi_2(x) + C_2 \end{bmatrix} + \begin{matrix} y_1(x) & y_2(x) \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix}.$$

Выразим начальные значения $y(x_0) = y_0,\ y^{'}(x_0) = y_0^{'}$

$$y(x_0) = \quad y_1(x_0) \quad y_2(x_0) \quad \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) + C_1 \\ \psi_2(x_0) + C_2 \end{bmatrix}$$

$$y_0^{'}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{'}(x_0) & y_2^{'}(x_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) + C_1 \\ \psi_2(x_0) + C_2 \end{bmatrix} + \quad y_1(x_0) \quad y_2(x_0) \quad \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_2(x_0) \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\psi_1(x_0) = 0, \quad \psi_2(x_0) = 0,$$

$$y_1(x_0) \quad y_{2}.(x_0) \quad \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_2(x_0) \end{bmatrix} = \quad y_1(x_0) \quad y_{2}.(x_0) \quad \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{-y_2(x_0) \cdot f(x_0)}{\Delta} \\ \dfrac{y_1(x_0) \cdot f(x_0)}{\Delta} \end{bmatrix} = 0,$$

вектор начальных условий можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y^{'}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1^{'}(x_0) & y_2^{'}(x_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{bmatrix}$$

представляет собой фундаментальную матрицу линейно независимого набора решений однородного дифференциального уравнения второго порядка. Известно, что независимый набор решений образует базис линейного пространства и в начальной точке x_0 он может быть представлен в каноническом виде

$$\Phi(x_0) = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда из последнего соотношения следует

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y^{'}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

что позволяет записать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = y(x_0) \cdot y_1(x) + y^{'}(x_0) \cdot y_2(x) + \psi_1(x) \cdot y_1(x) + \psi_1(x) \cdot y_2(x).$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения в форме Коши однозначно определяется из начальных условий, проходит через точку $(x_0,\ y_0,\ y_0^{'})$ и представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения находится при задании конкретных значений $x_0,\ y_0 = y(x_0),\ y_0^{'} = y^{'}(x_0)$.

3.3 Элементы общей теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Элементы общей теории однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Знакомство с элементами общей теории дифференциальных уравнений n- го порядка с переменными коэффициентами удобно начать с однородных уравнений. Рассмотрим общую форму однородного линейного дифференциального уравнения n- го порядка

$$D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y^{(1)} + a_0(x) \cdot y = 0,$$

где $y^{(i)} = y^{(i)}(x)$; $D(y)$- линейный дифференциальный оператор от функции $y(x)$.

Известно, что уравнение n- го порядка имеет n частных решений. Относительно решений однородного уравнения известны следующие **теоремы**:

1) если $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_k(x)$ -частные решения уравнения, то их линейная комбинация

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \cdots + C_k \cdot y_k(x)$$

также является решением уравнения;

2) общее решение уравнения n- го порядка представимо линейной комбинацией n независимых частных решений

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \cdots + C_n \cdot y_n(x).$$

Система функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$, определенных на интервале a, b , является независимой, если линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \cdots + \alpha_n \cdot y_n(x) = 0,$$

при всех $\alpha_i = 0$ и любого x, принадлежащего интервалу a, b . Кроме того, доказывается, что **независимой системе функций соответствует отличный от нуля функциональный определитель Вронского**

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема: если решения $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ однородного линейного уравнения, с непрерывными на интервале a, b коэффициентами, являются линейно независимыми, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Любая система из n независимых частных решений однородного линейного дифференциального уравнения n- го порядка, определенных на интервале a,b , называется фундаментальной системой.

Теорема: если $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ - фундаментальная система решений однородного линейного уравнения, то

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \cdots + C_n \cdot y_n(x),$$

есть общее решение однородного уравнения.

Можно также сформулировать следующие положения:

1) максимальное число линейно независимых частных решений, однородного линейного уравнения с непрерывными на интервале a, b коэффициентами, равно порядку уравнения;

2) при любых начальных условиях, все другие решения уравнения являются линейной комбинацией линейно независимых частных решений.

Таким образом, для решения однородного линейного дифференциального уравнения n- го порядка необходимо найти n линейно независимых частных решений. Общее решение уравнения получится как линейная комбинация этих частных решений.

Если известна фундаментальная система решений $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$, то, используя определитель Вронского, можно построить дифференциальное уравнение, решением которого является эта система функций. Для доказательства добавим к фундаментальной системе решений дополнительное решение y и распишем определитель Вронского расширенной линейно зависимой системы

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам последнего столбца, получим искомое уравнение

$$y^{(n)} + \frac{W_{n-1}}{W} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + \frac{W_1}{W} \cdot y = 0,$$

где $W = \Delta_{nn}$ - определитель Вронского; $W_i = \Delta_{in}$ - алгебраическое дополнение определителя Вронского.

Элементы общей теории однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Перейдем к рассмотрению однородных линейных дифференциальных уравнений n- го порядка с постоянными коэффициентами

$$D(y) = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y^{(1)} + a_0 \cdot y = 0.$$

Фундаментальная система решений в данном случае ищется в виде $y = e^{kx}$, где k- неизвестный коэффициент. Подставляя предполагаемое решение в исходное уравнение, и учитывая, что общий множитель e^{kx} не равен нулю, приходим к характеристическому уравнению

$$k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot k + a_0 = 0.$$

Структура корней характеристического уравнения определяет структуру фундаментальной системы решений. Как известно, структура корней характеристического полинома может иметь следующие особенности.

1. Все корни характеристического уравнения $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$ действительные и различные. В этом случае фундаментальная система решений образуется линейно независимыми функциями

$$z_1 = e^{k_1 \cdot x};\ z_2 = e^{k_2 \cdot x};\ \ \cdots;\ \ z_n = e^{k_n \cdot x},$$

на интервале $(-\infty,\ +\infty)$ и общее решение однородного уравнения представляется в виде

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot z_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{k_i \cdot x}.$$

2. Все корни характеристического уравнения различны, но имеется $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m$ действительных корней и $2 \cdot l$ комплексно-сопряженных корней $k_i = \alpha_i \pm j \cdot \beta_i$ и $n = m + 2 \cdot l$. Учитывая, что любой паре комплексно-сопряженных корней соответствуют решения

$$z_1 = e^{(\alpha + j \cdot \beta) \cdot x}; \quad z_2 = e^{(\alpha - j \cdot \beta) \cdot x},$$

попарно группируя их, получаем

$$\begin{aligned}
&c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot x} + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot x} = \\
&= c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot (\cos(\beta \cdot x) + j \cdot \sin(\beta \cdot x)) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot (\cos(\beta \cdot x) - j \cdot \sin(\beta \cdot x)) = \\
&= (c_1 + c_2) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + j \cdot (c_1 - c_2) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) = \\
&= C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x).
\end{aligned}$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{k_i \cdot x} = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot e^{k_i \cdot x} + \cdots \\
\cdots + \sum_{i=1}^{l} C_{m+i} \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \cos(\beta_i \cdot x) + \sum_{i=1}^{l} C_{m+l+i} \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \sin(\beta_i \cdot x).
\end{aligned}$$

Можно доказать, что данная система частных решений образует линейно независимую систему функций, то есть фундаментальную систему.

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Каждому действительному корню k_i кратности m, соответствует набор независимых частных решений

$$e^{k_i \cdot x},\ x \cdot e^{k_i \cdot x},\ x^2 \cdot e^{k_i \cdot x},\ \cdots,\ x^{m-1} \cdot e^{k_i \cdot x},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней $k_i = \alpha_i \pm j \cdot \beta_i$, кратности m, соответствует m пар частных решений вида

$$e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \cos(\beta_i \cdot x),\ e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \sin(\beta_i \cdot x);$$
$$x \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \cos(\beta_i \cdot x),\ x \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \sin(\beta_i \cdot x);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{m-1} \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \cos(\beta_i \cdot x),\ x^{m-1} \cdot e^{\alpha_i \cdot x} \cdot \sin(\beta_i \cdot x).$$

В этом случае также образуется система линейно независимых функций или фундаментальная система решений и общее решение также имеет вид

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot z_i(x).$$

Элементы общей теории неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Прейдем к рассмотрению неоднородных линейных дифференциальных уравнений n - го порядка

$$D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y^{(1)} + a_0(x) \cdot y = f(x),$$

где $f(x) \neq 0;$ $a_0(x),\ a_1(x),\ \cdots,\ a_{n-1}(x)$ - непрерывные функции на отрезке a, b . Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$D(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y^{(1)} + a_0(x) \cdot y = 0.$$

В данном случае имеет место следующие **теоремы:**

1) если известно какое-нибудь частное решение $y^*(x)$ неоднородного уравнения и общее решение $\overline{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$ соответствующего однородного уравнения, где C_i - произвольные постоянные; $y_i(x)$ - линейно независимые частные решения однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения равно $y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x)$;

2) если правая часть неоднородного уравнения есть сумма нескольких функций, то частное решение этого уравнения равно сумме частных решений, удовлетворяющих каждой функции в отдельности.

Метод Лагранжа для дифференциального уравнения n - го порядка с переменными коэффициентами. Запишем общий вид неоднородного линейного дифференциального уравнения n - го порядка с переменными коэффициентами

$$D(y) = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x),$$

где $D(y)$ - линейный дифференциальный оператор от функции $y(x)$; $y(x),\ y^{(i)}(x)$ - неизвестная функция, и ее производные; $a_i(x)$ - переменные коэффициенты; $f(x)$ - известная функция. Предполагается, что $a_i(x),\ f(x)$ - непрерывные функции от x в некотором интервале (a, b).

Идея метода вариаций произвольных постоянных или метода Лагранжа основана на **теореме:** если известно общее решение однородного уравнения $\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$, где $y_i(x)$ - фундаментальная система решений, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения представимо в виде $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i(x)$, где $C_i(x)$ - неизвестные функции (произвольные постоянные).

Для доказательства, в данном случае, используется метод вариаций произвольных постоянных, известный как метод Лагранжа. Для определения неизвестных функций, прежде всего, необходимо, чтобы общее решение удовлетворяло заданному неоднородному уравнению n - го порядка. Далее необходимо наложить $(n-1)$ условие, для однозначного выбора функций $C_i(x)$. В качестве дополнительных условий полагается, что линейные комбинации фундаментальных функций $y_i(x)$ и их производных, до $(n-2)$-го порядка включительно, с производными $C_i^{(1)}(x)$, равны нулю

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x) \cdot y_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x) \cdot y_i^{(1)} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x) \cdot y_i^{(n-2)} = 0.$$

Данные условия гарантируют, что при нахождении производных от предполагаемого решения $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i(x)$ не будут возникать производные от неизвестных функций $C_i(x)$ выше первого порядка.

Тогда, исходя из дополнительных условий, найдем производные предполагаемого решения, с целью последующей подстановки в исходное уравнение

$$y^{(1)}(x)=\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i\right]^{(1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(1)};$$

$$y^{(2)}(x)=\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i\right]^{(2)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(2)};$$

…………………………………………………

$$y^{(n-1)}(x)=\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i\right]^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(n-1)};$$

$$y^{(n)}(x)=\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i\right]^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-1)}.$$

Заменяя в исходном уравнении функцию решения, и ее производные на соответствующие выражения, получим

$$D(y)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-1)}+$$

$$+a_{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(n-1)}+\cdots+a_1\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i^{(1)}+a_0\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot y_i=f(x).$$

Приводя подобные

$$D(y)=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\cdot\left[y_i^{(n)}+a_{n-1}\cdot y_i^{(n-1)}+\cdots+a_1\cdot y_i^{(1)}+a_0\cdot y_i\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-1)}=f(x),$$

и, учитывая, что выражение в квадратных скобках есть однородное уравнение

$$y_i^{(n)}+a_{n-1}\cdot y_i^{(n-1)}+\cdots+a_1\cdot y_i^{(1)}+a_0\cdot y_i=0,$$

окончательно получаем еще одно определяющее уравнение

$$D(y)=\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-1)}=f(x).$$

Таким образом, для определения производных неизвестных коэффициентов $C_i^{(1)}(x)=C_i^{'}(x)$, получаем определяющую систему из n-уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(1)}=0;$$

……………………

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-2)} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(1)}(x)\cdot y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Решая определяющую систему, относительно $C_i^{(1)}(x)$, любым из известных способов, находим производные искомых функций-коэффициентов. Данная система имеет единственное решение $C_i^{(1)}(x) = \varphi_i(x)$, так как определитель системы есть Вронскиан $W(x)$, не равный нулю. Для определения самих коэффициентов необходимо проинтегрировать выражения для производных

$$C_i(x) = \int C_i^{(1)}(x)dx + \tilde{C}_i = \int \varphi_i(x)dx + \tilde{C}_i = \psi_i(x) + \tilde{C}_i,$$

где $\varphi_i(x) = W_i(x)/W(x) = f(x)\cdot\Delta_{n\,i}/\Delta$; $W_i(x) = f(x)\cdot\Delta_{n\,i}$ - алгебраическое дополнение определителя Вронского; $W(x) = \Delta$ - определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Известно, что интегрирование функций производится с точностью до постоянных интегрирования $\tilde{C}_i$, которые, в свою очередь, определяются из начальных условий исходного дифференциального уравнения. Как было отмечено выше, число требуемых начальных условий равно порядку дифференциального уравнения.

Подставляя выражение $C_i(x)$, в выражение для предполагаемого решения, получаем

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_i\cdot y_i = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

что решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Заметим еще раз, что методом вариации произвольных постоянных можно интегрировать неоднородные дифференциальные уравнения, как с переменными, так и с постоянными коэффициентами.

Метод Коши для дифференциального уравнения n- го порядка с переменными коэффициентами. Запишем общий вид неоднородного линейного дифференциального уравнения n- го порядка с переменными коэффициентами

$$D(y)=y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)\cdot y^{(1)}(x)+a_0(x)\cdot y(x)=f(x),$$

где $D(y)$- линейный дифференциальный оператор от функции $y(x)$; $y(x),\ y^{(i)}(x)$- неизвестная функция, и ее производные; $a_i(x)$- переменные коэффициенты; $f(x)$- известная функция. Предполагается, что $a_i(x),\ f(x)$- непрерывные функции от x в некотором интервале (a,b).

Требуется найти решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее дополнительным, в данном случае начальным условиям $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, для любого x_0 из интервала (a,b).

Для вывода решения в форме Коши воспользуемся общим решением неоднородного дифференциального уравнения полученного методом Лагранжа

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x)\cdot y_i+\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_i\cdot y_i=\sum_{i=1}^{n}[\psi_i(x)+\tilde{C}_i]\cdot y_i$$

и представим его в виде

$$y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1(x)+C_1\\ \psi_2(x)+C_2\\ \cdots\\ \psi_n(x)+C_n\end{bmatrix},$$

где $\psi_1(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_1(x)dx;\ \ \psi_2(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_2(x)dx;\ \cdots\ \psi_n(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_n(x)dx$.

Выразим первую производную решения

$$y'(x)=\begin{bmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1(x)+C_1\\ \psi_2(x)+C_2\\ \cdots\\ \psi_n(x)+C_n\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \cdots\\ \varphi_n(x)\end{bmatrix}$$

и отметим, что второе слагаемое равно нулю, согласно теореме аннулирования из линейной алгебры.

Напомним, что теорема аннулирования утверждает, что линейная комбинация элементов, какой либо строки определителя с алгебраическими дополнениями другой строки равна нулю.

Раскрывая значения $\varphi_i(x)$ во втором слагаемом, убеждаемся в этом

$$y_1(x) \quad y_2(x) \quad \cdots \quad y_n(x) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \cdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix} =$$

$$= y_1(x) \quad y_2(x) \quad \cdots \quad y_n(x) \cdot \begin{bmatrix} f(x)\cdot \Delta_{n1}/\Delta \\ f(x)\cdot \Delta_{n2}/\Delta \\ \cdots \\ f(x)\cdot \Delta nn/\Delta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{f(x)}{\Delta} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\cdot \Delta_{in} = 0.$$

В результате имеем

$$y^{'}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \cdots & y_n^{'}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x) + C_1 \\ \psi_2(x) + C_2 \\ \cdots \\ \psi_n(x) + C_n \end{bmatrix}.$$

Учитывая это обстоятельство и далее, получим выражения для следующих производных до $(n-1)$ - го порядка

$$y^{''}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{''}(x) & y_2^{''}(x) & \cdots & y_n^{''}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x) + C_1 \\ \psi_2(x) + C_2 \\ \cdots \\ \psi_n(x) + C_n \end{bmatrix},$$

и так далее

$$y^{(n-1)}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x) + C_1 \\ \psi_2(x) + C_2 \\ \cdots \\ \psi_n(x) + C_n \end{bmatrix}.$$

Выразим $y(x_0) = y_0; \quad y^{'}(x_0) = y_0^{'}; \ \cdots \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

$$y(x_0) = y_1(x_0) \quad y_2(x_0) \quad \cdots \quad y_n(x_0) \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(x_0) + C_1 \\ \psi_2(x_0) + C_2 \\ \cdots \\ \psi_n(x_0) + C_n \end{bmatrix};$$

$$y'(x_0)=\begin{bmatrix} y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1(x_0)+C_1\\ \psi_2(x_0)+C_2\\ \cdots\\ \psi_n(x_0)+C_n\end{bmatrix};$$

$$y''(x_0)=\begin{bmatrix} y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & \cdots & y_n''(x_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1(x_0)+C_1\\ \psi_2(x_0)+C_2\\ \cdots\\ \psi_n(x_0)+C_n\end{bmatrix};$$

и так далее

$$y^{(n-1)}(x_0)=\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1(x_0)+C_1\\ \psi_2(x_0)+C_2\\ \cdots\\ \psi_n(x_0)+C_n\end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\psi_1(x_0)=0,\quad \psi_2(x_0)=0,\quad \cdots\quad \psi_n(x_0)=0,$$

вектор начальных условий можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} y(x_0)\\ y'(x_0)\\ \cdots\\ y^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1\\ C_2\\ \cdots\\ C_n\end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}$$

представляет собой фундаментальную матрицу линейно независимого набора решений однородного дифференциального уравнения n- го порядка. Известно, что независимый набор решений образует базис линейного пространства и начальной точке x_0 может быть представлен в каноническом виде

$$\Phi(x_0)=E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Тогда из последнего соотношения следует

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_n \end{bmatrix},$$

что позволяет записать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \cdot y_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_{i0}^{(i)} \cdot y_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\psi_{i+1}(x) + y_{i0}^{(i)}] \cdot y_i \,.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения в форме Коши однозначно определяется из начальных условий, проходит через точку $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \cdots,\ y_0^{(n-1)})$ и представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения находится при задании конкретных значений $x_0,\ y_0 = y(x_0),\ y_0' = y'(x_0),\ \cdots,\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$.

Элементы общей теории неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общая теория неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами полностью соответствует общей теории неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В частности, аналогично доказывается теорема о представлении частного решения неоднородного уравнения в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Аналогично доказывается утверждение о том, что решение уравнения при правой части, соответствующей сумме нескольких функций, представляется суперпозицией решений отвечающих каждой функции в отдельности.

Рассматриваемые нами методы аналитического интегрирования Лагранжа и Коши, как уже отмечалось, применимы к уравнениям, как с постоянными так и переменными коэффициентами и в повторном доказательстве не нуждаются.

Для неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами общая теория дает более конкретные результаты, и можно использовать более широкий набор аналитических методов интегрирования, на которых здесь более подробно останавливаться не будем.

3.4 Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы интегрирования

Общая форма записи обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$F(x,\ y,\ y^{(1)}, \cdots,\ y^{(n)}) = 0,$$

где F - некоторая функциональная зависимость; x - независимая переменная, например, пространственная координата или время t; $y = y(x)$ - неизвестная функция независимой переменной x; $y^{(i)} = y^{(i)}(x)$ - производная i - го порядка от неизвестной функции y по независимой переменной x.

Решением уравнения, назовем функцию $y = \varphi(x)$, определенную на некотором интервале Δ, то есть, при $x \in \Delta$, которая, будучи подставленной, в исходное дифференциальное уравнение, обращает его в тождество на всем интервале.

Вместо неявной формы записи дифференциального уравнения часто используют явную или приведенную форму, разрешая уравнение относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}).$$

Обе формы записи дифференциального уравнения являются самыми общими и не раскрывают конкретной функциональной зависимости между неизвестной функции, и ее производными. Такое представление дифференциального уравнения может соответствовать, как нелинейным, так и линейным уравнениям, как с переменными, так и постоянными коэффициентами.

Общая функциональная зависимость, содержащая несколько неизвестных функций и их производных от независимой переменной

$$F(x, y_1, y_1^{(1)}, \cdots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2^{(1)}, \cdots, y_2^{(m_2)}, \cdots, y_n, y_n^{(1)}, \cdots, y_n^{(m_n)}) = 0,$$

соответствует системе n дифференциальных уравнений. Разрешив общую зависимость относительно старших производных

$$y_i^{m_i} = f_i(x, y, y_1^{(1)}, \cdots, y_1^{(m_1-1)}, y, y_2^{(1)}, \cdots, y_2^{(m_2-1)}, \cdots, y, y_n^{(1)}, \cdots, y_n^{(m_n-1)}),$$

получаем каноническую систему дифференциальных уравнений.

Нормальная система дифференциальных уравнений. Неявная форма. Известно, что, используя замену переменных, то есть, вводя новые функции вида

$$y_{i1} = y_i, \; y_{i2} = y_i^{(1)}, \; \cdots, \; y_{im_i} = y_i^{(m_i-1)},$$

можно каждое уравнение системы, имеющее порядок m_i, свести к системе m_i уравнений первого порядка, имеющей вид

$$y_{i1}^{(1)} = y_{i2},$$

$$y_{i2}^{(1)} = y_{i3},$$

……………

$$y_{i\,m_i}^{(1)} = f_i(x, y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1m_1}, y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2m_2}, \cdots, y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{n\,m_n}).$$

В результате приходим к системе $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ уравнений первого порядка.

В связи с этим, в дальнейшем достаточно рассмотреть систему n дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_i^{(1)} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

где $i = 1, 2, \cdots, n$. Система данного вида называется нормальной системой дифференциальных уравнений. Используя векторную запись

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{bmatrix},$$

система может быть представлена в виде

$$\frac{dY}{dx} = Y' = F(x, Y).$$

Решением системы на интервале Δ называется совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x)$, определенных на интервале Δ, таких, что подстановка их в систему обращает каждое уравнение системы в тождество на всем интервале Δ. Если вектор-функция F явно не зависит от x, то система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$Y' = F(Y)$$

и называется автономной или стационарной системой.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений, как уже отмечалось, является задача Коши. Задача, в данном случае, формулируется следующим образом: требуется найти решение $Y = \Phi(x)$ системы дифференциальных уравнений на некотором интервале Δ, содержащем точку x_0 и удовлетворяющее условиям $\Phi(x_0) = Y(x_0) = Y_0$. Значения x_0, $Y(x_0)$ называются начальными значениями решения, а условия, соответственно, начальными условиями.

Если ввести в рассмотрение $n+1$- мерное пространство с координатами x, y_1, y_2, $\cdots$, y_n, то совокупность n функций $Y = \Phi(x)$ представляет линию в этом пространстве. Начальные значения x_0, y_{10}, y_{20}, $\cdots$, y_{n0} представляют собой точку в этом пространстве.

Таким образом, задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку в $n+1$- мерном пространстве.

В теории дифференциальных уравнений доказывается теорема, устанавливающая существование и единственность решения задачи Коши для одного уравнения

$$y' = f(x, y).$$

При этом говорят, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в замкнутой области $\bar{G}$, если для всякой пары точек $(x,y_1),\ (x,y_2)\in\bar{G}$ справедливо неравенство

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L\cdot|y_1-y_2|,$$

где $L=const$ - постоянная Липшица.

Отметим, что условие Липшица более сильное чем условие непрерывности функции $f(x,y)$ по y. Так из непрерывности функции $f(x,y)$ по y не следует выполнение условия Липшица, однако существует теорема утверждающая, что если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, то она непрерывна относительно y.

Теорема: если функция $f(x,y)$ непрерывна по x в области G, и удовлетворяет в ней условию Липшица по x, то она непрерывна по совокупности переменных $x,\ y$.

Существование и единственность решения начальной задачи Коши устанавливается **теоремой:**

Пусть функция $f(x,y)$ задана на замкнутой области $\bar{G}$, непрерывна в ней по x и удовлетворяет условию Липшица по y. Тогда можно указать такой интервал Δ на оси x, содержащий точку x_0, на котором существует, и притом единственное, решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$.

Аналогичным образом формулируется теорема существования и единственности решения для нормальной системы уравнений. При этом, если задана нормальная система дифференциальных уравнений

$$Y^{'}=F(x,Y),$$

то общим решением системы в области $\bar{G}$ называется совокупность n функций $y_i=\varphi_i(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$, из которой путем выбора произвольных постоянных $c_1,c_2,\cdots,c_n$, можно получить любое решение принадлежащее области $\bar{G}$.

Применительно к нормальной системе уравнений говорят, что функция $F(x,Y)=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ удовлетворяет условию Липшица в области $\bar{G}$ по переменным $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$, если существует такое постоянное число $L>0$, что для любой пары точек $(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ и $(x,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n)$, принадлежащих $\bar{G}$, выполняется неравенство

$$\left| f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) - f(x, \tilde{y_1}, \tilde{y_2}, \cdots, \tilde{y_n}) \right| \le L \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \tilde{y_i} \right|.$$

Существование и единственность решения формулируется следующей **теоремой.**

Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений $Y^{'} = F(x,Y)$, причем функции $y_i = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ непрерывны по x и удовлетворяют условию Липшица по $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ в некоторой области $\bar{G}$. Тогда существует и притом единственное решение $y_i = \varphi_i(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_i(x_0) = y_{i0}$, определенное на некотором отрезке Δ, содержащем точку x_0.

Наиболее важными свойствами решений нормальной системы дифференциальных уравнений является их непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнений.

Непрерывная зависимость решений от начальных условий формулируется следующей **теоремой.**

Пусть задана нормальная система дифференциальных уравнений $Y^{'} = F(x, Y)$, причем функции $y_i = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ непрерывны по x и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ в некоторой области $\bar{G}$.

Пусть известно решение системы в начальной точке

$$Y = \Phi(x, x_0, Y_0),$$

удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_i(x_0) = y_{i0}$. Положим, что это решение определено на отрезке $\left| x - x_0 \right| \le h$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, h) > 0$, что другое решение $Y = \tilde{\Phi}(x, x_0, \tilde{Y_0})$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{\Phi}(t_0, t_0, \tilde{Y_0}) = \tilde{Y_0}$, где $\left| Y_0 - \tilde{Y_0} \right| < \delta$, будет определено на том же отрезке $\left| x - x_0 \right| \le h$ и удовлетворяет неравенству $\left| \Phi(t, t_0, Y_0) - \tilde{\Phi}(t, t_0, \tilde{Y_0}) \right| < \varepsilon$.

Свойство непрерывности решений от параметров уравнения формулируется следующим образом. Пусть имеется нормальная система уравнений с параметрами

$$y_i^{'} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s).$$

Здесь $\mathrm{M} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s)$ - вещественные параметры, а функции $f_i(x, Y, \mathrm{M})$ определены и непрерывны по совокупности переменных

$x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_s$ в некоторой области $\bar{G}$ $n+1+s$ - мерного пространства и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1,\ y_2,\ \cdots, y_n$ с постоянной L.

Пусть далее $Y=\Phi(x,\tilde{\mathrm{M}})$ - решение этой системы, при значении параметров $\mathrm{M}=\tilde{\mathrm{M}}$, удовлетворяющее начальным условиям $Y_0=\Phi(x_0,\tilde{\mathrm{M}})$ и определенное на отрезке $|x-x_0|\le h$.

Непрерывность решений нормальной системы от параметров уравнений формулируется **теоремой**.

Пусть $\Phi(x,\approx\!\!\!\!\mathrm{M})$ - решение нормальной системы при значении параметров $\mathrm{M}=\overset{\approx}{\mathrm{M}}$, удовлетворяющее начальным условиям: $Y_0=\Phi(x_0,\overset{\approx}{\mathrm{M}})$. Тогда для любого $\varepsilon>0$, существует такое $\delta(\varepsilon,h)>0$, что если справедливо неравенство $\left|\tilde{\mathrm{M}}-\overset{\approx}{\mathrm{M}}\right|<\delta$, то решение $\Phi(x,\overset{\approx}{\mathrm{M}})$ определено на интервале $|x-x_0|\le h$ и удовлетворяет неравенству $\left|\Phi(x,\tilde{\mathrm{M}})-\Phi(x,\overset{\approx}{\mathrm{M}})\right|<\varepsilon$.

Нормальные системы дифференциальных уравнений. Явная форма. Перейдем к рассмотрению нормальной системы линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных.

Нормальной линейной системой дифференциальных уравнений называется такая система уравнений, в которую неизвестные функции и их производные входят только в первой степени.

Нормальная линейная система может быть записана в виде

$$\frac{dy_i}{dx}=y_i'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)\cdot y_k+f_i(x)$$

или в векторно-матричной форме

$$Y'=A(x)\cdot Y+F(x),$$

где

$$Y=\begin{vmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\\ \cdots\\ y_n(x)\end{vmatrix},\quad A(x)=\begin{bmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{bmatrix},\quad F(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \cdots\\ f_n(x)\end{vmatrix}.$$

Проверим условия теоремы существования и единственности нормальной системы. Положим, что $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ - непрерывные функции на интервале (a,b). Тогда правые части уравнений системы будут непрерывны в бесконечной области G, определяемой неравенствами

$a < x < b, \ -\infty < y_k < \infty$. Частные производные по y_k от правых частей уравнений системы равны

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot y_j + f_i(x)\right] = a_{ik}(x).$$

Из непрерывности функций $a_{ik}(x)$ следует, что $|a_{ik}(x)| < N$, где N - некоторое постоянное число, если $x \in a_1, b_1 \subset (a, b)$. Бесконечная область G является выпуклой областью, поэтому ограниченность частных производных в этой области влечет за собой выполнение условий Липшица. Следовательно, условия существования и единственности справедливы для линейной системы на любом отрезке $a_1, b_1 \subset (a, b)$, где (a, b) - интервал, на котором $a_{ik}(x)$ и $f_i(x)$ - непрерывны.

Общее решение однородной нормальной системы дифференциальных уравнений. Однородной нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$Y' = A(x)\cdot Y.$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений запишется в векторно-матричном виде

$$Y(x) = \Phi(x)\cdot C,$$

где

$$Y(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{vmatrix};$$

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

или в виде линейной суперпозиции векторов

$$Y(x) = c_1\cdot\varphi_1(x) + c_2\cdot\varphi_2(x) + \cdots + c_n\cdot\varphi_n(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{vmatrix}; \quad \varphi_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{vmatrix}; \quad \cdots \quad \varphi_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Совокупность всех решений $\varphi_i(x)$ однородной системы образует линейное пространство размерности n, то есть являются линейно независимыми. Наоборот, любая система из n линейно независимых решений $\varphi_i(x)$ нормальной однородной системы называется фундаментальной системой решений.

Определитель матрицы составленной из векторов решений

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом.

Теорема: если система векторных функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ решений однородного линейного уравнения, с непрерывными на интервале a, b коэффициентами, являются линейно независимыми, то определитель Вронского $W(x)$ на этом интервале нигде не обращается в нуль.

С другой стороны известна **теорема:** если определитель Вронского $W(x)$ системы векторных функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ обращается в ноль, в какой ни будь точке $x_0 \in a, b$, то $W(x)$ тождественно равен нулю на всем интервале a, b.

Значение определителя Вронского в произвольной точке x при известном значении в точке x_0 выражается **формулой Лиувилля - Остроградского**, в соответствии с **теоремой:** если известна система векторных функций $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)$ решений однородного линейного уравнения с переменными коэффициентами, то между значениями определителя Вронского $W(x)$ в точках x_0 и x существует зависимость определяемая выражением

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} Sp \cdot A(z)dz},$$

где $Sp \cdot A(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \cdots + a_{nn}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$ - след матрицы $A(x)$.

Доказательство теоремы основано на теореме о производной определителя по независимой переменной. Так если $\Phi(x) = \left|\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x)\right|$ есть фундаментальная система решений однородной системы, то она удовлетворяет этому однородному уравнению

$$\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x).$$

Следовательно, для каждого столбца j фундаментальной системы можем записать

$$\varphi_{ij}'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \cdot \varphi_{kj}(x).$$

Раскроем производную определителя Вронского, как сложной функции от x

$$W'(x) = \left(\det(\Phi(x))\right)' = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial \varphi_{ij}(x)} \cdot \varphi'_{ij}(x) = \sum_{i,j}^{n} W_{ij}(x) \cdot \varphi'_{ij}(x),$$

где $W_{ij}(x)$ - алгебраические дополнения Вронскиана. Теперь раскрывая $\varphi'_{ij}(x)$ соответствующим выражением, меняя местами, знаки сумм и учитывая, что, в соответствии с теоремой аннулирования из линейной алгебры

$$W_{ij}(x) \cdot \varphi_{kj}(x) = W(x) \cdot \delta_{ij},$$

получим

$$W'(x) = \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \cdot \varphi_{kj}(x) = W(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \cdot \delta_{ij} = W(x) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x),$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & при \quad i = k \\ 0 & при \quad i \neq k \end{cases}$ - символ Кронекера. Обозначая след матрицы $Sp \cdot A(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x)$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$W'(x) = Sp \cdot A(x) \cdot W(x).$$

Далее, разделяя переменные и интегрируя, получим соотношение Лиувилля – Остроградского

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} Sp \cdot A(z) dz}.$$

Общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений

$$Y' = A(x) \cdot Y + F(x),$$

опираясь на общее решение соответствующей однородной системы уравнений

$$Y' = A(x) \cdot Y.$$

Утверждение 1. Пусть $Y = \Psi(x)$ и $Y = \Phi(x)$ два решения неоднородной системы, тогда разность $\Xi(x) = \Psi(x) - \Phi(x)$ является решением однородной системы. Истинность данного утверждения подтверждается следующим образом

$$\Xi'(x) = \Psi'(x) - \Phi'(x) = A(x) \cdot \Psi(x) + F(x) - A(x) \cdot \Phi(x) - F(x) =$$
$$= A(x) \cdot \left(\Psi(x) - \Phi(x)\right) = A(x) \cdot \Xi(x).$$

Утверждение 2. Если $Y = \Xi(x)$ решение однородной системы, а $Y = \Phi(x)$ решение неоднородной системы, то $Y = \Xi(x) + \Phi(x)$ также является решением неоднородной системы. В самом деле

$$Y' = \Xi'(x) + \Phi'(x) = A(x) \cdot \Xi(x) + A(x) \cdot \Phi(x) + F(x) =$$
$$= A(x) \cdot \left(\Xi(x) + \Phi(x)\right) + F(x).$$

Общее решение неоднородной системы уравнений определяется **теоремой:** общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы

$$Y(x) = \Phi(x) \cdot C + \Psi(x),$$

где $\Phi(x)$- фундаментальная система решений однородной системы; C- вектор произвольных постоянных; $\Psi(x)$- частное решение неоднородной системы.

Доказательство. Зададим произвольные начальные условия $Y(x_0) = Y_0$, тогда, согласно, приведенной теоремы

$$Y(x_0) = \Phi(x_0) \cdot C + \Psi(x_0).$$

В том случае если $Y_0 = \Psi_0$, в силу теоремы единственности $Y(x) \equiv \Psi(x)$, получаем, что решение удовлетворяется при $C = 0$, если $Y_0 \neq \Psi_0$, то вектор произвольных постоянных C определяется из решения невырожденной алгебраической системы $\Phi(x_0) \cdot C = \Psi(x_0) - Y(x_0)$ и решение нормальной системы дифференциальных уравнений всегда удовлетворяется.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Частное решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Обратимся к этому методу.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$- фундаментальная система решений однородной системы, тогда общее решение неоднородной системы может быть определено в виде

$$Y(x) = \Phi(x) \cdot C(x),$$

где $C(x)$- вектор варьируемых постоянных, являющихся функциями от независимой переменной x. Подставим предполагаемое решение в неоднородную систему

$$\Phi'(x) \cdot C(x) + \Phi(x) \cdot C'(x) = A(x) \cdot \Phi(x) \cdot C(x) + F(x).$$

Так как $\Phi(x)$ фундаментальная система решений однородной системы

$$\Phi'(x) \cdot C(x) = A(x) \cdot \Phi(x) \cdot C(x),$$

то приходим к выражению

$$\Phi(x) \cdot C'(x) = F(x).$$

Поскольку фундаментальная система решений линейно независима и определитель Вронского отличен от нуля, то из решения линейной алгебраической системы находим

$$C'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot F(x) = \Xi(x).$$

Далее интегрированием находим

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x) \cdot F(x) dx + C = \int \Xi(x) dx + C,$$

где C- дополнительный вектор постоянных интегрирования векторного выражения.

Подставляя значение варьируемой постоянной в общее решение неоднородной системы, получим

$$Y(x) = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int \Xi(x) dx.$$

Из последнего соотношения следует, что общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений представляет собой сумму общего решения однородной системы

$$\Theta(x) = \Phi(x) \cdot C$$

и частного решения неоднородной системы

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot \int \Xi(x) dx.$$

Дополнительный вектор постоянных интегрирования C, может быть однозначно определен из начальных условий решения. В результате от общего решения переходим к частному решению неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Метод Коши. Рассмотрим еще один подход к решению нормальных систем дифференциальных уравнений, основанный на формуле Коши. Для этого распишем фундаментальную систему решений в виде матрицы

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $\Phi(x)$ представляет собой определитель Вронского, отличный от нуля для всех $x \in a, b$. Следовательно, существует обратная матрица $\Phi^{-1}(x)$ для всех $x \in a, b$.

Образуем матрицу вида

$$\Phi(x, x_0) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0).$$

Столбцы этой матрицы $\varphi_1(x, x_0),\ \varphi_2(x, x_0),\ \cdots,\ \varphi_n(x, x_0)$ также образуют фундаментальную систему решений нормальной однородной системы дифференциальных уравнений. Отметим, что канонический базис независимой системы решений может быть представлен в виде

$$\Phi(x_0, x_0) = \Phi(x_0) \cdot \Phi^{-1}(x_0) = E,$$

где E - единичная матрица.

Матрицу $\Phi(x, x_0)$ называют фундаментальной матрицей нормальной однородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Покажем, что фундаментальная матрица $\Phi(x, x_0)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\Phi'(x, x_0) = A(x) \cdot \Phi(x, x_0).$$

Раскрывая производную $\Phi'(x, x_0)$ и учитывая, что $\Phi(x_0)$ и $\Phi^{-1}(x_0)$ постоянные матрицы

$$\Phi'(x, x_0) = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) = A(x) \cdot \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) = A(x) \cdot \Phi(x, x_0),$$

приходим к нужному соотношению.

Решение $\Phi(x)$ однородной системы, удовлетворяющее начальным условиям $\Phi(x_0)=\Phi_0$ можно записать в виде

$$\Phi(x)=\Phi(x, x_0)\cdot\Phi(x_0)=\Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(x_0)\cdot\Phi(x_0)=\Phi(x).$$

Очевидно также, что фундаментальная матрица $\Phi(x)$ удовлетворяет однородной системе уравнений

$$\Phi'(x)=\Phi'(x,x_0)\cdot\Phi(x_0)=A(x)\cdot\Phi(x,x_0)\cdot\Phi(x_0)=A(x)\cdot\Phi(x).$$

Таким образом, показано, что $\Phi(x)=\Phi(x,x_0)\cdot\Phi(x_0)$ является решением однородной нормальной системы уравнений, удовлетворяющим начальным условиям $\Phi(x_0)=\Phi_0$.

Для определения решения неоднородной нормальной системы уравнений

$$Y'=A(x)\cdot Y+F(x)$$

воспользуемся заменой переменных. По аналогии с методом Лагранжа, обозначим решение неоднородной системы в виде

$$Y(x)=\Phi(x,x_0)\cdot C(x).$$

Подставляя предполагаемое решение в неоднородное уравнение, получим

$$\begin{aligned}Y'(x)&=\Phi'(x,x_0)\cdot C(x)+\Phi(x,x_0)\cdot C'(x)=\\&=A(x)\cdot\Phi(x,x_0)\cdot C(x)+\Phi(x,x_0)\cdot C'(x)=\\&=A(x)\cdot\Phi(x,x_0)\cdot C(x)+F(x).\end{aligned}$$

В силу того, что фундаментальная матрица решений $\Phi(x,x_0)$ не вырождена и удовлетворяет однородной системе уравнений

$$\Phi'(x,x_0)=A(x)\cdot\Phi(x,x_0),$$

то есть

$$\Phi'(x,x_0)\cdot C(x)=A(x)\cdot\Phi(x,x_0)\cdot C(x)$$

из предыдущего соотношения однозначно определяем

$$C'(x)=\Phi^{-1}(x,x_0)\cdot F(x).$$

Из последнего выражения получаем

$$C(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(z,x_0)\cdot F(z)dz+C,$$

где C- новый вектор постоянных интегрирования, определяемый из начальных условий. В свою очередь, из уравнения замены переменных имеем

$$C(x_0)=\Phi^{-1}(x_0,x_0)\cdot Y(x_0)=\Phi^{-1}(x_0,x_0)\cdot\Phi(x_0)=\Phi(x_0)=\Phi_0,$$

откуда следует, что $C=\Phi_0$. Тогда можем записать

$$C(x) = \Phi_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(z, x_0) \cdot F(z) dz .$$

Теперь, используя связь переменных, получаем решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$Y(x) = \Phi(x, x_o) \cdot \Phi_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi(x, x_o) \cdot \Phi^{-1}(z, x_0) \cdot F(z) dz ,$$

удовлетворяющее начальным условиям $\Phi(x_0) = \Phi_0$.

Таким образом, может быть найдено решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при условии, что известна фундаментальная матрица решений однородной системы $\Phi(x, x_0)$.

Учитывая, что $\Phi(x, x_0) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0)$ и $\Phi(x_0) = \Phi_0$ представим решение в виде

$$Y(x) = \Phi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(z) \cdot F(z) dz .$$

В свою очередь, вводя обозначение $\Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(z) = \Phi(x - z)$, окончательно получаем

$$Y(x) = \Phi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \Phi(x - z) \cdot F(z) dz .$$

Полученные соотношения носят название формул Коши и позволяют найти решения неоднородных нормальных систем уравнений, как с переменными коэффициентами

$$Y' = A(x) \cdot Y + F(x),$$

так и с постоянными коэффициентами

$$Y' = A \cdot Y + F(x),$$

при условии, что известны фундаментальные системы решений соответствующих однородных уравнений.

Отметим, что применительно к системам уравнений с переменными коэффициентами, методы интегрирования, основанные на вариации произвольных постоянных и на представлении решения в форме Коши, не конструктивны в том смысле, что не дают явного вида фундаментальной системы решений однородной системы.

Нормальные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае нормальных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, по аналогии со скалярным уравнением первого порядка, решение нормальной однородной системы $Y' = A \cdot Y$, следует искать в виде

$$Y(x)=\Phi(x)=e^{A\cdot x}\cdot C,$$

где $e^{A\cdot x}$ - экспонента от матрицы коэффициентов A; C - вектор постоянных, определяемый из начальных условий.

Так, взяв производную от предполагаемого решения

$$Y'(x)=(e^{A\cdot x}\cdot C)'=A\cdot e^{A\cdot x}\cdot C,$$

убеждаемся, что оно удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению.

Общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений

$$Y'=A\cdot Y+F(x),$$

в соответствии с идеей Лагранжа, ищется в том же виде, что и однородной системы, только вектор постоянных заменяется вектором неизвестных функций – варьируемых постоянных $C(x)$ независимой переменной x

$$Y(x)=\Phi(x)=e^{A\cdot x}\cdot C(x).$$

Для нахождения варьируемых постоянных используется, в частности, как и в случае скалярного дифференциального уравнения n- го порядка, определяющая система уравнений Лагранжа.

Как видим, в случае нормальных систем дифференциальных уравнений решение записывается в векторно-матричной форме через функцию экспоненты от матричного аргумента.

Подробнее, на методах интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, остановимся после рассмотрения аналитических функций от матричного аргумента и сопутствующих вопросов линейной алгебры.

3.5 Переход от дифференциального уравнения n-го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка

Выше мы уже рассматривали переход от системы n дифференциальных уравнений m_i- го порядка к $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ уравнениям первого порядка путем замены переменных.

Вернемся к этому вопросу еще раз и рассмотрим подробнее переход от дифференциального уравнения n- го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение n- го порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$D(y)=a_n(x)\cdot y^{(n)}+a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)\cdot y^{(1)}+a_0(x)\cdot y=f(x),$$

где $D(y)$- линейный дифференциальный оператор от неизвестной функции $y(x)$; $y^{(i)}=y^{(i)}(x)$- i- тая производная неизвестной функции; $a_i(x)$-

непрерывные функции в интервале a, b, причем $a_n(x) \neq 0$; $f(x)$ - известная функция.

Путем введения новых функций

$$y_1 = y;\ y_2 = y_1' = y';\ \cdots\ y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)},$$

исходное уравнение n- го порядка можно свести к нормальной системе n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&y_1' = y_2,\\
&y_2' = y_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&y_{n-1}' = y_n,\\
&y_n' = -\frac{a_0}{a_n}\cdot y_1 - \frac{a_1}{a_n}\cdot y_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot y_n + \frac{f(x)}{a_n};
\end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$Y' = A(x)\cdot Y + F(x),$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix};\quad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{vmatrix};\quad F(x) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Однородному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами n- го порядка соответствует однородная нормальная система n дифференциальных уравнений первого прядка. Отметим, что данный переход совершается аналогично и для уравнений с постоянными коэффициентами.

Полученная нормальная система уравнений представляет собой частный случай ранее рассмотренных нормальных систем уравнений общего вида.

Между полученной нормальной системой первого порядка и исходным уравнением n- го порядка существует полное соответствие. Так для решения нормальной системы необходимо задать начальные условия $y_1(0),\ y_2(0),\ \cdots,\ y_n(0)$, что по условиям введения новых переменных соответствует заданию $y(0),\ y'(0),\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)$ для решения исходного уравнения. Первая компонента вектора решений нормальной системы представляет собой решение исходного уравнения n- го порядка.

Продолжая аналогию между исходным дифференциальным уравнением и соответствующей нормальной системой уравнений первого порядка можно утверждать:

1. Линейно независимому набору фундаментальных решений нормальной однородной системы уравнений соответствует линейно независимый набор решений однородного исходного уравнения. Набор решений образует n мерное линейное пространство.

2. Всякая система из линейно независимых решений $\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \cdots,\ \phi_n(x)$ является фундаментальной системой и общее решение имеет вид

$$\phi(x) = \Phi(x) \cdot C.$$

Для однородного исходного уравнения $\phi(x)$- скалярная функция решения, $\Phi(x)$- вектор строка независимых решений, C- вектор столбец постоянных.

Для нормальной однородной системы уравнений $\phi(x)$- векторная функция решения, $\Phi(x)$- матрица независимых векторных функций решений, C- вектор столбец постоянных.

3. Определители Вронского для однородного исходного уравнения и соответствующей нормальной однородной системы уравнений совпадают между собой

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

так как линейно независимый набор векторных функций решений системы, в соответствии с заменой переменных, содержит в качестве компонент векторов скалярную функцию решения исходного уравнения, и ее производные до $n-1$- го порядка.

4. Решения неоднородного исходного уравнения и соответствующей неоднородной нормальной системы также запишутся одинаково

$$Y(x) = \Phi(x) \cdot C + \Psi(x),$$

как сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений или системы уравнений.

Для исходного уравнения решение представляется скалярной функцией независимой переменной в виде линейной суперпозиции фундаментальных решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Решение соответствующей неоднородной нормальной системы уравнений представляется векторной функцией независимой переменной в виде суперпозиции фундаментальных решений однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы. Компоненты векторных функций представляют собой соответствующую скалярную функцию исходного уравнения и ее производные до $n-1$- го порядка.

5. Для определения частного решения исходного неоднородного уравнения и соответствующей нормальной неоднородной системы уравнений первого порядка может быть использован метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

6. Решения, как неоднородного исходного уравнения, так и соответствующей нормальной неоднородной системы уравнений первого порядка представимы формулой Коши

$$Y(x) = \Phi(x) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x-z) \cdot F(z) dz .$$

3.6 Собственные вектора и собственные значения матриц. Понятие аналитической функции от матричного аргумента

Прежде чем перейти к нормальным системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами уместно кратко остановится на проблеме собственных значений и векторов квадратных матриц.

Пусть задана невырожденная линейная система алгебраических уравнений

$$A \cdot X = Y .$$

Как видим, матрица A преобразует вектор X в новый вектор Y. Результат преобразования естественно зависит как от матрицы A, так и от вектора X. В связи с этим интересно поставить задачу, существуют ли такие вектора h_i, результатами матричного преобразования которых, будут вектора $\lambda_i \cdot h_i$

$$A \cdot h_i = \lambda_i \cdot h_i ,$$

где λ_i- некий скалярный коэффициент, возможно комплексный.

Оказывается, что для матрицы A размерности $(n*n)$ существует максимум n таких векторов h_i. Число таких векторов зависит от свойств матрицы A. **Такие вектора h_i называются собственными векторами матрицы A, а скалярные коэффициенты λ_i называются собственными значениями матрицы A.** Среди собственных значений матрицы могут быть и одинаковые, которым соответствует один либо несколько собственных векторов. В этом случае говорят, матрица A имеет кратные собственные значения.

В том случае, когда собственные значения матрицы различны, можно собственные вектора и собственные значения сгруппировать в матрицы и записать

$$A \cdot H = H \cdot \Lambda,$$

где $H = h_i$ -матрица из собственных векторов, как столбцов; $\Lambda = \lambda_i$ - диагональная матрица собственных значений. Собственные вектора h_i матрицы A образуют собственный базис. **Собственные значения** λ_i матрицы A, в некоторых физических задачах, **соответствуют модам (частотам) собственных колебаний** физической системы. **Собственные вектора** h_i **соответствуют типам мод (распределению амплитуд) колебаний** физических систем. В связи с этим**, матрица собственных векторов** H**, носит название модальной матрицы,** и представляет собственное или модальное пространство.

Остановимся подробнее на некоторых полезных соотношениях. Заметим, что диагональная матрица с одинаковыми элементами перестановочна с любой матрицей, то есть

$$H \cdot \Lambda = \Lambda \cdot H .$$

Перепишем предыдущее соотношение в виде

$$H^{-1} \cdot A \cdot H = \Lambda ,$$

из которого следует, что преобразование подобия на основе невырожденной матрицы собственных векторов, приводит невырожденную матрицу A, с различными собственными значениями, к диагональному виду. Иначе, невырожденная матрица A с различными собственными значениями при переходе к собственному базису имеет канонический диагональный вид. Элементами диагональной матрицы Λ являются собственные значения λ_i. Переписав последнее соотношение наоборот

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

получаем каноническое разложение исходной матрицы, которое означает, что собственные вектора и собственные значения полностью определяют исходную матрицу.

Алгоритмы определения собственных векторов и значений. Преобразуя матричное соотношение, определяющее собственные вектора и собственные значения к виду

$$A - \Lambda \ \cdot H = 0,$$

перейдем к обоснованию аналитических алгоритмов определения собственных значений и векторов.

Матрица $A - \Lambda$ **называется характеристической матрицей.** Из последнего уравнения, поскольку в общем случае $H \neq 0$, следует, что характеристическая матрица $A - \Lambda$ вырождена, то есть ее определитель равен нулю

$$\det \ A - \Lambda \ = \left| A - \Lambda \right| = 0 .$$

Уравнение, приравнивающее нулю определитель характеристической матрицы, носит название **характеристического уравнения матрицы** и позволяет определить ее собственные значения. На самом деле, раскрывая определитель, принимая λ за неизвестное, получим в общем случае степенной полином относительно λ

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0,$$

где a_i - коэффициенты полинома, определяемые через элементы матрицы коэффициентов A.

Степенной полином $P(\lambda)$, соответствующий определителю характеристической матрицы $A - \Lambda$, называется **характеристическим многочленом матрицы** A**.** Корни характеристического многочлена матрицы являются **характеристическими числами матрицы.**

Из алгебры известно, что степенной полином n- го порядка имеет в общем случае n различных корней, которые и являются собственными значениями соответствующей матрицы A. Корни полинома могут быть определены точно, если $n \le 4$, и приближенно при $n > 4$. Подробно на алгоритмах нахождения корней полинома останавливаться не будем.

С помощью характеристического уравнения можно определить собственные значения любой матрицы, имеющей как кратные, так и нулевые собственные значения. Отметим, что если известны все собственные значения, то нормированный характеристический многочлен

$$\overline{P}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0,$$

представим в факторизованном виде

$$\overline{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_i) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

если все корни различны, и в виде

$$\overline{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_i)^m \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

если, например, i - тый корень имеет кратность m.

Если собственные значения матрицы известны и среди них нет равных нулю, то собственные векторы определяются из решения однородного матричного уравнения

$$A - \Lambda \ \cdot H = 0.$$

Для этого необходимо, диагональную матрицу Λ, заменить диагональной матрицей Λ_i, все элементы которой, одинаковы и равны λ_i, и решать однородное уравнение

$$A - \Lambda_i \ \cdot h_i = 0$$

относительно h_i. Решив n таких однородных уравнений, определим все собственные вектора, а значит и матрицу собственных векторов H.

Заметим, что собственные вектора определяются с точностью до постоянного множителя.

Для того чтобы однородная система уравнений имела нетривиальные решения необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы, в данном случае характеристической матрицы $A - \Lambda$, был равен нулю. Именно из этого условия мы исходили при определении характеристического многочлена.

Случай, когда все собственные значения различны и отличны от нуля, соответствует рангу характеристической матрицы $r = n - 1$.

Однородная линейная система алгебраических уравнений, соответствующая i - му собственному значению может быть записана в виде

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = B(\lambda_i) \cdot h_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\lambda_i) \cdot h_{ij} = 0,$$

где $i = 1, 2, \cdots, n$.

Раскрывая определитель характеристической матрицы, по какой либо строке, запишем

$$\det(B(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\lambda_i) \cdot \Delta_{ij}(\lambda_i) = 0.$$

Теперь сравнивая два последних равенства, получаем

$$h_{ij} = k \cdot \Delta_{ij}(\lambda_i),$$

где $j = 1, 2, \cdots, n$; k - константа; $\Delta_{ij}(\lambda_i)$ - алгебраическое дополнение характеристической матрицы $A - \Lambda_i$.

Таким образом, в качестве собственного вектора h_i, можно взять алгебраические дополнения любой строки характеристической матрицы $A - \Lambda_i$.

Заметим, что в математике матрица C, полученная путем замены элементов транспонированной исходной матрицы B^t, на их алгебраические дополнения, называется присоединенной матрицей

$$C = \left[c_{ji} \right] = Adj(B) = \left[\Delta_{ij} \right].$$

Из этого определения следует, что столбцы h_i модальной матрицы H пропорциональны столбцам матрицы, присоединенной к характеристической матрице $A - \Lambda_i$.

Если среди собственных значений матрицы A имеются кратные, то с помощью преобразования подобия, на основе модальной матрицы H, она приводится к канонической форме Жордана

$$H^{-1} \cdot A \cdot H = J,$$

где J - жорданова форма матрицы, имеющая квазидиагональный вид

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix},$$

когда на диагонали стоят блоки или клетки Жордана вида

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

где λ_i - соответствующее собственное значение матрицы A. Размер клетки Жордана равен кратности соответствующего собственного значения. Приведение исходной матрицы коэффициентов A с помощью невырожденного преобразования к диагональному либо квазидиагональному виду называется приведением к канонической форме.

Заметим, что каноническая форма Жордана определяется с точностью до перестановок клеток.

Необходимо также отметить, что при наличии кратных собственных значений модальная матрица может быть вырождена, то есть в некоторых случаях не удается найти независимый набор собственных векторов, соответствующий кратным собственным значениям. Существование независимого набора собственных векторов для кратных собственных значений определяется **дефектом матрицы** коэффициентов $A-\Lambda_i$, который определяется как разность между порядком матрицы и ее рангом $d=n-r$.

Для получения невырожденной преобразующей матрицы H недостающие вектора можно дополнить векторами, присоединенными к собственным векторам, используя соотношения

$$A-\Lambda_i \;\cdot h_{i+1}=h_i ,$$

где h_i - известный собственный либо присоединенный вектор; h_{i+1} - очередной присоединенный вектор.

Подробно на построении невырожденной преобразующей матрицы при кратных собственных значениях останавливаться не будем.

Аналитическая функция матричного аргумента. Перейдем к определению аналитической функции от матрицы. Если матрица A не вырожденна и все ее собственные значения различны, то она приводится с помощью невырожденного преобразования к диагональной форме Λ и аналитическая функция F от матрицы определяется соотношением

$$F(A)=H\cdot F(\Lambda)\cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)=F(\lambda_i)$.

Если матрица A не вырожденна, но среди ее собственных значений есть кратные, то она приводится с помощью невырожденного преобразования к жордановой форме J и аналитическая функция F от матрицы определяется соотношением

$$F(A)=H\cdot F(J)\cdot H^{-1},$$

где $F(J)=F(A_i)$ - функциональная матрица клеток Жордана.

3.7 Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

В векторно-матричной форме нормальная неоднородная система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x),$$

а соответствующая ей однородная система имеет вид

$$Y'(x) = A \cdot Y(x),$$

где $Y(x) = Y$ - вектор неизвестных функций; $Y'(x) = Y'$ - вектор производных; A- квадратная матрица постоянных коэффициентов системы; $F(x)$- вектор заданных функций или вектор-функция.

Заметим, что все свойства и теоремы, полученные для систем с переменными коэффициентами, автоматически распространяются на системы с постоянными коэффициентами, как на частный случай нормальных систем. Кроме этого, для систем с постоянными коэффициентами могут быть доказаны более сильные теоремы, касающиеся их свойств и решений.

Однородная нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Прежде всего, остановимся подробнее на однородной нормальной системе уравнений с постоянными коэффициентами. Как уже отмечалось, в частном случае, когда собственные значения матрицы A коэффициентов системы отличны от нуля и различны она с помощью соответствующего невырожденного преобразования подобия приводится к диагональному виду

$$H^{-1} \cdot A \cdot H = \Lambda = \lambda_i ,$$

где H - невырожденное преобразование.

В общем случае, с помощью невырожденного преобразования подобия невырожденная матрица коэффициентов системы A, имеющая кратные собственные значения, может быть приведена к жордановой форме J

$$H^{-1} \cdot A \cdot H = J,$$

где J - жорданова форма матрицы, имеющая квазидиагональный вид

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix},$$

когда на диагонали стоят блоки или клетки Жордана вида

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

где λ_i - соответствующее собственное значение матрицы A. Приведение исходной матрицы коэффициентов A с помощью невырожденного преобразования к диагональному либо квазидиагональному виду, как уже отмечалось, называется приведением к канонической форме.

Данное преобразование удобно представить в виде замены переменных $Y = H \cdot Z$ в исходной однородной системе дифференциальных уравнений, где H - некоторая невырожденная постоянная матрица; Z - вектор новых переменных. Тогда, подставляя выражение для вектора Y в однородное исходное уравнение, получим

$$H \cdot Z\,' = A \cdot H \cdot Z; \quad H \cdot Z' = A \cdot H \cdot Z; \quad Z' = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot Z = J \cdot Z .$$

Таким образом, с помощью преобразования системы координат, удается перейти к простой системе дифференциальных уравнений канонического вида.

Так если матрица коэффициентов однородной исходной системы A приводится к диагональному виду $\Lambda = \lambda_i$, то в новой системе координат система распадается на независимые однородные уравнения вида

$$z_i'(x) = \lambda_i \cdot z_i(x),$$

решение которых тривиально

$$z_i(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot c_i ,$$

где c_i - постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Используя понятие функции от матрицы, можем представить фундаментальный набор решений диагональной системы в виде

$$Z(x) = e^{\Lambda \cdot x} \cdot C$$

или, возвращаясь к прежней системе координат, получим фундаментальный набор решений исходной системы

$$Y(x) = H \cdot Z(x) = H \cdot e^{\Lambda \cdot x} \cdot C ,$$

где C - вектор постоянных интегрирования, определяемый из начальных условий.

Учитывая, что аналитическая функция от матрицы представляется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1}$$

и произведение модальной матрицы на вектор констант $H \cdot C \sim C$ соответствует новому вектору констант, последнее соотношение можно переписать через экспоненту от матрицы коэффициентов

$$Y(x) = H \cdot e^{\Lambda \cdot x} \cdot H^{-1} \cdot H \cdot C = e^{A \cdot x} \cdot C .$$

Как видим, структура выражения для общего решения однородной системы уравнений сохраняется в прежнем виде, как суперпозиция фундаментальных решений.

В общем же случае матрица коэффициентов однородной исходной системы A может иметь кратные собственные значения. В случае кратных собственных значений матрица $J = A_i$ имеет квазидиагональный вид с клетками Жордана размерности k_i, равной кратности соответствующего собственного значения λ_i матрицы коэффициентов A. Каждой клетке Жордана A_i в этом случае соответствует подсистема уравнений

$$\begin{aligned}
&z'_{i1}(x) = \lambda_i \cdot z_{i1}(x) + z_{i2}(x);\\
&z'_{i2}(x) = \lambda_i \cdot z_{i2}(x) + z_{i3}(x);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&z'_{i(k-1)}(x) = \lambda_i \cdot z_{i(k-1)}(x) + z_{ik}(x);\\
&z'_{ik}(x) = \lambda_i \cdot z_{ik}(x),
\end{aligned}$$

где для упрощения записи выражений положили $k_i = k$.

Как видим, уравнения носят рекуррентный характер, то есть текущее решение зависит от последующего, поэтому решение системы необходимо искать, начиная с последнего уравнения.

Последнее уравнение подсистемы однородное и его решение запишется в виде

$$z_{ik}(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot c_k .$$

Все другие уравнения данной системы неоднородные и для решения воспользуемся формулой Коши, согласно которой решение уравнения вида

$$y' = \alpha \cdot y + f(x)$$

запишется

$$y(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot c + \int_0^x e^{\alpha \cdot (x-u)} \cdot f(u) du .$$

Согласно формуле Коши, решение предпоследнего уравнения подсистемы запишем

$$z_{i(k-1)}(x) = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot c_{k-1} + \int_0^x e^{\lambda_i \cdot (x-u)} \cdot e^{\lambda_i \cdot u} du = e^{\lambda_i \cdot x} \cdot [c_{k-1} + x \cdot c_k].$$

Для вывода общего вида решения запишем решения для нескольких последних уравнений

$$z_{i(k-2)}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_{k-2}+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i u}\cdot[c_{k-1}+u\cdot c_k]du=$$

$$=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_{k-2}+x\cdot c_{k-1}+\frac{x^2}{2}\cdot c_k];$$

$$z_{i(k-3)}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_{k-3}+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i u}\cdot[c_{k-2}+u\cdot c_{k-1}+\frac{u^2}{2}\cdot c_k]du=$$

$$=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_{k-3}+x\cdot c_{k-2}+\frac{x^2}{2}\cdot c_{k-1}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot c_k].$$

Отсюда, для $k-m$- го уравнения можем записать решение в общем виде

$$z_{i(k-m)}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_{k-m}+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i\cdot u}\cdot[c_{k-m+1}+u\cdot c_{k-m+2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{u^{m-1}}{2}\cdot c_k]du=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_{k-m}+x\cdot c_{k-m+1}+\frac{x^2}{2}\cdot c_{k-m+2}+\cdots+\frac{x^m}{m!}\cdot c_k].$$

Из последнего соотношения можно получить общее решение для первого, второго и m- го уравнения подсистемы

$$z_{i1}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_1+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i\cdot u}[c_2+u\cdot c_3+\cdots+\frac{u^{k-2}}{(k-2)!}\cdot c_k]du=$$

$$=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_1+x\cdot c_2+\frac{x^2}{2}\cdot c_3+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot c_k];$$

$$z_{i2}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_2+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i\cdot u}\cdot[c_3+u\cdot c_4+\cdots+\frac{u^{k-3}}{(k-3)!}\cdot c_k]du=$$

$$=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_2+x\cdot c_3+\frac{x^2}{2}\cdot c_4+\cdots+\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\cdot c_k];$$

$$z_{im}(x)=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot c_m+\int\limits_0^x e^{\lambda_i\cdot(x-u)}\cdot e^{\lambda_i\cdot u}[c_{m+1}+u\cdot c_{m+2}+\cdots+\frac{u^{k-m-1}}{(k-m-1)!}\cdot c_k]du=$$

$$=e^{\lambda_i\cdot x}\cdot[c_2+x\cdot c_3+\frac{x^2}{2}\cdot c_4+\cdots+\frac{x^{k-m}}{(k-m)!}\cdot c_k].$$

Таким образом, набор решений i- той подсистемы уравнений имеет вид

$$Z_i(x)=P_i(x)\cdot C_i=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i\cdot x} & x\cdot e^{\lambda_i\cdot x} & \cdots & \frac{x^{k-2}\cdot e^{\lambda_i\cdot x}}{(k-2)!} & \frac{x^{k-1}\cdot e^{\lambda_i\cdot x}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i\cdot x} & \cdots & \frac{x^{k-3}\cdot e^{\lambda_i\cdot x}}{(k-3)!} & \frac{x^{k-2}\cdot e^{\lambda_i\cdot x}}{(k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i\cdot x} & x\cdot e^{\lambda_i\cdot x} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i\cdot x} \end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \cdots \\ c_{i(k-1)} \\ c_{ik} \end{vmatrix}.$$

Определитель Вронского для i- той подсистемы

$$W_i(x) = \det(P_i(x)) = e^{k_i \cdot \lambda_i \cdot x}$$

отличен от нуля, так как $W_i(0) = 1$, то есть набор решений $P_i(x)$ независимый и является фундаментальной системой решений i- той подсистемы дифференциальных уравнений. Аналогично находятся решения других подсистем.

Так как вся система канонического вида представляет собой набор независимых подсистем A_i, то фундаментальный набор решений всей системы строится из фундаментальных решений подсистем

$$Z(x) = P(x) \cdot C = e^{J \cdot x} \cdot C = \begin{bmatrix} P_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2(x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_m(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_m \end{vmatrix}.$$

Определитель Вронского всей системы равен произведению определителей подсистем

$$W(x) = \prod_{i=1}^{m} W_i(x) = \prod_{i=1}^{m} e^{k_i \cdot \lambda_i \cdot x},$$

где $\prod\limits_{i=1}^{m} k_i = n$ - размерность системы дифференциальных уравнений.

Возвращаясь к прежней системе координат, получаем фундаментальный набор решений исходной системы уравнений

$$Y(x) = H \cdot Z(x) = H \cdot P(x) \cdot C = H \cdot e^{J \cdot x} \cdot C,$$

при наличии кратных собственных значений матрицы коэффициентов A.

Здесь также, учитывая, что аналитическая функция от матрицы представляется выражением

$$F(A) = H \cdot F(J) \cdot H^{-1}$$

и произведение модальной матрицы на вектор констант $H \cdot C \sim C$ соответствует новому вектору констант, последнее соотношение можно переписать через экспоненту от матрицы коэффициентов

$$Y(x) = H \cdot e^{J \cdot x} \cdot H^{-1} \cdot H \cdot C = e^{A \cdot x} \cdot C.$$

Как видим, структура выражения для общего решения однородной системы уравнений и в этом случае сохраняется в прежнем виде, как суперпозиция фундаментальных решений.

Фундаментальная матрица нормальной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Покажем, что фундаментальная матрица однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$Y'(x) = A \cdot Y(x),$$

может быть представлена, в виде экспоненты от матрицы коэффициентов A

$$Y(x) = e^{A \cdot (x - x_0)}.$$

Прежде всего, убедимся, что она удовлетворяет своему дифференциальному уравнению

$$(e^{A\cdot(x-x_0)})' = A\cdot e^{A\cdot(x-x_0)}.$$

Далее на основании предыдущего материала следует, что если собственные значения матрицы A различны, то экспонента от матрицы определяется соотношением

$$e^{A\cdot(x-x_0)} = H\cdot e^{\Lambda\cdot(x-x_0)}\cdot H^{-1},$$

где $e^{\Lambda\cdot(x-x_0)} = \left[e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)}\right]$- диагональная матрица. Если среди собственных значений матрицы A есть кратные, то экспонента от матрицы определяется соотношением

$$e^{A\cdot(x-x_0)} = H\cdot e^{J\cdot(x-x_0)}\cdot H^{-1},$$

где $e^{J\cdot(x-x_0)} = \left[e^{A_i\cdot(x-x_0)}\right]$- блочно-диагональная матрица, причем

$$e^{A_i\cdot(x-x_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} & x\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} & \cdots & \frac{x^{k-2}\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)}}{(k-2)!} & \frac{x^{k-1}\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} & \cdots & \frac{x^{k-3}\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)}}{(k-3)!} & \frac{x^{k-2}\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)}}{(k-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} & x\cdot e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i\cdot(x-x_0)} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что из приведенных соотношений непосредственно следует, что $Y(x_0) = E$, где E- единичная матрица.

Заметим, что фундаментальную матрицу решений однородной системы можно представить в виде

$$Y(x) = e^{A\cdot(x-x_0)} = e^{A\cdot x}\cdot e^{-A\cdot x_0} = e^{A\cdot x}\cdot Y(x_0).$$

Рассмотрим общую форму решения однородной системы уравнений из предыдущего раздела

$$Y(x) = H\cdot Z(x) = H\cdot e^{\Lambda\cdot x}\cdot C$$

и перепишем ее в виде

$$Y(x) = H\cdot e^{\Lambda\cdot x}\cdot H^{-1}\cdot H\cdot C = e^{A\cdot x}\cdot H\cdot C,$$

учитывая, что

$$Y(x) = e^{A\cdot(x-x_0)}$$

$$e^{A\cdot(x-x_0)} = H\cdot e^{\Lambda\cdot(x-x_0)}\cdot H^{-1}.$$

Нормальная неоднородная линейная система уравнений с постоянными коэффициентами. Общая форма записи неоднородной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$Y' = A\cdot Y + F(x),$$

где $Y=Y(x)$- неизвестная вектор функция независимой переменной x; $Y^{'}=Y^{'}(x)$- производная неизвестной вектор функции; A- матрица постоянных коэффициентов системы; $F(x)$- известная вектор функция правой части системы уравнений.

В основе методов интегрирования неоднородных нормальных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами лежат те же идеи, что и для скалярных дифференциальных уравнений, только вместо скалярной формы записи выражений используется векторно-матричная символика.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Согласно идее Лагранжа, общее решение неоднородной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений следует искать в том же виде, что и для однородной системы, только вектор констант C заменяется вектором варьируемых констант – неизвестных функций $C(x)$

$$Y(x)=e^{A\cdot x}\cdot C(x).$$

Выразим производную вектора решения

$$Y^{'}(x)=A\cdot e^{A\cdot x}\cdot C(x)+e^{A\cdot x}\cdot C^{'}(x)$$

и подставим в исходную систему дифференциальных уравнений

$$A\cdot e^{A\cdot x}\cdot C(x)+e^{A\cdot x}\cdot C^{'}(x)=A\cdot e^{A\cdot x}\cdot C(x)+F(x).$$

После сокращения слагаемых получаем выражение для производной вектора варьируемых постоянных

$$C^{'}(x)=e^{-A\cdot x}\cdot F(x).$$

Интегрируя последнее выражение, находим вектор варьируемых констант с точностью до вектора постоянных интегрирования C

$$C(x)=\int e^{-A\cdot z}\cdot F(z)\,dz+C.$$

Подставляя выражение для варьируемых констант в предполагаемое общее решение системы, получаем его в виде

$$Y(x)=e^{A\cdot x}\cdot\left[\int e^{-A\cdot z}\cdot F(z)\,dz+C\right]=e^{A\cdot x}\cdot C+e^{A\cdot x}\cdot\int e^{-A\cdot z}\cdot F(z)\,dz$$

или

$$Y(x)=e^{A\cdot x}\cdot C+\int e^{A\cdot(x-z)}\cdot F(z)\,dz.$$

Таким образом, общее решение неоднородной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляет собой сумму общего решения однородной нормальной системы уравнений и частного решения неоднородной нормальной системы уравнений.

Частное решение неоднородной нормальной системы уравнений получается после подстановки конкретного значения вектора постоянных интегрирования C, определяемого из дополнительных независимых условий, в частности, начальных условий.

Решение в форме Коши (метод Коши). Представление решения в форме Коши легко получить из общего решения неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений по методу Лагранжа, используя вместо вектора постоянных интегрирования, определяемого из независимых условий, вектор начальных условий

$$Y(x) = e^{A\cdot x} \cdot Y(0) + \int e^{A\cdot(x-z)} \cdot F(z)\, dz\,.$$

Таким образом, решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений в форме Коши представляет собой частное решение системы, записанное через вектор начальных условий.

В обоих методах решения предполагается вычислять интеграл от произведения матричной функции на вектор правых частей, в связи с этим заметим, что интегрирование матрицы либо вектора эквивалентно применению этой операции к каждой компоненте матрицы либо вектора.

Решения неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами по Лагранжу и Коши выражаются через экспоненту матрицы коэффициентов системы, представление которой предполагает решение проблемы собственных векторов и собственных значений.

Наиболее просто проблема собственных векторов и собственных значений и выражение матричной функции решается для невырожденной матрицы коэффициентов A, то есть при отсутствии нулевых и кратных собственных значений.

В том случае, **если матрица коэффициентов вырождена, можно рекомендовать следующий аналитический прием:** обозначить собственные значения различными, довести аналитическое решение через матричную экспоненту до конца, а затем осуществить предельный переход к реальным собственным значениям. В результате предельного перехода выражение аналитического решения трансформируется к нужному виду. Использование такого аналитического приема в случае аналитического решения задачи интегрирования, позволяет избежать осложнений обусловленных вырожденностью матрицы коэффициентов, в частности, необходимости приведения вырожденной матрицы к канонической форме Жордана.

3.8 Иллюстрация методики исследования временных характеристик цепей второго порядка

Для иллюстрации предлагаемой методики исследования временных характеристик устройств и систем высокого порядка рассмотрим пример простой цепи второго порядка.

Именно, начиная со второго порядка, проявляются основные особенности исследования систем высокой размерности – кратность и наличие нулевых корней характеристического уравнения, возможность использования векторно-матричной символики и так далее.

Так в методе вариации произвольных постоянных (методе Лагранжа) иллюстрируется формирование разрешающей системы уравнений Лагранжа при наличии кратных и нулевых корней характеристического уравнения.

В методе Коши осуществляется переход от дифференциального уравнения n- го порядка к системе n дифференциальных уравнений первого порядка, частное решение которой выражается через экспоненциальную функцию от матрицы коэффициентов системы. Вычисление аналитической функции от матричного аргумента, как отмечалось, требует предварительного определения собственных значений и векторов. При вырожденной матрице коэффициентов (кратных и нулевых собственных значениях) в качестве аналитического приема предлагается обозначить корни характеристического уравнения различными, довести решение до конца, а затем путем предельного перехода преобразовать полученное решение к соответствующему виду.

Цепь второго порядка RC- типа. На рисунке 3.1 изображен вариант RC- цепи второго порядка и требуется по предлагаемой методике определить ее временные характеристики.

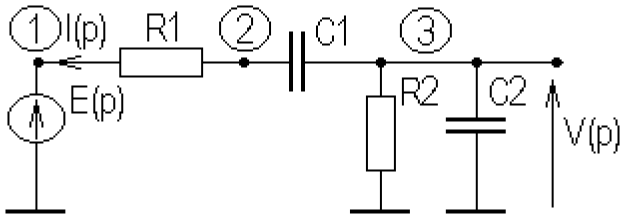

Рисунок 3.1 - RC - цепь второго порядка

Передаточная характеристика. Определим передаточную характеристику исследуемой цепи обобщенным узловым методом. Обозначим проводимости $g_1 = 1/R_1$; $g_2 = 1/R_2$ и запишем матрицу проводимостей цепи

$$Y = \begin{bmatrix} g_1 & -g_1 & 0 \\ -g_1 & g_1 + p \cdot C_1 & -p \cdot C_1 \\ 0 & -p \cdot C_1 & g_2 + p \cdot (C_1 + C_2) \end{bmatrix}.$$

Далее, выразим коэффициент передачи цепи по напряжению через отношение алгебраических дополнений матрицы проводимостей

$$K_V(p) = K(p) = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{g \cdot p \cdot C_1}{g_1 \cdot [g_2 + p \cdot (C_1 + C_2)] + p \cdot C_1 \cdot (g_2 + p \cdot C_2)}.$$

Приведем выражение для коэффициента передачи по напряжению к нормированному виду

$$K(p)=\frac{g_1\cdot p\cdot C_1}{C_1\cdot C_2\cdot p^2+[g_1\cdot(C_1+C_2)+g_2\cdot C_1]\cdot p+g_1\cdot g_2}=$$

$$=\frac{g_1}{C_2}\cdot\frac{p}{p^2+\dfrac{g_1\cdot(C_1+C_2)+g_2\cdot C_1}{C_1\cdot C_2}\cdot p+\dfrac{g_1\cdot g_2}{C_1\cdot C_2}}=\frac{K_0\cdot p}{p^2+a_1\cdot p+a_0},$$

где $K_0=g_1/C_2$; $a_1=\dfrac{g_1\cdot(C_1+C_2)+g_2\cdot C_1}{C_1\cdot C_2}$; $a_0=\dfrac{g_1\cdot g_2}{C_1\cdot C_2}$. *Вводя обозначения* $-\alpha_1, -\alpha_2$ - корней характеристического уравнения

$$p^2+a_1\cdot p+a_0=0,$$

приходим к каноническому виду коэффициента передачи по напряжению

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{K_0\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Из последнего выражения коэффициента передачи напряжения непосредственно получаем изображение выходного напряжения цепи, как выходной переменной и реакции цепи на входное воздействие

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Найдем значения передаточной функции $\dfrac{V(p)}{E(p)}=K(p)=p\cdot V(p)$, при $p=0$ и $p\to\infty$, принимая $E(p)=1/p$. Так, при $p=0$, получаем $K(0)=0$, а при $p\to\infty$, соответственно, имеем $K(\infty)=0$.

Переходная характеристика. Определим несколькими способами переходную характеристику цепи. В качестве входного воздействия, в этом случае используется функция Хевисайда

$$E(p)=1/p\Leftrightarrow 1(t)=e(t).$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного скачка изображение выходного напряжения имеет вид

$$V(p)=\frac{E(p)\cdot K_0\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\frac{K_0}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{1}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow\frac{-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2},$$

при $\alpha_1\neq\alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий переходной характеристике исследуемой RC - цепи второго порядка

$$V(p)=\frac{K_0}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\Leftrightarrow K_0\cdot\frac{-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2}=v(t)=h(t).$$

Отметим, что начальное значение переходной характеристики, при $t=0$, равно нулю $h(0)=0$, а установившееся значение переходной характеристики, при $t\to\infty$, также равно нулю $h(\infty)=0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0)=h(0)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty} K(p)=0;$$

$$v(\infty)=h(\infty)=\lim_{p\to 0} p\cdot V(p)=\lim_{p\to 0} K(p)=0.$$

Выразим производную от выходной реакции

$$v'(t)=h'(t)=K_0\cdot\frac{\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2}$$

и отметим, что значение производной, при $t=0$, равно $h'(0)=K_0$, а при $t\to\infty$, равно $h'(\infty)=0$.

Заметим, что переходная характеристика RC- цепи второго порядка имеет более сложный вид по сравнению с цепями первого порядка.

Далее переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения переходной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p)=1/p$, получаем

$$V(p)=\frac{K_0}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to v(t)=\frac{K_0\cdot\delta(0)}{(\frac{d}{dt}+\alpha_1)\cdot(\frac{d}{dt}+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot\delta(0)}{(\frac{d}{dt})^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\frac{d}{dt}+\alpha_1\cdot\alpha_2},$$

где $\delta(0)\Leftrightarrow 1$- дельта функция, как результат обратного преобразования Лапласа от 1 в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения исследуемой RC- цепи второго порядка

$$v''(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot\delta(0).$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{V(p)}{1/p} = \frac{K_0 \cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} \to \frac{v(t)}{1(t)} = \frac{K_0 \cdot d/dt}{(d/dt+\alpha_1)\cdot(d/dt+\alpha_2)} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot d/dt}{(d/dt)^2 + (\alpha_1+\alpha_2)\cdot d/dt + \alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и учитывая, что $d(1(t))/dt = \delta(0)$ приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения исследуемой RC- цепи второго порядка

$$v''(t) + (\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t) + \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t) = K_0\cdot\delta(0).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v'(t) - \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t) + K_0\cdot\delta(0).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v'(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0) = \lim_{t\to_+0} v(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{K_0\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} = 0;$$

$$v'(0) = \lim_{t\to_+0} v'(t) = \lim_{p\to\infty} p^2\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{K_0\cdot p^2}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)} = K_0.$$

Заметим, что полученные начальные значения, совпали с ранее найденными значениями переходной характеристики и ее производной, при $t=0$.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика исследуемой RC- цепи второго порядка на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t) = C_1(t) \cdot f_1(t) + C_2(t) \cdot f_2(t) = C_1(t) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2(t) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$ - неизвестные функции – варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$ - фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{aligned} &C_1'(t) \cdot f_1(t) + C_2'(t) \cdot f_2(t) = 0 \\ &C_1'(t) \cdot f_1'(t) + C_2'(t) \cdot f_2'(t) = F(t) \end{aligned},$$

где $F(t)$ - правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} &C_1'(t) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2'(t) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = 0 \\ &-C_1'(t) \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2'(t) \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} = K_0 \cdot \delta(0) \end{aligned}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix} = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t};$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ K_0 \cdot \delta(0) & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot \delta(0) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} = \frac{-K_0 \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha_1 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & 0 \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & K_0 \cdot \delta(0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot \delta(0) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}}{(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}} = \frac{K_0 \cdot \delta(0) \cdot e^{\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t) = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int \delta(0) \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} dt = \frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1;$$

$$C_2(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int \delta(0) \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} dt = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2,$$

где $C_1,\ C_2$ - новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство δ - функции

$$\int f(t) \cdot \delta(0) \cdot dt = f(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t) = (\frac{-K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + (\frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_2) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} =$$
$$= \frac{K_0 \cdot (-e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t})}{\alpha_1 - \alpha_2} + C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v^{'}(t) = \frac{K_0 \cdot (\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t})}{\alpha_1 - \alpha_2} - C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0) = 0$ и $v^{'}(0) = K_0$, при $t = 0$

$$v(0) = 0 = C_1 + C_2$$
$$v^{'}(0) = K_0 = K_0 - \alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$-\alpha_1 \cdot C_1 - \alpha_2 \cdot C_2 = 0.$$

Не прибегая к решению системы, сразу видим, что $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее переходной характеристике исследуемой RC- цепи второго порядка с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t) = h(t) = K_0 \cdot \frac{-e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y^{'}(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t), Y^{'}(t), F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t - \tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot \delta(0).$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t) = y_1 = v(t); \; y_2 = y_1' = v'(t), \text{ то есть } y_2' = v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot \delta(0) \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}; \; Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot \delta(0) \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0; \; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение, определенное таким образом, полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A-\Lambda_i]\cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i - диагональная матрица с λ_i значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$ - алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A-\Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H = \begin{bmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t} = H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A\cdot t} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix};\ F(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0\cdot\delta(0) \end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t) = v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t) = (-e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t}) \cdot \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \int_0^t (-e^{-\alpha_1 \cdot (t-\tau)} + e^{-\alpha_2 \cdot (t-\tau)}) \cdot K_0 \cdot \delta(0)\, d\tau \, .$$

Раскрывая интеграл и приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике исследуемой RC- цепи второго порядка в виде

$$v(t) = h(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \underset{t>0}{-e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t}} + \underset{t=0}{(-1) + 1} \right\rangle = K_0 \cdot \frac{-e^{-\alpha_1 \cdot t} + e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \, .$$

Как видим, полученное выражение переходной характеристики методом Коши, как реакции на единичный скачок на входе, полностью совпадает с решениями, полученными операторным методом и методом Лагранжа.

Импульсная характеристика. Перейдем к определению импульсной характеристики. В качестве входного воздействия, в данном случае используется единичный импульс (δ - функция)

$$E(p) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = e(t) \, .$$

Операторный метод. При воздействии на вход единичного импульса изображение выходного напряжения запишется в виде

$$V(p) = \frac{E(p) \cdot K_0 \cdot p}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} = \frac{K_0 \cdot p}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \, .$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, устанавливаем соответствие между изображением и оригиналом

$$\frac{p}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

На основании установленного соответствия, находим оригинал выходного напряжения, соответствующий импульсной характеристике исследуемой RC- цепи второго порядка

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot p}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \Leftrightarrow K_0 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} = v(t) = g(t) \, .$$

Заметим, что в этом случае $g(0) = K_0$. Установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Как видим, в соответствии с теоремами операционного исчисления о начальном и конечном значении функции, выполняются соотношения вида

$$v(0) = g(0) = \lim_{p \to \infty} p \cdot V(p) = K_0 \, ;$$

$$v(\infty) = g(\infty) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = 0 .$$

Отметим также, что импульсная характеристика может быть получена по переходной характеристике на основании теоремы о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0),$$

так как входное воздействие при исследовании импульсной характеристики, есть производная от входного воздействия при исследовании переходной характеристики. Данное интегральное соотношение может быть переписано в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0) .$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0) .$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $h(0) = 0$, вновь получаем выражение для импульсной характеристики, дифференцируя переходную характеристику

$$g(t) = h^{'}(t) = K_0 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} .$$

Если бы начальное значение было ненулевым, то импульсная характеристика содержала бы δ - функцию.

Отметим, что начальное значение импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g(0) = K_0$, а установившееся значение импульсной характеристики, при $t \to \infty$, равно нулю $g(\infty) = 0$.

Выразим производную от выходной реакции

$$v^{'}(t) = g^{'}(t) = -K_0 \cdot \frac{\alpha_1^2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2^2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

и отметим, что значение производной, при $t = 0$, равно $g^{'}(0) = -K_0 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$, а при $t \to \infty$, равно $g^{'}(\infty) = 0$.

Заметим, что здесь мы математически определили производную выходной реакции, а не реакцию на производную, от входного воздействия, которая ищется по теореме о дифференцировании оригинала.

Применяя теорему о дифференцировании оригинала

$$v^{'}(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v({}_{+}0)$$

для определения производной выходной реакции, то есть производной импульсной характеристики, перепишем его в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + v({}_{+}0) \cdot \delta(0) .$$

Так как реакция на выходе в области изображений теперь соответствует $p \cdot V(p)$, то последнее соотношение можем переписать в виде

$$v'(t) = g'(t) + \delta(0) \cdot g(0).$$

Используя полученное выражение, и, учитывая, что $g(0) = K_0$, вновь получаем выражение для производной импульсной характеристики, дифференцируя импульсную характеристику и учитывая ее начальное значение

$$v'(t) = g'(t) = K_0 \cdot \left\langle \delta(0) - \frac{\alpha_1^2 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2^2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right\rangle.$$

Так как начальное значение ненулевое, то производная импульсной характеристики содержит δ - функцию.

Начальное значение производной импульсной характеристики, при $t = 0$, равно $g'(0) = K_0 \cdot \langle \delta(0) - (\alpha_1 + \alpha_2) \rangle$.

Заметим, что импульсная характеристика RC - цепи второго порядка, как и переходная характеристика, имеет более сложный вид по сравнению с цепями первого порядка.

Далее переходим к формированию дифференциального уравнения с целью получения импульсной характеристики путем его аналитического интегрирования.

Формирование и интегрирование дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения, как и в предыдущем случае, формируем на основе его операторного выражения, путем замены изображений оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения выходного напряжения и, учитывая, что в данном случае $E(p) = 1$, получаем

$$V(p) = \frac{K_0 \cdot p}{(p + \alpha_1) \cdot (p + \alpha_2)} \to v(t) = \frac{K_0 \cdot \delta'(0)}{(\frac{d}{dt} + \alpha_1) \cdot (\frac{d}{dt} + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{K_0 \cdot \delta'(0)}{(\frac{d}{dt})^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \frac{d}{dt} + \alpha_1 \cdot \alpha_2},$$

где $\delta'(0) \Leftrightarrow p$ - производная дельта функции, как результат обратного преобразования Лапласа от p в области изображений.

Перегруппировывая полученное выражение, приходим к записи дифференциального уравнения относительно выходного напряжения исследуемой RC - цепи второго порядка

$$v''(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) = K_0 \cdot \delta'(0).$$

Дифференциальное уравнение цепи относительно выходного напряжения можно получить также из коэффициента передачи по напряжению, путем замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а оператора Лапласа p оператором дифференцирования d/dt.

Так, используя операторное выражение для изображения коэффициента передачи напряжения, получаем

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=\frac{V(p)}{1}=\frac{K_0\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\to\frac{v(t)}{\delta(0)}=\frac{K_0\cdot d/dt}{(d/dt+\alpha_1)\cdot(d/dt+\alpha_2)}=$$

$$=\frac{K_0\cdot d/dt}{(d/dt)^2+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot d/dt+\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Перегруппировывая полученное выражение и учитывая, что $d(\delta(0))/dt=\delta^{'}(0)$ приходим к той же форме дифференциального уравнения относительно выходного напряжения исследуемой RC- цепи второго порядка

$$v^{''}(t)+(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)=K_0\cdot\delta^{'}(0).$$

Данное уравнение является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В нормальной форме Коши, уравнение, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$v^{''}(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)\cdot v^{'}(t)-\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot v(t)+K_0\cdot\delta^{'}(0).$$

Прежде, чем приступить к интегрированию полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, с целью получения частного решения, необходимо определить начальные условия $v(0)$ и $v^{'}(0)$.

Определение начальных условий. Для определения начальных условий удобно воспользоваться теоремой операционного исчисления о начальном значении функции

$$v(0)=\lim_{t\to_+0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p^2}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=K_0;$$

$$v^{'}(0)=\lim_{t\to_+0}v^{'}(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p^3}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=\infty.$$

Заметим, что первое начальное значение, совпало с ранее найденным значением импульсной характеристики, при $t=0$.

В последнем дробно-рациональном выражении степень числителя превысила степень знаменателя, и взятие предела дает значение ∞, не раскрывая ее составляющие. Раскрыть конечные и бесконечные составляющие этого предела можно путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока степень остатка не станет равной степени знаменателя. При этом, целые части от деления дают составляющие $\delta(0)$, $\delta^{'}(0)$, $\delta^{''}(0)$, $\ldots$ и так далее, а остаток деления в пределе при $p\to\infty$ дает конечную часть начального значения.

Следуя указанной модификации теоремы о начальном значении, получаем

$$v'(0)=\lim_{t\to{}_{+}0} v'(t)=\lim_{p\to\infty} p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{K_0\cdot p^3}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}=$$

$$=\lim_{p\to\infty} K_0\cdot\left\langle p-\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot p^2+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot p}{(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)}\right\rangle=K_0\cdot\langle\delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)\rangle.$$

Таким образом, полученное выражение совпало с начальным значением производной импульсной характеристики, полученной на основании теоремы о дифференцировании оригинала.

Приступаем к интегрированию дифференциального уравнения с целью определения отклика исследуемой RC- цепи второго порядка на единичный скачок на входе.

Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного дифференциального уравнения, записывается аналогично решению однородного уравнения, только константы при фундаментальных решениях заменяются неизвестными функциями времени

$$v(t)=C_1(t)\cdot f_1(t)+C_2(t)\cdot f_2(t)=C_1(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t},$$

где $C_1(t),\ C_2(t)$- неизвестные функции - варьируемые постоянные; $f_1(t),\ f_2(t)$- фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Варьируемые или произвольные постоянные $C_1(t),\ C_2(t)$ находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа, представляющей собой условия, ограничивающие появление производных от неизвестных функций, выше первого порядка, при дифференцировании решения общего вида и результат подстановки общего решения в исходное уравнение

$$\begin{array}{c} C_1'(t)\cdot f_1(t)+C_2'(t)\cdot f_2(t)=0 \\ C_1'(t)\cdot f_1'(t)+C_2'(t)\cdot f_2'(t)=F(t) \end{array},$$

где $F(t)$- правая часть дифференциального уравнения.

Таким образом, определяющая система Лагранжа имеет вид

$$\begin{array}{l} C_1'(t)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2'(t)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=0 \\ -C_1'(t)\cdot\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-C_2'(t)\cdot\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=K_0\cdot\delta'(0) \end{array}.$$

Определим $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ из предыдущей системы уравнений, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ -\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{vmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t};$$

$$C_1^{'}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-\alpha_2\cdot t} \\ K_0\cdot\delta^{'}(0) & -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-K_0\cdot\delta^{'}(0)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}=\frac{-K_0\cdot\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha_1\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2};$$

$$C_2^{'}=\frac{\begin{vmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ -\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} & K_0\cdot\delta^{'}(0)\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{K_0\cdot\delta^{'}(0)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}}=\frac{K_0\cdot\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha_2\cdot t}}{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Интегрируя полученные выражения, найдем варьируемые постоянные

$$C_1(t)=\frac{-K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha_1\cdot t}dt=\frac{K_0\cdot\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}+C_1;$$

$$C_2(t)=\frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\int\delta^{'}(0)\cdot e^{\alpha_2\cdot t}dt=\frac{-K_0\cdot\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}+C_2,$$

где C_1, C_2- новые постоянные интегрирования. Здесь при интегрировании учтено селектирующее свойство производной δ - функции

$$\int f(t)\cdot\delta^{'}(0)\cdot dt=-f^{'}(0).$$

Подставим полученные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$v(t)=(\frac{K_0\cdot\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}+C_1)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+(\frac{-K_0\cdot\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}+C_2)\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}=$$
$$=\frac{K_0\cdot(\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t})}{\alpha_1-\alpha_2}+C_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+C_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}.$$

Дифференцируя общее решение, находим выражение для его производной

$$v^{'}(t)=-K_0\cdot\frac{(\alpha_1^2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2^2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t})}{\alpha_1-\alpha_2}-C_1\cdot\alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-C_2\cdot\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}.$$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий $v(0)=K_0$ и $v^{'}(0)=K_0\cdot\langle\delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)\rangle$, при $t=0$

$$v(0)=K_0=K_0+C_1+C_2$$
$$v^{'}(0)=K_0\cdot\langle\delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)\rangle=K_0\cdot(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\cdot C_1-\alpha_2\cdot C_2.$$

Перепишем данную систему в более удобном виде

$$C_1+C_2=0$$
$$-\alpha_1\cdot C_1-\alpha_2\cdot C_2=K_0\cdot\delta(0).$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2, воспользовавшись правилом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\alpha_1 & -\alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1-\alpha_2;$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_0 \cdot \delta(0) & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}; \; C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & K_0 \cdot \delta(0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{K_0 \cdot \delta(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Подставляя, найденные постоянные в общее решение, получаем

$$v(t) = K_0 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} - K_0 \cdot \frac{\delta(0) \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \delta(0) \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Последнее слагаемое равно нулю, в силу того, что значения экспонент, при $t = 0$, равны по модулю единице и, следовательно, знаменатель второго слагаемого равен нулю.

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения, соответствующее импульсной характеристике исследуемой RC- цепи второго порядка с учетом начальных условий, принимает вид

$$v(t) = g(t) = K_0 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Заметим, что полученное методом Лагранжа выражение совпадает с решением операторным методом.

Метод Коши – интегрирования дифференциальных уравнений. Метод Коши позволяет, используя начальные условия, сразу записать частное решение дифференциального уравнения. Согласно методу Коши, решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где $Y(t),\, Y'(t),\, F(t)$- в общем случае векторы функций; A- матрица коэффициентов, может быть представлено в виде или форме Коши

$$Y(t) = e^{A \cdot t} \cdot Y(0) + \int_0^t e^{A \cdot (t - \tau)} \cdot F(\tau) \cdot d\tau,$$

где τ- параметр времени; $Y(0)$- начальное значение вектор-функции либо вектор начальных значений системы дифференциальных уравнений; $e^{A \cdot t}$ - в случае системы дифференциальных уравнений, экспонента от матрицы коэффициентов.

В данном случае исходное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$v''(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v'(t) - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot v(t) + K_0 \cdot \delta'(0).$$

Метод Коши, применительно к дифференциальным уравнениям выше первого порядка подразумевает предварительный переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных.

Для перехода от исходного дифференциального уравнения второго порядка к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка введем новые переменные

$$y_1(t) = y_1 = v(t);\ y_2 = y_1' = v'(t), \text{ то есть } y_2' = v''(t).$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot \delta'(0) \end{bmatrix}$$

или

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{bmatrix};\ Y'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'(t) \\ v''(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \cdot \delta'(0) \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Для нахождения функций от матричного аргумента необходимо решить проблему собственных значений и векторов, то есть найти каноническое разложение матрицы коэффициентов

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

где Λ - диагональная матрица собственных значений, либо матрица Жордана при наличии кратных собственных значений; H - модальная матрица собственных векторов.

Аналитическая функция от матрицы при различных собственных значениях определяется выражением

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$ - диагональная матрица, в которой элементы есть данная функция от собственного значения.

Для определения собственных значений воспользуемся характеристическим уравнением

$$\det[A - \Lambda] = 0;\ \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0.$$

Как видим, характеристическое уравнение определенное таким образом полностью совпадает с характеристическим уравнением, полученным из передаточной функции.

Можно убедится, что корни характеристического уравнения или собственные значения равны

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора h_i, то есть столбцы модальной матрицы H находятся, с точностью до постоянных, из решения однородных систем $[A - \Lambda_i] \cdot h_i = 0$, по известны собственным значениям, где Λ_i - диагональная матрица с λ_i

значением по диагонали. Можно показать, что модальная матрица собственных векторов определяется следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{1i}(\lambda_j)$- алгебраические дополнения одной из строк характеристической матрицы $[A - \Lambda_j]$, например первой.

Раскрывая указанное соотношение, получаем модальную матрицу собственных векторов в виде

$$H = \begin{bmatrix} -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1 & -(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1+\alpha_2)$.

Далее, найдем обратную модальную матрицу

$$H^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\begin{bmatrix} \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1\cdot\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

После этого выразим экспоненту от матрицы

$$e^{A\cdot t} = H\cdot e^{\Lambda\cdot t}\cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_1\cdot\alpha_2 & \alpha_1\cdot\alpha_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-\alpha_1\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha_1\cdot t} \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1/\alpha_2 \\ -1 & -1/\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A\cdot t} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\begin{bmatrix} -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} & -e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t} \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(e^{-\alpha_1\cdot t}-e^{-\alpha_2\cdot t}) & \alpha_1\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}-\alpha_2\cdot e^{-\alpha_2\cdot t} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $e^{A\cdot(t-\tau)}$ имеет аналогичную структуру.

Учитывая тот факт, что вектор начальных условий $Y(0)$ и вектор внешних воздействий $F(\tau)$ имеют вид

$$Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_0\cdot\langle\delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)\rangle \end{bmatrix};\ F(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0\cdot\delta'(0) \end{bmatrix},$$

а также, то, что нас интересует первая компонента вектора решения $y_1(t) = v(t)$, получаем из полной формулы Коши выражение для выходного напряжения в виде

$$v(t) = \frac{K_0}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left\langle \begin{matrix} -\alpha_2\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}+\alpha_1\cdot e^{-\alpha_2\cdot t}+ \\ +\ \delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)\ \cdot(-e^{-\alpha_1\cdot t}+e^{-\alpha_2\cdot t})+ \\ +\int\limits_0^t(-e^{-\alpha_1\cdot(t-\tau)}+e^{-\alpha_2\cdot(t-\tau)})\cdot\delta'(0)\,d\tau \end{matrix} \right\rangle.$$

Раскрывая интеграл и приводя подобные, получаем решение, соответствующее переходной характеристике исследуемой RC- цепи второго порядка в виде

$$v(t) = \frac{K_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left\langle \underset{t>0}{(\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t})} - \delta(0) \cdot \underset{t=0}{(e^{-\alpha_1 \cdot t} - e^{-\alpha_2 \cdot t})} + \underset{t=0}{\alpha_1 - \alpha_2} \right\rangle \quad .$$

Учитывая, что вторая составляющая равна нулю, при $t = 0$ и, сращивая во времени первую и третью составляющие, окончательно получаем решение дифференциального уравнения в виде

$$v(t) = g(t) = K_0 \cdot \frac{\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} - \alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}}{\alpha_1 - \alpha_2} .$$

Как видим, полученное методом Коши решение совпадает с предыдущими решениями операторным методом и методом Лагранжа и представляет импульсную характеристику исследуемой RC- цепи второго порядка, где в качестве реакции на единичный импульс на входе, рассматривается напряжение на выходе.

Таким образом, все три метода, предлагаемой методики исследования временных характеристик (операторный, Лагранжа и Коши), дают совпадающие результаты при их корректном применении.

4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИССЛЕДУЕМЫХ ЦЕПЕЙ

4.1 Постановка задачи

Посвятим данный раздел обсуждению важнейшего вопроса – определение начальных условий дифференциальных уравнений исследуемых цепей.

Дело в том, что данный вопрос практически не обсуждается в известной литературе, посвященной как теоретическим вопросам интегрирования дифференциальных уравнений, так и их приложениям технического характера.

В учебной математической литературе, как правило, не затрагиваются вопросы прикладного характера, и начальные условия задаются априори вместе с дифференциальным уравнением. В литературе фундаментальных дисциплин рассматриваются прикладные вопросы дифференциальных уравнений, но начальные условия при этом определяются из общих физических принципов.

Прежде чем детально обсудить проблему начальных условий напомним еще раз основные понятия и определения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как уже отмечалось, дифференциальное уравнение представляет собой уравнение связи производных и возможно самой неизвестной функции.

Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение означает найти из уравнения связи неизвестную функцию, используя независимые или начальные условия.

Независимые условия задают значения функции и/или ее производных при определенных значениях аргумента и позволяют из множества возможных общих решений выделить единственное или частное решение. Начальные условия являются частным случаем независимых условий и задаются значениями функции и ее производных, при аргументе равным нулю. Начальные условия, как и любые независимые условия, позволяют однозначно определить частное решение задачи Коши.

Задача Коши заключается в определении по дифференциальному уравнению неизвестной функции, удовлетворяющей независимому или начальному условию. Задача Коши имеет единственное решение для обыкновенного дифференциального уравнения при заданных независимых или начальных условиях.

Старшая степень, входящей в уравнение производной, определяет порядок обыкновенного дифференциального уравнения. Для однозначного определения частного решения требуется задание начальных (дополнительных) условий на функцию, и ее младшие производные. Число требуемых начальных или независимых условий, для однозначного определения частного решения задачи Коши, равно порядку дифференциального уравнения.

Независимые условия могут определять значения функции и ее младших производных при определенном, отличном от нуля, значении независимой переменной. В качестве независимой переменной обыкновенных дифференциальных уравнений чаще других выступают время t, либо пространственная координата x. Обычно из условий задачи легче задать независимые условия при значении независимой переменной равной нулю, то есть начальные условия.

Отметим, что независимые или начальные условия в конечном итоге определяют вид частного решения и должны в полной мере отражать специфические условия конкретной технической задачи.

Суть проблемы начальных условий в радиотехнике и радиоэлектронике*. В радиотехнике и радиоэлектронике ситуация несколько иная. Здесь, как правило, известно схемное решение устройства и требуется, используя дифференциальное уравнение, определить его электрические характеристики. В простых задачах начальные условия следуют из простых физических рассуждений. Сколько-нибудь сложные задачи обычно не рассматриваются, и проблема начальных условий не обсуждается. Кроме того, в учебной литературе предпочитают использовать операторный метод определения оригинала реакции цепи на входное воздействие, при котором используется обратное преобразование Лапласа изображения соответствующей реакции, при этом знание независимых или начальных условий не требуется. Исследование временных характеристик аналоговых цепей, основанное на представлении связи реакции цепи и входного воздействия дифференциальным уравнением, не менее значимо и продуктивно, однако при интегрировании уравнений неизбежно возникает проблема определения независимых либо начальных условий. Несмотря на кажущуюся тривиальность, проблема определения начальных условий достаточно содержательна и поучительна.*

При определении временных характеристик радиотехнических устройств заданных схемными решениями с использованием дифференциальных уравнений также возникает проблема определения начальных условий. Дело в том, что в сколько-нибудь сложных цепях, моделирующих реальные устройства, общих принципов изменения напряжений на конденсаторах и токов катушек индуктивностей в начальный момент времени оказывается явно недостаточно. Рассуждения, основанные на законах Ома и Кирхгофа в начальный момент времени применимы лишь в случае простых цепей и совершенно не продуктивны в случае сложных активных цепей с обратными связями. Выход из создавшейся ситуации следует искать на пути формализации процедуры определения начальных условий.

Анализ данной проблемы показывает, что единственным источником извлечения информации о начальных значениях выходной переменной и ее производных могут быть передаточные характеристики (функции), содержащие полное описание цепей.

На самом деле, известны хорошо формализованные методы получения передаточных характеристик по заданной схеме (модели), например, метод узловых потенциалов. Более того, в радиотехнике и радиоэлектронике формирование дифференциальных уравнений, описывающих цепь во временной области, часто производится по передаточным характеристикам, на основе замены изображений входного воздействия и реакции оригиналами, а операторов Лапласа p^n на операторы дифференцирования $(d/dt)^{(n)}$, в предположении нулевых начальных условий. Истинные начальные условия, учитываются при интегрировании дифференциального уравнения.

Не должен вводить в заблуждение тот факт, что определение классических временных характеристик, переходной и импульсной, даются как реакций цепи, находящейся в состоянии покоя, соответственно, на единичный скачок и единичный импульс. Здесь состояние покоя следует понимать в том смысле, что реакция на предыдущие воздействия установилась, и на схему не действуют сторонние источники. Для пассивных цепей состояние покоя, как правило, соответствует нулевым начальным условиям, конденсаторы разряжены и токи катушек равны нулю. Активные устройства обычно включают цепи питания, и предварительное включение устройства приведет к появлению переходного процесса обусловленного включением источника питания и установлению рабочего режима, то есть распределению напряжений и токов, в том числе зарядов на конденсаторах и токов катушек индуктивностей. При этом начальные условия при подаче входного воздействия, как правило, не нулевые.

4.2 Методы определения начальных условий

Решение проблемы начальных условий дифференциальных уравнений. Прежде отметим, что начальные значения выходных переменных (напряжений и токов), как зависимых переменных дифференциальных уравнений, определяются как видом входного воздействия, так и структурой цепи.

Использование теоремы о начальном значении функции оригинала. Определение начальных условий может быть основано на теореме классического операционного исчисления о начальном значении функции и ее производных

$$v(0)=\lim_{t\to{}_{+}0} v(t)=\lim_{p\to\infty} p\cdot V(p);$$

$$v'(0)=\lim_{t\to{}_{+}0} v'(t)=\lim_{p\to\infty} p^2\cdot V(p);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v^{(n)}(0)=\lim_{t\to{}_{+}0} v^{(n)}(t)=\lim_{p\to\infty} p^n\cdot V(p),$$

при условии, что соответствующий предел существует, то есть конечен.

Практически это означает, что данная теорема позволяет определять начальные значения зависимой переменной и ее производных, до тех пор, пока в дробно-рациональном представлении изображения переменной степень числителя не превышает степень знаменателя. Это ограничение соответствует физически реализуемым цепям, однако, в математическом смысле решение должно существовать и для неправильных дробно-рациональных функций, хотя в классическом операционном исчислении отсутствуют рекомендации на случай, когда выражение под знаком предела будет иметь степень числителя выше степени знаменателя.

Использование теоремы о дифференцировании функции оригинала. Другой подход к определению начальных значений зависимых переменных может быть основан на теореме классического операционного исчисления о дифференцировании оригинала

$$v'(t)\Rightarrow p\cdot V(p)-v({}_{+}0);$$

$$v''(t)\Rightarrow p^2\cdot V(p)-p\cdot v({}_{+}0)-v'({}_{+}0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v^{(n)}(t)\Rightarrow p^n\cdot V(p)-\sum_{k=1}^{n} p^{n-k}\cdot v^{(k-1)}({}_{+}0),$$

при условии, что преобразование Лапласа существует.

Таким образом, теорема о дифференцировании оригинала позволяет определить очередную производную оригинала обратным преобразованием Лапласа изображения, умноженного на p за вычетом начальных значений функции и ее младших производных, умноженных на соответствующую степень оператора p.

Применив обратное преобразование Лапласа к начальным условиям правых частей выражений и, переместив результаты преобразования в левую часть выражений, получим соотношения позволяющие вычислять оригиналы дробно-рациональных функций после очередного умножения их изображений на оператор p

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v^{'}(t) + \delta(0) \cdot v({}_{+}0);$$

$$p^2 \cdot V(p) \Rightarrow v^{''}(t) + \delta(0) \cdot v^{'}({}_{+}0) + \delta^{'}(0) \cdot v({}_{+}0);$$

……………………………………………………

$$p^n \cdot V(p) \Rightarrow v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta^{(n-k)}(0) \cdot v^{(k-1)}({}_{+}0).$$

Таким образом, оригинал изображения, умноженного на оператор p, определяется производной оригинала за вычетом начальных значений функции и ее младших производных, умноженных на соответствующую степень δ - функции.

Вычислив таким способом, очередной оригинал дробно-рациональной функции, переходим к пределу при $t \to {}_{+}0$ и находим соответствующее начальное значение зависимой переменной либо ее производной.

Отметим, прежде всего, что данный подход не конструктивен в том плане, что при вычислении очередного значения оригинала выходной переменной необходимо знать все предыдущие начальные значения, то есть алгоритм рекуррентен.

Данный алгоритм сложнее, чем непосредственное использование теоремы о начальном значении, так как после вычисления оригинала необходимо выполнить предельный переход.

Кроме того, снова остается открытым остается вопрос о том, как поступать в том случае, когда, после очередного умножения изображения дробно-рациональной функции на оператор Лапласа p, степень числителя станет равной или превысит степень знаменателя.

Операторная алгебра, как обобщение операционного исчисления. Ответом на поставленный вопрос о степени числителя равной или превышающей степень знаменателя дробно-рациональной функции является переход к операторной алгебре изложенной в работах Лорана Шварца и Яна Микусинского. Этими авторами были введены понятия обобщенных функций и предложено формальное исчисление (операторная алгебра) обобщающая преобразование Лапласа на класс обобщенных функций, которые определяются интегральными соотношениями. Нам остается лишь воспользоваться разработанным аппаратом, конкретизировать его и возможно развить в некоторых прикладных аспектах.

Так применительно к дробно-рациональной функции заданной неправильной дробью необходимо путем последовательного деления числителя на знаменатель выделить целые части и привести ее к правильной дроби. Правильная дробь, полученная в результате деления, даст конечное значение начального условия, а целые части от деления, в соответствии с операторной алгеброй дадут бесконечные составляющие начального условия, в соответствии с операторными соотношениями

$$1/p \Leftrightarrow 1;\ 1 \Leftrightarrow \delta(0);\ \ p \Leftrightarrow \delta^{'}(0);\ \ p^2 \Leftrightarrow \delta^{''}(0);\ \cdots;\ \ p^n \Leftrightarrow \delta^{(n)}(0).$$

Таким образом, ***обобщение теоремы о дифференцировании оригинала,*** *в принципе позволяет решать проблему начальных условий, используя расширение операционного исчисления на обобщенные функции, однако алгоритм имеет рекуррентный характер.*

Удовлетворительное решение проблемы начальных условий можно предложить **на основе обобщения теоремы о начальном значении функции оригинала и ее производных,** также используя расширение операционного исчисления на обобщенные функции.

Суть методики определения начальных значений в случае представления передаточной функции неправильной дробью и использования расширенной операторной алгебры заключается в следующем:

1) неправильная дробно-рациональная функция путем последовательного деления числителя на знаменатель, до тех пор, пока их степени не сравняются, приводится к виду

$$F(p) = p \cdot V(p) = p \cdot \sum_{l=0}^{k} c_l \cdot p^l + Q(p) = p \cdot C(p) + Q(p),$$

где $F(p)$ - неправильная дробно-рациональная функция; $m = n + k$ - степень числителя $F(p)$; n - степень знаменателя $F(p)$; $C(p)$ - степенной полином оператора p; $Q(p)$ - остаток от деления, дробно-рациональная функция, у которой степень числителя равна степени знаменателя.

2) на том основании, что предел суммы равен сумме пределов, а предел в области изображений при $p \to \infty$, можно заменить пределом оригинала при $t \to {}_{+}0$, возьмем от первого слагаемого, полученного соотношения, предел от его обратного преобразования Лапласа при $t \to {}_{+}0$, а от второго слагаемого предел в области изображений при $p \to \infty$

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = \lim_{p\to\infty} p \cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} [p \cdot C(p) + Q(p)] =$$

$$= \lim_{t\to 0} L^{-1}(p \cdot C(p)) + \lim_{p\to\infty} Q(p) = \lim_{t\to 0} \sum_{l=0}^{k} c_l \cdot \delta^{(l)}(0) + \lim_{p\to\infty} Q(p) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} c_l \cdot \delta^{(l)}(0) + \lim_{p\to\infty} Q(p),$$

где c_l - коэффициенты степенного полинома $C(p)$.

Таким образом, для дробно-рациональных выражений, степень числителя которых выше степени знаменателя, применение обобщенной теоремы о начальном значении кроме конечных составляющих дает составляющие пропорциональные δ - функции и ее производным.

4.3 Примеры определения начальных значений

Рассмотрим серию примеров иллюстрирующих проблему начальных условий и ее решение как с помощью теоремы о дифференцировании оригинала, так и теоремы о начальном значении.

1. Простая дифференцирующая RC **- цепь.** Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{p}{p+\alpha},$$

где $p = j \cdot \omega$ - оператор Лапласа в области изображений; $-\alpha = -1/\tau$ - корень характеристического уравнения; $\tau = R \cdot C$ - постоянная времени RC - цепи.

При входном воздействии в виде функции Хевисайда $E(p) = 1/p \Leftrightarrow e(t) = 1$ выходное напряжение определяется выражением, соответствующим переходной характеристике

$$V(p) = \frac{1}{p+\alpha} \Leftrightarrow v(t) = e^{-\alpha \cdot t} = h(t).$$

Выпишем значения функции $v(t)$ и ее производных при $t \to {}_+0$

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t};\ t \to {}_+0;\ v(0) = 1;$$

$$v'(t) = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t};\ t \to {}_+0;\ v'(0) = -\alpha;$$

$$v''(t) = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha \cdot t};\ t \to {}_+0;\ v''(0) = \alpha^2;$$

$$v'''(t) = -\alpha^3 \cdot e^{-\alpha \cdot t};\ t \to {}_+0;\ v'''(0) = -\alpha^3.$$

Воспользуемся для нахождения начальных значений операционных производных $v(t)$ теоремой о дифференцировании оригинала и предельным переходом при $t \to {}_+0$

$$p \cdot V(p) \Leftrightarrow v'(t) + \delta(0) \cdot v({}_+0) = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0) \cdot 1;$$

$$v'({}_+0) = \lim_{t \to {}_+0} \left\langle -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0) \right\rangle = -\alpha + \delta(0);$$

$$p^2 \cdot V(p) \Leftrightarrow v''(t) + \delta(0) \cdot v'({}_+0) + \delta'(0) \cdot v({}_+0) =$$

$$= \alpha^2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \delta(0) \cdot \alpha + \delta'(0) \cdot 1;$$

$$v''({}_+0) = \lim_{t \to {}_+0} \left\langle \alpha^2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} - \alpha \cdot \delta(0) + \delta'(0) \right\rangle = \alpha^2 - \alpha \cdot \delta(0) + \delta'(0);$$

$$p^3 \cdot V(p) \Leftrightarrow v'''(t) + \delta(0) \cdot v''({}_+0) + \delta'(0) \cdot v'({}_+0) + \delta''(0) \cdot v({}_+0) =$$

$$= -\alpha^3 \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0) \cdot \alpha^2 - \delta'(0) \cdot \alpha + \delta''(0) \cdot 1;$$

$$v'''({}_+0) = \lim_{t \to {}_+0} \left\langle -\alpha^3 \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0) \cdot \alpha^2 - \delta'(0) \cdot \alpha + \delta''(0) \right\rangle =$$

$$= -\alpha^3 + \delta(0) \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot \delta'(0) + \delta''(0).$$

Как видим, умножение изображения на оператор p соответствует взятию производной функции плюс начальные значения функции и предыдущих производных умноженные соответственно на производные δ-функций.

Теперь воспользуемся для определения начальных условий обобщенной теоремой о начальном значении, в соответствии с предлагаемой методикой

$$v({}_{+}0) = \lim_{t\to{}_{+}0} v(t) = \lim_{p\to\infty} p\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} p\cdot\frac{1}{p+\alpha} = 1;$$

$$v^{'}({}_{+}0) = \lim_{t\to{}_{+}0} v^{'}(t) = \lim_{p\to\infty} p^{2}\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} p^{2}\cdot\frac{1}{p+\alpha} =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\langle 1\cdot p - \frac{\alpha\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle = \lim_{t\to{}_{+}0}\delta(0) + \lim_{p\to\infty}\frac{-\alpha\cdot p}{p+\alpha} = \delta(0)-\alpha;$$

$$v^{''}({}_{+}0) = \lim_{t\to{}_{+}0} v^{''}(t) = \lim_{p\to\infty} p^{3}\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} p^{3}\cdot\frac{1}{p+\alpha} =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\langle p\cdot p + p\cdot(-\alpha) + \frac{\alpha^{2}\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle =$$

$$= \lim_{t\to{}_{+}0}\delta^{'}(0) + \lim_{t\to{}_{+}0}(-\alpha\cdot\delta(0)) + \lim_{p\to\infty}\frac{\alpha^{2}\cdot p}{p+\alpha} = \delta^{'}(0) - \alpha\cdot\delta(0) + \alpha^{2};$$

$$v^{'''}({}_{+}0) = \lim_{t\to{}_{+}0} v^{'''}(t) = \lim_{p\to\infty} p^{4}\cdot V(p) = \lim_{p\to\infty} p^{4}\cdot\frac{1}{p+\alpha} =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\langle p\cdot p^{2} + p\cdot(-\alpha\cdot p) + p\cdot\alpha^{2} - \frac{\alpha^{3}\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle =$$

$$= \lim_{t\to{}_{+}0}\delta^{''}(0) + \lim_{t\to{}_{+}0}(-\alpha\cdot\delta^{'}(0)) + \lim_{t\to{}_{+}0}\alpha^{2}\cdot\delta(0) + \lim_{p\to\infty}\frac{-\alpha^{3}\cdot p}{p+\alpha} =$$

$$= \delta^{''}(0) - \alpha\cdot\delta^{'}(0) + \alpha^{2}\cdot\delta(0) - \alpha^{3}.$$

Как видим, полученные значения, совпали с результатами использования обобщенной теоремы о дифференцировании оригинала. Кроме того, методика получения начальных условий по обобщенной теореме о начальном значении существенно проще и не требует знания предыдущих начальных значений функции и ее производных.

2. Простая интегрирующая RC- цепь. Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p) = \frac{V(p)}{E(p)} = \frac{\alpha}{p+\alpha},$$

где $p = j\cdot\omega$ - оператор Лапласа в области изображений; $-\alpha = -1/\tau$ - корень характеристического уравнения; $\tau = R\cdot C$ - постоянная времени RC- цепи.

При входном воздействии в виде функции Хевисайда $E(p)=1/p \Leftrightarrow e(t)=1$ выходное напряжение определяется выражением, соответствующим переходной характеристике

$$V(p)=\frac{\alpha}{p\cdot(p+\alpha)} \Leftrightarrow v(t)=1-e^{-\alpha\cdot t}=h(t).$$

Выпишем значения функции $v(t)$ и ее производных при $t \to {}_{+}0$

$$v(t)=1-e^{-\alpha\cdot t};\ t \to {}_{+}0;\ v(0)=0;$$

$$v^{'}(t)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t};\ t \to {}_{+}0;\ v^{'}(0)=\alpha;$$

$$v^{''}(t)=-\alpha^2\cdot e^{-\alpha\cdot t};\ t \to {}_{+}0;\ v^{''}(0)=-\alpha^2;$$

$$v^{'''}(t)=\alpha^3\cdot e^{-\alpha\cdot t};\ t \to {}_{+}0;\ v^{'''}(0)=\alpha^3.$$

Воспользуемся для нахождения начальных значений операционных производных $v(t)$ теоремой о дифференцировании оригинала и предельным переходом при $t \to {}_{+}0$

$$p\cdot V(p) \Leftrightarrow v^{'}(t)+\delta(0)\cdot v({}_{+}0)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\cdot 0;$$

$$v^{'}({}_{+}0)=\lim_{t\to {}_{+}0}\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}=\alpha;$$

$$p^2\cdot V(p) \Leftrightarrow v^{''}(t)+\delta(0)\cdot v^{'}({}_{+}0)+\delta^{'}(0)\cdot v({}_{+}0)=$$

$$=-\alpha^2\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\cdot\alpha+\delta^{'}(0)\cdot 0;$$

$$v^{''}({}_{+}0)=\lim_{t\to {}_{+}0}\left\langle -\alpha^2\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\alpha\cdot\delta(0)\right\rangle=-\alpha^2+\alpha\cdot\delta(0);$$

$$p^3\cdot V(p) \Leftrightarrow v^{'''}(t)+\delta(0)\cdot v^{''}({}_{+}0)+\delta^{'}(0)\cdot v^{'}({}_{+}0)+\delta^{''}(0)\cdot v({}_{+}0)=$$

$$=\alpha^3\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\delta(0)\cdot\alpha^2+\delta^{'}(0)\cdot\alpha+\delta^{''}(0)\cdot 0;$$

$$v^{'''}({}_{+}0)=\lim_{t\to {}_{+}0}\left\langle \alpha^3\cdot e^{-\alpha\cdot t}-\delta(0)\cdot\alpha^2+\delta^{'}(0)\cdot\alpha\right\rangle=$$

$$=\alpha^3-\delta(0)\cdot\alpha^2+\alpha\cdot\delta^{'}(0).$$

Как видим, умножение изображения на оператор p соответствует взятию производной функции плюс начальные значения функции и предыдущих производных умноженные соответственно на производные δ-функций.

Теперь воспользуемся для определения начальных условий обобщенной теоремой о начальном значении, в соответствии с предлагаемой методикой

$$v({}_{+}0)=\lim_{t\to {}_{+}0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha}{p+\alpha}=0;$$

$$v^{'}({}_{+}0)=\lim_{t\to {}_{+}0}v^{'}(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha\cdot p}{p+\alpha}=\alpha;$$

$$v''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0} v''(t)=\lim_{p\to\infty} p^3\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha\cdot p^2}{p+\alpha}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left\langle p\cdot\alpha-\frac{\alpha^2\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle=$$

$$=\lim_{t\to{}_+0}\alpha\cdot\delta(0)+\lim_{p\to\infty}\frac{-\alpha^2\cdot p}{p+\alpha}=\alpha\cdot\delta(0)-\alpha^2;$$

$$v'''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0} v'''(t)=\lim_{p\to\infty} p^4\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha\cdot p^3}{p+\alpha}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left\langle p\cdot(\alpha\cdot p)-p\cdot\alpha^2+\frac{\alpha^3\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle=$$

$$=\lim_{t\to{}_+0}(\alpha\cdot\delta'(0))-\lim_{t\to{}_+0}\alpha^2\cdot\delta(0)+\lim_{p\to\infty}\frac{\alpha^3\cdot p}{p+\alpha}=$$

$$=\alpha\cdot\delta'(0)-\alpha^2\cdot\delta(0)+\alpha^3.$$

Как видим, полученные значения, совпали с результатами использования обобщенной теоремы о дифференцировании оригинала. Кроме того, методика получения начальных условий по обобщенной теореме о начальном значении существенно проще и не требует знания предыдущих начальных значений функции и ее производных.

3. RC- цепь с ОУ (вырожденный случай). Коэффициент передачи цепи по напряжению имеет вид

$$K(p)=\frac{V(p)}{E(p)}=K_0\cdot\frac{p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)},$$

где $p=j\cdot\omega$- оператор Лапласа в области изображений; $0,-\alpha$- корни характеристического уравнения.

При входном воздействии в виде функции Хевисайда $E(p)=1/p\Leftrightarrow e(t)=1$ выходное напряжение определяется выражением, соответствующим переходной характеристике

$$V(p)=K_0\cdot\frac{p+b_0}{p^2\cdot(p+\alpha)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(t)=\frac{K_0}{\alpha^2}\cdot\left\langle\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha-b_0)\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})\right\rangle=h(t).$$

Выпишем значения функции $v(t)$ и ее производных при $t\to{}_+0$

$$v(t)=\frac{K_0}{\alpha^2}\cdot\left\langle\alpha\cdot b_0\cdot t+(\alpha-b_0)\cdot(1-e^{-\alpha\cdot t})\right\rangle;\ t\to{}_+0;\ v(0)=0;$$

$$v'(t)=\frac{K_0}{\alpha^2}\cdot\left\langle\alpha\cdot b_0+\alpha\cdot(\alpha-b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle;\ t\to{}_+0;\ v'(0)=K_0;$$

$$v''(t)=K_0\cdot(b_0-\alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t};\ t\to{}_+0;\ v''(0)=K_0\cdot(b_0-\alpha);$$

$$v'''(t)=K_0\cdot\alpha\cdot(\alpha-b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t};\ t\to{}_+0;\ v'''(0)=K_0\cdot\alpha\cdot(\alpha-b_0).$$

Воспользуемся для нахождения начальных значений операционных производных $v(t)$ теоремой о дифференцировании оригинала и предельным переходом при $t\to{}_+0$

$$p\cdot V(p)\Leftrightarrow v'(t)+\delta(0)\cdot v({}_+0)=\frac{K_0}{\alpha^2}\cdot\left\langle\alpha\cdot b_0+\alpha\cdot(\alpha-b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right\rangle+\delta(0)\cdot 0;$$

$$v'({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}K_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}=K_0;$$

$$p^2\cdot V(p)\Leftrightarrow v''(t)+\delta(0)\cdot v'({}_+0)+\delta'(0)\cdot v({}_+0)=$$

$$=K_0\cdot(b_0-\alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\cdot K_0+\delta'(0)\cdot 0;$$

$$v''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}K_0\cdot\left\langle(b_0-\alpha)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\right\rangle=K_0\cdot\left\langle(b_0-\alpha)+\delta(0)\right\rangle;$$

$$p^3\cdot V(p)\Leftrightarrow v'''(t)+\delta(0)\cdot v''({}_+0)+\delta'(0)\cdot v'({}_+0)+\delta''(0)\cdot v({}_+0)=$$

$$=K_0\cdot\alpha\cdot(\alpha-b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\cdot K_0\cdot(b_0-\alpha)+\delta'(0)\cdot K_0+\delta''(0)\cdot 0;$$

$$v'''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}K_0\cdot\left\langle\alpha\cdot(\alpha-b_0)\cdot e^{-\alpha\cdot t}+\delta(0)\cdot(b_0-\alpha)+\delta'(0)\right\rangle=$$

$$=K_0\cdot\left\langle\alpha\cdot(\alpha-b_0)+\delta(0)\cdot(b_0-\alpha)+\delta'(0)\right\rangle.$$

Как видим, умножение изображения на оператор p соответствует взятию производной функции плюс начальные значения функции и предыдущих производных умноженные соответственно на производные δ-функций.

Теперь воспользуемся для определения начальных условий обобщенной теоремой о начальном значении, в соответствии с предлагаемой методикой

$$v({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}v(t)=\lim_{p\to\infty}p\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K_0\cdot\frac{p+b_0}{p\cdot(p+\alpha)}=0;$$

$$v'({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}v'(t)=\lim_{p\to\infty}p^2\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K_0\cdot\frac{p+b_0}{p+\alpha}=K_0;$$

$$v''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0}v''(t)=\lim_{p\to\infty}p^3\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty}K_0\cdot\frac{p\cdot(p+b_0)}{p+\alpha}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}K_0\cdot\left\langle p\cdot 1+\frac{(b_0-\alpha)\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle=$$

$$=\lim_{t\to{}_+0}K_0\cdot\delta(0)+\lim_{p\to\infty}K_0\cdot\frac{(b_0-\alpha)\cdot p}{p+\alpha}=K_0\cdot\left\langle\delta(0)+(b_0-\alpha)\right\rangle;$$

$$v'''({}_+0)=\lim_{t\to{}_+0} v'''(t)=\lim_{p\to\infty} p^4\cdot V(p)=\lim_{p\to\infty} K_0\cdot\frac{p^2\cdot(p+b_0)}{p+\alpha}=$$

$$=\lim_{p\to\infty} K_0\cdot\left\langle p\cdot p+p\cdot(b_0-\alpha)+\frac{\alpha\cdot(b_0-\alpha)\cdot p}{p+\alpha}\right\rangle=$$

$$=\lim_{t\to{}_+0} K_0\cdot\left\langle \delta'(0)+(b_0-\alpha)\cdot\delta(0)\right\rangle+\lim_{p\to\infty} K_0\cdot\frac{\alpha\cdot(b_0-\alpha)\cdot p}{p+\alpha}=$$

$$=K_0\cdot\left\langle \delta'(0)+(b_0-\alpha)\cdot\delta(0)+\alpha\cdot(b_0-\alpha)\right\rangle.$$

Как видим, полученные значения, совпали с результатами использования обобщенной теоремы о дифференцировании оригинала. Кроме того, методика получения начальных условий по обобщенной теореме о начальном значении существенно проще и не требует знания предыдущих начальных значений функции и ее производных.

Таким образом, обобщенная теорема о начальном значении позволяет достаточно просто определить начальные условия для интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего цепь.

Обобщенная теорема о дифференцировании оригинала с последующим предельным переходом также позволяет определить начальные условия интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, однако ее использование затруднено рекуррентной формой соотношений. Так для вычисления старшей производной необходимо знать начальные значения всех предыдущих производных.

При использовании обобщенной теоремы о дифференцировании оригинала и возникновении неправильных дробей в результате очередного умножения на оператор p приходится учитывать ε- смещение правых пределов функций $1({}_+0)$, $\delta({}_+0)$, $\delta'({}_+0)$, $\delta''({}_+0)$ и так далее. В результате, приходим к выводу, что произведения δ- функции и ее производных и ε- смещенных функций равны нулю.

Отметим еще раз, что определение начальных условий по теореме о начальном значении проще, чем по теореме о дифференцировании оригинала с последующим предельным переходом при $t\to{}_+0$.

В заключение, можно сделать вывод о том, что задача определения начальных условий по изображению переменной для интегрирования дифференциального уравнения решена полностью.

Замечание по теореме о дифференцировании оригинала. Теорема о дифференцировании оригинала представляется соотношениями

$$v'(t) \Rightarrow p \cdot V(p) - v(_+0);$$
$$v''(t) \Rightarrow p^2 \cdot V(p) - p \cdot v(_+0) - v'(_+0);$$
$$v'''(t) \Rightarrow p^3 \cdot V(p) - p^2 \cdot v(_+0) - p \cdot v'(_+0) - v''(_+0);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v^{(n)}(t) \Rightarrow p^n \cdot V(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} \cdot v^{(k-1)}(_+0),$$

при условии, что преобразование Лапласа существует.

Как видим, каждая новая производная оригинала есть результат применения исходного соотношения к предыдущему выражению.

Применив обратное преобразование Лапласа к начальным условиям правых частей и, переместив результаты преобразования в левую часть выражений, получим соотношения

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + \delta(0) \cdot v(_+0) = u_1(t);$$
$$p^2 \cdot V(p) \Rightarrow v''(t) + \delta(0) \cdot v'(_+0) + \delta'(0) \cdot v(_+0) = u_2(t);$$
$$p^3 \cdot V(p) \Rightarrow v'''(t) + \delta(0) \cdot v''(_+0) + \delta'(0) \cdot v'(_+0) + \delta''(0) \cdot v(_+0) = u_3(t);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^n \cdot V(p) \Rightarrow v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta^{(n-k)}(0) \cdot v^{(k-1)}(_+0) = u_n(t).$$

Из этих соотношений следует, что для вычисления преобразования Лапласа при умножении на оператор p необходимо знать не только выражение для производной $v(t)$, но и начальные значения функции и ее предыдущих производных. Это означает, что данные соотношения строго рекуррентны, то есть для вычисления преобразования Лапласа при кратном умножении на оператор p необходимо сначала найти начальное значение функции и ее предыдущих производных.

С другой стороны, за начальный отсчет преобразований может быть выбран любой результат из последовательности вычислений, и он должен нести информацию обо всех предыдущих преобразованиях и его должно быть достаточно для следующего преобразования.

С целью проверки данного утверждения, обозначим результаты преобразований через $u_i(t)$ и в качестве $v^{(i)}(_+0)$ будем брать $u_i(_+0)$

$$p \cdot V(p) \Rightarrow v'(t) + \delta(0) \cdot v(_+0) = u_1(t);$$
$$p^2 \cdot V(p) \Rightarrow u_1'(t) + \delta(0) \cdot u_1(_+0) =$$
$$= v''(t) + \delta'(0) \cdot v(_+0) + \delta(0) \cdot [v'(_+0) + \delta(_+0) \cdot v(_+0)] =$$
$$= v''(t) + \delta(0) \cdot v'(_+0) + \delta'(0) \cdot v(_+0) = u_2(t);$$

$$p^3 \cdot V(p) \Rightarrow u_2'(t) + \delta(0) \cdot u_2({}_+0) =$$

$$= v'''(t) + \delta'(0) \cdot v'({}_+0) + \delta''(0) \cdot v({}_+0) +$$

$$+ \delta(0) \cdot [v''({}_+0) + \delta({}_+0) \cdot v'({}_+0) + \delta'({}_+0) \cdot v({}_+0)] =$$

$$= v'''(t) + \delta(0) \cdot v''({}_+0) + \delta'(0) \cdot v'({}_+0) + \delta''(0) \cdot v({}_+0) = u_3(t);$$

……………………………………………………………………

$$p^n \cdot V(p) \Rightarrow u_{n-1}'(t) + \delta(0) \cdot u_{n-1}({}_+0) =$$

$$= v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \delta^{(n-k)}(0) \cdot v^{(k-1)}({}_+0) +$$

$$+ \delta(0) \cdot [v^{(n-1)}({}_+0) + \sum_{k=1}^{n-1} \delta^{(n-k-1)}(0) \cdot v^{(k-1)}({}_+0)] =$$

$$= v^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta^{(n-k)}(0) \cdot v^{(k-1)}({}_+0) = u_n(t).$$

Заметим, что в этих выражениях $v^{(i)}({}_+0)$ являются константами, то есть конкретными начальными значениями функции или ее производной.

В итоге удалось доказать, что в качестве начального значения достаточно брать результат предыдущего преобразования Лапласа. При доказательстве использован тот факт, что произведение δ- функции на правые пределы δ- функции и ее производных равны нулю, в силу их ε-смещения.

Таким образом, обобщенная теорема о дифференцировании оригинала может быть записана в виде

$$p \cdot V(p) \Rightarrow u'(t) + \delta(0) \cdot u({}_+0),$$

где $u(t) \Leftrightarrow V(p)$.

Этот результат является оригинальным, то есть позволяет существенно сократить объем преобразований и подтверждает исходные соображения о том, что преобразование Лапласа оригинала, умноженного на оператор p, содержит информацию обо всех предыдущих начальных условиях.

В заключение отметим, что в данном разделе не только удалось решить проблему начальных условий интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение выходных переменных электрических цепей, но и, используя операторную алгебру, обобщить известные теоремы операционного исчисления о начальном значении и дифференцирования оригинала на случай неправильных дробно-рациональных функций.