

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
(ТУСУР)**

С.С. Каминская

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

**Методические указания по
самостоятельной работе и
практическим занятиям
для студентов очного обучения всех
специальностей**

Томск
2012

Сборник содержит задачи по основным разделам курса сопротивления материалов, типовые задачи с подробными решениями и методическими указаниями, а также справочный материал, необходимый для их решения, предназначен для студентов всех специальностей изучающих курс «Прикладная механика».

Предисловие

Методические указания содержит простые задачи по сопротивлению материалов, входящего в курс «Прикладная механика» как один из его разделов. Наряду с задачами, имеющими разнообразные условия, почти в каждом разделе помещены комплексные задачи с общим условием и большим количеством вариантов схем и цифровых данных. Эти задачи могут быть широко использованы в различных учебных и контрольных целях, а именно: на практических занятиях; в качестве индивидуальных домашних заданий для самостоятельной работы; контрольных работ, зачетов, экзаменов, и др. В начале каждой главы (или параграфа) приводятся формулы и уравнения, методические указания к решению задач, а также приводятся подробные решения типовых задач, которые избавят студентов от необходимости обращаться к другим источникам. Все величины, входящие в условия задач и ответы, приведены в системе СИ. Числовые значения ответов округлены до трех значащих цифр; если в ответе меньше знаков, значит, не было необходимости в таком округлении.

В настоящий сборник включены некоторые задачи из сборника задач по сопротивлению материалов Беляева Н.М., исходные данные и ответы которых переведены в систему СИ.

1.1. Статически определимые системы

Эпюры продольных сил, напряжений и деформаций

Продольное усилие N определяется методом мысленных сечений. Величина продольного усилия в каком-нибудь поперечном сечении стержня равна алгебраической сумме всех внешних продольных сил действующих на стержень по одну сторону от рассматриваемого сечения. Общая формула, по которой можно определить величину продольного усилия в произвольном поперечном сечении стержня имеет вид:

$$N = \sum P \quad (1)$$

Если вектор продольного усилия N направлять в сторону от рассматриваемого сечения, то условие равновесия отсеченной части стержня, т.е. формула (1), будет давать величину и требуемый знак усилия.

При растяжении продольная сила направлена от сечения и считается положительной. При сжатии она направлена к сечению и считается отрицательной.

В стержне при его центральном растяжении (сжатии) в поперечных сечениях возникают *нормальные напряжения*, которые определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2)$$

где N – продольное усилие в сечении, A – площадь поперечного сечения.

Продольная *относительная деформация* определяется из закона Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}, \quad (3)$$

где E – модуль упругости первого рода.

Абсолютное удлинение Δl стержня длиной l постоянного сечения определяется по формуле:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA}. \quad (4)$$

Величина EA называется жесткостью сечения стержня при растяжении сжатии.

Эпюры продольных сил N , напряжений σ и деформаций представляют собой графики зависимости этих величин по всей длине стержня. Построить их можно, используя метод сечений. Рассмотрим его на примерах.

Пример 1: Для стержня, изображенного на рис. 1, а, построить эпюру продольных сил, если

$$P_1 = 3P; P_2 = P; P_3 = 6P; P_4 = 4P; P_5 = 2P.$$

Решение: Разделим стержень на участки, границами которых являются точки приложения сил. Проводя мысленно поперечные сечения 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, внутри каждого участка стержня, отбрасывая правую часть стержня и рассматривая его левую часть по формуле (1) имеем следующие значения продольных усилий:

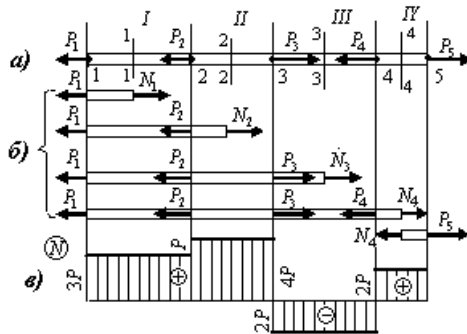


Рис. 1

I-й участок. $N_1 = \sum P = +P_1 = +3P$;

II-й участок. $N_2 = \sum P = P_1 + P_2 = 3P + P = 4P$;

III-й участок. $N_3 = \sum P = P_1 + P_2 - P_3 = 3P + P - 6P = -2P$;

IV-й участок.

$$N_4 = \sum P = +P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = 3P + P - 6P + 4P = 2P.$$

Для контроля определим N_4 , рассматривая правую часть стержня:

$$N_4 = \sum P = P_5 = 2P.$$

По найденным значениям N на рис. 1, ϵ построена эпюра продольных сил. Из эпюры следует, что на участках I, II и IV стержень растянут, а на участке III сжат.

Пример 2. Ступенчатый стальной стержень нагружен осевыми силами $P_1=300$ кН, $P_2=240$ кН, $P_3=100$ кН. Площади поперечных сечений $A_1=20$ см², $A_2=10$ см² (рис. 2, а), $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений. Собственным весом стержня пренебречь.

Решение: Определим реакцию R_A в заделке. Проектируя силы на продольную ось стержня, получим:

$$R_A = P_1 - P_2 + P_3 = 300 - 240 + 100 = 160 \text{ кН.}$$

Используя метод сечений, найдем усилия в сечениях:

$$1-1) \sum X = N_1 - R_A = 0, \quad N_1 = R_A = 160 \text{ кН;}$$

$$2-2) \sum X = N_2 - R_A + P_1 = 0, \\ N_2 = R_A - P_1 = 160 - 300 = -140 \text{ кН;}$$

$$3-3) \sum X = N_3 - R_A + P_1 = 0, \quad N_3 = R_A - P_1 = 140 \text{ кН}$$

$$4-4) \sum X = N_4 - R_A + P_1 - P_2 = 0, \\ N_4 = R_A - P_1 + P_2 = 160 - 300 + 200 = 100 \text{ кН.}$$

Эпюра продольных сил построена на рис. 2, б.

Напряжения в сечениях:

$$1-1) \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{160 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа;}$$

$$2-2) \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = -\frac{140 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -70 \cdot 10^6 \text{ Па} = -70 \text{ МПа;}$$

$$3-3) \sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = -\frac{140 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -140 \cdot 10^6 \text{ Па} = -140 \text{ МПа;}$$

$$4-4) \sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ МПа} = 100 \text{ МПа.}$$

По этим данным на рис. 2, в построена эпюра напряжений σ , изображающая изменение напряжений в поперечных сечениях по длине стержня.

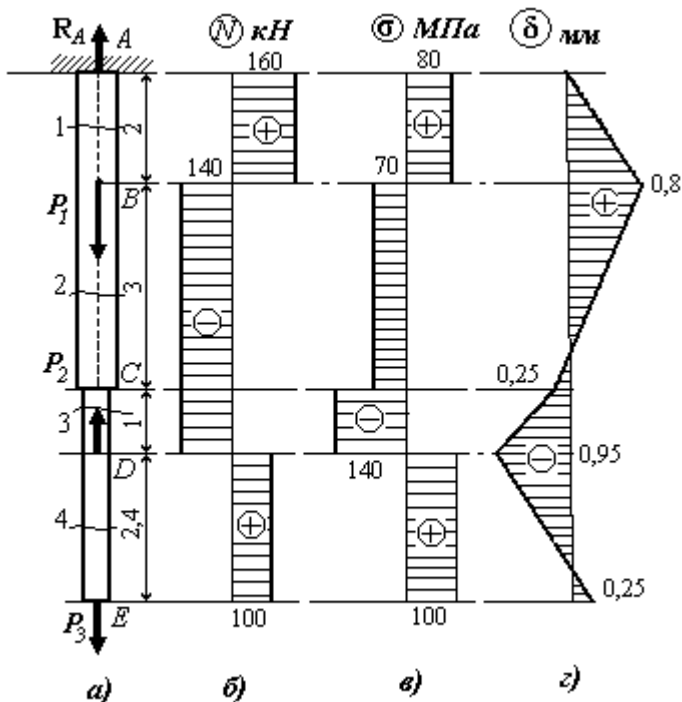


Рис.2

Для определения перемещений следует предварительно найти удлинения участков стержня. Участок AB :

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{80 \cdot 10^6 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,8 \text{ мм (удлинение).}$$

Участок BC :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = -\frac{140 \cdot 10^6 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11}} = -10,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,05 \text{ мм}$$

(укорочение).

Участок CD :

$$\Delta l_3 = \varepsilon_3 l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = -\frac{140 \cdot 10^6 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11}} = -7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,7 \text{ мм}$$

(укорочение)

Участок DE :

$$\Delta l_4 = \varepsilon_4 l_4 = \frac{\sigma_4 l_4}{E} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 2,4}{2 \cdot 10^{11}} = 12 \cdot 10^4 \text{ м (удлинение)}.$$

Определим перемещения сечений:

Перемещение сечения В равно удлинению участка АВ

$$\delta_B = \Delta l_1 = +0,8 \text{ мм (вниз)}.$$

Перемещение сечения С равно сумме удлинений участков АВ и ВС

$$\delta_C = \Delta l_1 + \Delta l_2 = +0,8 - 1,05 = -0,25 \text{ мм (вверх)}.$$

Перемещение сечения D

$$\delta_D = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = +0,8 - 1,05 - 0,7 = -0,95 \text{ мм (вверх)}.$$

Перемещение сечения E

$$\delta_E = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = +0,8 - 1,05 - 0,7 + 1,2 = +0,25 \text{ мм (вниз)}.$$

По этим данным на рис. 2, з построена эпюра перемещений.

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Для обеспечения прочности стержня при растяжении или сжатии необходимо ограничить максимальные напряжения этого стержня некоторым значением, называемым *допускаемым напряжением* $[\sigma]$. Его величина выбирается с учетом коэффициента запаса прочности на основе устанавливаемого заранее для данного материала опасного значения напряжения. Для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, вводят два разных допускаемых напряжений $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leq [\sigma]. \quad (5)$$

Пользуясь им, можно решать следующие задачи:

1. По заданным нагрузкам, размерам сечения и величине допускаемого напряжения проверять прочность стержня.

2. По заданным размерам сечений и известной величине допускаемого напряжения определять размеры поперечного сечения:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (6)$$

3. По заданным размерам сечения и известной величине допускаемого напряжения определять величину допускаемой продольной силы:

$$N \leq [\sigma]A. \quad (7)$$

Пример 3. Для чугунного стержня с площадью сечения $A = 5 \text{ см}^2$ (рис. 3, а) проверить условия прочности при $[\sigma_p] = 30 \text{ МПа}$, $[\sigma_{сж}] = 100 \text{ МПа}$.

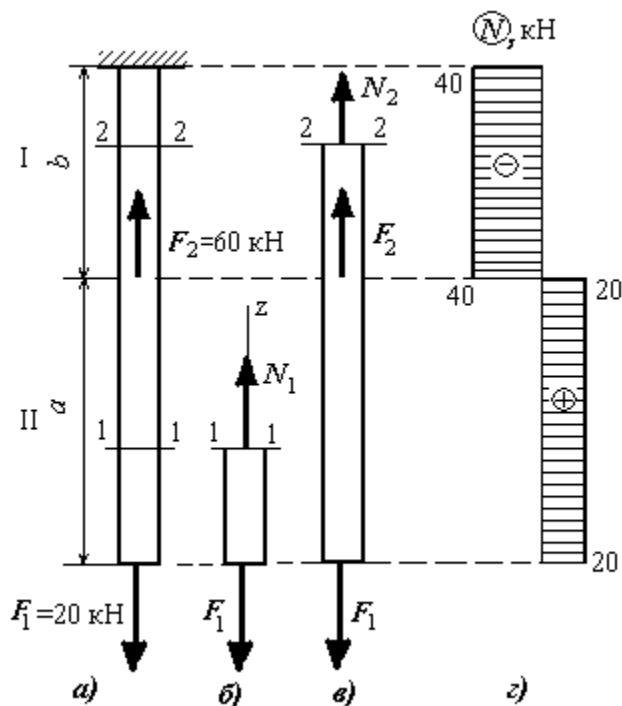
Решение. Для определения продольной силы воспользуемся методом сечений. Проведем произвольное сечение 1-1 на участке I стержня и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части (рис. 3, б). Действие отброшенной части заменим неизвестной силой N_1 , считая ее положительной. Из уравнения равновесия этой отсеченной части в форме равенства нулю суммы проекций всех сил на ось z: $N_1 - F_1 = 0$ следует

$$N_1 = F_1 = 20 \text{ кН}.$$

Аналогично для сечения 2-2 на участке II стержня получим $N_2 + F_2 - F_1 = 0$, откуда

$$N_2 = F_1 - F_2 = -40 \text{ кН}.$$

На участке I стержень испытывает растягивающее усилие $N_1=20$ кН (см. рис. 3, з), поэтому нормальное напряжение в сечениях на этом участке $\sigma_1 = N_1/A = 40$ МПа.



**Ри
с.
3**

На
учас
тке
II,
исп
ыты
ваю
щем
сжат
ие,
 $N_2 =$
- 40
кН.
Соот
ветс
тву

ющее напряжение $\sigma_2 = N_2/A = 80$ МПа.

Так как допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для чугуна различны, необходимо проверить два условия $\sigma_1 \leq [\sigma_p]$ и $\sigma_2 \leq [\sigma_{сж}]$. Первое оказывается невыполненным, поэтому условие прочности в целом не соблюдено.

Пример 4. Поршень цилиндра паровой машины (см. рис.4) имеет диаметр 40 см, а шток поршня – диаметр 5,6 см. Давление пара равно 10 ат ($1\text{ат} = 9,81 \cdot 10^4$ Н/м²). Найти наибольшее напряжение в штоке и соответствующее изменение его длины во время одного хода машины. Длина штока равна 75 см, материал штока - сталь.

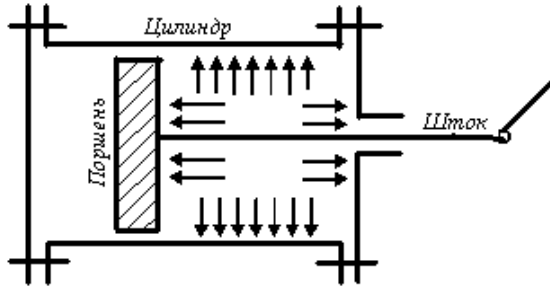


Рис. 4

Решение. Обозначим диаметр цилиндра $D = 40$ см, диаметр штока $d = 5,6$ см, давление пара $q = 10$ ат $= 9,81 \cdot 10^5$ Н/м², модуль упругости $E = 19,62 \cdot 10^{10}$ Н/м², длину штока $l = 75$ см. Площадь поршня равна

$$F_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4} = 0,1256 \text{ м}^2.$$

Усилие в штоке (пар слева) составит

$$P = F_1 q = 0,1256 \cdot 9,81 \cdot 10^5 = 1,23 \cdot 10^5 \text{ Н (сжатие).}$$

Площадь сечения штока равна

$$F_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,056^2}{4} = 2,465 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

напряжение в штоке получится следующим:

$$\sigma = \frac{P}{F_2} = \frac{1,23 \cdot 10^5}{2,465 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2,$$

а удлинение штока будет равно

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF_2} = \frac{1,23 \cdot 10^5 \cdot 0,75}{19,62 \cdot 10^{10} \cdot 2,465 \cdot 10^{-3}} = 191 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Задачи

1.1. Рабочее давление (превышение над наружным) в цилиндре двигателя $q = 10$ ат; внутренний диаметр цилиндра 350 мм (рис. 4). Какое количество болтов диаметром 18 мм

необходимо для того, чтобы прикрепить крышку к стенке цилиндра, если допускаемое напряжение для материала болтов равно 32,5 МПа.

Ответ; 10 болтов.

1.2. Построить эпюры продольных сил, напряжений и деформаций для стержней, показанных на рисунке 5.

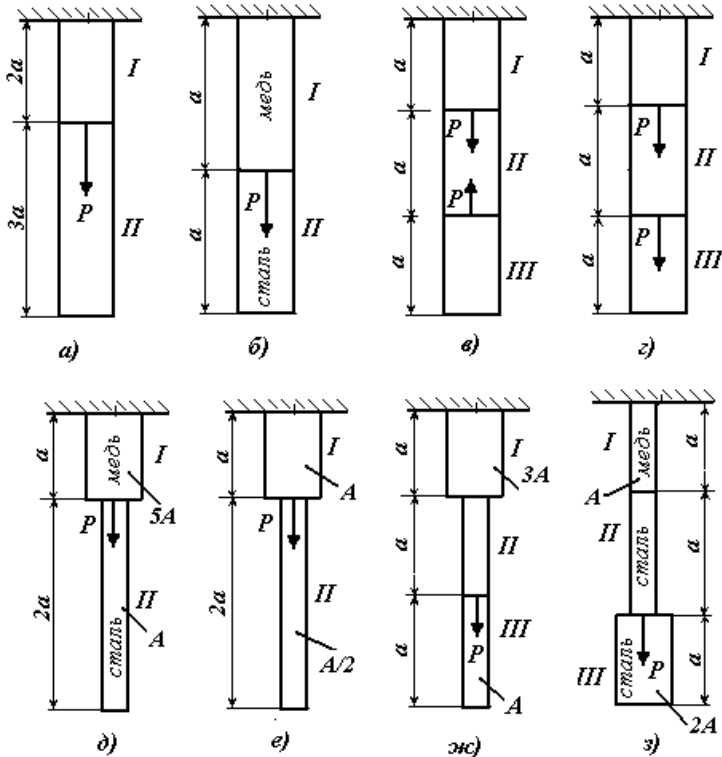


Рис. 5

Ответы

№ задач	N	σ	Δl	δ
1.2,а	$N_I = P$ $N_{II} = 0$	$\sigma_I = P/A$ $\sigma_{II} = 0$	$\Delta l_I = 2Pa/EA$ $\Delta l_{II} = 0$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = \delta_3 = 2Pa/EA$
1.2,б	$N_I = P$ $N_{II} = 0$	$\sigma_I = P/A$ $\sigma_{II} = 0$	$\Delta l_I = Pa/E_M A$ $\Delta l_{II} = 0$	$\delta_1 = 0$ $\delta_2 = \delta_3 = Pa/E_M A$

1.2,в	$N_I=0$ $N_{II}=-P$ $N_{III}=0$	$\sigma_I=0$ $\sigma_{II}=-P/A$ $\sigma_{III}=0$	$\Delta l_I=0$ $\Delta l_{II}=-Pa/EA$ $\Delta l_{III}=0$	$\delta_1=\delta_2=0$ $\delta_3=\delta_4=-Pa/EA$
1.2,з	$N_I=2P$ $N_{II}=P$ $N_{III}=0$	$\sigma_I=2P/A$ $\sigma_{II}=P/A$ $\sigma_{III}=0$	$\Delta l_I=2Pa/EA$ $\Delta l_{II}=Pa/EA$ $\Delta l_{III}=0$	$\delta_1=0$ $\delta_2=2Pa/EA$ $\delta_3=\delta_4=3Pa/EA$
1.2,д	$N_I=P$ $N_{II}=0$	$\sigma_I=P/5A$ $\sigma_{II}=0$	$\Delta l_I=Pa/5E_M A$ $\Delta l_{II}=Pa/EA$	$\delta_1=0$ $\delta_2=\delta_3=Pa/5E_M A$
1.2,е	$N_I=P$ $N_{II}=0$	$\sigma_I=P/A$ $\sigma_{II}=0$	$\Delta l_I=2Pa/EA$ $\Delta l_{II}=0$	$\delta_1=0$ $\delta_2=\delta_3=Pa/EA$
1.2,ж	$N_I=P$ $N_{II}=P$ $N_{III}=0$	$\sigma_I=P/3A$ $\sigma_{II}=P/A$ $\sigma_{III}=0$	$\Delta l_I=Pa/3EA$ $\Delta l_{II}=Pa/EA$ $\Delta l_{III}=0$	$\delta_1=0$ $\delta_2=Pa/3EA$ $\delta_3=\delta_4=4Pa/3EA$
1.2,з	$N_I=P$ $N_{II}=P$ $N_{III}=0$	$\sigma_I=P/A$ $\sigma_{II}=P/A$ $\sigma_{III}=0$	$\Delta l_I=Pa/E_M A$ $\Delta l_{II}=Pa/E_c A$ $\Delta l_{III}=0$	$\delta_1=0; \delta_2=Pa/E_M A$ $\delta_3=\delta_4=$ $= \frac{Pa}{A} \left(\frac{1}{E_M} + \frac{1}{E_c} \right)$

1.3. Определить допустимую нагрузку на деревянную стойку круглого поперечного сечения диаметром 20 см, если сжимающее напряжение в ней не должно превышать 3,25 МПа.

Ответ: 102 кН.

1.4. Проверить прочность стержневой конструкции (рис 6), нагруженной силой 2000 Н. Стержни стальные, диаметр 4 мм, $\alpha=30^\circ$, $[\sigma_p]=160$ МПа, $[\sigma_{сж}]=100$ МПа.

Ответ: Стержни сжимаются. Напряжения $\sigma_{AB}=276$ МПа, $\sigma_{BC}=300$ МПа. Условия прочности не выполняются.

1.5. Определить допускаемую нагрузку и разрывное усилие для магнитной ленты, используемой в устройстве ЕС-5014. Ширина ленты 12,7 мм, толщина 50 мкм. $[\sigma_p]=50$ МПа.

Ответ: 31,75 Н

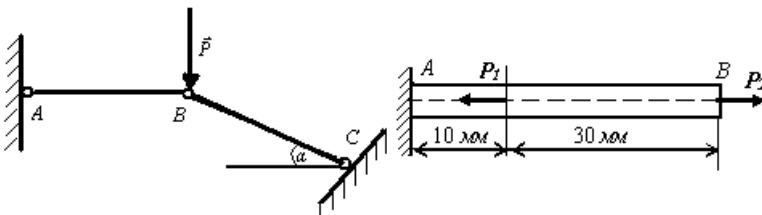


Рис. 6

Рис. 7

1.6. Дюралевый стержень AB (рис.7) нагружен силами $P_1=100$ Н и $P_2 = 50$ Н. Построить эпюры внутренних усилий N и напряжений σ , а также определить перемещение конца B стержня, если его площадь поперечного сечения $A = 10$ мм², $E = 7 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа	$\Delta l \cdot 10^{-7}$, м	$\delta \cdot 10^{-7}$, м
I	50	5	2,143	$\Delta_B = 1,1429$
II	-50	- 5	- 0,714	

1.7. Определить из условия прочности необходимый диаметр стальных стержней (рис.8), нагруженных силой $P = 1000$ Н, $\alpha=45^\circ$. $[\sigma_{сж}] = 100$ МПа, $[\sigma_p] = 160$ МПа.

Ответ: 3,5 мм.

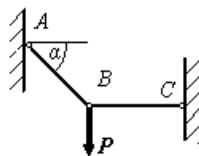


Рис. 8

1.8. Определить из условия прочности модуль упругости основы магнитофонной ленты из ацетилцеллюлозы, для которой $[\sigma_p] = 50$ МПа, если при нагрузке $P = 10$ Н относительная деформация составляет $\varepsilon = 0,02$.

Ответ: $E = 2500$ МПа

1.9. На рис. 9 представлен стержень, верхняя часть которого медная, а нижняя стальная. Построить эпюры внутренних усилий N и напряжения σ для ступенчатого стержня нагруженного силами $P_1=100$ Н, $P_2=200$ Н, если их площади поперечных сечений равны:

$A_m = 10$ мм², $A_{ст} = 5$ мм², $a = 50$ мм.

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	-100	-10
II	-200	-20
III	-200	-40

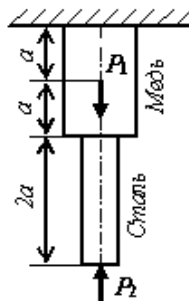


Рис. 9

1.10. В задаче 1.9 найти абсолютное удлинение ступенчатого стержня, если $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: Укорочение на 0,035 мм.

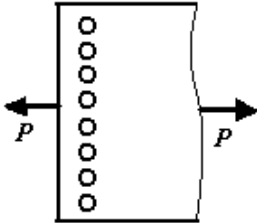


Рис. 10

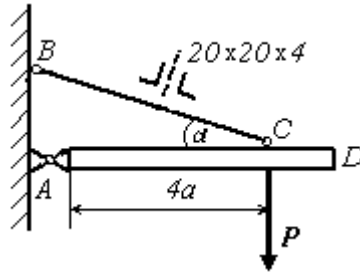


Рис. 11

1.11. Определить, какое напряжение возникает в восьмидорожечной перфоленте, изготовленной из бумаги (рис. 10), если к ней приложено растягивающее усилие $P = 5$ Н. Перфолента толщиной 0,15 мм, шириной 25,4 мм, диаметр пробивки 1,82 мм.

Ответ: 3,075 МПа

1.12. Восьмидорожечная перфолента изготовлена из бумаги толщиной 0,1 мм, пропитанной минеральным маслом (рис.10) $[\sigma]=20$ МПа. Диаметр пробивки 1,83 мм, ширина ленты 25,4 мм. Определить из условия прочности допускаемое усилие перемещения перфоленты.

Ответ: 21 Н.

1.13. Проверить прочность тяги ВС, изготовленной из двух равнобоких уголков (рис. 11). Материал Ст3, $[\sigma_p] = 160$ МПа, $P = 40$ кН, $a = 0.2$ м, $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: Прочность недостаточна: 278 МПа > 160 МПа

1.14. Для ступенчатого бруса (рис. 12), нагруженного силами $P_1 = 400$ Н, $P_2 = 800$ Н, построить эпюры N и σ , если $A_1 = 20$ мм², $A_2 = 10$ мм², $a = 40$ мм.

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	400	20
II	400	40
III	-400	-40

1.15. Сколько медных проволок $d = 2$ мм и $[\sigma] = 100$ МПа необходимо для удержания груза $P = 400$ Н?

Ответ: 2 проволоки

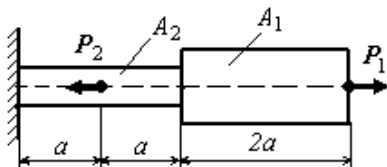


Рис. 12

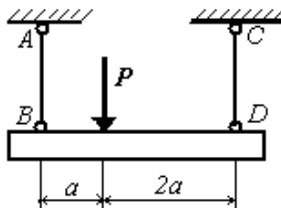


Рис. 13

1.16. Определить допускаемую нагрузку P для несущей конструкции (рис. 13). AB, BC – стальные стержни $d = 2$ мм, $a = 20$ см, $[\sigma] = 160$ МПа.

Ответ: $P \leq 754$ Н

1.17. Построить эпюры N и σ для ступенчатого бруса (рис. 14) $P = 200$ Н, $a = 20$ мм, $A_1 = 10$ мм², $A_2 = 20$ мм².

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	- 400	- 20
II	200	10
III	200	20

1.18. Для ступенчатого бруса (рис. 15), нагруженного силами P_1 и P_2 , построить эпюры N и σ . $P_1 = 400$ Н, $P_2 = 800$ Н, $A_1 = 10$ мм², $A_2 = 20$ мм², $a = 40$ мм. Ответ: .

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	- 400	- 40

II	- 400	- 20
III	400	20

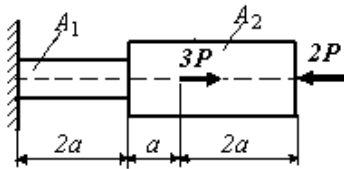


Рис. 14

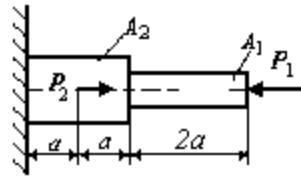


Рис. 15

1.19. Произвести проверочный расчёт на прочность штока поршня компрессора (рис.16), создающего давление $q = 25$ МПа. Внутренний диаметр цилиндра $D = 40$ мм, диаметр стального штока $d = 15$ мм, $[\sigma_c] = 160$ МПа.

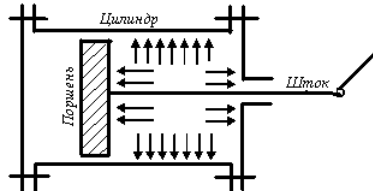


Рис. 16

Ответ: Условие прочности не выполняется, $178 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}$

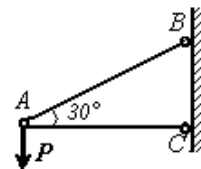
1.20. Во сколько этажей можно построить дом на бетонном фундаменте, если для бетона $[\sigma_{сж}] = 4 \dots 20$ МПа? Размеры кирпича $250 \times 125 \times 62,5$ мм, масса $2,5$ кг?

Ответ: При $[\sigma_{сж}] = 4$ МПа можно построить дом в 100 этажей.

1.21. Основа магнитной ленты из ацетилцеллюлозы имеет толщину $\delta = 20$ мкм, ширина $e = 6,25$ мм, $E = 2,2 \cdot 10^3$ МПа. При испытании её на разрывном устройстве относительная деформация ϵ оказалось равной $0,02$. Определить растягивающее усилие.

Ответ: $5,5 \text{ Н}$

1.22. Определить из условия прочности необходимый диаметр стержней (рис.17), нагруженных силой $P = 1000$ Н, $[\sigma_{сж}] = 100$ МПа, $[\sigma_p] = 160$ МПа.



Ответ: 5 мм

1.23. Проверить прочность стержневой конструкции (рис. 18), $P = 400$ Н, $d_{AC} = d_{BC} = 2$ мм.

Ответ: Условие прочности выполняется, 93 МПа $<$ 100 МПа.

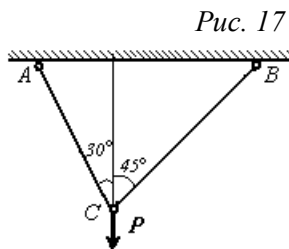


Рис. 17

Рис. 18

1.24. Определить из условия прочности на сжатие допускаемую нагрузку для конструкции, выполненной из двух равнобоких уголков №2 ($20 \times 20 \times 3$ мм), сечение которой изображено на рис. 19. Материал - Ст20, $[\sigma_{сж}] = 100$ МПа.



Рис. 19

Ответ: 35,6 кН

1.25. Капроновый тросик круглого сечения растягивается усилием 40 Н. Относительное его удлинение не должно превышать 0,002, а напряжение не должно быть больше 20 МПа, $E = 450$ МПа. Найти наименьший диаметр, удовлетворяющий этим условиям.

Ответ: 7,6 мм

1.26. Пластина из алюминиевого сплава Д16 шириной 40 мм и толщиной 2 мм нагружена усилием $P = 1000$ Н (рис. 20). Определить из условия прочности допустимый диаметр двух отверстий, ослабляющих пластину, $[\sigma_p] = 100$ МПа.

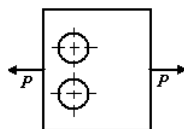


Рис.20

Ответ: 15 мм.

1.27. Медная проволока диаметром 2 мм и длиной 100 мм испытывается на разрывной машине. Определить из условия прочности допускаемую нагрузку и абсолютное удлинение при этой нагрузке. Допускаемое напряжение $[\sigma_p] = 100$ МПа

Ответ: 314 Н; 0,1 мм

1.28. Построить эпюры N и σ для ступенчатого бруса (рис. 21). $A_1 = 10$ мм², $A_2 = 20$ мм², $P = 800$ Н, $a = 20$ мм.

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	0	0
II	800	80
III	800	40
IV	-800	-40

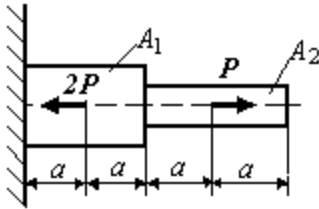


Рис. 21

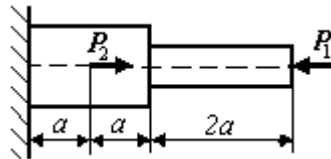


Рис. 22

1.29. Для ступенчатого стержня (рис. 22), нагруженного силами $P_1=400$ Н и $P_2=1000$ Н, $a=20$ мм, $A_1=10$ мм², $A_2=20$ мм², построить эпюры N и σ .

Ответ:

№ участка	N , Н	σ , МПа
I	-400	-40
II	-400	-20
III	600	-30

1.30. Груз A весом 1000 Н равномерно перемещается по горизонтальной поверхности с помощью капроновой нити (рис. 23). Коэффициент трения скольжения $f=0,2$. Определить из условия прочности необходимый диаметр нити.

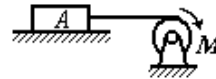
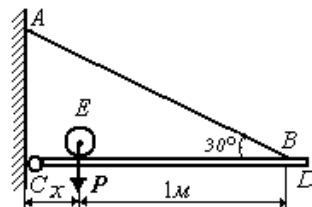


Рис.23

Ответ: 6,5 мм.

1.31. Абсолютно жёсткий брус CD удерживается в горизонтальном положении стальным тросом AB (рис. 24), $d=4$ мм. По CD может перемещаться груз E весом 400 Н,



$\alpha = 30^\circ$. Построить график зависимости напряжения в тросе AD от положения груза x . Рис. 24

Ответ: $\sigma = 63,7x$

1.32. Стальная проволока диаметром 2 мм и длиной 0,5 м растягивается усилием P . Какой длины следует взять (при том же диаметре и той же нагрузке) медную проволоку, чтобы относительные деформации были одинаковы.

Ответ: 0,25 м

1.2. Статически неопределимые системы

Статически неопределимой системой называется система, усилия, в элементах которой нельзя определить при помощи одних лишь уравнений статики.

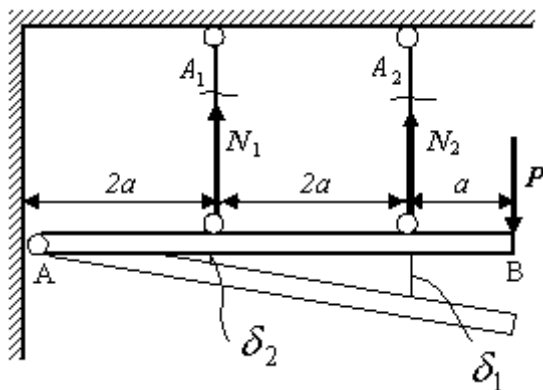
Определение усилий в элементах статически неопределимой системы производится путем добавления к уравнениям статики твердого тела недостающих уравнений, полученных из рассмотрения упругих деформаций системы.

Пример 1. Требуется подобрать поперечные сечения стержней, с помощью которых подвешена балка AB , шарнирно закрепленная в точке A и несущая груз $P = 180$ кН (рис.25). Сечения стержней $A_2 = 1,5A_1$ Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение: Уравнение статики

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 2a + N_2 4a - P 5a = 0, \text{ откуда } 2N_1 + 4N_2 = 5P.$$

Уравнение совместности деформаций



$$\delta_2 = 2\delta_1; \frac{N_2 l}{EA_2} = \frac{2N_1 l}{EA_1},$$

Рис.25

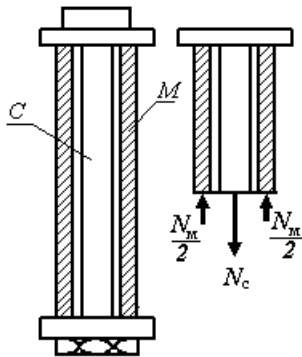
откуда при $A_2 = 1,5A_1$ $N_2 = 3N_1$. Решая совместно полученные уравнения находим

$$N_1 = \frac{5P}{14} = 64,3 \text{ кН}, \quad N_2 = \frac{15P}{14} = 19,3 \text{ кН}.$$

Сечения стержней

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{19300}{160} \approx 120 \text{ мм}^2, \quad A_1 = \frac{A_2}{1,5} = 80 \text{ мм}^2.$$

Пример 2. Определить напряжение в стальном болте и охватывающей его медной трубке (рис. 26) при повороте гайки на $\frac{1}{4}$ оборота, если длина болта $l = 75$ см, шаг нарезки болта $h = 0,3$ см, площадь сечения болта $A_c = 6 \text{ см}^2$, $A_m = 12 \text{ см}^2$. Модули упругости $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа.



Решение: При завинчивании гайки в болте появится растягивающее усилие N_c , а в трубке сжимающее усилие N_m .

Уравнение статики получается путем проектирования сил на ось болта

$$N_c - 2 \frac{N_m}{2} = 0,$$

Рис.26 откуда $N_c = N_m = N$.

Уравнение совместности деформаций получается из условия, что удлинение болта, сложенное с укорочением трубки, должно равняться перемещению гайки.

$$\frac{Nl}{E_c A_c} = \frac{Nl}{E_m A_m} = \frac{h}{4},$$

откуда
$$N = \frac{h A_c E_c}{4l \left(1 + \frac{E_c A_c}{A_m E_m}\right)} = \frac{3 \cdot 600 \cdot 2 \cdot 10^5}{4 \cdot 750(1+1)} = 60 \text{ кН}.$$

Напряжение в болте и в трубке

$$\sigma_c = \frac{60000}{600} = 100 \text{ МПа}, \quad \sigma_m = \frac{60000}{1200} = 50 \text{ МПа}.$$

Пример 3: Жесткий брус AB (рис. 27, а) подвешен на трех тягах и нагружен силой P . Подобрать площадь поперечного сечения тяг, если тяга 1 стальная, тяга 2 медная, с площадью поперечного сечения в три раза большей, чем площадь тяги 1, а тяга 3 дюралюминовая, с площадью сечения в два раза большей тяги 1. Допускаемые напряжения принять следующими: для стали $[\sigma_c] = 160$ МПа, $[\sigma_m] = 60$ МПа, для дюралюмина $[\sigma] = 120$ МПа.

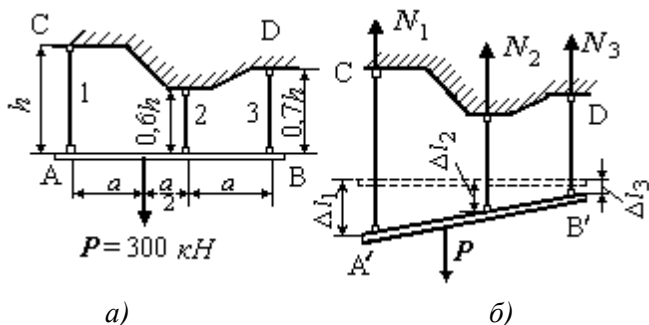


Рис. 27

Решение: Предположим, что все тяги будут растянуты, брус AB после нагружения займет новое положение $A'B'$, изображенное на рис. 27, б. Направление соответствующих реакций точек подвеса тяг также изображено на этом рисунке.

Составим уравнения равновесия – суммы моментов относительно точек C и D

$$1) \sum m_C = N_2 \cdot 1,5a + N_3 \cdot 2,5a - P \cdot a = 0,$$

$$2) \sum m_D = N_1 \cdot 2,5a + N_2 a - P \cdot 1,5a = 0.$$

Удлинения всех тяг можно связать следующей зависимостью:

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{a} = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{1,5a}, \text{ откуда } 2,5\Delta l_2 - \Delta l_1 - 1,5\Delta l_3 = 0.$$

Заменяем в этом уравнении значения удлинений их выражениями:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 h}{E_C A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 0,6h}{E_M A_2} \quad \text{и} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 0,7h}{E_D A_3}.$$

Тогда

$$2,5 \frac{N_2 \cdot 0,6h}{E_M A_2} - \frac{N_1 h}{E_C A_1} - 1,5 \frac{N_3 \cdot 0,7h}{E_D A_3} = 0.$$

Учтем, что $A_2 = 3A_1$ и $A_3 = 2A_1$ и подставим в последнее уравнение значение модулей упругости:

$$3) \quad 2,5 \frac{N_2 \cdot 0,6h}{1 \cdot 10^5 \cdot 3A_1} - \frac{N_1 h}{2 \cdot 10^5 \cdot A_1} - 1,5 \frac{N_3 \cdot 0,7h}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 2A_1} = 0.$$

После выполнения сокращений и упрощений уравнения (1), (2) и (3) и приводятся к следующей системе

$$1,5N_2 + 2,5N_3 = P, \quad 2,5N_1 + N_2 = 1,5P, \quad N_2 - N_1 - 1,5N_3 = 0.$$

Решив эту систему, получаем

$$N_1 = 0,39P = 0,39 \cdot 300000 = 117000 \text{ Н},$$

$$N_2 = 0,52P = 0,39 \cdot 300000 = 156000 \text{ Н},$$

$$N_3 = 0,09P = 0,09 \cdot 300000 = 27000 \text{ Н}.$$

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma_C]} = \frac{117000}{160} = 732 \text{ мм}^2, \quad A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_M]} = \frac{156000}{60} = 2600 \text{ мм}^2,$$

$$A_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma_D]} = \frac{27000}{120} = 225 \text{ мм}^2.$$

Но необходимо выполнить заданные условия соотношения площадей. Так как $\frac{A_2}{A_1} = \frac{260}{732} > 3$, а $\frac{A_3}{A_2} < 2$, то за исходную

возьмем площадь $A_2 = 260 \text{ мм}^2$. Тогда

$$A_1 \geq \frac{A_2}{3} = \frac{2600}{3} = 867 \text{ мм}^2 \quad \text{и} \quad A_3 \geq \frac{2A_2}{3} = \frac{2 \cdot 2600}{3} = 1733 \text{ мм}^2.$$

Обе эти площади больше необходимых по условиям прочности, что допустимо. Если бы в качестве исходных мы взяли полученные из условий прочности площади A_1 и A_3 , то, соблюдая заданные соотношения, площади сечений остальных тяг оказались бы меньше допустимых по условиям прочности.

Итак, окончательно принимаем: $A_1 = 867 \text{ мм}^2$, $A_2 = 2600 \text{ мм}^2$, $A_3 = 1733 \text{ мм}^2$.

Недогрузка стержней 2 и 3 является характерной особенностью статически неопределимых систем, у которых на предельном напряжении, как правило, работают лишь самые слабые звенья, в данной конструкции тяга 2.

1.3. Температурные напряжения

Если элементы конструкции лишены возможности свободно деформироваться, то при изменении температуры в них возникают так называемые температурные усилия и соответствующие им температурные напряжения.

Напряжения, возникающие в поперечных сечениях однородного стержня, защемленного на концах, при изменении температуры определяются по формуле

$$\sigma_t = \pm E \alpha \Delta t, \quad (8)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения;

Δt – изменение температуры против начального значения;

E – модуль упругости.

Напряжения положительны (растягивающие), если температура понижается, и отрицательны (сжимающие) если температура повышается.

При наличии зазора δ между одним из концов стержня и жесткой опорой

$$\sigma_t = -E(\alpha \Delta t - \delta/l), \quad (9)$$

где l длина стержня.

В случае ступенчатого стержня с заземленными концами усилие, возникающее при изменении температуры,

$$N_t = \pm \frac{\Delta t \sum_1^n \alpha_i l_i}{\sum_1^n \frac{l_i}{E_i A_i}}, \quad (10)$$

а при наличии зазора

$$N_t = - \frac{\Delta t \sum_1^n \alpha_i l_i - \delta}{\sum_1^n \frac{l_i}{E_i A_i}}, \quad (11)$$

где α_i – коэффициент линейного температурного расширения материала ступени;

l_i – длина ступени;

E_i – модуль упругости материала ступени;

A_i – площадь поперечного сечения ступени.

Температурное напряжение в поперечном сечении любой ступени определяется по формуле

$$\sigma_t = \frac{N_t}{A_i}. \quad (12)$$

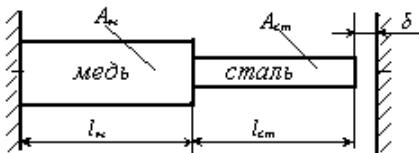
Пример 1. Железнодорожные рельсы сварены при температуре окружающей среды 20°C . Определить напряжение в рельсах при повышении температуры окружающей среды до 40°C , если $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ и $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Изменение температуры равно $\Delta t = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$.

Напряжение определим по формуле (8)

$$\sigma = - E \alpha \Delta t = - 2 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = - 480 \text{ МПа.}$$

Пример 2. Определить напряжения в стальной и медной частях ступенчатого стержня (рис. 28) при повышении температуры на $\Delta t = 30^\circ\text{C}$. Размеры: $l_{cm} = 100$ см, $l_m = 140$ см, зазор $\delta = 0,03$ см, $A_{cm} = 10$ см², $A_m = 20$ см². Модули упругости $E_{cm} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа. Коэффициенты температурного



расширения $\alpha_{cm}=12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_m=16 \cdot 10^{-6}$.

Решение. Определим

Рис. 28

усилие по формуле (11)

$$N_t = -\frac{\Delta t \sum_1^n \alpha_i l_i - \delta}{\sum_1^n \frac{l_i}{E_i A_i}} = -\frac{\Delta t (\alpha_m l_m + \alpha_{cm} l_{cm}) - \delta}{\frac{l_m}{E_m A_m} + \frac{l_c}{E_{cm} A_{cm}}} =$$

$$= -\frac{30(16 \cdot 10^{-6} \cdot 1400 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 1000) - 0,3}{\frac{1400}{1 \cdot 10^5 \cdot 2000} + \frac{1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 1000}} = -79,3 \text{ кН.}$$

Напряжения в поперечных сечениях:

1) стальной части

$$\sigma_{cm} = \frac{N_t}{A_{cm}} = -\frac{79300}{10 \cdot 10^{-4}} = -79,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = -79,3 \text{ МПа}$$

2) медной части

$$\sigma_m = \frac{N_t}{A_m} = -\frac{79300}{20 \cdot 10^{-4}} = -34,65 \text{ МПа}$$

Задачи

1.33. Жесткий брус закреплен с помощью системы стержней одинакового поперечного сечения и одного материала (рис. 29). Значения размера x приведены в таблице: принимая $P = 180$ кН и $[\sigma] = 160$ МПа, определить площадь поперечного сечения стержней.

Схема Вариант	a	b	v	z	e	z
1	0	0	0	0	0	0
2	$a/2$	$a/2$	$a/2$	$a/2$	a	$a/2$
3	a	a	a	a		a
4	$3a/2$			$3a/2$		$3a/2$
5	$2a$					

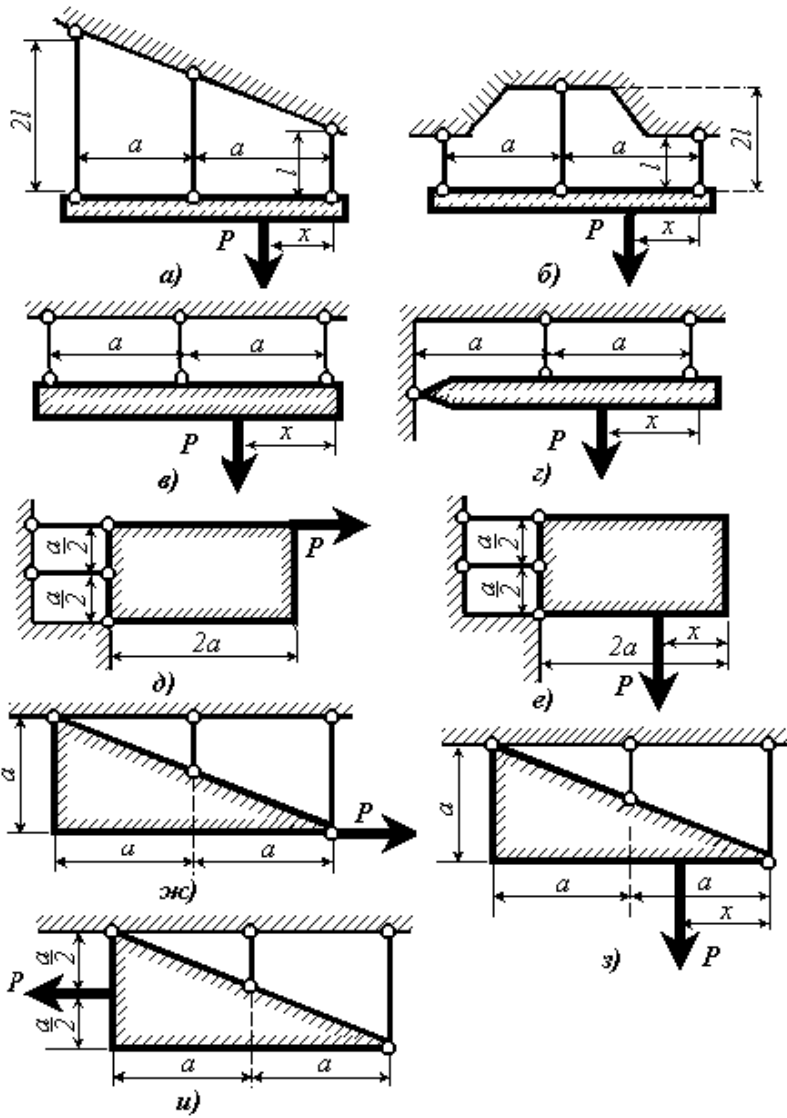


Рис. 29

Ответ:

Схема	а					б		
Вариант	1	2	3	4	5	1	2	3
Площадь сечения, см ²	10	6,87	3,75	6,24	8,75	10,12	7,33	4,5
Схема	в			г				д
Вариант	1	2	3	1	2	4	4	
Площадь сечения, см	9,37	6,56	3,75	9	6,75	4,5	2.25	9
Схема	е		ж	з				и
Вариант	1	2		1	2	3	4	
Площадь сечения, см	18	9	3,75	7,5	7,5	3,75	1,87	1.87

1.34. При какой температуре перекрывается зазор между стержнем и опорой, равный $\Delta = 0,5$ мм, (рис. 30)? Стержень стальной $A = 1$ см², $l = 20$ см.

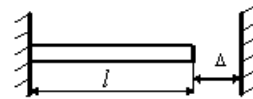


Рис. 30

Ответ: 208°

1.35. Биметаллическая пластина (рис. 31) в процессе работы может разогреться на 55°. Определить возникающие температурные напряжения. Площадь сечения $A = 20$ мм², $a = 30$ мм.

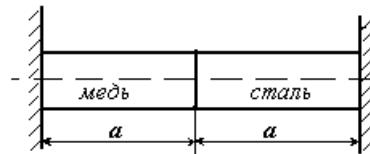


Рис. 31

Ответ: 10266 МПа

1.36. Определить усилия в сечениях стержней (рис. 32), показанных на рисунке на участках I, II и III. Закрепление концов всех стержней абсолютно жесткое.

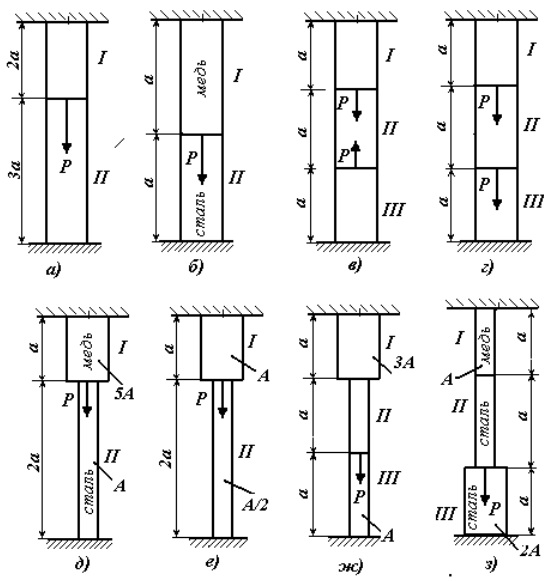


Рис. 32

Ответ:

Усилия	Схемы							
	а	б	в	г	д	е	ж	з
N_I	3/5	1/3	1/3	1	10/11	2/3	3/7	1/6
N_{II}	-2/5	-2/3	-2/3	0	-1/11	-1/3	3/7	1/6
N_{III}			1/3	-1			-4/7	-5/6
Усилия в долях P								

1.37. Определить напряжения в сечениях стержней, показанных на рисунке 33 на участках I, II и III. Плоскости A и B абсолютно неподатливы. Принять $a = 0,5$ м, $A = 100$ см², $P = 150$ кН, $\delta = 1$ мм, Модули упругости $E_c = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа, температурные коэффициенты линейного расширения $\alpha_c = 12 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_m = 16 \cdot 10^{-6}$. Зазоры δ имеют указанный размер до приложения нагрузки P . После приложения нагрузки P зазоры закрываются.

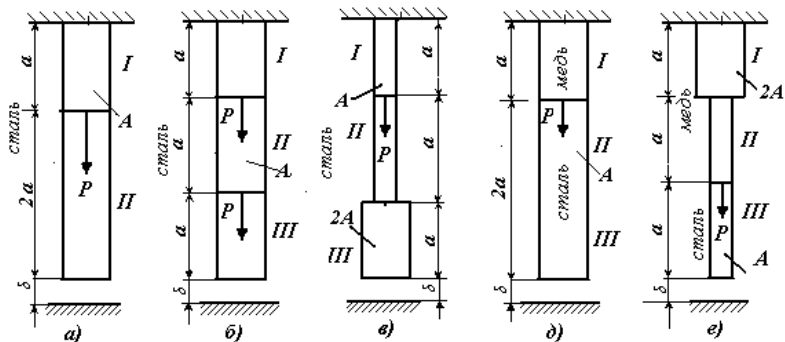


Рис. 33

Ответы:

Напряжения	Схемы				
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>
σ_I	1133	1633	1160	980	238
σ_{II}	-367	133	-340	-520	475
σ_{III}		-1367	-170	-520	-1025
Напряжения в МПа					

2. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

2.1. Статически определимые системы

Крутящий момент T_k в сечении равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов по одну сторону от сечения

$$T_k = \sum_{i=1}^n T_i.$$



Рис. 34

Правило знаков: если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению крутящий момент направлен против хода часовой стрелки (рис. 34), он считается положительным.

При построении эпюры крутящих моментов их величины откладывают перпендикулярно прямой, параллельной оси бруса (базы эпюры).

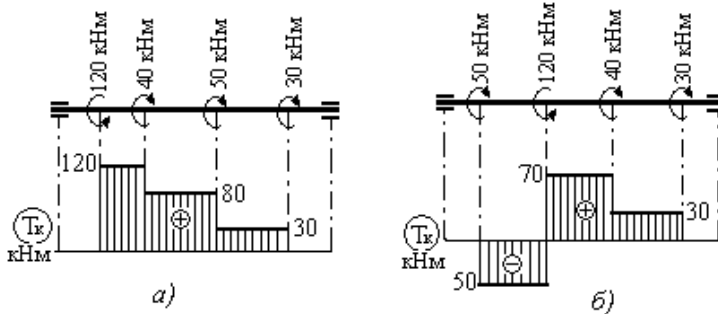


Рис.35

На рис. 35 даны два примера построения эпюр крутящих моментов. Каждая ордината эпюры T_k дает величину крутящего момента в соответствующем поперечном сечении бруса. В сечениях, где приложены крутящие моменты, на эпюре получаются «скачки», величина каждого из них равна соответствующему крутящему моменту.

Сравнение эпюр на рис. 35 показывает, что при одной и той же величине наибольшего крутящего момента расчетный (наибольший) крутящий момент получается различным в зависимости от расположения по длине бруса деталей,

передающих на него крутящие моменты. Очевидно, что на рис. 35,б расположение шкивов целесообразнее.

При расчете валов часто бывают заданы передаваемая мощность (N) и угловая скорость (n или ω) при этом вращающий момент вычисляют по одной из следующих формул:

$$T = \frac{N}{\omega}, \text{ где } T \text{ в н}\cdot\text{м}; N \text{ в Вт}; \omega \text{ в рад/с,}$$

$$T = 7162 \frac{N}{n}, \text{ где } T \text{ в Н}\cdot\text{м}; N \text{ в л.с.}; n \text{ в об/мин.}$$

В поперечных сечениях в рассматриваемом случае возникают лишь касательные напряжения, определяемые по формуле

$$\tau_k = \frac{T_k \rho}{J_\rho},$$

где τ_k - касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения;

T_k - крутящий момент в исследуемом поперечном сечении;

ρ - расстояние от исследуемой точки до оси бруса;

J_ρ - полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

$$\text{Для круга } J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

$$\text{Для кругового кольца } J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1d^4 (1 - c^4),$$

$$\text{где } c = \frac{d}{D}.$$

Наибольшая величина касательного напряжения в крайних точках

сечения, наиболее удаленных от оси бруса, определяется по

формуле

$$\tau_{max} = \frac{T_k \rho_{max}}{J_\rho} = \frac{T}{W_\rho},$$

где отношение $W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}$, называют *полярным моментом сопротивления*.

$$\text{Для круга } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

$$\text{Для кругового кольца } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2d^3 (1 - c^4).$$

Если на участке бруса крутящий момент и полярный момент инерции сечения постоянны, то угол закручивания – угол относительного поворота концевых сечений этого участка – определяется по формулам:

$$\varphi = \frac{T_\kappa l}{GJ_\rho} \text{ (в радианах);}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_\kappa l}{GJ_\rho} \text{ (в градусах),}$$

где l - длина рассматриваемого участка;

GJ_ρ – жесткость поперечного сечения бруса при кручении.

Угол закручивания на единицу длины бруса называется относительным углом закручивания. Он обозначается Θ и определяется из выражений:

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T_\kappa}{GJ_\rho} \text{ рад/м или } \Theta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_\kappa}{GJ_\rho} \text{ град/м.}$$

Пример 1. Определить диаметр сплошного стального вала круглого сечения, передающего крутящий момент $T_\kappa=16$ кН·м., если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau]=80$ МПа, а допустимый угол закручивания $[\varphi]=0,6^\circ$ на один метр длины вала.

Решение. Из условия прочности вала $\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$, где

$$W_{\rho} = \frac{\pi r^3}{2}, \text{ находим } r = \sqrt[3]{\frac{2T_{\kappa}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 16000000}{\pi \cdot 80}} = 50 \text{ мм.}$$

Из условия жесткости вала $\varphi = \frac{T_{\kappa} l}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\varphi]$, где

$$J_{\rho} = \frac{\pi r^4}{2}, G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа, а } [\varphi] = 0,6 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{300}, \text{ вычисляем}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{2T_{\kappa} l \cdot 300}{G \pi^2}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 16000000 \cdot 1000 \cdot 300}{80000 \cdot 9,86}} = 59 \text{ мм.}$$

Ответ: $d \geq 118 \text{ мм.}$

Пример 2. Полый стальной вал с наружным диаметром $d_1 = 75 \text{ мм}$ и внутренним $d_2 = 50 \text{ мм}$ имеет длину 1 м . Он закручивается на 1° парой сил с моментом $3,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Чему равны наибольшие касательные напряжения в вале? Определить величину модуля упругости при сдвиге.

Решение. Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\kappa} \cdot r_1}{J_{\rho}}, \text{ где } J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) = 249 \text{ см}^4,$$

$$\tau_{\max} = \frac{350000 \cdot 3,75}{249} = 52,7 \text{ МПа.}$$

Модуль упругости при сдвиге находим по формуле для угла

закручивания

$$G = \frac{T_{\kappa} l}{\varphi \cdot J_{\rho}} = \frac{350000 \cdot 100 \cdot 180}{\pi \cdot 249} = 8,05 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Пример 3. Полый стальной вал имеет наружный диаметр $d_1 = 100 \text{ мм}$, а внутренний $d_2 = 50 \text{ мм}$. Какую мощность в л.с. передает этот вал при вращении со скоростью $n = 80 \text{ об/мин}$, если при этом он закручивается на угол $1,8^\circ$ на длине $2,7 \text{ м}$? Каково наибольшее касательное напряжение в стержне?

Решение: Крутящий момент, воспринимаемый валом, можно определить из формулы $\varphi = \frac{T_k l}{G \cdot J_\rho}$

$$T_k = \frac{\varphi J_\rho G}{l}. \quad (\text{а})$$

Мощность N связана с крутящим моментом

$$T_k = 7162 \frac{N}{n}. \quad (\text{б})$$

отсюда, после подстановки вместо T_k его значение из (а)

$$N = \frac{n \varphi J_\rho G}{7162}.$$

Угол φ выражаем в радианах $\varphi = 1,8^\circ = 1,8 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{100}$.

Полярный момент инерции равен

$$J_\rho = \frac{\pi r_1^4}{2} (1 - c^4) = \frac{15}{32} \pi r_1^4.$$

Тогда $N = \frac{n \varphi J_\rho G}{7162} = \frac{80 \cdot \pi \cdot 15 \pi \cdot 0,05^4 \cdot 8 \cdot 10^{10}}{7162 \cdot 2,7 \cdot 100 \cdot 32} = 95,6 \text{ л.с.}$

Величина τ_{\max} определится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{T_k \cdot r_1}{J_\rho} = \frac{\varphi \cdot G \cdot r_1}{l} = \frac{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,05}{2,7} = 46,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 46,6 \text{ МПа}$$

Задачи

2.1. Напряжения у поверхности вала $\tau_{\max} = 80 \text{ МПа}$. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала?

Ответ: 60 МПа

2.2. Сплошной стальной вал диаметром 10 см и длиной 6 м закручен на угол 4° . Чему равно наибольшее касательное напряжение?

Ответ: 46,5 МПа

2.3. Определить грузоподъемность $[T_k]$ стального стержня круглого сечения диаметром 20 мм при допуске напряжении $[\tau]=100$ МПа. Чему равна величина угла закручивания участка стержня длиной 100 см?

Ответ: 157 Н·м; 0,125 рад.

2.4. Стальной образец круглого сечения диаметром 20 мм испытывается на кручение на машине, стальной вал которой имеет диаметр 40 мм. Образец и вал имеют общую геометрическую ось. Предел пропорциональности материала образца при растяжении равен 320 МПа. Какова наибольшая величина касательных напряжений в вале машины в тот момент, когда наибольшие касательные напряжения в образце достигнут предела пропорциональности при сдвиге, который следует определить, пользуясь третьей теорией прочности?

Ответ: 20 МПа.

2.5. Стержень из мягкой стали диаметром 25 мм удлиняется на 0,122 мм на длине 20 см при растяжении силой 60 кН. Этот же стержень закручивается на $0,75^\circ$ на длине 20 см при нагружении крутящим моментом 0,2 кН·м. Определить величины E , G и μ .

Ответ: $2 \cdot 10^5$ МПа; $8 \cdot 10^4$ МПа; 0,25.

2.6. При испытании на кручение стального образца длиной 20 см и диаметром 20 мм установлено, что при крутящем моменте 1632 кН·м угол закручивания равен 0,026 рад. Предел упругости достигнут при крутящем моменте 2700 кН·м. Определить величины модуля упругости при сдвиге и предела упругости при кручении.

Ответ: $8 \cdot 10^4$ МПа; 172 МПа.

2.7. На стальной вал через 5 шкивов действуют пары сил, показанные на рисунке 36. Построить эпюру крутящего момента, подобрать диаметр вала при $[\tau]=90$ МПа и определить величину угла поворота правого концевого сечения вала по отношению к левому. Затем первую и четвертую пары сил поменять местами и решить задачу при этом измененном условии.

Ответ: 7 см; 0,000365 рад; 7,7 см; 0.000728 рад.

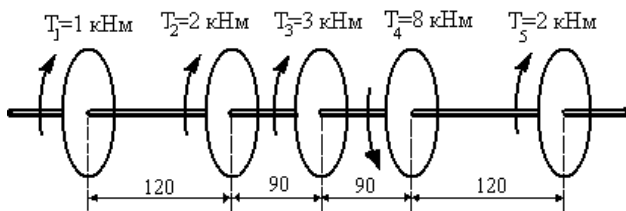


Рис. 36

2.8. Сравнить веса сплошных валов одинаковой длины, стального и из алюминиевого сплава, спроектированных с одинаковым углом закручивания при одинаковых крутящих моментах. Модуль упругости при сдвиге алюминиевого сплава равен $2,7 \cdot 10^4$ МПа, а его объемный вес равен 2,6.

Ответ: Стальной вал на 75% тяжелее алюминиевого.

2.9. К стержню круглого поперечного сечения (рис. 37), защемленному правым концом, приложены две одинаковые крутящие пары сил T . Диаметр левого участка стержня 40 мм, диаметр правого участка 60 мм. Наибольшее касательное напряжение

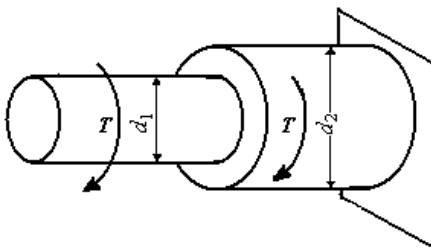


Рис. 37

в стержне на правом участке 80 МПа. Чему равно наибольшее касательное напряжение на левом участке стержня?

Ответ: 135 МПа.

2.10. К стальному валу приложены крутящие пары сил: $T_1=11420$ кН·м, $T_2=27160$ кН·м, $T_3=50000$ кН·м. Длины участков вала (см) показаны на рис. 38. Диаметр крайних участков вала 40 мм; диаметр вала на среднем участке 60 мм. Построить эпюру крутящего момента и график нарастания угла

закручивания, отсчитываемого от левого торцевого сечения 1 вала. Подсчитать, чему равны касательные напряжения у поверхности вала на каждом его участке и угол закручивания вала сечения 2 и 4?

Ответ: 91 МПа; на всех участках; 0,0113 рад.

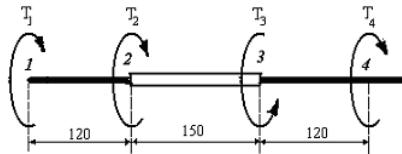


Рис.38

2.11. Проверить на прочность медный брус круглого сечения, который нагружен моментом $T = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $d = 2 \text{ мм}$, $[\tau] = 20 \text{ МПа}$.

Ответ: Прочность не обеспечена: $625 \text{ МПа} > 20 \text{ МПа}$.

2.12. Определить из условия прочности допускаемое число оборотов вала электродвигателя, если его мощность $N = 60 \text{ Вт}$, $d = 3 \text{ мм}$, $[\tau] = 50 \text{ МПа}$.

Ответ: $n \leq 2113 \text{ об/мин}$.

2.13. Определить мощность, передаваемую валом двигателя, если его скорость $n = 600 \text{ об/мин}$, диаметр вала 5 мм , допускаемое напряжение $[\tau] = 50 \text{ МПа}$.

Ответ: $78,5 \text{ Вт}$.

2.14. Определить допускаемое число оборотов вала электродвигателя, если его мощность $N = 60 \text{ Вт}$, диаметр $d = 4 \text{ мм}$, допустимый угол закручивания $[\varphi] = 1^\circ$ на 1 м , длина вала $l = 0,1 \text{ м}$.

Ответ: $n \leq 1605 \text{ об/мин}$.

2.15. Определить из условия жёсткости допускаемое число оборотов вала двигателя. Материал вала – сталь $[\varphi_0] = 1^\circ$ на 1 м , длина вала $0,1 \text{ м}$, $d = 3 \text{ мм}$, мощность двигателя 100 Вт .

Ответ: 8452 об/мин .

2.16. Определить необходимый диаметр ножки ключа. Сила упругости пружины замка 20 Н приложена в точке В (рис. 39). Материал ключа – сталь, $[\tau] = 40$ МПа, $AB = 20$ мм.

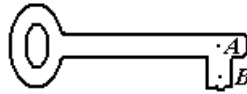


Рис. 39

Ответ: 4 мм

2.17. Построить эпюру приложенных к валу крутящих моментов (рис. 40). Диаметр вала равен $d = 4$ мм, $T_1 = 6$ Н·м, $T_2 = 4$ Н·м, $T_3 = 2$ Н·м. Определить максимальное напряжение τ_{max} .

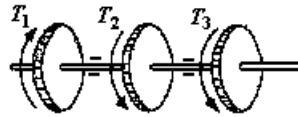


Рис.40

Ответ: $T_I = - 6$ Н·м, $T_{II} = - 2$ Н·м, $\tau_{max} = 469$ МПа.

2.18. Ступенчатый вал, диаметры которого $d_1 = 4$ мм, $d_2 = 6$ мм, нагружен крутящим моментом $T = 2$ Н·м (рис. 41). Определить максимальное напряжение τ_{max} , возникающее в сечениях вала.

Ответ: 156 МПа.

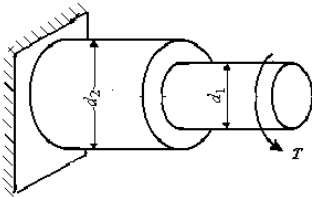


Рис. 41

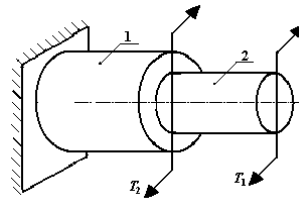


Рис. 42

2.19. Проверить прочность ступенчатого бруса (рис. 42), нагруженного крутящими моментами: $T_1 = 10$ Н·м, $T_2 = 20$ Н·м. $d_1 = 20$ мм, $d_2 = 10$ мм, $[\tau] = 60$ МПа.

Ответ: Прочность бруса обеспечена: 15 МПа ≤ 60 МПа

2.20. Определить из условия прочности размеры кольцевого сечения вала. Мощность, передаваемая валу от двигателя $N = 120$ Вт, $n = 1200$ об/мин, $d/D = 0,8$, $[\tau] = 60$ МПа.

Ответ: $D = 5,5$ мм, $d = 4,5$ мм.

2.21. Построить эпюру крутящих моментов для вала диаметром $d = 4$ мм, (рис. 43) нагруженного моментами:
 $T_1 = T_2 = T_4 = 1$ Н·м., $T_3 = 3$ Н·м.

Ответ: $T_I = -1$ Н·м, $T_{II} = 2$ Н·м, $T_{III} = 1$ Н·м

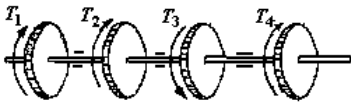


Рис. 43

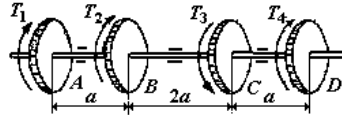


Рис. 44

2.22. Построить эпюру крутящих моментов и углов закручивания для стального вала, нагруженного моментами $T_1 = 4$ Н·м, $T_2 = 3$ Н·м, $T_3 = 12$ Н·м, $T_4 = 5$ Н·м (рис. 44). Найти диаметр из условия расчёта на жёсткость, $a = 50$ мм, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\varphi = 0,6^\circ$ на 1 м.

Ответ: $d = 10$ мм; $T_I = -4$ Н·м, $T_{II} = -7$ Н·м, $T_{III} = 5$ Н·м;

$\varphi_I = -0,0025$ рад, $\varphi_{II} = -0,00875$ рад, $\varphi_{III} = 0,00313$ рад

2.23. Вал передаточного механизма (рис. 45) посредством ременной передачи и шкива A получает от двигателя момент T_1 . Этот скручивающий момент через передающие шкивы B, C, D , связанные ремнями со станками затрачивается на сопротивление вращению деталей работающих станков.

$T_1 = 5$ $T_2 = 2$ Н·м, $T_3 = 1$ Н·м, $T_4 = 2$ Н·м, $a = 0,1$ м.

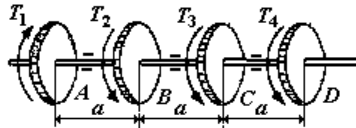


Рис. 45

1) Построить эпюру крутящих моментов T для данной схемы нагружения и определить T_{\max} .

2) Перестановкой шкивов добиться оптимального их расположения для уменьшения T_{\max} и построить эпюру крутящих моментов T .

Ответ: 1) $T_I = 5$ Н·м, $T_{II} = 3$ Н·м, $T_{III} = 2$ Н·м; $T_{\max} = 5$ Н·м, 2) $T_I = 2$ Н·м, $T_{II} = -3$ Н·м, $T_{III} = -2$ Н·м; $T_{\max} = 3$ Н·м

2.24. В задаче 2.23 для случая оптимального расположения шкивов определить из условия жёсткости необходимый

диаметр вала постоянного сечения. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\varphi = 0.4^\circ$ на 1 м.

Ответ: 12 мм.

2.25. Передаточный вал посредством ременной передачи и шкива A получает от двигателя крутящий момент T_1 . Этот крутящий момент через передающие шкивы B, C, D ,

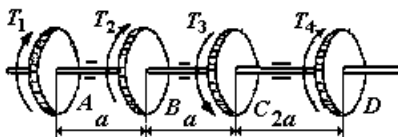


Рис. 46

связанные ремнями со станками (рис. 46), затрачивается на преодоление сопротивления вращения деталей работающих станков. Построить эпюру T_k для данной схемы нагружения и определить T_{\max} в сечении, если $T_1 = 5$ Н·м, $T_2 = 3$ Н·м, $T_3 = 10$ Н·м, $T_4 = 2$ Н·м, $a = 0,1$ м.

Ответ: $T_I = -5$ Н·м, $T_{II} = -8$ Н·м, $T_{III} = 2$ Н·м; $T_{\max} = 8$ Н·м

2.26. В задаче 2.25 для случая оптимального расположения шкивов определить из условия жёсткости необходимый диаметр вала постоянного сечения. $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\varphi = 0.4^\circ$ на 1 м.

Ответ: $T_I = -5$ Н·м, $T_{II} = 5$ Н·м, $T_{III} = 2$ Н·м; $T_{\max} = 5$ Н·м; 10 мм.

2.27. Определить необходимый диаметр вала привода печатающего барабана АЦПУ (алфавитно-цифрового устройства) ЭВМ серии ЕС, если он приводится в движение электродвигателем мощности $N = 90$ Вт, с числом оборотов $n = 1460$ об/мин. Передаточное отношение привода $i = 2,65$. Материал вала – сталь, $[\tau] = 50$ МПа.

Ответ: 6 мм.

2.28. Определить из условия жёсткости диаметр вала привода печатающего барабана АЦПУ (алфавитно-цифрового печатающего устройства) ЭВМ серии ЕС, если он приводится в движение электродвигателем мощностью $N = 90$ Вт, с числом оборотов $n = 1460$ об/мин, передаточное отношение $i = 2,65$.

Материал вала – сталь, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, допустимый угол закручивания $[\varphi] = 0,5^0$ на 1 м, длина вала $l = 0,2$ м.

Ответ: $d \geq 8,1$ мм

2.29. Сравнить максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях валов, один из которых сплошной, а другой полый (рис. 46). Внешние диаметры D и длины валов одинаковы, внутренний диаметр полого вала $d = 0,8D$. Валы изготовлены из одинакового материала и нагружены одинаковым моментом.

Ответ: 0,59

2.30. Два вала одинакового диаметра, один сплошной, другой полый (рис. 47) (отношение внутреннего диаметра к внешнему $c = 0,8$) нагружены одинаковыми внешними моментами изготовлены из одинакового материала. Найти зависимость между максимальными углами закручивания.

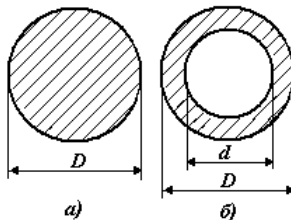


Рис. 47

Ответ: 0,59

2.31. Определить из условия прочности диаметры валов одноступенчатого редуктора механизма настройки конденсатора переменной ёмкости (рис. 48), если $T_{вх} = 0,3$ Н·м, количество зубьев колес $z_1 = 20$, $z_2 = 60$, допустимое напряжение материала валов – $[\tau] = 60$ МПа.

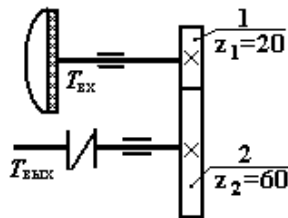


Рис. 48

Ответ: $D_{вх} = 3$ мм, $D_{вых} = 2,1$ мм

2.32. Сплошной стальной вал диаметром 5 мм и длиной 0,2 м, закручен на угол $0,5^0$. Чему равно наибольшее касательное напряжение?

Ответ: 8,72 МПа.

2.33. Определить допускаемый угол закручивания для вала механизма настройки конденсатора переменной ёмкости $d_B = 2$ мм, $l = 0,1$ м., если к нему приложен крутящий момент $T = 0,2$ Н·м. Вал стальной $[\tau] = 40$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа,

Ответ: 9°

2.34. Определить из условия прочности вала на кручение допускаемое прижимное усилие устройства выдачи билетов (рис. 49). Диаметр резинового барабана $D = 40$ мм, коэффициент трения бумага-резина, $f = 0,8$, диаметр вала $d = 4$ мм. МПа, $[\tau] = 100$ МПа.

Ответ: 80 Н.

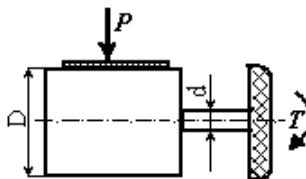


Рис. 49

2.2. Статически неопределимые задачи

Статически неопределимые задачи при кручении кроме уравнений статики требуют дополнительные уравнения перемещений, которые можно получить из рассмотрения деформаций заданной конструкции через углы закручивания.

Метод решения статически неопределимых задач на кручение в принципе не отличается от решения таких же задач на растяжение (сжатие).

Пример. Стальной вал диаметром 0,1 м неподвижно защемлен обоими концами (рис. 50). В промежуточном сечении отстоящем на расстоянии $a = 0,4$ м от плоскости защемления левого конца на расстоянии $b = 0,8$ м от плоскости защемления правого конца, приложен скручивающий момент $T=80$ Н·м. Определить напряжения в вале и угол закручивания.

Решение. Неизвестные реактивные моменты в защемлении обозначим T_A и T_B . Статика дает одно уравнение равновесия

$$- T_A + T - T_B = 0, \text{ или } T_A + T_B = T. \quad (a)$$

Таким образом, задача один раз статически неопределима. Отбросим правое защемление и заменим его действие на брус реактивным моментом T_B .

Дополнительное уравнение для решения задачи получим, рассматривая деформацию бруса. Так как оба конца бруса жестко защемлены, то угол поворота сечения B относительно A равен нулю $\varphi_{B,A}=0$.

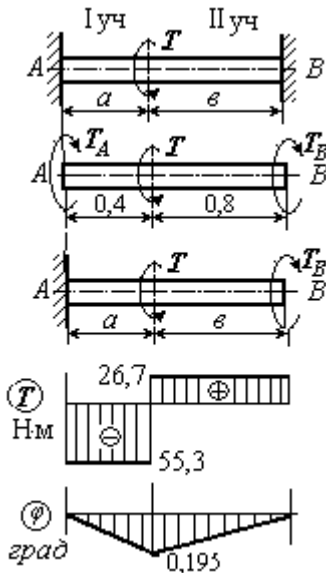


Рис. 50

Выразим этот угол по формуле

$$\varphi = \frac{T l}{G J_{\rho}} \quad \text{через} \quad \text{крутящие}$$

моменты, получим

$$\varphi_{B,A} = \frac{T_B b}{G J_{\rho}} + \frac{(T_B - T)a}{G J_{\rho}} = 0,$$

$$\text{или} \quad T_B b + (T_B - T)a = 0. \quad (б)$$

Подставляя (а) в (б) получим

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{b}{a}, \quad (в)$$

т.е. величины реактивных моментов обратно
пропорциональны расстояниям a и b до сечения, в котором приложен крутящий момент.

$$T_B \cdot 0,8 + (T_B - 80) \cdot 0,4 = 0, \text{ откуда}$$

$$T_B = 80/3 \approx 26,7 \text{ Н}\cdot\text{м}, \text{ получим} \quad T_A = T$$

$$- T_B = 80 - 80/3 = 80 \cdot 2/3 \approx 53,3 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Полярный момент инерции круга

$$J_{\rho} = \frac{\pi^4}{2} = \frac{3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{2} = 7,85 \cdot 10^{-8}$$

Определим угол поворота сечения 1-1

$$\varphi_{1-1} = \frac{T_B b}{G J_{\rho}} = \frac{26,7 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 7,85 \cdot 10^{-8}} = 0,0034 \text{ рад}$$

или в градусах

$$\varphi_{1-1} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \frac{T_B b}{G J_{\rho}} = \frac{180}{3,14} \cdot 0,0034 \approx 0,195^{\circ}$$

Задачи

2.35. Стальной стержень AB круглого поперечного сечения жестко закреплён в сечениях A и B (рис. 51) и нагружен скручивающим моментом $T = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $a = 0,1 \text{ м}$.



Рис. 51

Построить эпюру крутящих моментов и определить T_{\max} .

Ответ: $T_A = 2/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_B = 1/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{\max} = 2/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

2.36. В задаче 2.35 определить диаметр стержня AB из условия жёсткости. $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\varphi] = 0,5^0$ на 1 м , $a = 0.1 \text{ м}$.

Ответ: $d \geq 5,6 \text{ мм}$

2.37. Стержень AB круглого (рис. 52) поперечного сечения жестко закреплён в сечениях A и B и нагружен скручивающим моментом $T = 5 \text{ Нм}$, $a = 0,2 \text{ м}$. Построить эпюру крутящих моментов и определить T_{\max} .



Рис. 52

Ответ: $T_A = 10/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_B = 5/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{\max} = 10/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

2.38. В задаче 2.37 определить диаметр стержня AB из условия прочности, если $[\tau] = 40 \text{ МПа}$.

Ответ: $d \geq 7 \text{ мм}$.

2.39. Стержень AB круглого поперечного сечения жёстко закреплён в сечениях A и B (рис. 53) и нагружен скручивающими моментами $T_1 = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_2 = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $a = 0,1 \text{ м}$. Построить эпюру крутящих моментов и определить T_{\max} .



Рис. 53

Ответ: $T_I = T_A = 4/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{II} = 1/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{III} = T_B = 5/3 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
 $T_{\max} = T_B$

2.40. Определить в задаче 2.39 диаметр d стержня AB из условия прочности. $[\tau] = 40 \text{ МПа}$.

Ответ: 6 мм .

2.41. Стальной стержень AB круглого поперечного сечения закреплён в сечениях A и B (рис. 54) и нагружен скручивающими моментами. $T_1 = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_2 = 3 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $a = 0,1 \text{ м}$. Построить эпюру крутящих моментов и определить T_{\max} .

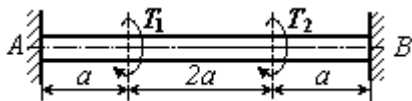


Рис. 54

Ответ: $T_I = -1,75 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{II} = -0,75 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $T_{III} = 2,25 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
 $T_{\max} = 2,25 \text{ Н}\cdot\text{м}$

2.42. В задаче 2.41 определить диаметр стержня AB из условия жёсткости. $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $[\varphi] = 0,5^\circ$ на 1 м , $a = 0,1 \text{ м}$.

Ответ: 30 мм

2.43. Круглый стержень с жестко зашечленными концами подвергается действию двух равных и одинаково направленных пар сил с моментами по $80 \text{ Н}\cdot\text{м}$ (рис. 55). Раскрыть статическую



Рис. 55

неопределимость и определить угол поворота среднего сечения 1-1, если диаметр равен 10 см , расстояния $a = 60 \text{ см}$, $\epsilon = 40 \text{ см}$.

Ответ: $T_A = T_B = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $\varphi = 0,0001 \text{ рад} = 0,0057^\circ$

3. СДВИГ

3.1 Расчет на срез и смятие болтовых и заклепочных соединений

Касательные напряжения при чистом сдвиге можно считать равномерно распределенным по площади сдвига и определять по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A},$$

где Q – сдвигающая сила, A – площадь сдвига.

Закон Гука при сдвиге выражается формулой

$$\tau = G\gamma,$$

где γ – угол сдвига, G – модуль сдвига.

Формула

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

выражает связь между тремя упругими постоянными материала – модулем упругости при растяжении сжатии E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ .

Условие прочности при сдвиге можно записать так:

$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

Условие прочности на срез для стержня заклепки или болта

$$\tau = \frac{P}{m \cdot i \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{m \cdot i \cdot \pi d^2} \leq [\tau],$$

где – P – сила, действующая в соединении; d – диаметр стержня, болта или заклепки; m – число срезов, т.е. плоскостей, по которым может произойти срез стержня; i – число заклепок или болтов; $[\tau_{cp}]$ – допускаемое касательное напряжение.

Условие прочности на смятие контакта листа со стержнем заклепки или болта

$$\sigma_{см} = \frac{P}{nd \sum \delta} \leq [\sigma_{см}],$$

где N – расчетное усилие в соединении; n – число отверстий; d – диаметр отверстия; $\sum \delta$ – наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении.

Пример 1. Определить необходимое количество заклепок диаметром 20 мм для соединения внахлестку двух листов толщиной 8 мм и 10 мм (рис. 56). Сила P , растягивающая

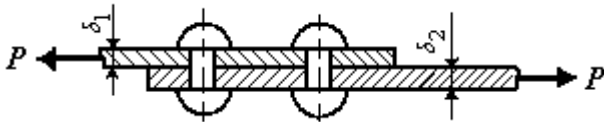


Рис. 56

соединение, равна 200 кН. Допускаемые напряжения на срез $[\tau_{ср}] = 140$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 320$ МПа.

Решение. Из уравнения прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau_{ср}]} = \frac{200000}{\pi \frac{0,02^2}{4} 140 \cdot 10^6} = 4,53 \approx 5.$$

Из уравнения прочности на смятие необходимое число заклепок $n \geq \frac{P}{\delta d [\sigma_{см}]} = \frac{200000}{0,008 \cdot 0,02 \cdot 320 \cdot 10^6} = 3,9 \approx 4.$

Необходимо поставить пять заклепок.

Пример 2. Цилиндрический котел диаметром 150 см испытывает внутреннее давление 4 ат. Продольный шов осуществлен внахлестку с одним рядом заклепок. Толщина листов 10 мм, диаметр заклепок 20 мм, шаг заклепок $a = 75$ мм. Определить касательные, сминающие и растягивающие напряжения в стыке. Определить также предельное допускаемое давление в котле, если допускаемые напряжения: на смятие $[\sigma_c] = 160$ МПа, $[\tau] = 72$ МПа, $[\sigma] = 100$ МПа.

Решение: Вырезаем из котла элемент шириной, равной шагу заклепок a . Расчетная схема представлена на рис. 57. напряжения определяются так:

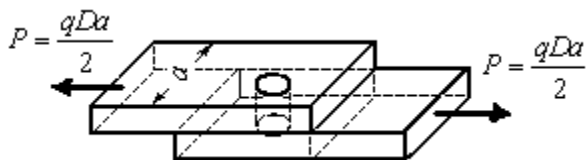


Рис. 57

$$\sigma = \frac{qDa}{2(a-d)t} = \frac{0,4 \cdot 1500 \cdot 75}{2(75-20)10} = 40,8 \text{ МПа,}$$

$$\tau = \frac{qDa}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{0,4 \cdot 1500 \cdot 75}{2 \cdot \frac{3,14 \cdot 20^2}{4}} = 71,7 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_c = \frac{qDa}{2td} = \frac{0,4 \cdot 1500 \cdot 75}{2 \cdot 10 \cdot 20} = 112,5 \text{ МПа.}$$

Задачи

3.1. Определить модуль упругости при растяжении E для материала, у которого модуль упругости при сдвиге $G = 4 \cdot 10^4$ МПа, а коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$.

Ответ: $E = 0,96 \cdot 10^5$ МПа.

3.2. Определить модуль сдвига для материала образца, выполненного в форме параллелепипеда (рис. 58) размером

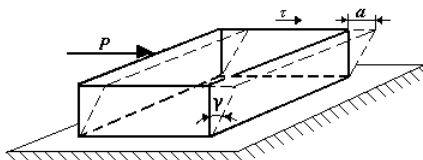


Рис. 58

$20 \times 10 \times 5$ мм, если под действием силы $P = 1000$ Н абсолютная деформация образца при сдвиге составляет $a = 0,1$ мм.

Ответ: 250 МПа

3.3. На плоском стальном образце до нагрузки была нанесена линия под углом 30° к его оси. На какую величину изменится этот угол, если образец будет растянут до напряжения $\sigma = 120$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,25$.

Ответ: $\gamma=0,00065$ рад. = $2'14''$

3.4. Определить необходимое число заклёпок $d = 10$ мм для соединения внахлёт двух листов толщиной 4 мм и 5 мм (рис. 59). Сила $P = 50$ кН, $[\sigma_{см}] = 200$ МПа, $[\tau_{ср}] = 140$ МПа.

Ответ: 7 заклёпок

3.5. Определить диаметр заклёпки из условия прочности на смятие для соединения, показанного на рисунке 59. $P = 0,5$ кН, $[\sigma_{см}] = 150$ МПа, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм,.

Ответ: 2 мм.

3.6. Определить из условия прочности на срез и смятие диаметр заклёпки для соединения, показанного на рисунке 59. $\delta_1 = \delta_2 = 2$ мм, $P = 1000$ Н, $[\tau_{ср}] = 50$ МПа, $[\sigma_{см}] = 200$ МПа.

Ответ: 3 мм.



Рис. 59

3.7. Два листа соединены внахлест двумя заклепками и нагружены усилием $P = 0,5$ кН (рис. 59). Определить диаметр заклёпки из условия прочности на срез. $[\tau_{ср}] = 60$ МПа.

Ответ: 3 мм.

3.8. Определить диаметр заклёпки из условия прочности на смятие соединения, показанного на рисунке 59, если $P = 10$ кН, $[\sigma_{см}] = 150$ МПа, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм, количество заклёпок $n = 5$.

Ответ: 7 мм

3.9. Два листа толщиной 4 мм и 5 мм соединены внахлёт заклёпками, диаметр которых равен 10 мм (рис. 59). Определить необходимое количество заклёпок в соединении, если сила $P = 50$ кН, $[\sigma_{см}] = 300$ МПа, $[\tau_{ср}] = 140$ МПа.

Ответ: 5 заклёпок

3.10. Определить необходимое число заклепок диаметром 20 мм для присоединения двух листов толщиной по 5 мм к третьему листу толщиной 12 мм (рис. 60). Сила P , растягивающая соединение, равна 180 кН. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau_{ср}] = 100$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 280$ МПа.



Рис. 60

Ответ: 4 заклепки.

3.11. Определить необходимое число заклёпок $d = 2$ мм, для соединения впритык двух листов с помощью накладок (рис. 61). $P = 2$ кН, толщина листов 5 мм, толщина накладок по 3 мм, $[\sigma_{см}] = 280$ МПа, $[\tau_{ср}] = 100$ МПа.

Ответ: 4 заклепки с каждой стороны

3.12. Определить необходимое количество заклепок диаметром 17 мм для соединения впритык двух листов при помощи двух накладок (рис. 61). Растягивающая сил $P = 300$ кН. Толщина листов 10 мм, толщина накладок по 6 мм. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau_{ср}] = 100$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 280$ МПа.



Рис.61

Ответ: Семь заклепок с каждой стороны стыка.

3.13. Два листа соединены при помощи одной накладки, как показано на рис. 62. Толщина листов и накладки по 10 мм. Определить необходимое количество заклепок диаметром 17 мм, если допускаемые напряжения на срез $[\tau_{ср}] = 140$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 320$ МПа. Сила $P = 240$ кН.

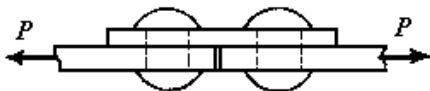


Рис. 62

Ответ: восемь заклепок с каждой стороны стыка.

3.14. Два листа толщиной по 10 мм соединены с тремя листами толщиной по 8 мм при помощи заклепок диаметром



Рис. 63

20 мм по схеме, изображенной на рис. 63. Соединение растягивается силой $P = 280$ кН. Определить необходимое число заклепок, если допускаемые напряжения: $[\tau_{cp}] = 100$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 280$ МПа.

Ответ: Три заклепки.

3.15. Лист с поперечным сечением 12×150 мм² имеет стык (рис. 64), перекрытый двумя накладками толщиной 6 мм. В соединении применены заклепки диаметром 20 мм. Растягивающее

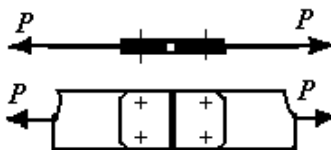
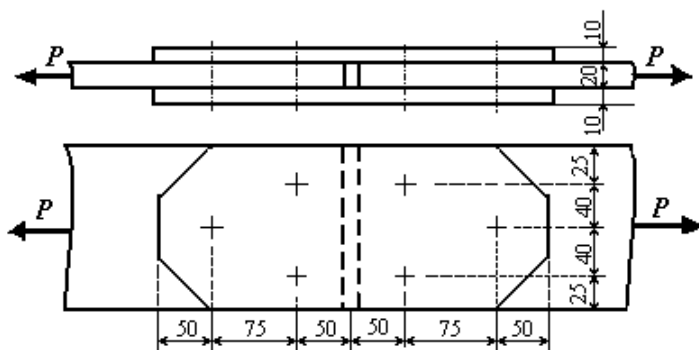


Рис. 64

усилие $P = 120$ кН. Определить напряжения в заклепках на срез и на смятие, а также напряжения на разрыв в опасных сечениях листа и накладки.

Ответ: В МПа: 95,5; 250; 90,9; 90,9.

3.16. В стыке двух листов применены заклепки диаметром 26 мм. Соединение выполнено, как показано на рис. 65. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau_{cp}] = 100$ МПа, на смятие $[\sigma_{см}] = 280$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа. Определить наибольшее



рас
тяг
ива
ющ
ее
уси
лие,

допускаемое для этого стыка.

Ответ: 250 кН.

Рис.65

3.17. Котел диаметром 160 см подвергнут внутреннему давлению 10 ат. Продольный шов осуществлен внахлестку с двумя рядами заклепок. Толщина листов 10 мм; диаметр заклепок 20 мм; шаг заклепок 100 мм (расстояние между заклепками одного ряда). Определить предельное допускаемое давление в котле при следующих допускаемых напряжениях: $[\tau_{cp}] = 70$ МПа, $[\sigma_{cm}] = 160$ МПа, $[\sigma] = 100$ МПа.

Ответ: 1) $\tau_{cp} = 127,3$ МПа, $\sigma_{cm} = 200$ МПа, $\sigma = 100$ МПа;
2) $q = 5,5$ ат.

3.18. Листы котла соединены впритык двумя накладками. С каждой стороны стыка расположено по два ряда заклепок. Толщина листов 20 мм. Толщина накладок по 10 мм. Диаметр котла 250 см. Диаметр заклепок 23 мм. Шаг заклепок 75 мм. Внутреннее давление в котле 12 ат. Определить растягивающие, сминающие и касательные напряжения в стыке.

Ответ: $\tau_{cp} = 67,6$ МПа, $\sigma_{cm} = 122,3$ МПа, $\sigma = 108$ МПа

3.19. Крышки котла присоединены к стенкам заклепками при помощи уголков, как показано на рис. 66. Диаметр котла 100 см; давление в котле равно 10 ат. Толщина стенок котла и полок уголка по 10 мм. Определить количество заклепок, необходимое для соединения стенки котла с уголком, если диаметр заклепок 20 мм. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau_{cp}] = 70$ МПа, на смятие $[\sigma_{cm}] = 160$ МПа

Ответ: 36.

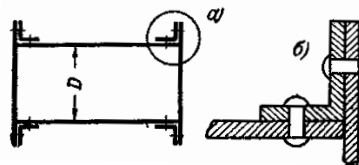
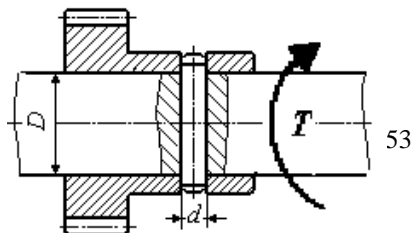


Рис.66

3.20. Цилиндрическое зубчатое колесо закреплено



штифтом на валу редуктора диаметром $D = 50$ мм (рис. 67). Вал передает вращающий момент $T = 1$ кН·м. Определить необходимый диаметр штифта, если допускаемое напряжение

Рис. 67

штифта на срез равно $[\tau_{cp}] = 60$ МПа.

Ответ: 5 мм

3.21. Проверить прочность соединения

листов точечной сваркой на

прочность (рис. 68), если диаметр точки $d = 2$ мм, растягивающее усилие $P = 5$ кН, $[\tau_{cp}] = 80$ МПа, число точек в ряду $n = 10$.

Ответ: $\tau_{cp} = 79,6$ МПа < 80 МПа

3.22. Определить необходимое число точек для соединения двух стальных листов точечной сваркой (рис. 68), если диаметр точки $d = 4$ мм, $P = 10$ кН, $[\tau_{cp}] = 50$ МПа.

Ответ: 16 точек.

3.23. Определить необходимое число точек точечной сварки (рис. 68), если $P = 0,8$ кН, $d = 2$ мм, $[\tau_{cp}] = 60$ МПа.

Ответ: 5 точек.

3.24. Определить из условия прочности допускаемое усилие для байонетного соединения (рис. 69).

Проверить на смятие стенки соединяемых цилиндров. Диаметр штыря $d = 3$ мм, $[\tau_{cp}] = 50$ МПа. Толщина стенок цилиндров байонетного соединения

$\delta = 2$ мм, $[\sigma_{cm}] = 100$ МПа.

Ответ: $P \leq 235$ Н, $\sigma_{cm} = 39$ МПа ≤ 100 МПа. *Рис. 69*

3.25. Подобрать из условия прочности диаметр штырей соединительной муфты (рис. 70). Мощность на валу $N = 20$ Вт, угловая скорость вала $n = 100$ об/мин, расстояние между

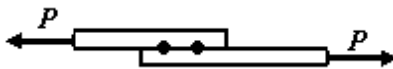
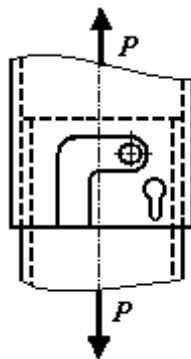


Рис. 68



тырями $a = 20$ мм. Материал муфты Ст20, допускаемое напряжение на срез $[\tau_{ср}] = 100$ МПа.

Ответ: 8 мм

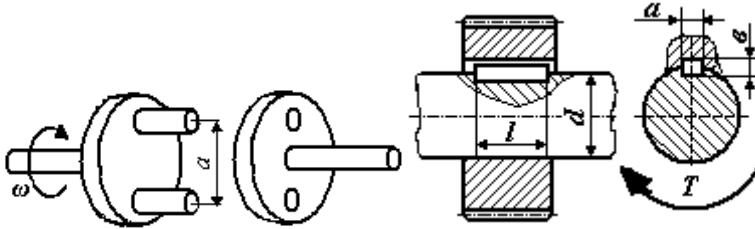


Рис. 70

Рис. 71

3.26. Проверить прочность шпоночного соединения зубчатого колеса с валом (рис. 71), если вращающий момент на валу $T = 10$ Н·м, диаметр вала $d = 20$ мм, $[\tau_{ср}] = 100$ МПа, $[\sigma_{см}] = 200$ МПа, размеры шпонки: $5 \times 5 \times 10$.

Ответ: $\sigma_{см} = 20$ МПа ≤ 200 МПа;

$\tau_{ср} = 10$ МПа ≤ 100 МПа.

3.27. Консоль выполнена из уголка $160 \times 160 \times 12$, приклепанного пятью заклепками диаметром 20 мм к стенке швеллера № 33, являющегося частью колонны (рис. 72). Определить касательные и сминающие напряжения в заклепочном соединении, если $P = 120$ кН.

Ответ: $\tau_{ср} = 76,4$ МПа, $\sigma_{см} = 171,4$ МПа.

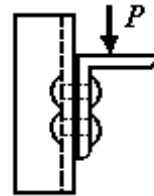


Рис. 72

3.28. Сминающее напряжение под заплечиком болта, изображенного на рисунке 73, равно 40 МПа, а сжимающее напряжение в болте диаметром 10 см равно 100 МПа. Чему равен диаметр d_1 заплечика? Определить касательное напряжение в заплечике, если толщина его $t = 5$ см.

Ответ: $d_1 = 18,7$ см; $\tau = 50$ МПа.

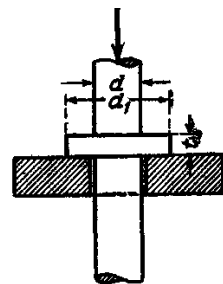


Рис. 73

3.29. Круглый стальной стержень, растягиваемый силой $P = 180$ кН, укреплен на детали с помощью чеки прямоугольного сечения (рис.74) Из условий прочности на растяжение, срез и смятие стали определить диаметр стержня d , необходимую длину a хвостовой его части, а также размеры поперечного сечения чеки t и h (без учета ее работы на изгиб). Допускаемые напряжения принять: $[\tau_{cp}] = 100$ МПа,

$[\sigma_{см}] = 320$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Ответ: $d = 4,62$ см; $t = 1,22$ см; $h = 7,4$ см; $a = 9,33$ см.

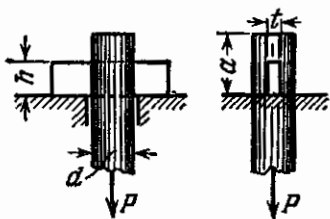


Рис.74

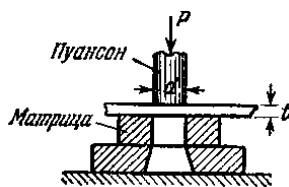


Рис. 75

3.30. Какой толщины лист можно пробивать штампом (рис. 75) для пробивки отверстий, если $P = 10$ кН, $d = 8$ мм, $\tau_{cp} = 40$ МПа.

Ответ: $t \leq 10$ мм

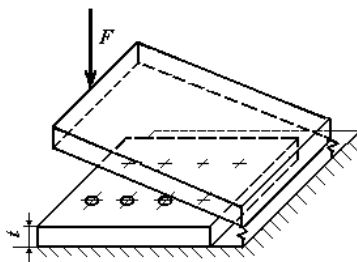
3.31. Определить усилие, необходимое для пробивки перфоленты при перфорировании отверстия $d = 1,73$ мм (рис. 75), если для перфоленты марки А $[\tau_{cp}] = 80$ МПа, $t = 0,1$ мм.

Ответ: 43,5 Н

3.32. Определить усилие пробивки перфокарты толщиной $t = 0,18$ мм. Размер отверстия $1,4 \times 2,8$ мм, $[\tau_{cp}] = 80$ МПа.

Ответ: 118 Н

3.33. В листе толщиной t продавливается круглое отверстие. Определить наименьший диаметр пуансона



из условия, что напряжения смятия на его торце в четыре раза выше временного сопротивления срезу вырубаемого металла. Схема вырубного штампа показана на рисунке 75.

Рис. 76

Ответ: $d = t$

3.34. Определить требуемое усилие F компостера (рис. 76), если усилие поджатия пружины $F_{пр} = 5$ Н, диаметр пробиваемых восьми отверстий на билете $d = 2$ мм, $[\tau_{ср}] = 5$ МПа, толщина билета $t = 0,1$ мм

Ответ: 25,1 Н.

3.35. Проверить прочность зубьев храпового колеса на срез и смятие (рис. 76 а), если нормальное давление на зуб в момент торможения $P = 32$ кН. Размеры зуба (рис. 77, б) ширина основания $a = 24$ мм, толщина $t = 20$ мм, высота зуба $h = 16$ мм. Определить также необходимый диаметр болта, на который опирается собачка, из условия на срез и смятие. Допускаемые напряжения принять: на срез

$$[\tau_{ср}] = 70 \text{ МПа}, [\sigma_{см}] = 120 \text{ МПа}.$$

Ответ: $\tau_{ср} = 66,7 \text{ МПа} < 70 \text{ МПа}$, $\sigma_{см} = 100 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}$, $d = 1,33 \text{ см}$.

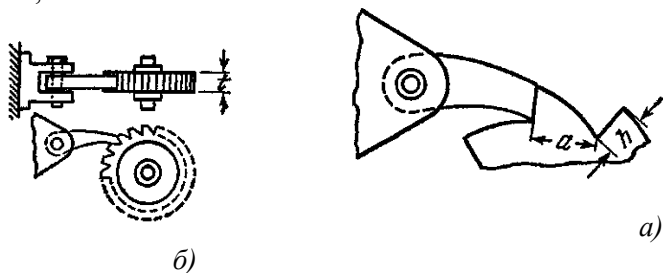


Рис. 77

3.36. Для испытания круглых стержней на срез применяется приспособление, размещаемое между подвижной и неподвижной траверсами одного из прессов (рис. 78). Определить наибольший диаметр стального стержня, который может быть подвергнут срезу на прессе силою $P = 600$ кН, если временное сопротивление испытываемой стали при срезе

$\tau_6=300$ МПа. Выяснить, какие напряжения смятия возникнут во вкладных втулках проушин при испытании такого стержня, если толщины проушин $t = 0,03$ м, $t_1 = 0,02$ м.

Ответ: 36 мм, 556 МПа.

3.37. Рассчитать болтовое соединение на срез (рис. 79), если $P = 1$ кН, $[\tau_{cp}] = 60$ МПа.

Ответ: 36 мм.

3.38. Определить диаметр болта в соединении, изображённом на рис.79. Сила $P = 2$ кН, $\delta_1 = 5$ мм, $\delta_2 = 3$ мм, $[\sigma_{cm}] = 150$ МПа, $[\tau_{cp}] = 80$ МПа.

Ответ: 6 мм.

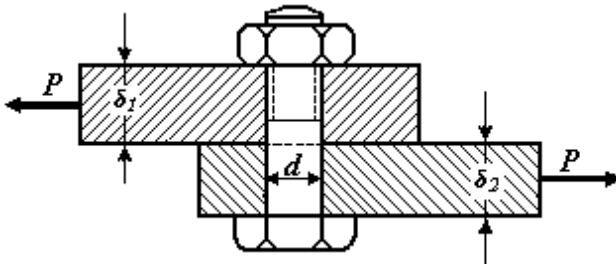
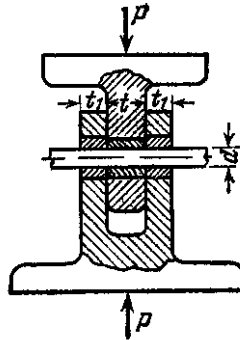


Рис. 79

3.39. Проверить прочность болтового соединения (рис. 80) на срез и смятие, нагруженного усилием $P = 2$ кН. Диаметр болтов $d = 4$ мм, $[\tau_{cp}] = 60$ МПа, толщина листов $\delta = 2$ мм, $[\sigma_{cm}] = 200$ МПа,

Ответ: $\tau_{cp} = 79,7$ МПа < 60 МПа $\sigma_{cm} = 125$ МПа ≤ 200 МПа.

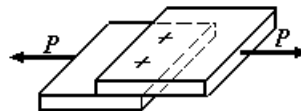


Рис. 80

3.40. Кронштейн из листов толщиной $t = 16$ мм прикреплен к стене четырьмя анкерными болтами (рис. 81). Определить необходимый диаметр болтов (без учета продольных усилий) из условия прочности их на срез и смятие при допускаемых напряжениях $[\tau_{cp}] = 85$ МПа, $[\sigma_{см}] = 240$ МПа, если кронштейн поддерживает подкрановую балку, передающую на него давление $P = 230$ кН.

Ответ: $d = 30$ мм

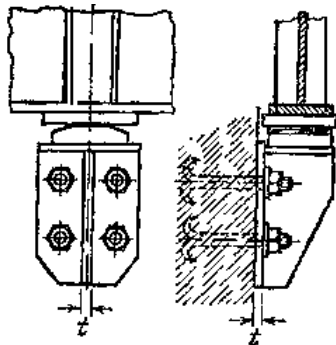


Рис. 81

3.41. Пластина из алюминиевого сплава Д16 крепится с помощью двух стальных болтов к вертикальной стенке (рис. 82) и нагружена усилием $P=1000$ Н. Определить из условия прочности на срез необходимый диаметр болтов. $[\tau_{cp}] = 50$ МПа. Проверить пластину на смятие. Толщина пластины 2 мм, $[\sigma_{см}] = 200$ МПа.

Ответ: 3 мм; $\tau_{cp}=167$ МПа ≤ 200 МПа

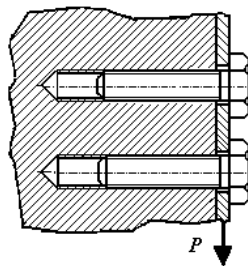
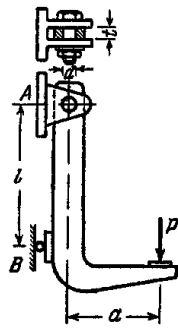


Рис. 82

3.42. Коленчатый рычаг, нагруженный силой $P = 120$ кН поддерживается стальным шарнирным болтом в точке A и роликовой опорой в точке B (рис. 83). При допускаемых напряжениях на срез и смятие стали $[\tau_{cp}] = 120$ МПа и $[\sigma_{см}] = 250$ МПа определить необходимый диаметр болта, если расстояние между опорами рычага $l = 75$ см, размер $a = 50$ см, а толщина $t = 3$ см.

Указание. Давление, передающееся на болт, определить как полную реакцию в точке A из условия равновесия рычага.



Ответ: $d = 2,8$ см.

3.43. Болт диаметром $d = 100$ мм, работающий на растяжение, опирается головкой на лист (рис. 84). Определить диаметр головки D и ее высоту t , если растягивающее напряжение в сечении болта $[\sigma] = 100$ МПа, напряжение среза головки $[\tau_{cp}] = 50$ МПа, и напряжения смятия по площади опирания головки $[\sigma_{cm}] = 40$ МПа. Рис.83

Ответ: $D = 187$ мм, $t = 50$ мм.

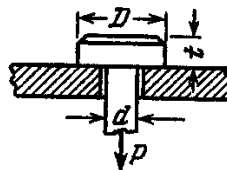


Рис. 84

3.44. Определить допустимое усилие P для клеевого соединения двух листов с третьим (рис. 85). Клей БФ-2, $[\tau_{cp}] = 15$ МПа.

Ответ: 9 кН.

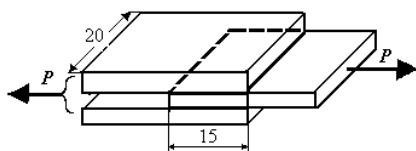


Рис. 85

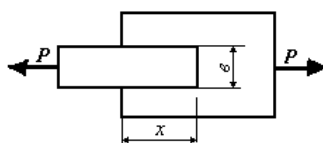


Рис. 86

3.45. Определить минимальную длину x , необходимую для склеивания двух листов (рис. 86), если растягивающее усилие равно $P = 12$ кН, $\delta = 50$ мм, для клея $[\tau_{cp}] = 20$ МПа.

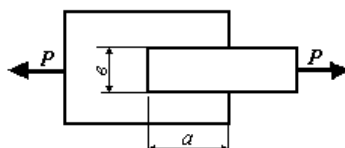
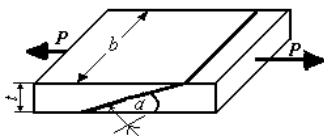
Ответ: 12 мм.

3.46. Проверить прочность косо́го клеевого соединения (рис. 87) $\alpha = 20^\circ$, $b = 20$ мм, $P = 2$ кН, $t = 5$ мм. Клей эпоксидный холодного отвержения $[\tau_{cp}] = 20$ МПа.

Ответ: $\tau_{cp} = 6,8 \leq 20$ МПа.

3.47. Определить допускаемое усилие для клеевой конструкции (рис. 88). $[\tau_{cp}] = 10$ МПа, $a = 30$ мм, $\delta = 20$ мм.

Ответ: 6 кН



P

ис.

3.48. Определить минимальную длину x , необходимую для склеивания цилиндров (рис. 89), если $P = 1,5$ кН, $d_1 = 50$ мм, $d_2 = 70$ мм, $[\tau_{cp}] = 20$ МПа.

Ответ: 5 мм.

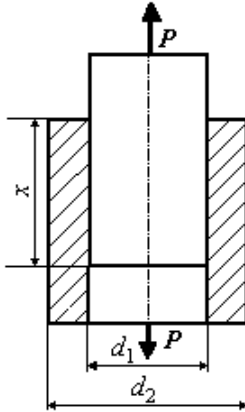


Рис. 89

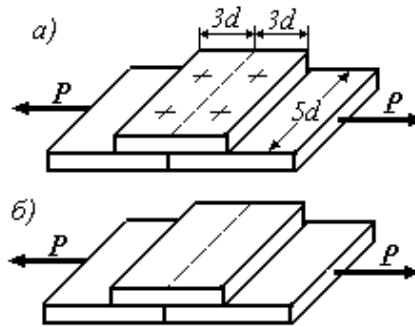


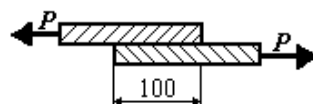
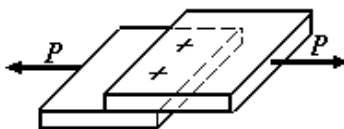
Рис. 90

3.49. На рис. 90 изображены соединения встык листов с помощью накладки. Исходя из условия прочности на срез определите, какое из соединений с выгоднее: клеевое (рис. 89, а) или заклепочное (рис. 90, б) соединение с числом заклепок по две с каждой стороны, при условии, что $[\tau_{cp}]$ клея равно $\frac{1}{4}[\tau_{cp}]$ металла?

Ответ: $d_m > 2d_{кл}$, клеевое соединение выгоднее

3.50. Сравнить прочность соединений внахлест двух стальных листов винтового и клевого соединений (рис. 91 а, б). Растягивающее усилие $P = 1$ кН, ширина листов 40 мм, число винтов – 2, диаметр винта 4 мм, клей БФ – 4, $[\tau_{cp}] = 15$ МПа. Винты стальные из Ст1, $[\tau_{cp}] = 50$ МПа.

Ответ: Запасы прочности соединений: винтового $n_в = 1,25$, клевого $n_{кл} = 60$. Клеевое соединение выгоднее.



а)

б)

Рис. 91

3.2. Расчет сварных соединений

Основными видами сварных соединений являются соединения встык и с помощью валиковых швов. Соединение встык (рис. 92) рассчитывается на растяжение или сжатие по

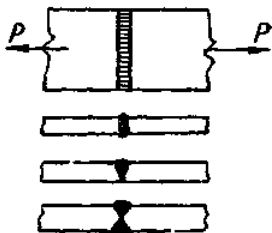


Рис. 92

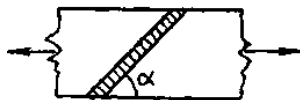


Рис. 93

формуле $\sigma = \frac{P}{l \cdot \delta} \leq [\sigma_s]$,

где $l = b - 10$ мм - расчетная длина сварного шва; b - ширина листа; δ - расчетная высота шва; $[\sigma_s]$ - допускаемое напряжение для сварного шва.

Соединение встык с *косым швом* (рис. 93) проверяется на действие нормальных и касательных напряжений по условию

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{P \sin \alpha}{l \delta} \leq [\sigma_s] \\ \tau_\alpha &= \frac{P \cos \alpha}{l \delta} \leq [\tau_s] \end{aligned} \right\}$$

Здесь $l = \frac{b}{\sin \alpha} - 10$ - расчетная длина шва, мм;

$[\sigma_s]$ - допускаемое напряжение на срез.

Расчет лобовых (рис. 94), фланговых (рис. 95) и комбинированных швов, в которых применяются

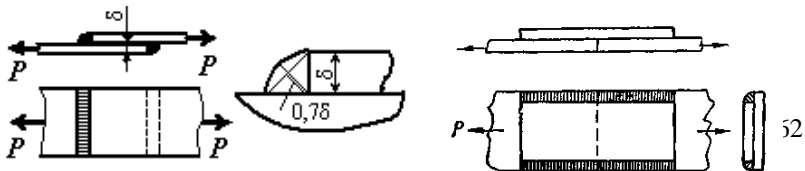


Рис. 94

Рис. 95

одновременно лобовые и фланговые швы, условно производится на срез по наиболее слабому (наклонному) сечению, без учета выпуклости шва

$$\tau = \frac{P}{0,7\delta l} \leq [\tau_s].$$

В случае приварки элементов с несимметричным сечением, например угольников (рис. 96) длина швов с каждой стороны определяется по формулам

$$\left. \begin{aligned} l_a &= \frac{P \cdot c}{0,7\delta[\tau_s](a+c)} \\ l_c &= \frac{P \cdot a}{0,7\delta[\tau_s](a+c)} \end{aligned} \right\}$$

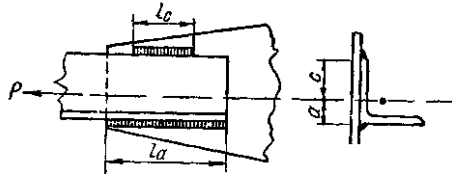


Рис. 96

Пример. Определить необходимую длину фланговых швов для прикрепления к фасонному листу узла фермы растянутого стержня, состоящего из двух неравнобоких уголков сечением $100 \times 63 \times 8$ мм (рис. 97). Материал стержня - Ст. 3. Допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma] = 160$ МПа. Сварка автоматическая. Учесть наличие лобового шва.

Решение. Допускаемое значение растягивающего усилия

$$N = 2A[\sigma] = 2 \cdot 12,6 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 403 \text{ кН}$$

Здесь $A = 12,6 \text{ см}^2$ – площадь поперечного сечения одного уголка (ГОСТ 8510-80). Высоту сварного шва примем равной толщине полки уголка $\delta = 8$ мм. Допускаемое напряжение на срез $[\tau_s] = 110$ МПа.

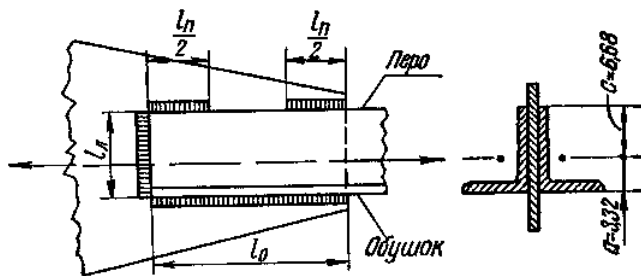


Рис. 97

Допустимое усилие для лобового шва

$$N_n = 0,7\delta l_n [\tau_s] = 0,7 \cdot 8 \cdot 10^{-6} (100 - 10) 110 \cdot 10^6 = 55,44 \text{ кН.}$$

Здесь l_n – расчетная длина лобового шва, принятая с запасом в 10 мм.

Усилие, которое должно быть воспринято фланговыми швами

$$N_\phi = N - N_n = 403 - 55,44 = 347,6 \text{ кН.}$$

Длины швов со стороны «пера» (верхний шов на рис. 97) и «обушка» (нижний шов на рисунке) определяются в предположении, что усилие N_ϕ распределяется между швами обратно пропорционально расстояниям от них до оси стержня, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

Длины фланговых швов:

а) со стороны обушка

$$l_o = \frac{N_\phi c}{2 \cdot 0,7\delta [\tau_s] (a + c)} = \frac{347,4 \cdot 10^3 \cdot 66,8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,7 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 110 \cdot 10^6} = 188 \text{ мм}$$

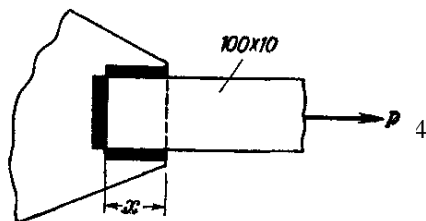
б) со стороны пера

$$l_n = \frac{N_\phi a}{2 \cdot 0,7\delta [\tau_s] (a + c)} = \frac{347,4 \cdot 10^3 \cdot 33,2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,7 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 110 \cdot 10^6} = 94 \text{ мм.}$$

Учитывая возможность непровара в начале шва и образования кратера в конце, проектную длину каждого шва принимаем на 10 мм больше полученной расчетом.

Задачи

3.51. Определить минимальную длину x ,



необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рис. 97, если растягивающее напряжение в листе равно 140 МПа, а допускаемое напряжение на срез для сварки $[\tau_s]=80$ МПа.

Ответ: 7,5 см.

3.52. Определить необходимую длину l фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины (рис. 99). Усилие, испытываемое соединением, $P = 150$ кН. Допускаемое напряжение на срез для сварки равно 110 МПа. Толщина узкого листа 10 мм, а широкого 8 мм.

Ответ: $l \approx 10$ см

3.53. Определить необходимую длину l накладок соединения, изображенного на рис. 100, растянутого силой $P = 300$ кН. Толщина накладок по 5 мм. Допускаемое напряжение для сварки на срез равно 110 МПа.

Ответ: $l = 40$ см.

Рис.98

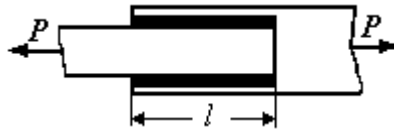
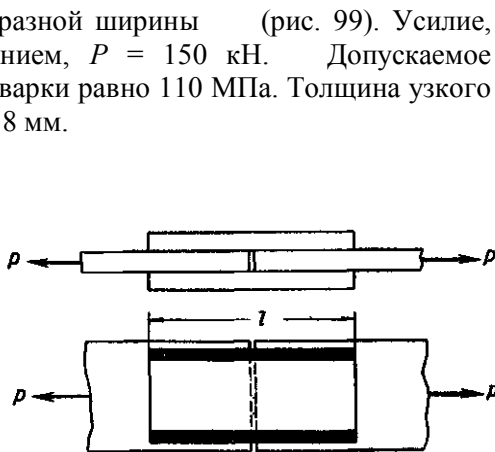


Рис. 99



а) б)

Рис. 100

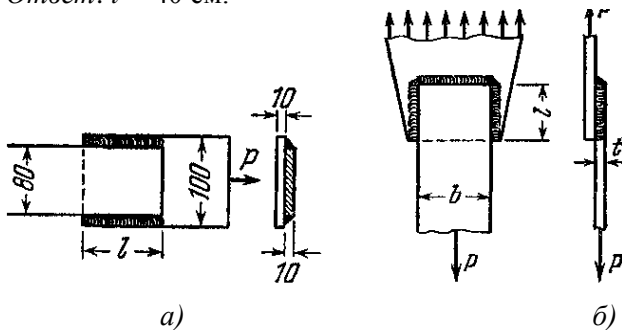


Рис. 101

3.54. Определить необходимую длину фланговых швов для соединения внахлестку двух полос сечением 10×80 и 10×100 мм (рис. 101, а), растягиваемых продольными силами P . Допускаемые напряжения принять: на растяжение полос $[\sigma] = 160$ МПа, на срез швов $[\tau_s] = 90$ МПа. Учесть возможный непровар в начале и в конце каждого шва по 5 мм. ($l = l_{рас} + 2 \approx 5$ мм).

Ответ: $l_p = 10,2$ см; $l = 11,2$ см.

3.55. Стальная полоса с размерами сечения $b = 0,1$ м и $t = 0,01$ м, растягиваемая усилием $P = 150$ кН, приваривается к фасонному листу внахлестку одним лобовым и двумя фланговыми швами (рис. 101, б). Определить наименьшую длину фланговых швов, необходимую для прикрепления полосы к фасонке, при допускаемых напряжениях на срез швов $[\tau_s] = 90$ МПа.

Ответ: $l_p = 6,9$ см; $l = 7,4$ см.

3.56. Стык двух листов, перекрытый двумя накладками растягивается силами $P = 240$ кН (рис. 102). Определить длину фланговых швов, необходимую для прикрепления накладок, если толщина листов $t = 10$ мм, толщина накладок $t_1 = 8$ мм, а допускаемое напряжение $[\tau_s] = 100$ МПа. Непровар длиной 5 мм учесть только на одном конце каждого шва.

Ответ: $l = 112$ мм.

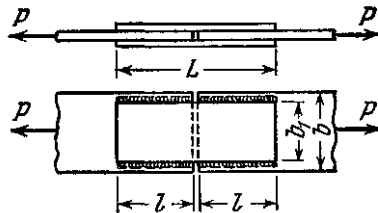


Рис. 102

3.3. Расчет деревянных врубок

Расчет деревянных врубок производится на скалывание и смятие.

Пример. Определить необходимую глубину врубки h , длину конца затяжки l , ширину опорного бруса c , и проверить достаточность высоты a в месте ослабления для опорного узла

стропильной фермы, представленного на рис. 103. Сжимающее усилие N в стропильной ноге равно 70 кН. Ширина брусьев $b = 20$ см. Допускаемые напряжения на растяжение: $[\sigma] = 10$ МПа, на смятие поперек волокон $[\sigma_{cm}]_{90^\circ} = 2,5$ МПа, на смятие под углом 30° к направлению волокон $[\sigma_{cm}]_{30^\circ} = 5$ МПа, на скалывание вдоль волокон $[\tau] = 1,2$ МПа.

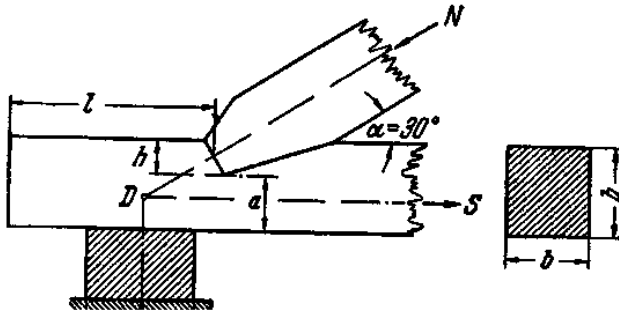


Рис. 103

Решение: Усилия N (в стропильной ноге), S (в затяжке) и реакция опоры A сходятся в одной точке D и находятся в равновесии. Исходя из этого, $S = N \cos \alpha$, $A = N \sin \alpha$. Необходимые размеры определяются из условий прочности:

а) на смятие затяжкой силой N

$$\frac{N}{b \frac{h}{\cos \alpha}} \leq [\sigma_{cm}]_{30^\circ}; \quad h \geq \frac{N \cos \alpha}{b [\sigma_{cm}]_{30^\circ}} = \frac{70000 \cdot 0,87}{200 \cdot 5} = 61 \text{ мм}$$

б) на скалывание конца затяжки силой S

$$\frac{S}{bl} \leq [\tau]; \quad l \geq \frac{S}{b [\tau]} = \frac{N \cos \alpha}{b [\tau]} = \frac{70000 \cdot 0,87}{200 \cdot 1,2} = 252 \text{ мм};$$

в) на смятие затяжки силой A

$$\frac{A}{bc} \leq [\sigma_c]_{90^\circ}; \quad c \geq \frac{A}{b [\sigma_c]_{90^\circ}} = \frac{N \sin \alpha}{b [\sigma_c]_{90^\circ}} = \frac{70000 \cdot 0,5}{200 \cdot 2,5} = 70 \text{ мм};$$

г) на растяжение затяжки силой S

$$\frac{S}{ba} \leq [\sigma]; \quad a \geq \frac{S}{b [\sigma]} = \frac{N \cos \alpha}{b [\sigma]} = \frac{70000 \cdot 0,87}{200 \cdot 10} = 30,4 \text{ мм}.$$

Конструктивно этот размер значительно больше, а именно:
 $a = b - h = 200 - 61 = 139$ мм.

Задачи

3.57. Опорный узел фермы выполнен на щелевых врубках, как показано на рис. 104. Сжимающее усилие в стропильной ноге $N = 50$ кН. Проверить прочность врубки на площадке $m'm'm$, а также определить необходимую длину конца затяжки l и ширину опорного бруса c .

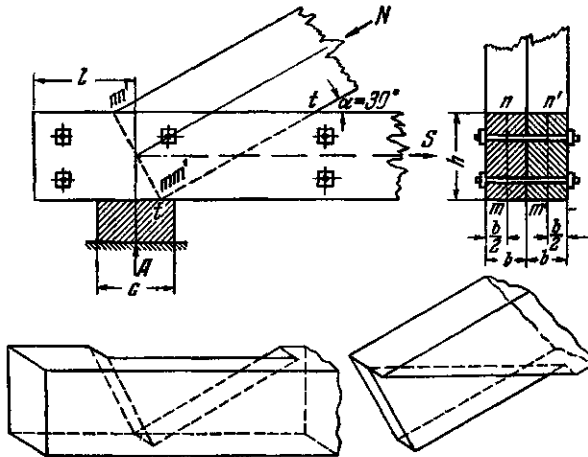


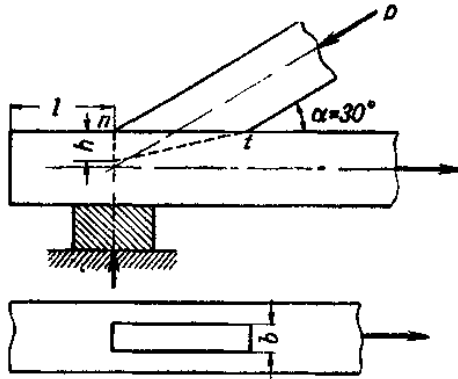
Рис. 104

Ширина досок $b = 6$ см; их высота $h = 20$ см. Допускаемые напряжения: на смятие поперек волокон $[\sigma_{см}]_{90^\circ} = 2,5$ МПа, на смятие под углом 30° к направлению волокон $[\sigma_{см}]_{30^\circ} = 4,5$ МПа, на скалывание вдоль волокон $[\tau] = 0,48$ МПа. Болты (имеющие конструктивное значение) при расчете не учитывать. Полагать, что по линии $n-t$ усилие не передается.

Ответ: $\sigma_{см} = 3,6$ МПа $<$ $4,5$ МПа; $l = 23$ см; $c = 8,3$ см.

3.58. Стропильная нога опорного узла фермы соединена с затяжкой при помощи шипа шириной $b=6$ см, как показано на рисунке

105.



Определить высоту шипа h (глубину врубки) и длину конца затяжки l , если допустимое напряжение на смятие под углом 30° к направлению волокон равно 5 МПа, а

Рис. 105

допускаемое напряжение скалывания вдоль волокон равно $0,8$ МПа; сжимающее усилие в стропильной ноге $P = 20$ кН. Считать, что усилие по линии $n - t$ не передается.

Ответ: $h = 6$ см; $l = 12$ см.

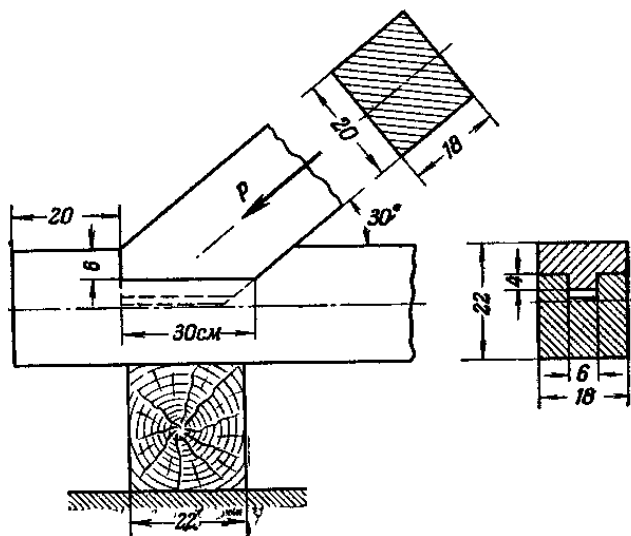


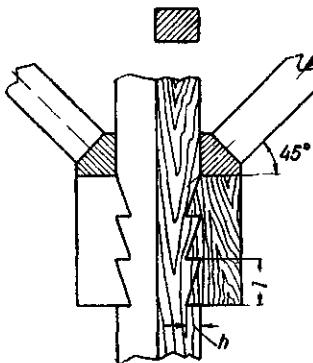
Рис. 106

3.59. Проверить прочность соединения стропильной ноги с затяжкой (рис. 106), если сила, действующая вдоль ноги, равна $P = 50$ кН, допустимое напряжение на срез вдоль волокон $[\tau]_{90^\circ} = 0,8$ МПа, на смятие вдоль волокон $[\sigma_{см}]_{90^\circ} = 4$ МПа, на смятие поперек волокон $[\sigma_{см}]_0 = 2$ МПа.

Указание. Вначале решить задачу, не принимая в расчет силы трения между ногой и затяжкой, а затем с учетом силы трения, взяв коэффициент трения равным $f = 0,5$.

Ответ: Без учета трения: $[\tau] = 0,83 > 0,8$ МПа, $[\sigma_{см}]_{90^\circ} = 3,28 < 4$ МПа, $[\sigma_{см}]_0 = 0,7 < 2$ МПа.

3.60. Подкос моста опирается на дубовую подушку, которая передает усилия на стойку через зубчатый коротыш, как показано на рис. 107. Определить глубину врубки h и длину зуба l , если усилие, действующее на подкос, $P = 200$ кН. Сечение подкоса и



стойки квадратное $20 \times 20 \text{ см}^2$. Допускаемое напряжение на смятие равно 8 МПа, а на скалывание 0,8 МПа.

Ответ: $h = 3 \text{ см}$; $l = 30 \text{ см}$.

Рис. 107

3.61*. Два сосновых бруса сечением $h \times b$, растягиваемых силой P соединены зубом и стянуты болтами (рис. 108), которые ставятся конструктивно и в расчет не принимаются. Определить допускаемую величину силы P и необходимую длину a зуба. Дано: $h = 16 \text{ см}$, $b = 12 \text{ см}$, допускаемое напряжение сосны на смятие в торец $[\sigma_{см}]_{90^\circ} = 10 \text{ МПа}$, на скалывание вдоль волокон $[\tau]_{90^\circ} = 0,8 \text{ МПа}$, на растяжение $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

Ответ: $P = 48 \text{ кН}$, $a = 50 \text{ см}$.

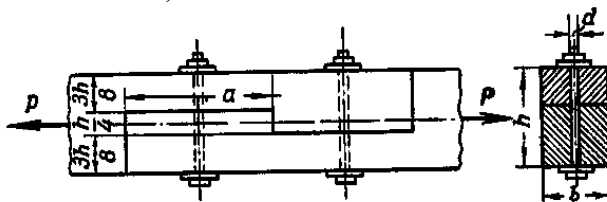


Рис. 108

3.62. деревянный брус квадратного сечения $200 \times 200 \text{ мм}$, растягиваемый силой $P = 30 \text{ кН}$, необходимо нарастить накладным замком (рис. 109). Определить необходимую

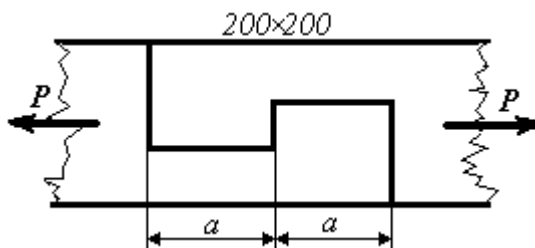


Рис. 109

длину зуба a , если допускаемое напряжение на срез (скалывание) для дерева $[\tau_{ср}] = 0,6 \text{ МПа}$.

Ответ: $a = 25 \text{ см}$.

4. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

4.1. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

При изгибе ось стержня искривляется, поперечные сечения поворачиваются. Волокна стержня с выпуклой стороны удлинняются, с вогнутой - укорачиваются.

Слой, длина которого остается неизменной, называется *нейтральным*. Линия пересечения этого слоя с поперечным сечением называется *нейтральной осью*. Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Изгиб происходит при действии на стержень уравновешенной системы внешних сил, перпендикулярных его оси, или пар сил, плоскости которых проходят через ось. Стержень, находящийся в таких условиях называется балкой.

Прямой плоский изгиб имеет место при совпадении силовой плоскости с одной из главных плоскостей инерции.

Изгиб называется чистым, если в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю.

Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M представляют собой графики, изображающие изменение Q и M по длине балки.

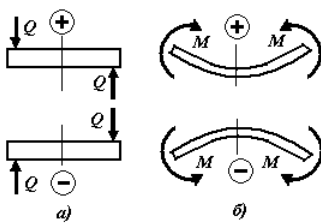


Рис. 110

Поперечная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону сечения.

Поперечная сила считается положительной, если сумма

внешних сил, лежащих по левую сторону отсечения дает равнодействующую, направленную вверх, а по правую сторону вниз (рис. 110, а).

Изгибающий момент в сечении численно равен сумме моментов внешних сил по одну сторону сечения.

Изгибающий момент принято считать положительным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вниз, и отрицательным, если внешняя нагрузка изгибает балку выпуклостью вверх (рис. 110, б).

Порядок построения эпюр Q и M .

1. Составляются уравнения равновесия балки, решением которых затем определяются значения опорных реакций.
2. Балка разбивается на отдельные участки, границами которых являются сосредоточенные силы или моменты сил и границы участков распределенной нагрузки q .
3. Составляются выражения изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$.
4. По полученным выражениям вычисляются ординаты эпюр для ряда сечений в количестве, достаточном для изображения этих эпюр.
5. Определяются сечения, в которых действуют моменты M_{\min} и M_{\max} , и вычисляются значения этих моментов.
6. По полученным значениям ординат строятся эпюры.

Пример 1. Для балки на двух опорах пролетом $l = 3a$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , парой сил с моментом $M = qa^2$ и сосредоточенной силой $P = qa$ (рис. 111), составить в буквенном виде выражения $Q(x)$ и $M(x)$, построить эпюры Q и M и вычислить наибольшие по абсолютному значению величины изгибающего момента и поперечной силы, если $q = 20$ кН/м и $a = 2$ м.

Решение. 1) *Определение опорных реакций*

Направив реакции опор в точках A и B вверх (реакция X_A заведомо равна нулю), составим уравнения моментов относительно опор A и B :

$$\sum M_B = 0, \quad -Y_A \cdot 3a - M - P \cdot 2a + 3qa \cdot 1,5a = 0.$$

Отсюда $Y_A = \frac{1}{3a}(-qa^2 - 2qa^2 + 1,5qa^2) = 0,5qa$.

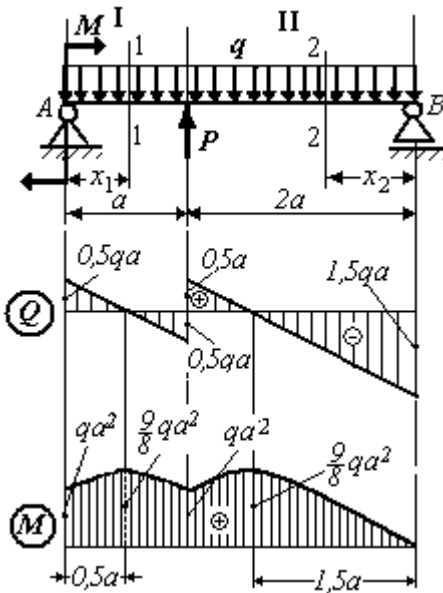
$$\sum M_A = 0, \quad Y_B \cdot 3a + P \cdot a - 3qa \cdot 1,5a - M = 0.$$

Откуда $Y_B = 1,5qa$

Проверка: $\sum Y = 0, \quad Y_B + Y_A + P - 3qa = 0.$

2) *Составление аналитических выражений $Q(x)$ и $M(x)$*

Используя метод сечений, составим аналитические выражения.



Сила P делит балку на два участка в пределах которых выражения Q и M будут различны. Для составления этих выражений рассмотрим два сечения между силами: сечение 1-1 левее силы P и сечение 2-2 справа от нее. При этом целесообразно рассматривать ту часть балки, к которой приложено меньше сил, и выбирать начало координат так, чтобы уравнения были

Рис. 111

возможно проще; x_1 отсчитываем от опоры A , а x_2 - от опоры B . Уравнения $Q(x)$ и $M(x)$ примут вид:

Для I-го участка ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$Q(x_1) = Y_A - qx_1 = 0,5qa - qx_1,$$

$$M(x_1) = Y_A x_1 + M - \frac{qx_1^2}{2} = 0,5qax_1 + qa^2 - \frac{qx_1^2}{2};$$

Для II-го участка ($0 \leq x_2 \leq 2a$):

$$Q(x_2) = -Y_B + qx_2 = -1,5qa + qx_2,$$

$$M(x_2) = Y_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2} = 1,5qax_2 - \frac{qx_2^2}{2}.$$

Уравнения $Q(x)$ и $M(x)$ показывают, что поперечная сила изменяется на каждом участке балки по закону прямой, а изгибающий момент по квадратной параболе.

3) Построение эюр Q и M

Построение графиков функций $Q(x)$ и $M(x)$ производим, придавая переменным x_1 и x_2 определенные значения (для $Q(x)$

не менее двух, а для $M(x)$ не менее трех). Подсчеты сведены в таблицу.

Абсциссы сечения	Поперечная сила $Q(x)$	Изгибающий момент $M(x)$
$x_1=0$	$Q_1 = Y_A = 0,5qa$	$M_1 = M = qa^2$
$x_1=0,5a$	-	$M_1 = qa^2 + 0,5qa \cdot 0,5a - \frac{qa^2}{8} =$ $= \frac{9}{8}qa^2$
$x_1=a$	$Q_1 = 0,5qa - qa =$ $= -0,5qa$	$M_1 = qa^2 + 0,5qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$
$x_2=0$	$Q_2 = -1,5qa$	$M_2 = 0$
$x_2=a$	-	$M_2 = 1,5qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$
$x_2=2a$	$Q_2 = -1,5qa + 2qa =$ $= 0,5qa$	$M_2 = 1,5qa \cdot 2a - \frac{q(2a)^2}{2} = qa^2$

По приведенным в таблице значениям построены эпюры Q и M . Положительные значения поперечных сил и изгибающих моментов откладываем вверх. Эпюра Q изображается двумя наклонными прямыми; эпюра M ограничена параболическими кривыми, причем наибольшие значения изгибающий момент имеет в сечениях, где $Q = 0$. На первом участке $M_{\max} = \frac{9}{8}qa^2$

(при $x_1 = 0,5a$). Для отыскания наибольшего момента на втором участке исследуем уравнение $M(x_2)$ на максимум: $\frac{dM(x_2)}{dx_2} = 0 = -Q_2$ (знак минус, так как ось x_2 направлена влево);

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = 1,5qa \cdot 1,5a - qx_2 = 0,$$

откуда $x_2 = 1,5a$.

Подставляя это значение в уравнение $M(x_2)$, получим

$$M_{\max} = 1,5qa \cdot 1,5a - \frac{q(1,5a)^2}{2} = \frac{9}{8}qa^2,$$

т.е. такое же значение, как и на первом участке, вид полученных эпюр показан на рисунке. Обратим внимание на то, что в эпюре Q имеется скачок на величину силы $P = qa$ в сечении под силой, а в эпюре M получен скачок на величину M в опорном сечении, где приложена пара сил характер кривых, ограничивающих эпюру M , находится в соответствии с дифференциальной зависимостью $\frac{d^2M}{dx^2} = q$. Так как $q < 0$ (направлено вниз), то

$\frac{d^2M}{dx^2} < 0$, т.е. кривизна эпюры отрицательна, и, значит, выпуклость кривой должна быть направлена в сторону положительных ординат M , что и получено.

Расчетные значения Q и M как это видно из эпюры, соответственно равны: $Q_{\max} = |1,5qa| = 1,5 \cdot 20 \cdot 2 = 60 \text{ кН}$,

$$M_{\max} = \frac{9}{8}qa^2 = \frac{9}{8}20 \cdot 2^2 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пример 2. Построить эпюры Q и M для балки на двух опорах пролетом $l = 3a$, несущей нагрузку, распределенную на длине $2a$ по закону треугольника (рис. 112)

Решение. Опорные реакции определяем из уравнений равновесия, заменив распределенную нагрузку ее равнодействующей, равной площади треугольника

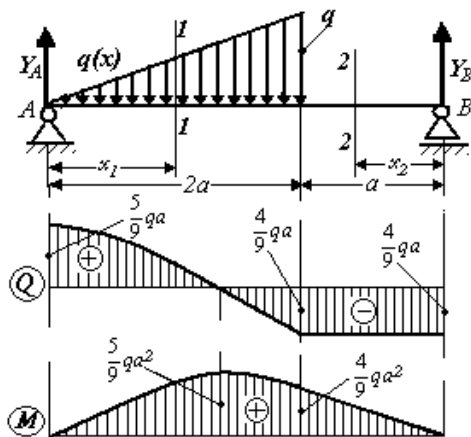
$$\theta = \frac{1}{2}q \cdot 2a = qa$$

и приложенной в центре тяжести треугольника.

Составив уравнения моментов относительно опор A и B

$$\sum M_B = 0; \quad Y_A \cdot 3a - qa \cdot 4/3a = 0,$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Y_B \cdot 3a + qa \cdot (a + 2a/3) = 0,$$



получаем

$$Y_A = \frac{5}{9} qa, \quad Y_B = \frac{4}{9} qa.$$

Составим выражения $Q(x)$ и $M(x)$ для каждого из участков балки. В сечении 1-1 (рассматриваем левую часть, для которой x_1 меняется от нуля до $x_1 = 2a$)

$$Q_1 = Y_A - \theta(x),$$

Рис. 112

$$M_1 = Y_A x_1 - \theta(x) \frac{x_1}{3}.$$

Здесь $\theta(x)$ - грузовая площадь, расположенная слева от сечения и равная площади треугольника с основанием x_1 и высотой

$$q(x_1) = q \frac{x_1}{2a}, \text{ т.е. } \theta(x) = \frac{qx_1^2}{4a}.$$

Следовательно,

$$Q_1 = \frac{5}{9} qa - \frac{qx_1^2}{4a}, \quad M_1 = \frac{5}{9} qax_1 - \frac{qx_1^3}{2a}.$$

Для сечения 2-2, рассматривая правую часть ($0 \leq x_2 \leq a$), получим

$$Q_2 = -\frac{4}{9} qa, \quad M_1 = \frac{4}{9} qax_2.$$

На первом участке поперечная сила изменяется по квадратной параболе, а изгибающий момент – по кубической параболе. На втором участке эпюры Q и M ограничены прямыми линиями. Значения ординат Q и M в пределах каждого участка приведены в таблице.

x	$Q(x)$	$M(x)$
-----	--------	--------

$x_1=0$	$Q_1 = 5qa/9$	$M = 0$
$x_1=a$	$Q_1 = 11qa/36$	$M_1 = 17qa^2/36$
$x_1=2a$	$Q_1 = -4qa/9$	$M_1 = 4qa^2/9$
$x_2=0$	$Q_1 = -4qa/9$	$M_2 = 0$
$x_2=a$	$Q_1 = -4qa/9$	$M_2 = 4qa^2/9$

По данным таблицы построены графики – эпюры Q и M .

Наибольшее значение изгибающего момента найдем, исследуя уравнение M_1 на максимум:

$$\frac{dM_1}{dx_1} = Q_1 = \frac{5}{9}qa - \frac{qx_1^2}{4a} = 0.$$

Отсюда абсцисса опасного сечения ($x_1 = x_0$)

$$x_0 = \frac{a}{3}\sqrt{20} = \frac{2a}{3}\sqrt{5}.$$

Подставляя в уравнение M_1 , получим

$$M_{\max} = \frac{5}{9}qa \frac{2a}{3}\sqrt{5} - \frac{q}{12a} \cdot \frac{8a^3}{27} (\sqrt{5})^3 \approx \frac{5}{9}qa^2.$$

Наибольшее значение поперечной силы равно (см. эпюру Q)

$$Q_{\max} = \frac{5}{9}qa.$$

Задачи

4.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, защемленных одним концом и нагруженных, как показано на рисунках 113 (а-е).

Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины

поперечных сил и изгибающих моментов, если $P = 2$ кН, $q = 2$

кН/м, $M = 4$ кН·м и $l = 2$ м.

Ответ:

Рисунок	а)	б)	в)	г)	д)	е)
---------	----	----	----	----	----	----

Q , кН	2	0	4	4	4	2
M , кН·м	4	4	4	2	6	2

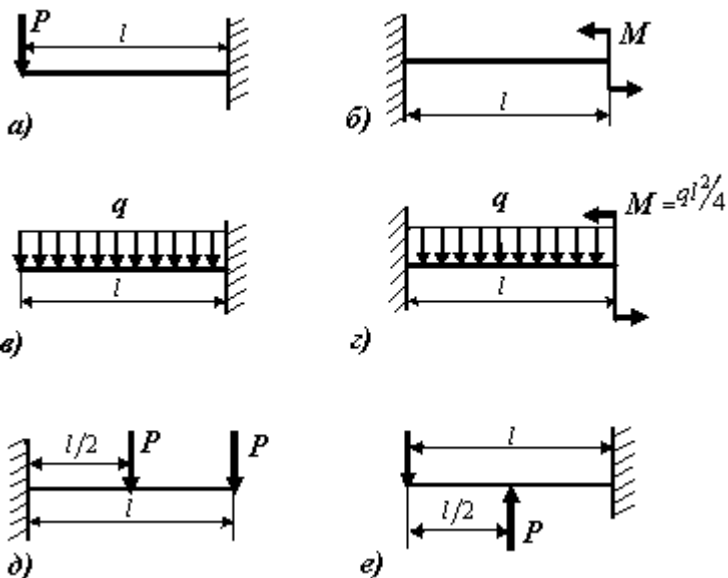


Рис. 113

4.2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок на двух опорах, нагруженных, как показано на рисунках 114 (а-г).

Найти максимальный момент M при следующих данных: $P = 6$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 6$ кН·м, $l = 3$ м.

Ответ:

Рисунок	а)	б)	в)	г)
Q , кН	3	3	2	4
M , кН·м	4,5	2,25	6	6

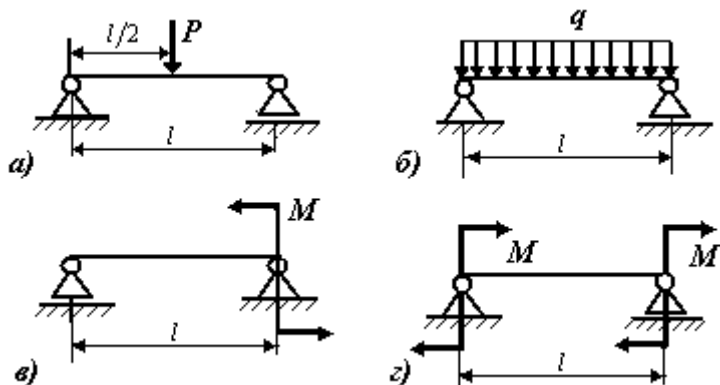


Рис.114

4.3. При каком значении силы P изгибающие моменты в опорных сечениях балок, изображенных на рис. 115 (а-г), будут равны нулю? Построить эпюры Q и M при этих значениях сил.

Ответ:

Рис.	а)	б)	в)	г)
$P, Н$	$ql/2$	$4qa/3$	$4qa/9$	$2qa/3$

4.4. Построить эпюры Q и M для балок, изображенных на рисунках 116 (а-г).

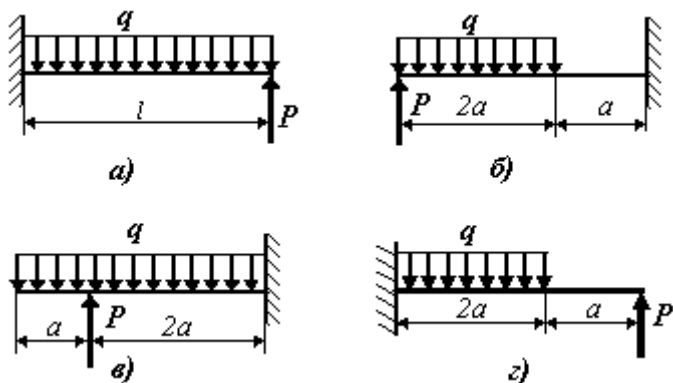


Рис.115

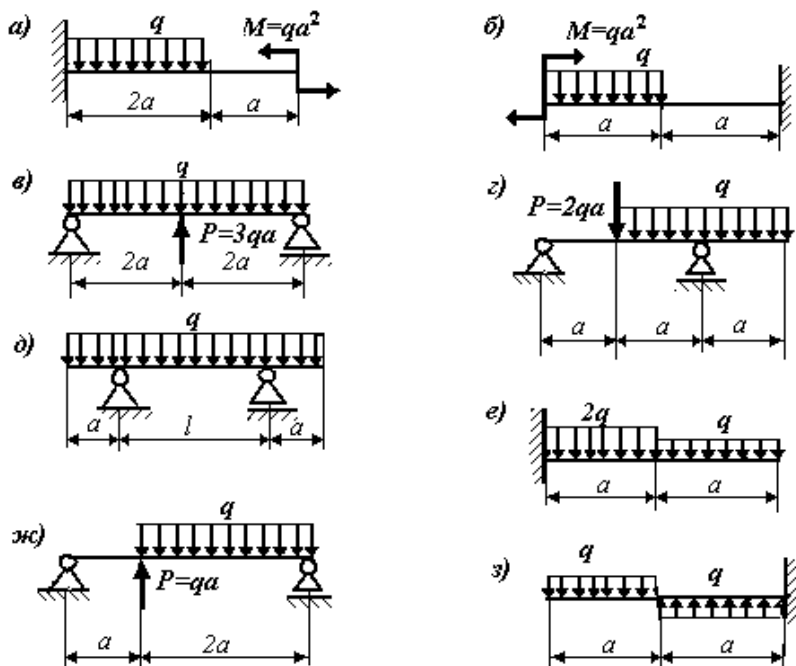


Рис. 116

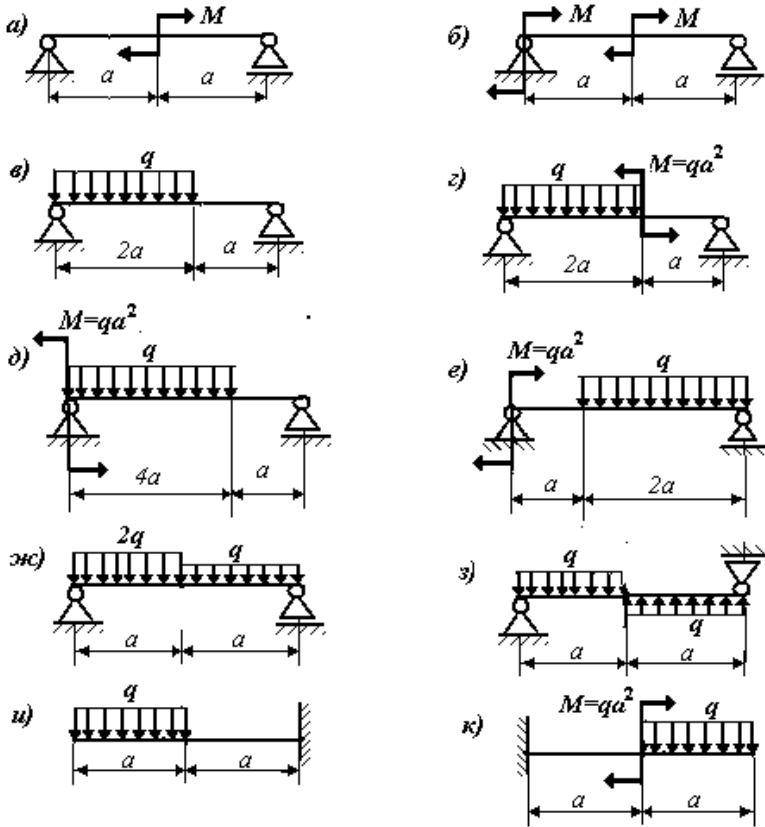


Рис. 117

4.5. Построить эпюры Q и M для балок, изображенных на рисунках 117(а-к).

4.6. Построить эпюры Q и M для балок (рис. 118), несущих нагрузку, распределенную по треугольнику, и вычислить наибольшие по абсолютному значению величины Q и M . Доказать. Что в схемах а-в площадь эпюры Q равна опорному моменту, а в схемах г-е равна нулю.

Ответ: а) $Q = \frac{ql}{2}$, $M = -\frac{ql^2}{6}$; б) $Q = qa$, $M = -qa^2$;

$$в) Q = \frac{ql}{4}, M = \frac{ql^2}{6};$$

$$г) Q = -\frac{ql}{3}, M = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}};$$

$$д) Q = \frac{qa}{2}, M = \frac{qa^2}{3};$$

$$е) Q = \frac{ql}{6}, M = -\frac{ql^2}{36\sqrt{3}}.$$

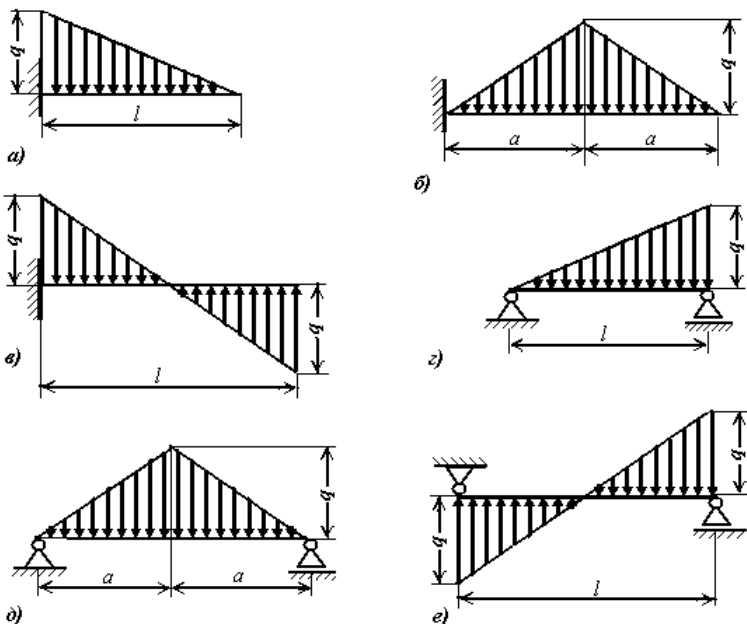


Рис. 118

4.2. Нормальные напряжения при изгибе

Нормальные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J} y,$$

где J - момент инерции сечения относительно нейтральной оси; y - расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение.

Наибольшие нормальные напряжения в сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} y_{\max} .$$

В зависимости от формы сечения могут быть два случая:

а) нейтральная ось, проходящая через центр тяжести, не лежит в середине высоты сечения. Расстояние от нейтральной оси до крайних сжатых и растянутых волокон не равны между собой. Расчет ведется отдельно для растянутых и сжатых волокон.

$$\sigma_{1\max} = \frac{M}{J} y_{1\max} = \frac{M}{W_1} ;$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{M}{J} y_{2\max} = \frac{M}{W_2} ,$$

где $W = \frac{J}{y_{\max}}$ - момент сопротивления сечения;

б) центр тяжести расположен в середине высоты сечения. В этом случае

$$W_1 = W_2 = \frac{J}{h/2} = W ;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} .$$

Условие прочности (по крайним волокнам в опасном сечении

балки) имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] .$$

Подбор сечения балки производится по максимальному изгибающему моменту путем вычисления необходимого момента сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} .$$

Прямой поперечный изгиб обычно рассматривается как простой вид деформации, несмотря на возникающие при этом

два силовых фактора – изгибающий момент и поперечную силу, так как в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

Частные случаи сечений

а) Сечение круглое сплошное. Диаметр сечения

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi[\sigma]}} \cong 2,173 \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{[\sigma]}};$$

б) Сечение круглое полое. Внешний диаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma](1-c^4)}},$$

где $c = \frac{d}{D}$.

в) Сечение прямоугольное. Высота сечения (размер сечения в плоскости изгиба)

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]c}} \cong 1,823 \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{[\sigma]c}},$$

где $c = \frac{b}{h}$.

г) При использовании прокатных профилей по необходимому моменту сопротивления в таблицах сортамента подбирается номер профиля (см. таблицы приложения).

Если размеры сечения известны, из условия прочности можно определить допускаемый изгибающий момент

$$M \leq W[\sigma].$$

Величину допускаемой нагрузки можно найти, приравняв максимальный изгибающий момент в балке допускаемому напряжению.

Приведенные формулы применимы и для сечений, не имеющих оси симметрии, если плоскость действия сил совпадает с главной центральной осью инерции сечения.

Пример. Балка трубчатого прямоугольного сечения пролетом $l = 4$ м, шарнирно опертая по концам несет равномерно распределенную нагрузку $q = 30$ кН/м (рис. 119). Определить величину наибольших нормальных напряжений в

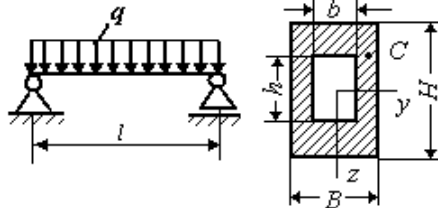
опасном сечении балки, а также величину напряжений в точке C того же сечения, если размеры его равны: $B = 12$ см, $H = 20$ см, $b = 6$ см и $h = 10$ см.

Решение.

Наибольшие напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y},$$

где M_{\max} - изгибающий момент в опасном сечении (посредине пролета), *Рис. 119*



равный

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60 \text{ кНм};$$

W_y - момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси y , определяемый по формуле $W_y = \frac{J_y}{z_{\max}}$.

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси равен

$$J_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3 - 6 \cdot 10^3}{12} = 7500 \text{ см}^4.$$

Расстояние от той же оси до наиболее удаленной от нее точки

$$z_{\max} = \frac{H}{2} = 10 \text{ см}. \quad \text{Следовательно,} \quad W_y = \frac{7500}{10} = 750 \text{ см}^3, \quad \text{а}$$

наибольшие напряжения в опасном сечении балки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{60 \cdot 10^3}{7500 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ МПа}.$$

Для вычисления нормальных напряжений в точке C воспользуемся формулой

$$\sigma_c = \frac{M_{\max} \cdot z_c}{J_y} = -\frac{6 \cdot 10^3}{7500 \cdot 10^8} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = -40 \text{ МПа}.$$

Знак «минус» взят потому, что точка C расположена на в сжатой зоне ($M > 0$, $z_c > 0$).

Задачи

4.7. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения размером 20×30 см, защемленная одним концом в стену, поддерживается на

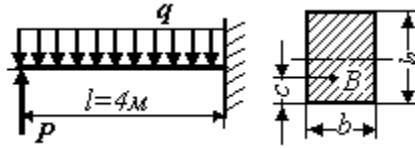


Рис. 120

другом конце силой $P = 5$ кН и нагружена сплошной нагрузкой $q = 6$ кН/м (рис. 120). Сечение балки – прямоугольник со сторонами $b = 20$ см и $h = 30$ см. Построить эпюры Q и M и подсчитать нормальные напряжения в крайних точках опасного сечения и в точке, отстоящей от нижнего края на расстояние $c = 4$ см.

Ответ: $\sigma_{max} = \pm 9,3$ МПа; $\sigma_c = 6,8$ МПа.

4.8. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения шириной 15 см и высотой 30 см нагружена, как указано на рис. 121. Построить эпюры M и Q и определить наибольшее нормальное напряжение.

Ответ: 6 МПа.

4.9. Для балки круглого поперечного сечения, изображенной на рис. 122, построить эпюры M и Q и определить наибольшее нормальное напряжение.

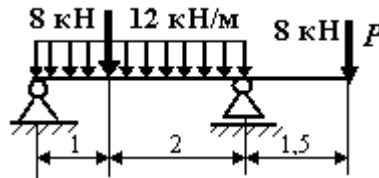


Рис. 121

Ответ: $\sigma = 122$ МПа.

4.10. Подобрать по ГОСТу двутавровое сечение балки пролетом 6 м, загруженной силами $P = 60$ кН, как показано на рис. 123. Допускаемое напряжение принять $[\sigma] = 160$ МПа.

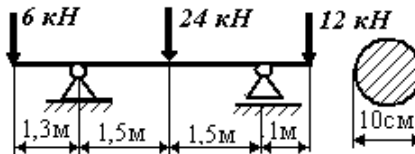


Рис. 122

Ответ: I № 22.

4.11. Чугунная труба с наружным диаметром 25 см и толщиной стенки 1 см лежит на двух опорах, расположенных на взаимном расстоянии 12 м, и наполнена водой. Каковы наибольшие нормальные напряжения в трубе, если удельный вес чугуна $7,8 \text{ кН/м}^3$?

Ответ: $\sigma_{\max} = 41,2 \text{ МПа}$.

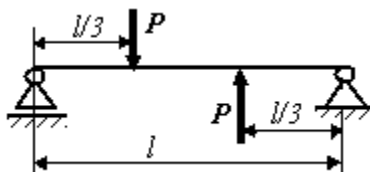


Рис. 123

4.12. Балка длиной 6 м лежит на двух опорах, расположенных на взаимном расстоянии 4,5 м, причем правый конец балки свешивается на 0,5 м. Погонный метр балки весит 660 Н; кроме того, на расстоянии 2,25 м от левой опоры балка нагружена сосредоточенной силой 10 кН. Определить величину нагрузки, которую нужно приложить к концу левой консоли для того, чтобы изгибающий момент в сечении, где приложена сила 10 кН, был бы равен нулю. Определить опорные реакции при этих условиях.

Ответ: $P = 25,4 \text{ кН}$.

4.13. Две балки, одна из которых квадратного, другая – круглого поперечного сечения, имеют одинаковые длину и площадь и выполнена из одинакового материала. Для балки круглого сечения безопасная величина сосредоточенного груза, приложенного посередине пролета, равна 10 кН. Какова будет для балки квадратного поперечного сечения того же пролета величина безопасного груза, так же приложенного посередине пролета?

Ответ: 11,8 кН.

4.14. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис.124. Найти диаметр круглого

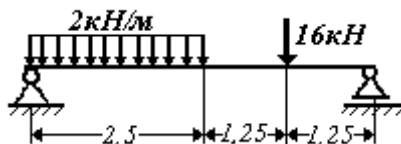


Рис. 124

сечения балки при $[\sigma]=110$ МПа.

Ответ: $d=11,3$ см.

4.15. Найти наибольшую величину груза P , который можно безопасно приложить к балке, если допускаемое напряжение равно 160 МПа и профиль балки – двутавр № 30а. Схема балки показана на рисунке 125.

Ответ: $P = 55,2$ кН.

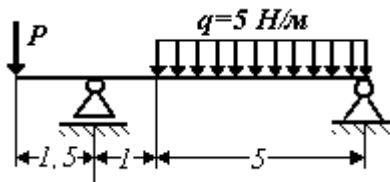


Рис. 125

4.16. Для балок, зашеченных одним концом и нагруженных, как показано в таблице на рисунках, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать сечение балок (по сортаменту) при допускаемом напряжении $[\sigma]=160$ МПа; размеры даны в метрах.

Ответ: См. схемы 1-4 таблицы.

4.17. Для двухопорных балок, изображенных в таблице на рисунках, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать их сечения. Допускаемые напряжения принять равными: для прокатных профилей $[\sigma]=160$ МПа, для квадратных и круглых (сосна) $[\sigma]=160$ МПа. Длины участков показаны в метрах.

Ответ: См. схемы 1-5 таблицы.

4.18. Величина сосредоточенного груза, приложенного посередине пролета, который безопасно может выдержать балка постоянного поперечного сечения, опертая по концам, равна 50 кН. Определить наибольшую величину груза, который может быть приложен к данной балке: а) в четверти пролета и б) равномерно распределенным по всей длине.

Ответ: а) 66,7 кН; б) 100 кН.

4.19. Двое рабочих должны нести стальной ($\gamma = 75$ кН/м³) стержень длиной 12 м с квадратным поперечным сечением 3×3

см². Если они возьмут его за концы, то чему будет равно наибольшее нормальное напряжение? Если каждый рабочий возьмет стержень на одинаковом расстоянии a от конца, то в каких местах они должны его взять, чтобы нормальное напряжение не превысило 140 МПа?

Ответ: 1) $\sigma = 282$ МПа; 2) $a \approx 4,25$ м.

Таблица к задаче 4.16

№	Схема балки и нагрузка	Ответ		
		Q , кН	M , кН·м	Размеры сечения
1	<p>I</p>	80	100	I № 33
2	<p>I</p>	30	70	I № 30
3	<p>II</p>	30	80	2 I № 24a
4	<p>I</p>	40	80	I № 24a

Таблица к задаче 4.17

№	Схема балки и нагрузка	Ответ		
		Q , кН	M , кН·м	Размеры сечения
1	<p>I</p>	20	50	I № 24a
2	<p>II</p>	60	90	2 I № 27
3		40	20	$d = 25,5$ см
4	<p>I</p>	25	31,2	I № 20a
5		40	20	18×24

4.20. На постройке применяются брусья сечением 10×30 см, длиной 8,5 м. Возник вопрос, можно ли один из этих брусьев применить в качестве временного мостика для перехода рабочих с одной части на конструкции на другую при пролете? Можно ли разрешить такое применение бруса, если его положить плашмя? Если да, то можно ли было бы по нему переходить одновременно более чем одному рабочему. Допускаемое напряжение 10 МПа, вес рабочего 800 Н.

Ответ: Можно разрешить одновременный переход трем рабочим.

5. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Изгиб с кручением представляет собою частный случай сложного сопротивления, когда внешние силы, действующие на стержень, вызывают в его поперечных сечениях крутящий момент $T_{кр}$, изгибающие моменты M_y , M_z и поперечные силы Q_y ,

Q_z .

В поперечном сечении такого стержня возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях и касательные напряжения от кручения и изгиба.

В стержне с круглым или кольцевым сечением имеет место прямой изгиб под действием суммарного изгибающего момента, определяемого по формуле

$$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (1)$$

Направление вектора суммарного момента может быть различным в разных сечениях и поэтому эпюра M_u может иметь криволинейное очертание даже при отсутствии сплошных нагрузок.

Обычно построение эпюры M_u производят вычисляя по формуле (1) суммарный момент в тех местах, где исходные эпюры M_y , M_z имеют переломы.

Полученные значения M_u откладывают с одной стороны оси эпюры и вершины соединяют прямыми или кривыми, обращенными выпуклостью к оси эпюры.

Опасные сечения определяются путем сопоставления эпюр суммарного изгибающего момента M_u и крутящего момента $T_{кр} = M_x$. Опасными являются те сечения, где $T_{кр}$ и M_u одновременно достигают наибольших значений.

Проверка прочности производится в опасных точках опасного сечения. Такими точками оказываются точки, лежащие на контуре сечения и наиболее удаленные от нейтральной оси, так как в этих точках возникают наибольшие нормальные напряжения от изгибающего момента M_u и наибольшие касательные напряжения от крутящего момента $T_{кр}$.

Касательные напряжения от изгиба, возникающие при наличии поперечных сил Q_y , и Q_z , обычно невелики, и их можно не принимать во внимание, тем более что максимум этих напряжений не совпадает с

максимумом остальных.

Элемент в опасной точке (рис. 125) находится в плоском напряженном состоянии. Расчет обычно ведется по приведенному моменту M_{np} , который определяется в зависимости от принятой теории прочности.

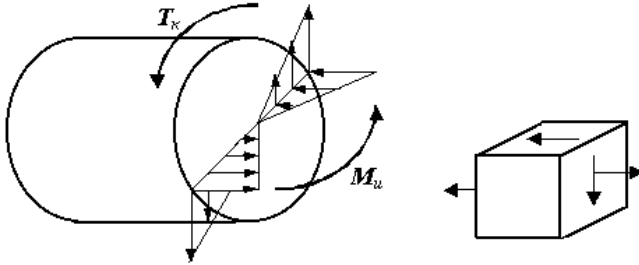


Рис. 125

Условие прочности можно записать так:

$$\sigma_{np} = \frac{M_{np}}{W} \leq [\sigma],$$

где σ_{np} – приведенное напряжение; $W = \frac{\pi d^3}{32}$ – осевой момент сопротивления круглого сечения.

Диаметр сплошного вала определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{np}}{\pi[\sigma]}}.$$

Наружный диаметр кольцевого сечения

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{np}}{\pi(1-c^4)[\sigma]}}; \quad c = \frac{d}{D},$$

где d – внутренний диаметр сечения.

Приведенные напряжения и приведенные моменты имеют значения:

по первой теории прочности (теории наибольших нормальных напряжений)

$$\sigma_{np} = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

$$M_{np} = 0,5M_u + 0,5\sqrt{M_u^2 + T_{кр}^2} ;$$

по второй теории прочности (теории наибольших относительных удлинений)-

$$\sigma_{np} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

$$M_{np} = \frac{1-\mu}{2}M_u + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{M_u^2 + 4T_{кр}^2} ;$$

по третьей теории (наибольших касательных напряжений) -

$$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

$$M_{np} = \sqrt{M_u^2 + T_{кр}^2} ;$$

по четвертой, энергетической теории –

$$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} ,$$

$$M_{np} = \sqrt{M_u^2 + 0,75T_{кр}^2} ;$$

по теории Мора –

$$\sigma_{np} = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

$$M_{np} = \frac{1-\nu}{2}M_u + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_u^2 + 4T_{кр}^2} ,$$

где $\nu = \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_{mc}}$ - для пластичных материалов;

$$V = \frac{\sigma_{нчр}}{\sigma_{нчс}} - \text{для хрупких материалов;}$$

$$V = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_c} - \text{для любых материалов.}$$

Во всех приведенных выше формулах:

σ – нормальное напряжение от изгиба в опасной точке поперечного сечения;

τ – касательное напряжение от кручения в той же точке сечения;

σ_{mp} и σ_{mc} – пределы текучести при растяжении сжатии;

$\sigma_{нчр}$ и $\sigma_{нчс}$ – пределы прочности при растяжении сжатии;

μ – коэффициент Пуассона.

Пример. На вал насажены два шкива (рис. 126, а): первый – диаметром 80 см, весящий 800 Н, и второй – диаметром 1 м, весящий 1200 Н. Через шкива перекинута ремни, ветви которых параллельны друг другу и наклонены к горизонту на первом шкиве под углом 30° , на втором – под углом 45° . От первого шкива ремень идет к электромотору; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей ветви. От второго шкива ремень идет к станку. В этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей. Станок имеет мощность 100 л.с.; вал делает 200 оборотов в минуту. Используя четвертую теорию прочности, определить необходимый диаметр вала при опускаемом напряжении 80 МПа.

Решение. Вал подвергается изгибу, а часть его, расположенная между шкивами, и скручиванию. Крутящий момент определяется по формуле

$$T_{кр} = \frac{22500}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = 71620 \frac{N}{n} \text{ Нм}$$

$$T_{кр} = \frac{22500}{3,14} \cdot \frac{100}{200} = 3580 \text{ Нм} = 3,58 \text{ кНм}$$

Обозначим натяжение набегающей ветви ремня, перекинутого через первый шкив, через t_1 , тогда натяжение

сбегающей ветви по условию равно $2t_1$. Для первого шкива вращающий момент равен

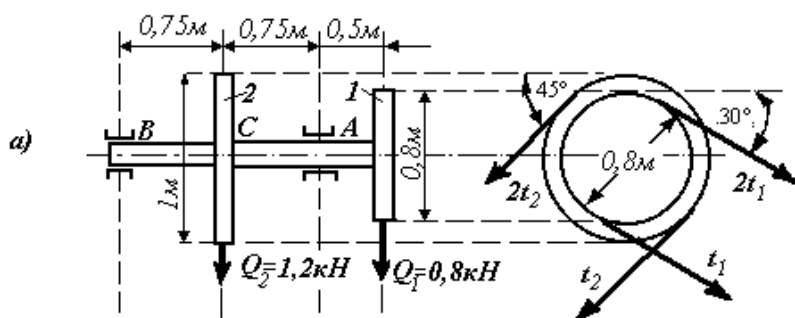
$$T_1 = T_{кр} = \frac{D_1 t_1}{2},$$

где D_1 – диаметр первого шкива; отсюда

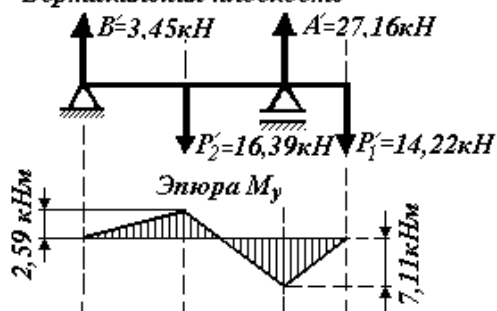
$$t_1 = \frac{2T_{кр}}{D_1} = \frac{2 \cdot 3580}{0,8} = 8950 \text{ Н};$$

для второго шкива аналогично

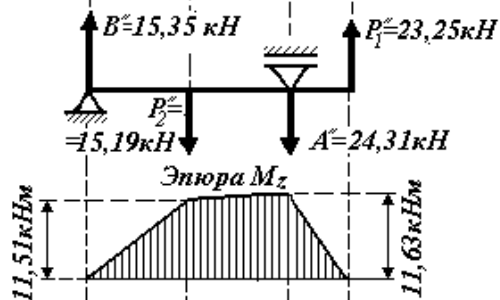
$$t_1 = \frac{2T_{кр}}{D_2} = \frac{2 \cdot 3580}{1} = 7160 \text{ Н}.$$



б) Вертикальная плоскость



в) Горизонтальная плоскость



г) Эпюра результирующего изгибающего момента

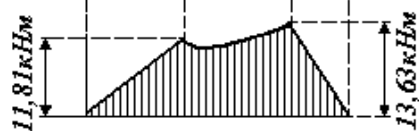


Рис. 126

Таким образом, в сечениях посадки шкивов вал нагружен наклонными силами

$$T_1 = 3t_1 = 3 \cdot 8950 = 26850 \text{ Н} \text{ и } T_2 = 3t_2 = 3 \cdot 7160 = 21480 \text{ Н}.$$

Кроме того, в тех же сечениях действуют вертикальные силы, равные весу шкивов.

Для вычисления наибольшего изгибающего момента определим сначала изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Для этого разложим силы R_1 и R_2 на вертикальную и горизонтальную составляющие; вертикальные составляющие сложим с весами шкивов. Тогда вертикальная нагрузка от первого шкива будет равна

$$P'_1 = Q_1 + T_1 \sin 30^\circ = 800 + 26850 \cdot 0,5 = 14220 \text{ Н} = 14,22 \text{ кН},$$

а от второго шкива

$$P'_2 = Q_2 + T_2 \sin 45^\circ = 1200 + 21480 \cdot 0,707 = 16390 \text{ Н} = \\ = 16,39 \text{ кН}.$$

Горизонтальная нагрузка от первого шкива равна

$$P''_1 = T_1 \cos 30^\circ = 26850 \cdot 0,866 = 23250 \text{ Н} = 23,25 \text{ кН},$$

а от второго шкива

$$P''_2 = T_2 \cos 45^\circ = 21480 \cdot 0,707 = 15190 \text{ Н} = 15,19 \text{ кН}.$$

При этом нагрузки P''_1 и P''_2 направлены в противоположные стороны (рис. 126, в)

Рассматривая в отдельности действие сил в горизонтальной и вертикальной плоскостях, определяем опорные реакции, действующие в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Для нагрузок P'_1 и P'_2 , действующих в вертикальной плоскости, опорные реакции равны $A' = 27,16 \text{ кН}$ и $B' = 3,45 \text{ кН}$. Построим эпюру изгибающих моментов $M'_u = M_y$ (рис. 126, б).

Для нагрузок P''_1 и P''_2 , действующих в горизонтальной плоскости (рис. 125, в) опорные реакции равны $A'' = 23,41 \text{ кН}$ и $B'' = 15,35 \text{ кН}$. Построим эпюру изгибающих моментов $M'_u = M_z$.

Результирующий изгибающий момент может достигнуть наибольшего значения либо в опоре A либо в сечении C , так как обе эпюры моментов представляют собой ломаные линии с

вершинами в этих сечениях. Величина результирующего момента в этих сечениях равна

$$M_A = \sqrt{(M'_A)^2 + (M''_A)^2} = \sqrt{7,11^2 + 11,63^2} = 13,63 \text{ кНм}$$

$$\text{и } M_C = \sqrt{(M'_C)^2 + (M''_C)^2} = \sqrt{2,59^2 + 11,51^2} = 11,81 \text{ кНм.}$$

Таким образом, опасным сечением является сечение A , эпюра результирующего изгибающего момента представлена на рис. 125, z .

Расчетный момент по IV теории прочности равен

$$M_p = \sqrt{(M_A)^2 + 0,75(T_{кр})^2} = \sqrt{13,63^2 + 0,75 \cdot 3,58^2} = 13,98 \text{ кНм}$$

Необходимый диаметр вала находим по формуле

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_p}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 13980}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,121 \text{ м} = 12,1 \text{ см.}$$

Задачи

4.21. Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения в опасном сечении подвергается действию крутящего момента $T_k = 1$ кНм и изгибающего момента $M_u = 1,2$ кНм. Из условия прочности по третьей теории прочности определить необходимый диаметр вала, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Какой диаметр должен был бы иметь вал, если расчет произвести, пользуясь четвертой теорией прочности?

Ответ: 126 мм; 124 мм.

4.22. Полый стальной вал, внутренний диаметр которого должен составлять 0,6 наружного, в опасном сечении подвергается действию изгибающего момента $M_u = 90$ кНм и крутящего момента $T_k = 120$ кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 120$ МПа, использовать теорию наибольших касательных напряжений.

Ответ: 245 мм; 147 мм.

4.23. Полый чугунный вал с наружным и внутренним диаметрами, соответственно равными 160 мм и 100 мм, передает мощность 200 л. с. при 100 об/мин. Расстояние

между опорными подшипниками равно 1,2 м; посредине этого расстояния к валу приложена поперечная сосредоточенная сила 30 кН. Определить величину наибольшего расчетного напряжения в опасном сечении вала, пользуясь второй теорией; $\mu = 0,25$.

Ответ: 4,09 МПа.

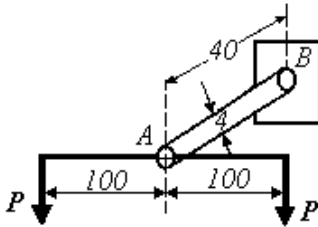


Рис.127

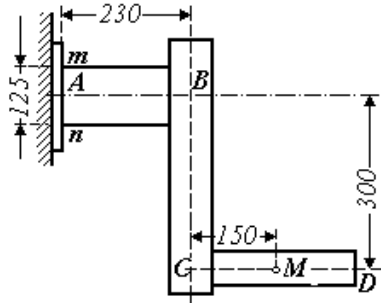


Рис. 128

4.24. Определить наибольшее расчетное напряжение в стальном стержне AB круглого поперечного сечения, нагруженном двумя одинаковыми грузами $P = 1$ кН приложенными, как указано на рис. 127. Чему будет равно наибольшее расчетное напряжение в стержне если один из грузов будет снят? Использовать четвертую теорию прочности.

Ответ: 127,3 МПа; 151,8 МПа.

4.25. Стальной коленчатый стержень $ABCD$, закреплен, как указано на рис.128. Участок AB имеет круглое поперечное сечение диаметром 125 мм. Сила 20 кН приложена в точке M перпендикулярно плоскости чертежа. Пренебрегая касательными напряжениями от поперечной силы, определить в наиболее опасной точке сечения mn главные напряжения и расчетные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности.

Ответ: $\sigma_I = 45,1$ МПа; $\sigma_3 = -5,4$ МПа; $\sigma_{III} = 50,5$ МПа;
 $\sigma_{IV} = 48$ МПа.

4.26. Из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений определить наибольшую допускаемую

4.28. Дорожный знак укреплен на полой круглой стойке с наружным диаметром 80 мм (см. рис. 131). Используя третью теорию прочности, определить толщину стенки стойки при допусаемом напряжении $[\sigma] = 80$ МПа, если ветровая нагрузка на знак равна 15 МПа.

Ответ: 2,36 мм \approx 2,4 мм.

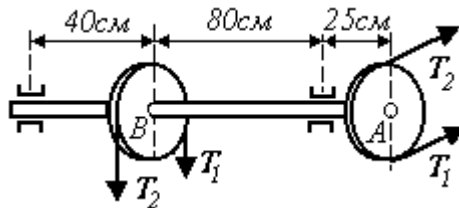


Рис. 132

4.29. Два одинаковых шкива *A* и *B* насажены на вал (см. рис. 132). Ведущий шкив *A* передает 10 л.с. при 100 об/мин. Обе ветви ремня на шкиве *B* вертикальны. Натяжение ремней: $T_1 > T_2$, $T_2 = 1,5$ кН. Диаметры шкивов равны 60 см. Из условия прочности по третьей теории прочности определить необходимый диаметр вала при допусаемом напряжении $[\sigma] = 80$ МПа.

Ответ: 60 мм.

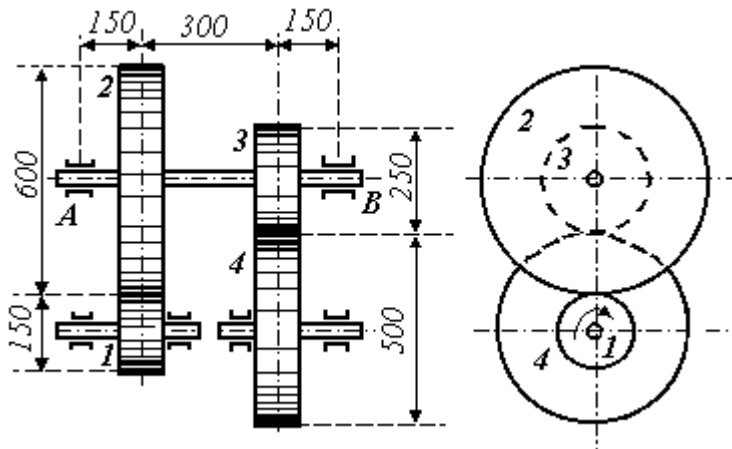


Рис. 133

4.30. Определить диаметр вала AB цилиндрической зубчатой передачи (см. рис. 133). Крутящий момент на зубчатом колесе 1 равен 300 Нм. Использовать четвертую теории прочности. Собственными весами зубчатых колес пренебречь. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Какой диаметр вала следовало бы взять на основе третьей теории прочности?

Ответ: 57,8 мм; 56,2 мм.

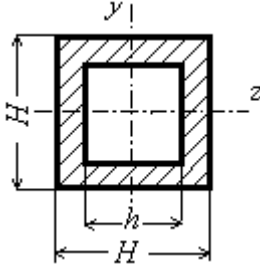
Список литературы

- Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
- Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1989. — 622 с.
- Кинасошвили Р. С. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. — 607 с.
- Степин П. А. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1988. — 366 с.
- Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Геометрические характеристики плоских сечений

Если нет специальных указаний в условиях задач, то площади A , координаты центров тяжести y_C , осевые моменты инерции J , моменты сопротивления W и радиусы инерции i для основных форм сечений приведены в таблице

	<p>1. Квадрат</p> $A = a^2; J_z = J_y = \frac{a^4}{12};$ $W_z = W_y = \frac{a^3}{6}; i = 0,289a$
	<p>2. Квадрат с квадратным отверстием</p> $A = H^2 - h^2; J_z = J_e = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $W_z = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}; i = 0,289;$
	<p>3. Прямоугольник</p> $A = bh; J_z = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12};$ $W_z = \frac{bh^2}{6}; W_y = \frac{hb^2}{6};$ $i_z = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0,289h;$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,289b$

4. Полый прямоугольник

$$A = BH - bh; J_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12};$$

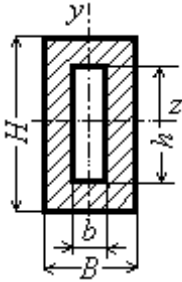
$$J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$

$$W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H};$$

$$W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$$



5. Круг

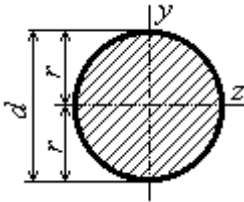
$$A = \frac{\pi d^2}{4};$$

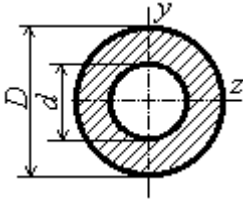
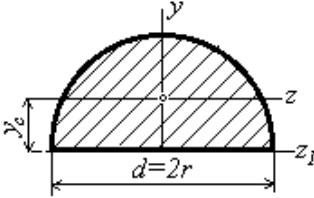
$$J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$$

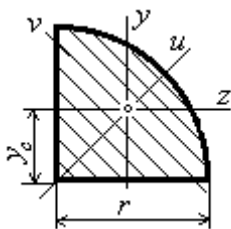
;

$$W_z = W_y = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

$$i_z = i_y = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$



	<p style="text-align: center;">6. Кольцо</p> $A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}; \quad c = \frac{d}{D};$ $J_z = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \approx$ $\approx \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) \approx 0,05 D^4 (1 - c^4);$ $W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4) \approx ;$ $\approx 0,1 D^3 (1 - c^4)$ $i_z = i_y = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$
	<p style="text-align: center;">7. Полуокруг</p> $A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,392 d^2;$ $y_c = \frac{4r}{3} \approx 0,424 r;$ $J_z = 0,11 r^4 = 0,00686 d^4;$ $J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025 d^4;$ $W_{zH} \approx 0,0323 d^3 \text{ (для нижних волокон);}$ $W_{zB} \approx 0,0239 d^3 \text{ (для верхних волокон);}$ $W_y = \frac{\pi d^3}{64} \approx 0,05 d^3;$ $i_z = 0,132 d; \quad i_y = \frac{d}{4} = 0,25 d$



8. Четверть круга

$$A = \frac{\pi r^2}{4} \approx 0,7854r^2;$$

$$y_c = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244r;$$

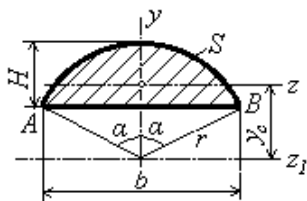
$$J_z = J_y = 0,05489r^4;$$

$$J_{zy} = -0,01646r^4;$$

$$J_{u(\max)} = 0,07135r^4;$$

$$J_{v(\min)} = 0,03843r^4;$$

$$i_{v(\min)} = 0,221r$$



9. Круговой сегмент

$$\text{Длина дуги AB } S = \pi r \frac{\alpha^\circ}{90};$$

$$b = 2r \sin \alpha;$$

$$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\alpha^\circ}{90} \pi - \sin 2\alpha \right) =$$

$$= \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha);$$

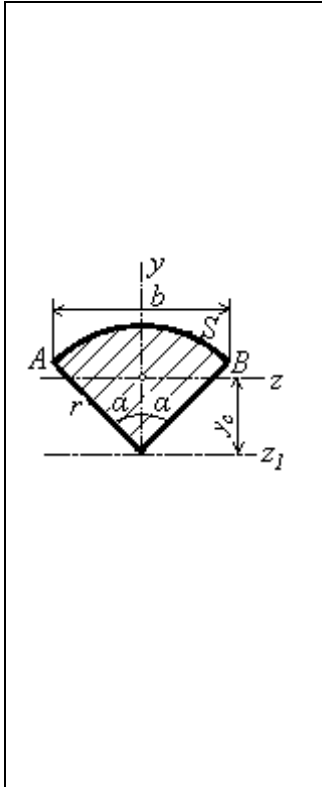
$$y_c = \frac{b^2}{12A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha};$$

$$J_z = \frac{Ar^2}{4} \left(1 + \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right);$$

$$J_y = \frac{Ar^2}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right);$$

$$W_z = \frac{J_z}{r - y_c} \text{ (для верхнего}$$

волокна)



10. Круговой сектор

$$\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180}; A = 2r\alpha \text{ (длина дуги AB)}$$

$$b = 2r \sin \alpha \text{ (длина хорды)}$$

$$A = r^2 \alpha;$$

$$y_c = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{38,2r \sin \alpha}{\alpha^\circ};$$

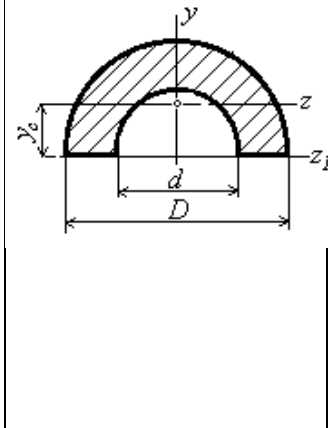
$$J_z = \frac{r^4}{8} \left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right);$$

$$J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha);$$

$$J_{z_1} = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha);$$

$$i_z = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha^2}};$$

$$i_z = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\alpha}}$$



10. Половина кольца

$$A = \frac{\pi}{8} (D^2 - d^2);$$

$$y_c = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d};$$

$$J_z = 0,00686(D^4 - d^4) - \frac{0,0177D^2 d^2 (D - d)}{D + d};$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{128} (1 - c^4); c = \frac{d}{D}$$

V. Некоторые сведения из элементарной математики.

Пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

1) $ad = bc$; 2) $c = \frac{ad}{b}$; 3) $b = \frac{ad}{c}$; 4) $a = \frac{bc}{d}$; 5) $d = \frac{bc}{a}$.

Действия со степенями:

1) $(ab)^n = a^n b^n$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; 3) $a^m a^n = a^{m+n}$;

4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, например $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$;

5) $(a^m)^n = a^{mn}$, например $(10^3)^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$;

6) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$, например $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$; $\frac{1}{10^{-3}} = 10^3$.

Действия с корнями:

1) $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{b}$; 2) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$;

3) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, например $\sqrt[3]{10^6} = 10^{6/3} = 10^2$

Вычисления с приведением чисел к стандартному виду

1) $305 = 3,05 \cdot 10^2$; $0,0305 = 3,05 \cdot 10^{-2}$

2) $\frac{ba^m ca^n}{da^k} = \frac{bc}{d} a^{m+n-k}$, например

$$\frac{0,8 \cdot 600}{0,012} = \frac{8 \cdot 10^{-1} \cdot 6 \cdot 10^2}{1,2 \cdot 10^{-2}} = \frac{8 \cdot 6}{1,2} 10^{-1+2+2} = 40 \cdot 10^3$$

Плоский угол: 1 рад $\approx 57,3^\circ$

Круг, окружность:

1) площадь круга $\pi r^2 = \pi d^2/4 \approx 0,785d^2$;

2) площадь кругового кольца

$$\pi(R^2 - r^2) = \pi(D^2 - d^2)/4 \approx 0,785(D^2 - d^2);$$

3) площадь кругового сектора $\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$

4) длина окружности $2\pi r = \pi d$

5) длина дуги кругового сектора $2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ}$

Здесь r, d радиус и диаметр круга, сектора; α - центральный угол сектора; R, r и D, d - наружный и внутренний радиусы и диаметры кольца.

Круговой цилиндр:

- 1) площадь поперечного сечения $\pi r^2 = \pi d^2/4 \approx 0,785d^2$;
- 2) площадь продольного диаметрального сечения $2rh=hd$;
- 3) боковая поверхность $2\pi rh=\pi dh$.

Здесь r, d - радиус и диаметр цилиндра; h - высота цилиндра.

Треугольник косоугольный:

- 1) теорема косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$;
- 2) теорема синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Здесь α, β, γ и a, b, c - соответственно углы и их противолежащие стороны.

Треугольник прямоугольный:

- 1) теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$
- 2) тригонометрические функции: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};$$

- 3) нахождение катетов: $a = c \cdot \sin \alpha$; $b = c \cdot \cos \alpha$; $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
- 4) нахождение гипотенузы: $c = a/\sin \alpha = b/\cos \alpha$.

Здесь α и a, b - соответственно острый угол и его противолежащий и прилежащий катеты; c - гипотенуза.

Формулы приведения тригонометрических функций:

- 1) $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$; 2) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- 3) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

**Синусы и косинусы некоторых углов
(с точностью до трех значащих цифр)**

α , град	$\sin \alpha = \cos \beta$	β , град	α , град	$\sin \alpha = \cos \beta$	β , град
0	0,000	90	50	0,766	40
5	0,087	85	55	0,819	35
10	0,174	80	60	0,866	30
15	0,259	75	65	0,906	25
20	0,342	70	70	0,940	20
25	0,423	65	75	0,966	15
30	0,500	60	80	0,985	10
35	0,574	55	85	0,996	5
40	0,643	50	90	1,000	0
45	0,707	45			

Переход от градусной меры к радианной

α , град	α , рад	α , град	α , рад	α , град	α , рад
1°	0,0175	10°	0,1745	55°	0,9599
2°	0,0349	15°	0,2618	60°	1,0472
3°	0,0524	20°	0,3491	65°	1,1345
4°	0,0698	25°	0,4363	70°	1,2217
5°	0,0873	30°	0,5236	75°	1,3090
6°	0,1047	35°	0,6109	80°	1,3962
7°	0,1222	40°	0,6981	85°	1,4835
8°	0,1396	45°	0,7854	90°	1,5708
9°	0,1571	50°	0,8727		

Чтобы найти длину дуги l окружности радиуса r , зная меру этой дуги α в градусах, достаточно умножить r на радианную меру этой дуги. Например, при $r=25$ см и $\alpha = 35^\circ$ $l = 25 \cdot 0,6109 = 15,27$ см.

Площадь круга A диаметра d

(Если диаметр круга увеличить или уменьшить в 10, 100 и т. д. раз, то площадь круга соответственно увеличится или уменьшится в 10^2 , 100^2 и т. д. раз.)

d	A	d	A	d	A
1,00	0,785	3,6	10,18	7,1	38,48
1,01	0,801	3,7	10,75	7,2	40,72
1,02	0,817	3,8	11,34	7,3	41,85
1,03	0,833	3,9	11,95	7,4	43,01
1,05	0,866	4,1	13,20	7,6	45,36
1,06	0,883	4,2	13,85	7,7	46,57
1,07	0,899	4,3	14,52	7,8	47,78
1,08	0,916	4,4	15,21	7,9	49,02
1,1	0,950	4,6	16,62	8,1	51,53
1,2	1,131	4,7	17,35	8,2	52,81
1,3	1,327	4,8	18,10	8,3	54,11
1,4	1,539	4,9	18,86	8,4	55,42
1,6	2,011	5,1	20,43	8,6	58,09
1,7	2,270	5,2	21,24	8,7	59,45
1,8	2,545	5,3	22,06	8,8	60,82
1,9	2,835	5,4	22,90	8,9	62,21
2,1	3,464	5,6	24,63	9,1	65,04
2,2	3,801	5,7	25,52	9,2	66,48
2,3	4,155	5,8	26,42	9,3	67,93
2,4	4,524	5,9	27,34	9,4	69,40
2,6	5,309	6,1	29,22	9,6	72,38
2,7	5,726	6,2	30,19	9,7	74,05
2,8	6,158	6,3	31,17	9,8	75,43
2,9	6,605	6,4	32,17	9,9	76,98
3,1	7,548	6,6	34,21		
3,2	8,042	6,7	35,26		
3,3	8,553	6,8	36,32		
3,4	9,079	6,9	37,39		

Значения часто встречающихся величин

Величина	Ее значение	Величина	Ее значение
π	3,142	$\pi^3\sqrt{\pi}$	4,601
$\pi/2$	1,571	$\pi\sqrt{2}$	4,443
$\pi/3$	1,047	$\pi/\sqrt{2}$	2,221
$\pi/4$	0,785	$\sqrt{2\pi}$	2,507
$\pi/6$	0,524	$\sqrt{\pi/2}$	1,253
$\pi/180$	0,018	$\sqrt{1/\pi}$	0,564
π^2	9,870	$\sqrt{2/\pi}$	0,798
$4\pi^2$	39,48	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845
$\pi^2/4$	2,467	$\sqrt[3]{\pi/2}$	1,162
π^3	31,01	$\pi\sqrt[3]{1/\pi}$	0,683
$1/\pi$	0,318	$\sqrt[3]{2/\pi}$	0,680
$1/\pi^2$	0,101	g	9,810
$1/\pi^3$	0,032	g ²	96,24
$180/\pi$	57,30	\sqrt{g}	3,132
$\sqrt{\pi}$	1,773	$\pi\sqrt{g}$	9,840
$\sqrt[3]{\pi}$	1,465	$\sqrt{2g}$	13,92
$\pi\sqrt{\pi}$	5,563	1/g	0,102

Степени чисел (с точностью до трех значащих цифр)

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
0,1	0,01	0,001	5,1	26,0	133
0,2	0,04	0,008	5,2	27,0	141
0,3	0,09	0,027	5,3	28,1	149
0,4	0,16	0,064	5,4	29,2	157
0,5	0,25	0,125	5,5	30,3	166
0,6	0,36	0,216	5,6	31,4	176
0,7	0,49	0,343	5,7	32,5	185
0,8	0,64	0,512	5,8	33,6	195
0,9	0,81	0,729	5,9	34,8	205
1,0	1,00	1,00	6,0	36,0	216
1,1	1,21	1,33	6,1	37,2	227
1,2	1,44	1,73	6,2	38,4	238
1,3	1,69	2,20	6,3	39,7	250
1,4	1,96	2,74	6,4	41,0	262
1,5	2,25	3,38	6,5	42,3	275
1,6	2,56	4,10	6,6	43,6	287
1,7	2,89	4,91	6,7	44,9	301
1,8	3,24	5,83	6,8	46,2	314
1,9	3,61	6,86	6,9	47,6	329
2,0	4,00	8,00	7,0	49,0	343
2,1	4,41	9,26	7,1	50,4	358
2,2	4,84	10,7	7,2	51,8	373
2,3	5,29	12,2	7,3	53,3	389
2,4	5,76	13,8	7,4	54,8	405
2,5	6,25	15,6	7,5	56,3	422
2,6	6,76	17,6	7,6	57,8	439
2,7	7,29	19,7	7,7	59,3	457
2,8	7,84	22,0	7,8	60,8	475
2,9	8,41	24,4	7,9	62,4	493
3,0	9,00	27,0	8,0	64,0	512
3,1	9,61	29,8	8,1	65,6	531
3,2	10,2	32,8	8,2	67,2	551
3,3	10,9	35,9	8,3	68,9	572

3,4	11,6	39,3	8,4	70,6	593
3,5	12,3	42,9	8,5	72,3	614
3,6	13,0	46,7	8,6	74,0	636
3,7	13,7	50,7	8,7	75,7	659
3,8	14,4	54,9	8,8	77,4	681
3,9	15,2	59,3	8,9	79,2	705
4,0	16,0	64,0	9,0	81,0	729
4,1	16,8	68,9	9,1	82,8	754
4,2	17,6	74,1	9,2	84,7	779
4,3	18,5	79,5	9,3	86,5	804
4,4	19,4	85,2	9,4	88,4	831
4,5	20,3	91,1	9,5	90,3	857
4,6	21,2	97,3	9,6	92,2	885
4,7	22,1	104	9,7	94,1	913
4,8	23,0	111	9,8	96,0	941
4,9	24,0	118	9,9	98,0	970
5,0	25,0	125	10,0	100,0	1000

Таблицей можно пользоваться и для возведения в степень чисел, отличающихся от табличных в 10^n раз, например:

- 1) $650^2 = 6,5^2 \cdot 100^2 = 42,3 \cdot 10^4$
- 2) $650^3 = 6,5^3 \cdot 100^3 = 275 \cdot 10^6$
- 3) $0,65^2 = (6,5 \cdot 10^{-1})^2 = 6,5^2 \cdot 10^{-2} = 42,3 \cdot 10^{-2}$
- 4) $0,065^3 = (6,5 \cdot 10^{-2})^3 = 6,5^3 \cdot 10^{-6} = 275 \cdot 10^{-6}$

Разрешается пользоваться для напряжения внесистемной единицей Н/мм².

$$1 \text{ Н/мм}^2 = 1 \text{ МН/м}^2$$

$$1 \text{ Н/мм}^2 = 10,1972 \text{ кг/см}^2 \approx 10 \text{ кг/см}^2$$

$$1 \text{ кг/мм}^2 = 9,80665 \text{ Н/мм}^2 \approx 10 \text{ Н/мм}^2$$

$$1 \text{ кг} = 9,80665 \text{ Н} \approx 10 \text{ Н}$$

$$1 \text{ Н} = 0,101972 \text{ кг} \approx 0,102 \text{ кг} \approx 0,1 \text{ кг}$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Н/м}^2 = 1,01972 \text{ ат (кг/см}^2) \approx 1 \text{ ат (кг/см}^2)$$

$$1 \text{ кг/м}^2 = 9,80665 \text{ Н/м}^2$$

$$1 \text{ кг/см}^2 = 1 \text{ ат} = 0,98066 \text{ бар} \approx 1 \text{ бар}$$

Приставки для образования кратных и дольных единиц в соответствие с ГОСТ 7663-55.

Приставки	Сокращение	Кратность	Примеры
Тера	Т	10^{12}	тераграмм
Гига	Г	10^9	гигаом
Мега	М	10^6	меганьютон
Кило	к	10^3	километр
Гекто	г	10^2	гектоватт
Дека	да	10^1	деканьютон
Деци	д	10^{-1}	дециметр
Санتي	с	10^{-2}	сантиметр
Милли	м	10^{-3}	миллиметр
Микро	мк	10^{-6}	микрометр
Нано	Н	10^{-9}	наносекунда
Пико	п	10^{-12}	пикограмм

Множители для перевода некоторых величин в старых единицах СИ.

Величина	Обозначения	В единицах СГС (кг/см ²)	В единицах СИ (н/м ²)
Сила	Р	1 кГ	9,81 Н
Напряжения	σ	1 кГ/см ²	$0,981 \cdot 10^5$ Н/м ²
		1кГ/мм ²	9,81 кН/м ²
Момент силы	М	1 кГм	9,81 Нм
		1 тм	9,981 кНм
Мощность	N	1 л.с.	0,736 кВт
Плоский угол	α	град	π/180 рад
Угловая скорость	ω	1 об/мин	π/30 рад/с
Удельный вес	φ	1 Г/см ³	9,81 кН/м ³
Ударная вязкость	<i>a</i> _к	1 кг см/см ³	0,0981 МДж/м ³

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

1.1. Статически определимые системы.....	4
1.2. Статически неопределимые системы	
1.3. Температурные напряжения	
2. Кручение стержней круглого сечения.....	31
2.1. Статически определимые системы.	
2.2. Статически неопределимые системы	
3. Сдвиг	47
3.1. Расчет на срез и смятие болтовых и заклепочных соединений	
3.2. Расчет сварных соединений	
3.3. Расчет деревянных врубок	
4. Прямой изгиб	72
4.1. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	
4.2. Нормальные напряжения при изгибе	
5. Изгиб с кручением	
Приложение	105
Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. Сортамент ГОСТ 8239—72 (извлечение)	
Сталь горячекатаная, швеллеры с уклоном внутренних граней полок. Сортамент ГОСТ 8240—72 (извлечение)	
Сталь прокатная, угловая равнополочная. Сортамент ГОСТ 8509—72 (извлечение)	
Геометрические характеристики плоских сечений	
<i>Некоторые сведения из элементарной математики</i>	