**Министерство образования и науки РФ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Радиотехнический факультет (РТФ)

Кафедра средств радиосвязи (СРС)

**Кологривов В.А.**

# *ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОТЕХНИКЕ*

## Часть 2. Дискретные и цифровые системы

**Учебное пособие**
**для студентов радиотехнических специальностей**

**2012**

**Рецензент:** кандидат физико–математических наук, профессор кафедры радиотехнических систем, Томского университета систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) **Чумаков А.С.**

**Кологривов В.А.**

Прикладные математические методы в радиотехнике. В 2-х частях. Часть 2 - Дискретные и цифровые системы: Учебное пособие для студентов направлений радиотехника и телекоммуникации. – Томск: ТУСУР. Образовательный портал, 2012. - 195 с.

*В учебном пособии излагается методика определения основных характеристик аналоговых, дискретных и цифровых устройств и систем с привлечением матричного аппарата, операционного исчисления (Лапласа и Z- преобразований), обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений. Изложение материала сопровождается большим числом примеров определения передаточных (системных), переходных и импульсных характеристик аналоговых и дискретных цепей, как моделей реальных устройств.*

*Используемая методика позволяет определять реакцию аналоговых, дискретных и цифровых устройств на произвольное воздействие и актуальна при моделировании реальных устройств с использованием современных компьютерных систем для инженерных и научных исследований.*

*Пособие предназначено для студентов младших курсов радиотехнических и связных специальностей и призвано привить навыки математической формулировки и решения прикладных задач радиотехники, радиоэлектроники и связи. Может использоваться студентами других специальностей по направлениям связь, телекоммуникации, промышленная электроника.*

*По техническим причинам учебное пособие разбито на 2 части: часть 1 – Аналоговые системы; часть 2 – Дискретные и цифровые системы*

*В конце второй части пособия приведены учебно-методические материалы контроля знаний по дисциплине «Прикладные математические методы в радиотехнике»: тематика и содержание компьютерных контрольных работ, экзаменационные вопросы компьютерной системы тестирования; вопросы для подготовки к экзамену и/или зачету.*

# СОДЕРЖАНИЕ

# 5 ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

## 5.1 Исходные понятия и определения

Дискретные или импульсные системы естественным образом возникают в теории кодирования и цифровой фильтрации. Теория дискретных систем тесно примыкает к теории непрерывных аналоговых систем. В то время как анализ аналоговых систем базируется на преобразовании Лапласа и дифференциальных уравнениях, дискретные системы описываются дискретным преобразованием Лапласа или его разновидностью $Z$- преобразованием и разностными уравнениями.

В основу классификации систем, в данном случае, положен вид протекающих сигналов.

**Непрерывный сигнал.** Непрерывным называется сигнал, описывающийся непрерывной функцией независимой переменной, например, времени $t$. Значения непрерывного сигнала или функции предполагаются однозначно определенными на заданном интервале, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тем самым, непрерывный сигнал определен несколько шире, чем непрерывная в математическом смысле функция.

**Дискретный сигнал.** Дискретным называется сигнал определенный только на последовательности дискретных значений независимой переменной, например, времени $t$. Промежуточные значения функции между отсчетами не существенны, то есть в расчет не принимаются, так как они исключаются в процессе дискретизации.

Во многих случаях используют равноотстоящие отсчеты с шагом или периодом $T$ в виде $\{t_0, t_0 + T, t_0 + 2 \cdot T, \cdots, t_0 + k \cdot T\}$. Здесь $k$ соответствует номеру временного отсчета и записи $y(t_0 + k \cdot T) = y(k) = y_k$ определяют дискретную функцию времени, как функцию независимой дискретной переменной $k$.

Дискретный сигнал, в частности, может быть получен стробированием непрерывного сигнала по времени и квантованием отсчетов по уровням. Последующее кодирование уровней отсчетов $m$- разрядным двоичным кодом преобразует дискретный сигнал в цифровой.

На рисунке 5.1 графически отображена последовательность операций преобразования непрерывного сигнала в дискретный и цифровой сигналы. Для представления цифрового сигнала использован трех разрядный двоичный код. В качестве отсчетов мгновенных значений сигналов и цифровой последовательности импульсов использованы короткие прямоугольные импульсы с защитным интервалом между импульсами.

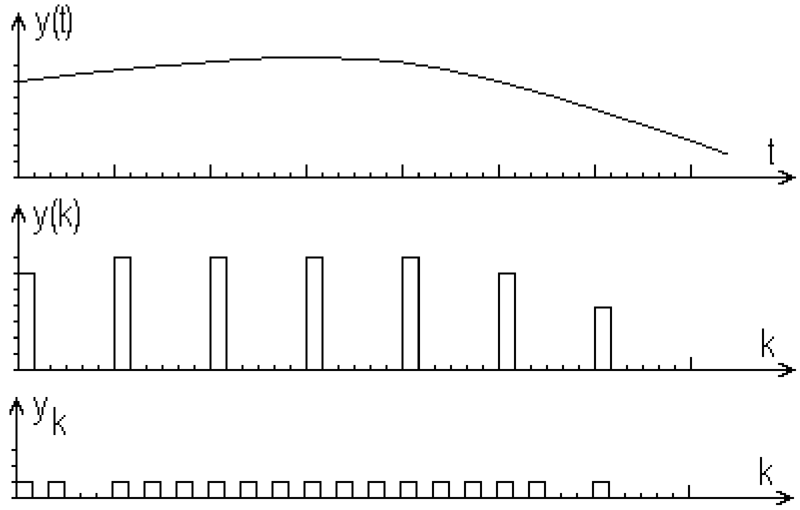


Рисунок 5.1 - Последовательность операций преобразования непрерывного сигнала в дискретный и цифровой с трех разрядным двоичным кодом

Основными звеньями построения функциональных схем и моделей являются: сумматор – суммирующее звено, пропорциональное звено и звено задержки. Суммирующие и пропорциональные звенья входят и в состав непрерывных систем, а звено задержки играет роль своеобразного интегрирующего звена дискретных систем. Входной сигнал $y_{k+1}$ появляется на выходе звена задержки, как $y_k$ спустя период $T$ или запаздывает на время $T$.

*На практике, в реальном масштабе времени, звенья задержки реализовать достаточно трудно. В цифровых и логических схемах, работающих на основе двоичной логики, звенья задержки реализуются просто.*

**Функциональные модели дискретных систем.** Функциональные модели дискретных систем строятся путем соединения базового набора функциональных звеньев в соответствии со структурой разностного уравнения. В качестве базового набора функциональных звеньев дискретных систем используются звенья задержки или упреждения, масштабные или пропорциональные звенья и звенья сумматоров.

Функциональная модель фактически отображает структуру соответствующего разностного уравнения. Здесь имеются в виду не только программные модели, но и реальные физические модели, например, логических и цифровых микросхемах, либо, реализованные на базе цифровых процессоров и ЭЦВМ.

С помощью набора операций реализуемых этими звеньями можно отобразить функционирование любой линейной дискретной системы. Кроме того, известны пакеты функционального моделирования типа **Simulink** системы **MatLab,** позволяющие программно моделировать аналоговые и дискретные системы. В среде пакета **Simulink** с помощью “мыши” из библиотеки функциональных элементов выбираются соответствующие элементы, выносятся на поле графического редактора, соединяются между собой, подключаются дисплеи-индикаторы, выставляются параметры звеньев и производится запуск модели. На экранах дисплеев графически отображаются все необходимые характеристики моделируемой системы.

Так как функциональная модель связана со структурой разностного уравнения, то возможен и обратный переход от модели к разностному уравнению.

Остановимся кратко на особенностях построения функциональных моделей разностных уравнений дискретных систем. В функциональных моделях или схемах дискретных систем предполагается, что переменная $y(n \cdot T + k \cdot T) = y_{n+k}$ доступна для измерения. Сигнал, описываемый этой переменной, последовательно пропускается через звенья задержки, до тех пор, пока не получится $y(k \cdot T) = y_k$. Соединение звеньев функциональной схемы производится в соответствии с разностным уравнением, описывающим связь отсчетов входного $x_k$ и выходного $y_k$ сигналов.

На рисунке 5.2 изображена функциональная схема дискретной системы, с рекурсией выходной последовательности импульсов, описываемой разностным уравнением третьего порядка

$$y_{k+3} + a_2 \cdot y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = x_k ,$$

где $x_k$ - соответствует входной последовательности импульсов, то есть внешнему воздействию на систему.

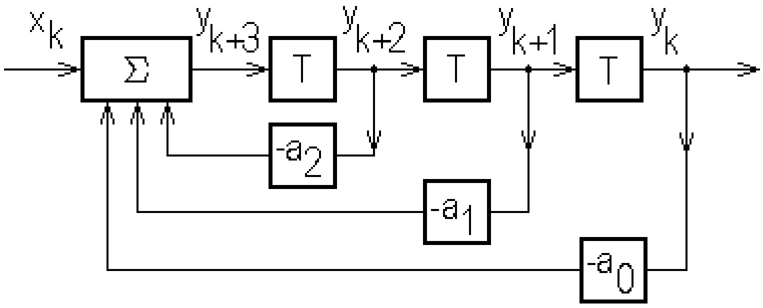


Рисунок 5.2 - Функциональная схема дискретной системы с рекурсией выходной последовательности импульсов

Здесь задержанные и масштабированные импульсы выходной последовательности по петле (каналу) обратной связи поступают на вход сумматора. В этом случае говорят о рекурсии (повторной обработке) выходной последовательности и эту часть дискретной системы называют рекурсивной.

Часто, для обозначения звена (блока) задержки на один такт вместо символа $T$ используют символическую запись оператора запаздывания $z^{-1}$.

Правая часть разностного уравнения также может содержать взвешенную сумму входной последовательности отсчетов сигнала. В этом случае потребуются дополнительные блоки задержек и масштабирования входной последовательности. Обычно стараются минимизировать число блоков задержек, используя одни и те же блоки для задержек как входной, так и выходной последовательности. В этом случае говорят о канонических функциональных схемах дискретных систем.

На рисунке 5.3 изображена каноническая функциональная схема дискретной системы, с рекурсией выходной последовательности и задержкой входной последовательности импульсов, описываемой разностным уравнением третьего порядка

$$y_{k+3} + a_2 \cdot y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = b_3 \cdot x_{k+3} + b_2 \cdot x_{k+2} + b_1 \cdot x_{k+1} + b_0 \cdot x_k .$$

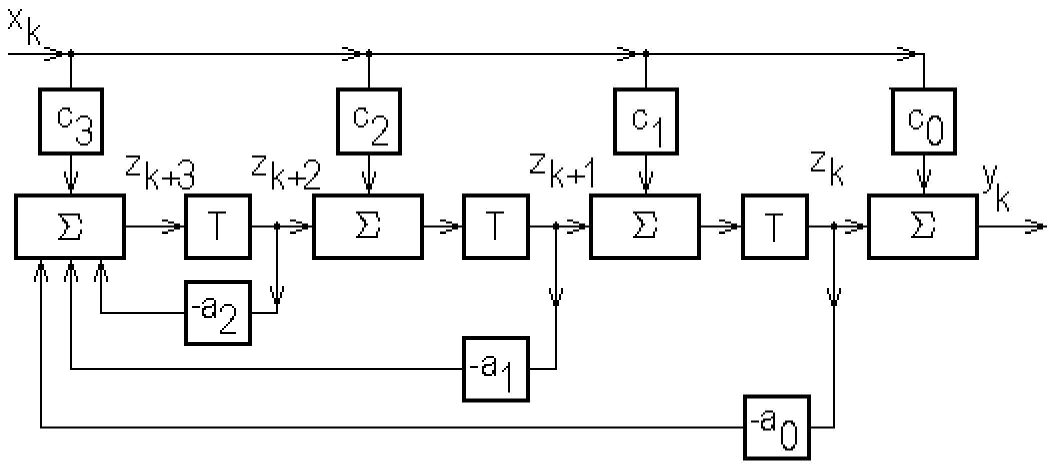


Рисунок 5.3 - Функциональная схема дискретной системы с рекурсией выходной последовательности и задержкой входной последовательности импульсов

Здесь поток импульсов внутри дискретной системы $z_{k+i}$ представляет собой взвешенную сумму импульсов входной и выходной последовательностей, то есть $z_{k+i}$ является внутренней переменной состояния дискретной системы. Звенья задержки являются общими для входной и выходной последовательности импульсов. Функциональные схемы с минимальным числом звеньев задержки называются каноническими.

Заметим, что при такой канонической реализации дискретной системы значения масштабных множителей $c_i$ отличаются от значений коэффициентов правой части разностного уравнения $b_i$.

Для установления взаимосвязи между масштабными множителями функциональной схемы и коэффициентами разностного уравнения запишем выражения для значений последовательностей на выходах первого и последнего сумматоров, а также во внутренних точках схемы, соответствующих внутреннему состоянию дискретной системы

$$y_k = z_k + c_0 \cdot x_k; \quad z_k = y_k - c_0 \cdot x_k;$$
$$z_{k+1} = y_{k+1} - c_0 \cdot x_{k+1} - c_1 \cdot x_k;$$
$$z_{k+2} = y_{k+2} - c_0 \cdot x_{k+2} - c_1 \cdot x_{k+1} - c_2 \cdot x_k;$$
$$z_{k+3} = y_{k+3} - c_0 \cdot x_{k+3} - c_1 \cdot x_{k+2} - c_2 \cdot x_{k+1} =$$
$$= c_3 \cdot x_k - a_2 \cdot z_{k+2} - a_1 \cdot z_{k+1} - a_0 \cdot z_k .$$

Раскрывая последнее выражение системы через предыдущие выражения, приходим к записи

$$\begin{aligned} y_{k+3} - c_0 \cdot x_{k+3} - c_1 \cdot x_{k+2} - c_2 \cdot x_{k+1} = \\ = -a_2 \cdot y_{k+2} + a_2 \cdot c_0 \cdot x_{k+2} + a_2 \cdot c_1 \cdot x_{k+1} + a_2 \cdot c_2 \cdot x_k - \\ - a_1 \cdot y_{k+1} + a_1 \cdot c_0 \cdot x_{k+1} + a_1 \cdot c_1 \cdot x_k - \\ - a_0 \cdot y_k + a_0 \cdot c_0 \cdot x_k + \\ + c_3 \cdot x_k . \end{aligned}$$

Приводя подобные, приходим к разностному уравнению вида

$$\begin{aligned} y_{k+3} + a_2 \cdot y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = \\ = c_0 \cdot x_{k+3} + c_1 \cdot x_{k+2} + c_2 \cdot x_{k+1} + c_3 \cdot x_k + \\ + a_2 \cdot c_0 \cdot x_{k+2} + a_2 \cdot c_1 \cdot x_{k+1} + a_2 \cdot c_2 \cdot x_k + \\ + a_1 \cdot c_0 \cdot x_{k+1} + a_1 \cdot c_1 \cdot x_k + \\ + a_0 \cdot c_0 \cdot x_k . \end{aligned}$$

Сравнивая исходное разностное уравнение с уравнением, полученным по функциональной схеме, приходим к выводу, что масштабные множители нерекурсивной части схемы $c_i$ связаны с коэффициентами правой $a_i$ и левой $b_i$ частей исходного разностного уравнения рекуррентными соотношениями вида

$$c_0 = b_3;$$
$$c_1 = b_2 - a_2 \cdot c_0;$$
$$c_2 = b_1 - a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_0;$$
$$c_3 = b_0 - a_2 \cdot c_2 - a_1 \cdot c_1 - a_0 \cdot c_0 .$$

В общем виде, значения масштабных множителей нерекурсивной части использованной функциональной схемы реализации дискретной системы, могут быть определены из соотношения

$$c_i = b_{n-i} - \sum_{k=1}^{i} a_{n-k} \cdot c_{i-k} ,$$

где $n$ - порядок разностного уравнения.

Из последней записи следует, что исходные коэффициенты правой части разностного уравнения связаны с масштабными множителями нерекурсивной части функциональной схемы матричным соотношением

$$\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \cdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Наоборот, масштабные коэффициенты нерекурсивной части функциональной схемы могут быть определены путем обращения указанной матрицы коэффициентов либо из приведенного рекуррентного соотношения.

В общем случае уравнение физически реализуемой дискретной системы может быть записано в виде

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y_k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x_k \,,$$

где $m \le n$ и называется разностным уравнением.

*В литературе используются также функциональные канонические модели, построенные на основе системных характеристик дискретных систем, в частности, полученные на основе разложения системных характеристик на элементарные дроби. Для многоканальных дискретных систем используются функциональные модели систем приведенных к нормальному виду. На этих моделях мы не будем здесь акцентировать внимания, так как они обычно рассматриваются в более специальных дисциплинах. Нашей задачей здесь было ознакомить с элементами функционального моделирования дискретных систем.*

Прежде чем заняться изучением разностных уравнений и методами их аналитического решения целесообразно рассмотреть дискретные функции времени, определенные на последовательности дискретных значений времени.

## 5.2 Решетчатые функции

Наряду с функциями, определенными на вещественной оси $t$, применительно к дискретным системам рассматривают функции, определенные лишь в некоторых точках $t_k$. Соответственно, функции определенные на дискретном множестве точек временной оси, называют дискретными или решетчатыми функциями. Для удобства будем рассматривать функции в равноотстоящих точках $t_k = k \cdot T$, где $k$ - любое целое число; $T$ - период или шаг дискретизации.

Для определенных таким образом функций будем использовать обозначение $f(t_k) = f(k \cdot T) = f_k$. Пример графика решетчатой функции времени изображен на рисунке 5.4.

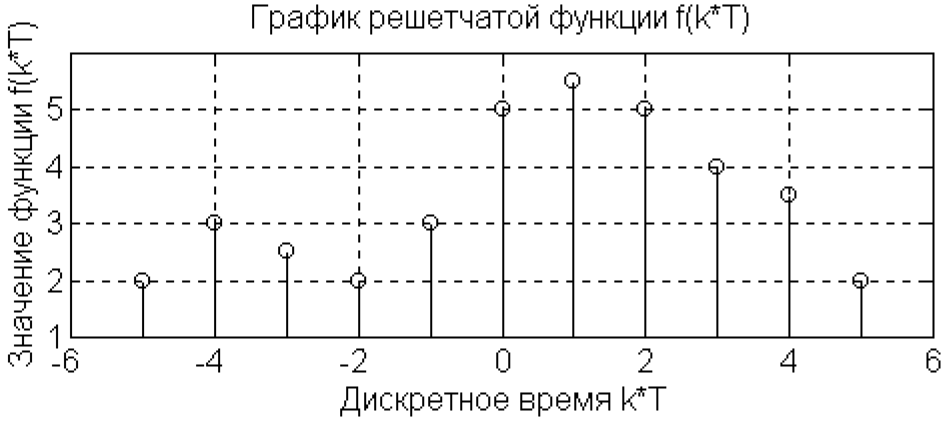


Рисунок 5.4 - График решетчатой функции времени

Любой непрерывной функции можно поставить в соответствие множество решетчатых функций времени, переопределив переменную $t$ в виде $t = k \cdot T + \varepsilon \cdot T$, где $(0 \le \varepsilon \le 1)$.

При каждом фиксированном значении $\varepsilon$ функцию $f(k \cdot T + \varepsilon \cdot T)$ можно рассматривать как решетчатую функцию, определенную в точках $\varepsilon \cdot T,\ (1+\varepsilon) \cdot T,\ (2+\varepsilon) \cdot T,\ \cdots.$ Такие функции называются смещенными решетчатыми функциями и обозначаются как $f(k \cdot T + \varepsilon \cdot T) = f_{k,\varepsilon}$. Изменяя переменную $\varepsilon$ в пределах $(0 \div 1)$, можно получить множество решетчатых функций $\{f_{k,\varepsilon}\}$, соответствующих данной непрерывной функции $f(t)$. На рисунке 5.5 приведены графики непрерывной и решетчатых функций при различных смещениях $\varepsilon$.

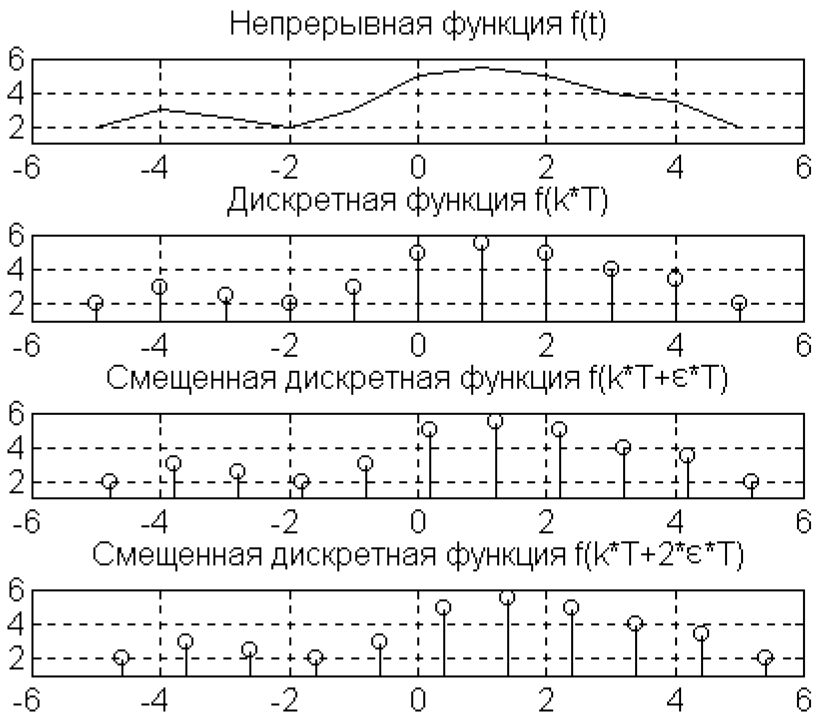


Рисунок 5.5 - Графики непрерывной и решетчатых функций при различных смещениях ε

Вследствие непрерывности функции $f(t)$, функция $f_{k,\varepsilon}$ является непрерывной по аргументу $\varepsilon$ и удовлетворяет условию $f_{k-1,1} = f_{k,0}$.

Если функция $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точках $t_k = k \cdot T$, то данное равенство не выполняется, так как $\lim\limits_{\varepsilon \to 1} f_{k-1,\varepsilon} \neq \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_{k,\varepsilon}$. В этом случае, под значением функции $f_k$ принято принимать предел справа $f_k = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} f_{k,\varepsilon}$, то есть значения переменной $\varepsilon$ рассматриваются на полуинтервале $0 \le \varepsilon < 1$. Функция $f_{k,\varepsilon}$ является, вообще говоря, функцией двух аргументов $k$ и $\varepsilon$, однако при $\varepsilon = 0$ второй аргумент, то есть $\varepsilon$ обычно опускается.

Непрерывные функции и операции над ними изучаются в интегральном и дифференциальном исчислении. Соответствующие операции над дискретными или решетчатыми функциями являются предметом исчисления конечных разностей.

## 5.3 Исчисление конечных разностей

Исчисление конечных разностей, дискретно-заданных (решетчатых) функций, вводит основные понятия: - разностного и обратного разностного операторов, являющихся дискретными аналогами, соответственно, дифференциального и интегрального операторов непрерывных функций.

Любая функция, определенная в равноотстоящие отрезки времени, путем выбора масштаба может быть приведена в соответствие обозначению $f(k \cdot T) = f(k) = f_k$, где $k$ принимает целочисленные значения.

**Оператор сдвига.** Определим оператор сдвига $E$ (или упреждения), как оператор, сдвигающий отсчет функции на единицу вперед

$$E \cdot f_k = f_{k+1}.$$

Повторное применение оператора сдвига дает

$$E^2 \cdot f_k = E \cdot (E \cdot f_k) = f_{k+2}.$$

В общем случае для любого целого $n$ имеем

$$E^n \cdot f_k = f_{k+n}.$$

*Аналогичным образом может быть определен оператор задержки* $E^{-1}$*, как оператор, сдвигающий отсчет функции на единицу назад*

$$E^{-1} \cdot f_k = f_{k-1}.$$

*С точки зрения математических операций операторы упреждения и задержки равноценны, однако, в реальных дискретных и цифровых системах обычно реализуются задержки на заданное число тактов.*

**Разностный оператор.** Разностный оператор или конечную разность первого прядка определим как разность значений соседних отсчетов функции

$$\Delta \cdot f_k = f_{k+1} - f_k \,.$$

Это так называемый правый разностный оператор или разность вперед, в отличие от используемого иногда левого разностного оператора или разности назад

$$\nabla \cdot f_k = f_k - f_{k-1} \,.$$

Далее будем использовать в основном правый разностный оператор и будем именовать его просто разностным оператором.

Из определений разностного оператора и оператора сдвига следует их взаимосвязь

$$\Delta \cdot f_k = (E-1) \cdot f_k \,;$$

$$\Delta = E - 1.$$

В общем случае для любого целого $k$ имеем

$$\Delta^k = (E-1)^k \,.$$

Разностный оператор или разность второго порядка определяется выражением

$$\Delta^2 \cdot f_k = \Delta \cdot f_{k+1} - \Delta \cdot f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_{k+2} - 2 \cdot f_{k+1} + f_k \,.$$

Разностный оператор или разность третьего порядка, соответственно, запишется

$$\Delta^3 \cdot f_k = \Delta^2 \cdot f_{k+1} - \Delta^2 \cdot f_k =$$

$$= (f_{k+3} - 2 \cdot f_{k+2} + f_{k+1}) - (f_{k+2} - 2 \cdot f_{k+1} + f_k) =$$

$$= f_{k+3} - 3 \cdot f_{k+2} + 3 \cdot f_{k+1} - f_k \,.$$

В общем случае, разностный оператор или разность $k$- го порядка определяется выражением

$$\Delta^n \cdot f_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \cdot f_{k+n-i} \,,$$

где $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = C_n^i = \dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i}$ - число сочетаний из $n$ по $i$ или биномиальный коэффициент.

Учитывая связь разностного оператора и оператора сдвига, последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta^n \cdot f_k = (E-1)^n \cdot f_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \cdot E^{n-i} \cdot f_k \,.$$

**Разложение функции в ряд по разностным операторам.** В свою очередь решетчатую функцию, по аналогии с рядом Тейлора, можно разложить в ряд по конечным разностям.

Так из выражения первой разности получаем

$$f_{k+1} = f_k + \Delta \cdot f_k \,.$$

Расписывая вторую разность в виде

$$\Delta^2 \cdot f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - \Delta \cdot f_k = f_{k+2} - f_k - 2 \cdot \Delta \cdot f_k \,,$$

получаем

$$f_{k+2} = f_k + 2 \cdot \Delta \cdot f_k + \Delta^2 \cdot f_k .$$

Раскрывая выражение разности третьего порядка

$$\Delta^3 \cdot f_k = \Delta^2 \cdot f_{k+1} - \Delta^2 \cdot f_k = f_{k+3} - 2 \cdot f_{k+2} + f_{k+1} - \Delta^2 \cdot f_k =$$

$$= f_{k+3} - 2 \cdot f_k - 4 \cdot \Delta \cdot f_k = 2 \cdot \Delta^2 \cdot f_k + f_k + \Delta \cdot f_k - \Delta^2 \cdot f_k =$$

$$= f_{k+3} - f_k - 3 \cdot \Delta \cdot f_k - 3 \cdot \Delta^2 \cdot f_k ,$$

получаем

$$f_{k+3} = f_k + 3 \cdot \Delta \cdot f_k + 3 \cdot \Delta^2 \cdot f_k + \Delta^3 \cdot f_k .$$

Обобщая данные выражения, получаем общую формулу разложения дискретной функции в ряд по разностным операторам

$$f_{k+n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i \cdot f_k .$$

В частности при $k = 0$, можем записать

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i \cdot f_0 .$$

Полученные формулы выражают значение дискретной функции через ее конечные разности до $n$- го порядка включительно и являются дискретным аналогом разложения непрерывной функции в ряд Тейлора по ее производным.

**Свойства разностных операторов.** Отметим, что разностный оператор является линейным оператором. Действительно, рассматривая линейную суперпозицию дискретных функций $f_i$, имеем

$$\Delta \cdot \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_{i,n} = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_{i,n+1} - \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_{i,n} = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \Delta \cdot f_{i,n} ,$$

где $c_i$ - коэффициенты линейной суперпозиции. Следствием этого выражения являются соотношения

$$\Delta \cdot c \cdot f_k = c \cdot \Delta \cdot f_k ;$$

$$\Delta^n \cdot [f_k + g_k] = \Delta^n \cdot f_k + \Delta^n \cdot g_k ;$$

$$\Delta^m \cdot \Delta^n \cdot f_k = \Delta^{m+n} \cdot f_k .$$

Таким образом, разностный оператор от суммы функций равен сумме разностных операторов от каждой функции.

Заметим, что эти соотношения справедливы при замене разностного оператора $\Delta$ на оператор сдвига $E$. Операторы $\Delta$ и $E$ коммутативны между собой, но не с функциями, так, например $\Delta \cdot (f_k \cdot g_k) \neq f_k \cdot \Delta \cdot g_k$ или $\Delta^2 \cdot f_k \neq (\Delta \cdot f_k) \cdot (\Delta \cdot f_k)$.

Рассмотрим разность от произведения двух дискретных функций

$$\Delta\cdot(f_k\cdot g_k)=f_{k+1}\cdot g_{k+1}-f_k\cdot g_k=$$
$$=f_{k+1}\cdot g_{k+1}-f_{k+1}\cdot g_k+f_{k+1}\cdot g_k-f_k\cdot g_k=$$
$$=f_{k+1}\cdot\Delta\cdot g_k+\Delta\cdot f_k\cdot g_k.$$

Если вместо произведения $f_{k+1}\cdot g_k$ прибавим и вычтем $f_k\cdot g_{k+1}$, то получим

$$\Delta\cdot(f_k\cdot g_k)=\Delta\cdot f_k\cdot g_k+f_k\cdot\Delta\cdot g_k.$$

Аналогично можно получить формулу для разности второго порядка от произведения двух функций

$$\Delta^2\cdot(f_k\cdot g_k)=f_k\cdot\Delta^2\cdot g_k+2\cdot\Delta\cdot f_{k+1}\cdot\Delta\cdot g_k+\Delta^2\cdot f_k\cdot g_{k+2}=$$
$$=\Delta^2\cdot f_k\cdot g_k+2\cdot\Delta\cdot f_k\cdot\Delta\cdot g_{k+1}+f_{k+2}\cdot\Delta^2\cdot g_k.$$

В общем случае для разности $n$- го порядка получим формулу

$$\Delta^n\cdot(f_k\cdot g_k)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot\Delta^i\cdot f_k\cdot\Delta^{n-i}\cdot g_{k+i}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot\Delta^{n-i}\cdot f_{k+i}\cdot\Delta^i\cdot g_k.$$

Таким образом, разностные формулы от произведения дискретных функций соответствуют по структуре формулам дифференцирования произведения непрерывных функций.

Рассмотрим разность от отношения двух дискретных функций

$$\Delta\cdot\left(\frac{f_k}{g_k}\right)=\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}-\frac{f_k}{g_k}=\frac{f_{k+1}\cdot g_k-f_k\cdot g_k+f_k\cdot g_k+f_k\cdot g_{k+1}}{g_{k+1}\cdot g_k}=$$
$$=\frac{\Delta\cdot f_k\cdot g_k-f_k\cdot\Delta\cdot g_k}{g_{k+1}\cdot g_k}.$$

Разность второго порядка от отношения функций определяется аналогично

$$\Delta^2\cdot\left(\frac{f_k}{g_k}\right)=\Delta\left(\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}-\frac{f_k}{g_k}\right)=\frac{f_{k+2}}{g_{k+2}}-\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}-\frac{f_{k+1}}{g_{k+1}}+\frac{f_k}{g_k}=$$
$$=\frac{\Delta\cdot f_{k+1}\cdot g_{k+1}-f_{k+1}\cdot\Delta\cdot g_{k+1}}{g_{k+2}\cdot g_{k+1}}-\frac{\Delta\cdot f_k\cdot g_k-f_k\cdot\Delta\cdot g_k}{g_{k+1}\cdot g_k}.$$

Отметим, что разностный оператор $\Delta$ имеет некоторые общие свойства с оператором дифференцирования $D=d/dt$ непрерывных функций. Так производная непрерывной функции определяется в виде

$$\frac{df(t)}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{f(t+T)-f(t)}{T}.$$

Используя $T$ в качестве периода дискретизации запишем оператор сдвига и разностный оператор

$$E\cdot f(t)=f(t+T),$$
$$\Delta\cdot f(t)=f(t+T)-f(t).$$

Из последнего выражения в частности следует, что

$$\frac{df(t)}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{\Delta\cdot f(t)}{T},$$

или в общем случае

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{T \to 0} \frac{\Delta^m \cdot f(t)}{T^m}.$$

При разложении функций в ряд Тейлора или при кратном использовании разностных операторов появляются коэффициенты, содержащие факториал. В связи с этим полезно рассмотреть, так называемый факториальный многочлен, определяемый выражением

$$(k)^{(m)} = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-m+1),$$

где $m \ge 1$- число сомножителей.

Можно показать, что действие разностного оператора на факториальный многочлен определяется выражением

$$\Delta \cdot (k)^{(m)} = m \cdot (k)^{(m-1)} = m \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-m+2).$$

Действительно

$$\Delta \cdot (k)^{(m)} = \begin{bmatrix} (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-m+2) - \\ -k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-m+1) \end{bmatrix} =$$

$$= [k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-m+2)] \cdot [(k+1) - (k-m+1)] = m \cdot (k)^{(m-1)}.$$

Разность второго порядка запишется в виде

$$\Delta^2 \cdot (k)^{(m)} = \Delta \cdot m \cdot (k)^{(m-1)} = m \cdot \Delta \cdot (k)^{(m-1)} = m \cdot (m-1) \cdot k^{(m-2)}.$$

Соответственно разность порядка $n \le (m-1)$ запишется в виде

$$\Delta^n \cdot (k)^{(m)} = m \cdot (m-1) \cdots [m-(n-1)] \cdot k^{(m-n)} = m^{(n)} \cdot k^{(m-n)}.$$

Приведем ряд примеров вычисления разностей некоторых простых дискретных функций и проиллюстрируем, таким образом, основные соотношения исчисления конечных разностей.

**Примеры вычисления разностных операторов заданных дискретных функций.**

**Пример 1.** Пусть задана постоянная дискретная функция $f_k = a$, где $a$- константа, и требуется определить разность первого порядка. Согласно определению разностного оператора, получаем

$$\Delta \cdot f_k = f_{k+1} - f_k = a - a = 0.$$

Таким образом, первая разность постоянной функции равна нулю.

**Пример 2.** Пусть задана линейная дискретная функция вида $f_k = a \cdot k + b$, где $a$ и $b$- постоянные коэффициенты. Определим первую разность этой функции

$$\Delta \cdot f_k = [a \cdot (k+1) + b] - [a \cdot k + b] = a.$$

Вывод – первая разность линейной дискретной функции есть постоянная величина. Вычислив вторую разность, получаем

$$\Delta^2 \cdot f_k = \Delta \cdot a = 0,$$

что вторая разность линейной функции равна нулю.

**Пример 3.** Пусть задана квадратичная дискретная функция вида $f_k = k^2$. Вычисляя последовательно разности, получаем

$$\Delta \cdot f_k = f_{k+1} - f_k = (k+1)^2 - k^2 = 2 \cdot k + 1,$$

$$\Delta^2 \cdot f_k = \Delta \cdot f_{k+1} - \Delta \cdot f_k = [2 \cdot (k+1) + 1] - [2 \cdot k + 1] = 2.$$

$$\Delta^3 \cdot f_k = \Delta \cdot 2 = 0.$$

Таким образом, первая разность квадратичной функции есть линейная функции. Вторая разность квадратичной функции соответствует постоянной величине. Третья разность и более высокие разности квадратичной функции равны нулю.

**Пример 4.** Определим разности экспоненциальной дискретной функции $f_k = e^{\alpha \cdot k}$. Воспользовавшись соответствующими формулами, получим

$$\Delta \cdot f_k = e^{\alpha \cdot (k+1)} - e^{\alpha \cdot k} = e^{\alpha \cdot k} \cdot (e^{\alpha} - 1);$$

$$\Delta^2 \cdot f_k = (e^{\alpha} - 1) \cdot \Delta \cdot e^{\alpha \cdot k} = e^{\alpha \cdot k} \cdot (e^{\alpha} - 1)^2;$$

и в общем случае

$$\Delta^n \cdot f_k = (e^{\alpha} - 1)^{n-1} \cdot \Delta \cdot e^{\alpha \cdot k} = e^{\alpha \cdot k} \cdot (e^{\alpha} - 1)^n.$$

Таким образом, экспоненциальная дискретная функция имеет разности любого порядка отличные от нуля.

**Обратный разностный оператор.** Рассмотрев свойства разностных операторов, уместно поставить вопрос о существовании оператора обратного разностному, то есть оператора $\Delta^{-1}$, который по аналогии с интегральным оператором непрерывных функций

$$D \cdot f(t) = g(t),$$

$$g(t) = D^{-1} \cdot f(t),$$

позволял бы по результату действия разностного оператора находить исходную дискретную функцию (первообразную)

$$\Delta \cdot f_k = g_k,$$

$$f_k = \Delta^{-1} \cdot g_k$$

или

$$\Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot f_k = f_k,$$

откуда следует, что $\Delta \cdot \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \Delta = 1$.

На том основании, что действие разностного оператора на сумму функциональной последовательности определяется выражением

$$\Delta \cdot \left[ \sum_{k=0}^{n-1} f_k + c \right] = [f_k + f_{k-1} + \cdots + f_0 + c] - [f_{k-1} + f_{k-2} + \cdots + f_0 + c] = f_k,$$

где $c$ - некоторая постоянная суммирования, определим обратный разностный оператор через сумму функциональной последовательности

$$\Delta^{-1}\cdot f_k=\sum_{k=0}^{n-1} f_k+C=\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}+C\,.$$

Это соотношение можно переписать без указания нижнего предела суммирования в виде

$$\Delta^{-1}\cdot f_k=\sum^{k=n-1} f_k+C=\sum^{k=n} f_{k-1}+C\,,$$

так как произвольное число членов предыдущего выражения с постоянной суммирования $c$ образуют новую постоянную $C$. Произвольный нижний предел суммирования является аналогом нижнего предела интегрирования непрерывных функций.

Рассмотрим действие обратного разностного оператора на факториальный многочлен. Можно убедится, что действие обратного разностного оператора описывается выражением

$$\Delta^{-1}\cdot k^{(m)}=\frac{1}{m+1}\cdot k^{(m+1)}+c$$

или

$$\Delta^{-1}\cdot[k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-m+1)]=\sum^{n=k-1} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)=$$

$$=\frac{1}{m+1}\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-m+1)+c\,,$$

где $c$- некоторая постоянная суммирования. Действительно, вычисляя разность от этого выражения, в соответствии с приведенными ранее соотношениями

$$\Delta\cdot\left[\Delta^{-1}\cdot k^{(m)}\right]=\Delta^{-1}\cdot\left[\frac{1}{m+1}\cdot k^{(m+1)}\right]=k^{(m)}=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-m+1),$$

приходим к исходному факториальному многочлену.

Приведенное краткое определение обратного разностного оператора указывает на необходимость более детального рассмотрения этого вопроса с позиций суммирования дискретных функций и задачей определения первообразной дискретной функции времени.

**Суммирование дискретных функций. Задача определения первообразной дискретной функции.** Рассмотрим операцию обратную взятию конечной разности. Пусть дискретная функция $f_k$ определена при положительных значениях $k=0,1,2,\cdots$. Найдем дискретную функцию $F_n$, для которой функция $f_k$ является разностью первого порядка.

Эта задача подобна задаче о нахождении первообразной для непрерывных функций. Оказывается, искомая функция может быть определена суммой вида

$$F_n=\sum_{k=0}^{n-1} f_k=\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}\,,$$

при $n=1,2,3,\cdots$.

Действительно

$$\Delta\cdot F_n = F_{n+1}-F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{n-1} f_k = f_{k=n}.$$

Функцию $F_n$, по аналогии с интегральным исчислением, называют первообразной функции $f_k$.

Если дискретная функция $f_k$, определена при всех целочисленных аргументах $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, то для определения первообразной функции необходимо, кроме того, потребовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} f_k$ при каждом конечном $n$. В этом случае первообразная определится выражением

$$F_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k .$$

Если функция $F_n$ является первообразной для функции $f_k$, то и функция $F_n + c$, где $c$- постоянная суммирования, также является первообразной для дискретной функции $f_k$.

Действительно

$$\Delta\cdot(F_n + c) = \Delta\cdot F_n + \Delta\cdot c = f_n,$$

так как $\Delta\cdot c = 0$.

Таким образом, общий вид первообразной функции для рассматриваемой дискретной функции $f_k$, определяется суммой

$$F_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k + c .$$

Значение постоянной $c$ можно выразить через значение первообразной, при некотором фиксированном значении аргумента $n=N$

$$c = F_N - \sum_{k=-\infty}^{N-1} f_k .$$

Подставляя последнее выражение в предыдущую формулу, получим

$$F_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_k + F_N - \sum_{k=-\infty}^{N-1} f_k = \sum_{k=N}^{n-1} f_k + F_N .$$

Из последнего соотношения, в свою очередь следует

$$F_n - F_N = \sum_{k=N}^{n-1} f_k ,$$

для любого $n > N$.

Полученное выражение, является дискретным аналогом соответствующей формулы интегрального исчисления, связывающей интеграл с первообразной функцией.

Перепишем это выражение в виде

$$F_{N+m} - F_N = \sum_{k=N}^{N+m-1} f_k = \sum_{l=0}^{m-1} f_{N+l},$$

где $m = 1, 2, \cdots$. Сумму этого выражения, по аналогии с определенным интегралом называют определенной суммой. Учитывая, что $f_n = \Delta \cdot F_n$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$F_{N+m} - F_N = \sum_{k=N}^{N+m-1} \Delta \cdot F_k,$$

или при $N = 0$

$$F_m = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta \cdot F_k + F_0.$$

Отметим, что для дискретных функций справедлива формула суммирования по частям, аналогично формуле интегрирования по частям. Так, если в последней формуле положить $F_m = U_m \cdot V_m$ и $m = n+1$,
то

$$U_{n+1} \cdot V_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \Delta \cdot (U_k \cdot V_k) + U_0 \cdot V_0 = \sum_{k=0}^{n} (U_k \cdot \Delta \cdot V_k + \Delta \cdot U_k \cdot V_{k+1}) + U_0 \cdot V_0.$$

Эту формулу можно переписать также в виде, сумм по частям

$$\sum_{k=0}^{n} U_k \cdot \Delta \cdot V_k = U_k \cdot V_k \Bigg|_{k=0}^{k=n+1} - \sum_{k=0}^{n} \Delta \cdot U_k \cdot V_{k+1}.$$

Поскольку в исчислении конечных разностей часто приходится находить суммы регулярных, конечных и бесконечных последовательностей обратимся к известным понятиям арифметической и геометрической прогрессий.

**Прогрессии, конечные и бесконечные ряды.** Приведем краткие сведения об арифметической и геометрической прогрессиях, а также о регулярных конечных и бесконечных числовых последовательностях.

**Арифметическая прогрессия.** Арифметической прогрессией называется регулярная последовательность элементов, в которой каждый последующий элемент отличается от предыдущего на определенную величину $r$, называемую разностью прогрессии. При $r > 0$, прогрессия является возрастающей, а при $r < 0$ - убывающей.

Записывая арифметическую прогрессию в виде регулярной последовательности элементов $P\{a_n\} = a_1, a_2, \cdots, a_n$, видим, что $n$-ый элемент равен $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = a_m + (n-m) \cdot r$, где $m < n$. Сумма $n$ элементов арифметической прогрессии определяется выражением

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot (a_m - (m-1) \cdot r + a_n)}{2}.$$

**Геометрическая прогрессия.** Геометрической прогрессией называется регулярная последовательность элементов, в которой каждый последующий элемент отличается от предыдущего множителем $q$, называемым знаменателем прогрессии. При $q > 1$, прогрессия является возрастающей, а при $|q| < 1$ - убывающей.

Записывая геометрическую прогрессию в виде регулярной последовательности элементов $P\{a_n\} = a_1, a_2, \cdots, a_n$, видим, что $n$-ый элемент равен $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_m \cdot q^{n-m}$, где $m < n$. Сумма $n$ элементов геометрической прогрессии определяется выражением

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_m \cdot (q^n - 1)}{q^{m-1} \cdot (q - 1)}.$$

Для убывающей геометрической прогрессии удобнее пользоваться формулой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_m \cdot (1 - q^n)}{q^{m-1} \cdot (1 - q)}.$$

Если число элементов убывающей геометрической прогрессии безгранично растет, то есть $n \to \infty$, то $q^n \to 0$ и значение суммы определится пределом

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

В качестве примера применения последнего соотношения рассмотрим убывающую последовательность вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

**Конечные ряды.** Приведем значения сумм некоторых конечных рядов

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2};$$

$$p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (p+n) = \frac{(n+1) \cdot (2 \cdot p + n)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2 \cdot n = n \cdot (n+1);$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4};$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot (3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1)}{30};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2 \cdot n - 1)^2 = \frac{n \cdot (4 \cdot n^2 - 1)}{3};$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2 \cdot n - 1)^3 = n^2 \cdot (2 \cdot n^2 - 1).$$

**Бесконечные ряды.** Приведем значения сумм некоторых бесконечных рядов

$$1+\frac{1}{1\cdot!}+\frac{1}{2\cdot!}+\frac{1}{3\cdot!}+\cdots+\frac{1}{n\cdot!}+\cdots=e;$$

$$1-\frac{1}{1\cdot!}+\frac{1}{2\cdot!}-\frac{1}{3\cdot!}+\cdots\pm\frac{1}{n\cdot!}\mp\cdots=\frac{1}{e};$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\pm\frac{1}{n}\mp\cdots=\ln(2);$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\pm\frac{1}{2^n}\mp\cdots=\frac{2}{3};$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\pm\frac{1}{2^n}\mp\cdots=\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots=1;$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot(n+1)}+\cdots=\frac{3}{4};$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots=\frac{1}{4};$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Приведенные значения сумм конечных и бесконечных рядов могут оказаться полезными при решении практических задач определения характеристик дискретных систем.

Далее приведем ряд примеров определения первообразной от заданных функций, то есть проиллюстрируем действие обратного разностного оператора.

**Примеры определения первообразных заданных дискретных функций.**

**Пример 1.** Пусть задана функция $f_k=e^{-\alpha\cdot k}$, при $\alpha>0$ и $k=0,1,2,\cdots$.

Найдем первообразную, используя аналогию формулы суммирования и формулы сходящейся геометрической прогрессии

$$F_n=\Delta^{-1}\cdot f_k=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\alpha\cdot k}=\frac{1-e^{-\alpha\cdot n}}{1-e^{-\alpha}},$$

здесь $e^{-\alpha}=q$ - знаменатель геометрической прогрессии.

**Пример 2.** Пусть задана функция $f_{|k|}=e^{-\alpha\cdot|k|}$, при $\alpha>0$ и $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

Для определения первообразной необходимо вычислить сумму вида

$$F_n = \Delta^{-1} \cdot f_k = \sum_{k=-\infty}^{n-1} e^{-\alpha\cdot|k|}.$$

В данном случае $k$ и соответственно $n$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому удобно произвести суммирование отдельно для положительных и отрицательных значений аргумента $k$ и $n$

$$\Delta^{-1} \cdot f_{+k} = F_{+n} = \sum_{k=0}^{n} e^{-\alpha\cdot k} = \frac{1-e^{-\alpha\cdot n}}{1-e^{-\alpha}};$$

$$\Delta^{-1} \cdot f_{-k} = F_{-n} = \sum_{k=-1}^{-\infty} e^{\alpha\cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha\cdot k} = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}.$$

Теперь, используя полученные выражения, найдем итоговое значение суммы при положительных $n$

$$F_n = F_{+n} + F_{-n} = \frac{1-e^{-\alpha\cdot n}}{1-e^{-\alpha}} + \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1+e^{-\alpha}\cdot(1-e^{-\alpha\cdot(n-1)})}{1-e^{-\alpha}}$$

и отрицательных $n$

$$F_n = F_{-n} = \sum_{k=-\infty}^{n} e^{\alpha\cdot k} = \sum_{k=-n}^{\infty} e^{\alpha\cdot k} = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}.$$

**Пример 3.** Пусть задана функция $f_k = k$, где $k = 0, 1, 2, \cdots$, и требуется определить первообразную. Применяя, в данном случае, формулы арифметической либо геометрической прогрессий, получаем

$$F_n = \Delta^{-1} \cdot f_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{1}{2}\cdot n^{(2)}.$$

Здесь напоминаем, что $n^{(2)} = n\cdot(n-1)$- в соответствии с определением факториального многочлена.

**Пример 4.** Пусть задана функция $f_k = k^2$, где $k = 0, 1, 2, \cdots$, и требуется определить первообразную. В данном случае воспользоваться формулами арифметической либо геометрической прогрессии напрямую не удается, поэтому обратимся к выражению разности первообразной, которая равна

$$\Delta \cdot F_n = f_n = n^2.$$

Далее распишем эту функцию через разностные операторы функций $n, n^2, n^3$

$$\Delta \cdot n = n+1-n = 1;$$

$$\Delta \cdot n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2\cdot n + 1;$$

$$\Delta \cdot n^3 = (n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1.$$

Из выражения для $\Delta \cdot n^3$ и $\Delta \cdot n^2$ находим

$$n^2 = \frac{1}{3}\cdot\Delta\cdot n^3 - n - \frac{1}{3}, \quad n = \frac{1}{2}\cdot\Delta\cdot n^2 - \frac{1}{2}.$$

Подставляя последнее выражение в предпоследнее, получим

$$n^2=\frac{1}{3}\cdot\Delta\cdot n^3-\left(\frac{1}{2}\cdot\Delta\cdot n^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\Delta\cdot n^3-\frac{1}{2}\cdot\Delta\cdot n^2+\frac{1}{6}.$$

Далее, учитывая, что $\Delta\cdot n=1$, получаем

$$n^2=\frac{1}{3}\cdot\Delta\cdot n^3-\frac{1}{2}\cdot\Delta\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot\Delta\cdot n=\Delta\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot n^3-\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot n\right).$$

Из последнего выражения следует, что

$$\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot F_n=\Delta^{-1}\cdot f_k=\frac{1}{3}\cdot n^3-\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot n+c.$$

Постоянную суммирования определяем, например, при $n=1$

$$F_1=\sum_{k=0}^{1-1}k^2=0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+c,$$

откуда следует, что $c=0$.

Таким образом, первообразная заданной функции имеет вид

$$F_n=\Delta^{-1}\cdot f_k=\frac{1}{3}\cdot n^3-\frac{1}{2}\cdot n^2+\frac{1}{6}\cdot n=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2\cdot n-1)}{6}.$$

**Пример 5.** Найти двойную сумму выражения

$$F_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cdot\sum_{l=0}^{k-1}l=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\cdot(k-1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(k^2-k).$$

Воспользовавшись результатами предыдущих примеров, запишем

$$F_n=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(2\cdot n-1)-\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ n\cdot(n-1)\cdot(2\cdot n-4)\ =\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=\frac{n^{(3)}}{3\cdot!}.$$

Выполняя аналогичные выкладки, можно получить общую формулу для суммы произвольной кратности $m$

$$\sum_{k_m=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_2=0}^{k_3-1}\cdot\sum_{k_1=0}^{k_2-1}k_1=\frac{n^{(m+1)}}{(m+1)\cdot!}.$$

Таким образом, исчисление конечных разностей дискретных функций является аналогом дифференциального и интегрального исчисления непрерывных функций. Математической моделью дискретных устройств во временной области являются, соответственно, разностные уравнения по аналогии с дифференциальными уравнениями аналоговых устройств.

## 5.4 Уравнения и характеристики дискретных систем

**Разностные уравнения.** Разностные уравнения дискретных систем выступают в качестве аналога дифференциальных уравнений непрерывных систем. Как отмечалось в начале раздела, сигналы на входе и выходе дискретной системы связаны разностными уравнениями вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y_k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot x_k ,$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot E^k \cdot y_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot E^k \cdot x_0$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \Delta^k \cdot y_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot \Delta^k \cdot x_0 ,$$

где $m \le n$; $a_k, b_k$ - коэффициенты; $x_k, y_k$ - отсчеты входного и выходного сигналов. Из соображений удобства аналитического описания эти уравнения часто записывают относительно $k$ - го отсчета сигнала

$$\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot y_{k+n} = \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot x_{k+m}$$

или

$$\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot E^n \cdot y_k = \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot E^m \cdot x_k$$

и, соответственно,

$$\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot \Delta^n \cdot y_k = \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot \Delta^m \cdot x_k .$$

Две последние формы записи разностного уравнения достаточно просто преобразуются друг в друга, однако вторая форма записи используется гораздо реже, так как аналитические методы решения ориентированы на первую форму.

Часто используют несколько упрощенную форму записи разностного уравнения относительно $k$ - го отсчета сигнала

$$\sum_{n=0} a_n \cdot y_{k+n} = \sum_{m=0} b_m \cdot x_{k+m}$$

или

$$\sum_{n=0} a_n \cdot E^n \cdot y_k = \sum_{m=0} b_m \cdot E^m \cdot x_k .$$

Таким образом, разностным уравнением называется уравнение связи отсчетов неизвестной дискретной функции $y_k$ и ее разностей $\Delta^n \cdot y_k$ или сдвигов $E^n \cdot y_k = y_{k+n}$.

С другой стороны, разностные уравнения представляют собой рекуррентное соотношение позволяющее определить значение следующего отсчета неизвестной дискретной функции через известные значения предыдущих отсчетов. В рекуррентной форме разностное уравнение приобретает вид

$$y_{k+n} = \left( \sum_{n=0} a_{k+n-1} \cdot y_{k+n-1} + \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot x_{k+m} \right) / a_{k+n} .$$

Используя значения предыдущих отсчетов неизвестной функции находим значения последующих, то есть получаем численное решение разностного уравнения представленного в рекуррентной форме. Часто не прибегают к итерационной процедуре решения, а стараются получить решение в аналитическом виде.

Заметим, что в этом случае значения предыдущих отсчетов неизвестной дискретной функции выступают в роли начальных значений.

Решить разностное уравнение означает, найти неизвестную дискретную функцию по заданному уравнению связи. Общее решение разностного уравнения представляет семейство функций удовлетворяющих уравнению связи. Для определения частного решения необходимы дополнительные условия, в качестве которых можно использовать начальные условия функции и ее предыдущих отсчетов.

По аналогии с дифференциальными уравнениями вводятся и другие понятия теории разностных уравнений.

**Однородным разностным уравнением** называется уравнение, правая часть которого равна нулю. Однородное разностное уравнение описывает “свободные колебания” дискретной системы.

Независимый набор решений однородного разностного уравнения называется **фундаментальной системой решений.** Фундаментальная система решений определяется **корнями характеристического уравнения.** Независимой фундаментальной системе решений соответствует **отличный от нуля определитель Касорати.**

Различают **разностные уравнения с постоянными коэффициентами и переменными коэффициентами,** когда $a_k(k),\ b_k(k)$ являются функциями дискретного времени.

**Линейными разностными уравнениями** называются уравнения, коэффициенты которого являются линейными функциями входного и выходного сигналов и независимой переменной $k$. Разностные уравнения с постоянными коэффициентами являются частным случаем линейных уравнений. Нас в основном будут интересовать разностные уравнения с постоянными коэффициентами, хотя рассматриваемые нами методы применимы и для линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.

**Общие свойства линейных разностных уравнений.** Рассмотрим кратко общие свойства линейных разностных уравнений, как с переменными, так и постоянными коэффициентами. В общем случае линейное разностное уравнение $n$ - го порядка можно записать в виде

$$a_n \cdot E^n + a_{n-1} \cdot E^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot E + a_0 \quad \cdot y_k = f_k ,$$

где $a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$ и $a_i$ - определены для всех целых значений $k$.

Заметим, что **порядок разностного уравнения** определяется как разность старшей и младшей степеней оператора сдвига, входящего в уравнение. Так, если $a_0 = 0$, а $a_n \neq 0,\ a_1 \neq 0$, то порядок разностного уравнения равен $n-1$.

Отметим еще раз, что в отличие от обыкновенного дифференциального уравнения, **порядок разностного уравнения определяется разностью высшей и низшей степеней оператора сдвига $E$.** В связи с этим, при использовании разностного уравнения вида

$$a_n \cdot \Delta^n + a_{n-1} \cdot \Delta^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \Delta + a_0 \quad \cdot y_k = f_k,$$

установить порядок непосредственно по его структуре невозможно. Например, уравнение $\Delta^2 + 3 \cdot \Delta + 2 \quad \cdot y_k = 0$ эквивалентно уравнению $E^2 + E \quad \cdot y_k = 0$ и, следовательно, это уравнение первого, а не второго порядка.

Известно, что однородное разностное уравнение $n$ - го порядка

$$a_n \cdot E^n + a_{n-1} \cdot E^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot E + a_0 \quad \cdot y_k = 0,$$

где $a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$ и $a_i$ - определены для всех целых значений $k$, имеет $n$ линейно независимых решений.

Характеристическое уравнение, соответствующее разностному уравнению, соответствует левой части уравнения при замене оператора сдвига переменной $p$

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

В общем случае характеристическое уравнение имеет $n$ - корней $p_i = d_i$, среди которых могут быть кратные и нулевые.

Независимые решения, в общем случае, определяются корнями $d_i$ характеристического уравнения $y_{i,k} = d_i^k$ и образуют фундаментальную систему решений однородного разностного уравнения. Независимые решения можно обозначить $y_1(k),\ y_2(k),\ \cdots,\ y_n(k)$ или $y_{1,k},\ y_{2,k},\ \cdots,\ y_{n,k}$.

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений имеет вид

$$C_k = \begin{vmatrix} y_{1,k} & y_{2,k} & \cdots & y_{n,k} \\ E \cdot y_{1,k} & E \cdot y_{2,k} & \cdots & E \cdot y_{n,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E^{n-1} \cdot y_{1,k} & E^{n-1} \cdot y_{2,k} & \cdots & E^{n-1} \cdot y_{n,k} \end{vmatrix} \neq 0$$

и представляет собой аналог определителя Вронского, который в случае разностных уравнений называется определителем Касорати.

Общее решение однородного разностного уравнения записывается в виде

$$y_k = c_1 \cdot y_{1,k} + c_2 \cdot y_{2,k} + \cdots + c_n \cdot y_{n,k},$$

где $c_i$ - произвольные постоянные, не зависящие от $k$ и, определяемые из независимых дополнительных условий.

Согласно теории разностных уравнений, общее решение разностного уравнения представляется суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения определяется с использованием независимых дополнительных условий, например, начальных условий.

**Элементы $Z$- преобразования.** Важным элементом теории дискретных систем описываемых дискретными или решетчатыми функциями является раздел теории функций комплексного переменного - $Z$-преобразование дискретных функций в комплексные функции $z$- плоскости.

Формально, **прямое $Z$- преобразование** дискретной функции (последовательности) $\{f_k\} = (f_0, f_1, f_2, \cdots)$, как оригинала, в функцию комплексной переменной $z$ определяется суммой ряда по отрицательным степеням комплексной переменной $z$

$$F(z) = F_z = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot z^{-k} .$$

**Обратное $Z$- преобразование** функции комплексной переменной $z$ в дискретную функцию целочисленной переменной $k \sim k \cdot T$, где $T = 1$- нормированное значение периода дискретной последовательности (функции), определяется интегралом по замкнутому контуру $C$ на комплексной плоскости $z$

$$f_k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C z^{k-1} \cdot F(z)\, dz .$$

При вычислении контурного интеграла используется фундаментальное соотношение Коши из теории функций комплексного переменного

$$\oint_C z^k dz = \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot j, & при \quad k = -1, \\ 0, & при \quad k \neq -1. \end{cases}$$

Для вычисления значения интеграла по контуру $C$ на комплексной плоскости $z$ используются теория вычетов функций комплексных переменных. Вычеты представляют собой значение комплексной функции в особых точках, и значение интеграла определяется суммой вычетов. Оригиналы функций, заданных $Z$- изображениями, могут быть определены и по таблицам обратного $Z$- преобразования.

Согласно теории $Z$- преобразования, оператору сдвига (упреждения) $E$ в области оригиналов соответствует оператор $z$ в комплексной плоскости изображений, а оператору сдвига (запаздывания) $E^{-1}$ в области оригиналов соответствует оператор $z^{-1}$ в комплексной плоскости изображений.

**Дискретные гармонические функции времени.** Дискретным гармоническим функциям времени $\sin(\omega \cdot k)$ и $\cos(\omega \cdot k)$, как оригиналам, соответствуют изображения в комплексной $z$- плоскости вида

$$\sin(\omega \cdot k) \Leftrightarrow \frac{z \cdot \sin(\omega \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega \cdot T) + 1};$$

$$\cos(\omega \cdot k) \Leftrightarrow \frac{z^2 - z \cdot \cos(\omega \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega \cdot T) + 1}.$$

Обычно период дискретизации нормируют к единице $T = 1$. Частота дискретизации связана с периодом дискретизации соотношением $\omega_d = 2 \cdot \pi / T$, то есть $f_d = 1/T$.

**Последовательность единичных $\delta$- импульсов.** Последовательности единичных $\delta$- импульсов $1_k$ с периодом следования $T$ соответствует изображение в $z$- плоскости вида

$$1_k \Leftrightarrow \frac{z}{z-1},$$

где $k = 0, 1, 2, \cdots$.

**Одиночный единичный $\delta$- импульс.** Одиночному единичному $\delta$-импульсу в нулевой момент времени $1_0$ соответствует изображение в $z$-плоскости вида

$$1_0 \Leftrightarrow 1,$$

где $k = 0$.

Таким образом, теория $Z$- преобразования является эквивалентом преобразования Лапласа для непрерывных систем и представляет собой одну из разновидностей интегрального преобразования функций дискретного аргумента в области оригиналов в непрерывную комплексную функцию области изображений.

**Характеристики дискретных систем.** По аналогии с непрерывными системами вводят соответствующие характеристики дискретных или цифровых систем.

**Системной или (передаточной) характеристикой дискретной или цифровой системы** называется отношение изображения реакции к изображению входного воздействия.

Как видим, определение системной функции не конкретизирует вид входного воздействия, оно может быть любым, главное, чтобы изображения воздействия и реакции существовали.

Для получения выражения системной функции перепишем разностное уравнение в виде

$$\left( \sum_{n=0} a_{k+n} \cdot E^n \right) \cdot y_k = \left( \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot E^m \right) \cdot x_k.$$

Заменяя, операторы сдвига $E^i$ на операторы $z^i$ и оригиналы функций $x_k$, $y_k$ на изображения, в предположении нулевых начальных условий, приходим к записи

$$\left(\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot z^n\right) \cdot Y_z = \left(\sum_{m=0} b_{k+m} \cdot z^m\right) \cdot X_z .$$

Выразив отношение изображения выходной реакции системы к изображению входного воздействия, получаем выражение для системной или передаточной функции в комплексной плоскости изображений

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{\sum\limits_{m=0} b_{k+m} \cdot z^m}{\sum\limits_{n=0} a_{k+n} \cdot z^n},$$

где $X_z, Y_z$ - изображения входного воздействия и выходной реакции дискретной системы.

Знаменатель передаточной функции, приравненный нулю, определяет **характеристическое уравнение дискретной или цифровой системы.** Другое определение характеристического уравнения соответствует однородной левой части разностного уравнения при замене степени оператора сдвига степенью комплексной переменной $z$.

**Связь системной функции и разностного уравнения.** Последние три соотношения указывают на способ перехода от разностного уравнения к системной функции и наоборот. Причем, при переходе от системной функции к разностному уравнению следует считать начальные условия нулевыми, а истинные начальные условия учесть при решении разностного уравнения.

**Начальные условия.** Как и в аналоговом случае, начальные условия могут быть определены по системной функции на основании теоремы дискретного операционного исчисления ($Z$- преобразования) о начальном значении функции

$$f_0 = \lim_{k \to 0} f_k = \lim_{z \to \infty} F(z).$$

Можно определить начальные условия и непосредственно по разностному уравнению, полагая значения $k$ такими, чтобы последовательно определить соответствующие значения функции. При этом учитывается тот факт, что при отрицательных значениях $k$ значения функции (реакции на выходе дискретной системы) равны нулю, так как входное воздействие начинается при $k = 0$. Так, если исходное разностное уравнение имеет второй порядок

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k,$$

то последовательно полагая $k = -2$ и $k = -1$

$$y_0 + a_1 \cdot y_{-1} + a_0 \cdot y_{-2} = f_{-2},$$

$$y_1 + a_1 \cdot y_0 + a_0 \cdot y_{-1} = f_{-1},$$

и учитывая, что $y_{-2} = 0$ и $y_{-1} = 0$, последовательно определяем начальные значения $y_0$ и $y_1$.

**Частотная характеристика (ЧХ) дискретной или цифровой системы.** Частотная характеристика дискретной или цифровой системы, получается, по системной (передаточной) функции при замене оператора $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$

$$S(j\cdot\omega) = \frac{Y(j\cdot\omega)}{X(j\cdot\omega)} = \frac{\sum\limits_{m=0} b_{k+m}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot m\cdot T}}{\sum\limits_{n=0} a_{k+n}\cdot e^{j\cdot\omega\cdot n\cdot T}}.$$

**Амплитудо - частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики дискретной или цифровой системы** представляют собой, как и в аналоговом случае, соответственно, модуль и аргумент комплексной ЧХ.

Отметим, что частотные характеристики дискретных или цифровых систем, в отличие от аналоговых систем, имеют периодически повторяющийся характер, о чем свидетельствуют множители типа $e^{j\cdot\omega\cdot k\cdot T}$.

**Частотная характеристика дискретной или цифровой системы может быть определена как установившаяся реакция системы на единичное дискретное гармоническое воздействие при исходном состоянии покоя.**

Под **исходным состоянием покоя,** как и в случае аналоговых систем, понимается полное установление реакции на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников.

Выполняя в выражении частотной характеристики замену вида $j\cdot\omega = \ln(z)/T$, перейдем к системной характеристике дискретной или цифровой системы.

Данная связь системной функции и частотной характеристики часто используются при синтезе дискретных и цифровых фильтров по аналоговому прототипу. При этом, вместо обратной замены $p = j\cdot\omega = \ln(z)/T$, приводящей к физически нереализуемым системам, используют простую замену функции логарифма первым членом разложения её в ряд Тейлора

$$p = j\cdot\omega = \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1},$$

что обеспечивает дробно-рациональный вид системной функции.

Тогда, учитывая, что

$$j\cdot\omega_a = \frac{2}{T}\cdot\frac{e^{j\cdot\omega_d\cdot T}-1}{e^{j\cdot\omega_d\cdot T}+1},$$

получаем зависимость частотных переменных $\omega_a$ и $\omega_d = 2\cdot\pi/T$ аналоговой и цифровой систем

$$\omega_a = \frac{2}{T}\cdot tg\left(\frac{\omega_d\cdot T}{2}\right).$$

Из приведенного соотношения видно, что связь частот аналогового прототипа и синтезируемого дискретного или цифрового фильтра нелинейная, поэтому при реализации цифрового фильтра с заданной граничной частотой $\omega_{gd}$, граничная частота $\omega_{ga}$ аналогового прототипа должна удовлетворять соотношению

$$\omega_{ga} = \frac{2}{T} \cdot tg\left( \frac{\omega_{gd} \cdot T}{2} \right).$$

Иногда в качестве дробно-рационального преобразования оператора $z$ в оператор $p = j \cdot \omega$ используют несколько первых членов разложения функции логарифм в ряд Тейлора при $z > 0$

$$\ln(z) = 2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3 \cdot (z+1)^3} + \frac{(z-1)^5}{5 \cdot (z+1)^5} + \cdots \\ \cdots + \frac{(z-1)^{2 \cdot n+1}}{(2 \cdot n+1) \cdot (z+1)^{2 \cdot n+1}} + \cdots \end{bmatrix}.$$

**Переходная характеристика дискретной или цифровой системы** определяется как реакция системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на последовательность единичных $\delta$- импульсов $e_k = 1_k$ при $k = 0, 1, 2, \cdots$. Изображение последовательности единичных $\delta$- импульсов $e_k = 1_k$ имеет вид $E_z = z/(z-1)$. Из выражения системной функции дискретной системы

$$\frac{V_z}{E_z} = S_z$$

получаем изображение выходной реакции или переходной характеристики

$$V_z = H_z = E_z \cdot S_z = \frac{z}{z-1} \cdot S_z .$$

Обратное $Z$- преобразование этого выражения дает переходную характеристику дискретной или цифровой системы $h_k$.

**Импульсная характеристика дискретной или цифровой системы** определяется как реакция системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на одиночный единичный $\delta$- импульс $e_k = 1_0$ при $k = 0$. Изображение одиночного единичного $\delta$- импульса $e_k = 1_0$ имеет вид $E_z = 1$. Из выражения системной функции дискретной системы

$$\frac{V_z}{E_z} = S_z$$

получаем изображение выходной реакции или импульсной характеристики

$$V_z = G_z = E_z \cdot S_z = S_z ,$$

которое совпадает с выражением системной функции дискретной системы.

Обратное $Z$- преобразование этого выражения дает импульсную характеристику дискретной или цифровой системы $g_k$.

**Как видим, импульсная характеристика $g_k$ и системная функция (характеристика) $S_z$ дискретной системы связаны $Z$- преобразованием.**

**Обоснование переходной и импульсной характеристик дискретных систем.** Рассмотрим причины выбора входных воздействий типа $1_k$ и $1_0$ и определения основных временных характеристик как реакций на эти воздействия.

Воздействия типа последовательности единичных $\delta$- импульсов либо одиночного единичного $\delta$- импульса позволяет оценить быстродействие дискретной системы по реакции на эти идеализированные типы воздействий.

Основным и важным доводом в пользу исследования реакций дискретных систем на эти воздействия является тот факт, что реакция на любое другое воздействие может быть представлена как суперпозиция сдвинутых и масштабированных воздействий типа последовательности единичных $\delta$- импульсов либо одиночных единичных $\delta$- импульсов. Реакция на произвольное воздействие в этом случае может быть найдена в виде сверток импульсной либо переходной характеристики и входной последовательности импульсов.

Естественность и целесообразность использования именно этих воздействий в качестве типовых можно обосновать и с других позиций.

Так как **оригинал воздействия** типа последовательности единичных $\delta$ - импульсов соответствует постоянной единичной функции при $k \geq 0$, а реакция дискретной системы определяется как свертка импульсной характеристики и входной последовательности

$$h_k = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot 1_{k-n} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{k-n} \cdot 1_n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n ,$$

то есть реакция в данном случае определяется лишь свойствами самой дискретной системы и равна сумме сдвинутых импульсных характеристик.

Изображение реакции может быть легко определено на основании свойства $Z$- преобразования суммы сдвинутых функций

$$H_z = Z \cdot \left[ \sum_{n=0}^{k} g_n \right] = S_z \cdot \frac{z}{z-1} .$$

Этот же результат получается при использовании свойства $Z$- преобразования, утверждающего, что свертке оригиналов соответствует произведение изображений

$$H_z = Z^{-1} \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} g_{k-n} \cdot 1_n \right] = S_z \cdot \frac{z}{z-1} .$$

Воздействие типа одиночного единичного $\delta$- импульса имеет **изображение** в виде единичной функции. Изображение реакции определяется произведением системной функции и изображения входного воздействия

$$g_k = Z^{-1} \cdot \ S_z \cdot 1 \ = Z^{-1} \cdot \ S_z$$

и определяется лишь свойствами самой системы.

Таким образом, обратное свойства $Z$- преобразование системной функции соответствует импульсной характеристике. Другими словами, импульсная и системная функции связаны $Z$- преобразованием.

Отметим еще раз, что переходная и импульсная характеристики дискретной системы определяются лишь свойствами самой системы.

**Связь импульсной и переходной характеристик.** Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена также по известной переходной характеристике. Действительно, импульсной характеристике соответствует входное воздействие, типа одиночного единичного $\delta$- импульса $1_0$, которое может быть представлено как разность последовательностей единичных $\delta$- импульсов

$$1_0 = \nabla \cdot 1_k = 1_k - 1_{k-1} = \Delta \cdot 1_{k-1},$$

где $\nabla,\ \Delta$- правый и левый разностные операторы. Здесь учтено, что значение последовательности $1_{k-1}$, при $k = 0$, равно нулю, то есть $1_{-1} = 0$.

В силу линейности $Z$- преобразования реакция на алгебраическую сумму воздействий равна алгебраической сумме реакций на каждое воздействие. При этом, принимая реакцию на последовательность $1_k$, при $k \geq 0$, за переходную характеристику $h_k$, а реакцию на последовательность $1_{k-1}$ за смещение переходной характеристики на один такт назад $h_{k-1}$, получаем выражение импульсной характеристики

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

На основании теоремы $Z$- преобразования о запаздывании на один такт имеем

$$h_{k-1} \Rightarrow z^{-1} \cdot H_z - z^{-1} \cdot h_{-1},$$

где $H_z$- изображение переходной характеристики $h_k$; $h_{-1}$- значение переходной характеристики в момент предшествующий нулю. Учитывая, что при отрицательных аргументах переходная характеристика равна нулю, получаем

$$h_{k-1} \Rightarrow z^{-1} \cdot H_z.$$

Тогда в области изображений импульсной характеристики имеем следующее соотношение

$$g_k \Rightarrow H_z - z^{-1} \cdot H_z = S_z = \frac{(z-1)}{z} \cdot H_z,$$

где $S_z$- системная функция дискретной системы.

Полученное соотношение находится в полном соответствии с теоремой $Z$- преобразования об изображении обратной разности дискретной функции

$$\nabla \cdot f_k = f_k - f_{k-1} \Rightarrow \frac{(z-1)}{z} \cdot F_z + z^{-1} \cdot f_{-1},$$

которая, наряду с теоремой $Z$- преобразования об изображении прямой разности дискретной функции

$$\Delta \cdot f_k = f_{k+1} - f_k \Rightarrow (z-1) \cdot F_z - z \cdot f_0,$$

являются конечно-разностными аналогами теоремы преобразования Лапласа о дифференцировании оригинала.

Методы исследования дискретных систем во временной области, в частности, определение частотной, переходной и импульсной характеристик дискретных и цифровых систем в аналитическом виде сопряжено с решением разностных уравнений.

## 5.5 Методы решения разностных уравнений первого порядка

Методы аналитического решения разностных уравнений напоминают методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди группы известных методов решения разностных уравнений следует назвать операторный метод, метод неопределенных коэффициентов, метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) и представление решения в форме Коши (метод Коши).

В изучаемой дисциплине отдано предпочтение операторному методу, основанному на теории $Z$- преобразования дискретных функций и, наиболее значимым аналитическим методам Лагранжа и Коши, справедливым, как для разностных уравнений с постоянными коэффициентами, так и переменными коэффициентами.

**Переход от системной функции к разностному уравнению и определение начальных условий.** Методы решения разностных уравнений предполагают переход от заданной системной функции дискретного устройства к разностному уравнению, описывающему выходную переменную дискретного устройства. Как уже отмечалось, переход от системной функции к разностному уравнению, в предположении нулевых начальных условий, сводится к замене переменной $z$, как оператора, оператором сдвига $E$. В результате системная функция преобразуется к формальному представлению отношения выходной переменной $y_k$ к входной переменной $x_k$

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{\left[\sum\limits_{m=0} b_{k+m} \cdot z^m\right]}{\sum\limits_{n=0} a_{k+n} \cdot z^n} \Rightarrow \frac{y_k}{x_k} = \frac{\left[\sum\limits_{m=0} b_{k+m} \cdot E^m\right]}{\sum\limits_{n=0} a_{k+n} \cdot E^n}$$

и, соответственно, к разностному уравнению

$$\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot y_{k+n} = \sum_{m=0} b_{k+m} \cdot x_{k+m} \,.$$

Истинные начальные условия учитываются непосредственно при решении разностного уравнения.

Как уже отмечалось, в качестве независимых условий, необходимых для нахождения частного решения разностного уравнения чаще используются начальные условия. Начальные условия удобно определять по теореме $Z$- преобразования о начальном значении оригинала дискретной функции либо по исходному разностному уравнению, задавая последовательно соответствующие значения независимой переменной $k$.

**Операторный метод.** Операторный метод основан на теории $Z$-преобразования дискретной функции времени в плоскость комплексной переменной $z$. Суть операторного метода решения разностных уравнений заключается в переходе от исходного разностного уравнения

$$\left(\sum_{n=0} a_{k+n} \cdot E^{n}\right) \cdot y_k = \left(\sum_{m=0} b_{k+m} \cdot E^{m}\right) \cdot x_k,$$

к дробно-рациональной функции относительно изображения неизвестной переменной $Y_z$

$$Y_z = S_z \cdot X_z = \frac{\left[\sum\limits_{m=0} b_{k+m} \cdot z^{m}\right] \cdot X_z}{\sum\limits_{n=0} a_{k+n} \cdot z^{n}},$$

используя теорему $Z$- преобразования об упреждении функции на $m$ тактов

$$Z\{y_{k+m}\} = z^{m} \cdot \left[Y_z - \sum_{n=0}^{m-1} y_n \cdot z^{-n}\right],$$

с учетом начальных условий $y_n$.

Заметим, что **начальные значения функции и ее смещений** в результате выделения изображения выходной реакции **оказываются в числителе дробно-рациональной функции вместе с изображением входного воздействия.**

Далее, применяя обратное $Z$- преобразование, находим оригинал выходной переменной, то есть решение разностного уравнения.

Обратное $Z$- преобразование можно найти, используя соответствующие таблицы, либо, заменяя интеграл по замкнутому контуру суммой значений комплексной функции в особых точках, то есть, суммой вычетов.

Применительно к нашей дисциплине, предполагается, что нам известны: оригинал и изображение входного воздействия и функциональная схема дискретного устройства. По функциональной схеме однозначно записывается разностное уравнение либо системная функция и, соответственно, изображение выходной переменной. Далее, применяя обратное $Z$- преобразование, находим оригинал выходной переменной, то есть реакцию устройства на входное воздействие.

**Метод Лагранжа для разностных уравнений первого порядка.** Рассмотрим аналитическое решение неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами первого порядка

$$a_1 \cdot E + a_0 \;\; \cdot y_k = a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k$$

методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Согласно метода Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения записывается в том же виде, что и однородного уравнения, только вместо постоянных используется варьируемая постоянная $c_{1,k}$, то есть неизвестная функция

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k,$$

где $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = -a_0 / a_1$ - корень характеристического уравнения.

С целью определения варьируемой постоянной подставим общее решение в исходное разностное уравнение

$$a_1 \cdot c_{1,k+1} \cdot y_{1,k+1} + a_0 \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k} = f_k.$$

Преобразуем последнее соотношение к виду

$$a_1 \cdot [c_{1,k+1} \cdot y_{1,k+1} - c_{1,k} \cdot y_{1,k+1}] + c_{1,k} \cdot [a_1 \cdot y_{1,k+1} - a_0 \cdot y_{1,k}] = f_k.$$

Выражение первой скобки приводится к виду $\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k}$, а выражение второй скобки соответствует однородному уравнению при подстановке фундаментального решения, то есть, равно нулю.

В результате подстановки предполагаемого решения и его сдвига в исходное разностное уравнение и преобразования получаем разрешающее уравнение Лагранжа, определяющее разность варьируемой постоянной

$$a_1 \cdot \Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} = f_k$$

или

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{a_1 \cdot y_{1,k+1}}.$$

Для получения варьируемой постоянной воспользуемся обратным разностным оператором, который, как известно, с точностью до постоянной суммирования $c_1$, определяется суммой функциональной последовательности

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{a_1 \cdot y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[ \frac{f_n}{a_1 \cdot y_{1,n+1}} \right] + c_1.$$

В результате общее решение неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка имеет вид

$$y_k = \left[ \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{a_1 \cdot y_{1,n}} \right] + c_1 \right] \cdot y_{1,k}.$$

Для раскрытия суммы функциональной последовательности часто используются формулы арифметической или геометрической прогрессий либо формула суммы членов факториального многочлена.

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например, начальных условий, определить постоянную суммирования $c_1$.

Заметим, что первое слагаемое решения соответствует общему решению однородного разностного уравнения, а второе слагаемое соответствует частному решению неоднородного уравнения.

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Решение приведенного (нормированного) неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$E + a_0 \quad \cdot y_k = y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k,$$

полученное методом вариации произвольных постоянных запишется в виде

$$y_k = \left[ \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 \right] \cdot y_{1,k} = d_1^k \cdot c_1 + \sum_{n=1}^{k} d_1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного разностного уравнения; $d_1 = -a_0$ - корень характеристического уравнения.

**Представление решения неоднородного разностного уравнения первого порядка в форме Коши (метод Коши).** Представление решения приведенного (нормированного) неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$E + a_0 \quad \cdot y_k = y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k$$

в форме Коши или методом Коши предполагает представление частного решения, используя начальные условия. Так, если записать общее решение, полученное методом вариации произвольных постоянных

$$y_k = \left[ \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 \right] \cdot y_{1,k} = d_1^k \cdot c_1 + \sum_{n=1}^{k} d_1^{k-n} \cdot f_{n-1}$$

и вместо постоянной суммирования $c_1$ подставить начальное значение искомого решения

$$y_k = \left[ \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + y_0 \right] \cdot y_{1,k} = d_1^k \cdot y_0 + \sum_{n=1}^{k} d_1^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

то получаем запись частного решения неоднородного разностного уравнения первого порядка в форме Коши.

Первое слагаемое решения дает собственную реакцию системы на начальные условия, а второе слагаемое обусловлено реакцией системы на внешнее воздействие.

## 5.6 Примеры определения основных характеристик дискретных систем первого порядка

Для иллюстрации рассмотренных методов решения разностных уравнений определим основные характеристики дискретных систем первого порядка, заданных системной функцией. В качестве основных временных характеристик дискретных систем рассмотрим переходные и импульсные характеристики. Напомним, что переходная и импульсная характеристики определяются, как реакция систем, соответственно, на последовательность единичных $\delta$ - импульсов $1_k$ и на одиночный единичный $\delta$ - импульс $1_0$, при исходном состоянии покоя. В качестве реакции рассмотрим напряжение на выходе дискретных систем первого порядка.

**Пример 1.** Системная (передаточная) характеристика дискретной системы имеет вид

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{z-d}.$$

Требуется определить переходную и импульсную характеристики системы.

Выразим изображение выходного напряжения дискретной системы

$$V_z = E_z \cdot \frac{z+b}{z-d}.$$

Приравнивая знаменатель системной функции к нулю

$$z - d = 0,$$

получим характеристическое уравнение системы с корнем равным $z_1 = d$.

**Определение переходной характеристики.** Переходная характеристика представляет собой реакцию системы на последовательность единичных $\delta$ - импульсов $1_k$, при $k \ge 0$ и периодом $T$.

**Операторный метод.** Оригиналу входного воздействия $1_k$, согласно теории $Z$ - преобразования, соответствует изображение в плоскости $z$ вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения получаем в виде

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+b}{z-d}.$$

Из таблиц обратного $Z$ - преобразования находим оригинал выходного напряжения, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+b}{z-d} \Rightarrow v_k = \frac{1+b-(d+b)\cdot e^{-\alpha\cdot t}}{1-d} = \frac{1+b-(d+b)\cdot d^k}{1-d} = h_k,$$

где $k = t/T$; $\alpha = -\ln(d)/T$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; $T$ - период последовательности единичных $\delta$ - импульсов.

Отметим, что при $k = 0$ получаем $v_0 = h_0 = 1$.

**Переход от системной функции к разностному уравнению.** Далее рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная $z$, как оператор заменяется оператором сдвига $E$, в предположении нулевых начальных значений

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{z-d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{E+b}{E-d}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_{k+1} + b \cdot 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} + b \cdot 1_k = d \cdot v_k + f_k.$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z+b}{z-d} \right] = 1.$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса $k$. Так при $k = -1$ получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_0 + b \cdot 1_{-1}.$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях $k$ равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 1$.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k,$$

где $c_{1,k}$- варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$- фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее определить варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_{k+1} + b \cdot 1_k}{d^{k+1}}.$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[ \frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d^n} \right] + c_1,$$

где $c_1$ - новая постоянная суммирования.

Учтем, что при всех значениях переменной $n$, значение числителя равно $1+b$ и может быть вынесено за знак суммы. В результате выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$. Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d} \cdot \left( \frac{1}{d^k} - 1 \right)}{\left( \frac{1}{d} - 1 \right)} = \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)},$$

находим выражение для варьируемой постоянной $c_{1,k}$

$$c_{1,k} = (1+b) \cdot \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)} + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{d-1} + c_1 \cdot d^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например, начальных условий, определить постоянную суммирования $c_1$. Учитывая начальное значение $v_0 = 1$, из общего решения при $k = 0$, получаем

$$v_0 = 1 = \frac{(1+b) \cdot (d^0 - 1)}{d-1} + c_1 \cdot d^0 = 0 + c_1,$$

то есть $c_1 = 1$.

Подставляя значение $c_1$ в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{d-1} + 1 \cdot d^k = \frac{1+b-(b+d) \cdot d^k}{1-d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с ранее полученным операторным методом выражением.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} + b \cdot 1_k = d \cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где $d$ - корень характеристического уравнения.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot (1_n + b \cdot 1_{n-1}) = d^k + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{(1_n + b \cdot 1_{n-1})}{d^n}.$$

Учтем, что при всех значениях $n$ числитель суммы равен $1+b$ и может быть вынесено за знак суммы. В результате выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$.

Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{d^k} - 1\right)}{\left(\frac{1}{d} - 1\right)} = \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)},$$

находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = d^k + \frac{(1+b) \cdot (d^k - 1)}{d-1} = \frac{1 + b - (b+d) \cdot d^k}{1-d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

**Определение импульсной характеристики.** Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы на одиночный единичный $\delta$ - импульс $1_0$, при $k = 0$.

**Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.**

**Определение импульсной характеристики по переходной характеристике.** Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена также по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = \frac{1 + b - (b+d) \cdot d^k}{1-d},$$

запишем выражение соответствующей функции отстающей на один такт

$$h_{k-1} = \frac{1 + b - (b+d) \cdot d^{k-1}}{1-d}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = (b+d) \cdot d^{k-1},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = (b+d) \cdot d^k,$$

при $k \ge 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

**Операторный метод.** Оригиналу входного воздействия $1_0$, согласно теории $Z$- преобразования, соответствует изображение в плоскости $z$ вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения совпадает с выражением системной функции

$$V_z = \frac{z+b}{z-d}.$$

В таблицах обратного $Z$- преобразования подобное выражение отсутствует, поэтому представим его суммой двух выражений

$$V_z = \frac{z}{z-d} + \frac{b}{z-d}.$$

Оригинал от первого слагаемого, согласно таблицам обратного $Z$- преобразования, имеет вид

$$F_{1,z} = \frac{z}{z-d} \Rightarrow f_{1,k} = e^{-\alpha \cdot t} = d^k,$$

где $k = t/T$; $\alpha = -\ln(d)/T$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; $T$- период последовательности единичных $\delta$- импульсов.

Для нахождения обратного $Z$- преобразования от второго слагаемого воспользуемся следующим приемом. В соответствии с теоремой о начальном значении функции оригинала

$$f(0) = f_0 = \lim_{k \to 0} f_k = \lim_{z \to \infty} F_z,$$

находим значение оригинала второго слагаемого при $k = 0$

$$f_{2,0} = \lim_{z \to \infty} \frac{b}{z-d} = 0.$$

Далее, используя теорему $Z$- преобразования об упреждении на один такт

$$f_1 \Rightarrow z \cdot F_z - z \cdot f_0,$$

находим

$$f_{2,1} \Rightarrow \frac{z \cdot b}{z-d}.$$

Теперь, используя таблицы обратного $Z$- преобразования, находим

$$f_{2,k+1} = b \cdot d^k,$$

при $k \ge 0$ или

$$f_{2,k} = b \cdot d^{k-1},$$

при $k \ge 1$.

В итоге, суммируя оригиналы слагаемых, получаем оригинал выходного напряжения дискретной системы в виде

$$v_{k+1} = f_{1,k+1} + f_{2,k+1} = d^{k+1} + b \cdot d^k = (b+d) \cdot d^k ,$$

при $k \geq 0$ или

$$v_k = f_{1,k} + f_{2,k} = d^k + b \cdot d^{k-1} = (b+d) \cdot d^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^{k+1} + b \cdot d^k = (b+d) \cdot d^k ,$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = d^k + b \cdot d^{k-1} = (b+d) \cdot d^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

Из полученных выражений, соответственно при $k = 0$ и $k = 1$, получаем $v_1 = g_1 = b + d$ .

**Переход от системной функции к разностному уравнению.** Далее рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная $z$, как оператор заменяется оператором сдвига $E$, в предположении нулевых начальных значений

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{z+b}{z-d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{E+b}{E-d} .$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_1 + b \cdot 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_1 + b \cdot 1_0 = d \cdot v_k + f_k .$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z+b}{z-d} \right] = 1 .$$

Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем значение $v_1$, используя теорему $Z$-преобразования об упреждении на один такт

$$v_1 \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 .$$

В соответствии с этим выражением и теоремой теории $Z$-преобразования о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{z\to\infty} z \cdot (V_z - v_0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z \cdot (b+d)}{z-d} = b + d \, .$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующими значения индекса $k$.

Так при $k = -1$ получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_0 + b \cdot 1_{-1} .$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях $k$ равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 1$.

При $k = 0$ получаем

$$v_1 = d \cdot v_0 + 1_1 + b \cdot 1_0 .$$

Учитывая, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени $k = 0$, начальное значение $v_0 = 1$, окончательно получаем $v_1 = b + d$.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k ,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $\alpha_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее определить варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_{k+1} + b \cdot 1_k}{d^{k+1}} .$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[ \frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{1_n + b \cdot 1_{n-1}}{d^n} \right] + c_1 ,$$

где $c_1$ - новая постоянная суммирования.

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$c_{1,k} = \frac{b}{d} + c_1 .$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = b \cdot d^{k-1} + c_1 \cdot d^k .$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например, начальных условий, определить постоянную суммирования $c_1$. Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем постоянную суммирования $c_1$ по значению $v_1 = b + d$

$$v_1 = b + d = b \cdot d^0 + c_1 \cdot d = b + c_1 \cdot d\ ,$$

то есть $c_1 = 1$.

Подставляя значение $c_1$ в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$g_k = v_k = b \cdot d^{k-1} + 1 \cdot d^k = (b + d) \cdot d^{k-1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = (b + d) \cdot d^k\ ,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с ранее полученными операторным методом выражениями.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_{k+1} + b \cdot 1_k = d \cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot f_{n-1}\ ,$$

где $d$ - корень характеристического уравнения.

Обратим внимание, что решение в форме Коши определено через начальное значение функции при $k = 0$.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot (1_n + b \cdot 1_{n-1}) = d^k + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{(1_n + b \cdot 1_{n-1})}{d^n}\ .$$

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$g_k = v_k = d^k + d^k \cdot \frac{b}{d} = (b + d) \cdot d^{k-1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = (b + d) \cdot d^k\ ,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

**Пример 2.** Системная (передаточная) характеристика дискретной системы имеет вид

$$S(z)=S_z=\frac{V(z)}{E(z)}=\frac{V_z}{E_z}=\frac{1}{z-d}.$$

Требуется определить переходную и импульсную характеристики системы.

Выразим изображение выходного напряжения дискретной системы

$$V_z=E_z\cdot\frac{1}{z-d}.$$

Приравнивая знаменатель системной функции к нулю

$$z-d=0,$$

получим характеристическое уравнение системы с корнем равным $z_1=d$.

**Определение переходной характеристики.** Переходная характеристика представляет собой реакцию системы на последовательность единичных $\delta$- импульсов $1_k$, при $k\geq 0$ и периодом $T$.

**Операторный метод.** Оригиналу входного воздействия $1_k$, согласно теории $Z$- преобразования, соответствует изображение в плоскости $z$ вида

$$e_k=1_k\Rightarrow E_z=\frac{z}{z-1}.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения получаем в виде

$$V_z=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{1}{z-d}.$$

Из таблиц обратного $Z$- преобразования находим оригинал выходного напряжения, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z+b}{z-d}\Rightarrow v_k=\frac{1-e^{-\alpha\cdot t}}{1-d}=\frac{1-d^k}{1-d}=h_k,$$

где $k=t/T$; $\alpha=-\ln(d)/T$; $e^{-\alpha\cdot t}=d^k$; $T$- период последовательности единичных $\delta$- импульсов.

Отметим, что при $k=0$ получаем $v_0=h_0=0$.

**Переход от системной функции к разностному уравнению.** Далее рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная $z$, как оператор заменяется оператором сдвига $E$, в предположении нулевых начальных значений

$$\frac{V_z}{E_z}=\frac{1}{z-d}\Rightarrow\frac{v_k}{1_k}=\frac{1}{E-d}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_k = d \cdot v_k + f_k .$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-d} \right] = 0 .$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса $k$. Так при $k = -1$ получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_{-1} .$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях $k$ равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k ,$$

где $c_{1,k}$- варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$- фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее определить варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_k}{d^{k+1}} .$$

Применяя, обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[ \frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{1_{n-1}}{d^n} \right] + c_1 ,$$

где $c_1$- новая постоянная суммирования.

Учтем, что при всех значениях переменной $n$, значение числителя равно 1 и может быть вынесено за знак суммы. В результате выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$. Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{d^k}-1\right)}{\left(\frac{1}{d}-1\right)} = \frac{(d^k-1)}{d^k\cdot(d-1)},$$

находим выражение для варьируемой постоянной $c_{1,k}$

$$c_{1,k} = 1\cdot\frac{(d^k-1)}{d^k\cdot(d-1)} + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = \frac{(d^k-1)}{d-1} + c_1\cdot d^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например, начальных условий, определить постоянную суммирования $c_1$. Учитывая начальное значение $v_0 = 0$, из общего решения при $k = 0$, получаем

$$v_0 = 0 = \frac{(d^0-1)}{d-1} + c_1\cdot d^0 = 0 + c_1,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение $c_1$ в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = \frac{d^k-1}{d-1} + 0\cdot d^k = \frac{1-d^k}{1-d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с ранее полученным операторным методом выражением.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d\cdot v_k + 1_{k+1} + b\cdot 1_k = d\cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k\cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n}\cdot f_{n-1},$$

где $d$ - корень характеристического уравнения.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k\cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n}\cdot 1_{n-1} = d^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d^n}.$$

Учтем, что при всех значениях $n$ числитель суммы равен 1 и может быть вынесено за знак суммы. В результате выражение суммы соответствует геометрической прогрессии со знаменателем $1/d$.

Используя формулу геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{d^k}-1\right)}{\left(\frac{1}{d}-1\right)} = \frac{(d^k-1)}{d^k\cdot(d-1)},$$

находим частное решение разностного уравнения

$$v_k = \frac{d^k-1}{d-1} = \frac{1-d^k}{1-d} = h_k.$$

Полученное решение разностного уравнения описывает переходную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадает с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

**Определение импульсной характеристики.** Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы на одиночный единичный $\delta$ - импульс $1_0$, при $k=0$.

**Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.**

**Определение импульсной характеристики по переходной характеристике.** Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена также по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla\cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta\cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = \frac{1-d^k}{1-d},$$

запишем выражение соответствующей функции отстающей на один такт

$$h_{k-1} = \frac{1-d^{k-1}}{1-d}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

**Операторный метод.** Оригиналу входного воздействия $1_0$, согласно теории $Z$ - преобразования, соответствует изображение в плоскости $z$ вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

В соответствии с этим, изображение выходного напряжения совпадает с выражением системной функции

$$V_z = \frac{1}{z-d}.$$

В таблицах обратного $Z$- преобразования подобное выражение отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом. В соответствии с теоремой о начальном значении функции оригинала

$$f(0) = f_0 = \lim_{k \to 0} f_k = \lim_{z \to \infty} F_z,$$

находим значение оригинала при $k = 0$

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z-d} = 0.$$

Далее, используя теорему $Z$- преобразования об упреждении на один такт

$$f_1 \Rightarrow z \cdot F_z - z \cdot f_0,$$

находим

$$f_1 \Rightarrow \frac{z}{z-d}.$$

Теперь, используя таблицы обратного $Z$- преобразования, находим

$$f_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$ или

$$f_k = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

В итоге, получаем оригинал выходного напряжения дискретной системы в виде

$$v_{k+1} = f_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$ или

$$v_k = f_k = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$ или

$$g_k = v_k = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$.

Из полученных выражений, соответственно при $k = 0$ и $k = 1$, получаем $v_1 = g_1 = 1$.

**Переход от системной функции к разностному уравнению.** Далее рассмотрим методы, основанные на решении разностных уравнений описывающих поведение дискретных систем, в связи с чем, рассмотрим переход от системной характеристики к соответствующему разностному уравнению.

При переходе от системной функции к разностному уравнению входное воздействие и выходная реакция заменяются оригиналами, комплексная переменная $z$, как оператор, заменяется оператором сдвига $E$, в предположении нулевых начальных значений

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{z-d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{1}{E-d}.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к разностному уравнению вида

$$v_{k+1} - d \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_0 = d \cdot v_k + f_k.$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k\to 0} v_k = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{1}{z-d}\right] = 0.$$

Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \ge 1$, найдем значение $v_1$, используя теорему $Z$-преобразования об упреждении на один такт

$$v_1 \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0.$$

В соответствии с этим выражением и теоремой теории $Z$-преобразования о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{z\to\infty} z \cdot (V_z - v_0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z-d} = 1.$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующими значения индекса $k$.

Так при $k = -1$ получаем

$$v_0 = d \cdot v_{-1} + 1_{-1}.$$

Учитывая, что входное воздействие и выходная реакция при отрицательных значениях $k$ равны нулю, окончательно получаем $v_0 = 0$.

При $k = 0$ получаем

$$v_1 = d \cdot v_0 + 1_0.$$

Учитывая, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени $k = 0$, начальное значение $v_0 = 0$, окончательно получаем $v_1 = 1$.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** В соответствии с методом Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения первого порядка записывается в виде

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k = c_{1,k} \cdot d^k,$$

где $c_{1,k}$ - варьируемая постоянная, то есть неизвестная пока дискретная функция; $y_{1,k} = d_1^k$ - фундаментальное решение однородного уравнения; $d_1 = d$ - корень характеристического уравнения.

Определяющее уравнение Лагранжа, позволяющее определить варьируемую постоянную, запишется в виде

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{f_k}{y_{1,k+1}} = \frac{1_k}{d^{k+1}}.$$

Применяя обратный разностный оператор, приходим к выражению

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{f_{n-1}}{y_{1,n}} \right] + c_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \left[ \frac{f_n}{y_{1,n+1}} \right] + c_1 = \sum_{n=1}^{k} \left[ \frac{1_{n-1}}{d^n} \right] + c_1,$$

где $c_1$ - новая постоянная суммирования.

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$c_{1,k} = \frac{1}{d} + c_1.$$

Подставляя полученное выражение в общее решение, находим

$$v_k = d^{k-1} + c_1 \cdot d^k.$$

Для определения частного решения неоднородного разностного уравнения необходимо из независимых условий, например, начальных условий, определить постоянную суммирования $c_1$. Так как импульсная характеристика для дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$, найдем постоянную суммирования $c_1$ по значению $v_1 = 1$

$$v_1 = 1 = d^0 + c_1 \cdot d = 1 + c_1 \cdot d,$$

то есть $c_1 = 0$.

Подставляя значение $c_1$ в общее решение, находим частное решение разностного уравнения

$$g_k = v_k = d^{k-1} + 0 \cdot d^k = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с ранее полученными операторным методом выражениями.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Согласно методу Коши, частное решение неоднородного разностного уравнения первого порядка

$$v_{k+1} = d \cdot v_k + 1_k = d \cdot v_k + f_k$$

представляется в виде

$$v_k = d^k \cdot v_0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot f_{n-1},$$

где $d$ - корень характеристического уравнения.

Обратим внимание, что решение в форме Коши определено через начальное значение функции при $k = 0$.

Подставляя начальное значение и, раскрывая правую часть разностного уравнения, получаем решение в виде

$$v_k = d^k \cdot 0 + \sum_{n=1}^{k} d^{k-n} \cdot 1_{n-1} = d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n}.$$

Учитывая то факт, что входное воздействие существует только в нулевой момент времени, получаем, что значение суммы соответствует первому слагаемому

$$g_k = v_k = d^k \cdot \frac{1}{d} = d^{k-1},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = d^k,$$

при $k \geq 0$.

Полученные решения разностного уравнения описывают импульсную характеристику дискретной системы и, как видим, совпадают с выражениями, ранее полученными операторным методом и методом Лагранжа.

## 5.7 Методы решения разностных уравнений высоких порядков

**Общие предпосылки.** Решить разностное уравнение, означает, из заданного уравнения связи неизвестной функции и ее сдвигов и дополнительных независимых условий найти функцию, обращающую уравнение в тождество.

В нашем случае разностные уравнения получаются либо по заданной функциональной схеме дискретного или цифрового устройства, либо путем перехода от заданной системной функции в предположении нулевых начальных условий.

Переход от системной функции к разностному уравнению осуществляется путем замены изображений входного воздействия и реакции системы оригиналами и формальной заменой в дробно-рациональном выражении комплексной переменной $z$ оператором сдвига $E$.

Обратный переход от известного разностного уравнения к системной функции осуществляется путем замены оригиналов входного изображения и реакции системы на их изображения и заменой сдвигов функций оригиналов их изображениями с учетом начальных условий в соответствии теоремы о сдвиге функции оригинала на $n$- тактов. После приведения подобных, в числителе дробно-рационального представления системной функции окажутся входное воздействие и начальные условия, а в знаменателе – характеристический полином, определяющий свободные колебания дискретной системы.

В качестве независимых дополнительных условий, необходимых для нахождения частного решения разностного уравнения, используются начальные значения функции и ее сдвигов. Начальные условия, в свою очередь определяются либо по системной функции на основании теоремы о начальном значении дискретной функции, либо непосредственно по разностному уравнению путем последовательной подстановки соответствующих значений индексов сдвига и учете того факта, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени равны нулю.

**Системы разностных уравнений первого порядка.** В связи с рассмотрением вопроса решения разностных уравнений $n$- го порядка и возможностью перехода к эквивалентной системе $n$ разностных уравнений первого порядка уместно рассмотреть системы разностных уравнений первого порядка.

Нормированная система разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$$y_{1,k+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \cdot y_{i,k} = f_{1,k};$$

$$y_{2,k+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} \cdot y_{i,k} = f_{2,k};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{n,k+1} - \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} \cdot y_{i,k} = f_{n,k}.$$

Матричная форма записи системы разностных уравнений первого порядка имеет вид

$$X_{k+1} - A \cdot X_k = F_k,$$

где $X_k$, $X_{k+1}$, $F_k$- векторы неизвестных функций, сдвигов неизвестных функций и правых частей системы.

Системы разностных уравнений, являются в общем случае математической моделью многоканальных дискретных и цифровых систем. Уравнения, входящие в систему могут быть любого порядка, однако системы уравнений первого порядка являются среди них наиболее простыми и проработанными в аналитическом плане. Зачастую системы $n$ уравнений $m$-го порядка сводятся к системе $(n \cdot m)$ уравнений первого порядка.

Как уже отмечалось, скалярное разностное уравнение $n$- го порядка

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \cdots + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k$$

путем замены переменных может быть преобразовано в эквивалентную систему $n$ уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные

$$x_{1,k} = y_k;\ x_{2,k} = x_{1,k+1} = y_{k+1};\ \cdots\ x_{n,k} = x_{n-1,k+1} = y_{k+n},$$

получаем систему в виде

$$x_{1,k+1} = x_{2,k};$$
$$x_{2,k+1} = x_{3,k};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1,k+1} = x_{n,k};$$
$$x_{n,k+1} = -a_0 \cdot x_{1,k} - a_1 \cdot x_{2,k} - \cdots - a_n \cdot x_{n,k} + f_k.$$

В матричной записи эквивалентная система имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ \cdots \\ x_{n-1,k+1} \\ x_{n,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ \cdots \\ x_{n-1,k} \\ x_{n,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Таким образом, скалярное разностное уравнение $n$- го порядка эквивалентно системе $n$ разностных уравнений первого порядка с матрицей коэффициентов определенного вида. Методы решения систем разностных уравнений первого порядка можно интерпретировать, как векторно-матричную интерпретацию методов решения скалярных разностных уравнений $n$- го порядка.

Забегая вперед, отметим, что решение систем разностных уравнений с использованием векторно-матричной символики, предполагает знакомство с функциями матричного аргумента, в частности с определением степенной матричной функцией. Понятие функции матричного аргумента тесно связано с проблемой собственных значений и векторов.

**Проблема собственных значений и векторов.** Как и в случае аналоговых систем, описываемых непрерывными функциями и обыкновенными дифференциальными уравнениями высокого порядка, аналитическое решение которых записывается через экспоненту матрицы коэффициентов эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка, решение разностных уравнений дискретных систем второго и более высокого порядка, описываемых дискретными (решетчатыми) функциями, записывается через степенную функцию матричного аргумента. Выражение функции матричного аргумента предполагает предварительное знакомство с проблемой собственных значений и векторов.

В разделе, посвященном аналитическим методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка и систем дифференциальных уравнений первого порядка, проблема собственных значений и векторов уже была рассмотрена, поэтому здесь мы остановимся на ней кратко.

Известно, что система линейных алгебраических уравнений $n$- го порядка в векторно-матричной форме записывается в виде

$$A \cdot X = Y,$$

где $A$- матрица коэффициентов системы; $X$, $Y$- входной и выходной векторы. Естественно, что результирующий вектор $Y$ зависит, как от матрицы коэффициентов $A$, так и от входного вектора $X$.

Возникает вопрос, существуют ли при данной матрице коэффициентов $A$ такие векторы $x_i$, преобразование которых сводится лишь к их умножению на масштабный коэффициент $\lambda_i$, то есть выполняется соотношение

$$A \cdot x_i = y_i = \lambda_i \cdot x_i .$$

Оказывается, что в общем случае невырожденной матрицы имеется ровно $n$ таких векторов, где $n$- размерность системы векторов. При этом, векторы, удовлетворяющие указанному условию, называются собственными векторами матрицы, а масштабные коэффициенты при векторах называются собственными значениями матрицы. Собственные векторы $x_i$ принято обозначать в литературе как $h_i$.

Записывая данные соотношения, определяющие собственные вектора и значения в векторно-матричной форме, получим

$$A \cdot [h_i] = A \cdot H = H \cdot \Lambda,$$

где $H$- модальная матрица, составленная из собственных векторов; $\Lambda$- в случае невырожденной матрицы коэффициентов это диагональная матрица собственных значений.

В общем случае, вырожденной матрицы, вместо диагональной матрицы имеем Жорданову матрицу $J$, на главной диагонали которой располагаются так называемые “ящики или клетки Жордана”, соответствующие кратным собственным значениям. В данной дисциплине мы не будем подробно останавливаться на вырожденных случаях соответствующих нулевым либо кратным собственным значениям, так как в аналитическом случае всегда можно предположить, что все собственные значения различны и отличны от нуля, довести аналитическое решение до конца, а затем использовать предельный переход к истинным значениям.

Собственные вектора образуют собственный канонический базис линейно независимых векторов. Каноническое представление матрицы в собственном базисе запишется на основании предыдущего соотношения в виде

$$\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H .$$

Наоборот любая невырожденная матрица на основании этого соотношения может быть представлена в виде

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1}.$$

На основании канонического разложения невырожденной матрицы вводится понятие аналитической функции от матричного аргумента

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $F(\Lambda)$- понимается как диагональная матрица с элементами $f(\lambda_i)$.

На основании векторно-матричного соотношения, определяющего собственные вектора и значения, учитывая перестановочность диагональной матрицы $\Lambda = [\lambda]$, можно записать основное определяющее однородное уравнение

$$A - \Lambda \;\cdot H = 0,$$

где $A - \Lambda$ - характеристическая матрица.

Далее, учитывая, что в общем случае модальная матрица $H$ не вырождена, получаем, что характеристическая матрица равна нулю, то есть вырождена

$$A - \Lambda \; = 0.$$

Приравнивая нулю, определитель характеристической матрицы, получаем характеристическое уравнение

$$\det( \; A - \Lambda \; ) = |A - \Lambda| = 0.$$

Раскрывая определитель характеристической матрицы, и, приводя подобные, получаем характеристический степенной полином относительно переменной $\lambda$

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \; \cdots \; \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Корни характеристического полинома $\lambda_i$ соответствуют собственным значениям матрицы коэффициентов системы.

Собственные вектора $h_i$, соответствующие собственным значениям $\lambda_i$ находятся из систем однородных уравнений вида

$$A - \Lambda_i \;\; \cdot h_i = B(\lambda_i) \cdot h_i = 0,$$

где $\Lambda_i = [\lambda_i]$- диагональная матрица, содержащая одинаковое $i$- тое собственное значение по диагонали.

Так как матрица $A - \Lambda_i$ вырождена, то есть ее ранг равен, по крайней мере, $n-1$, получаем, что однородная система, определяющая собственный вектор $h_i$, должна иметь нетривиальное решение. Аналитические соотношения, определяющие собственные вектора из решения однородных систем, можно получить, записывая определяющую систему в виде

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\lambda_i) \cdot h_{ij} = 0.$$

Далее, раскрывая определитель матрицы $A - \Lambda_i \; = B(\lambda_i)$, по какой либо строке $i$, и, учитывая, что он равен нулю, получаем

$$\det(B(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\lambda_i) \cdot \Delta_{ij}(\lambda_i) = 0.$$

Теперь, сравнивая два последних выражения, получаем

$$h_{ij} = k \cdot \Delta_{ij}(\lambda_i),$$

где $j = 1, 2, \cdots, n$; $k$ - некоторая константа; $\Delta_{ij}(\lambda_i)$ - алгебраическое дополнение матрицы $A - \Lambda_i$.

Напомним, что матрица, полученная из транспонированной исходной матрицы, заменой элементов на их алгебраические дополнения, называется присоединенной матрицей

$$C = [c_{ij}] = Adj(B(\lambda_i)) = [\Delta_{ij}].$$

Из полученного соотношения следует, что собственный вектор $h_i$, с точностью до константы, определяется алгебраическими дополнениями элементов $i$- той строки матрицы $A - \Lambda_i$, то есть соответствующим столбцом присоединенной матрицы $C$.

**Разностные уравнения второго порядка.** Прежде чем перейти к разностным уравнениям высокого порядка остановимся подробнее на уравнениях второго порядка.

Как уже отмечалось, в изучаемой дисциплине предпочтение отдано универсальным аналитическим методам – операторному, Лагранжа и Коши.

В общем случае нормированное неоднородное разностное уравнение второго порядка имеет вид

$$y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k$$

или

$$(E^2 + a_1 \cdot E + a_0) \cdot y_k = f_k,$$

где $y_k$ - неизвестная дискретная функция; $y_{k+n}$ - сдвиг неизвестной дискретной функции на $n$- тактов; $a_i$ - коэффициенты уравнения; $f_k$ - произвольная известная дискретная функция, определяемая внешним воздействием.

**Операторный метод.** Операторный метод решения разностных уравнений основан на переходе от оригиналов правой и левой частей уравнений к изображениям с учетом начальных условий, используя теорему о смещении дискретной функции на $n$ - тактов

$$y_{k+n} \Rightarrow z^n \cdot \left[ Y_z - \sum_{m=0}^{n-1} y_m \cdot z^{-m} \right],$$

или частный случай при $n = 1$

$$y_{k+1} = z \cdot Y_z - z \cdot y_0.$$

В результате преобразований приходим дробно-рациональному выражению изображения выходной реакции системы

$$Y_z = \frac{F_z + N_z}{z^2 + a_1 \cdot z + a_0},$$

где $F_z$ - изображение входного воздействия; $N_z$ - изображение, обусловленное начальными условиями.

Далее, применяя обратное $Z$ - преобразование к дробно-рациональному представлению выходной переменной, находим оригинал выходной реакции системы, то есть решение разностного уравнения.

В том случае, если задана системная функция дискретной системы дробно-рациональным отношением общего вида

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{b_2 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_0}{z^2 + a_1 \cdot z + a_0},$$

где $X_z$ - изображение входного воздействия, то, выражая изображение выходной реакции

$$Y_z = S_z \cdot X_z = \frac{(b_2 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_0) \cdot X_z}{z^2 + a_1 \cdot z + a_0},$$

и, применяя обратное $Z$- преобразование, находим оригинал выходной реакции системы, то есть решение разностного уравнения.

Операторный метод легко обобщается на решение разностных уравнений произвольного порядка и основная трудность заключается в выполнении обратного $Z$- преобразования для сложных дробно-рациональных функций. Для выполнения обратного $Z$- преобразования используются, либо готовые таблицы, либо теория вычетов функций комплексного переменного, позволяющая заменить интеграл по замкнутому контуру на комплексной плоскости суммой предельных значений функции в особых точках, называемых вычетами.

**Метод Лагранжа для разностных уравнений второго порядка.** Рассмотрим аналитическое решение нормированного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка

$$E^2 + a_1 \cdot E + a_0 \quad \cdot y_k = y_{k+2} + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k$$

методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения записывается в том же виде, что и однородного уравнения, только вместо постоянных используются варьируемые постоянные $c_{1,k}$, $c_{2,k}$, то есть неизвестные функции

$$y_k = c_{1,k} \cdot y_{1,k} + c_{2,k} \cdot y_{2,k} = c_{1,k} \cdot d_1^k + c_{2,k} \cdot d_2^k,$$

где $y_{1,k} = d_1^k$, $y_{2,k} = d_2^k$ - фундаментальные решения однородного уравнения; $d_1$, $d_2$ - корни характеристического уравнения.

С целью определения варьируемых постоянных подставим общее решение в исходное разностное уравнение. Для этого последовательно подействуем на предполагаемое решение оператором сдвига. После первого действия получим

$$y_{k+1} = c_{1,k+1} \cdot y_{1,k+1} + c_{2,k+1} \cdot y_{2,k+1}.$$

Добавляя и вычитая дополнительные слагаемые, преобразуем выражение к виду

$$y_{k+1} = c_{1,k+1} \cdot y_{1,k+1} - c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + c_{2,k+1} \cdot y_{2,k+1} - c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} +$$
$$+ c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} =$$
$$= \Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} + c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} .$$

Повторное действие оператора сдвига, может привести к появлению разности второго порядка от варьируемых постоянных, что исключает возможность их определения. Для ограничения роста порядка разности варьируемых постоянных наложим ограничение, полагая

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} = 0 .$$

В результате наложения ограничения имеем

$$y_{k+1} = c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} .$$

Теперь повторное действие оператора сдвига дает выражение

$$y_{k+2} = c_{1,k+1} \cdot y_{1,k+2} + c_{2,k+1} \cdot y_{2,k+2} =$$
$$= \Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+2} + c_{1,k} \cdot y_{1,k+2} + c_{2,k} \cdot y_{2,k+2} .$$

Подстановка полученных выражений в исходное разностное уравнение и перегруппировка дают

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+2} +$$
$$+ c_{1,k} \cdot [y_{1,k+2} + a_1 \cdot y_{1,k+1} + a_0 \cdot y_{1,k}] +$$
$$+ c_{2,k} \cdot [y_{2,k+2} + a_1 \cdot y_{2,k+1} + a_0 \cdot y_{2,k}] = f_k .$$

Заметим, что выражения в скобках равны нулю, так как удовлетворяют однородному разностному уравнению в силу того, что $y_{1,k}$, $y_{2,k}$ - его фундаментальные решения.

В результате подстановка общего предполагаемого решения в исходное разностное уравнения приводит к уравнению

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+2} = f_k .$$

Таким образом, соотношение ограничивающее рост порядка разности варьируемых постоянных и результат подстановки предполагаемого общего решения в исходное неоднородное разностное уравнение дают, так называемую определяющую систему уравнений Лагранжа, позволяющую определить разности варьируемых постоянных

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+1} = 0 ;$$
$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot y_{1,k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot y_{2,k+2} = f_k .$$

Определяющая система уравнений Лагранжа линейна относительно разностей варьируемых постоянных

$$\begin{bmatrix} \Delta \cdot c_{1,k} \\ \Delta \cdot c_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,k+1} & y_{2,k+1} \\ y_{1,k+2} & y_{2,k+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} .$$

Определитель системы, построенный из набора фундаментальных решений однородного уравнения и их сдвигов, называется определителем Касорати. Независимость фундаментальной системы решений, соответствует не равному нулю определителю Касорати

$$\Delta C=\begin{vmatrix} y_{1,k+1} & y_{2,k+1} \\ y_{1,k+2} & y_{2,k+2} \end{vmatrix}=y_{1,k+1}\cdot y_{2,k+2}-y_{1,k+2}\cdot y_{2,k+1}\neq 0.$$

Используя, например, правило Крамера выразим разности варьируемых постоянных

$$\Delta\cdot c_{1,k+1}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_{2,k+1} \\ f_k & y_{2,k+2} \end{vmatrix}}{\Delta C}=\frac{-y_{2,k+1}\cdot f_k}{\Delta C};$$

$$\Delta\cdot c_{1,k+1}=\frac{\begin{vmatrix} y_{1,k+1} & 0 \\ y_{1,k+2} & f_k \end{vmatrix}}{\Delta C}=\frac{y_{1,k+1}\cdot f_k}{\Delta C}.$$

Варьируемые постоянные, как неизвестные функции, могут быть определены применением обратного разностного оператора, действие которого эквивалентно вычислению сумм функциональных последовательностей определяющих разности

$$c_{1,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{1,k}=-\sum_{n=1}^{k}\frac{y_{2,n}\cdot f_{n-1}}{\Delta_{-1}C}+c_1=-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{y_{2,n+1}\cdot f_n}{\Delta C}+c_1;$$

$$c_{2,k}=\Delta^{-1}\cdot\Delta\cdot c_{2,k}=\sum_{n=1}^{k}\frac{y_{1,n}\cdot f_{n-1}}{\Delta_{-1}C}+c_2=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{y_{1,n+1}\cdot f_n}{\Delta C}+c_2,$$

где $\Delta_{-1}C=y_{1,k}\cdot y_{2,k+1}-y_{1,k+1}\cdot y_{2,k}$; $c_1$, $c_2$- новые постоянные суммирования.

Для раскрытия суммы функциональной последовательности часто используются формулы арифметической или геометрической прогрессий, либо суммы членов факториального многочлена.

Подставляя, найденные варьируемые постоянные в общее решение, получим общее решение в виде

$$y_k=\left[-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{y_{2,n+1}\cdot f_n}{\Delta C}+c_1\right]\cdot y_{1,k}+\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{y_{1,n+1}\cdot f_n}{\Delta C}+c_1\right]\cdot y_{2,k}$$

или

$$y_k=\left[-\sum_{n=1}^{k}\frac{y_{2,n}\cdot f_{n-1}}{\Delta_{-1}C}+c_1\right]\cdot y_{1,k}+\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{y_{1,n}\cdot f_{n-1}}{\Delta_{-1}C}+c_1\right]\cdot y_{2,k}.$$

Заметим, что первые слагаемые в скобках соответствует общему решению однородного разностного уравнения, а вторые слагаемые в скобках соответствует частному решению неоднородного уравнения.

Таким образом, общее решение неоднородного разностного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Новые постоянные суммирования $c_1$, $c_2$ определяются из независимых, например, начальных условий. Подстановка значений постоянных суммирования в общее решение преобразует его в частное решение неоднородного разностного уравнения.

**Метод Коши для разностных уравнений второго порядка.** Представление решения в форме Коши для разностных уравнений второго и более высоких порядков совместим с изложением метода Лагранжа для систем разностных уравнений первого порядка. Дело в том, что решение в форме Коши наиболее просто представляется для скалярного разностного уравнения первого порядка и для систем разностных уравнений первого порядка с использованием векторно-матричной символики. В тоже время, как отмечалось выше, любое скалярное уравнение второго и более высокого порядка с помощью введения новых переменных для неизвестной дискретной функции и ее сдвигов может быть преобразовано в эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка.

Напомним, что основное отличие решения разностного уравнения первого порядка в форме Коши от формы Лагранжа, заключается в том, что решение по Лагранжу представляет собой форму общего решения с использованием варьируемых постоянных, как неизвестных функций. Эти варьируемые постоянные, с точностью до постоянных суммирования, находятся из определяющего уравнения. Для получения частного решения по Лагранжу необходимо, воспользовавшись дополнительными независимыми условиями, найти постоянные суммирования и подставить в общее решение.

Решение в форме Коши, представляет собой частное решение разностного уравнения, включающего в качестве дополнительных независимых условий именно начальные условия.

Используя эту связь решений систем разностных уравнений первого порядка в формах Лагранжа и Коши, получим представление решение систем разностных уравнений первого порядка в форме Коши, используя векторно-матричную символику.

Отметим, что отмеченная связь решений в форме Лагранжа и Коши характерна именно для уравнений первого порядка, для уравнений второго и более высокого порядков эта связь имеет более сложный вид.

**Решение неоднородного разностного уравнения высокого порядка методом Лагранжа.** Общая форма записи нормированного неоднородного разностного уравнения $n$ - го порядка имеет вид

$$(E^n + a_{n-1} \cdot E^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot E + a_0) \cdot y_k = f_k$$

или

$$y_{k+n} + a_{n-1} \cdot y_{k+n-1} + \cdots + a_1 \cdot y_{k+1} + a_0 \cdot y_k = f_k .$$

Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения $n$ - го порядка ищется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k} ,$$

отличающемся от общего решения однородного уравнения тем, что $c_{i,k}$ представляют собой варьируемые постоянные, то есть неизвестные дискретные функции. Функции $y_{i,k}$ представляют собой набор фундаментальных решений соответствующего однородного разностного уравнения, определяемых корнями характеристического уравнения $d_i$.

В общем случае различающихся между собой корней, фундаментальные решения определяются в виде $y_{i,k} = d_i^k$. В том случае, если $i$- тый корень характеристического уравнения имеет кратность $m$, то независимый набор фундаментальных решений, порождаемый данным корнем, представляется в виде

$$y_{i,k} = \alpha_i^k,\ y_{i,k+1} = k \cdot d_i^k,\ y_{i,k+2} = k^2 \cdot d_i^k,\ \cdots,\ y_{i,k+m} = k^{m-1} \cdot d_i^k .$$

Для определения варьируемых постоянных Лагранж предложил процедуру построения определяющей системы линейных алгебраических уравнений.

Идея построения определяющей системы уравнений заключается в том, что предполагаемое общее решение с целью проверки подставляется в исходное разностное уравнение. При этом предварительно определяются составляющие $E \cdot y_k,\ E^2 \cdot y_k,\ \cdots,\ E^n \cdot y_k$ и выражаются через разности варьируемых постоянных. Повторное действие оператора сдвига должно привести к росту порядка разности варьируемых постоянных как неизвестных функций, что противоречит условию определения варьируемых постоянных. С целью предотвращения роста порядка разности выше первого порядка Лагранж предложил, после очередного действия оператора сдвига приравнивать нулю, составляющие содержащие разности варьируемых постоянных.

Так после первого действия оператора сдвига на предполагаемое решение имеем

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,k+1} \cdot y_{i,k+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,k+1} \cdot y_{i,k+1} - \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} . \end{aligned}$$

Для того, чтобы при повторном действии оператора сдвига не появилась разность второго порядка варьируемых постоянных наложим ограничение, то есть приравняем первое слагаемое нулю

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} = 0,$$

и, следовательно, получаем

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} .$$

Следующие действия операторов сдвига потребуют наложить ограничения вида

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+2} = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n-1} = 0$$

и дадут выражения сдвигов (смещений) искомой функции

$$y_{k+2} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{k+n-1} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+n-1}.$$

Таких ограничений потребуется ровно $n-1$. Действие последнего оператора сдвига запишется в виде

$$y_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+n}.$$

Последнее уравнение определяющей системы получается в результате подстановки всех составляющих $y_{k+i}$ в исходное уравнение с учетом наложенных ограничений.

Так подстановка результатов действия операторов сдвига на предполагаемое решение в исходное уравнение и предварительное упорядочивание компонент даст соотношение вида

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n} + \left[ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+n} + a_{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+n-1} + \cdots \\ + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} + a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} \cdot y_{i,k} \end{array} \right] = f_k.$$

Заметим, что выражение в скобках соответствует подстановке фундаментальных решений в однородное разностное уравнение и, следовательно, равно нулю, в итоге результат подстановки дает последнее уравнение определяющей системы

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n} = f_k.$$

В результате получается ровно $n$ уравнений определяющей системы

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+1} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+2} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n-1} = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta \cdot c_{i,k} \cdot y_{i,k+n} = f_k\,,$$

что позволяет, решая ее традиционными методами, выразить разности варьируемых постоянных.

Матричная форма записи определяющей системы уравнений Лагранжа имеет вид

$$\begin{bmatrix} y_{1,k+1} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{n,k+1} \\ y_{1,k+2} & y_{2,k+2} & \cdots & y_{n,k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,k+n} & y_{2,k+n} & \cdots & y_{n,k+n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \cdot c_{1,k} \\ \Delta \cdot c_{2,k} \\ \cdots \\ \Delta \cdot c_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ f_k \end{bmatrix}.$$

Определитель определяющей системы уравнений, построенный из фундаментальной системы решений и ее сдвигов называется определителем Касорати

$$\Delta C = \begin{vmatrix} y_{1,k+1} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{n,k+1} \\ y_{1,k+2} & y_{2,k+2} & \cdots & y_{n,k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,k+n} & y_{2,k+n} & \cdots & y_{n,k+n} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Отличный от нуля определитель Касорати соответствует линейно независимому набору фундаментальных решений однородного разностного уравнения.

Решая определяющую систему уравнений, например, методом Крамера, выразим разности варьируемых постоянных в виде

$$\Delta \cdot c_{i,k} = \frac{{}_i\Delta C}{\Delta C} = \frac{\Delta C_{n,i,k+1} \cdot f_k}{\Delta C}\,,$$

где ${}_i\Delta C$ - определитель Касорати, в котором $i$ - тый столбец заменен вектором правой части определяющей системы уравнений; $\Delta C_{n,i,k+1}$ - алгебраическое дополнение определителя Касорати, полученное путем вычеркивания строки $n$ и столбца $i$, что соответствует раскрытию определителя ${}_i\Delta C$ по $i$ - му столбцу.

Далее, действуя на разности обратным разностным оператором, который определяется вычислением суммы функциональной последовательности, с точностью до постоянных суммирования, получаем выражения варьируемых постоянных

$$c_{i,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{i,k} = \sum_{m=0}^{k} \frac{\Delta C_{n,i,m+1} \cdot f_m}{\Delta C} + c_i$$

или

$$c_{i,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{i,k} = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\Delta C_{n,i,m} \cdot f_{m-1}}{\Delta_{-1} C} + c_i ,$$

где $\Delta_{-1} C$ - определитель Касорати, компоненты которого сдвинуты по времени на $-1$; $c_i$ - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные варьируемые постоянные в общее решение, видим, что общее решение неоднородного разностного уравнения распадается на сумму общего решения однородного разностного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \left[ \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\Delta C_{n,i,m} \cdot f_{m-1}}{\Delta_{-1} C} + c_i \right] \cdot y_{i,k} .$$

Определяя постоянные суммирования из независимых, например, начальных условий и, подставляя в общее решение, получаем частное решение неоднородного разностного уравнения.

**Решение системы неоднородных разностных уравнений первого порядка методом Лагранжа.** Как уже отмечалось, решение систем разностных уравнений первого порядка можно рассматривать как векторно-матричную формулировку методов решения скалярных разностных уравнений $n$ - го порядка.

Система неоднородных разностных уравнений первого порядка может быть записана в виде

$$X_{k+1} - A \cdot X_k = F_k ,$$

где $X_k$ - неизвестная вектор-функция; $X_{k+1}$ - сдвиг неизвестной вектор - функции; $A$ - матрица коэффициентов системы; $F_k$ - вектор правой части системы, определяемый внешним воздействием.

Согласно методу Лагранжа, будем искать общее решение системы в виде

$$X_k = A^k \cdot C_k ,$$

где $A^k$ - степенная функция от матрицы коэффициентов системы; $C_k$ - вектор-функция варьируемых постоянных.

С целью доказательства, подставим общее решение в исходную систему разностных уравнений

$$A^{k+1} \cdot C_{k+1} - A \cdot A^k \cdot C_k = A^{k+1} \cdot \Delta \cdot C_k = F_k .$$

Из последнего соотношения получаем выражение, определяющее разность вектор - функции варьируемых постоянных

$$\Delta \cdot C_k = A^{-(k+1)} \cdot F_k .$$

Для определения самой вектор - функции варьируемых постоянных действуем обратным разностным оператором, что эквивалентно вычислению суммы функциональной последовательности

$$C_k = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot C_k = \sum_{n=0}^{k-1} A^{-(n+1)} \cdot F_n + C = \sum_{n=1}^{k} A^{-n} \cdot F_{n-1} + C ,$$

где $C$ - новый вектор постоянных суммирования.

Подставляя вектор варьируемых постоянных в общее решение, получаем выражение общего решения в виде

$$X_k = A^k \cdot \left[ \sum_{n=1}^{k} A^{-n} \cdot F_{n-1} + C \right] =$$

$$= A^k \cdot C + A^k \cdot \sum_{n=1}^{k} A^{-n} \cdot F_{n-1} = A^k \cdot C + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1}.$$

Определяя вектор постоянных суммирования $C$ из независимых условий, получаем частное решение системы разностных уравнений.

Отметим, что решение систем разностных уравнений с использованием векторно-матричной символики, предполагает знакомство с функциями матричного аргумента, в частности с определением степенной матричной функцией.

Заметим также, что в случае системы разностных уравнений первого порядка эквивалентной скалярному разностному уравнению $n$- го порядка, вектор решения содержит не только неизвестную дискретную функцию, но и ее сдвиги до $n-1$- го порядка включительно.

**Решение системы неоднородных разностных уравнений первого порядка методом Коши.** Как уже отмечалось, основное отличие решения разностного уравнения первого порядка в форме Коши от формы Лагранжа заключается в том, что решение по Лагранжу представляет собой форму общего решения с использованием варьируемых постоянных. Варьируемые постоянные, с точностью до постоянных суммирования, находятся из определяющего уравнения. Для получения частного решения по Лагранжу необходимо, воспользовавшись дополнительными независимыми условиями, найти постоянные суммирования и подставить в общее решение.

Решение в форме Коши, представляет собой частное решение разностного уравнения и в качестве дополнительных независимых условий включает именно начальные условия. Используя эту идею, выразим решение системы разностных уравнений первого порядка в форме Коши, воспользовавшись общим решением в форме Лагранжа

$$X_k = A^k \cdot C + A^k \cdot \sum_{n=1}^{k} A^{-n} \cdot F_{n-1} = A^k \cdot C + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1}.$$

Подставляя вместо вектора постоянных суммирования, вектор начальных значений $X_0$, получаем частное решение системы разностных уравнений в форме Коши

$$X_k = A^k \cdot X_0 + A^k \cdot \sum_{n=1}^{k} A^{-n} \cdot F_{n-1} = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1}.$$

Заметим также, что в случае системы разностных уравнений первого порядка эквивалентной скалярному разностному уравнению $n$- го порядка, вектор начальных значений содержит не только начальное значение неизвестной дискретной функции, но и начальные значения ее сдвигов до $n-1$- го порядка включительно.

## 5.8 Пример решения и применения разностных уравнений второго порядка

Для иллюстрации рассмотренных методов решения разностных уравнений второго и более высоких порядков и их применения рассмотрим пример решения разностного уравнения второго порядка.

**Пример.** В качестве примера просто проиллюстрируем рассмотренные методы аналитического решения разностных уравнений на примере уравнения второго порядка с произвольно заданными начальными условиями. Пусть задано разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+2}+5\cdot y_{k+1}+6\cdot y_k=(-1)^k/2=f_k,$$

с начальными условиями $y_0=0$, $y_1=1$ и требуется найти его аналитическое решение операторным методом, методом Лапласа и методом Коши. Заметим, что корни характеристического уравнения равны $z_1=-2$, $z_2=-3$.

**Операторный метод.** Для нахождения решения разностного уравнения операторным методом необходимо найти $Z$- изображение правой и левой частей уравнения с учетом начальных условий, используя теорему об упреждении на один такт

$$y_{k+1}\Rightarrow z\cdot Y_z-z\cdot y_0.$$

$Z$- изображение $y_k\Rightarrow Y_z$. Применяя теорему об упреждении первый раз, и, учитывая, что $y_0=0$, получаем

$$y_{k+1}\Rightarrow z\cdot Y_z.$$

Применяя теорему об упреждении повторно, и, учитывая, что $y_1=1$, получаем

$$y_{k+1}\Rightarrow z^2\cdot Y_z-z.$$

$Z$- изображение правой части уравнения равно

$$f_k=(-1)^k\Rightarrow\frac{z}{z+1}$$

Подставляя найденные изображения левой и правой частей разностного уравнения, получаем

$$(z^2\cdot Y_z-z)+5\cdot z\cdot Y_z+6\cdot Y_z=\frac{z}{2\cdot(z+1)}.$$

Приводя подобные и выполняя простые преобразования, получаем

$$(z^2+5\cdot z+6)\cdot Y_z=z+\frac{z}{2\cdot(z+1)}=\frac{z\cdot(z+1.5)}{z+1}.$$

Выделяя $Z$- изображение выходной переменной, получаем

$$Y_z=\frac{z\cdot(z+1.5)}{(z+1)\cdot(z+2)\cdot(z+3)}.$$

Согласно таблицам обратного $Z$ - преобразования, имеем

$$\frac{z\cdot(z+b)}{(z-d_1)\cdot(z-d_2)\cdot(z-d_3)} \Rightarrow B_1\cdot d_1^k + B_2\cdot d_2^k + B_3\cdot d_3^k,$$

где $B_1 = \dfrac{d_1+b}{(d_1-d_2)\cdot(d_1-d_3)}$; $B_2 = \dfrac{d_2+b}{(d_2-d_1)\cdot(d_2-d_3)}$; $B_3 = \dfrac{d_3+b}{(d_3-d_1)\cdot(d_3-d_2)}$.

В нашем случае $b=1.5$; $d_1=-1$; $d_2=-2$; $d_3=-3$, поэтому, согласно таблицам обратного $Z$- преобразования, получаем оригинал выходной функции, то есть частное решение исходного разностного уравнения в виде

$$y_k = \left\langle \frac{(-1)^k}{4} + \frac{(-2)^k}{2} - \frac{3\cdot(-3)^k}{4} \right\rangle.$$

Заметим сразу, что любое изменение начальных условий повлияет на решение разностного уравнения.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка ищется в виде

$$y_k = c_{1,k}\cdot y_{1,k} + c_{2,k}\cdot y_{2,k} = c_{1,k}\cdot(-2)^k + c_{2,k}\cdot(-3)^k,$$

где $c_{1,k}$, $c_{2,k}$- варьируемые постоянные, то есть неизвестные пока дискретные функции; $y_{1,k}=(-2)^k$, $y_{2,k}=(-3)^k$- система фундаментальных решений соответствующего однородного разностного уравнения.

Для выражения варьируемых постоянных составляем определяющую линейную систему уравнений Лагранжа

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot y_{1,k+1} + \Delta\cdot c_{2,k}\cdot y_{2,k+1} = 0;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k}\cdot y_{1,k+2} + \Delta\cdot c_{2,k}\cdot y_{2,k+2} = f_k.$$

Определитель системы совпадает с определителем Касорати, неравенство нулю которого свидетельствует о независимости фундаментальной системы решений

$$\Delta C = \begin{vmatrix} y_{1,k+1} & y_{2,k+1} \\ y_{1,k+2} & y_{2,k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-2)^{k+1} & (-3)^{k+1} \\ (-2)^{k+2} & (-3)^{k+2} \end{vmatrix} = -(-2)^{k+1}\cdot(-3)^{k+1}.$$

Согласно правилу Крамера, разности варьируемых постоянных определятся выражениями

$$\Delta\cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (-3)^{k+1} \\ (-1)^k/2 & (-3)^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta C} = \frac{-(-1)^k\cdot(-3)^{k+1}}{-2\cdot(-2)^{k+1}\cdot(-3)^{k+1}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^k}{(-2)^k} = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k;$$

$$\Delta\cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} (-2)^{k+1} & 0 \\ (-2)^{k+2} & (-1)^k/2 \end{vmatrix}}{\Delta C} = \frac{(-1)^k\cdot(-2)^{k+1}}{-2\cdot(-2)^{k+1}\cdot(-3)^{k+1}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(-1)^k}{(-3)^k} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Применяя, обратный разностный оператор, соответствующий сумме функциональной последовательности, раскрываемой формулой геометрической прогрессии, с точностью до постоянных суммирования, находим варьируемые постоянные

$$c_{1,k} = -\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + c_1 = -\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) + c_1;$$

$$c_{2,k} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} + c_2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) + c_2,$$

где $c_1$, $c_2$- постоянные суммирования. Перепишем выражения для варьируемых постоянных в виде

$$c_{1,k} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)^{k-1}-(-1)^{k-1}}{(-2)^{k-1}} + c_1; \; c_{2,k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(-3)^{k-1}-(-1)^{k-1}}{(-3)^{k-1}} + c_2.$$

Подставляя найденные варьируемые постоянные в предполагаемое решение, получаем общее решение в виде

$$y_k = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)^{k-1}-(-1)^{k-1}}{(-2)^{k-1}} + c_1\right)\cdot(-2)^k + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{(-3)^{k-1}-(-1)^{k-1}}{(-3)^{k-1}} + c_2\right)\cdot(-3)^k;$$

$$y_k = \left(c_1 - \frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^k - (-1)^{k-1} + \left(c_2 + \frac{1}{4}\right)\cdot(-3)^k + \frac{3}{4}\cdot(-1)^{k-1};$$

$$y_k = \left(c_1 - \frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^k + \left(c_2 + \frac{1}{4}\right)\cdot(-3)^k - \frac{1}{4}\cdot(-1)^{k-1}.$$

Для определения постоянных суммирования $c_1$, $c_2$, воспользуемся начальными условиями $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Подстановка начальных условий при $k = 0$ и $k = 1$ приводит к системе уравнений

$$y_0 = 0 = c_1 - \frac{1}{2} + c_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

$$y_1 = 1 = -2\cdot c_1 + 1 - 3\cdot c_2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

или

$$c_1 + c_2 = 0;$$

$$-2\cdot c_1 - 3\cdot c_2 = 1.$$

Используя правило Крамера, выразим определитель системы и константы суммирования

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1; \; c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1; \; c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Подстановка найденных констант в общее решение дает частное решение исходного разностного уравнения

$$y_k = \frac{(-2)^k}{2} - \frac{3\cdot(-3)^k}{4} - \frac{(-1)^{k-1}}{4} = \frac{(-2)^k}{2} - \frac{3\cdot(-3)^k}{4} + \frac{(-1)^k}{4}.$$

Как видим, методом вариации произвольных постоянных получено решение аналогично операторному методу.

**Матричный вариант метода вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** Матричный вариант метода Лагранжа предполагает переход от исходного разностного уравнения, путем введения новых переменных, к эквивалентной системе разностных уравнений первого порядка.

Исходное разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+2} + 5\cdot y_{k+1} + 6\cdot y_k = (-1)^k/2 = f_k,$$

с начальными условиями $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, введением новых переменных $x_{1,k} = y_k$, $x_{2,k} = x_{1,k+1} = y_{k+1}$; $x_{3,k} = x_{2,k+1} = y_{2,k+2}$ сводится к эквивалентной системе разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^k/2 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A\cdot X_k + F_k.$$

Общее решение системы разностных уравнений первого порядка ищется в виде

$$X_k = A^k \cdot C + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $C = \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix}^t$ - вектор постоянных суммирования, определяемый из начальных условий; $A^k$ - степенная функция матрицы коэффициентов системы; $F_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n-1}/2 \end{bmatrix}^t$ - вектор правой части эквивалентной системы.

Степень матрицы $A^k$, как степенная функция матричного аргумента, в случае различных и не равных нулю собственных значений, определяется выражением

$$A^k = H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1},$$

где $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$- матрица собственных значений; $H$- модальная матрица собственных векторов.

Собственные значения определяются из характеристического уравнения системы

$$\det\ A-\Lambda\ = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\cdot\lambda + 6 = 0$$

и оказываются равными $\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3$, то есть

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица собственных векторов $H$ определяется элементами, например, первых строк матриц присоединенных к $A-\Lambda_i$ . В данном случае модальная матрица $H$ и обратная ей матрица $H^{-1}$ равны

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix};\ \Delta_H = -6;\ H^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Соответственно $A^k$ определится выражением

$$A^k = H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot\lambda_1^k - 2\cdot\lambda_2^k & \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ 6\cdot(\lambda_1^k - \lambda_2^k) & -2\cdot\lambda_1^k + 3\cdot\lambda_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы $A^{k-n}$ аналогична и отличается лишь показателями степени при $\lambda_i$.

Так как из вектора решений $X^k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^t = \ y_k \quad y_{k+1}\ ^t$ нас интересует лишь первая компонента $y_k$, то, раскрывая первую составляющую, получаем

$$y_k = \begin{bmatrix} 3\cdot\lambda_1^k - 2\cdot\lambda_2^k & \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{k}(\lambda_1^{k-n} - \lambda_2^{k-n})\cdot(-1)^{n-1}/2,$$

или, подставив значения $\lambda_i$, приходим к записи

$$y_k = \ 3\cdot(-2)^k - 2\cdot(-3)^k\ \cdot c_1 + \ (-2)^k - (-3)^k\ \cdot c_2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k}\{(-2)^{k-n} - (-3)^{k-n}\}\cdot(-1)^{n-1}/2\ .$$

Разбивая сумму на две составляющие и, вынося множители, не зависящие от индекса суммирования, за знак суммы, получаем

$$y_k = \; 3\cdot(-2)^k - 2\cdot(-3)^k \;\; \cdot c_1 + \; (-2)^k - (-3)^k \;\; \cdot c_2 -$$

$$-\frac{(-2)^k}{2}\cdot\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{(-3)^k}{2}\cdot\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n \; .$$

Раскрывая суммы по формуле геометрической прогрессии, последовательно получаем

$$y_k = \; 3\cdot(-2)^k - 2\cdot(-3)^k \;\; \cdot c_1 + \; (-2)^k - (-3)^k \;\; \cdot c_2 -$$

$$-\frac{(-2)^k}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{(-3)^k}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)}{1-\frac{1}{3}} \; ;$$

$$y_k = \; 3\cdot(-2)^k - 2\cdot(-3)^k \;\; \cdot c_1 + \; (-2)^k - (-3)^k \;\; \cdot c_2 -$$

$$-\frac{(-2)^k}{2} + \frac{(-1)^k}{2} + \frac{(-3)^k}{4} - \frac{(-1)^k}{4} \; ;$$

$$y_k = \; 3\cdot(-2)^k - 2\cdot(-3)^k \;\; \cdot c_1 + \; (-2)^k - (-3)^k \;\; \cdot c_2 - \frac{(-2)^k}{2} + \frac{(-3)^k}{4} + \frac{(-1)^k}{4}.$$

Наконец, используя начальные условия $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, при $k = 0$ и $k = 1$, находим постоянные суммирования

$$y_0 = 0 = 1\cdot c_1 + 0\cdot c_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4};$$

$$y_1 = 1 = 0\cdot c_1 + 1\cdot c_2 + 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

или

$$c_1 = 0; \;\; c_2 = 1.$$

Подстановка найденных констант в общее решение дает частное решение исходного разностного уравнения

$$y_k = \frac{(-2)^k}{2} - \frac{3\cdot(-3)^k}{4} + \frac{(-1)^k}{4}.$$

Таким образом, матричный вариант метода Лагранжа дал тоже решение исходного разностного уравнения, что и скалярным вариантом метода.

**Матричный вариант метода Коши (решение в форме Коши).** Матричный вариант метода Коши, как и метода Лагранжа, предполагает переход от исходного разностного уравнения, путем введения новых переменных, к эквивалентной системе разностных уравнений первого порядка.

Исходное разностное уравнение второго порядка

$$y_{k+2} + 5\cdot y_{k+1} + 6\cdot y_k = (-1)^k/2 = f_k ,$$

с начальными условиями $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, введением новых переменных $x_{1,k} = y_k$, $x_{2,k} = x_{1,k+1} = y_{k+1}$; $x_{3,k} = x_{2,k+1} = y_{2,k+2}$ сводится к эквивалентной системе разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^k/2 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Частное решение системы разностных уравнений первого порядка в форме Коши ищется в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ - вектор начальных условий; $A^k$ - степенная функция матрицы коэффициентов системы; $F_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n-1}/2 \end{bmatrix}^t$ - вектор правой части эквивалентной системы.

Как было уже отмечено, степенная функция матричного аргумента, в случае различных и не равных нулю собственных значений, определяется выражением

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1},$$

где $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ - матрица собственных значений; $H$ - модальная матрица собственных векторов.

Собственные значения определяются из характеристического уравнения системы

$$\det\left(A - \Lambda\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5 \cdot \lambda + 6 = 0$$

и оказываются равными $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -3$, то есть

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Модальная матрица собственных векторов $H$ определяется элементами, например, первых строк матриц присоединенных к $\left(A - \Lambda_i\right)$. В данном случае модальная матрица $H$ и обратная ей матрица $H^{-1}$ равны

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}; \ \Delta_H = -6; \ H^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Соответственно $A^k$ определится выражением

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1/3 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot \lambda_1^k - 2 \cdot \lambda_2^k & \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ 6 \cdot (\lambda_1^k - \lambda_2^k) & -2 \cdot \lambda_1^k + 3 \cdot \lambda_2^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы $A^{k-n}$ аналогична и отличается лишь показателями степени при $\lambda_i$.

Так как из вектора решений $X^k = \begin{bmatrix} x_{1,k} & x_{2,k} \end{bmatrix}^t = y_k \quad y_{k+1} \;^t$ нас интересует лишь первая компонента $y_k$, то, раскрывая первую составляющую, получаем

$$y_k = \begin{bmatrix} 3 \cdot \lambda_1^k - 2 \cdot \lambda_2^k & \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{k} (\lambda_1^{k-n} - \lambda_2^{k-n}) \cdot (-1)^{n-1}/2,$$

или, подставив начальные значения и значения $\lambda_i$, приходим к записи

$$y_k = \; (-2)^k - (-3)^k \; \cdot 1 + \sum_{n=1}^{k} \{(-2)^{k-n} - (-3)^{k-n}\} \cdot (-1)^{n-1}/2 \; .$$

Разбивая сумму на две составляющие и, вынося множители, не зависящие от индекса суммирования, за знак суммы, получаем

$$y_k = \; (-2)^k - (-3)^k \; - \frac{(-2)^k}{2} \cdot \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{(-3)^k}{2} \cdot \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \; .$$

Раскрывая суммы по формуле геометрической прогрессии, последовательно получаем

$$y_k = \; (-2)^k - (-3)^k \; - \frac{(-2)^k}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{(-3)^k}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)}{1 - \frac{1}{3}};$$

$$y_k = \; (-2)^k - (-3)^k \; - \frac{(-2)^k}{2} + \frac{(-1)^k}{2} + \frac{(-3)^k}{4} - \frac{(-1)^k}{4};$$

$$y_k = \frac{(-2)^k}{2} - \frac{3 \cdot (-3)^k}{4} + \frac{(-1)^k}{4}.$$

Последняя запись представляет собой частное решение исходного разностного уравнения полученного методом Коши.

Таким образом, решение в форме Коши совпало с решениями предыдущими методами.

## 5.9 Пример определения основных характеристик дискретных систем второго порядка

Для иллюстрации рассмотренных методов решения разностных уравнений второго и более высоких порядков определим основные характеристики дискретных систем второго порядка, заданных системной функцией либо разностным уравнением. В качестве основных временных характеристик дискретных систем рассмотрим частотные, переходные и импульсные характеристики. Напомним, что переходная и импульсная характеристики определяются, как реакция систем, соответственно, на последовательность единичных $\delta$ - импульсов $1_k$ и на одиночный единичный $\delta$ - импульс $1_0$. В качестве реакции рассмотрим напряжение на выходе дискретных систем второго порядка.

**Пример.** Пусть задана системная функция дискретной системы второго порядка

$$S(z) = S_z = \frac{V(z)}{E(z)} = \frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-1)\cdot(z-d)},$$

где $E_z$ - изображение входного воздействия; $V_z$ - изображение выходной реакции и требуется определить частотную, переходную и импульсную характеристики системы.

**Частотная характеристика дискретной системы** определяется по системной функции путем замены $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$

$$S(\omega) = \frac{V(\omega)}{E(\omega)} = \frac{1}{(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-1)\cdot(e^{-j\cdot\omega\cdot T}-d)} = \frac{1}{e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T}-(1+d)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot T}+d},$$

где $T$ - период дискретизации по времени.

**Амплитудно-частотная характеристика системы** соответствует модулю комплексной частотной характеристики

$$|S(\omega)| = Abs(S(\omega)).$$

**Фазочастотная характеристика системы** соответствует аргументу комплексной частотной характеристики

$$\varphi(\omega) = Arg(S(\omega))\cdot 180/\pi.$$

Изображение выходной реакции запишется

$$V_z = \frac{E_z}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

Знаменатель системной (передаточной) функции приравненный нулю определяет характеристическое уравнение

$$(z-1)\cdot(z-d) = z^2-(1+d)\cdot z+d = 0,$$

корни которого, соответственно равны $d_1 = 1;\ d_2 = d$ .

**Переходная характеристика дискретной системы.** Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, переходная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входную последовательность $1_k$ (единичных $\delta$- импульсов при $k \ge 0$ и периодом $T$). Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

**Операторный метод.** Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории $Z$- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента $z$, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия $1_k$, согласно теории $Z$-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной $z$ вида

$$e_k = 1_k \Rightarrow E_z = \frac{z}{z-1}.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-d)}.$$

Из таблиц обратного $Z$- преобразования находим оригинал выходной реакции, то есть переходную характеристику дискретной системы

$$V_z = \frac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-d)} \Rightarrow v_k = A + A_0 \cdot t + B \cdot e^{-\alpha \cdot t} = A + A_0 \cdot t + B \cdot d^k$$

или

$$h_k = v_k = -\frac{1}{(1-d)^2} + \frac{k}{(1-d)} + \frac{d^k}{(1-d)^2},$$

где $B = -A = \dfrac{1}{(1-d)^2}$; $A_0 = \dfrac{1}{T \cdot (1-d)}$; $\alpha = -\dfrac{\ln(d)}{T}$; $k = \dfrac{t}{T}$; $e^{-\alpha \cdot t} = d^k$; $T$- период входной последовательности.

Отметим, что при $k = 0$ имеем $v_0 = h_0 = 0$.

**Построение разностного уравнения дискретной системы.** Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной $z^n$ дробно-рационального выражения - оператором сдвига $E^n$

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-1) \cdot (z-d)} = \frac{1}{z^2 - (1+d) \cdot z + d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_k} = \frac{1}{E^2 - (1+d) \cdot E + d}.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d) \cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_k = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (1+d) \cdot v_{k+1} - d \cdot v_k + 1_k.$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка, то необходимо определить $v_0$ и $v_1$.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 0 .$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции $v_{k+1}$ определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z^2}{(z-1)^2 \cdot (z-d)} .$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)\cdot(z-d)} \right] = 0 .$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса $k$ и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так при $k = -2$ и $k = -1$ последовательно получаем

$$v_0 = (1+d)\cdot v_{-1} - d \cdot v_{-2} + 1_{-2} = (1+d)\cdot 0 - d \cdot 0 + 0 = 0 ;$$
$$v_1 = (1+d)\cdot v_0 - d \cdot v_{-1} + 1_{-1} = (1+d)\cdot 0 - d \cdot 0 + 0 = 0 .$$

Таким образом, получаем, что начальные значения нулевые, то есть $v_0 = 0$ и $v_1 = 0$.

**Решение разностных уравнений.** Приступаем к определению переходной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_k = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot 1^k + c_{2,k} \cdot d^k ,$$

где $1,\ d$- корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = 1^k$, $y_{2,k} = d^k$- фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+2} = 1_k = f_k .$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель определяющей системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & d^{k+1} \\ 1^{k+2} & d^{k+2} \end{vmatrix} = 1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d^{k+1} \\ 1_k & d^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1_k \cdot d^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{-1_k}{1^{k+1} \cdot (d-1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 1^{k+2} & 1_k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1_k \cdot 1^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{1_k}{d^{k+1} \cdot (d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n \cdot (d-1)} = \frac{-1}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n} = \frac{-k}{d-1} + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n \cdot (d-1)} = \frac{1}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n} = \frac{(d^k - 1)}{d^k \cdot (d-1)^2} + c_2,$$

где $c_1$, $c_2$ - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнение, получаем его в виде

$$v_k = \frac{-k \cdot 1^k}{d-1} + c_1 \cdot 1^k + \frac{d^k - 1}{(d-1)^2} + c_2 \cdot d^k .$$

Для определения постоянных суммирования $c_1$ и $c_2$ воспользуемся найденными ранее начальными условиями $v_0 = 0$ и $v_1 = 0$. Так, приравнивая общее решение при $k = 0$ и $k = 1$ начальным условиям, находим

$$v_0 = 0 = -0 + c_1 + 0 + c_2;$$

$$v_1 = 0 = -\frac{1}{d-1} + c_1 + \frac{1}{d-1} + c_2 \cdot d$$

или

$$c_1 + c_2 = 0;$$

$$c_1 + d \cdot c_2 = 0.$$

Из полученной системы сразу следует, что $c_1 = c_2 = 0$.

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_k = \frac{-k \cdot 1^k}{d-1} + \frac{d^k - 1}{(d-1)^2} = \frac{-k}{d-1} + \frac{d^k}{(d-1)^2} + \frac{-1}{(d-1)^2}$$

или

$$h_k = v_k = -\frac{-1}{(1-d)^2} + \frac{k}{1-d} + \frac{d^k}{(1-d)^2}.$$

Полученное решение описывает переходную характеристику исследуемой дискретной системы и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (1+d) \cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_k = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1+d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k.$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1},$$

где $X_0 = \left[ x_{1,0} \quad x_{2,0} \right]^t = v_0 \quad v_1{}^t$ - вектор начальных условий; $A^k$ - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $\Lambda$ - диагональная матрица собственных значений; $H$ - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1 + d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1 + d) \cdot \lambda + d = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы $H$, по известным собственным значениям матрицы $A$, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \quad \cdot h_i = 0,$$

где $\Lambda_i$ - диагональная матрица, составленная из $\lambda_i$.

Доказывается, что модальная матрица $H$ может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A - \Lambda_i]$

$$H = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2) \\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + d - 1 & 1 + d - d \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H = d \cdot (d - 1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1} = \frac{1}{d \cdot (d - 1)} \cdot \begin{bmatrix} d & -1 \\ -d & d \end{bmatrix} = \frac{1}{d - 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k = H \cdot \Lambda^k \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} d & 1 \\ d & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & d^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{d-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/d \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d-1} \cdot \begin{bmatrix} d \cdot 1^k - 1 \cdot d^k & -1^k + d^k \\ d \cdot 1^k - d \cdot d^k & -1^k + d \cdot d^k \end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы $A^{k-n}$ аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий $X_0$ и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений $F_k$ имеют вид

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; F_k = \begin{bmatrix} 0 \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_k \end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k} = v_k$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка и, учитывая структуры векторов $X_0$ и $F_k$, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k = 0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{-1^{k-n} + d^{k-n}}{d-1} \cdot 1_{n-1} = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle -1^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n} + d^k \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n} \right\rangle.$$

Используя для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий, а также учитывая, что входное воздействие в данном случае определено при $k \geq 0$, получаем окончательное выражение для выходной реакции исследуемой дискретной системы

$$h_k = v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle -1^k \cdot k + \frac{d^k \cdot (1-d^k)}{d^k \cdot (1-d)} \right\rangle = -\frac{1}{(1-d)^2} + \frac{k}{1-d} + \frac{d^k}{(1-d)^2}.$$

Полученное выражение совпадает с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает переходную характеристику исследуемой дискретной системы.

**Импульсная характеристика дискретной системы.** Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы различными методами.

Как известно, импульсная характеристика представляет собой реакцию дискретной системы, находящейся в исходном состоянии покоя, на входной одиночный единичный $\delta$- импульс, при $k = 0$, то есть $1_0$. Под исходным состоянием покоя следует понимать полное установление реакции на предыдущие воздействия и отсутствие сторонних источников.

**Отметим, что импульсная характеристика дискретных и цифровых систем определена при $k \geq 1$.**

**Определение импульсной характеристики по переходной характеристике.** Импульсная характеристика дискретной системы может быть определена также по известной переходной характеристике в соответствии с соотношением

$$g_k = \nabla \cdot h_k = h_k - h_{k-1} = \Delta \cdot h_{k-1}.$$

Учитывая, что переходная характеристика имеет вид

$$h_k = -\frac{1}{(1-d)^2} + \frac{k}{1-d} + \frac{d^k}{(1-d)^2},$$

запишем выражение соответствующей функции отстающей на один такт

$$h_{k-1} = -\frac{1}{(1-d)^2} + \frac{k-1}{1-d} + \frac{d^{k-1}}{(1-d)^2}.$$

Применяя уравнение связи, сразу получаем импульсную характеристику дискретной системы

$$g_k = h_k - h_{k-1} = \frac{1-d^{k-1}}{1-d},$$

при $k \geq 1$, или

$$g_{k+1} = \frac{1-d^k}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Таким образом, по известной переходной характеристике дискретной или цифровой системы достаточно просто определяется импульсная характеристика.

**Операторный метод.** Операторный метод определения выходной реакции дискретной системы основан на теории $Z$- преобразования дискретных функций, как оригиналов, в непрерывные функции комплексного аргумента $z$, называемых изображениями, и наоборот.

Оригиналу входного воздействия $1_0$, согласно теории $Z$-преобразования, соответствует изображение в плоскости комплексной переменной $z$ вида

$$e_k = 1_0 \Rightarrow E_z = 1.$$

Изображение выходной реакции дискретной системы будет иметь вид

$$V_z = \frac{1}{(z-1)\cdot(z-d)}.$$

В таблицах обратного $Z$- преобразования соответствующее выражение отсутствует, поэтому воспользуемся следующим приемом.

В соответствии с теоремой о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z,$$

находим

$$v_0 = \lim_{z\to\infty} V_z = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-1)\cdot(z-d)} = 0\,.$$

Далее, используя теорему $Z$ - преобразования об упреждении функции на один такт

$$v_1 \Rightarrow z\cdot V_z - z\cdot v_0,$$

находим

$$v_1 \Rightarrow \frac{z}{(z-1)\cdot(z-d)}\,.$$

Теперь, используя таблицы обратного $Z$- преобразования находим оригинал выходной реакции

$$v_{k+1} = \frac{1-e^{-\alpha\cdot t}}{1-d} = \frac{1-d^k}{1-d},$$

при $k \ge 0$ или

$$v_k = \frac{1-d^{k-1}}{1-d},$$

при $k \ge 1$, где $\alpha = -\frac{\ln(d)}{T}$; $k = \frac{t}{T}$; $e^{-\alpha\cdot t} = d^k$; $T$- период входной последовательности.

Полученные выражения описывают импульсную характеристику дискретной системы

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1-d^k}{1-d},$$

при $k \ge 0$ или

$$g_k = v_k = \frac{1-d^{k-1}}{1-d},$$

при $k \ge 1$.

Отметим, что из предыдущих выражений при $k=0$ и $k=1$ имеем $v_1 = g_1 = 0$.

**Построение разностного уравнения дискретной системы.** Построение разностного уравнения дискретной системы осуществляется по системной функции путем замены изображений воздействия и реакции оригиналами, а комплексной переменной $z^n$ дробно-рационального выражения - оператором сдвига $E^n$

$$\frac{V_z}{E_z} = \frac{1}{(z-1)\cdot(z-d)} = \frac{1}{z^2-(1+d)\cdot z+d} \Rightarrow \frac{v_k}{1_0} = \frac{1}{E^2-(1+d)\cdot E+d}\,.$$

Преобразуя выражение, получаем неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d)\cdot v_{k+1} + d\cdot v_k = 1_0 = f_k$$

или

$$v_{k+2} = (1+d)\cdot v_{k+1} - d\cdot v_k + 1_0\,.$$

**Определение начальных условий.** Для однозначного определения решения разностного уравнения необходимы дополнительные независимые условия, в качестве которых удобно воспользоваться начальными условиями. Так как исходное разностное уравнение второго порядка и импульсная характеристика определена при $k \geq 1$, необходимо определить $v_0$, $v_1$ и $v_2$.

Начальные условия могут быть определены по изображению выходной переменной, в соответствии с теоремой теории $Z$- преобразования о начальном значении функции

$$v_0 = \lim_{k \to 0} v_k = \lim_{z \to \infty} V_z = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{1}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = 0.$$

В соответствии с теоремой упреждения, значение функции $v_{k+1}$ определится выражением

$$v_{k+1} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_0 = \frac{z}{(z-1) \cdot (z-d)}.$$

Применяя повторно теорему о начальном значении функции, получаем

$$v_1 = \lim_{k \to 0} v_{k+1} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_0) = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = 0.$$

Применяя еще раз теорему упреждения на один такт к последнему результату

$$v_{k+2} \Rightarrow z \cdot V_z - z \cdot v_1 = \frac{z^2}{(z-1) \cdot (z-d)}$$

и теорему о начальном значении функции, получим

$$v_2 = \lim_{k \to 0} v_{k+2} = \lim_{z \to \infty} (z \cdot V_z - z \cdot v_1) = \lim_{z \to \infty} \left[ \frac{z^2}{(z-1) \cdot (z-d)} \right] = 1.$$

С другой стороны для определения начальных условий можно воспользоваться исходным разностным уравнением, полагая соответствующим значение индекса $k$ и, учитывая, что входное воздействие и реакция системы в отрицательные моменты времени отсутствуют. Так при $k = -2$, $k = -1$ и $k = 0$ последовательно получаем

$$v_0 = (1+d) \cdot v_{-1} - d \cdot v_{-2} + 1_{-2} = (1+d) \cdot 0 - d \cdot 0 + 0 = 0;$$

$$v_1 = (1+d) \cdot v_0 - d \cdot v_{-1} + 1_{-1} = (1+d) \cdot 0 - d \cdot 0 + 0 = 0;$$

$$v_2 = (1+d) \cdot v_1 - d \cdot v_0 + 1_0 = (1+d) \cdot 0 - d \cdot 0 + 1 = 1.$$

Таким образом, получаем, что начальные значения равны $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ и $v_2 = 1$.

**Решение разностных уравнений.** Приступаем к определению импульсной характеристики дискретной системы путем решения разностного уравнения.

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).** Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения второго порядка

$$v_{k+2} - (1+d) \cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

следует искать в виде

$$v_k = c_{1,k} \cdot v_{1,k} + c_{2,k} \cdot v_{2,k} = c_{1,k} \cdot 1^k + c_{2,k} \cdot d^k,$$

где 1, $d$ - корни характеристического уравнения; $y_{1,k} = 1^k$, $y_{2,k} = d^k$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения; $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ - варьируемые постоянные – неизвестные пока функции.

Варьируемые постоянные находятся из определяющей системы уравнений Лагранжа

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+1} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+1} = 0;$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} \cdot 1^{k+2} + \Delta \cdot c_{2,k} \cdot d^{k+2} = 1_0 = f_k.$$

Напомним, что определяющая система уравнений Лагранжа образуется при подстановке предполагаемого общего решения в исходное разностное уравнение и наложении ограничения на сдвиг функций $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$. Первое уравнение системы есть как раз данное ограничение, а второе уравнение есть результат подстановки предполагаемого решения в исходное разностное уравнение с учетом наложенного ограничения. Определитель системы уравнений есть определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений и их сдвигов.

Выразим разности варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ из определяющей системы уравнений, используя правило Крамера

$$\Delta = \Delta C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & d^{k+1} \\ 1^{k+2} & d^{k+2} \end{vmatrix} = 1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1);$$

$$\Delta \cdot c_{1,k} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & d^{k+1} \\ 1_0 & d^{k+2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-1_0 \cdot d^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{-1_0}{1^{k+1} \cdot (d-1)};$$

$$\Delta \cdot c_{2,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1^{k+1} & 0 \\ 1^{k+2} & 1_0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1_0 \cdot 1^{k+1}}{1^{k+1} \cdot d^{k+1} \cdot (d-1)} = \frac{1_0}{d^{k+1} \cdot (d-1)}.$$

Для определения варьируемых постоянных $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ применим обратный разностный оператор в виде суммы функциональной последовательности, используя для раскрытия сумм формулы арифметической либо геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k = 0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым

$$c_{1,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{1,k} = -\sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n \cdot (d-1)} = \frac{-1}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{1^n} = \frac{-1}{d-1} + c_1;$$

$$c_{2,k} = \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot c_{2,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n \cdot (d-1)} = \frac{1}{d-1} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1_{n-1}}{d^n} = \frac{1}{d \cdot (d-1)} + c_2,$$

где $c_1$, $c_2$ - новые постоянные суммирования.

Подставляя найденные значения $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$ в предполагаемое общее решение разностного уравнение, получаем его в виде

$$v_k = \frac{-1^k}{d-1} + c_1 \cdot 1^k + \frac{d^k}{d \cdot (d-1)} + c_2 \cdot d^k =$$

$$= \frac{d^{k-1} - 1}{d-1} + c_1 + c_2 \cdot d^k = \frac{1 - d^{k-1}}{1-d} + c_1 + c_2 \cdot d^k .$$

Для определения постоянных суммирования $c_1$ и $c_2$ воспользуемся найденными ранее начальными условиями $v_1 = 0$ и $v_2 = 1$, так как решение разностного уравнения в виде импульсной характеристики определено при $k \geq 1$. Так, приравнивая общее решение при $k = 1$ и $k = 2$ начальным условиям, находим

$$v_1 = 0 = 0 + c_1 + c_2 \cdot d\,;$$

$$v_2 = 1 = 1 + c_1 + c_2 \cdot d^2$$

или

$$c_1 + d \cdot c_2 = 0\,;$$

$$c_1 + d^2 \cdot c_2 = 0.$$

Из полученной системы сразу следует, что $c_1 = c_2 = 0$.

Подставляя найденные значения постоянных суммирования в общее решение, получаем частное решение исходного неоднородного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{1 - d^{k-1}}{1-d},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1 - d^k}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Полученное решение описывает импульсную характеристику исследуемой дискретной системы и, как видим, совпадает с выражением, найденным операторным методом.

**Решение в форме Коши (метод Коши).** Рассматриваемый нами вариант метода Коши предполагает предварительное преобразование исходного неоднородного разностного уравнения

$$v_{k+2} - (1+d) \cdot v_{k+1} + d \cdot v_k = 1_0 = f_k$$

в эквивалентную систему двух разностных уравнений первого порядка.

Так, вводя новые переменные $x_{1,k} = v_k$; $x_{2,k} = x_{1,k+1} = v_{k+1}$; $x_{3,k} = v_{2,k+1} = v_{k+2}$, получаем эквивалентную систему разностных уравнений первого порядка

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d & 1+d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1_0 \end{bmatrix}$$

или

$$X_{k+1} = A \cdot X_k + F_k .$$

Согласно методу Коши, частное решение неоднородной системы разностных уравнений первого порядка, следует искать в виде

$$X_k = A^k \cdot X_0 + \sum_{n=1}^{k} A^{k-n} \cdot F_{n-1} ,$$

где $X_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} \end{bmatrix}^t = \; v_0 \quad v_1 \;^t$ - вектор начальных условий; $A^k$ - степенная функция от матрицы коэффициентов системы.

Как известно, любая аналитическая функция от матрицы, имеющей различные и отличные от нуля собственные значения, на основании ее модального представления

$$A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1},$$

может быть определена в виде

$$F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1},$$

где $\Lambda$ - диагональная матрица собственных значений; $H$ - модальная матрица собственных векторов; $F(\Lambda) = \Lambda^k$ диагональная матрица указанной функции от каждого собственного значения.

Собственные значения матрицы коэффициентов системы определяются из характеристического уравнения

$$\det([A - \Lambda]) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -d & 1+d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1+d) \cdot \lambda + d = 0 .$$

Как видим, данное уравнение полностью совпадает с характеристическими уравнениями, определяемыми либо знаменателем системной функции, либо левой (однородной) частью разностного уравнения. Таким образом, собственные значения матрицы коэффициентов системы или корни характеристического уравнения представляются в виде

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Собственные вектора, как столбцы модальной матрицы $H$, по известным собственным значениям матрицы $A$, определяются из решения однородных систем уравнений

$$A - \Lambda_i \;\cdot h_i = 0,$$

где $\Lambda_i$ - диагональная матрица, составленная из $\lambda_i$.

Доказывается, что модальная матрица $H$ может быть определена алгебраическими дополнениями элементов одной из строк, например первой, матрицы $[A-\Lambda_i]$

$$H=\begin{bmatrix}\Delta_{11}(\lambda_1) & \Delta_{11}(\lambda_2)\\ \Delta_{12}(\lambda_1) & \Delta_{12}(\lambda_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+d-1 & 1+d-d\\ d & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & 1\\ d & d\end{bmatrix}.$$

Определитель модальной матрицы равен $\Delta_H=d\cdot(d-1)$. Используя определитель, выразим матрицу обратную модальной

$$H^{-1}=\frac{1}{d\cdot(d-1)}\cdot\begin{bmatrix}d & -1\\ -d & d\end{bmatrix}=\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

В результате, получаем выражение степенной функции от матрицы коэффициентов

$$A^k=H\cdot\Lambda^k\cdot H^{-1}=\begin{bmatrix}d & 1\\ d & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1^k & 0\\ 0 & d^k\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1/d\\ -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{d-1}\cdot\begin{bmatrix}d\cdot 1^k-1\cdot d^k & -1^k+d^k\\ d\cdot 1^k-d\cdot d^k & -1^k+d\cdot d^k\end{bmatrix}.$$

Заметим, что структура матрицы $A^{k-n}$ аналогична и отличается лишь показателем степени.

Теперь все подготовлено для представления решения в форме Коши. Предварительно отметим, что в нашем случае вектор начальных условий $X_0$ и вектор правой части эквивалентной системы разностных уравнений $F_k$ имеют вид

$$X_0=\begin{bmatrix}x_{1,0}\\ x_{2,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\ v_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix};\ F_k=\begin{bmatrix}0\\ f_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1_0\end{bmatrix}.$$

Кроме того, отметим, что нас интересует лишь первая компонента вектора решений $x_{1,k}=v_k$.

Обратим внимание на тот факт, что, несмотря на определение импульсной характеристики при $k\ge 1$, в отличие от метода Лагранжа, где в качестве начальных условий используются значения $v_1$ и $v_2$, в методе Коши в качестве начальных условий используются значения $v_0$ и $v_1$.

В связи с отмеченными обстоятельствами, используя общее выражение для решения системы разностных уравнений первого порядка и, учитывая структуры векторов $X_0$ и $F_k$, выразим выходное напряжение дискретной системы

$$v_k=0+\sum_{n=1}^{k}\frac{-1^{k-n}+d^{k-n}}{d-1}\cdot 1_{n-1}=\frac{1}{d-1}\cdot\left\langle -1^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{1^n}+d^k\cdot\sum_{n=1}^{k}\frac{1_{n-1}}{d^n}\right\rangle.$$

Используем для раскрытия сумм формулы арифметической и геометрической прогрессий. Учитывая тот факт, что входное воздействие в данном случае существует только при $k=0$, получаем значения сумм равные первым слагаемым.

В результате, получаем окончательное выражение для выходной реакции, исследуемой дискретной системы, как частное решение исходного разностного уравнения

$$g_k = v_k = \frac{1}{d-1} \cdot \left\langle -1 + d^{k-1} \right\rangle = \frac{1-d^{k-1}}{1-d},$$

при $k \geq 1$ или

$$g_{k+1} = v_{k+1} = \frac{1-d^k}{1-d},$$

при $k \geq 0$.

Полученные выражения совпадают с результатами, операторного метода и метода Лагранжа и описывает импульсную характеристику исследуемой дискретной системы.

# 6 ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

## 6.1 Исходные понятия и определения

**Дискретный сигнал.** Под дискретным сигналом понимают дискретную последовательность значений реального сигнала, поступающих в определенные фиксированные моменты времени $t_i$.

**Дискретные системы.** Системы, работающие с дискретным сигналом, называют дискретными.

Источники сигнала могут быть дискретны и непрерывны по своей природе возникновения. В случае непрерывного сигнала, его преобразование в дискретную форму производится с помощью стробирования и выборки значений в фиксированные моменты времени. Из соображений удобства обычно используют дискретные сигналы с равными промежутками времени между отсчетами. Интервал времени между последовательными отсчетами называется **периодом последовательности** $T$**.** Величина обратная периоду дискретизации называется **частотой дискретизации** и определяется соотношением $\omega_d = 2 \cdot \pi / T$.

Дискретную последовательность или сигнал удобно описывать в виде $\{x(t_0), x(t_0 + T), x(t_0 + 2 \cdot T), \cdots, x(t_0 + k \cdot T)\}$ или $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$. Значение отсчета соответствует амплитуде реального сигнала в соответствующий момент времени.

Напомним, что оператор сдвига последовательности $y_k$ на один такт вперед (упреждение) записывается в виде $E \cdot y_k = y_{k+1}$, а оператор сдвига на один такт назад (задержка) описывается соотношением $E^{-1} \cdot y_k = y_{k-1}$. В области изображений действие операторов упреждения и задержки соответствует умножению функции изображения $Y_z$, соответственно, на $z$ и $z^{-1}$. Символически это соответствие можно отобразить соотношениями

$$E \cdot y_k = y_{k+1} \Leftrightarrow z \cdot Y_z \,; \quad E^{-1} \cdot y_k = y_{k-1} \Leftrightarrow z^{-1} \cdot Y_z \,.$$

Часто для представления значения используют дискретные значения амплитуды для удобства дальнейшей обработки. Операцию фиксации уровня называют дискретизацией по амплитуде или квантованием уровней и выполняют ее соответствующими устройствами – компараторами. Число уровней квантования существенно влияет на точность обработки сигнала. Отношение максимально возможного уровня к минимальному уровню, называют динамическим диапазоном.

Часто, чтобы снизить требования к рабочему диапазону амплитуд, значение отсчета представляется набором нулей и единиц двоичного кода, определенной разрядности, с определенной тактовой частотой, позволяющей передать двоичное представление отсчета до поступления, следующего отсчета. При этом повышаются требования к быстродействию устройств обработки сигнала в виде двоичной последовательности импульсов.

Преобразование непрерывного сигнала в двоичную последовательность, путем дискретизации по времени и амплитуде выполняется аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Обратное преобразование сигналов из двоичной последовательности в непрерывный путем восстановления отсчетов и аппроксимации значений сигнала между отсчетами выполняется цифро-аналоговыми преобразователями (ЦАП).

**Цифровые сигналы.** Дискретные сигналы, представленные в двоичном коде, называются цифровыми.

**Цифровые системы.** Под цифровыми системами понимают разновидность дискретных систем обрабатывающих цифровую последовательность в виде двоичных $m$- разрядных последовательностей импульсов соответствующих дискретным отсчетам входного сигнала.

Дискретные, а особенно цифровые сигналы удобны для обработки с помощью импульсных логических схем, процессоров и ЭЦВМ.

В настоящее время для обработки цифровых сигналов используют цифровые фильтры, которые могут быть реализованы аппаратно и/или программно.

**Цифровые фильтры.** Цифровые фильтры (ЦФ), это класс систем (устройств) дискретной обработки цифровых сигналов, так называемые линейные стационарные цифровые фильтры. В общем случае, под цифровыми фильтрами будем понимать аппаратную и/или программную реализацию цифровой обработки сигналов.

Цифровые фильтры выполняют операцию частотной фильтрации, преобразуя цифровой поток входного сигнала в выходной сигнал, используя взвешенное суммирование текущих и предыдущих отсчетов сигнала. Современные ЦФ обладают высокой стабильностью параметров, возможностью реализации любой формы АЧХ и ФЧХ, не требуют подстройки и легко реализуются на микропроцессорах и ЭЦВМ. В низкочастотном диапазоне цифровые фильтры способны реализовать полосы пропускания либо заграждения и избирательность, не достижимые другими типами фильтров.

На рисунке 6.1 приведена функциональная схема цифровой обработки аналоговых сигналов.

Цифровая обработка производится следующим образом. Непрерывный входной сигнал $x(t)$ поступает на вход АЦП и, в момент подачи синхроимпульса от тактового генератора (ТГ), его значение преобразуется в двоичную последовательность импульсов определенной разрядности. Двоичная последовательность фиксированной разрядности передается последовательным либо параллельным кодом на арифметическое устройство (АУ) при поступлении на соответствующие шины уровней напряжений соответствующих разрядам двоичного числа. Далее цифровой процессор АУ, выполняющий циклические операции умножения и сложения по модулю два и операции сдвига разрядов, обрабатывает оцифрованные значения отсчетов входного сигнала. Оперативное запоминающее устройство (ОЗУ) служит для запоминания необходимого числа предшествующих значений входного и выходного сигналов необходимых для реализации алгоритма цифровой фильтрации. С выхода цифрового процессора АУ цифровое представление выходного сигнала при необходимости поступает на ЦАП для перевода в аналоговую форму, в противном случае передается на выход в цифровой форме.

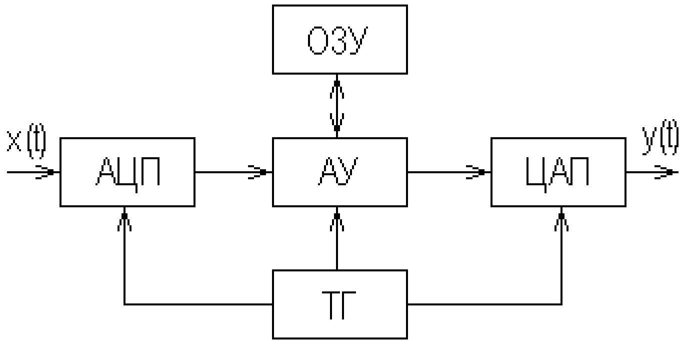


Рисунок 6.1 - Функциональная схема цифровой обработки аналоговых сигналов

Быстродействие, как основной показатель ЦФ зависит как от сложности алгоритма, разрядности двоичного представления, так и от быстродействия процессора. Частотный диапазон сигналов обрабатываемых ЦФ постоянно увеличивается с ростом тактовой частоты современных микропроцессоров.

**Квантование уровней.** Как уже отмечалось, значение входного сигнала дискретизируется по амплитуде, то есть квантуется по уровням, таким образом, чтобы минимальное значение сигнала соответствовало младшему разряду двоичного представления

$$x_i = \sum_{k=0}^{N} \alpha_{ik} \cdot 2^k ,$$

где $\alpha_{ik} = 0,1$- весовые коэффициенты, принимающие значения базового набора двоичного представления; $N$ - разрядность двоичного представления. Максимально представимое целое десятичное число или число уровней сигнала, представимое $N$ разрядным двоичным числом, определяется формулой $M = 2^N - 1$. При конечном числе разрядов $N$ возникает погрешность, связанная с округлением значения до ближайшего представимого уровня.

Сигналы, принимающие счетное значение уровней называются квантованными.

Таким образом, квантование сигналов приводит к специфической погрешности их представления называемого шумом квантования. Для снижения шумов квантования следует увеличивать разрядность цифровых процессоров, однако это снижает их быстродействие и скорость цифровой обработки.

На практике, в зависимости от решаемых задач, обычно используют 4, 8, 16, 32– х разрядные АЦП, при реализации устройств цифровой обработки сигналов.

### 6.2 Алгоритм цифровой фильтрации

**Алгоритм цифровой фильтрации.** Известно, что стационарная аналоговая линейная система преобразует входной сигнал, в соответствии с выражением

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau,$$

где $g(t)$ - импульсная характеристика стационарной линейной системы.

Как отмечалось, линейный ЦФ представляет собой дискретную систему либо программу, преобразующие входную последовательность числовых отсчетов $\{x_k\}$ в выходную последовательность отсчетов выходного сигнала $\{y_k\}$

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\} \Rightarrow \{y_0, y_1, y_2, \cdots\};$$

$$\{x_k\} \Rightarrow \{y_k\}.$$

Из свойства линейности ЦФ следует, что сумма любого числа входных сигналов умноженных на коэффициент преобразуется в сумму выходных сигналов, умноженных на тот же коэффициент

$$\alpha\cdot\sum_{i=1}^{m}\{x_k^{(i)}\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\alpha\cdot\{y_k^{(i)}\}$$

Для того, чтобы воспользоваться исходным соотношением для преобразования входного сигнала в выходной для цифрового фильтра, по аналогии с непрерывными системами вводят понятие импульсной характеристики $g_k$.

Напомним, что **импульсной характеристикой дискретной системы или ЦФ, находящихся в исходном состоянии покоя, называется его реакция на одиночный единичный $\delta$ - импульс** $1_0=\{1, 0, 0, 0, \cdots\}$

$$1_0=\{1, 0, 0, 0, \cdots\} \Rightarrow \{g_0, g_1, g_2, g_3, \cdots\}=\{g_k\}.$$

**Под состоянием покоя понимается полное установление реакции на предыдущее воздействие и отсутствие сторонних источников (возмущений).**

Линейный ЦФ стационарен, то есть, при смещении входного единичного импульса на любое число интервалов дискретизации по времени, его импульсная характеристика смещается таким же образом

$$1_0 \Rightarrow \{g_k\};\ \ 1_{0+m} \Rightarrow \{g_{k+m}\}.$$

Таким образом, алгоритм цифровой фильтрации при условии линейности и стационарности ЦФ по аналогии с непрерывными системами, можно записать в виде

$$y_m = x_0 \cdot g_m + x_1 \cdot g_{m-1} + \cdots + x_m \cdot g_0 = \sum_{k=0}^{m} x_k \cdot g_{m-k} \,.$$

Данное соотношение представляет собой свертку входного сигнала и импульсной характеристики ЦФ. Из выражения следует, что каждый отсчет выходного сигнала представляет собой сумму произведений предшествующих отсчетов входного сигнала на соответствующие отсчеты импульсной характеристики ЦФ.

Таким образом, ЦФ обладает памятью по отношениям к прошлым воздействиям.

Физически реализуемые ЦФ, исходя из принципа причинности, обладают тем свойством, что сигнал на выходе ЦФ равен нулю до подачи входного сигнала. Это означает, что отсчеты импульсной характеристики $\{g_{-1}, g_{-2}, g_{-3}, \cdots\}$ равны нулю и суммирование следует распространять только на положительные значения индекса $k$. Это позволяет записать основное соотношение для образования выходного сигнала в виде

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} x_k \cdot g_{m-k} \,,$$

где $m = 0, 1, 2, \cdots$.

**Дискретные гармонические последовательности.** Как известно, в теории непрерывных систем особая роль отводится комплексному представлению гармонических сигналов вида

$$x(t) = A \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} \,.$$

Дискретизация по времени такого сигнала приводит к дискретной гармонической последовательности

$$\{x_k\} = \{A \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot k \cdot T + \varphi)}\}$$

такой, что

$$\mathrm{Re}\{x_k\} = \{A \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot T + \varphi)\} \,,$$

где $T$ - период дискретизации по времени; $\varphi$ - начальный фазовый сдвиг.

Отметим, что эти последовательности представляют дискретизированные гармонические сигналы неоднозначно, так как последовательности не изменятся при замене

$$\omega \to \omega + \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} = \omega + n \cdot \omega_d \,,$$

где $n$ - любое целое число; $\omega_d$ - угловая частота дискретизации.

Это означает, что отсчеты сигнала можно выбрать либо за один период гармонического сигнала, либо выбирать по одному из каждого $k$ - го периода, где $k = 1, 2, 3, \cdots$. Данное свойство дискретного представления периодических последовательностей соответствует так называемому стробоскопическому эффекту.

**Частотная характеристика ЦФ.** Пусть на вход ЦФ поступает неограниченная во времени гармоническая последовательность $\{x_k\}$, где

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Для вычисления выходной последовательности $\{y_k\}$ воспользуемся основным соотношением

$$y_m = \sum_{k=-\infty}^{m} x_k \cdot g_{m-k} = A \cdot e^{j\cdot\varphi} \sum_{k=-\infty}^{m} e^{j\cdot\omega\cdot k\cdot T} \cdot g_{m-k} =$$

$$= A \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot m\cdot T+\varphi)} \cdot \sum_{k=-\infty}^{m} e^{j\cdot\omega\cdot(k-m)\cdot T} \cdot g_{m-k} \cdot$$

Из соотношения следует, что выходная последовательность образуется из входной последовательности и некоего коэффициента, определяемого выражением

$$K(j\cdot\omega) = S(j\cdot\omega) = \sum_{k=-\infty}^{m} e^{j\cdot\omega\cdot(k-m)\cdot T} \cdot g_{m-k} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot n\cdot T}.$$

Последнее выражение определяет частотный коэффициент передачи или частотную характеристику ЦФ, являющуюся функцией $\omega,\ T$ и $\{g_n\}$.

**Замечание:** В отличие от аналоговых систем для обозначения частотной и системной характеристик дискретных и цифровых систем будем преимущественно использовать символы $S(j\cdot\omega)$ и $S(z)$.

Заметим также, что выражение для зависимости коэффициента передачи от частоты соответствует ряду Фурье с коэффициентами $g_n$.

Известно, что обратное преобразование Фурье частотной характеристики дает импульсную характеристику аналоговой системы

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(j\cdot\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\cdot\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} d\omega.$$

По аналогии, применяя обратное преобразование Фурье к элементам суммы ряда представляющего частотную характеристику ЦФ, приходим к представлению импульсной характеристики ЦФ последовательностью $\delta$-импульсов вида

$$g(t) = g_0 \cdot \delta(t) + g_1 \cdot \delta(t-T) + g_2 \cdot \delta(t - 2\cdot T) + \cdots.$$

На самом деле, учитывая, что коэффициенты $g_n$ константы и преобразование Фурье от $\delta$- функции есть единица $\delta(t) \Leftrightarrow 1$, а сдвиг $\delta$-функции соответствует умножению спектральной функции на экспоненту $\delta(t - n\cdot T) \Leftrightarrow e^{-j\cdot\omega\cdot n\cdot T}$, видим, что обратное преобразование Фурье частотной характеристики соответствует последовательности сдвинутых $\delta$- импульсов с весовыми коэффициентами $g_n$.

Кроме того, коэффициент передачи ЦФ является периодической функцией времени с периодом $T_d = 2\cdot\pi/\omega_d$, где $\omega_d = 2\cdot\pi/T$.

Таким образом, выходной сигнал имеет структуру гармонической последовательности с той же частотой, что и входной сигнал

$$y_m = A\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot m\cdot T+\varphi)} \cdot K(j\cdot\omega) = A\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot m\cdot T+\varphi)} \cdot S(j\cdot\omega).$$

В заключение отметим, что **частотная характеристика ЦФ соответствует установившейся реакции дискретной системы на единичную гармоническую последовательность на входе при исходном состоянии покоя.** Использование в предыдущих выкладках преобразования Фурье, как раз и подчеркивает стационарный характер выходной реакции.

**Системная (передаточная) функция ЦФ.** Системная функция дискретных систем представляет собой аналог передаточной функции аналоговых систем и определяется в $z$- плоскости дискретного $Z$-преобразования.

Дискретным последовательностям входного $\{x_k\}$, выходного $\{y_k\}$ сигналов и импульсной характеристике $\{g_k\}$, как функциям оригиналам, ставятся в соответствие их $z$- изображения $X(z)=X_z$, $Y(z)=Y_z$, $G(z)=S(z)=S_z$. Так как выходная последовательность $\{y_k\}$ представляет собой свертку входной последовательности $\{x_k\}$ и импульсной характеристики $\{g_k\}$

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} x_k \cdot g_{m-k} ,$$

то, в соответствии с теоремой $Z$- преобразования о свертке, изображение выходного сигнала $Y(z)$ определится, как произведение изображений импульсной характеристики ЦФ $S(z)$ и входного сигнала $X(z)$

$$Y(z)=Y_z=S(z)\cdot X(z)=S_z \cdot X_z .$$

Из последнего соотношения получаем выражение для системной (передаточной) функции ЦФ, представленной в виде полинома по отрицательным степеням оператора $z$, согласно определению прямого $Z$-преобразования

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^{-n} .$$

Сравнивая это представление с выражением для частотной характеристики ЦФ

$$S(j\cdot\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot n\cdot T} ,$$

видим, что для перехода от частотной функции к системной функции достаточно произвести замену вида

$$z = e^{j\cdot\omega\cdot T} .$$

В связи с используемой заменой стоит отметить, что частотные характеристики цифровых и дискретных фильтров в отличие от аналоговых фильтров имеют периодический характер, в связи с тем, что значение аргумента $z = e^{j\cdot\omega\cdot T} = e^{j\cdot\omega\cdot T \pm 2\cdot\pi\cdot k/T}$ будет повторяться по частоте с периодом $2\cdot\pi/T$.

Рассмотрим несколько примеров определения частотной характеристики ЦФ по заданной импульсной характеристике.

**Пример 1.** Пусть ЦФ имеет импульсную характеристику вида

$$\{g_k\} = \{1, -1, 0, 0, \cdots\}$$

и требуется найти $S(j \cdot \omega)$.

В соответствии с $Z$ - преобразованием

$$S_z = 1 - \frac{1}{z} = 1 + z^{-1},$$

откуда, используя подстановку, имеем

$$S(j \cdot \omega) = 1 - e^{-j \cdot \omega \cdot T} = (1 - \cos(\omega \cdot T)) + j \cdot \sin(\omega \cdot T).$$

Соответственно АЧХ и ФЧХ выразятся в виде

$$\left|S(j \cdot \omega)\right| = \sqrt{(1 - \cos(\omega \cdot T))^2 + \sin^2(\omega \cdot T)} = 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right)\right|;$$

$$\varphi_S(\omega) = arctg\left(\frac{\sin(\omega \cdot T)}{1 - \cos(\omega \cdot T)}\right) = arctg\left(tg\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega \cdot T}{2}.$$

**Пример 2.** Пусть АЧХ ЦФ является периодической функцией из примера 1, но практический смысл она имеет лишь в интервале $0 \div \dfrac{\pi}{T}$.

На верхней частоте этого интервала каждому периоду дискретного гармонического сигнала соответствуют два отсчета. По теореме Котельникова, это соответствует предельному значению частоты сигнала, который может быть однозначно восстановлен по своим отсчетам

$$T_d \le \frac{1}{2 \cdot F_{gr}} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_{gr}} = \frac{\pi}{\omega_{gr}},$$

откуда

$$F_d = \frac{1}{T_d} \ge \frac{\omega_{gr}}{\pi} = 2 \cdot F_{gr}.$$

Заметим, что если на вход такого фильтра поступает гармонический сигнал с более низкой частотой дискретизации, то есть $\omega \cdot T \ll 1$, то, удерживая первые члены разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора, получим следующее выражение частотной функции

$$S(j \cdot \omega) \approx (1 - 1 + \frac{(\omega \cdot T)^2}{2} - \cdots) + j \cdot (\omega \cdot T - \frac{(\omega \cdot T)^3}{6} + \cdots) \approx j \cdot \omega \cdot T.$$

Это означает, что такой фильтр выполняет операцию дифференцирования входных гармонических сигналов с низкой частотой.

## 6.3 Реализация алгоритмов цифровой фильтрации

Реальные физически осуществимые ЦФ, работающие в реальном масштабе времени, для формирования $i$ - го отсчета выходного сигнала могут использовать:

1. Текущее значение входного сигнала и некоторое число его предыдущих отсчетов $x_{i-1}, x_{i-2}, \cdots, x_{i-m}$.
2. Некоторое число отсчетов выходного сигнала в предшествующие моменты времени $y_{i-1}, y_{i-2}, \cdots, y_{i-n}$.

Целые числа $m$ и $n$ определяют порядок ЦФ. В зависимости от использования информации о прошлых состояниях системы производится классификация ЦФ.

**Трансверсальные фильтры.** Фильтры, использующие информацию только о предшествующих отсчетах входного сигнала, называются трансверсальными ЦФ. Алгоритм функционирования трансверсальных ЦФ описывается выражением вида

$$y_i = b_0 \cdot x_i + b_1 \cdot x_{i-1} + b_2 \cdot x_{i-2} + \cdots + b_m \cdot x_{i-m},$$

где $b_i$ - весовые коэффициенты формирования выходной последовательности; $m$ - порядок трансверсального ЦФ.

Как видим, трансверсальный ЦФ использует лишь предыдущие отсчеты входного сигнала для формирования выходной последовательности.

**Системная функция трансверсального ЦФ.** Применяя $Z$-преобразование к алгоритму функционирования, получаем системную функцию трансверсального ЦФ

$$Y_z = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \cdots + b_m \cdot z^{-m}) \cdot X_z;$$

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \cdots + b_m \cdot z^{-m}) = \frac{b_0 \cdot z^m + b_1 \cdot z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^m}.$$

Из последнего выражения следует, что системная функция трансверсального ЦФ является дробно-рациональной функцией переменной $z$, имеющей $m$- кратный полюс $z = 0$ и $m$ нулей, определяемых коэффициентами $b_i$ степенного полинома числителя.

**Функциональная схема трансверсального ЦФ.** Функциональная схема трансверсального ЦФ четвертого порядка приведена на рисунке 6.2.

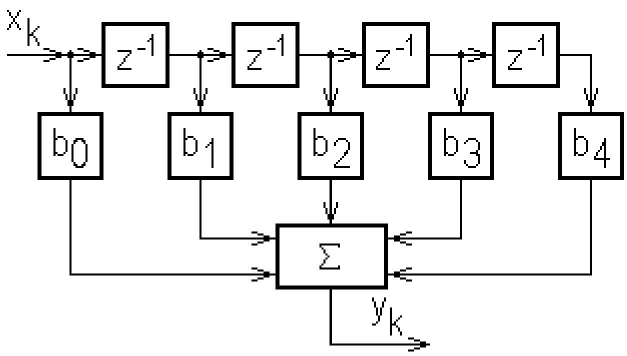


Рисунок 6.2 - Функциональная схема трансверсального ЦФ

Как видим, функциональная схема трансверсального ЦФ содержит блоки задержки на один такт, обозначаемые $z^{-1}$, а также масштабные блоки $b_i$, соответствующие весовым коэффициентам при отсчетах сигнала. В данном случае сумма взвешенных отсчетов входного сигнала образует текущий отсчет выходного сигнала.

Определение трансверсальный (transverse – поперечный) поясняет структуру построения фильтра.

**Программная реализация трансверсального ЦФ.** Рассмотрим фрагмент алгоритма трансверсального ЦФ на входном языке системы MatLab.

Пусть в оперативной памяти компьютера сформированы два массива – вектора $X$ и $B$, соответствующие $m$ отсчетам входного сигнала и весовым коэффициентам.

Предположим, что приходит очередной отсчет входного сигнала, который должен попасть в первый элемент массива $X$. При этом предыдущие отсчеты должны предварительно сдвинуться на один индекс. Далее, путем скалярного произведения векторов $X$ и $B$, получаем очередной отсчет выходного сигнала

……………………

$x(2:m) = x(1:m-1)$;

$x(1) = xt$;

$yt = b * x.'$;

…………

Здесь знак “.'” соответствует в системе **MatLab** операции транспонирования.

**Импульсная характеристика трансверсального ЦФ.** Как было отмечено, системная функция трансверсального ЦФ имеет вид

$$S_z = b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \cdots + b_m \cdot z^{-m}.$$

Импульсную характеристику трансверсального ЦФ можно получить, выполнив обратное $Z$- преобразование системной функции $S_z$.

Обратное $Z$- преобразование, как известно, определяется соотношением

$$g_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C z^{m-1} \cdot S_z \, dz,$$

а прямое $Z$ - преобразование определяется соотношением вида

$$S_z = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot z^{-k}.$$

Для раскрытия интеграла по контуру $C$ на комплексной плоскости используется формула Коши

$$\oint_C z^n \, dz = \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot j, & если \;\; n = -1 \\ 0, & если \;\; n \neq -1 \end{cases}.$$

Из формулы обратного $Z$- преобразования, применительно к системной функции, следует, что каждое слагаемое $S_z$ дает вклад, равный соответствующему коэффициенту $b_m$, смещенному на $m$ позиций по времени в сторону запаздывания.

Таким образом, импульсную характеристику, соответствующую системной функции трансверсального ЦФ, получаем в виде

$$\{g_k\} = \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m\}.$$

Аналогичный вывод следует непосредственно из функциональной схемы трансверсального ЦФ, если учесть, что импульсная характеристика является реакцией дискретной системы на единичный $\delta$ - импульс

$$1_0 = \{1, 0, 0, \cdots, 0\}.$$

Отметим, что импульсная характеристика трансверсального ЦФ содержит конечное число членов, равное порядку.

**Частотная характеристика трансверсального ЦФ.** Для определения частотной характеристики, в выражении системной функции ЦФ, выполним замену вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$. В результате замены получаем выражение частотной характеристики трансверсального ЦФ

$$S(j \cdot \omega) = b_0 + b_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot T} + b_2 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} + \cdots + b_m \cdot e^{-m \cdot j \cdot \omega \cdot T}.$$

Отметим, что с помощью трансверсального ЦФ, при заданном периоде дискретизации $T$, удается реализовать разнообразные формы частотных характеристик, подбирая весовые коэффициенты фильтра $b_i$.

**Пример 3.** Исследовать частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) трансверсального ЦФ второго порядка, выполняющего усреднение текущего и двух предыдущих отсчетов сигнала по формуле

$$y_i = (x_i + x_{i-1} + x_{i-2})/3.$$

Системная функция данного фильтра имеет вид

$$S_z = (1 + z^{-1} + z^{-2})/3.$$

Выполняя замену вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$, получаем частотную характеристику ЦФ

$$S(j\cdot\omega)=\frac{1}{3}\cdot(1+e^{-j\cdot\omega\cdot T}+e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot T})=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot[(1+\cos(\omega\cdot T)+\cos(2\cdot\omega\cdot T))-j\cdot(\sin(\omega\cdot T)+\sin(2\cdot\omega\cdot T))].$$

Выражая модуль и аргумент частотной характеристики, получаем АЧХ и ФЧХ ЦФ

$$\left|S(j\cdot\omega)\right|=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3+4\cdot\cos(\omega\cdot T)+2\cdot\cos(2\cdot\omega\cdot T)}\,,$$

$$\varphi_S(\omega)=-arctg(\frac{\sin(\omega\cdot T)+\sin(2\cdot\omega\cdot T)}{1+\cos(\omega\cdot T)+\cos(2\cdot\omega\cdot T)})=-\omega\cdot T\,.$$

Соответствующие графики АЧХ и ФЧХ представлены на рисунке 6.3, где ось ординат соответствует величине $\omega\cdot T$ выраженной в градусах.

**Пояснения:** Пусть, например, $\omega\cdot T=60^\circ$, то есть на один период гармоники сигнала приходится шесть отсчетов $(\cdots,0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,\cdots)$. Абсолютные значения в данном случае не важны, так как фильтр линейный. Согласно алгоритму формирования выходного сигнала, соответствующего усреднению входных отсчетов, выходная последовательность будет иметь вид $(\cdots,0,2/3,2/3,0,-2/3,-2/3,0,2/3,2/3,\cdots)$.

Как видим, выходной последовательности отвечает гармонический сигнал той же частоты, что и на входе, с амплитудой равной $2/3\approx0.66$ от входной амплитуды и начальной фазой запаздывания на $60^\circ$. Этот факт находится в полном соответствии с приведенными на рисунке 6.3 графиками АЧХ и ФЧХ.

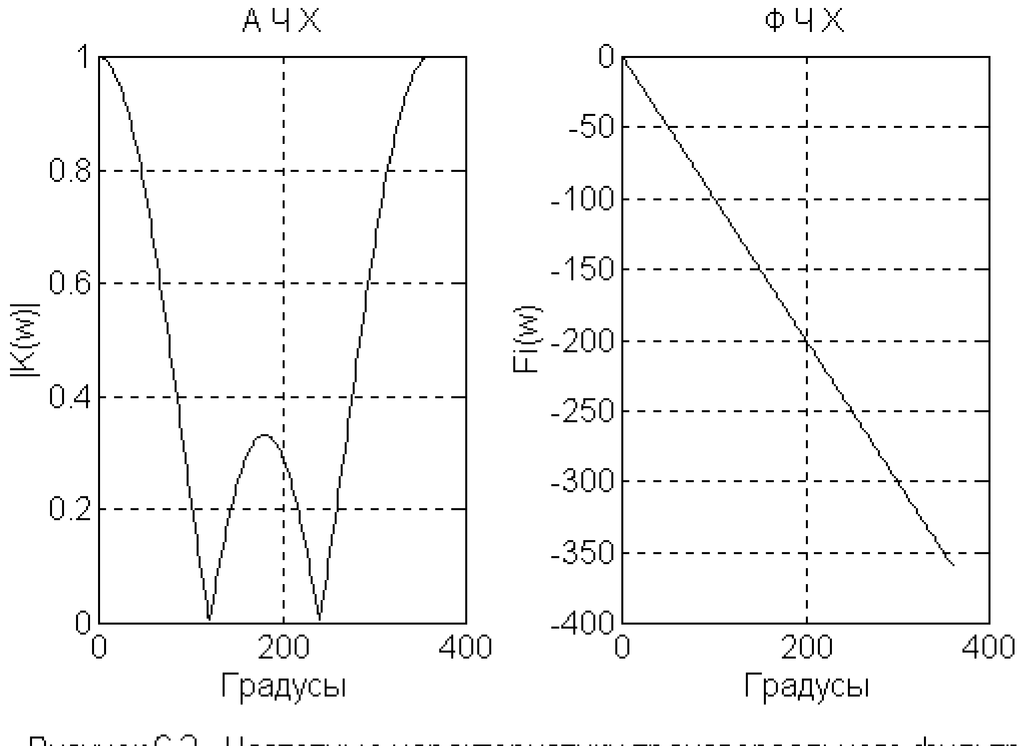


Рисунок 6.3 - Частотные характеристики трансверсального фильтра

При $\omega \cdot T < 120^\circ$ рассматриваемый фильтр сглаживает входную последовательность отсчетов и соответствует ФНЧ.

Кроме того, видим, что АЧХ фильтра периодична и немонотонна. В связи с этим необходимо входной аналоговый сигнал подвергать предварительной частотной фильтрации, так как в нем могут присутствовать составляющие, для которых $\omega \cdot T > 180^\circ$. Эти составляющие не будут ослабляться ЦФ, так как для них условия Котельникова не выполняются. Более того, из-за наличия ВЧ составляющих ЦАП восстановит некоторое НЧ колебание, отсутствующее во входном сигнале. Это паразитное явление (эффект наложения или маскировки ВЧ составляющих спектра) в принципе присуще любым дискретным системам. Это заставляет уделять серьезное внимание предварительной обработки сигнала, подвергаемого цифровой фильтрации.

**Рекурсивные фильтры.** Для формирования $i$-го отсчета выходного сигнала рекурсивные ЦФ используют не только $i$- тый отсчет входного сигнала, но и предыдущие отсчеты, как входного сигнала, так и выходного сигнала

$$y_i = b_0 \cdot x_i + b_1 \cdot x_{i-1} + b_2 \cdot x_{i-2} + \dots + b_m \cdot x_{i-m} +$$
$$+ a_1 \cdot y_{i-1} + a_2 \cdot y_{i-2} + \dots + a_n \cdot y_{i-n} \,.$$

Таким образом, в рекурсивных фильтрах отсчеты выходного сигнала используются в формировании последующих выходных отсчетов.

**Системная функция рекурсивного ЦФ.** Применяя $Z$-преобразование к алгоритму образования выходной последовательности заданной рекуррентным соотношением, получим системную функцию рекурсивного ЦФ

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_m \cdot z^{-m}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_n \cdot z^{-n}} =$$
$$= \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \dots + b_m \cdot z^{n-m}}{z^n - a_1 \cdot z^{n-1} - a_2 \cdot z^{n-2} - \dots - a_n} \,.$$

Системная функция преобразуется в частотную характеристику рекурсивного ЦФ при замене вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$.

Системная функция имеет на $z$- плоскости $n$ полюсов. Если коэффициенты рекурсивной части алгоритма вещественны, то полюса системной функции либо вещественны, либо попарно комплексно - сопряжены.

**Функциональная схема рекурсивного ЦФ.** Функциональная схема рекурсивного ЦФ четвертого порядка приведена на рисунке 6.4.

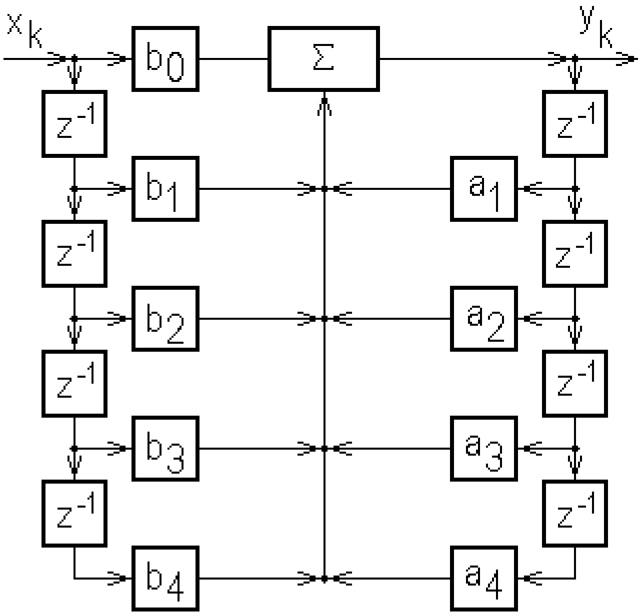


Рисунок 6.4 - Функциональная схема рекурсивного ЦФ

Левая часть функциональной схемы соответствует трансверсальной (нерекурсивной) части алгоритма цифровой фильтрации. Для ее реализации требуется $m+1$ масштабных блоков (операций умножения) и $m$ ячеек памяти, в которых хранятся входные отсчеты.

Правая часть функциональной схемы соответствует рекурсивной части алгоритма цифровой фильтрации. Здесь используется $n$ последовательных отсчетов выходного сигнала, которые сдвигаются из ячейки в ячейку на каждом такте.

Недостатком этой функциональной схемы ЦФ является большое число необходимых ячеек памяти для рекурсивной и нерекурсивной частей алгоритма цифровой фильтрации.

**Каноническая функциональная схема рекурсивного ЦФ.** Более совершенной является каноническая функциональная схема рекурсивного ЦФ, имеющего минимально возможное число ячеек памяти, равное наибольшему из чисел $m$ и $n$. В качестве примера, на рисунке 6.5 изображена каноническая функциональная схема рекурсивного ЦФ второго порядка, соответствующая системной функции вида

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}} = \frac{b_0 \cdot z^2 + b_1 \cdot z^1 + b_2}{z^2 - a_1 \cdot z^1 - a_2}.$$

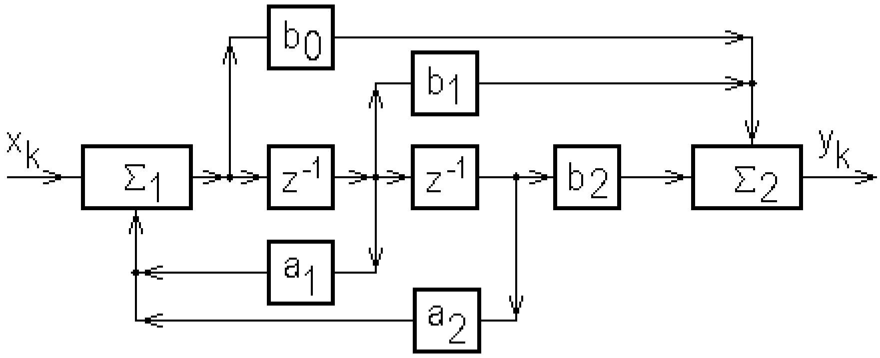


Рисунок 6.5 - Каноническая функциональная схема рекурсивного ЦФ

Для вывода выражения системной функции по канонической функциональной схеме рекурсивного ЦФ запишем выражения для сигналов на выходах первого и второго сумматоров

$$w_k = x_k + a_1 \cdot w_{k-1} + a_2 \cdot w_{k-2} \,;$$

$$y_k = b_0 \cdot w_k + b_1 \cdot w_{k-1} + b_2 \cdot w_{k-2} \,,$$

где $\{w_k\}$ - выходная последовательность на выходе первого сумматора.

Выполняя $Z$ - преобразования для этих выражений, получаем

$$W_z = X_z /(1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}) \,;$$

$$Y_z = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}) \cdot W_z \,.$$

Объединяя полученные выражения для изображений сигналов на выходах сумматоров, приходим к указанной системной функции рекурсивного ЦФ.

**Устойчивость рекурсивных ЦФ.** Рекурсивный ЦФ является дискретным аналогом динамической системы с обратной связью (ОС).

Поскольку в ячейках памяти хранятся значения предшествующих состояний выходного сигнала, то при заданных начальных условиях, то есть значениях $\{y_{i-1}, y_{i-2}, \cdots, y_{i-m}\}$, даже в отсутствие входного сигнала $\{x_k\}$, на выходе образуется бесконечная последовательность $\{y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \cdots\}$, соответствующая свободным колебаниям дискретной системы.

Дискретная система или ЦФ являются устойчивыми, если свободные колебания, как реакция системы на любые конечные начальные условия, ограничены по амплитуде, то есть $|y_k| \le M$, при $k \to \infty$, где $M$ - некоторое положительное число.

Исходя из общего вида системной функции рекурсивного ЦФ

$$\frac{Y_z}{X_z} = S_z = \frac{b_0 \cdot z^n + b_1 \cdot z^{n-1} + \cdots + b_m \cdot z^{n-m}}{z^n - a_1 \cdot z^{n-1} - a_2 \cdot z^{n-2} - \cdots - a_n}$$

свободные колебания на выходе являются решением линейного однородного разностного уравнения, определяемого знаменателем системной функции

$$(z^n - a_1 \cdot z^{n-1} - a_2 \cdot z^{n-2} - \cdots - a_n) \cdot y_k = y_{k+n} - a_1 \cdot y_{k+n-1} - \cdots - a_n \cdot y_k = 0 \,.$$

Фундаментальная система решений однородного разностного уравнения определяется корнями характеристического уравнения, являющимися полюсами системной функции. Так, если все корни $d_i$ характеристического уравнения

$$z^n - a_1 \cdot z^{n-1} - a_2 \cdot z^{n-2} - \cdots - a_n = 0$$

различны и отличны от нуля, то решение однородного разностного уравнения записывается в виде линейной суперпозиции фундаментальной системы решений

$$y_k = C_1 \cdot y_{1,k} + C_2 \cdot y_{2,k} + \cdots + C_n \cdot y_{1,n} =$$

$$= C_1 \cdot d_1^k + C_2 \cdot d_2^k + \cdots + C_n \cdot d_n^k ,$$

где $C_i$ - постоянные, определяемые начальными или независимыми условиями.

Из структуры решения следует, что если полюсы системной функции, то есть корни характеристического уравнения $|d_i| < 1$, то есть, располагаются внутри единичного круга с центром в точке $z = 0$, то любое решение или свободное колебание системы будет соответствовать убывающей геометрической прогрессии и устойчивому ЦФ.

Заметим, что трансверсальные ЦФ всегда устойчивы, так как не являются динамическими системами, а все корни характеристического уравнения нулевые.

**Пример 4.** Требуется исследовать устойчивость рекурсивного ЦФ второго порядка с системной функцией вида

$$S_z = \frac{b_0}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2}} .$$

Характеристическое уравнение

$$z^2 - a_1 \cdot z - a_2 = 0$$

имеет корни

$$z_{1,2} = \alpha_{1,2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + a_2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4 \cdot a_2}}{2} .$$

Отобразим на графике кривую, описываемую уравнением

$$a_1^2 + 4 \cdot a_2 = 0$$

на плоскости $(a_1, a_2)$ коэффициентов, представляющую собой границу, выше которой полюсы системной функции вещественны, а ниже – комплексно-сопряженные.

Для случая комплексно-сопряженных полюсов $|z_{1,2}|^2 = -a_2$ одной из границ области устойчивости является прямая $a_2 = -1$.

Рассматривая вещественные полюсы при $a_1 > 0$, имеем

$$\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4 \cdot a_2}}{2} < 1$$

или

$$\pm\sqrt{a_1^2 + 4 \cdot a_2} < 2 - a_1.$$

Возводя в квадрат обе части неравенства, видим, что границей области устойчивости является прямая $a_2 = 1 - a_1$. Аналогично исследуется случай, когда $a_1 < 0$.

В результате приходим к выводу, что областью устойчивости рассматриваемого рекурсивного ЦФ является треугольник изображенный на рисунке 6.6 в плоскости $(a_1, a_2)$ коэффициентов.

Критерий устойчивости рекурсивного ЦФ. Как и для любой дискретной системы, задача определения устойчивости произвольного рекурсивного ЦФ, связана с анализом расположения корней характеристического многочлена в плоскости $z$.

Для решения вопроса локализации корней удобно воспользоваться известным дробно-линейным преобразованием

$$z = \frac{w+1}{w-1},$$

устанавливающим взаимно-однозначное отображение левой полуплоскости комплексной переменной $w$, в единичный круг комплексной плоскости $z$, с центром в точке $z = 0$.


Рисунок 6.6 - Область устойчивости рекурсивного ЦФ на плоскости (а1,а2) коэффициентов

Действительно, точке $w=-1$ соответствует точка $z=0$. В то же время мнимая ось $w$- плоскости, то есть совокупность точек с координатами $w=j\cdot a$, где $a$- произвольное вещественное число, отображается во множество точек единичной окружности $z=-e^{j\cdot 2\cdot arctg(a)}$.

Возьмем характеристическое уравнение рекурсивного ЦФ

$$z^n-a_1\cdot z^{n-1}-a_2\cdot z^{n-2}-\dots-a_n=0$$

и, выполнив указанную подстановку, получим

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n-a_1\cdot\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1}-a_2\cdot\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-2}-\dots-a_n=0.$$

Приведя это выражение к общему знаменателю $(w-1)^n$, получим характеристическое уравнение относительно переменной $w$

$$(w-1)^n-a_1\cdot(w-1)\cdot(w+1)^{n-1}-a_2\cdot(w-1)^2\cdot(w+1)^{n-2}-\dots$$

$$-a_{n-1}\cdot(w-1)^{n-1}\cdot(w+1)-a_n\cdot(w-1)^n=0.$$

Если многочлен по степеням $w$, имеет корни лишь в левой полуплоскости, то исходный характеристический многочлен имеет корни лишь в единичном круге плоскости $z$ и соответственно, анализируемый рекурсивный ЦФ устойчив.

**Пример 5.** Необходимо исследовать устойчивость рекурсивного ЦФ третьего порядка с характеристическим уравнением

$$z^3+0.4\cdot z^2-0.5\cdot z+1=0.$$

В соответствии с дробно-линейным преобразованием, получаем уравнение

$$(w+1)^3+0.4\cdot(w-1)\cdot(w+1)^2-0.5\cdot(w-1)^2\cdot(w+1)+1=$$

$$=0.9\cdot w^3+3.9\cdot w^2+3.1\cdot w+1.1=0.$$

Приближенные значения корней этого полинома равны $w_1\approx-3.4339$; $w_{2,3}\approx-0.4497\pm j\cdot 0.3920$.

Как видим, корни полинома располагаются в правой полуплоскости $w$, следовательно, анализируемый ЦФ устойчив.

С другой стороны, согласно критерию Рауса-Гурвица, так как коэффициенты полинома $c_3=0.9$; $c_2=3.9$; $c_1=3.1$; $c_0=1.1$ и главный минор $c_1\cdot c_2-c_3\cdot c_0=11.1>0$, также приходим к выводу, что полином и, соответственно, анализируемый ЦФ устойчив.

**Импульсная характеристика рекурсивного ЦФ.** Из-за наличия обратных связей (ОС), импульсная характеристика рекурсивного ЦФ имеет вид неограниченно-протяженной последовательности отсчетов. Убедиться в данном утверждении можно на примере простого фильтра первого порядка, описываемого системной функцией вида

$$S_z=\frac{b}{1-a_0\cdot z^{-1}}=\frac{b\cdot z}{z-a_0}.$$

Отметим, что этот ЦФ устойчив при $|a_0| < 0$.

Известно, что импульсную характеристику ЦФ можно найти обратным $Z$ - преобразованием системной функции $S_z$, описываемого выражением

$$g_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C z^{m-1} \cdot S_z \, dz .$$

Тогда, $m$ - ый член последовательности $\{g_k\}$ определится из выражения

$$g_m = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint_C z^{m-1} \cdot \frac{b \cdot z^m}{z - a_0} \, dz .$$

Интегрирование осуществляется по единичной окружности $C$, внутри которой располагается точка полюса $z = a_0$.

Поскольку вычет подынтегральной функции в точке полюса равен $b \cdot a^m$, то искомая импульсная характеристика исследуемого ЦФ представляет собой убывающую геометрическую прогрессию

$$\{g_k\} = \{b, b \cdot a, b \cdot a^2, \cdots\} .$$

Таким образом, импульсная характеристика устойчивого рекурсивного ЦФ имеет вид бесконечной убывающей последовательности отсчетов.

### 6.4 Элементы синтеза цифровых фильтров

Особое значение для практики имеют методы синтеза ЦФ с заданными свойствами частотной, переходной и импульсной характеристик. При синтезе ЦФ обычно используются аналоговые фильтры-прототипы, которые в свою очередь синтезируются известными классическими методами. Остановимся подробнее на некоторых методах синтеза ЦФ, предполагая, что аналоговый прототип известен.

**Метод инвариантных импульсных характеристик.** В основе этого простейшего метода синтеза лежит дискретизация импульсной характеристики аналогового фильтра-прототипа. Предполагая физическую реализуемость системы, для которой $g(t) = 0$, при $t < 0$, в результате дискретизации по времени импульсной характеристики прототипа, получаем набор отсчетов импульсной характеристики ЦФ

$$\{g_k\} = \{g(0), g(T), g(2 \cdot T), \cdots\} = \{g_0, g_1, g_2, \cdots\} .$$

Заметим, что число членов последовательности импульсной характеристики ЦФ может быть как конечным, так и бесконечным. Этот факт определяет структуру синтезируемого ЦФ. Так импульсной характеристике с конечным числом отсчетов отвечает трансверсальный ЦФ, в то время как импульсной характеристике в виде бесконечной последовательности соответствует рекурсивный ЦФ.

Действительно, при конечной импульсной характеристике устанавливается наиболее простая связь между ее коэффициентами и структурой трансверсального ЦФ. В данном случае синтез структуры фильтра осуществляется путем прямого применения $Z$- преобразования к последовательности $\{g_k\}$ в виде

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} x_k \cdot g_{m-k} .$$

Системная функция находится непосредственно по выражению

$$S_z = \sum_{k=0}^{m} g_k \cdot z^{-k} .$$

Как видим, знаменатель системной функции будет соответствовать $z^k$, что соответствует трансверсальной структуре ЦФ.

В случае бесконечной импульсной характеристики для получения замкнутого аналитического выражения выходного сигнала и/или системной функции, как правило, используется формула геометрической прогрессии

$$a_i = a_1 \cdot q^{i-1}; \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

где $a_i$- текущий член геометрической прогрессии; $q = a_{i+1} / a_i$ - знаменатель геометрической прогрессии. В случае убывающей геометрической прогрессии, при $n \to \infty$, $q^n \to 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$. В результате такого преобразования получаем системную функцию в виде рациональной дроби, числитель которой соответствует трансверсальной части, а знаменатель рекурсивной части функциональной схемы ЦФ.

При необходимости можно вычислить частотную характеристику ЦФ $S(j \cdot \omega)$ по системной функции $S_z$, выполнив замену вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$. Степень приближения АЧХ синтезируемого ЦФ к характеристике аналогового прототипа зависит от выбранного шага дискретизации $T$.

Рассмотрим примеры синтеза простейших ЦФ по заданной импульсной характеристике аналогового прототипа.

**Пример 6.** Рассмотрим пример синтеза трансверсального ЦФ по заданной импульсной характеристике аналоговой динамической системы первого порядка в виде

$$g(t) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ \ t < 0 \\ e^{-t/\tau}, \ \textit{при} \ \ t > 0 \end{cases}.$$

Постоянный множитель для простоты положен равным единице.

Аппроксимируем импульсную характеристику последовательностью трех равноотстоящих отсчетов

$$\{g_k\} = \{1, \ e^{-T/\tau}, \ e^{-2 \cdot T/\tau}\}.$$

Последовательность отсчетов на выходе фильтра с такой импульсной характеристикой описывается разностным уравнением

$$y_k = x_k + e^{-T/\tau} \cdot x_{k-1} + e^{-2 \cdot T/\tau} \cdot x_{k-2},$$

что соответствует трансверсальному ЦФ.

Применив $Z$- преобразование к последовательности $\{g_k\}$, найдем системную функцию ЦФ

$$S_z = 1 + e^{-T/\tau} \cdot z^{-1} + e^{-2 \cdot T/\tau} \cdot z^{-2}.$$

Выполнив подстановку вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$, получаем частотную характеристику ЦФ

$$S(j \cdot \omega) = 1 + e^{-(1 + j \cdot \omega) \cdot T/\tau} + e^{-2 \cdot (1 + j \cdot \omega) \cdot T/\tau}.$$

**Пример 7.** Рассмотрим пример синтеза рекурсивного ЦФ по тому же аналоговому прототипу при аппроксимации импульсной характеристики бесконечной дискретной последовательностью вида

$$\{g_k\} = \{1,\ e^{-T/\tau},\ e^{-2 \cdot T/\tau},\ \cdots\}.$$

Выполнив $Z$- преобразование бесконечной импульсной характеристики $\{g_k\}$, с учетом суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии получим системную функцию ЦФ

$$S_z = 1 + e^{-T/\tau} \cdot z^{-1} + e^{-2 \cdot T/\tau} \cdot z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot z^{-1}}.$$

Вид полученной системной функции соответствует рекурсивному ЦФ первого порядка, содержащего сумматор, масштабный блок и элемент задержки.

Частотная характеристика синтезированного ЦФ имеет вид

$$S(j \cdot \omega) = \frac{1}{1 - e^{-(1/\tau + j \cdot \omega) \cdot T}}.$$

**Сравнение трансверсальных и рекурсивных ЦФ.** Проведем сравнение частотных характеристик только что синтезированных ЦФ имеющих аналоговым прототипом фильтр с частотной характеристикой вида

$$K(j \cdot \omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau}.$$

Для конкретности положим постоянную времени аналогового прототипа равной $\tau = 1$, а период дискретизации $T = 0.2$. На рисунке 6.7 приведены частотные характеристики в виде АЧХ аналогового фильтра прототипа первого порядка и цифровых фильтров – трансверсального и рекурсивного.

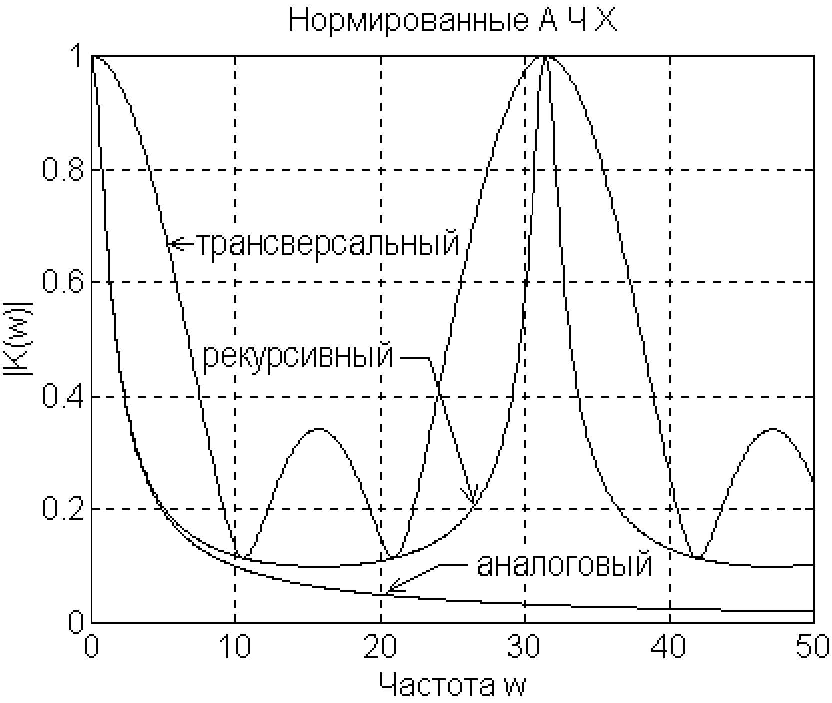


Рисунок 6.7 - АЧХ аналогового и цифровых фильтров

Из приведенных зависимостей АЧХ видно, что рекурсивный ЦФ хорошо аппроксимирует форму АЧХ фильтра прототипа типа ФНЧ. Трансверсальный ЦФ имеет существенно отличную форму АЧХ в силу того, что использовано всего три отсчета импульсной характеристики.

Кроме того, видим, что АЧХ цифровых фильтров имеют периодически повторяющийся характер. В связи с этим фактом еще раз отметим отметим, что использование ЦФ предполагает предварительную фильтрацию входного сигнала для исключения нежелательных высокочастотных помех на выходе.

На рисунке 6.8 для контроля приведены ФЧХ аналогового фильтра прототипа первого порядка и цифровых фильтров – трансверсального и рекурсивного.

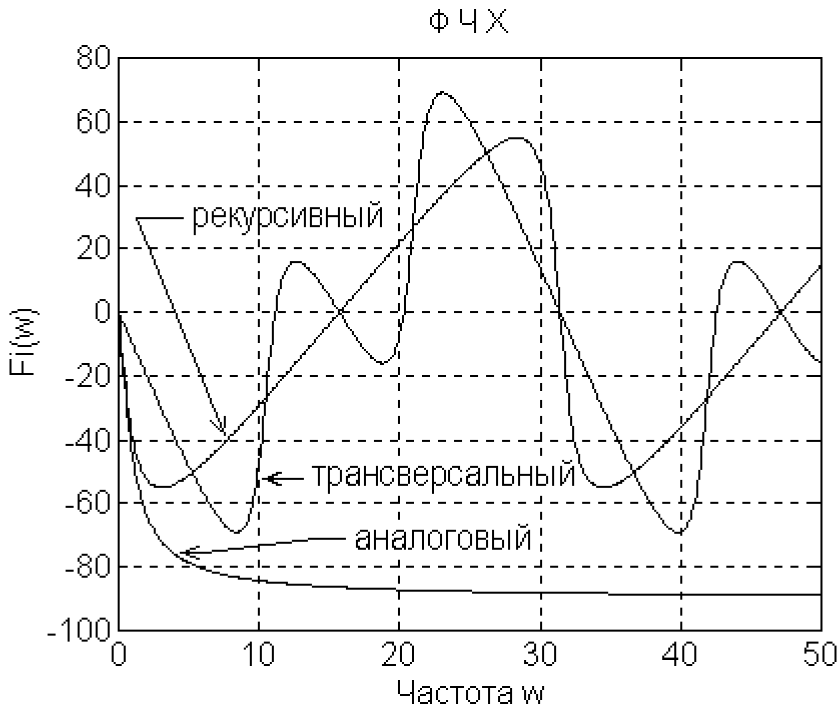


Рисунок 6.8 - ФЧХ аналогового и цифровых фильтров

Приведенные зависимости свидетельствуют о том, что в пределах полосы пропускания ФЧХ рекурсивного ЦФ практически не отличается от ФЧХ аналогового фильтра прототипа. ФЧХ трансверсального ЦФ даже в пределах полосы пропускания существенно отличается от ФЧХ прототипа. За пределами полосы пропускания ФЧХ ЦФ имеют совершенно другой характер поведения.

**Синтез ЦФ на основе конечно-разностного представления дифференциального уравнения аналогового прототипа.** К структуре ЦФ, соответствующего известной аналоговой цепи можно прийти, заменяя производные в дифференциальном уравнении, описывающего выходной сигнал аналогового прототипа, конечными разностями.

В качестве примера, рассмотрим синтез ЦФ, соответствующего колебательной динамической системе второго порядка. Связь выходного колебания с входным воздействием для прототипа описывается дифференциальным уравнением

$$y''(t) + 2 \cdot \alpha \cdot y'(t) + \omega_0^2 \cdot y(t) = x(t).$$

Применительно к колебательному $LC$- контуру с последовательным сопротивлением потерь $R$, коэффициенты дифференциального уравнения определяются, как $\alpha = R / (2 \cdot L)$ и $\omega_0^2 = 1/(L \cdot C)$.

Полагая начальные условия нулевыми $y(_+0) = 0$ и $y'(_+0) = 0$, и, заменяя функции и их производные изображениями, приходим к передаточной характеристике колебательной динамической системы второго порядка

$$K(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{p^2+2\cdot\alpha\cdot p+\omega_0^2}.$$

Используя замену вида $p=j\cdot\omega$, получим частотную характеристику колебательной системы.

Положим шаг дискретизации по времени равным $T$ и рассмотрим совокупности дискретных отсчетов $\{y_k\}$ и $\{x_k\}$. Произведем в дифференциальном уравнении замену производных конечными разностями

$$\frac{y_n-2\cdot y_{n-1}+y_{n-2}}{T^2}+2\cdot\alpha\cdot\frac{y_n-y_{n-1}}{T}+\omega_0^2\cdot y_n=x_n.$$

После соответствующих преобразований получим разностное уравнение

$$(1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2)\cdot y_n-2\cdot(1+\alpha\cdot T)\cdot y_{n-1}+y_{n-2}=T^2\cdot x_n.$$

Группируя слагаемые, получим рекуррентную форму выражения для последовательности выходного сигнала

$$y_n=\frac{T^2\cdot x_n+2\cdot(1+\alpha\cdot T)\cdot y_{n-1}-y_{n-2}}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2}.$$

Эта рекуррентная формула задает алгоритм рекурсивного фильтра второго порядка, моделирующего аналоговую колебательную систему. Такого рода ЦФ принято называть цифровым резонатором. При соответствующем подборе коэффициентов, данный ЦФ подобен аналоговому избирательному контуру и используется в качестве селектирующего звена.

Структуру синтезируемого рекурсивного ЦФ легче всего связать с видом системной функцией. Для перехода от разностного уравнения к системной функции запишем приведенное разностное уравнение

$$y_n-\frac{2\cdot(1+\alpha\cdot T)}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2}\cdot y_{n-1}+\frac{1}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2}\cdot y_{n-2}=$$

$$=\frac{T^2}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2}\cdot x_n.$$

Заменяя, оператор сдвига на $z^{-1}$, получаем

$$(1-A\cdot z^{-1}+B\cdot z^{-2})\cdot Y_z=C\cdot X_z;$$

$$S_z=\frac{Y_z}{X_z}=\frac{C}{1-A\cdot z^{-1}+B\cdot z^{-2}}=\frac{C\cdot z^2}{z^2-A\cdot z+B}.$$

Коэффициенты числителя и знаменатели системной функции определяются выражениями

$$A=\frac{2\cdot(1+\alpha\cdot T)}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2};\ B=\frac{1}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2};\ C=\frac{T^2}{1+2\cdot\alpha\cdot T+\omega_0^2\cdot T^2}.$$

По коэффициентам системной функции синтезируется структура соответствующего селективного рекурсивного ЦФ.

Вместо обратных разностей вида $y'(t) = (y_n - y_{n-1})/T$ для перехода к разностному уравнению можно использовать прямые разности вида $y'(t) = (y_{n+1} - y_n)/T$ . Системная функция ЦФ при этом будет иметь вид

$$S_z = \frac{Y_z}{X_z} = \frac{T^2}{z^2 - 2\cdot(1+2\cdot\alpha\cdot T)\cdot z + (1+2\cdot\alpha\cdot T + \omega_0^2\cdot T^2)}.$$

Выполнив замену вида $z = e^{j\cdot\omega\cdot T}$, от системных функций перейдем к частотным характеристикам синтезируемого ЦФ. На рисунке 6.9 приведены нормированные АЧХ аналоговой колебательной системы и ЦФ, полученных путем аппроксимации исходного дифференциального уравнения обратными и прямыми конечными разностями, при $\omega_0 = 10$, $\alpha = 0.75$, $T = 1/(3\cdot\omega_0)$.

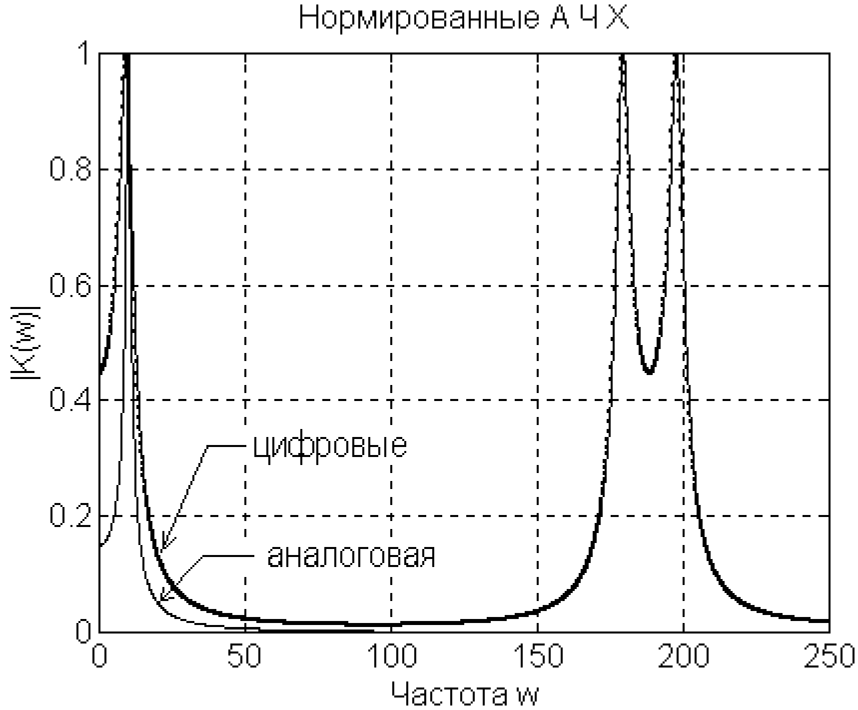


Рисунок 6.9 - Нормированные АЧХ аналоговой колебательной системы и соответствующих селектирующих ЦФ

Как видим, АЧХ реализаций ЦФ с использованием прямых и обратных разностей полностью совпали. Точность аппроксимации аналоговой АЧХ цифровыми фильтрами зависит от шага дискретизации. Частотная характеристика цифровых фильтров имеет периодический характер.

Следует, однако, отметить, что использование обратных разностей при конечно-разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения аналогового прототипа предпочтительно из соображений устойчивости синтезируемого ЦФ.

**Метод инвариантных частотных характеристик.** Инвариантность предполагает подобие частотных характеристик аналоговых и цифровых фильтров. Отметим, что принципиально невозможно создать ЦФ, АЧХ которого в точности совпадала бы с АЧХ аналогового фильтра.

Принципиальное отличие АЧХ аналогового и цифрового фильтров заключается в том, что частотная характеристика ЦФ является периодической функцией частоты с периодом, определяемым шагом дискретизации $T$ по времени.

В связи с этим, инвариантность или подобие частотных характеристик соответствует требованию преобразования бесконечного интервала частот аналогового фильтра в отрезок частот, отвечающего характеристике ЦФ, и, удовлетворяющего неравенствам $-\pi/T < \omega_ц < \pi/T$, при сохранении формы АЧХ.

Пусть $K_{АФ}(p)$ обозначает передаточную функцию аналогового фильтра, заданной дробно-рациональной функцией комплексной частоты $p$. Из связи переменных $z$ и $p$ в виде $z = e^{j \cdot p}$ получаем $p = \ln(z)/T$. Однако, при подстановке этого выражения в дробно-рациональное соотношение, новое соотношение уже не будет иметь дробно-рациональной формы, что свидетельствует о физической нереализуемости ЦФ.

В связи с этим обстоятельством, стараются использовать другие преобразования, например, преобразование, которое переводило бы точки единичной окружности в $z$- плоскости в точки на мнимой оси плоскости $p$ и, кроме того, сохраняло бы дробно-рациональный вид системной функции.

В частности, при синтезе ЦФ получило распространение преобразование вида

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1},$$

которое соответствует замене функции логарифма первым членом разложения ее в ряд Тейлора.

Это дробно-линейное преобразование устанавливает однозначное соответствие между точками единичной окружности $z$- плоскости со всей мнимой осью $p$- плоскости.

Заменяя в последнем соотношении $p$ на $j \cdot \omega_a$ и $z = e^{j \cdot \omega_ц \cdot T}$, получим

$$j \cdot \omega_a = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_ц \cdot T} - 1}{e^{j \cdot \omega_ц \cdot T} + 1} = \frac{2}{T} \cdot tg(\frac{j \cdot \omega_ц \cdot T}{2}).$$

Из этого соотношения следует, что при большой частоте дискретизации $(\omega_ц \cdot T \ll 1)$ значение тангенса примерно равно значению аргумента, то есть $\omega_a \approx \omega_ц$. Следовательно, на низких частотах АЧХ аналогового и цифрового фильтров практически совпадают. На высоких частотах наблюдается существенное отличие в связи с тем, что бесконечный интервал частотного диапазона аналогового фильтра $0 < \omega_a < \infty$ преобразуется в диапазон частот ЦФ $-\pi/T < \omega_ц < \pi/T$ по закону тангенса. В связи с этим при проектировании ЦФ граничные частоты синтезируемого ЦФ и аналогового прототипа должны удовлетворять предыдущему соотношению, учитывающему нелинейную деформацию частотного диапазона фильтра прототипа.

Следует особо отметить, что метод инвариантных частотных характеристик относят к прямым методам синтеза ЦФ, так как при его использовании наличие прототипа не обязательно, и можно задать любой требуемый вид частотной характеристики.

Процедура синтеза ЦФ методом инвариантных частотных характеристик состоит в том, что в функции $K(p)$ выполняется замена по формуле

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}.$$

Полученная при этом системная функция ЦФ $S_z$ имеет дробно-рациональную форму и позволяет непосредственно записать алгоритм цифровой фильтрации, то есть реализовать функциональную схему ЦФ.

**Пример 8.** Необходимо синтезировать ЦФ с частотной характеристикой аналогового ФНЧ второго порядка типа Баттерворта. Частота среза для ЦФ равна $\omega_{g\_ц} = 1500\, c^{-1}$. Частота дискретизации равна $\omega_d = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} = 10000\, c^{-1}$.

Прежде всего, определяем шаг дискретизации $T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega_{g\_ц}} = 6.2832 \cdot 10^{-4}\, c$. Далее, по соотношению частот находим частоту среза аналогового фильтра $\omega_a = \dfrac{2}{T} \cdot tg(\dfrac{\omega_ц \cdot T}{2}) = 1621.9\, c^{-1}$.

Как известно, передаточная функция аналогового ФНЧ второго порядка типа Баттерворта относительно нормированной комплексной частоты $p_n$ имеет вид

$$K_{АФ}(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2} \cdot p_n + 1},$$

где $p_n = p/\omega_{g\_a}$. При переходе к истинной комплексной частоте получаем

$$K_{АФ}(p) = \frac{\omega_{g\_a}}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_{g\_a} \cdot p + \omega_{g\_a}^2}.$$

Выполнив замену переменных $p$ на $z$, в соответствии с дробно-рациональным соотношением, находим системную функцию ЦФ

$$S_z = \frac{\omega_{g\_a}^2 \cdot (z+1)^2}{\left\{ \begin{array}{l} \left[ \left(\frac{2}{T}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot \omega_{g\_a} + \omega_{g\_a}^2 \right] \cdot z^2 + 2 \cdot \left[ \omega_{g\_a}^2 - \left(\frac{2}{T}\right)^2 \right] \cdot z + \\ + \left(\frac{2}{T}\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{2}{T} \cdot \omega_{g\_a} + \omega_{g\_a}^2 \end{array} \right\}}.$$

Подставив в эту формулу заданные числовые значения, получаем итоговый вид системной функции ЦФ

$$S_z = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 1}{7.6272 \cdot z^2 - 5.7033 \cdot z + 2.0761}.$$

Структура выражения системной функции определяет функциональную схему реализации рекурсивного ЦФ.

Выполнив замену $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$, получаем выражение частотной характеристики рекурсивного ЦФ второго порядка типа Баттерворта

$$S_{ЦФ}(j \cdot \omega) = \frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} + 2 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot T} + 1}{7.6272 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega \cdot T} - 5.7033 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot T} + 2.0761}.$$

На рисунке 6.10 приведены нормированные АЧХ аналогового и ЦФ второго порядка типа Баттерворта при $\omega_a = 1621.9\ c^{-1}$ и $T = 6.2832 \cdot 10^{-4}\ c$.

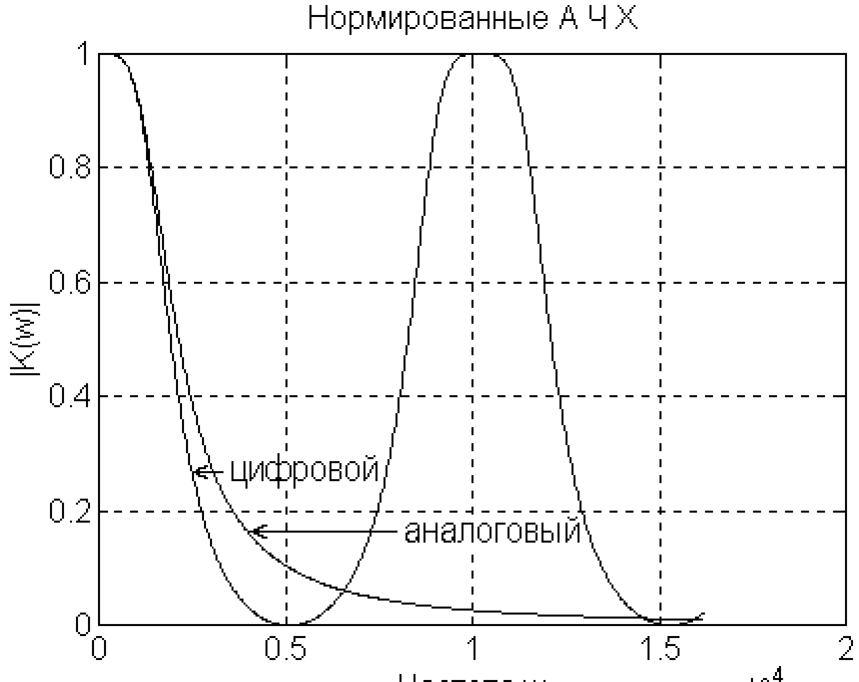


Рисунок 6.10 - Нормированные АЧХ аналогового и цифрового фильтров второго порядка типа Баттерворта

Как видим, при заданных условиях формы АЧХ аналогового и цифрового фильтров практически совпадают на первом интервале прозрачности. Для исключения появления паразитных высокочастотных составляющих на выходе ЦФ за счет периодичности АЧХ используют предварительную фильтрацию входного сигнала.

**Шумы квантования ЦФ.** Рассмотрим влияние квантования сигнала на характеристики ЦФ. При проектировании ЦФ необходимо учитывать специфические изменения характеристик ЦФ, возникающие в результате квантования входных сигналов.

Напомним, что квантованием называется процесс округленного представления уровней отсчетов входного сигнала последовательностью двоичных чисел конечной разрядности.

Квантовый характер сигналов приводит к целому ряду явлений описанных в литературе посвященной ЦФ.

Рассмотрим простейший эффект, так называемый шум квантования.

Пусть $V_{\max}$ - наибольшее значение аналогового сигнала на входе АЦП, которое еще не вызывает переполнения регистров арифметического устройства. Если $m$ - число двоичных разрядов, отводимых для представления отсчетов, то, очевидно, что квантование сигнала производится с шагом $g = V_{\max} / 2^m$.

Таким образом, квантованные отсчеты описывают мгновенные значения аналогового сигнала с некоторой погрешностью в пределах шага квантования. Иными словами, отсчеты входного сигнала ЦФ $\{x_k\}$ являются суммами истинных значений $\{\tilde{x}_k\}$ и значений $\{n_k\}$ некоторого дискретного случайного процесса, называемого шумом квантования

$$x_k = \tilde{x}_k + n_k .$$

Физически шум квантования есть результат округления истинных значений до ближайшего порогового значения АЦП.

Теоретически и экспериментально показано, что в большинстве практически важных случаях последовательность $\{n_k\}$ описывается статистически независимыми случайными величинами, каждая из которых равномерно распределена в интервале $-q/2$ до $q/2$ и поэтому имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\sigma^2 = q^2/12$.

Шум квантования, присутствующий на входе ЦФ, преобразуется этим устройством в выходной шум. Пусть $\{n_{in\_k}\}$- дискретная последовательность, соответствующая входному шуму квантования.

Для того чтобы найти $l$- тый отсчет выходной последовательности $\{n_{out\_k}\}$, следует вычислить дискретную свертку входного шумового сигнала и импульсной характеристики ЦФ

$$n_{out\_k} = \sum_{l=0}^{\infty} g_l \cdot n_{in\_k-l} .$$

Отсюда определяем функцию корреляции шума квантования на выходе

$$R_{out}(k) = R_{out\_k} = \sum_{n=0}^{\infty} n_{out\_n} \cdot n_{out\_n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_m \cdot n_{in\_n-m} \cdot g_{m-k} \cdot n_{in\_n-m-k} =$$

$$= R_{in\_k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} g_m \cdot g_{m-k} .$$

Положив $k = 0$, получим выражение для дисперсии шума квантования на выходе

$$\sigma_{out}^2 = R_{out\_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g_l^2 = \frac{q^2}{12} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} g_l^2 .$$

Таким образом, выходной шум квантования оказывается тем больше, чем медленнее спадают отсчеты импульсной характеристики ЦФ. Другими словами, чем шире полоса пропускания ЦФ, тем больше интенсивность шумов на выходе.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение учебного пособия выразим надежду, что рассмотренные базовые приложения математических методов позволят развить навыки математической формулировки и решения прикладных задач радиотехники и электроники. Рассмотренный математический аппарат и основные характеристики аналоговых, дискретных и цифровых систем и устройств должны способствовать более глубокому усвоению, как соответствующих разделов математики, так общетехнических и специальных дисциплин. При этом прикладные технические знания помогают глубже постичь чисто математические вопросы, а математические знания основательно вникнуть в технические вопросы радиотехники, электроники и связи.

*Рассмотренный в пособии круг прикладных вопросов и методов далеко не исчерпывает, как приложений изложенного математического аппарата, так и, в общем, приложений математики в радиотехнике, электронике и связи и может считаться лишь введением в прикладные математические методы. Приложения математического аппарата в радиотехнике и электронике не поддаются перечислению, и являются настолько многочисленными, что представляет собой целое научное направление.*

Для того чтобы, хоть как-то отметить, возможные приложения использованного нами математического аппарата в различных разделах науки и техники в конце пособия приведен расширенный список литературы иллюстрирующий, как дальнейшее развитие аппарата, так и сфер его применения. Любая попытка в одной книге, перечислить используемый в радиотехнике, электронике и связи математический аппарат заранее обречена не неудачу, так как трудно назвать какой либо раздел математики не нашедший применения в этих областях.

Поскольку учебное пособие ориентировано на студентов младших курсов, а также в силу ограниченности объема книги в ней не нашли отражения многие интересные приложения математических методов. Так, за пределами внимания остались: - анализ устройств на основе распределенных структур; использование волновых систем параметров при анализе СВЧ-устройств; исследование шумовых свойств радиоэлектронных устройств; вопросы нелинейных преобразований сигналов и, в частности, спектральный подход к нелинейному анализу; задачи определения электромагнитных полей волноводных структур; алгоритмы цифровой обработки сигналов и целый ряд не менее важных и интересных приложений математического аппарата.

Некоторые приложения будут освещены при изучении специальных дисциплин и для их успешного усвоения потребуются знания, приобретенные при изучении университетского курса высшей математики и базовых общетехнических дисциплин.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Здесь приведен несколько расширенный список литературы, включающий источники разных лет и дающий представление о фундаментальности рассматриваемых вопросов и их приложениях. Наиболее важные источники, непосредственно используемые при постановке дисциплины «Прикладные математические методы в радиотехнике», выделены жирным шрифтом.


**1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. - М.: Наука, 1965.- 780 с.**

**2. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.- 736 с.**

**3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1988., М.: Высшая школа, 2000.- 463 с.**

4. Беккенбах Э.Ф. Современная математика для инженеров. – М.: ИЛ, 1958.

5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969.- 368 с., 1976.- 352 с.

**6. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976.- 576 с.**

**7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.- 544 с.**

8. Ван-дер-Поль Б., Бремер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. – М.: ИЛ, 1952.

9. Васюков В.Н. Цифровая обработка сигналов и сигнальные процессоры в системах подвижной радиосвязи.: Учебник: (Серия «Учебники НГТУ» – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.- 292 с.

10. Введение в цифровую фильтрацию. / Под ред. Р. Богнера, А. Костантинидиса. – М.: Мир, 1976.- 216 с.

11. Верешкин А.Е., Катковник В.Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. (серия Библиотека технической кибернетики) - М.: Советское радио, 1973.- 151 с.

12. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. – М.: Радио и связь, 1993.

13. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы. Справочник. – Минск: Вышэйшая школа, 1995.- 380 с.

14. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГУ им Н.Э. Баумана, 1999.- 228 с.

**15. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: ГИФМЛ, 1959.- 400 с., 1967.- 376 с.**

16. Герасимович А.И., Кеда Н.П., Сугак М.Б. Математический анализ. Справочное пособие. - В 2-х частях, Ч. 2.- Минск: Вышэйшая школа, 1990.- 272 с.

17. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М.: Наука, 1969.- 512 с.

18. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиз, 1962.- 340 с.

19. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.- 400 с., М.: Наука, 1977.

**20. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. / С приложением работы Д. Кайзера «Цифровые фильтры». – М.: Советское радио, 1973.- 368 с.**

21. Гольденберг Л.М., Левчук Ю.П., Поляк М.Н. Цифровые фильтры. – М.: Связь, 1974.- 160 с.

22. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985.- 312 с.

23. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.

**24. Гудвин Г.К. Проектирование систем управления. / Г.К. Гудвин, С.Ф. Гребе, М.Э. Сальгадо. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.- 911 с.**

25. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990.- 192 с.

26. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963.- 327 с.

27. Дезоер Ч.А., Ку Э.С. Основы теории цепей. / Пер. с англ. Н.Л. Смирновой под ред. В.А. Смирнова. – М.: Связь, 1976.- 288 с.

**28. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). – М.: Наука, 1970.- 620 с.**

**29. Деч Г. Практическое руководство по применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965.- 314 с.**

**30. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971.- 288 с.**

31. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. – М.: Мир, 1974.- 464 с.

**32. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. - М.: Высшая школа, 1966.- 405 с.**

33. Долгов Н.М. Высшая математика: Начала линейной алгебры и векторного анализа. Дифференциальные уравнения и ряды. Элементы теории устойчивости. – К.: Выща школа, 1988.-416 с.

**34. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.- 832 с.**

35. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MatLab. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002.- 608 с.

36. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1970., Минск: Наука и техника, 1979.- 744 с.

37. Еругин И.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С., Павлюк И.А., Шкиль Н.И., Мосенков Б.И., Терещенко Н.И., Волкова В.А. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1974.- 472 с.

38. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал, 1997.

39. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001.

40. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970.- 703 с.

41. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1974.- 400 с.

42. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972.- 816 с.

43. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. Учебное пособие для радиотехн. специальностей вузов – М.: Высшая школа, 1968., М.: Высшая школа, 1975.- 264 с.

44. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Л.: Судпромгиз, 1959., Л.: Машиностроение, 1974.- 335 с.

**45. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971.- 808 с., 1974.- 754 с.**

**46. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического регулирования. / Под ред. Б.К. Чемоданова, Изд. 2-е, доп., в 2-х томах – Т. 1. - М.: Высшая школа, 1977.- 366 с.; Т. 2. - М.: Высшая школа, 1977.- 455 с.**

47. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1983.- 336 с.

**48. Иванов М.Т., Сергиенко А.Б., Ушаков В.Н. Теоретические основы радиотехники: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2002.- 306 с.**

49. Каппелини В., Константинидис А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983.- 360 с.

50. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. 2-е изд. – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.- 424 с.

51. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982.- 109 с.

52. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2004.- 480 с.

**53. Кологривов В.А. Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств: Учебное пособие. – Томск: ТМЦДО, 2003.- 246 с.**

**54. Кологривов В.А. Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств: Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2003.- 197 с.**

**55. Кологривов В.А. Контрольное задание и методическое пособие по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”: Методическое пособие для студентов заочного факультета специальности “Радиотехника”. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 36 с.**

**56. Кологривов В.А. Руководство к лабораторным работам по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. – Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 60 с.**

57. Кологривов В.А. Моделирование и анализ линейных устройств на основе операционных усилителей: Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике” - Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 64 с.

**58. Кологривов В.А. Функциональная среда программирования системы MatLab. Справочное пособие. - Томск: Изд-во ТУСУР, 2004.- 76 с.**

**59. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. – М.: Сов. радио, 1975.- 320 с.**

**60. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика: Учебник. Т.3. (Теория рядов. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория устойчивости) – М.: Эдиториал УРСС, 2001.- 240 с.**

61. Красько А.С., Кологривов В.А. Основы автоматизированного проектирования радиоэлектронных устройств: Учебное методическое пособие. – Томск: ТМЦДО, 2003.- 79 с.

62. Крылов В.И., Скобля Н.С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. – Минск: Наука и техника, 1968.

**63. Крылов В.В., Корсаков С.Я. Основы теории цепей для системотехников. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1990.- 224 с.**

64. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. / Пер. с англ. - М.: Машиностроение, 1986.- 448 с.

65. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб.: Политехника, 1999.- 592 с.

**66. Лазарев Ю.Ф. MatLab 5.x. – К.: Издательская группа BHV, 2000.- 384 с.**

67. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.- 280 с., 1982.- 269 с.

68. Лаппо-Данилевский И.А. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений – М.: ОНТИ, 1934.

69. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Гостехиздат, 1957.

70. Левинштейн М.Л. Операционное исчисление в задачах электротехники. – Л.: Энергия, 1972.- 360 с.

71. Ли Цзун-дао Математические методы в физике. – М.: Мир, 1965.

72. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981.- 384 с.

73. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М.: Гостехиздат, 1951., М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.- 432 с., М.: Наука, 1975.- 478 с.

74. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и проектирование. / Пер с англ. – М.: Мир, 1982.- 592 с.

75. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ. Ч. 3. Интегрирование дифференциальных уравнений. – К.: Выща школа, 1987.- 344 с.

76. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1960., Наука, 1968.- 620 с.

**77. Макаров И.М., Менский Б.М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных z-преобразований: Дробно-рациональные изображения. - М.: Высшая школа, 1978.- 247 с.**

78. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Сорокин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1965.- 539 с.

79. Маслов В.П. Операторные методы. – М.: Наука, 1973.- 544 с.

80. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – СПб: Специальная литература, 1996.- 372 с.

81. Математический анализ: В 3-х частях. Ч. 3: Интегрирование дифференциальных уравнений. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда. – К.: Вища школа, 1987.- 344 с.

82. Микусинский Я. Операторное исчисление. - М.: ИЛ, 1956.

83. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. – М.: ИЛ, 1959.

84. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные однородные разностные уравнения. – М.: Наука, 1981.- 208 с.

85. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные неоднородные разностные уравнения. – М.: Наука, 1986.- 128 с.

86. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. – М.: Атомиздат, 1972.

87. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985.

88. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Под общ. ред. докт. техн. наук. П.Ф. Овчинникова. – К.: Выща школа, 1987.- 552 с.

**89. Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Операционное исчисление. Ряды и их приложения. Устойчивость по Ляпунову. Уравнения математической физики. Оптимизация и управление. Теория вероятностей. Численные методы. / Под общ. ред. докт. техн. наук. П.Ф. Овчинникова. – К.: Выща школа, 1989.- 679 с.**

90. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979.- 416 с.

91. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. / Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева, И.И. Гук. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.- 608 с.

92. Палю де Ла Барьер Р. Курс теории автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1973.- 397 с.

93. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в приложениях к анализу динамических систем. – М.: Изд-во МАИ, 1997.- 188 с.

**94. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.- 376 с.**

**95. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001.- 445 с.**

96. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2003.- 583 с.

97. Пелед А.. Лиу Б. Цифровая обработка сигналов: Теория, проектирование, реализация. – Киев: Вища школа, 1979.- 264 с.

98. Петров Ю.П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.- 192 с.

99. Поль Ван-Дер, Бремер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. – М.: ИЛ, 1952.

**100. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики (дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения). – М.: Высшая школа, 1974.- 367 с.**

101. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: ГИТТЛ, 1964., М.: Наука, 1965.- 331., 1982.- 331 с.

**102. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985., М.: Высшая школа, 1998.- 575 с.**

103. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике. / Под ред. Г.В. Обрезкова. – М.: Высшая школа, 1985.- 343 с.

104. Применение цифровой обработки сигналов./ Под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980.- 552 с.

**105. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики: Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1973.- 464 с.**

**106. Рабинер Л.Р., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. / Пер с англ. – М.: Мир, 1978.- 848 с.**

**107. Реза Ф., Сили С. Современный анализ электрических цепей. – М.-Л.: Энергия, 1964.- 480 с.**

108. Римский-Корсаков Б.С. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1960.- 147 с.

109. Римский-Корсаков Б.С., Шумов А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. - М.: Изд-во ВЗЭЦ, 1960.

110. Розенфельд А.С., Яхинсон Б.И. Переходные процессы и обобщенные функции. – М.: Наука, 1966.

**111. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.- 344 с.**

112. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Физматгиз, 1959.

113. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.- 552 с.

114. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977., М.: Наука, 1983.

115. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Порестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989.- 383 с.

116. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В 2 -х томах. Т. 1. - -М.: ИЛ, 1953.- 347 с., Т. 2. - -М.: ИЛ, 1954.- 416 с.

117. Саперштейн Н.Д., Сапожников Р.А., Файншмидт В.Л., Родин Б.П. Процессы автоматического управления и обобщенное дифференцирование. – М.: Высшая школа, 1973.- 240 с.

118. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство. – М.: Издательский дом «Додэка-XXI», 2002.– 176 с.

119. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 1997.

**120. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002.- 608 с.**

**121. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х частях. Ч. 1. – М,: Мир, 1988.- 336 с., Ч. 2. – М.: Мир, 1988.- 360 с.**

**122. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - К.: Техника, 1975.- 768 с.**

123. Современная теория фильтров и их проектирование. / Под ред. Г. Темеша и С. Митра. – М.: Мир, 1977.- 560 с.

124. Стендер П.В. Элементы операционного исчисления. – М.: Физматгиз, 1954.

125. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1952., М.: Физматгиз, 1958., М.: Наука, 1966., М.: Физматгиз, 1969.

126. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1973.- 260 с.

127. Стрейнц В. Методы пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука, 1985.- 294 с.

**128. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. - М.: Мир, 1980.- 456 с.**

129. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение, 1972.

130. Тетельбаум И.М., Тетельбаум Я.И. Модели прямой аналогии. – М.: Наука, 1979.- 384 с.

131. Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1987.- 384 с.

132. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М.: Сов. радио, 1972.- 352 с.

133. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975.- 208 с.

134. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. - М.: Машиностроение, 1964.- 703 с.

135. Ту Ю. Современная теория управления. – М.: Машиностроение, 1971.– 472 с.

136. Уидроу Б., Стирнз С.Д. Адаптивная обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1989.- 440 с.

137. Уилкинсон Дж. Х Алгебраическая проблема собственных значений. - М.: Наука, 1970.– 564 с.

138. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.- 352 с., 1984., 1985.- 448 с.

139. Феллингер О., Шнайдер Г. Линейные системы передачи. Строгое обоснование теории линейных систем передачи с помощью обобщенных функций и операторов. – М.: Мир, 1964.- 214 с.

**140. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.- 616 с.**

141. Френкс Л. Теория сигналов. / Пер. с англ., под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Связь, 1970.- 248 с., М.: Советское радио, 1974.- 344 с.

142. Фритч В. Применение микропроцессоров в системах управления. – М.: Мир, 1984.

**143. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур. - М.: Радио и связь, 1984.– 240 с.**

144. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. Пер. с англ. / Под ред. А.М. Трахтмана. – М.: Советское радио, 1980.- 224 с.

145. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике. / А.В. Брунченко, Ю.Т. Бутыльский, Л.М. Гольденберг и др.: Под ред. Л.М. Гольденберга. – М.: Радио и связь, 1982.- 224 с.

146. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1958.- 728 с.

147. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963.

148. Шаталов А.С. Отображение процессов управления в пространствах состояний. – М.: Энергоатомиздат, 1986.- 256 с.

149. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965.- 412 с.

150. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1972.- 252 с.

151. Штокало И.З. Операционное исчисление. - К.: Наукова Думка, 1972.– 304 с.

152. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, - М.: Наука, 1969.- 424 с.

**153. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986.**

**154. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – Волгоград: Платон, 1997.- 243 с.**

# Приложение А
# Тематика и содержание компьютерных контрольных работ по дисциплине
# “Прикладные математические методы в радиотехнике”

## СОДЕРЖАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ А

# А КОМПЬЮТЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## А.1 Общие сведения

Каждая контрольная работа включает семь вопросов по элементам анализа аналоговых либо дискретных систем, передаточные (системные) характеристики и входные воздействия которых выбираются случайным образом. В результате для аналоговых систем предлагается один из двадцати четырех вариантов передаточных характеристик и четырех аналоговых входных воздействий, а для дискретных систем предлагается один из двенадцати вариантов системных характеристик и четырех дискретных входных воздействий. Итого – для аналоговых систем - **96 вариантов вопросов;** для дискретных и цифровых систем - **48 вариантов вопросов**.

*Контрольные работы могут быть использованы в качестве обучающей подсистемы.*

## А.2 Контрольная работа №1

**Тема работы: Элементы анализа аналоговых систем и устройств.**

**Задание:** Для выбранной по случайному закону передаточной характеристики и оригинала входного воздействия указать соответствующие:

1) изображение предложенного входного воздействия;
2) однородную часть обыкновенного дифференциального уравнения предложенной системы;
3) неоднородную часть обыкновенного дифференциального уравнения предложенной системы;
4) фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения аналоговой системы;
5) определитель Вронского, построенный на основе фундаментальной системы решений дифференциального уравнения;
6) начальное значение выходной реакции системы на единичный скачок, как составляющую начальных условий;
7) начальное значение производной выходной реакции системы на единичный скачок, как составляющую начальных условий.

**Методическое указание:** контрольная работа акцентирует внимание на следующих моментах анализа аналоговых систем:

передаточная функция; типовые тестовые воздействия; характеристики аналоговых систем; операторный метод на основе преобразования Лапласа; связь передаточных характеристик с обыкновенными дифференциальными уравнениями; характеристическое уравнение; фундаментальная система решений; общее и частное решения обыкновенного дифференциального уравнения; начальные условия.

## А.3 Контрольная работа №2

**Тема работы: Элементы анализа дискретных систем и устройств.**

**Задание:** Для выбранной по случайному закону системной (передаточной) характеристики и оригинала входного воздействия указать соответствующие:

1) изображение предложенного входного воздействия;
2) однородную часть разностного уравнения предложенной системы;
3) неоднородную часть разностного уравнения предложенной системы;
4) фундаментальную систему решений разностного уравнения дискретной системы;
5) определитель Касорати, построенный на основе фундаментальной системы решений разностного уравнения;
6) начальное значение выходной реакции системы на последовательность единичных дельта импульсов, как составляющую начальных условий;
7) начальное значение производной выходной реакции системы на последовательность единичных дельта импульсов, как составляющую начальных условий.

**Методическое указание:** контрольная работа акцентирует внимание на следующих моментах анализа дискретных систем:

системная функция; типовые тестовые воздействия; характеристики дискретных систем; операторный метод на основе $z$ - преобразования; связь системных характеристик с разностными уравнениями; характеристическое уравнение; фундаментальная система решений; общее и частное решения разностного уравнения; начальные условия.

## А.4 Содержание вопросов контрольной работы №1

**Исходные данные:**

**Набор числителей передаточных характеристик для случайного выбора:**

0. $b_0$;
1. $b_1 \cdot p$;
2. $b_1 \cdot p + b_0$;
3. $b_2 \cdot p^2$;
4. $b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p$;
5. $b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0$.

**Условимся, что в данном случае переменная** А **принимает значения в интервале** (0, …, 5)**.**

**Набор знаменателей передаточных характеристик для случайного выбора:**

0. $p^2$;
1. $p \cdot (p+\alpha)$;
2. $(p+\alpha)^2$;
3. $(p+\alpha_1)\cdot(p+\alpha_2)$.

**Условимся, что в данном случае переменная** В **принимает значения в интервале** (0, …, 3)**.**

**Набор оригиналов аналоговых входных воздействий для случайного выбора:**

0. $e(t) = \sin(\omega \cdot t)$;
1. $e(t) = \cos(\omega \cdot t)$;
2. $e(t) = 1(t)$ - единичный скачок (функция Хевисайда);
3. $e(t) = \delta(0)$ - дельта импульс (функция Дирака).

**Условимся, что в данном случае переменная** Г **принимает значения в интервале** (0, …, 3)**.**

**Вопросы контрольной работы №1:**

1. Укажите **выражение изображения** предложенного Вам аналогового воздействия:

0) $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

1) $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

2) $\dfrac{1}{p}$;

3) 1.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

2. Укажите вид **однородной части дифференциального уравнения** предложенной Вам аналоговой системы:

0) $y''$;

1) $y'' + \alpha \cdot y'$;

2) $y'' + 2\cdot\alpha\cdot y' + \alpha^2 \cdot y$;

3) $y'' + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot y' + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot y$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

3. Укажите вид **неоднородной части дифференциального уравнения** предложенной Вам аналоговой системы:

0) $b_0 \cdot e(t)$;

1) $b_1 \cdot e'(t)$;

2) $b_1 \cdot e'(t) + b_0 \cdot e(t)$;

3) $b_2 \cdot e''(t)$;

4) $b_2 \cdot e''(t) + b_1 \cdot e'(t)$;

5) $b_2 \cdot e''(t) + b_1 \cdot e'(t) + b_0 \cdot e(t)$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

4. Укажите **фундаментальную систему решений** дифференциального уравнения предложенной Вам аналоговой системы:

0) $C_1 + C_2 \cdot t$;

1) $C_1 + C_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$;

2) $C_1 \cdot e^{-\alpha \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\alpha \cdot t}$;

3) $C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t}$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

5. Укажите **определитель Вронского**, построенный из фундаментальной системы решений дифференциального уравнения предложенной Вам аналоговой системы:

0) $W = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

1) $W = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\alpha \cdot t} \\ 0 & -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \end{vmatrix}$;

2) $W = \begin{vmatrix} e^{-\alpha \cdot t} & t \cdot e^{-\alpha \cdot t} \\ -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} & (1-\alpha) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \end{vmatrix}$;

3) $W = \begin{vmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot t} & e^{-\alpha_2 \cdot t} \\ -\alpha_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} & -\alpha_2 \cdot e^{-\alpha_2 \cdot t} \end{vmatrix}$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

6. По предложенной передаточной характеристике аналоговой системы определить **начальное значение реакции системы,** как составляющую

начальных условий дифференциального уравнения, **при подаче на вход единичного скачка** $1(t)$**:**

0) $v(0)=0$;

1) $v(0)=b_0$;

2) $v(0)=b_1$;

3) $v(0)=b_2$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

7. По предложенной передаточной характеристике аналоговой системы определить **начальное значение первой производной реакции системы,** как составляющую начальных условий дифференциального уравнения, **при подаче на вход единичного скачка** $1(t)$**:**

0) $v'(0)=0$;

1) $v'(0)=b_1$;

2) $v'(0)=b_2\cdot\delta(0)$;

3) $v'(0)=b_2\cdot\ \delta(0)+b_1$ ;

4) $v'(0)=b_2\cdot\ \delta(0)-\alpha$ ;

5) $v'(0)=b_2\cdot\ \delta(0)-2\cdot\alpha$ ;

6) $v'(0)=b_2\cdot\ \delta(0)-(\alpha_1+\alpha_2)$ ;

7) $v'(0)=b_2\cdot\left[\delta(0)+\left(\dfrac{b_1}{b_2}-\alpha\right)\right]$;

8) $v'(0)=b_2\cdot\left[\delta(0)+\left(\dfrac{b_1}{b_2}-2\cdot\alpha\right)\right]$;

9) $v'(0)=b_2\cdot\left[\delta(0)+\left(\dfrac{b_1}{b_2}-(\alpha_1+\alpha_2)\right)\right]$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

## А.5 Содержание вопросов контрольной работы №2

**Исходные данные:**

**Набор числителей системных характеристик для случайного выбора:**

0. $1$;
1. $z$;
2. $z\cdot(z+b)$.

**Условимся, что в данном случае переменная** А **принимает значения в интервале** $(0,\ \ldots,\ 2)$**.**

**Набор знаменателей системных характеристик для случайного выбора:**

0. $(z-1)\cdot(z-d)$;

1. $(z-1)^2$;

2. $(z-d)^2$;

3. $(z-d_1)\cdot(z-d_2)$.

**Условимся, что в данном случае переменная** В **принимает значения в интервале** $(0,\ \ldots,\ 3)$**.**

**Набор оригиналов дискретных входных воздействий для случайного выбора:**

0. $e_k = \sin(\omega\cdot k\cdot T)$;

1. $e_k = \cos(\omega\cdot k\cdot T)$;

2. $e_k = 1_k$ - последовательность единичных дельта импульсов;

3. $e_k = 1_0$ - одиночный единичный дельта импульс.

**Условимся, что в данном случае переменная** $\Gamma$ **принимает значения в интервале** $(0,\ \ldots,\ 3)$**.**

**Вопросы контрольной работы №2:**

1. Укажите **выражение изображения** предложенного Вам дискретного воздействия:

0) $\dfrac{z}{z^2-2\cdot z\cdot\cos(\omega\cdot T)+1}=$

$$=\frac{z}{[d-\cos(\omega\cdot T)+j\cdot\sin(\omega\cdot T)]\cdot[d-\cos(\omega\cdot T)-j\cdot\sin(\omega\cdot T)]};$$

1) $\dfrac{z^2-z\cdot\cos(\omega\cdot T)}{z^2-2\cdot z\cdot\cos(\omega\cdot T)+1}=$

$$=\frac{z^2-z\cdot\cos(\omega\cdot T)}{[d-\cos(\omega\cdot T)+j\cdot\sin(\omega\cdot T)]\cdot[d-\cos(\omega\cdot T)-j\cdot\sin(\omega\cdot T)]};$$

2) $\dfrac{z}{z-1}$;

3) $1$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

2. Укажите вид **однородной части разностного уравнения** предложенной Вам дискретной системы:

0) $y_{k+2}-(1+d)\cdot y_{k+1}+d\cdot y_k$;

1) $y_{k+2}-2\cdot y_{k+1}+y_k$;

2) $y_{k+2} - 2 \cdot d \cdot y_{k+1} + d^2 \cdot y_k$;

3) $y_{k+2} - (d_1 + d_2) \cdot y_{k+1} + d_1 \cdot d_2 \cdot y_k$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

3. Укажите вид **неоднородной части разностного уравнения** предложенной Вам дискретной системы:

0) $e_k$;

1) $e_{k+1}$;

2) $e_{k+2} + b \cdot e_{k+1}$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

4. Укажите **фундаментальную систему решений** разностного уравнения предложенной Вам дискретной системы:

0) $C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot d^k = C_1 + C_2 \cdot d^k$;

1) $C_1 \cdot 1^k + C_2 \cdot k \cdot 1^k = C_1 + C_2 \cdot k$;

2) $C_1 \cdot d^k + C_2 \cdot k \cdot d^k$;

3) $C_1 \cdot d_1^k + C_2 \cdot d_2^k$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

5. Укажите **определитель Касорати**, построенный из фундаментальной системы решений разностного уравнения предложенной Вам дискретной системы:

0) $C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & d^{k+1} \\ 1^{k+2} & d^{k+2} \end{vmatrix}$;

1) $C = \begin{vmatrix} 1^{k+1} & (k+1) \cdot 1^{k+1} \\ 1^{k+2} & (k+2) \cdot 1^{k+2} \end{vmatrix}$;

2) $C = \begin{vmatrix} d^{k+1} & (k+1) \cdot d^{k+1} \\ d^{k+2} & (k+2) \cdot d^{k+2} \end{vmatrix}$;

3) $C = \begin{vmatrix} d_1^{k+1} & d_2^{k+1} \\ d_1^{k+2} & d_2^{k+2} \end{vmatrix}$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

6. По предложенной системной характеристике дискретной системы определить **начальное значение реакции системы,** как составляющую начальных условий разностного уравнения, **при подаче на вход последовательности единичных дельта импульсов** $1_k$ **:**

0) $v_0 = 0$;

1) $v_0 = 1$;

2) $v_0 = b$;

3) $v_0 = d$;

4) $v_0 = d_1$;

5) $v_0 = d_2$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

7. По предложенной системной характеристике дискретной системы определить **начальное значение первого смещения реакции системы,** как составляющую начальных условий разностного уравнения, **при подаче на вход последовательности единичных дельта импульсов** $1_k$ **:**

0) $v_1 = 0$;

1) $v_1 = 1$;

2) $v_1 = b + d + 1$;

3) $v_1 = b + 3$;

4) $v_1 = b + 2 \cdot d + 1$;

5) $v_1 = b + d_1 + d_2 + 1$.

**Алгоритм правильного ответа: Скрыт.**

# Приложение Б
# Экзаменационные вопросы компьютерной системы тестирования по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”

Представленные экзаменационные вопросы предназначены для автоматизированной компьютерной оценки степени усвоения материала. Программная реализация представленных вопросов позволяет реализовать обучающую подсистему по дисциплине “Прикладные математические методы в радиотехнике”. Всего **в списке 209 вопросов**. Вопросы могут быть использованы при подготовке к зачету. **Правильные ответы скрыты.**

1. Графическое отображение электрического соединения элементов соответствует понятиям:

а) цепи;
б) схемы;
в) эквивалентной модели;
г) устройства;
д) средства;
е) системы.

2. Полное математическое описание цепи предполагает задание уравнений:

а) компонентных и топологических;
б) только компонентных;
в) только топологических;
г) только законов Кирхгофа;
д) только законов Ома.

3. Компонентные уравнения устанавливают взаимосвязь:

а) электрических величин (токов и напряжений) на зажимах отдельно взятых элементов;
б) узлов подключения элементов;
в) электрических величин (токов и напряжений) и их производных на зажимах отдельно взятых элементов;
г) электрических величин на зажимах разных элементов;
д) типов элементов и их номиналов.

4. Топологические уравнения описывают взаимосвязь:

а) элементов в цепи (схеме, модели);
б) электрических величин на зажимах отдельно взятых элементов;
в) электрических величин на зажимах взаимосвязанных элементов;
г) типов элементов и их номиналов;
д) ветвей или элементов с узлами цепи.

5. Топология цепи, описанная в терминах теории графов, включает понятия:

а) ветви (ребра, хорды);

б) вершины (узла);

в) контура (главного контура);

г) сечения (главного сечения);

д) дерева.

6. Различают следующие модели элементов, устройств и систем:

а) математические;

б) физические;

в) эквивалентные;

г) функциональные;

д) структурные.

7. Независимые источники призваны отображать в моделях и схемах:

а) источники сторонних воздействий;

б) источники сигналов;

в) источники питания;

г) активность устройства;

д) усилительные способности.

8. Управляемые (зависимые) источники призваны отображать в моделях элементов и устройств:

а) пассивные свойства;

б) невзаимные свойства;

в) активные свойства;

г) реактивные свойства;

д) инерционные свойства.

9. Модели сигнала в частотной или временной области представляют собой:

а) управляемые источники;

б) независимые источники - как непрерывные функции частоты или времени;

в) независимые источники – как дискретные функции времени;

г) независимые источники, описывающие цифровую последовательность импульсов;

д) зависимые источники.

10. Тестовые сигналы, используемые при определении основных характеристик аналоговых устройств и систем радиотехники и связи:

а) гармоническое колебание $\sin(\omega \cdot t)$, $\cos(\omega \cdot t)$, $e^{j \cdot \omega \cdot t}$;

б) экспоненциальное воздействие $e^{\alpha \cdot t}$;

в) единичный скачок (функция Хевисайда) $1(t)$;

г) дельта - функция (функция Дирака) $\delta(t-0)=\delta(0)$;

д) последовательность треугольных либо прямоугольных импульсов.

11. Тестовые сигналы, используемые при определении основных характеристик дискретных и цифровых устройств и систем радиотехники и связи:

а) дискретное гармоническое колебание $\sin(\omega \cdot k \cdot T),\ \cos(\omega \cdot k \cdot T),\ e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$;

б) последовательность единичных дельта – импульсов $1(k)=1_k$;

в) одиночный единичный дельта – импульс $1(0)=1_0$;

г) дискретное экспоненциальное воздействие $e^{\alpha \cdot k \cdot T}$;

д) последовательность дискретных треугольных либо прямоугольных импульсов.

12. Математическая модель цепи, аналогового устройства, системы в частотной области:

а) система обыкновенных дифференциальных уравнений;

б) система дифференциальных уравнений в частных производных;

в) система линейных алгебраических уравнений;

г) система разностных уравнений;

д) система нелинейных алгебраических уравнений.

13. Алгебраические уравнения, как модель линейных устройств, в частотной области линейны относительно:

а) частоты;

б) времени;

в) переменных (напряжений и токов);

г) емкостей и индуктивностей;

д) зарядов и магнитных потоков.

14. Основными переменными линейных моделей устройств радиотехники и связи могут быть (являются):

а) токи и напряжения;

б) мощность;

в) падающие и отраженные волны;

г) частота и время;

д) емкости и индуктивности.

15. В качестве независимых переменных в радиотехнике и связи обычно выступают (используются):

а) токи и напряжения;

б) падающие и отраженные волны;

в) частота и время;
г) пространственные координаты;
д) модуль и фаза.

16. Аналитические методы решения систем линейных алгебраических уравнений:
а) Коши;
б) Лагранжа;
в) Крамера;
г) обращения матрицы коэффициентов;
д) последовательного исключения переменных ( метод Гаусса).

17. Классические методы формирования математической модели, в виде системы линейных алгебраических уравнений, по схеме (модели) устройства:
а) узловой;
б) контурный;
в) Крамера;
г) LU – и QR – факторизации;
д) Гаусса, Жордано (Джордано).

18. Порядок узловой системы уравнений определяется либо:
а) числом ветвей схемы;
б) числом независимых узлов;
в) числом независимых контуров;
г) числом ребер графа;
д) числом хорд графа.

19. Порядок контурной системы уравнений определяется:
а) числом ветвей схемы;
б) числом независимых узлов;
в) числом независимых контуров;
г) числом ребер графа;
д) числом хорд графа.

20. Понятие исходного состояния покоя, в общем случае, включает:
а) полное установление реакции на предыдущее воздействие;
б) отсутствие напряжений на конденсаторах;
в) отсутствие сторонних источников;
г) отсутствие токов катушек индуктивности;
д) отсутствие зарядов и магнитных потоков.

21. В частном случае пассивных устройств (за исключением дифференцирующих устройств) исходное состояние покоя совпадает по

смыслу с нулевыми начальными условиями и подразумевает отсутствие в начальный момент времени:

а) напряжений на конденсаторах;

б) токов катушек индуктивности;

в) сторонних источников;

г) зарядов и магнитных потоков;

д) линейных и нелинейных искажений.

22. Взаимосвязь оригиналов и изображений аналоговых и дискретных систем устанавливается преобразованиями:

а) эквивалентными;

б) Z- преобразованиями;

в) Лапласа (непрерывное и дискретное);

г) подобия;

д) Карсона.

23. Операторный (символический) метод анализа аналоговых цепей, устройств и систем:

а) основан на непрерывном преобразовании Лапласа;

б) использует операторное представление компонентных уравнений реактивных элементов;

в) оперирует с изображениями основных переменных (токов и напряжений);

г) вводит понятие передаточной функции системы;

д) позволяет описать преобразование и передачу сигнала аналоговыми системами простыми алгебраическими операциями.

24. В операторном методе базовой функцией описания аналоговых сигналов и систем является экспонента вида $e^{p\cdot t} = e^{(\sigma + j\cdot\omega)\cdot t} = e^{\sigma\cdot t} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$, где:

а) $t$ - переменная вещественной плоскости оригиналов:

б) $p = \sigma + j\cdot\omega$ - переменная комплексной плоскости изображений;

в) $e^{\sigma\cdot t}$ - изменение амплитуды со временем;

г) $e^{j\cdot\omega\cdot t}$ - изменение фазы со временем (гармонический осциллятор с частотой $\omega$).

25. Понятие передаточной характеристики (функции) аналоговой системы соответствует:

а) отношению оригиналов реакции и воздействия;

б) отношению изображений реакции и воздействия;

в) отношению оригинала реакции к изображению входного воздействия;

г) отношению изображения реакции к оригиналу входного воздействия;

при:

д) исходном состоянии покоя;

е) нулевых начальных условиях.

26. Переход от передаточной функции к частотной характеристике аналогового устройства осуществляется путем замены:

а) числителя на знаменатель;

б) комплексной переменной $p$ на $j \cdot \omega$, либо в дробно-рациональном представлении, либо в элементах матрицы коэффициентов системы;

в) дробно-рационального выражения целой частью от деления числителя на знаменатель;

г) дробно-рационального выражения остатком от деления числителя на знаменатель;

д) комплексной переменной $p$ на $e^{j \cdot \omega \cdot t}$.

27. Передаточная либо частотная функция (характеристика) аналоговой системы обычно представляется в виде:

а) правильной дробно-рациональной функции;

б) суммы элементарных дробно-рациональных функций;

в) собственных векторов и собственных значений матрицы коэффициентов системы;

г) отношений алгебраических дополнений матрицы коэффициентов системы;

д) корней характеристического уравнения.

28. Узловой и контурный метод дают представление передаточной функции цепи, устройства, системы в виде:

а) алгебраических дополнений матрицы коэффициентов системы;

б) отношений алгебраических дополнений матрицы коэффициентов системы;

в) произведений алгебраических дополнений матрицы коэффициентов системы;

г) собственных значений матрицы коэффициентов системы;

д) собственных векторов матрицы коэффициентов системы.

29. Под частотной характеристикой (ЧХ) аналоговых устройств; и систем находившихся:

а) в состоянии покоя;

б) в неопределенном состоянии;

понимается:

в) реакция;

г) установившаяся реакция;

на:

д) единичный скачок (функцию Хевисайда);

е) гармоническое воздействие;
и) дельта - функцию (функцию Дирака).

30. Частотная характеристика аналоговых устройств и систем, находившихся в состоянии покоя, соответствует, в общем случае, зависимости от частоты воздействия установившейся реакции цепи в виде напряжений или токов или их отношений при:

а) экспоненциальном воздействии;
б) воздействии прямоугольной последовательности импульсов;
в) гармоническом воздействии;
г) воздействии треугольной последовательности импульсов;
д) воздействии положительных импульсов синусоидальной формы.

31. Единичное гармоническое колебание используется в качестве тестового воздействия в силу следующих обстоятельств, оно:

а) соответствует единичному гармоническому воздействию в области оригиналов;
б) соответствует единичному гармоническому воздействию в частотной области;

кроме того, любое другое реальное воздействие может быть представлено комплексным спектром (суперпозицией гармонических колебаний определенной амплитуды частоты и фазы) и реакция линейной системы (выходной спектр колебаний) на произвольное воздействие при этом может быть определена по известной частотной характеристике в виде:

в) свертки входного спектра и частотной характеристики;
г) произведения входного спектра на частотную характеристику;
д) суммы реакций на каждую спектральную составляющую.

32. Удобство использования гармонического колебания в качестве тестового воздействия на линейную систему обусловлено тем, что:

а) гармоническое колебание имеет одинаковое описание во времени и частоте;
б) любое воздействие может быть представлено суперпозицией гармонических колебаний кратных частот (спектральных составляющих);

и реакция на выходе может быть определена:

в) суперпозицией реакций на каждую спектральную составляющую.

33. Представление любого воздействия во времени его частотным спектром (спектральной плотностью либо линейной суперпозицией гармонических составляющих на кратных частотах) соответствует:

а) интегральному преобразованию Лапласа для непериодического воздействия;
б) интегральному преобразованию Фурье для непериодического воздействия;
в) ряду Фурье для периодического воздействия;

г) дискретному преобразованию Лапласа для непериодического воздействия;

д) $Z$ - преобразованию для непериодического воздействия.

34. Изменение амплитуды установившейся реакции линейной системы от частоты гармонического воздействия соответствует:

а) амплидудно-частотной характеристике АЧХ;

б) амплитудной характеристике АХ;

в) фазо-частотной характеристике ФЧХ;

г) импульсной характеристике ИХ;

д) переходной характеристике ПХ.

35. Изменение задержки установившейся реакции линейной системы от частоты гармонического воздействия соответствует:

а) амплидудно-частотной характеристике АЧХ;

б) амплитудной характеристике АХ;

в) фазо-частотной характеристике ФЧХ;

г) импульсной характеристике ИХ;

д) переходной характеристике ПХ.

36. Частотная характеристика (ЧХ) устройств и систем в общем случае является:

а) вещественной функцией;

б) целой функцией;

в) комплексной функцией;

г) выпуклой функцией;

д) обобщенной функцией;

частоты.

37. Характеристическое уравнение аналоговой системы из дробно-рационального представления передаточной функции можно получить:

а) приравнивая числитель нулю;

б) приравнивая числитель единице;

в) приравнивая знаменатель нулю;

г) приравнивая знаменатель единице;

д) приравнивая числитель знаменателю.

38. Частотная характеристика (ЧХ) обычно представляется в виде:

а) амплитудно-частотной характеристики АЧХ;

б) фазо-частотной характеристики ФЧХ;

в) логарифмической амплитудно-частотной характеристики ЛАЧХ;

г) логарифмической фазо-частотной характеристики ЛФЧХ;

д) амплитудной характеристики АХ.

39. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) соответствует:

а) аргументу;
б) модулю;
в) логарифму;
г) экспоненте;
д) действительной части;
е) мнимой части;
частотной характеристики (ЧХ).

40. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) соответствует:
а) аргументу;
б) модулю;
в) логарифму;
г) экспоненте;
д) действительной части;
е) мнимой части;
частотной характеристики (ЧХ).

41. Различают следующие классические формы АЧХ аналоговых устройств и систем (например, фильтров):
а) типа фильтра нижних частот (ФНЧ);
б) типа фильтра верхних частот (ФВЧ);
в) типа полосно-пропускающего фильтра (ППФ);
г) типа полосно-заграждающего фильтра (ПЗФ);
д) типа квадрата (КФ);
е) типа эллипса (ЭФ).

42. Частотная характеристика аналоговых устройств и систем определяет:
а) условия самовозбуждения;
б) условия прохождения спектральных составляющих сигнала;
в) собственные частоты колебаний избирательных систем;
г) скорость затухания гармонических составляющих сигнала;
д) скорость распространения спектральных составляющих сигнала.

43. Различают следующие вторичные параметры АЧХ аналоговых устройств и систем:
а) полоса пропускания;
б) граничная частота;
в) полоса заграждения;
г) тактовая частота;
д) частота дискретизации.

44. Понятие граничной частоты АЧХ апериодического устройства связано с параметрами цепи или модели, через:
а) число реактивных элементов модели;

б) волновое сопротивление;
в) постоянную времени;
г) эквивалентную постоянную времени;
д) частоту резонанса.

45. Граничная частота (стандартное определение) соответствует частоте, на которой значение АЧХ:
а) изменяется на 3 дБ по отношению к средним частотам;
б) начинает отклоняться в сторону увеличения либо уменьшения;
в) пересекает ось ординат, то есть, равно нулю;
г) принимает значение единица;
д) либо частоте первого излома ЛАЧХ.

46. Постоянная времени соответствует времени изменения либо:
а) напряжения на конденсаторе RC- цепи;
б) тока катушки индуктивности RL- цепи;
в) мощности RLC- цепи;
ровно:
г) в e раз;
д) в два раза;
е) в десять раз;
после скачкообразного изменения соответствующей переменной.

47. Для простейших интегрирующих и дифференцирующих RC- или RL- цепей - постоянная времени определяется выражениями:
а) $\tau = R \cdot C$;
б) $\tau = R \cdot L$;
в) $\tau = R / C$;
г) $\tau = R / L$;
д) $\tau = C / R$;
е) $\tau = L / R$.

48. Для простейших интегрирующих и дифференцирующих RC- или RL- цепей - граничная частота определяется выражениями:
а) $\omega_g = \tau$;
б) $\omega_g = \tau^{-1}$;
в) $\omega_g = 1/\tau$;
г) $\omega_g = 0.35 \cdot \tau$;
д) $\omega_g = 2.2 \cdot \tau$.

49. Система линейных алгебраических уравнений это совокупность уравнений устанавливающих соответствие линейных суперпозиций:
а) степеней одной переменной;

б) переменных;

в) производных первого порядка от переменных;

г) первых $n$ производных от переменных;

д) экспонент переменных;

и их значений.

50. Коэффициенты линейных суперпозиций переменных, образующих алгебраическую систему уравнений, соответствуют:

а) вектору неизвестных;

б) вектору свободных членов;

в) матрице коэффициентов системы;

г) собственным частотам колебаний моделируемой системы;

д) амплитудам собственных колебаний моделируемой системы.

51. Переменные линейных суперпозиций, образующих алгебраическую систему уравнений, соответствуют:

а) вектору неизвестных;

б) вектору свободных членов;

в) матрице коэффициентов системы;

г) собственным частотам колебаний моделируемой системы;

д) амплитудам собственных колебаний моделируемой системы.

52. Значения линейных суперпозиций переменных, образующих алгебраическую систему уравнений, соответствуют:

а) вектору неизвестных;

б) вектору свободных членов;

в) матрице коэффициентов системы;

г) собственным частотам колебаний моделируемой системы;

д) амплитудам собственных колебаний моделируемой системы.

53. Система линейных алгебраических уравнений (неоднородная) устанавливает соответствие:

а) входного вектора неизвестных и вектором производных первого порядка от этих неизвестных (первой производной этого вектора);

б) входного вектора неизвестных и вектором суммы первых производных до $n$ - го порядка от неизвестных;

в) входного вектора неизвестных и производной заданного вектора свободных членов;

г) входного вектора неизвестных и заданного вектора свободных членов;

д) производной входного вектора неизвестных и заданного вектора свободных членов.

54. Система линейных алгебраических уравнений, в общем случае может:

а) не иметь решений;

б) иметь бесконечное множество решений;

в) иметь единственное решение.

55. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение если:

а) определитель матрицы коэффициентов системы отличен от нуля;

б) ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы, то есть матрицы, дополненной вектором свободных членов;

в) вектор свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы коэффициентов системы;

г) строки и столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы;

д) строки либо столбцы матрицы не представимы линейной комбинацией других строк или столбцов.

56. Однородная система линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений, совпадает с числом неизвестных, имеет нетривиальное, то есть отличное от нуля решение, если

а) определитель матрицы коэффициентов системы равен нулю;

б) число уравнений (неизвестных) больше ранга матрицы коэффициентов;

в) ранг матрицы коэффициентов меньше порядка (размерности) матрицы;

г) некоторые строки и столбцы матрицы линейно зависимы;

д) некоторые строки и столбцы матрицы являются линейной комбинацией других строк и столбцов.

57. Проблема собственных значений и векторов системы линейных алгебраических уравнений заключается в определении:

а) собственных векторов;

б) собственных значений;

в) собственного базиса;

г) корней характеристического уравнения;

д) канонического представления матрицы системы.

58. Собственные вектора матрицы коэффициентов системы соответствуют векторам, которые при действии на них матрицы, как линейного оператора:

а) остаются коллинеарными, то есть произвольно изменяют длину, а направление сохраняют;

б) произвольно меняют длину и направление;

в) произвольно изменяют направление, а длину сохраняют;

г) сохраняют длину и направление;

д) не изменяют длину и направление.

59. Собственные значения матрицы коэффициентов системы соответствуют:

а) масштабным коэффициентам деформации;

б) нормам;

в) направлениям;

г) модулям;

д) аргументам;

собственных векторов при действии на них матрицы, как линейного оператора.

60. Модальная матрица коэффициентов системы соответствует:

а) матрице алгебраических дополнений элементов исходной матрицы;

б) матрице собственных векторов как столбцов;

в) матрице векторов собственного базиса как столбцов;

г) матрице обратной исходной;

д) транспонированной исходной матрице.

61. Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов линейной системы соответствует:

а) определителю исходной матрицы, приравненному нулю;

б) определителю характеристической матрицы, приравненному нулю $\det(A-\Lambda)=|A-\Lambda|=0$;

в) определителю обратной матрицы, приравненному нулю;

г) определителю транспонированной исходной матрицы, приравненному нулю;

д) определителю эрмитово-сопряженной матрицы, приравненному нулю.

62. Собственные значения матрицы коэффициентов системы соответствуют:

а) диагональным элементам исходной матрицы;

б) корням характеристического уравнения;

в) диагональным элементам обратной матрицы коэффициентов

г) диагональным элементам матрицы алгебраических дополнений;

д) логарифмам корней характеристического уравнения.

63. Собственные вектора матрицы коэффициентов системы определяются:

а) алгебраическими дополнениями матрицы $A-\Lambda_i$ , по элементам, какого либо столбца;

б) решениями однородных систем уравнений вида $A-\Lambda_i \ \cdot h_i=0$;

в) алгебраическими дополнениями исходной матрицы, по элементам, какого либо столбца;

г) алгебраическими дополнениями обратной матрицы, по элементам, какого либо столбца;

д) алгебраическими дополнениями транспонированной исходной матрицы, по элементам, какого либо столбца;

с точностью до произвольного коэффициента.

64. Собственные вектора и значения определяют каноническое разложение невырожденной матрицы коэффициентов линейной алгебраической системы уравнений в виде:

а) $A = H \cdot \Lambda \cdot H^{-1}$;

б) $A = H^{-1} \cdot \Lambda \cdot H$;

в) $A = H \cdot \Lambda \cdot H$;

г) $A = H^{-1} \cdot \Lambda \cdot H^{-1}$;

д) $A = H \cdot \Lambda \cdot H^{t}$.

65. Невырожденная матрица коэффициентов линейной алгебраической системы уравнений принимает канонический вид в собственном базисе в соответствии с выражением:

а) $\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H$;

б) $\Lambda = H \cdot A \cdot H^{-1}$;

в) $\Lambda = H \cdot A \cdot H$;

г) $\Lambda = H^{-1} \cdot A \cdot H^{-1}$;

д) $\Lambda = H^{t} \cdot A \cdot H$.

66. Аналитическая функция матричного аргумента, в случае отличных от нуля и взаимно различных собственных значений, может быть определена на основании канонического разложения матрицы в виде:

а) $F(A) = H^{-1} \cdot F(\Lambda) \cdot H$;

б) $F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{-1}$;

в) $F(A) = F(H) \cdot \Lambda \cdot F(H^{-1})$

г) $F(A) = H^{t} \cdot F(\Lambda) \cdot H$;

д) $F(A) = H \cdot F(\Lambda) \cdot H^{t}$.

67. Интегральное преобразование Лапласа, как основной аппарат операционного исчисления, включает свойства и теоремы:

а) линейности;

б) теоремы о смещении и сдвиге оригинала (изображения);

в) теоремы о дифференцировании оригинала (изображения);

г) теоремы о свертке оригиналов (изображений);

д) теоремы о предельных значениях оригинала.

68. Интегральное преобразование Лапласа вобрало в себя следующие разделы математики (математического анализа):

а) теории функций комплексного переменного;

б) интегрирование вещественных и комплексных функций;

в) интегрирование по контуру на комплексной плоскости;

г) операционное исчисление;

д) теорию вычетов.

69. Интегральное преобразование Лапласа устанавливает взаимосвязь:

а) вещественных функций оригиналов и комплексных функций изображений;

б) пространства оригиналов и пространства изображений;

в) функций времени и функций частоты;

г) функций пространственной переменной и функций пространственной частоты;

д) функций вещественной переменной и функций комплексной переменной.

70. Интегральное, прямое и обратное преобразование Лапласа, устанавливают взаимосвязь:

а) функций оригинала;

б) производных функций оригинала;

в) интегралов функций оригинала;

г) предельных значений функции оригинала;

д) масштабных изменений функций оригинала;

и их изображений.

71. Условия существования прямого классического преобразования Лапласа:

а) функция оригинал определена и непрерывна на всей вещественной оси, за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода;

б) значение оригинала равно нулю при аргументе равном нулю;

в) функция оригинала нарастает медленнее любой наперед заданной показательной функции;

г) предел изображения при аргументе, стремящемся к бесконечности, равен нулю.

72. Основные теоремы операционного исчисления основанного на преобразовании Лапласа:

а) о преобразовании суммы;

б) о дифференцировании;

в) об интегрировании

г) о смещении и сдвиге;

д) о свертке;
функций оригиналов или изображений.

73. Способы выполнения обратного преобразования Лапласа:
а) прямое вычисление контурного интеграла;
б) использование теоремы о вычетах;
в) использование теорем разложения;
г) разложение на элементарные дроби;
д) использование таблиц.

74. Операторная алгебра, разработанная Яном Микусинским и Лораном Шварцем, призвана:

а) распространить операционное исчисление на обобщенные функции (распределения) типа единичного скачка (функции Хевисайда) и дельта - функцию и ее производные;

б) формализовать аналитические преобразования с обобщенными функциями;

в) расширить область применения операционного исчисления на обобщенные функции, не удовлетворяющие условиям существования (традиционного) классического преобразования Лапласа;

г) обеспечить возможность аналитических преобразований неправильных дробно-рациональных функций.

75. Теорема о дифференцировании оригинала утверждает, что:

а) производной оригинала в области изображений соответствует умножение изображения оригинала на $p$, минус начальное значение оригинала при стремлении к нулю справа;

б) повторное применение этой теоремы дает правило преобразования Лапласа при кратном дифференцировании оригинала;

в) производной оригинала в области изображений соответствует умножение изображения на $p$, плюс начальное значение оригинала при стремлении к нулю справа;

г) производной оригинала в области изображений соответствует изображение, минус начальное значение оригинала при стремлении к нулю справа.

76. Теорема о начальном значении оригинала непрерывной функции утверждает, что:

а) начальное значение оригинала, как предел при стремлении оригинала к нулю справа, может быть вычислен как предел при $p \to \infty$ от изображения умноженного на $p$;

б) повторное применение этой теоремы дает правило определения начальных значений производных оригинала;

причем, если при очередном умножении на $p$, получается неправильная дробно-рациональная функция и формально предел равен бесконечности, то для выделения конечных составляющих предела, необходимо путем последовательного деления числителя на знаменатель, найти целую часть и остаток, при этом:

в) целые части от деления дают бесконечные составляющие начального значения в виде дельта - функции и ее производных;

г) остаток от деления в виде правильной дробно-рациональной функции дает конечные составляющие начального значения.

77. Единичный скачок или функция Хевисайда:

а) равна нулю, при $t<0$;

б) не определена, при $t=0$;

в) равна единице, при $t>0$.

78. Дельта - функция или функция Дирака:

а) равна нулю, при $t<0$;

б) равна бесконечности, при $t=0$;

в) равна нулю, при $t>0$.

79. Другие определения дельта - функции:

а) интеграл от дельта - функции в бесконечно малой окрестности равен единице;

б) дельта - функция есть производная от функции Хевисайда;

в) дельта - функция может быть получена как предел любой функции, область определения которой стремиться к нулю, а интеграл, то есть площадь под функцией стремиться к единице.

80. Преобразования Лапласа обобщенных функций, на основании операторной алгебры, можно определить следующим образом:

а) оригиналу, в виде функции Хевисайда $1(t)$, соответствует изображение вида $1/p$;

б) оригиналу, в виде дельта - функции $\delta(t-0)=\delta(0)$, соответствует изображение вида $1$;

в) оригиналу, в виде производной дельта - функции $\delta^{'}(t-0)=\delta^{'}(0)$, соответствует изображение вида $p$;

г) оригиналу, в виде второй производной - функции $\delta^{''}(t-0)=\delta^{''}(0)$, соответствует изображение вида $p^2$;

д) оригиналу, в виде $n$- ной производной дельта - функции $\delta^{(n)}(t-0)=\delta^{(n)}(0)$, соответствует изображение вида $p^n$.

81. Преобразования Лапласа гармонических функций определяются следующим образом:

а) оригиналу, в виде синусоидального воздействия $\sin(\omega \cdot t)$, соответствует изображение вида $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

б) оригиналу, в виде косинусоидального воздействия $\cos(\omega \cdot t)$, соответствует изображение вида $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

в) оригиналу, в виде гармонического осциллятора $e^{j \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)$, соответствует изображение вида $\dfrac{p}{p^2+\omega^2} + j \cdot \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} = \dfrac{p + j \cdot \omega}{p^2+\omega^2} = \dfrac{1}{p - j \cdot \omega}$;

82. Понятие переходной характеристики (функции) аналоговой системы соответствует:

а) реакция системы;

б) установившаяся реакция системы;

находящейся в:

в) произвольном состоянии;

г) состоянии покоя;

на:

д) единичное гармоническое воздействие;

е) единичный скачок (функцию Хевисайда);

ж) дельта - функцию (функцию Дирака).

83. Понятие импульсной характеристики (функции) аналоговой системы соответствует:

а) реакция системы;

б) установившаяся реакция системы;

находящейся в:

в) произвольном состоянии;

г) состоянии покоя;

на:

д) единичное гармоническое воздействие;

е) единичный скачок (функцию Хевисайда);

ж) дельта - функцию (функцию Дирака).

84. Связь переходной и импульсной характеристик устанавливается на основании теоремы о дифференцирования оригинала соотношением:

а) $g(t) = h^{'}(t) - \delta(0) \cdot h(0)$;

б) $g(t) = h^{'}(t) + \delta(0) \cdot h(0)$;

в) $h(t) = g^{'}(t) + \delta(0) \cdot g(0)$;

г) $h(t) = g^{'}(t) + \delta(0) \cdot g(0)$.

85. Связь передаточной и импульсной характеристик и частотной и импульсной характеристик устанавливается, соответственно, преобразованиями Лапласа и Фурье:

а) $K(p) = \int\limits_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{p \cdot t} dp$;

б) $K(p) = \int\limits_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{-p \cdot t} dp$;

в) $K(j \cdot \omega) = \int\limits_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} d\omega$;

г) $K(j \cdot \omega) = \int\limits_{0}^{\infty} g(t) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega$.

86. Переходные характеристики (функции) интегрирующей и дифференцирующей RC- и RL- цепей устанавливаются соотношениями:

а) $h(t) = (1 - e^{-\alpha \cdot t})$;

б) $h(t) = (1 + e^{-\alpha \cdot t})$;

в) $h(t) = e^{-\alpha \cdot t}$;

г) $h(t) = e^{-\alpha \cdot t} - 1$.

87. Импульсные характеристики (функции) интегрирующей и дифференцирующей RC- и RL- цепей устанавливаются соотношениями:

а) $g(t) = (1 - e^{-\alpha \cdot t})$;

б) $g(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t}$;

в) $g(t) = e^{-\alpha \cdot t}$;

г) $g(t) = -\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} + \delta(0)$.

88. Переходная функция характеризует:
а) широкополосность;
б)) быстродействие (инерционность);
в) чувствительность;
г) стабильность;
устройства через реакцию на мгновенный перепад в виде единичного скачка с использованием понятия времени нарастания.

89. Импульсная функция характеризует:

а) широкополосность;

б)) быстродействие (инерционность);

в) чувствительность;

г) стабильность;

устройства через реакцию на мгновенный бесконечный импульс в виде дельта - функции с использованием понятия времени релаксации.

90. Использование единичного скачка в качестве тестового воздействия обусловлено следующими факторами:

а) соответствует единичному воздействию в области оригиналов;

б) соответствует единичному воздействию в области изображений;

кроме того, любое другое реальное воздействие может быть представлено суперпозицией взвешенных скачков со сдвигами по времени и реакция линейной системы на произвольное воздействие при этом может быть определена по известной переходной характеристике с использованием:

в) формулы Остроградского-Гаусса;

г) интеграла Дюамеля;

д) формулы Коши.

91. Использование дельта - импульса в качестве тестового воздействия обусловлено следующими факторами:

а) соответствует единичному воздействию в области оригиналов;

б) соответствует единичному воздействию в области изображений;

кроме того, любое другое реальное воздействие может быть представлено суперпозицией взвешенных дельта - импульсов со сдвигами по времени и реакция линейной системы на произвольное воздействие при этом может быть определена по известной импульсной характеристике с использованием:

в) формулы Стокса;

г) интеграла свертки;

д) формулы Грина.

92. Время нарастания переходной характеристики простейших RC- или RL- цепи при подаче на вход единичного скачка соответствует времени изменения реакции:

а) от уровня 0 до установившегося значения, то есть 1;

б) от уровня 0 до уровня 0.5 от установившегося значения;

в) от уровня 0.1 до уровня 0.9 от установившегося значения;

и связано с параметрами цепи соотношением:

г) $t_n \approx (3 \div 5) \cdot \tau$;

д) $t_n \approx 2.2 \cdot \tau$

е) $t_n \approx \tau$.

93. В качестве математической модели аналоговой цепи, устройства, системы во временной области, в общем случае, используется:

а) система линейных алгебраических уравнений (для линейных цепей);

б) система обыкновенных дифференциальных уравнений (для сосредоточенных цепей);

в) система дифференциальных уравнений в частных производных (для распределенных цепей);

г) система нелинейных алгебраических уравнений (для нелинейных цепей).

94. Методы аналитического решения (интегрирования) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

а) Крамера;

б) операторный;

в) вариации произвольных постоянных (Лагранжа);

г) Коши (представление решения в форме Коши);

д) неопределенных коэффициентов;

е) разделения переменных.

95. Переход от передаточной функции аналоговой системы к дифференциальному уравнению относительно выходной переменной (реакции) осуществляется путем:

а) выражения изображения реакции в виде произведения изображения входного воздействия на функцию передачи;

б) замены изображений оригиналами;

в) замены в дробно-рациональном выражении передаточной функции комплексной переменной $p$ оператором дифференцирования $d/dt$;

в предположении нулевых начальных условий, а истинные начальные условия учитываются при интегрировании.

96. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) представляет собой в общем случае уравнение связи либо:

а) нескольких неизвестных функций одной независимой переменной и их производных (в случае системы ОДУ);

б) производных неизвестной функции;

в) неизвестной функции и ее производных;

г) производных известной функции;

д) известной функции и ее производных.

97. Дифференциальное уравнение с отличной от нуля правой частью называется:

а) однородным;

б) неоднородным;

в) нелинейным;

г) приведенным;
д) нормированным.

98. Правая часть неоднородного дифференциального уравнения соответствует:
а) неизвестной функции;
б) производным неизвестной функции;
в) известной функции и определяется воздействием на систему;
г) нулю;
д) известной функции и ее производным.

99. Порядок обыкновенного дифференциального уравнения определяется:
а) разностью старшей и младшей степеней производных неизвестной функции;
б) старшей степенью производной неизвестной функции;
в) суммой степеней производных неизвестной функции;
г) начальным значением функции решения;
д) начальным значением производной функции решения.

100. Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение, означает найти:
а) корни характеристического уравнения;
б) неизвестную функцию;
в) производную внешнего воздействия на систему;
г) интеграл внешнего воздействия на систему;
д) начальные условия.

101. Уравнение связи, то есть дифференциальное уравнение позволяет определить лишь:
а) частное решение;
б) общее решение;
в виде:
в) одной интегральной кривой в области определения решения;
г) семейства интегральных кривых в области определения решения.

102. Для определения частного решения необходимо с помощью либо:
а) независимых дополнительных условий;
б) начальных условий;
определить точку в пространстве решений:
в) выделяющую конкретную интегральную кривую;
г) тривиальное решение;
д) семейство интегральных кривых.

103. Для определения частного решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $n$, необходимо задать либо:

а) значения функции и ее первых производных до $(n-1)$- го порядка в любой точке пространства решений;

б) начальные значения функции решения и ее первых производных до $(n-1)$- го порядка;

в) значения функции в $n$ точках пространства решений;

г) начальные значения производных функции до $n$- го порядка;

д) значения производных функции до $n$- го порядка в любой точке пространства решений.

104. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях заключается в определении:

а) решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям;

б) корней характеристического уравнения;

в) условий существования решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям;

г) постоянных интегрирования;

д) фундаментальных решений.

105. Согласно теореме Коши, существование и единственность решения обыкновенного дифференциального уравнения, как функции:

а) независимой переменной;

б) зависимой переменной (неизвестной функции);

в) первых производных зависимой переменной до $(n-1)$- го порядка;

при условии:

г) определения и непрерывности этой функции (дифференциального уравнения) в $(n+1)$- мерной открытой области D вместе со своими производными по зависимой переменной и ее $(n-1)$- й производной;

для любой точки M, определяемой начальными условиями и, принадлежащей области D в некоторой ее окрестности, существует единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

106. Краевая задача, в отличие, от задачи Коши с начальными условиями состоит в определении решений дифференциальных уравнений удовлетворяющих условиям на концах заданного промежутка изменения независимой переменной и при этом краевая задача

а) может иметь несколько решений;

б) не иметь решений;

в) иметь единственное решение.

107. Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, в которое:

а) неизвестная функция и ее производные входят линейно (в первой степени);

б) неизвестная функция и ее производные входят квадратично (во второй степени);

и, коэффициенты которого являются либо:

в) константами;

г) степенными полиномами первого порядка независимой переменной;

д) линейными функциями независимой переменной.

108. Нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение в которое:

а) неизвестная функция и ее производные входят нелинейно;

б) неизвестная функция и ее производные входят линейно (в первой степени);

и, коэффициенты которого являются либо:

в) полиномами независимой переменной;

г) нелинейными функциями независимой переменной;

д) константами.

109. Различают обыкновенные дифференциальные уравнения:

а) с постоянными коэффициентами;

б) с переменными коэффициентами;

в) с линейными коэффициентами;

г) с периодическими коэффициентами;

д) с нелинейными коэффициентами.

110. Характеристическое уравнение системы может быть определено по однородной части дифференциального уравнения путем замены функции и ее производных:

а) экспонентами;

б) логарифмами;

в) переменной соответствующей степени;

г) начальными значениями;

д) граничными значениями.

111. Корни характеристического уравнения определяют:

а) фундаментальную систему решений однородного уравнения;

б) фундаментальную систему решений неоднородного уравнения;

в) систему независимых решений однородного уравнения;

г) систему тривиальных решений однородного уравнения;

д) систему тривиальных решений неоднородного уравнения.

112. Условием независимости системы фундаментальных решений обыкновенного однородного дифференциального уравнения является:

а) отсутствие нулевых корней характеристического уравнения;

б) отсутствие кратных корней характеристического уравнения;

в) отличие от нуля определителя Вандермонда;

г) отличие от нуля определителя Вронского;

д) равенство нулю определителя характеристической матрицы.

113. Определитель Вронского строится построчно:

а) из фундаментальных решений и их производных до $(n-1)$- го порядка;

б) из экспонент фундаментальных решений и их производных до $(n-1)$ - го порядка;

в) из натуральных логарифмов фундаментальных решений и их производных до $(n-1)$- го порядка;

г) корней характеристического уравнения и их степеней до $(n-1)$- го порядка;

д) из собственных векторов.

114. Корни характеристического уравнения для аналоговых систем физически соответствуют:

а) формам (типам) собственных колебаний системы;

б) амплитудам собственных колебаний системы;

в) частотам собственных колебаний системы;

г) набору постоянных времени системы;

д) возможным задержкам реакции системы.

115. Фундаментальные решения однородного дифференциального уравнения определяется корнями характеристического уравнения $\alpha_i$, а именно:

а) $\ln(\alpha_i \cdot t)$ для различающихся корней;

б) $\ln(\alpha_i \cdot t),\ t \cdot \ln(\alpha_i \cdot t),\ t^2 \cdot \ln(\alpha_i \cdot t),\ \ldots,\ t^{k-1} \cdot \ln(\alpha_i \cdot t)$ для корня кратности $k$;

в) $\exp(-\alpha_i \cdot t)$ для различающихся корней;

г) $\exp(-\alpha_i \cdot t),\ t \cdot \exp(-\alpha_i \cdot t),\ t^2 \cdot \exp(-\alpha_i \cdot t),\ \ldots,\ t^{k-1} \cdot \exp(-\alpha_i \cdot t)$ для корня кратности $k$;

д) $\sin(\alpha_i \cdot t)$ для различающихся корней;

е) $\cos(\alpha_i \cdot t),\ t \cdot \cos(\alpha_i \cdot t),\ t^2 \cdot \cos(\alpha_i \cdot t),\ \ldots,\ t^{k-1} \cdot \cos(\alpha_i \cdot t)$ для корня кратности $k$.

116. Согласно общей теории дифференциальных уравнений, общее решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой:

а) систему фундаментальных решений;

б) линейную суперпозицию постоянных и фундаментальных решений $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(t)$;

в) линейную суперпозицию варьируемых постоянных и фундаментальных решений $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot y_i(t)$;

г) линейную суперпозицию постоянных и корней характеристического уравнения $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \alpha_i$;

д) линейную суперпозицию постоянных и начальных условий $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y^{(n-1)}(0)$.

117. Согласно общей теории дифференциальных уравнений, частное решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения находиться путем определения постоянных общего решения, используя либо:

а) определяющую систему уравнений;

б) начальные условия;

в) независимые дополнительные условия;

г) наложение ограничений на рост порядка производных;

д) операцию интегрирования общего решения.

118. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой:

а) систему фундаментальных решений;

б) линейную суперпозицию постоянных и фундаментальных решений $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(t)$;

в) линейную суперпозицию варьируемых постоянных и фундаментальных решений $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot y_i(t)$;

г) линейную суперпозицию постоянных и корней характеристического уравнения $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \alpha_i$;

д) линейную суперпозицию постоянных и начальных условий $y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y^{(n-1)}(0)$.

119. Согласно методу Лагранжа, частное решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения находится путем определения варьируемых постоянных общего решения, используя:

а) подстановку предполагаемого общего решения в исходное уравнение и наложение ограничений на рост порядка производных варьируемых постоянных;

б) построение и решение определяющей системы уравнений;

в) интегрирование выражений производных варьируемых постоянных с точностью до постоянных интегрирования;

а определение постоянных интегрирования производится с использованием:

г) либо начальных условий;

д) либо независимых дополнительных условий.

120. В общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений утверждается, что:

а) частное решение неоднородного уравнения определяется суммой частного решения однородного уравнения и общего решения неоднородного уравнения;

б) общее решение неоднородного уравнения определяется суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения;

или с физической точки зрения:

в) реакция на выходе аналоговой динамической системы определяется суммой свободных колебаний системы обусловленных начальными условиями и вынужденных колебаний обусловленных внешним воздействием на систему;

г) реакция на выходе аналоговой динамической системы определяется суммой переходного процесса обусловленного начальными условиями и внешним воздействием и установившегося (стационарного) процесса обусловленного внешним воздействием.

121. Система обыкновенных дифференциальных уравнений представляет в общем случае совокупность уравнений связи:

а) нескольких неизвестных функций разных независимых переменных;

б) нескольких неизвестных функций и их производных одной независимой переменной;

в) одной неизвестных функций разных независимых переменных;

г) нескольких неизвестных функций и их производных разных независимых переменных;

д) одной неизвестной функции и ее производных одной независимой переменной.

122. Обыкновенное дифференциальное уравнение $n$- го порядка может быть преобразовано в эквивалентную систему $n$ дифференциальных уравнений первого порядка путем последовательной замены:

а) неизвестной функции и ее производных до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) от новых независимых переменных;

б) неизвестной функции и ее производных до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) той же независимой переменной;

в) аргументов неизвестной функции и ее производных до $(n-1)$- го порядка новыми независимыми переменными;

г) производных неизвестной функции от нулевого до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) той же независимой переменной.

122. Основное отличие обыкновенного дифференциального уравнения от уравнений в частных производных заключается в том, что:

а) обыкновенное дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную;

б) обыкновенное дифференциальное уравнение имеет пару независимых переменных;

в) дифференциальное уравнение в частных производных имеет несколько независимых переменных;

г) дифференциальное уравнение в частных производных имеет более трех независимых переменных;

д) дифференциальное уравнение в частных производных не имеет независимых переменных.

124. Операторный метод интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения заключается в:

а) замене функций оригиналов и их производных изображениями с учетом начальных значений по теореме о дифференцировании оригиналов;

б) приведении подобных членов и выражении изображения неизвестной функции (решения);

в) нахождении оригинала неизвестной функции (решения) обратным преобразованием Лапласа ее изображения;

причем, обычно, обратное преобразование Лапласа осуществляется либо с использованием:

г) вычетов;

д) таблиц.

125. Расчет временных характеристик аналоговых устройств по известной схеме (модели) заключается в:

а) получении передаточной характеристики;

б) выражении изображения реакции;

в) нахождении оригинала реакции (решения) обратным преобразованием Лапласа ее изображения;

причем, обычно, обратное преобразование Лапласа осуществляется либо с использованием:

г) вычетов;

д) таблиц.

126. Метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа, применительно к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается в:

а) записи общего решения неоднородного дифференциального уравнения в виде линейной суперпозиции варьируемых постоянных и фундаментальных решений однородного уравнения;

б) формировании разрешающей системы Лагранжа путем наложения ограничений на рост порядка производных варьируемых постоянных при нахождении производных общего решения с целью подстановки в исходное уравнение;

в) определении производных варьируемых постоянных из разрешающей системы Лагранжа;

г) интегрировании выражений производных варьируемых постоянных с точностью до постоянных интегрирования;

д) определении постоянных интегрирования из дополнительных независимых условий, например, начальных.

127. Определяющая (разрешающая) система уравнений Лагранжа для обыкновенных дифференциальных уравнений строится путем:

а) наложения ограничений на рост порядка производных варьируемых постоянных (неизвестных функций) выше первого;

б) наложения ограничений на рост порядка производных варьируемых постоянных (неизвестных функций) выше второго;

в) подстановки производных общего решения с учетом наложенных ограничений в исходное уравнение;

и представляет собой:

г) систему линейных алгебраических уравнений относительно производных варьируемых постоянных;

д) систему линейных алгебраических уравнений относительно варьируемых постоянных.

128. Представление решения обыкновенного дифференциального уравнения в форме Коши, в общем случае, заключается в:

а) предварительном преобразовании исходного обыкновенного дифференциального уравнения $n$- го порядка в эквивалентную систему $n$ дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных вместо неизвестной функции и ее производных;

б) применении формулы Коши для выражения частного решения уравнения с использованием начальных условий и экспоненциальных функций от матрицы коэффициентов эквивалентной системы;

причем:

в) вектор функций (решений) соответствует исходной функции и ее производным до $(n-1)$ - го порядка;

г) вектор правой части системы содержит в качестве последней компоненты правую часть исходного уравнения;

д) матрица коэффициентов системы имеет вполне определенный вид, обусловленный заменой переменных.

129. Для использования представления аналитического решения дифференциального уравнения в форме Коши в случае нулевых и кратных корней характеристического уравнения (вырожденный случай) предлагается:

а) положить корни различными;

б) довести аналитическое решение до конца;

г) осуществить предельный переход полученного решения к реальным значениям корней.

130. Основными блоками функциональных схем аналоговых устройств и систем являются:

а) сумматоры;

б) умножители;

в) интеграторы;

г) триггеры:

д) масштабирующие звенья;

е) детекторы.

131. Дискретными называются системы, реагирующие на входное воздействие:

а) непрерывно;

б) в определенные моменты времени;

а их математическое описание осуществляется:

в) дискретными (решетчатыми) функциями времени;

г) на основе дифференциального и интегрального исчислений;

д) на основе исчисления конечных разностей.

132. Дискретными называются сигналы, существующие:

а) непрерывно по времени;

б) в определенные моменты времени;

а их математическое описание осуществляется:

в) дискретными (решетчатыми) функциями времени;

г) на основе дифференциального и интегрального исчислений;

д) на основе исчисления конечных разностей.

133. Импульсные сигналы, в виде последовательности импульсов, чаще всего прямоугольной формы, как промежуточный класс сигналов между аналоговыми и дискретными сигналами, могут содержать информацию:

а) в амплитуде импульсной последовательности (АИМ);

б) в относительном временном положении импульсов в последовательности (ВИМ);

в) в длительности импульсов в последовательности (ШИМ);

г) в кодовой последовательности импульсов (КИМ).

134. Цифровые сигналы, являясь разновидностью дискретных сигналов, предполагают преобразование отсчетов аналогового сигнала в цифровую последовательность импульсов по принципу:

а) наличие сигнала передавать последовательностью единичных импульсов, а отсутствие – последовательностью импульсов нулевой амплитуды;

б) представление дискретного значения сигнала двоичной последовательностью коротких импульсов определенной разрядности;

в) наличие сигнала передавать последовательностью единичных импульсов положительной полярности, а отсутствие – последовательностью единичных импульсов отрицательной полярности;

г) представление дискретного значения сигнала выше порогового уровня последовательностью единичных импульсов, а ниже – последовательностью импульсов нулевой амплитуды;

д) представление дискретного значения сигнала выше порогового уровня последовательностью единичных импульсов положительной полярности, а ниже – последовательностью единичных импульсов отрицательной полярности.

135. Преобразование аналогового сигнала в цифровой предполагает:

а) операцию дискретизации (выборки) значения сигнала в дискретные моменты времени с шагом или периодом $T$;

б) квантование по уровням - представление дискретных значений значениями ближайшего уровня квантования;

в) «оцифровку» – представление квантованного дискретного значения двоичной последовательностью импульсов определенной разрядности.

136. Дискретизацию по времени и квантование по уровням аналогового сигнала можно осуществить с помощью:

а) мультивибратора;

б) управляемого ключа (коммутатора);

в) триггера;

г) компаратора;

д) сумматора.

137. Простейшими преобразователями дискретного сигнала в аналоговый сигнал являются:

а) экстраполяторы;

б) дифференцирующие цепи;

в) интеграторы;

г) фильтры верхних частот (ФВЧ);

д) фильтры нижних частот (ФНЧ);

138. Преобразование аналогового сигнала в цифровой и обратно осуществляется с помощью:

а) активного фильтра;

б) аналого-цифрового преобразователя (АЦП);

в) умножителя;

г) детектора;

д) цифро-аналогового преобразователя (ЦАП).

139. Исчисление конечных разностей определяет понятия:

а) дискретной или решетчатой функции;

б) оператора сдвига (упреждения и запаздывания);

в) разностного оператора (правого и левого);

г) обратного разностного оператора;

д) разностного уравнения.

140. Дискретными или решетчатыми называются функции (функциональные последовательности):

а) принимающие конкретные значения при конкретных значениях аргумента;

б) которые могут быть получены выборкой значений непрерывных функций при конкретных значениях аргумента;

в) анализ этих функций строится на исследовании конечных разностей (исчисление конечных разностей);

г) аналогом производных дискретных функций является разностный оператор;

д) аналогом интеграла дискретных функций является обратный разностный оператор.

141. Оператором сдвига дискретной функции (функциональной последовательности) называется оператор представленный выражениями:

а) $E \cdot f_k = f_{k+1}$- для оператора упреждения на один такт;

б) $E^{-1} \cdot f_k = f_{k-1}$- для оператора задержки на один такт;

в) $E^n \cdot f_k = f_{k+n}$- для оператора упреждения на $n$ тактов;

г) $E^{-n} \cdot f_k = f_{k-n}$- для оператора задержки на $n$ тактов;

д) оператору упреждения в области оригиналов, при нулевых начальных условиях, в области изображения соответствует умножение изображения на комплексную переменную $z^n$, то есть $E^n \cdot f_k \Rightarrow z^n \cdot F(z)$;

е) оператору задержки в области оригиналов, при нулевых начальных условиях, в области изображения соответствует умножение изображения на комплексную переменную $z^{-n}$, то есть $E^{-n} \cdot f_k \Rightarrow z^{-n} \cdot F(z)$.

142. Разностный оператор (правый, левый) определяется следующими выражениями:

а) $\Delta \cdot f_k = f_{k+1} - f_k = (E-1) \cdot f_k$ - для правого оператора;

б) $\nabla \cdot f_k = f_k - f_{k-1} = (1-E^{-1}) \cdot f_k$ - для левого оператора;

в) $\Delta^2 \cdot f_k = \Delta \cdot (\Delta \cdot f_k) = f_{k+2} - 2 \cdot f_{k+1} + f_k$;

г) $\Delta^3 \cdot f_k = \Delta \cdot (\Delta^2 \cdot f_k) = f_{k+3} - 3 \cdot f_{k+2} + 3 \cdot f_{k+1} - f_k$;

д) $\Delta^n \cdot f_k = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \cdot f_{k+n-i}$.

143. Свойства обратного разностного оператора можно проиллюстрировать следующими выражениями:

а) $\Delta \cdot c \cdot f_k = c \cdot \Delta \cdot f_k$;

б) $\Delta^n \cdot (f_k + g_k) = \Delta^n \cdot f_k + \Delta^n \cdot g_k$;

в) $\Delta^m \cdot \Delta^n \cdot f_k = \Delta^{m+n} \cdot f_k$;

г) $\Delta \cdot (f_k \cdot g_k) = f_{k+1} \cdot \Delta \cdot g_k + g_k \cdot \Delta \cdot f_k$;

д) $\Delta \cdot \left( \dfrac{f_k}{g_k} \right) = \dfrac{\Delta \cdot f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta \cdot g_k}{g_k \cdot g_{k+1}}$.

144. Обратный разностный оператор является аналогом интегрального оператора непрерывных функций и определяется суммой функциональной последовательности в соответствии с выражениями:

а)

$$\Delta \cdot \left[ \sum_{n=0}^{k-1} f_n + C \right] = [f_k + f_{k-1} + \cdots + f_0 + C] - [f_{k-1} + f_{k-1} + \cdots + f_0 + C] = f_k;$$

б) $\Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot f_k$;

в) $\Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot \left[ \sum\limits_{n=0}^{k-1} f_n + C \right] = \sum\limits_{n=0}^{k-1} f_n + C = \Delta^{-1} \cdot f_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n + C$.

145. Сумма функциональной последовательности, соответствующая действию обратного разностного оператора на последовательность, обычно определяется, с точностью до постоянной суммирования $C$, как сумма либо:

а) арифметической прогрессии;
б) геометрической прогрессии;
в) факториального многочлена.

146. Факториальный многочлен, часто используемый в исчислении конечных разностей, и действие на него разностного оператора и обратного разностного оператора определяются соотношениями:

а) $(k)^n = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-n+1)$, где $n \geq 1$;

б) $\Delta\cdot(k)^n = n\cdot(k)^n = n\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-n+2)$;

в) $\Delta^{-1}\cdot(k)^n = \dfrac{1}{n+1}\cdot(k)^{n+1} + C$.

147. Основными элементами функциональной модели дискретных или цифровых устройств и систем являются:

а) сумматоры;
б) детекторы;
в) звенья задержки;
г) интеграторы;
д) масштабирующие звенья;
е) коммутаторы.

148. В качестве тестовых воздействий дискретных и цифровых систем используются:

а) дискретное гармоническое воздействие $\sin(\omega\cdot k\cdot T)$, $\cos(\omega\cdot k\cdot T)$, $e^{j\cdot\omega\cdot k\cdot T}$;

б) аналоговое гармоническое воздействие $\sin(\omega\cdot t)$, $\cos(\omega\cdot t)$, $e^{j\cdot\omega\cdot t}$;

в) последовательность единичных дельта – импульсов $1(k\cdot T) = 1(k) = 1_k$;

г) единичный импульс (функция Хевисайда) $1(t)$;

д) одиночный единичный дельта – импульс $1(0\cdot T) = 1(0) = 1_0$;

е) дельта – импульс (функция Дирака) $\delta(t-0) = \delta(0)$.

149. Основными характеристиками дискретных и цифровых устройств и систем являются:

а) системная (передаточная) характеристика;
б) частотная характеристика;
в) переходная характеристика;
г) импульсная характеристика.

150. Системная характеристика дискретной или цифровой системы, при исходном состоянии покоя, определяется как отношение:

а) оригинала реакции к оригиналу входного воздействия;

б) изображения реакции к изображению воздействия;

в) оригинала реакции к ее сдвигу;

г) оригинала реакции к ее разности;

д) изображения реакции к производной изображения воздействия.

151. Системная характеристика дискретной или цифровой системы может быть получена по:

а) функциональной схеме (модели) устройства;

б) передаточной либо частотной характеристике аналогового прототипа;

в) разностному уравнению системы;

г) дифференциальному уравнению аналогового прототипа;

д) импульсной характеристике системы;

е) импульсной характеристике аналогового прототипа.

152. Системная характеристика (функция) дискретной или цифровой системы представляется обычно в виде:

а) дробно-рациональной функции комплексной переменной $z$;

б) является комплексной функцией нормированной частоты $z$;

причем вид дробно-рациональной функции определяет структуру функциональной модели дискретной или цифровой системы и, кроме того системная функция:

в) связана обратным $Z$- преобразованием с импульсной характеристикой системы;

г) есть отношение $Z$- изображения реакции к $Z$- изображению входного воздействия.

153. По известной системной характеристике дискретной или цифровой системы $S(z)$ можно определить:

а) изображение выходной реакции системы $V(z) = E(z) \cdot S(z)$;

б) импульсную характеристику системы путем обратного $Z$-преобразования;

в) частотную характеристику системы путем замены вида $z^k = e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$;

г) структуру функциональной модели дискретной или цифровой системы.

154. Частотная характеристика дискретной или цифровой системы:

а) является комплексной функцией частоты;

б) определяет частотную зависимость реакции от частоты;

в) определяет условия прохождения спектра входного сигнала на выход системы;

г) имеет периодический характер от частоты, причем период повторения определяется частотой дискретизации;

д) может быть получена из системной характеристики путем замены вида $z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$.

155. Частотная характеристика дискретной или цифровой системы, находящейся в состоянии покоя, может быть определена как:

а) реакция системы на дискретное гармоническое воздействие единичной амплитуды;

б) установившаяся реакция системы на дискретное гармоническое воздействие единичной амплитуды;

в) реакция системы на последовательность единичных дельта – импульсов;

г) установившаяся реакция системы на последовательность единичных дельта – импульсов;

д) реакция системы на одиночный единичный дельта – импульс.

156. Частотная характеристика дискретной или цифровой системы, по установившейся части реакции на гармоническое воздействие, из исходного состояния покоя, может быть определена следующим образом:

а) амплитуда установившейся части реакции соответствует точке АЧХ;

б) сдвиг по времени реакции относительно входного воздействия соответствует точке ФЧХ;

причем при смене частоты воздействия $\omega$ на $\omega + 2 \cdot \pi \cdot n / T = \omega + n \cdot \omega_d$, где $n$ - целое число; $T$ - период дискретизации; $\omega_d$ - круговая частота дискретизации, получаем те же значения:

в) амплитуды;

г) сдвига по времени относительно входного воздействия;

установившейся реакции в силу периодичности частотной характеристики дискретной или цифровой системы.

157. Переходная характеристика $h_k$ дискретных или цифровых систем, находящихся в исходном состоянии покоя может быть определена как:

а) реакция на дискретное гармоническое воздействие единичной амплитуды $\sin(\omega \cdot k \cdot T)$, $\cos(\omega \cdot k \cdot T)$, $e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$;

б) реакция на последовательность единичных дельта – импульсов $1(k \cdot T) = 1(k) = 1_k$;

в) реакция на одиночный единичный дельта – импульс $1(0 \cdot T) = 1(0) = 1_0$;

г) установившаяся реакция на последовательность единичных дельта – импульсов $1(k \cdot T) = 1(k) = 1_k$;

д) установившаяся реакция на одиночный единичный дельта – импульс $1(0 \cdot T) = 1(0) = 1_0$.

158. Импульсная характеристика $g_k$ дискретных или цифровых систем, находящихся в исходном состоянии покоя может быть определена как:

а) реакция на дискретное гармоническое воздействие единичной амплитуды $\sin(\omega \cdot k \cdot T),\ \cos(\omega \cdot k \cdot T),\ e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$;

б) реакция на последовательность единичных дельта – импульсов $1(k \cdot T) = 1(k) = 1_k$;

в) реакция на одиночный единичный дельта – импульс $1(0 \cdot T) = 1(0) = 1_0$;

г) установившаяся реакция на последовательность единичных дельта – импульсов $1(k \cdot T) = 1(k) = 1_k$;

д) установившаяся реакция на одиночный единичный дельта – импульс $1(0 \cdot T) = 1(0) = 1_0$.

159. Временные характеристики (переходную и импульсную) дискретных и цифровых систем определяются либо:

а) из решения обыкновенного дифференциального уравнения системы;

б) из решения разностного уравнения системы при соответствующем входном воздействии;

в) по изображению выходной реакции системы с помощью обратного преобразования Лапласа;

г) по изображению выходной реакции системы с помощью обратного $Z$ - преобразования;

д) из решения системы алгебраических уравнений системы.

160. Реакция дискретной системы на произвольное воздействие, может быть определена по известной переходной либо импульсной характеристике, как:

а) суперпозиция взвешенных и смещенных переходных характеристик (аналог интеграла Дюамеля);

б) дискретная свертка взвешенных и смещенных импульсных характеристик (аналог интегральной свертки).

161. Смена характера входного воздействия на дискретную систему:

а) оставляет однородную часть разностного уравнения неизменной;

б) изменяется лишь неоднородная (правая) часть уравнения, обусловленная внешним воздействием;

в) система фундаментальных решений разностного уравнения остается неизменной;

г) могут измениться лишь начальные условия;

д) общее решение неоднородного разностного уравнения не изменится;

е) изменится лишь частное решение неоднородного разностного уравнения.

162. Взаимосвязь вещественной дискретной функции оригинала и комплексной функцией изображения можно установить с помощью:

а) дискретного преобразования Лапласа;

б) $Z$ - преобразования;

в) причем $Z$ - преобразование следует из дискретного преобразования Лапласа при замене вида $e^{p \cdot t} = e^{p \cdot k \cdot T} = z^k$;

г) наоборот $Z$ - преобразование переходит в дискретное преобразование Лапласа при замене вида $p = \ln(z)/T$.

163. Операционное исчисление основанное на $Z$ - преобразовании включает в себя:

а) свойство линейности;

б) теоремы об упреждении и запаздывании;

в) теорему о сумме функциональной последовательности;

г) теорему о свертке;

д) предельные теоремы о значении функции оригинала.

164. Обратное $Z$ - преобразование обычно выполняется:

а) прямым суммированием;

б) с использованием теорем разложения;

в) с использованием теории вычетов;

г) с использованием таблиц;

д) с использованием предварительного разложения дробно-рационального выражения на простые дроби.

165. Теорема о сдвиге (упреждении или запаздывании) оригинала утверждает, что:

а) упреждению оригинала в области изображений соответствует разности изображения оригинала и начального значения оригинала, умноженной на $z$, то есть $f_{k+1} \Rightarrow z \cdot [F(z) - f_0]$;

б) повторное применение этой теоремы дает правило $Z$-преобразования при кратном упреждении оригинала;

в) запаздыванию оригинала в области изображений соответствует умножение изображения оригинала на $z^{-1}$, минус начальное значение оригинала при стремлении к $-1$ справа, то есть $f_{k-1} \Rightarrow z^{-1} \cdot F(z) + f_{-1}$;

г) повторное применение этой теоремы дает правило $Z$-преобразования при кратном запаздывании оригинала;

166. Теорема о начальном значении оригинала дискретной функции утверждает, что:

а) начальное значение оригинала, как предел при стремлении оригинала к нулю справа, может быть вычислен как предел при $z \to \infty$ от изображения;

б) повторное применение этой теоремы с учетом теоремы об упреждении или сдвиге дает правило определения начальных значений при очередном сдвиге оригинала.

167. $Z$ - преобразования основных дискретных функций, на основании операторной алгебры, можно определить следующим образом:

а) оригиналу, функции $1_k$, в виде последовательности единичных дельта - импульсов, соответствует изображение вида $z/(z-1)$;

б) оригиналу, функции $1_0$, соответствующей одиночному единичному дельта – импульсу, соответствует изображение вида 1;

в) оригиналу, в виде дискретного синусоидального воздействия $\sin(\omega \cdot k \cdot T)$, соответствует изображение вида $\dfrac{\sin(\omega \cdot T) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot T) \cdot z + 1}$;

г) оригиналу, в виде дискретного косинусоидального воздействия $\cos(\omega \cdot k \cdot T)$, соответствует изображение вида $\dfrac{z \cdot (z - \cos(\omega \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot T) \cdot z + 1}$;

д) оригиналу, в виде дискретного гармонического осциллятора $e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot T} = \cos(\omega \cdot k \cdot T) + j \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot T)$, соответствует изображение вида

$$\frac{z \cdot (z - \cos(\omega \cdot T))}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot T) \cdot z + 1} + j \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot T) \cdot z + 1} = \frac{z(z - e^{-j \cdot \omega \cdot T})}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot T) \cdot z + 1};$$

168. Импульсная характеристика дискретной или цифровой системы может быть определена:

а) по известной переходной характеристике в соответствии с выражением $g_k = h_k - h_{k-1}$;

б) обратным $Z$ - преобразованием системной функции системы;

в) как реакция на одиночный единичный импульс системы, находящейся в состоянии покоя.

169. Разностное уравнение представляет собой в общем случае уравнение связи либо:

а) нескольких неизвестных дискретных функций одной независимой переменной и их производных;

б) сдвигов неизвестной дискретной функции;

в) неизвестной дискретной функции и ее сдвигов или разностей;

г) разностей известной дискретной функции;

д) известной дискретной функции и ее разностей.

170. Порядок разностного уравнения определяется:
а) наивысшей степенью оператора сдвига;
б) наивысшей степенью разностного оператора;
в) разностью наивысшей и низшей степеней оператора сдвига;
г) суммой степени оператора сдвига к низшей;
д) произведением степеней оператора сдвига.

171. Начальные условия разностного уравнения дискретной или цифровой системы могут быть определены:
а) по предельной теореме $Z$- преобразований о начальном значении дискретной функции оригинала;
б) по предельной теореме преобразования Лапласа о начальном значении непрерывной функции оригинала;
в) по исходному разностному уравнению, путем придания определенных значений номерам отсчетов;
г) по исходному дифференциальному уравнению, путем приравнивания значений аргумента нулю;
д) по функциональной схеме и известному входному воздействию (в простых случаях).

172. Различают разностные уравнения:
а) однородные и неоднородные;
б) с постоянными и переменными коэффициентами;
в) линейные и нелинейные;
г) скалярные и системы.

173. Однородная часть разностного уравнения определяет характеристическое уравнение при замене сдвигов неизвестной дискретной функции:
а) соответствующей степенью переменной;
б) их начальными значениями;
в) экспонентами переменных;
г) логарифмами переменной;
д) их производными.

174. Корни характеристического уравнения определяют:
а) фундаментальную систему решений однородного разностного уравнения;
б) фундаментальную систему решений неоднородного разностного уравнения;
а условием независимости фундаментальной системы решений разностного уравнения является отличие от нуля:
в) определителя Вандермонда;

г) определителя Вронского;

д) определителя Касорати.

175. Корни характеристического уравнения для дискретных систем физически соответствуют:

а) формам (типам) собственных колебаний системы;

б) амплитудам собственных колебаний системы;

в) экспонентам частот собственных колебаний системы;

г) набору постоянных времени системы;

д) возможным задержкам реакции системы.

176. Фундаментальная система решений однородного разностного уравнения соответствует:

а) экспонентам корней характеристического уравнения $e^{d_i \cdot k}$, при различных корнях;

б) логарифмам корней характеристического уравнения $\ln(d_i \cdot k)$;

в) степенным функциям корней характеристического уравнения $d_i^k$, при различных корнях;

г) независимому набору функций вида $d_i^k,\ k \cdot d_i^k,\ k^2 \cdot d_i^k,\ \ldots,\ k^{m-1} \cdot d_i^k$ - для $i$ - го корня кратности $m$;

д) независимому набору функций вида $e^{d_i \cdot k},\ k \cdot e^{d_i \cdot k},\ k^2 \cdot e^{d_i \cdot k},\ \ldots,\ k^{m-1} \cdot e^{d_i \cdot k}$ - для $i$ - го корня кратности $m$.

177. Определитель Касорати строится построчно:

а) из сдвигов фундаментальных решений от 1- го до $n$ - го порядка;

б) из экспонент фундаментальных решений и их производных до $(n-1)$ - го порядка;

в) из натуральных логарифмов фундаментальных решений и их производных до $(n-1)$ - го порядка;

г) корней характеристического уравнения и их степеней до $(n-1)$ - го порядка;

д) из собственных векторов.

178. Согласно общей теории разностных уравнений, общее решение однородного разностного уравнения представляет собой:

а) систему фундаментальных решений;

б) линейную суперпозицию постоянных и фундаментальных решений;

в) линейную суперпозицию варьируемых постоянных и фундаментальных решений;

г) линейную суперпозицию постоянных и корней характеристического уравнения.

179. Согласно общей теории разностных уравнений, частное решение однородного разностного уравнения находится путем определения постоянных общего решения, используя либо:

а) определяющую систему уравнений;

б) начальные условия;

в) независимые дополнительные условия;

г) наложение ограничений на рост порядка производных.

180. Согласно методу Лагранжа, общее решение неоднородного разностного уравнения представляет собой:

а) систему фундаментальных решений;

б) линейную суперпозицию постоянных и фундаментальных решений;

в) линейную суперпозицию варьируемых постоянных и фундаментальных решений;

г) линейную суперпозицию постоянных и корней характеристического уравнения.

181. Согласно методу Лагранжа, частное решение неоднородного разностного уравнения находится путем определения варьируемых постоянных общего решения, используя:

а) наложение ограничений на рост порядка разностей.

б) определяющую систему уравнений;

б) либо начальные условия;

в) либо независимые дополнительные условия.

182. В общей теории разностных уравнений утверждается, что:

а) частное решение неоднородного уравнения определяется суммой частного решения однородного уравнения и общего решения неоднородного уравнения;

б) общее решение неоднородного уравнения определяется суммой общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения;

или с физической точки зрения:

в) реакция на выходе дискретной динамической системы определяется суммой свободных колебаний системы обусловленных начальными условиями и вынужденных колебаний обусловленных внешним воздействием на систему;

г) реакция на выходе дискретной динамической системы определяется суммой переходного процесса обусловленного начальными условиями и внешним воздействием и установившегося (стационарного) процесса обусловленного внешним воздействием.

183. Система разностных уравнений представляет в общем случае совокупность уравнений связи:

а) нескольких неизвестных функций разных независимых переменных;

б) нескольких неизвестных функций одной независимой переменной и их разностей или сдвигов;

в) нескольких известных функций разных независимых переменных;

г) одной известной функции разных независимых переменных;

г) одной неизвестной функций разных независимых переменных.

184. Разностное уравнение $n$- го порядка может быть преобразовано в эквивалентную систему $n$ разностных уравнений первого порядка путем:

а) последовательной замены неизвестной функции и ее сдвигов до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) от новых независимых переменных;

б) последовательной замены неизвестной функции и ее сдвигов до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) той же независимой переменной;

в) последовательной замены аргументов неизвестной функции и ее разностей до $(n-1)$- го порядка новыми независимыми переменными;

г) последовательной замены сдвигов неизвестной функции от нулевого до $(n-1)$- го порядка новыми переменными (функциями) той же независимой переменной;

185. В качестве математической модели дискретной или цифровой цепи, устройства, системы во временной области, в общем случае, используется:

а) система линейных алгебраических уравнений (для линейных цепей);

б) система разностных уравнений;

в) система дифференциальных уравнений;

г) система нелинейных алгебраических уравнений (для нелинейных цепей и устройств).

186. Разностное уравнение можно рассматривать как математическую модель обыкновенного дифференциального уравнения в котором:

а) производные функций левой и правой частей заменены разностями соответствующих порядков;

б) из соображений устойчивости алгоритма решения обычно используют обратные разности;

в) после приведения подобных уравнение представляется относительно сдвигов неизвестной функции;

г) начальные значения дифференциального уравнения преобразуются в начальные значения неизвестной дискретной функции и ее сдвигов;

д) решение разностного уравнения выполняется аналитически либо численно по рекуррентной форме записи разностного уравнения.

187. Численное решение разностного уравнения может быть основано на представлении разностного уравнения рекуррентным соотношением, при этом:

а) текущее значение неизвестной дискретной функции выражается через ее предыдущие значения и значения известной функции определяющей входное воздействие системы;

б) предыдущие значения неизвестной дискретной функции соответствуют начальным значениям разностного уравнения;

в) начальные значения неизвестной функции и ее сдвигов могут быть определены из исходного уравнения при задании соответствующих значений аргументов;

г) численное решение разностного уравнения представляется набором значений дискретной функции;

д) аналитическое представление численного решения разностного уравнения можно получить в результате интерполяции или аппроксимации решения заданным набором базовых функций.

188. Методы аналитического решения разностных уравнений:

а) Гаусса;

б) операторный;

в) вариации произвольных постоянных (Лагранжа);

г) Коши (представление решения в форме Коши);

д) неопределенных коэффициентов;

е) разделения переменных.

189. Суть операторного метода решения разностного уравнения на основе $Z$ - преобразований заключается в следующем:

а) используя теорему о сдвиге функции оригинала с учетом начальных условий, переходим к уравнению связи изображений выходной реакции и входного воздействия;

б) выражаем изображение выходной реакции;

в) используя обратное $Z$ - преобразование, находим оригинал выходной реакции, то есть решение разностного уравнения.

190. В случае если дискретная система задана функциональной схемой (моделью), то суть операторного метода определения реакции на выходе сводится к следующему:

а) выводу выражения системной (передаточной) функции;

б) выражению изображения реакции;

г) нахождению оригинала реакции (решения) обратным $Z$ - преобразованием изображения.

191. Метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа применительно к решению разностных уравнений заключается в:

а) записи общего решения неоднородного разностного уравнения в виде линейной суперпозиции варьируемых постоянных и фундаментальных решений однородного уравнения;

б) формировании разрешающей системы Лагранжа путем наложения ограничений на рост порядка разностей варьируемых постоянных при нахождении разностей или сдвигов общего решения с целью подстановки в исходное уравнение;

в) определении разностей варьируемых постоянных из разрешающей системы Лагранжа;

г) определении варьируемых постоянных через обратный разностный оператор с точностью до постоянных суммирования;

д) постоянные суммирования определяются из дополнительных независимых условий, например, начальных.

192. Определяющая (разрешающая) система уравнений Лагранжа для разностных уравнений строится путем:

а) наложения ограничений на рост порядка разностей варьируемых постоянных (неизвестных функций) выше первого;

б) наложения ограничений на рост порядка разностей варьируемых постоянных (неизвестных функций) выше второго;

в) подстановки сдвигов или разностей общего решения, с учетом наложенных ограничений, в исходное уравнение;

и представляет собой:

г) систему линейных алгебраических уравнений относительно разностей варьируемых постоянных;

д) систему линейных алгебраических уравнений относительно варьируемых постоянных.

193. Представление решения разностного уравнения в форме Коши, в общем случае, заключается в:

а) предварительном преобразовании исходного разностного уравнения $n$- го порядка в эквивалентную систему $n$ разностных уравнений первого порядка путем введения новых переменных вместо неизвестной функции и ее разностей или сдвигов;

б) использовании формулы Коши для выражения частного решения уравнения с использованием начальных условий и степенных функций от матрицы коэффициентов эквивалентной системы:

причем:

в) вектор функций (решений) соответствует исходной функции и ее сдвигам до $(n-1)$- го порядка;

г) вектор правой части системы содержит в качестве последней компоненты правую часть исходного уравнения;

д) матрица коэффициентов системы имеет вполне определенный вид, обусловленный заменой переменных.

194. Для использования представления аналитического решения разностного уравнения в форме Коши в случае нулевых и кратных корней характеристического уравнения предлагается:

а) положить корни различными;

б) довести аналитическое решение до конца;

г) осуществить предельный переход полученного решения к реальным значениям корней.

195. Дискретный или цифровой фильтр представляет собой устройство или программу формирования выходной последовательности импульсов из входной последовательности импульсов, причем текущее значение импульса выходной последовательности формируется из:

а) текущего импульса входной последовательности;

б) взвешенных предыдущих импульсов входной последовательности;

в) взвешенных предыдущих импульсов выходной последовательности;

то есть для реализации фильтра необходимо запоминать определенное число импульсов:

г) входной последовательности;

д) выходной последовательности.

196. Дискретная или цифровая фильтрация основана на том факте, что выходная последовательность образуется из текущих и предыдущих отсчетов входной последовательности и предыдущих отсчетов выходной последовательности, в результате:

а) форма выходной последовательности изменяется;

б) спектр входного сигнала при прохождении через фильтр трансформируется;

при этом характеристики фильтра зависят:

в) от числа и веса используемых предыдущих отсчетов входной последовательности;

г) от числа и веса используемых предыдущих отсчетов выходной последовательности.

197. Цифровые фильтры отличаются от дискретных фильтров тем, что:

а) дискретные отсчеты входного сигнала представлены двоичной последовательностью импульсов определенной разрядности;

б) суммирование, задержка и запоминание отсчетов производится цифровыми устройствами;

в) тактовая частота обработки определяется разрядностью двоичной последовательности;

г) запоминание значений предыдущих отсчетов производится в цифровом виде;

д) отсчеты сигнала и весовые коэффициенты, как правило, представляются в нормализованном виде.

198. Различают дискретные и цифровые фильтры:
а) трансверсальные;
б) прямые;
в) обратные;
г) инверсные;
д) рекурсивные.

199. Трансверсальные дискретные и цифровые фильтры для образования отсчетов выходного сигнала используют:
а) предыдущие отсчеты выходного сигнала;
б) текущие отсчеты входного сигнала;
в) предыдущие отсчеты входного сигнала;
г) взвешенные отсчеты выходного сигнала;
д) взвешенные предыдущие отсчеты входного сигнала.

200. Рекурсивные дискретные и цифровые фильтры для образования отсчетов выходного сигнала используют:
а) предыдущие отсчеты выходного сигнала;
б) текущие отсчеты входного сигнала;
в) предыдущие отсчеты входного сигнала;
г) взвешенные отсчеты выходного сигнала;
д) взвешенные предыдущие отсчеты входного сигнала.

201. Принципиальное отличие рекурсивных фильтров от трансверсальных фильтров заключается в том, что рекурсивные фильтры:
а) используют предыдущие отсчеты входного сигнала;
б) используют предыдущие отсчеты выходного сигнала;
в) имеют каналы обратной связи с выхода на вход;
г) запоминают предыдущие отсчеты входного сигнала;
д) запоминают предыдущие отсчеты выходного сигнала.

202. Различают следующие методы синтеза цифровых фильтров:
а) по частотной характеристике фильтра прототипа;
б) по дифференциальному уравнению фильтра прототипа;
в) по импульсной характеристике фильтра прототипа;
г) оптимального синтеза - на основе алгоритмов оптимизации;
д) субоптимального синтеза - с учетом специфики задачи фильтрации.

203. Синтез дискретного или цифрового фильтра по заданной частотной характеристике прототипа подразумевает замену вида $j \cdot \omega = \frac{\ln(z)}{T}$ и заключается в:

а) замене в дробно рациональном выражении частотной характеристики переменной $j\omega$ на дробно-линейное выражение вида $\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}$, которое является первым членом разложения функции $\ln(z)$ в ряд Тейлора;

б) приведении подобных и представлении системной функции дробно рациональной функцией комплексной переменной $z$;

в) коэффициенты числителя дробно-рационального представления системной функции определяют структуру трансверсальной части фильтра;

г) коэффициенты знаменателя дробно-рационального представления системной функции определяют структуру рекурсивной части фильтра;

д) для повышения точности реализации можно воспользоваться несколькими первыми членами разложения функции $\ln(z)$ в ряд Тейлора.

204. Синтез дискретного или цифрового фильтра по заданному дифференциальному уравнению прототипа подразумевает переход к разностному уравнению и сводится к:

а) замене производных прямой либо обратной конечной разностью;

б) приведению подобных и выражению разностного уравнения;

в) коэффициенты неоднородной (правой) части разностного уравнения определяют структуру трансверсальной части фильтра;

г) коэффициенты однородной (левой) части разностного уравнения определяют структуру рекурсивной части фильтра;

д) использование обратной разности при замене производных дает устойчивую реализацию фильтра.

205. Синтез дискретного или цифрового фильтра по заданной импульсной характеристике прототипа подразумевает использование конечного либо бесконечного числа отсчетов характеристики и сводится:

а) либо к почленному $Z$- преобразованию конечного числа отсчетов импульсной характеристики и получению, таким образом, выражения системной функции КИХ–фильтра;

б) либо к представлению бесконечного числа отсчетов регулярным выражением суммы сходящейся геометрической прогрессии, и получению системной функции БИХ–фильтра $Z$- преобразованием этого выражения;

в) коэффициенты числителя системной функции определяют структуру трансверсальной части фильтра;

г) коэффициенты знаменателя системной функции определяют структуру рекурсивной части фильтра;

д) реализация КИХ–фильтра имеет трансверсальную структуру, в отличие от реализации БИХ–фильтра, имеющей рекурсивную структуру.

206. При реализации цифрового фильтра по аналоговому прототипу необходимо учитывать, что частотная характеристика цифрового фильтра имеет периодический характер и ось частот в связи с этим деформируется:

а) интервал частот аналогового прототипа $0 < \omega_a < \infty$ преобразуется в интервал частот цифрового фильтра $-\frac{\pi}{T} < \omega_d < \frac{\pi}{T}$;

б) взаимосвязь комплексных переменных непрерывного преобразования Лапласа и $Z$ - преобразования имеет вид $p = \frac{\ln(z)}{T} \approx \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$;

в) закон деформации оси частот из предыдущего выражения и обратного соотношения $z = e^{p \cdot T} = e^{j \cdot \omega \cdot T}$ может быть представлен в виде $j \cdot \omega_a = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_d \cdot T} - 1}{e^{j \cdot \omega_d \cdot T} + 1} = \frac{2}{T} \cdot tg(\frac{j \cdot \omega_d \cdot T}{2})$;

г) на низких частотах, в силу того, что $\frac{j \cdot \omega_d \cdot T}{2} \approx tg(\frac{j \cdot \omega_d \cdot T}{2})$ частотные характеристики аналогового прототипа и цифрового фильтра практически совпадают, а на высоких частотах различие существенно;

д) граничные частоты аналогового и цифрового фильтров связаны между собой соотношением $j \cdot \omega_{gr\_a} = \frac{2}{T} \cdot tg(\frac{j \cdot \omega_{gr\_d} \cdot T}{2})$.

207. Удобный критерий устойчивости рекурсивного цифрового фильтра базируется на дробно линейном преобразовании переменной характеристического уравнения вида $z = \frac{w+1}{w-1}$, при этом:

а) корни левой полуплоскости $w$ исходного уравнения отображаются во внутрь единичной окружности плоскости $z$;

б) мнимая ось плоскости $w$ отображается в единичную окружность плоскости $z$;

в) точка $z = 0$ отображается в точку $w = -1$ плоскости $w$;

г) расположение корней внутри единичной окружности плоскости $z$ свидетельствует об устойчивости цифрового фильтра;

д) наличие корней за пределами единичной окружности плоскости $z$ соответствует неустойчивому цифровому фильтру.

208. Ошибки квантования и погрешности цифровых фильтров обусловлены:

а) погрешностью реализации масштабирующих блоков;

б) округлением текущего отсчета сигнала до ближайшего уровня;

в) погрешностью реализации блоков задержки;

г) представлением текущего отсчета сигнала двоичной последовательностью конечной разрядности;

д) нестабильностью пороговых и цифровых элементов.

209. Характеристики цифрового фильтра зависят также от:

а) способа реализации (по требуемой частотной, переходной или импульсной характеристике);

б) используемой разрядности для представления отсчетов сигнала;

в) структурной реализации (каскадное построение, канонические структуры);

г) используемой элементной базы (АЦП, ЦАП, пропорциональных звеньев, сумматоров);

д) используемой нормировки значений коэффициентов и доступных арифметических операций.

## Приложение В
## Вопросы для подготовки к экзамену и/или зачету по дисциплине "Прикладные математические методы в радиотехнике"

Предлагаемые вопросы призваны выработать представление об изучаемой дисциплине **«Прикладные математические методы в радиотехнике» (ПММР),** ориентировать студента на определенный уровень знаний полученных из предыдущих дисциплин (Высшая математика, Линейная алгебра, Теория цепей, Теория сигналов, Микроэлектроника), а также подготовить для творческого восприятия последующих дисциплин радиотехнического профиля. Всего **представлено 175 вопросов** разбитых на дидактические группы

1. Цель и содержание курса ПММР.
2. Задачи курса ПММР.

3. Понятия устройства, схемы, цепи, модели.
4. Компонентные и топологические уравнения.
5. Топологические матрицы.
6. Топологические законы цепей.
7. Компонентные уравнения цепей.
8. Особенности компонентных уравнений инерционных элементов.
9. Понятие графа, дерева графа, узла, сечения, контура.
10. Модели элементной базы.
11. Идеальный операционный усилитель и его модель.
12. Независимые источники, назначение и свойства.
13. Управляемые источники и их использование.
14. Модели сигнала в частотной и временной области.
15. Тестовые сигналы, используемые в радиотехнике.
16. Математическая модель цепи в частотной области.
17. Узловая система уравнений, свойства, методы формирования.
18. Линейность узловой системы уравнений.
19. Порядок узловой системы уравнений.
20. Содержание метода узловых потенциалов.
21. Понятие исходного состояния покоя.
22. Определение передаточной характеристики (функции).
23. Определение частотной характеристики (функции).
24. Связь передаточной и частотной характеристик.
25. Понятия ЧХ, АЧХ и ФЧХ.
26. Простейшие RC- и RL-цепи и их передаточные характеристики (функции).
27. Понятие постоянной времени.
28. Понятие фильтра - ФНЧ, ФВЧ, полосовой фильтр, заграждающий фильтр.
29. Понятие полосы пропускания, заграждения.

30. Понятие граничной частоты АЧХ цепи.
31. Связь постоянной времени с граничной частотой простых RC- и RL-цепей.
32. Определение характеристического уравнения по передаточной функции.
33. Методы определения передаточных и частотных характеристик по схеме.
34. Понятие четырехполюсника, системы параметров, канонические схемы соединения.
35. Понятие многополюсника, системы параметров, переход от многополюсника к четырехполюснику.
36. Классические системы параметров и их связь.

37. Понятие линейной алгебраической системы уравнений.
38. Методы решения линейных алгебраических систем уравнений.
39. Понятие определителя, минора и алгебраического дополнения.
40. Однородные и неоднородные системы линейных алгебраических уравнений.
41. Признаки существования решения неоднородной линейной системы.
42. Особенности решения однородных линейных алгебраических систем уравнений.

43. Проблема собственных значений и векторов.
44. Понятия собственных значений и векторов.
45. Понятия характеристической матрицы и характеристического уравнения.
46. Методы определения собственных значений.
47. Связь собственных значений характеристической матрицы и корней характеристического уравнения.
48. Понятие модальной матрицы и методы ее представления.
49. Проблема кратности собственных значений и векторов.
50. Понятие аналитической функции от матрицы и способы ее представления.

51. Суть интегрального преобразования Лапласа.
52. Прямое и обратное преобразования Лапласа - основные понятия.
53. Основные теоремы преобразования Лапласа.
54. Основы операционного исчисления.
55. Условия существования преобразования Лапласа.
56. Понятие обобщенных функций.
57. Расширение операторного метода на обобщенные функции.
58. Функция Хевисайда и дельта-функция.
59. Способы выполнения обратного преобразования Лапласа.
60. Теорема о дифференцировании оригинала.
61. Теоремы о начальном и конечном значениях.

62. Понятие переходной функции цепи.
63. Понятие импульсной функции цепи.

64. Связь переходной и импульсной функций.
65. Связь передаточной и импульсной функций.
66. Простейшие RC- и RL-цепи и их переходные характеристики (функции).
67. Понятие времени нарастания переходной характеристики.
68. Связь времени нарастания и постоянной времени простых RC- и RL-цепей.
69. Математическая модель цепи во временной области.
70. Способы аналитического определения временных характеристик цепи (системы).
71. Переход от передаточных функций к дифференциальным уравнениям.
72. Определение характеристического уравнения по дифференциальному уравнению.

73. Понятие дифференциального уравнения, типы дифференциальных. уравнений.
74. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
75. Суть решения дифференциального уравнения.
76. Отличие обыкновенных дифференциальных уравнений от уравнений в частных производных.
77. Системы дифференциальных уравнений.
78. Порядок дифференциального уравнения.
79. Однородное и неоднородное дифференциальные уравнения.
80. Дифференциальные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами.
81. Дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.
82. Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения.
83. Понятие общего решения дифференциальных уравнений.
84. Понятие частного решения дифференциальных уравнений.
85. Понятия независимых, начальных и граничных условий.
86. Содержание задачи Коши.
87. Содержание граничной или краевой задачи.
88. Понятие фундаментальной системы решений.
89. Условие независимости фундаментальной системы решений.
90. Общее решение однородных дифференциальных уравнений.
91. Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений.
92. Переход от дифференциального уравнения высокого порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

93. Методы аналитического интегрирования дифференциальных уравнений.
94. Операторный метод решения дифференциальных уравнений.
95. Учет начальных условий при операторном методе решения дифференциальных уравнений.
96. Определение начальных условий для дифференциальных уравнений по теореме о начальном значении и изображению выходной переменной.

97. Метод неопределенных коэффициентов - решения дифференциальных уравнений.
98. Метод Лагранжа или метод вариации произвольных постоянных.
99. Общее решение однородного дифференциального уравнения в методе Лагранжа.
100. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения в методе Лагранжа.
101. Вид общего решения дифференциального уравнения в методе Лагранжа при наличии нулевых и или кратных корней характеристического уравнения.
102. Условие Лагранжа и формирование определяющей системы уравнений.
103. Использование независимых или начальных условий в методе Лагранжа.
104. Представление решения в форме Коши (метод Коши - матричная формулировка).
105. Учет начальных условий в методе Коши.
106. Способ аналитического преодоления вырождения модальной матрицы при нулевых и кратных корнях характеристического уравнения в матричной формулировке метода Коши.

107. Понятие дискретной системы, период дискретизации.
108. Понятие системной характеристики дискретной системы.
109. Понятие частотной характеристики дискретной системы.
110. Переход от системной характеристики к частотной характеристике.
111. Причина периодического характера частотных характеристик дискретных систем.
112. Понятие переходной характеристики дискретной системы.
113. Понятие импульсной характеристики дискретной системы.
114. Связь импульсной и переходной характеристик дискретных систем.
115. Дискретные системы, как модели импульсных и цифровых систем.
116. Понятие решетчатых функций и дискретных последовательностей.
117. Понятия дискретизации, квантования уровня и цифрового кодирования.
118. Функциональные схемы дискретных систем.
119. Основные элементы функциональных схем дискретных систем.
120. Тестовые сигналы дискретных систем.
121. Связь представлений дискретных систем с Z-преобразованием.
122. Понятия области дискретного времени и Z-области изображений.
123. Математическая модель дискретной системы в Z-области.
124. Математическая модель дискретной цепи во временной области.
125. Представление переходных и импульсных характеристик дискретных систем рекуррентными соотношениями.

126. Понятие разностного оператора и оператора сдвига.
127. Исчисление разностных операторов.
128. Понятие обратного разностного оператора.
129. Понятие факториального многочлена и его применение.

130. Действие прямого и обратного разностных операторов на факториальный многочлен.
131. Способы раскрытия функциональных последовательностей.
132. Понятие разностных уравнений.
133. Порядок разностных уравнений.
134. Однородные и неоднородные разностные уравнения.
135. Линейные и нелинейные разностные уравнения.
136. Разностные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами.
137. Понятие фундаментальной системы решений разностного уравнения.
138. Условие независимости фундаментальной системы решений.
139. Понятие общего решения разностных уравнений.
140. Понятие частного решения разностных уравнений.
141. Понятие общего решения однородных разностных уравнений.
142. Понятие общего решения неоднородных разностных уравнений.
143. Понятие частных решений неоднородных уравнений.

144. Переход от системных функций дискретных систем к разностным уравнениям.
145. Методы решения разностных уравнений.
146. Использование независимых или начальных условий.
147. Способы определения начальных условий.
148. Особенности учета начальных условий при решении разностных уравнений.
149. Переход от разностного уравнения высокого порядка к системе разностных уравнений первого порядка.
150. Операторный метод решения разностных уравнений.
151. Метод неопределенных коэффициентов - решения разностных уравнений.
152. Метод Лагранжа или вариации произвольных постоянных – решения разностных уравнений.
153. Общее решение однородного разностного уравнения в методе Лагранжа.
154. Общее решение неоднородного разностного уравнения в методе Лагранжа.
155. Вид общего решения разностного уравнения в методе Лагранжа при наличии нулевых и кратных корней характеристического уравнения.
156. Условие Лагранжа и формирование определяющей системы уравнений при решении разностных уравнений.
157. Использование начальных условий в методе Лагранжа.
158. Метод Коши - решения разностных уравнений (матричная формулировка).
159. Учет начальных условий в методе Коши.
160. Способ аналитического преодоления вырождения модальной матрицы при нулевых и кратных корнях характеристического уравнения в матричной формулировке метода Коши.

161. Понятие цифрового фильтра и цифровой фильтрации.
162. Отличие дискретного и цифрового фильтра.
163. Способы реализации цифровой фильтрации.
164. Функциональные модели цифровых фильтров.
165. Трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры.
166. Ошибки квантования, погрешности цифровой фильтрации.
167. Методы синтеза цифровых фильтров.
168. Синтез цифрового фильтра по частотной характеристике аналогового прототипа.
169. Использование билинейного преобразования частоты при синтезе цифрового фильтра.
170. Синтез цифрового фильтра по дифференциальному уравнению аналогового прототипа.
171. Переход от дифференциального уравнения к разностному уравнению с использованием конечно разностного представления производных.
172. Использование прямых и обратных разностей представления производных.
173. Синтез цифрового фильтра по импульсной характеристике аналогового прототипа.
174. КИХ- и БИХ- цифровые фильтры.
175. Связь интервала повторения частотных характеристик с периодом дискретизации.