

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
**«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»**

Радиотехнический факультет

Кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники (ТОР)

Мельникова И.В., Дубовик К.Ю.

## **ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

*Методическое пособие к практическим занятиям*

2012

**Теория электрических цепей:** Методическое пособие к практическим занятиям/  
Мельникова И.В., Дубовик К.Ю. - ТУСУР. Томск, 2012.- 156 С.

Изложены краткие теоретические сведения, основные расчетные соотношения, численные примеры решения типовых задач и банк задач по разделам: комплексные функции цепи и частотные характеристики; неавтономные четырехполюсники и цепочечные LC-фильтры; длинные линии; переходные процессы; временные характеристики. Сформированы варианты для студентов всех форм обучения, изучающих дисциплины “Основы теории цепей” и “Теория электрических цепей”.

© Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники, 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ .....	2
1. ВВЕДЕНИЕ.....	5
2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К СТУДЕНТАМ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНАМ ОТЦ и ТЭЦ. ....	5
3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ОСНОВЫ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД .....	7
3.1 Цель занятия .....	7
3.2 Краткие сведения по теории .....	7
3.2.1 Комплексные числа .....	7
3.2.2 Комплексные выражения.....	10
3.2.3 Основы метода комплексных амплитуд.....	13
3.3 Методические указания и примеры решения.....	14
3.4 Упражнения для индивидуальной работы .....	16
3.5 Знания и умения .....	19
3.6 Формы контроля .....	20
3.7 Рекомендуемая литература.....	20
4. КОМПЛЕКСНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕПИ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ .....	21
4.1 Цель занятия .....	21
4.2 Краткие сведения по теории .....	21
4.2.1 Комплексная функция цепи.....	21
4.2.2 Частотные характеристики цепи.....	22
4.2.3 Полоса пропускания цепи (ППЦ) .....	23
4.2.4 Реактивные двухполюсники (РД) .....	24
4.3 Примеры решения и методические указания к решению задач.....	26
4.3.1 Примеры решения .....	26
4.3.2 Методические указания и примеры решения .....	33
4.4 Знания и умения .....	34
4.5 Формы контроля .....	35
4.6 Упражнения и задачи для индивидуальной работы.....	35
4.7 Рекомендуемая литература.....	39
5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР .....	40
5.1 Цель занятия .....	40
5.2 Краткие теоретические сведения.....	40
5.3 Задачи для самостоятельной работы.....	41
5.4 Методические указания и примеры решения.....	45
5.5 Знания и умения .....	49
5.6 Формы контроля .....	50
5.7 Рекомендуемая литература.....	50
6. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР .....	51
6.1 Цель занятия .....	51
6.2 Краткие теоретические сведения.....	51
6.3 Задачи для самостоятельной работы.....	54
6.4 Методические указания и примеры решения.....	59
6.4.1 Определение мощности на резонансной частоте и при расстройке.....	59
6.4.2 Определение типа контура по исходным данным.....	60
6.4.3 Методические указания и примеры решения .....	61
6.5 Знания и умения .....	63
6.6 Формы контроля .....	64
6.7 Рекомендуемая литература.....	64

7. СИСТЕМА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ.....	65
7.1 Цель занятий.....	65
7.2 Краткие теоретические сведения.....	65
7.2.1 Входное сопротивление системы.....	65
7.2.2 Виды резонансов.....	66
7.2.3 Токи системы при разных способах ее подключения к генератору сигнала.....	67
7.2.4 Энергетические соотношения .....	67
7.2.5 Резонансные кривые. Понятие оптимальной и критической связи.....	68
7.2.6 Полоса пропускания системы.....	69
7.2.7 Фазовые соотношения в связанной системе .....	70
7.3 Методические указания и примеры решения задач .....	71
7.3.1 Определение типа резонанса .....	71
7.3.2 Определение входного сопротивления системы .....	72
7.3.3 Определение полосы пропускания системы .....	73
7.3.4 Пример решения типовой задачи.....	74
7.4 Задачи для самостоятельной работы.....	76
7.5 Знания и умения .....	86
7.6 Формы контроля .....	87
7.7 Рекомендуемая литература.....	87
8. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЦЕПОЧЕЧНЫЕ LC-ФИЛЬТРЫ.....	88
8.1 Цель занятия по теме «Четырехполюсники» .....	88
8.2 Основные положения теории четырехполюсников.....	88
8.2.1 Определение и типы параметров .....	88
8.2.2 Внутренние параметры .....	89
8.2.3 Характеристические параметры.....	93
8.2.4 Рабочие параметры.....	95
8.2.5 Схемные функции.....	96
8.3 Методические указания и примеры решения задач .....	97
8.4 Задачи для самостоятельной работы.....	105
8.5 Цель занятия по теме “Цепочечные LC-фильтры” .....	108
8.6 Основные положения теории цепочечных LC-фильтров .....	108
8.7 Методические указания и примеры решения задач .....	115
8.8 Задачи для самостоятельной работы.....	118
8.9 Знания и умения .....	119
8.10 Формы контроля .....	120
8.11 Задание “Четырехполюсники и LC-фильтры” и варианты исходных данных .....	120
8.12 Рекомендуемая литература.....	122
9. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ.....	123
9.1 Цель занятия .....	123
9.2 Краткие теоретические сведения.....	123
9.2.1 Общие соотношения для однородной линии в установившемся режиме .....	123
9.2.2 Режимы работы линии без потерь .....	125
9.3 Методические указания и примеры решения задач .....	131
9.4 Задачи для самостоятельной работы.....	137
9.5 Задание “Длинные линии” и варианты исходных данных .....	141
9.6 Знания и умения .....	142
9.7 Формы контроля .....	143
9.8 Рекомендуемая литература.....	143
10. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	144
10.1 Цель занятия .....	144
10.2 Краткие теоретические сведения.....	144

10.3	Методические указания и примеры решения задач .....	144
10.4	Задачи для самостоятельной работы.....	148
10.5	Знания и умения .....	148
10.6	Расчетное задание по теме: «Переходные процессы».....	149
10.7	Рекомендуемая литература.....	151
11.	ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ И ИХ СВЯЗЬ С ЧАСТОТНЫМИ.....	152
11.1	Цель занятия .....	152
11.2	Краткие теоретические сведения.....	152
11.3	Методические указания и примеры решения задач .....	153
11.4	Знания и умения .....	155
11.5	Формы контроля .....	155
11.6	Рекомендуемая литература.....	155

...одна самостоятельно решённая задача даст больше двадцати других, решение которых вы узнали от друзей или прочитали в книге [1].

И.М.Яглом

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Успешное решение проблем, с которыми постоянно сталкивается радиоинженер в своей практической деятельности, предполагает не только наличие глубоких знаний теории радиотехнических цепей, сигналов и математики, а, главным образом, умелое их применение. Умение же приходит с практикой. «Никакие рассуждения и теория не помогут вам так, как собственный опыт» [1].

Настоящая работа предназначена для студентов очной, заочной и дистанционной форм обучения, изучающих курсы «Основы теории цепей» и «Теория линейных электрических цепей» и имеет целью повысить эффективность усвоения названных дисциплин путем методического руководства самостоятельными занятиями студентов.

В руководстве изложена система организации работы и сформулированы основные требования её успешного выполнения. По каждой теме заданы конкретные цели, имеются конкретные сведения по теории, набор и образцы решения типовых задач, ряд методических указаний к решению наиболее сложных вариантов, указывается форма контроля и его примерное содержание, приводится список рекомендуемой литературы.

Общие требования к студентам очной формы обучения, изложенные в разделе 2, направлены на высокую эффективность проведения практических занятий. Однако, «каким бы опытным не был педагог, он лишь определённым образом организует познавательную деятельность обучаемого - и в этом суть процесса обучения. Но само познание осуществляет учащийся; эту работу за него никто не может выполнить, и эффективность учебного труда зависит в первую очередь от собственной познавательной активности учащегося» [1,2].

## 2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К СТУДЕНТАМ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНАМ ОТЦ и ТЭЦ.

2.1 На практическом занятии у каждого студента должен быть конспект лекций по курсу, данное методическое руководство, постоянная рабочая тетрадь и вычислительные средства.

2.2 Записи в рабочей тетради следует вести достаточно подробно и аккуратно, чтобы ими можно было воспользоваться при подготовке к контрольным опросам и экзаменам; тема и цель занятий должны быть обязательно записаны в тетрадь ещё во время предварительной домашней подготовки.

2.3 Домашняя подготовка по теории к каждому занятию совершенно обязательна, при этом краткие теоретические сведения, приводимые в данном методическом руководстве, хоть и включают все необходимые расчётные соотношения, являются недостаточными и служат только ориентиром при работе над лекциями и учебниками.

2.4 Без достаточной теоретической подготовки решение задач вряд ли будет осмысленным и успешным. Степень готовности к решению задач по *каждой* теме студент может оценить, попытавшись ответить на вопросы под рубрикой **“ЗНАТЬ”** в подразделе “Знания и умения”, сопровождающем любую изучаемую тему курса.

2.5 По каждой теме предусмотрены какие-либо формы контроля: тестовые опросы, небольшие контрольные или самостоятельные работы, индивидуальные задания.

2.6 Студенты, пропустившие практическое занятие по любым причинам, должны представить разрешение из деканата, выполнить индивидуальное домашнее задание и в часы консультаций написать соответствующую контрольную или самостоятельную работу.

2.7 Каждая тема, проработанная на практическом занятии, должна быть “зачтена”. Это является одним из условий допуска к экзамену, наряду с выполнением цикла лабораторных работ и выполнением и защитой расчетного задания или курсовой работы, предусмотренных рабочей программой.

***Примечание: Значительная часть задач, содержащихся в данном руководстве, включена в набор экзаменационных задач!***

### 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ОСНОВЫ МЕТОДА КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

#### 3.1 Цель занятия

Основные цели формулируются следующим образом:

- 1) закрепить знания о формах представления комплексных чисел (КЧ), способах изображения их на комплексной плоскости и основных действиях над КЧ;
- 2) научиться работать с комплексными выражениями, характерными для функций простейших радиотехнических цепей, а, именно, преобразовывать комплексные выражения к стандартному виду, определять их модули и аргументы;
- 3) повторить основы метода комплексных амплитуд;
- 4) научиться вычислять входное сопротивление сложных двухполюсников, используя символическую форму записи.

#### 3.2 Краткие сведения по теории

##### 3.2.1 Комплексные числа

*Мнимая единица*

$$j = \sqrt{-1}$$

- абстрактное математическое понятие, физического смысла не имеет. На основе формулы Эйлера мнимая единица может быть представлена в виде:

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sin\frac{\pi}{2} = \pm j \quad (3.1)$$

Умножение вещественного числа на  $\pm j$  превращает вещественное число в мнимое, а в векторном смысле означает поворот вектора умножаемого числа на  $\pm 90^\circ$ .

Примеры мнимых чисел:  $+j3$  и  $-j5$ . Здесь  $+3$  и  $-5$  - вещественные коэффициенты при мнимой единице. На основе выражения (3.1):

$$+j3 = 3 e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad -j5 = 5 e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Так как

$$(\pm j)^2 = -1,$$

умножение любого числа: вещественного, мнимого, комплексного на  $(\pm j)^2$  означает поворот вектора, соответствующего умножаемому числу, на  $180^\circ$ . Число при этом не изменяет свой тип, оставаясь соответственно вещественным, мнимым, комплексным.

**Комплексная плоскость** - это координатная плоскость, по оси абсцисс которой откладываются вещественные числа, а по оси ординат - мнимые (рисунок 3.1). Четверти плоскости обозначены римскими цифрами.

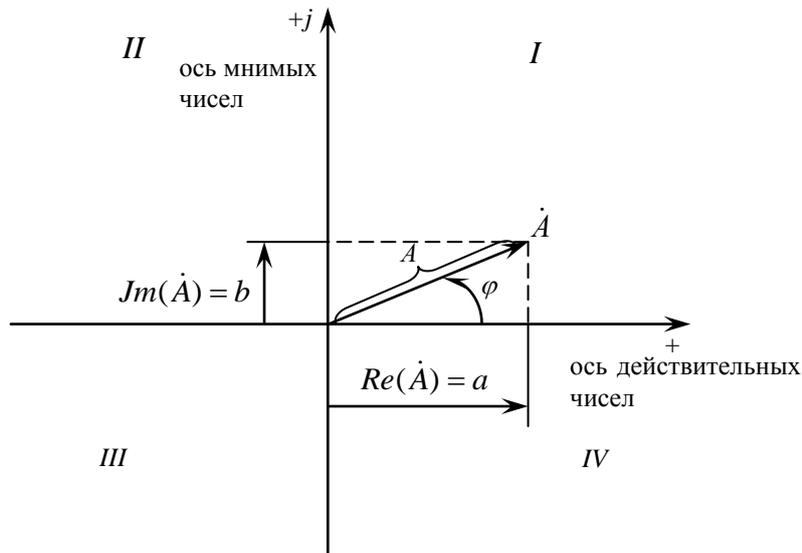


Рисунок 3.1 – Изображение комплексного числа на комплексной плоскости.

**Комплексное число**  $\dot{A}$ , записанное в алгебраической форме, состоит из вещественного числа  $a$  и мнимого числа  $\dot{j}b$ :

$$\dot{A} = a + \dot{j}b = \text{Re}(\dot{A}) + \dot{j}\text{Im}(\dot{A}) \quad (3.2)$$

где  $\text{Re}(\dot{A})$  - вещественная или реальная часть КЧ  $\dot{A}$ ,

$\text{Im}(\dot{A})$  - коэффициент при мнимой единице в записи КЧ  $\dot{A}$ .

Комплексное число  $\dot{A}$  на комплексной плоскости изображается либо точкой  $\dot{A}$  с координатами  $a$  и  $b$  (см. рисунок 3.1), либо вектором, направленным из начала координат в эту точку плоскости.

Модуль комплексного числа  $\dot{A}$  равен длине вектора  $A$

$$A = |\dot{A}| = \text{Mod}\dot{A} = \sqrt{\text{Re}^2(\dot{A}) + \text{Im}^2(\dot{A})} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент комплексного числа  $\dot{A}$  есть угол  $\varphi$  между положительным направлением вещественной оси и вектором, проведенным из начала координат в точку  $\dot{A}$ . Угол  $\varphi$  имеет положительное значение, если отсчитывается против часовой стрелки, в направлении, показанном стрелкой (см. рисунок 3.1).

$$\varphi = \text{Arg}\dot{A} = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\dot{A})}{\text{Re}(\dot{A})} + k\pi = \text{arctg} \frac{b}{a} + k\pi,$$

где  $k=0,1,2,\dots$

Для верного определения аргумента обязательно следует представить положение вектора, соответствующего комплексному числу, на комплексной плоскости с учетом знаков

вещественной и мнимой частей. Например, аргумент  $\varphi_{\dot{B}}$  числа  $\dot{B}$  (см. Рисунок 3.2) соответствует III четверти:

$$\varphi_{\dot{B}} = \operatorname{arctg} \frac{|Jm(\dot{B})|}{|Re(\dot{B})|} + \pi,$$

а аргумент  $\varphi_{\dot{C}}$  числа  $\dot{C}$  на том же рисунке 3.2 - II четверти:

$$\varphi_{\dot{C}} = -\operatorname{arctg} \frac{|Jm(\dot{C})|}{|Re(\dot{C})|} + \pi.$$

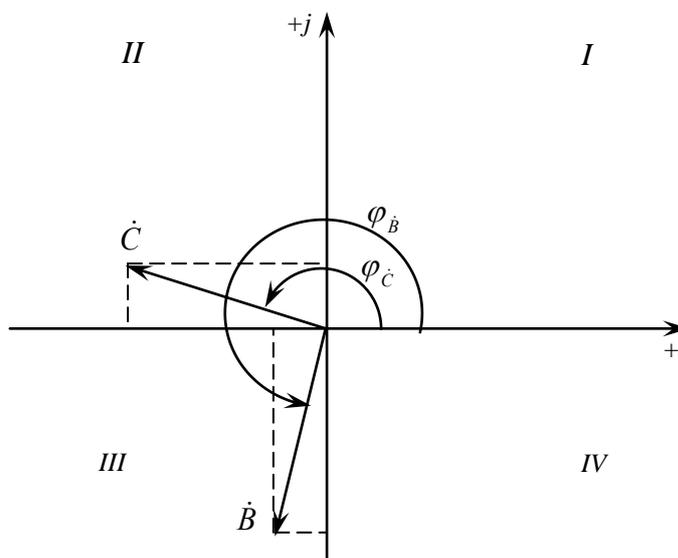


Рисунок 3.2 – К вопросу об определении комплексного числа.

Кроме *алгебраической* формы КЧ может быть записано в *показательной*

$$\dot{A} = |\dot{A}| \cdot e^{j\varphi}, \quad (3.3)$$

где  $|\dot{A}|$  - модуль КЧ,  
 $\varphi$  - аргумент КЧ,  
 и *тригонометрической* форме

$$\dot{A} = |\dot{A}| \cos \varphi + j |\dot{A}| \sin \varphi \quad (3.4)$$

*Комплексно-сопряженными* называются два КЧ, которые отличаются только знаком мнимой части или знаком аргумента:

$$\begin{array}{l} \dot{A} = a + jb \quad \text{и} \quad \overset{*}{A} = a - jb \\ \dot{A} = A e^{j\varphi} \quad \text{и} \quad \overset{*}{A} = A e^{-j\varphi} \end{array}$$

Символ \* указывает, что число  $\dot{A}$  является комплексно-сопряженным числу  $\dot{A}$ . Произведение двух комплексно-сопряженных чисел всегда есть модуль в квадрате

$$\dot{A} \cdot \dot{A}^* = |\dot{A}|^2 = a^2 + b^2 \quad (3.5)$$

Сложение и вычитание производится над КЧ, записанными в алгебраической форме, или непосредственно в векторном представлении КЧ.

$$\dot{A}_1 = -2 + j3; \quad \dot{A}_2 = 1 + j2; \quad \dot{A}_1 - \dot{A}_2 = -2 + j3 - (1 + j2) = -3 + j1.$$

Возведение в степень, извлечение корня производится над КЧ, представленными в показательной форме, например:

$$(10 e^{j15^\circ})^3 = 1000 e^{j45^\circ},$$

$$\sqrt{100 e^{-j20^\circ}} = 10 e^{-j10^\circ}.$$

Умножение и деление производится над КЧ, представленными как в показательной, так и в алгебраической формах. Например, даны числа

$$\dot{A}_1 = -2 + j2 = 2\sqrt{2} e^{j135^\circ} \quad \text{и} \quad \dot{A}_2 = 2 + j2 = 2\sqrt{2} e^{j45^\circ}.$$

Умножение КЧ, представленных в показательной форме:

$$\dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = 2\sqrt{2} e^{j135^\circ} \cdot 2\sqrt{2} e^{j45^\circ} = 8e^{j180^\circ} = -8.$$

Умножение тех же КЧ, представленных в алгебраической форме:

$$\dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = (-2 + j2)(2 + j2) = -4 + j4 - j4 - 4 = -8.$$

Деление КЧ, представленных в показательной форме:

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{j135^\circ}}{2\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1e^{j90^\circ} = j1.$$

Деление КЧ, представленных в алгебраической форме, требует домножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное знаменателю:

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{(-2 + j2) \cdot (+2 - j2)}{(+2 + j2) \cdot (+2 - j2)} = \frac{-4 + j4 + j4 + 4}{2^2 + 2^2} = \frac{j8}{8} = j1 \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Комплексные выражения

При операциях над комплексными выражениями необходимо привести их к стандартной форме

$$\dot{T} = \frac{a + jb}{c + jd}, \quad (3.7)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в общем случае могут быть сколь угодно сложными выражениями из вещественных коэффициентов или принимать, в частности, нулевые значения.

Модуль дробного комплексного выражения

$$|\dot{T}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}. \quad (3.8)$$

Комплексное выражение (3.7) может быть сведено к виду

$$|\dot{T}| = \operatorname{Re}(\dot{T}) + j\operatorname{Im}(\dot{T}) \quad (3.9)$$

путем домножения числителя и знаменателя на число, комплексно-сопряженное знаменателю выражения (3.7) так, как это показано в примере (3.6). Тогда модуль  $|\dot{T}|$  может быть найден как

$$|\dot{T}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\dot{T}) + \operatorname{Im}^2(\dot{T})}.$$

Однако последний способ не рационально применять для отыскания модуля, так как получается очень громоздкое выражение, которое обычно трудно преобразовать к простейшему варианту, т.е. формуле (3.8). В дальнейшем следует руководствоваться правилом (3.8):

***модуль дробного комплексного выражения равен отношению модуля числителя к модулю знаменателя.***

Аргумент комплексного выражения может быть найден двумя способами. Во-первых, на основании выражения (3.7):

$$\operatorname{Arg}\dot{T} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{d}{c}, \quad (3.10)$$

т.е.

***аргумент дробного комплексного выражения равен разности аргументов числителя и знаменателя.***

Во-вторых, на основании выражения (3.9):

$$\operatorname{Arg}\dot{T} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(\dot{T})}{\operatorname{Re}(\dot{T})}. \quad (3.11)$$

Оба способа отыскания аргумента функции  $\dot{T}$  равноценны.

**Примечание:** 1) однозначное определение аргумента для  $\dot{T}$  возможно только в том случае, если известны знаки реальных и мнимых частей в выражениях (3.7) и (3.9);

- 2) при определении аргумента функции на основании выражений (3.9) и (3.11) не надо вычислять знаменатель реальной и мнимой части в формуле (3.9), так как в дальнейшем он сокращается; это особенно важно при работе с громоздкими выражениями функций  $\dot{T}$ .

**Пример.** Найти модуль и аргумент функции

$$\dot{T} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Преобразуем к стандартной форме (3.7):

$$\dot{T} = \frac{0 + j(\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$

где  $a = 0$ ,  $b = \omega L$ ,

$$c = R, \quad d = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Вычислим модуль по формуле (3.8)

$$|\dot{T}| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Вычислим аргумент по формуле (3.10)

$$\text{Arg}\dot{T} = \arctg \frac{\omega L}{0} - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = 90^\circ - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (3.12)$$

Вычислим аргумент вторым способом. Преобразуем заданную функцию к виду (3.9):

$$\dot{T} = \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \cdot \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\omega L \left[ jR + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]}{\text{Знаменатель}}.$$

На основании (3.11)

$$\text{Arg}\dot{T} = \arctg \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}. \quad (3.13)$$

Выражения (3.12) и (3.13) совершенно идентичны по конечному результату.

### 3.2.3 Основы метода комплексных амплитуд

Метод комплексных амплитуд (МКА) - один из символических методов расчета.

Расчет линейных цепей в установившемся режиме при гармоническом воздействии удобно вести, используя символическую форму записи. При этом информация о сигнале

$$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

отражается через комплексную амплитуду  $\dot{A}_m$  и оператор вращения  $e^{j\omega t}$  :

$$\dot{A}_m e^{j\omega t} = A_m e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}.$$

Сопротивление индуктивности и емкости выражаются соответственно

$$Z_L = j\omega L = jX_L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = jX_C,$$

где

$$X_L = \omega L, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Переход к символической форме записи переводит интегрально-дифференциальные соотношения для гармонических колебаний

$$U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} \quad U_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

в алгебраические для их комплексных значений

$$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I}, \quad \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I},$$

чем существенно упрощает расчеты.

Оператор вращения  $e^{j\omega t}$  несет информацию только о частоте входного гармонического воздействия. Так как в линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, все токи и напряжения имеют одинаковую частоту (их векторы взаимонеподвижны), то в процессе расчета оператор вращения обычно опускают. В такой цепи все расчеты ведутся с использованием комплексных амплитуд, несущих всю необходимую информацию о конкретных колебаниях (их амплитудах  $A_m$  и начальных фазах  $\varphi_0$ ).

Это практическая сторона метода комплексных амплитуд или символического метода.

Сам же переход к символической форме записи сигнала основан на следующем, Известно, что косинусоидальная функция

$$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

может рассматриваться как проекция на горизонтальную ось вектора длиной  $A_m$ , имеющего в начальный момент  $t = 0$  фазу  $\varphi_0$ , и вращающегося против часовой стрелки со скоростью  $\omega$ . Если начало этого вращающегося вектора совместить с началом координат комплексной плоскости, то точка на комплексной плоскости, соответствующая концу вращающегося вектора, в любой момент времени описывается выражением

$$A_m e^{j(\varphi_0 + \omega t)} = A_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t},$$

а проекция на ось абсцисс имеет вид:

$$a(t) = \operatorname{Re}[A_m e^{j(\varphi_0 + \omega t)}] = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

**Примечание:** для отображения синусоидальной функции используется проекция того же вектора на ось ординат.

Вывод соотношений, приведенных в п.3.2.3, имеется в [3]–[6].

### 3.3 Методические указания и примеры решения

Двухполюсник - электрическая цепь, имеющая только два зажима. Любая цепь по отношению к источнику сигнала выступает как двухполюсник.

Входное сопротивление или просто сопротивление сложного двухполюсника определяется на основе известных правил последовательного и параллельного соединения, соединения звездой и треугольником, а в случае двухполюсника с большим числом независимых контуров или узлов с использованием методов контурных токов и узловых потенциалов.

С входным сопротивлением связано понятие *фазового резонанса*, когда ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе на частотах, отличных от нуля и бесконечности, т.е. входное сопротивление цепи *чисто активно*. Фазовый резонанс возможен только в схемах с разнотипными реактивностями.

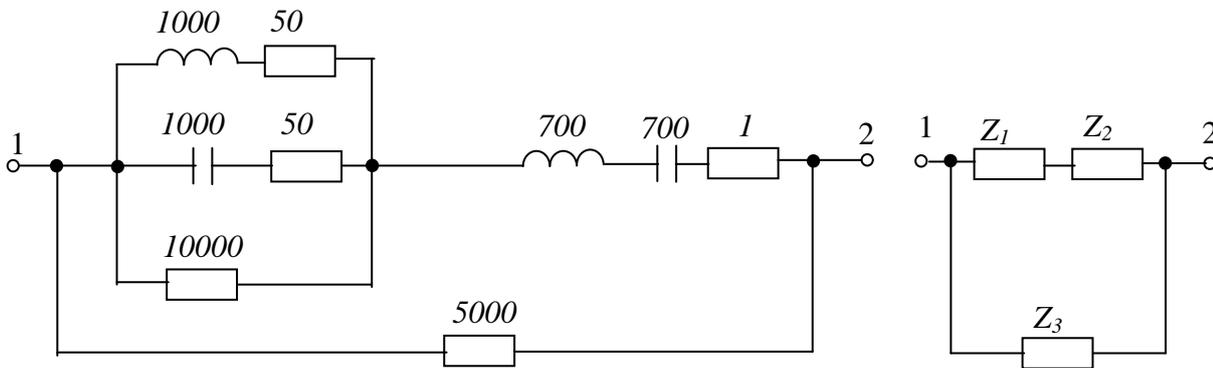
Для примера рассмотрим расчет двухполюсника с последовательно-параллельными соединениями.

**Пример 1.** Рассчитать входное сопротивление двухполюсника, схема которого представлена на рисунке 3.3а, на некоторой частоте  $\omega$ , для которой сопротивления отдельных участков цепи указаны в омах, и определить, является ли эта частота  $\omega$  резонансной для заданного двухполюсника. Расчет вести в символической форме.

Как известно, складывать непосредственно  $|Z|$ ,  $R$  и  $X$  недопустимо, т.к.

$$\dot{Z} = R + jX, \quad |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Чтобы грамотно воспользоваться правилами соединения сопротивлений, необходимо, чтобы сопротивления всех участков цепи были выражены через  $R$ ,  $\dot{Z}_L$  или  $\dot{Z}_C$ . Поэтому сначала необходимо осмыслить форму подачи исходных данных, т.е. понять, значения каких



сопротивлений ( $\dot{Z}_L$  или  $X_L$ ,  $\dot{Z}_C$  или  $X_C$ , или  $|X_C|$ ) отражены на схеме.

а)

б)

Рисунок 3.3 - Схема двухполюсника и ее эквивалентное представление.

Если для реактивного элемента указано его сопротивление в омах, очевидно, что речь идет о величине модуля  $|\dot{Z}|$ .

Для расчета нужно от модуля перейти к комплексному значению  $\dot{Z}$ :

$$\dot{Z}_L = j|\dot{Z}_L|, \quad \dot{Z}_C = -j|\dot{Z}_C|,$$

$$\text{где } |\dot{Z}_L| = \omega L = X_L, \quad |\dot{Z}_C| = \frac{1}{\omega C} = |X_C|.$$

Например, на рисунке 3.3 сопротивление индуктивности и емкости на некоторой частоте  $\omega$  на участке  $Z_2$  по 700 Ом, значит

$$\dot{Z}_L = j700, \quad \dot{Z}_C = -j700/$$

Для удобства расчета схема заданного двухполюсника разбивается на несколько элементарных участков, например,  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  (рисунок 3.3.б), для которых легко вычислить их сопротивления.

$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{\dot{Y}_1},$$

где

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{50 + j1000} + \frac{1}{50 - j1000} + \frac{1}{10000} \approx \frac{1}{10000} + \frac{1}{10000} = \frac{1}{5000}.$$

$$Z_1 \approx 5 \text{ кОм.}$$

$$Z_2 = j700 - j700 + 1 = 1 \text{ Ом.}$$

$$Z_1 + Z_2 \approx 5 \text{ кОм.}$$

$$Z_3 = 5 \text{ кОм.}$$

Входное сопротивление двухполюсника

$$Z_{BX} = \frac{(Z_1 + Z_2)Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2,5 \text{ кОм.}$$

Так как входное сопротивление двухполюсника оказалось чисто активным, то частота  $\omega$ , для которой производилось вычисление, является его резонансной частотой.

**Пример 2.** Расчет входного сопротивления двухполюсника на крайних частотах диапазона.

В дальнейшем очень часто при анализе цепей потребуется определять, каково сопротивление цепи на постоянном токе, т.е. при  $\omega = 0$ , и на частотах, стремящихся к бесконечности, т.е. при  $\omega = \infty$ . Для этого удобно составлять эквивалентные схемы с учетом следующих очевидных правил.

На постоянном токе ( $\omega = 0$ )

$$X_L = \omega L = 0,$$

т.е. индуктивность на схеме закорачивается;

$$|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C} = \infty,$$

т.е. емкость на схеме заменяется разрывом. Эквивалентная схема двухполюсника (см. рисунок 3.3.а) на постоянном токе изображена на рисунке 3.4.а.

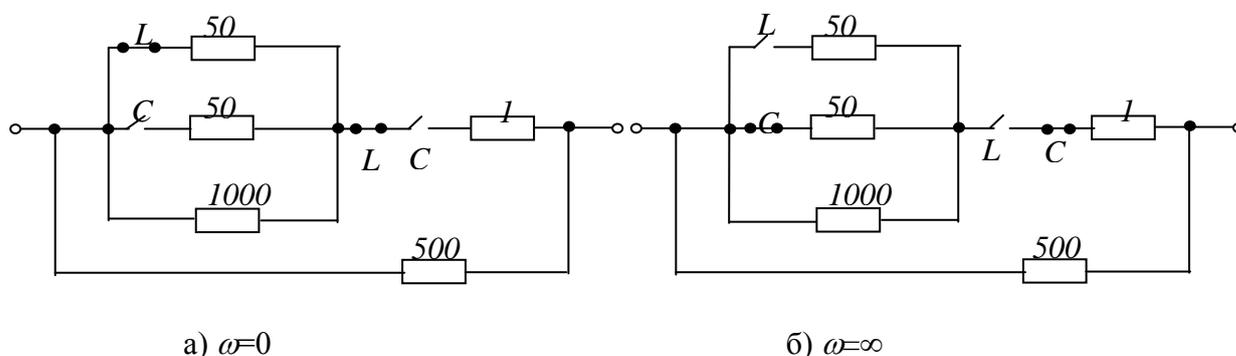


Рисунок 3.4 - Эквивалентные схемы двухполюсника на крайних частотах диапазона.

Входное сопротивление двухполюсника на постоянном токе

$$Z_{BX}(0) = 5 \text{ кОм.}$$

На бесконечно больших частотах ( $\omega = \infty$ )

$$X_L = \omega L = \infty,$$

т.е. индуктивность на схеме заменяется “разрывом”.

$$|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C} = 0,$$

т.е. емкость на схеме закорачивается (см. рисунок 3.4.б).

Сопротивление двухполюсника на бесконечно больших частотах

$$Z_{BX}(\infty) = 5 \text{ кОм.}$$

Таблица 3.1

Вариант	$\dot{A}$	$\dot{B}$	$\dot{A} + \dot{B}$	$\dot{A} - \dot{B}$	$\dot{A} \cdot \dot{B}$	$\frac{\dot{A}}{\dot{B}}$	$\dot{A}^n$	$\dot{B}^n$
1	$2\sqrt{2}e^{j135}$	$2\sqrt{2}e^{j45}$	+	-	+	+	-	-
2	$\frac{4-j4}{-2+j2}$	$\frac{-2}{-1+j}$	+	-	+	-	-	-
3	$\frac{2+j3}{1-j}$	$5-j5$	-	-	+	+	-	-
4	$4\sqrt{2}e^{-j45}$	$6\sqrt{2}e^{j135}$	+	-	-	+	-	-
5	$\frac{-10+j10}{5-j5}$	$-2+j2$	-	-	+	+	-	-
6	$j2(100-j100)$	$\frac{-5+j6}{(j)^2(1-j)}$	+	-	-	+	-	-
7	$2(\cos 75^\circ + j \sin 75^\circ)$	$3(\cos 15^\circ + j \sin 15^\circ)$	-	-	+	-	-	3
8	$3(\cos 75^\circ + j \sin 75^\circ)$	$9(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$	-	-	-	+	-	4
9	$2(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)$	-	-	-	-	-	5	-
10	-	$0.5(\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ)$	-	-	-	-	-	6
11	$7(\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)$	$8(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$	+	-	-	-	2	-
12	$5(\cos 25^\circ + j \sin 25^\circ)$	$2(\cos 65^\circ + j \sin 65^\circ)$	-	-	+	-	2	-
13	$5\sqrt{2}e^{-j45}$	$\frac{-30-j30}{5+j5}$	+	-	-	-	-	3
14	$20\sqrt{2}e^{-j135}$	$\frac{4}{1-j}$	-	+	-	-	2	-
15	$\frac{1}{5+j4}$	$\frac{1}{6-j6}$	+	-	+	-	-	5

### 3.4 Упражнения для индивидуальной работы

3.3.1 По данным таблицы 3.1 вычислить результат и изобразить его на комплексной плоскости.

*Напоминаем, складывать и вычитать КЧ удобнее в алгебраической форме, а умножать, делить и возводить в степень - в показательной.*

3.3.2 Вычислить аргумент и модуль КЧ, изобразить КЧ на комплексной плоскости.

Напоминаем, что при определении  $\text{Arg } \dot{A}$  сокращать знаки у реальной и мнимой части  $KЧ$  или выносить как общий знак перед отношением  $\frac{\text{Im}\dot{A}}{\text{Re}\dot{A}}$  недопустимо, т.к. меняется четверть комплексной плоскости.

Исходные данные:  $\varphi_{\dot{A}} = \text{arctg} \frac{k}{n}$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{k}{n}$	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{-5}{5\sqrt{3}}$	$\frac{4}{-4\sqrt{3}}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{-1}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-6}{-6}$	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{-\sqrt{3}}$

3.3.3 Записать выражение для сопротивления двухполюсника п) на рисунке 3.5; определить модуль и аргумент полученного выражения.

Напоминаем, что модуль и аргумент берутся только после приведения выражения  $Z(j\omega)$  к типовой форме (выражение (3.7)); для определения модуля использовать только рациональный способ.

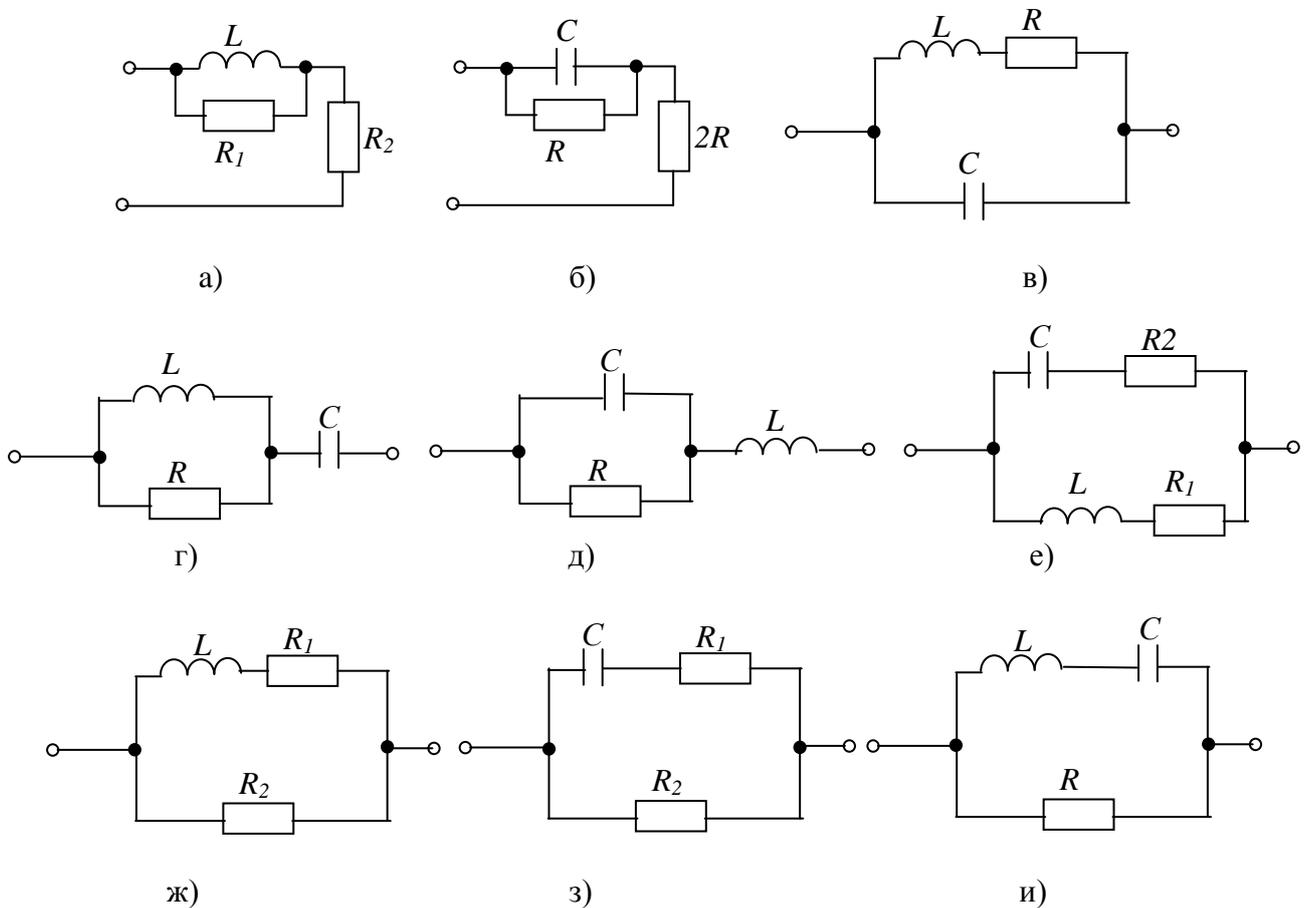
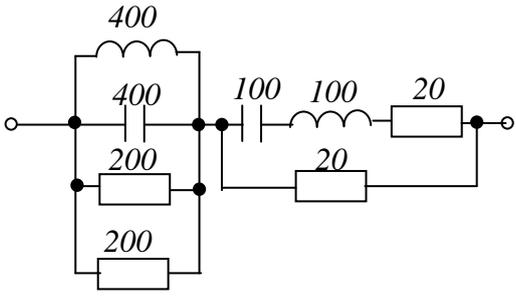


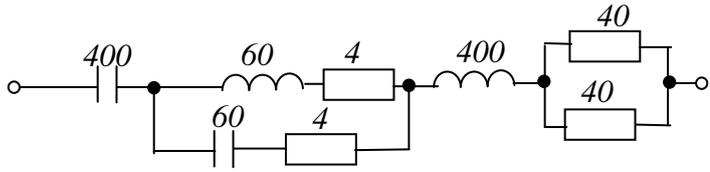
Рисунок 3.5 - Схемы двухполюсников.

3.3.4 Вычислить, используя символическую систему записи,  $\dot{Z}_{BX}$  на частоте  $\omega$ , для которой сопротивления участков цепи на схемах рисунка 3.6 указаны в омах. Является ли частота  $\omega$  частотой фазового резонанса? Ответ пояснить.

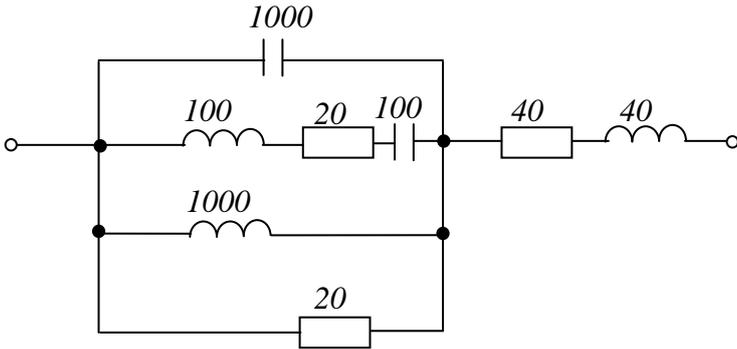
3.3.5 Вычислить  $Z_{BX}(0)$  и  $Z_{BX}(\infty)$  для схемы с номером  $k$  на рисунке 3.6.



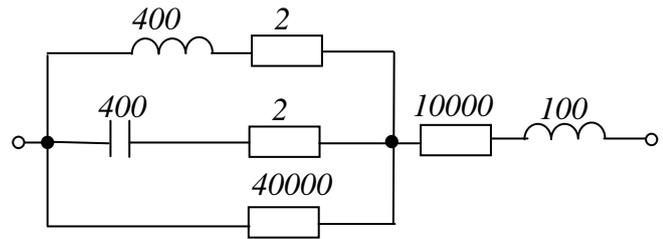
1)



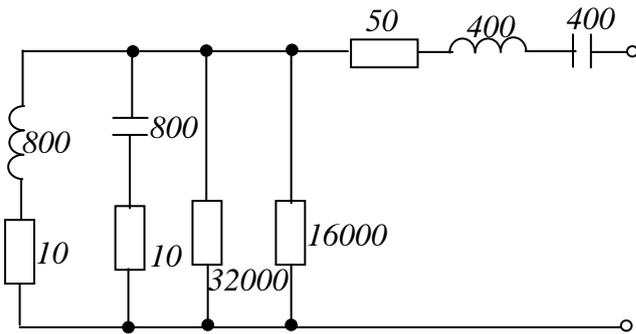
2)



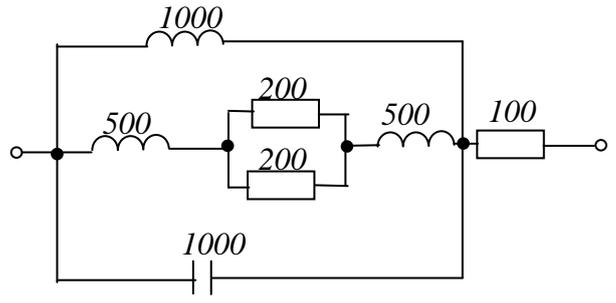
3)



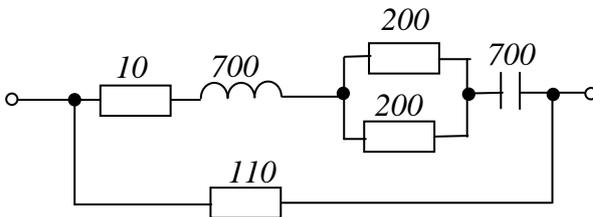
4)



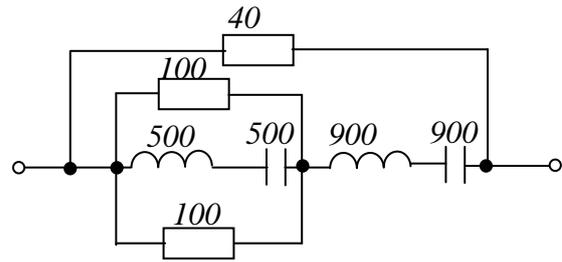
5)



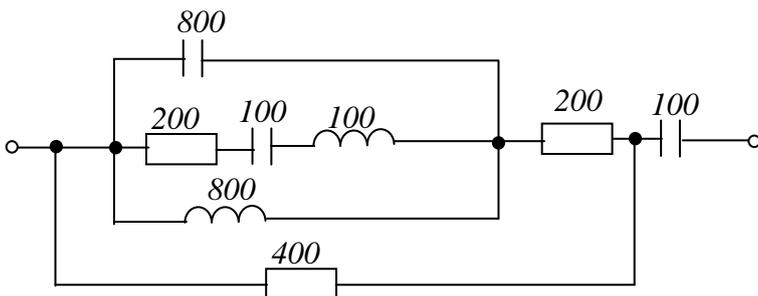
6)



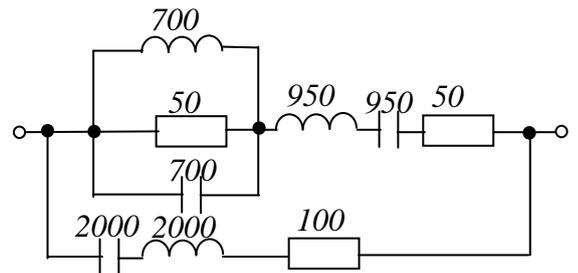
7)



8)



9)



10)

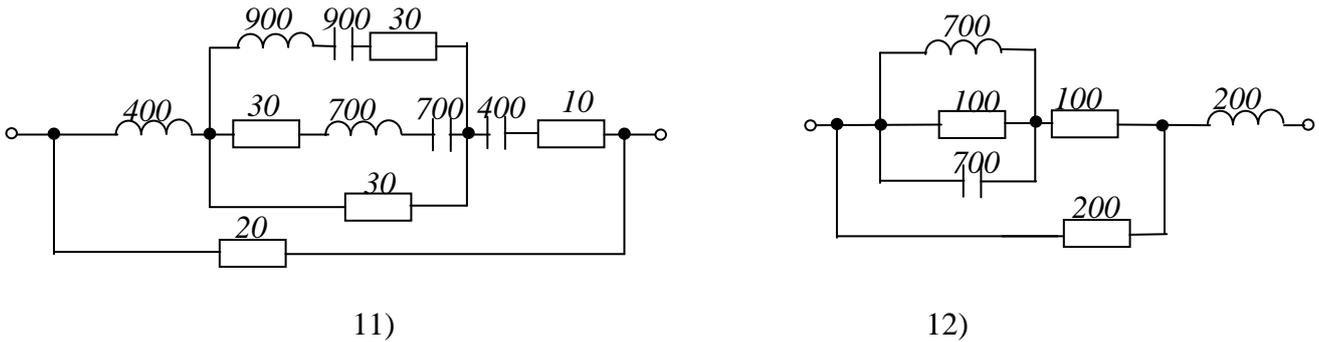


Рисунок 3.6. - Схемы двухполюсников.

3.3.6 Записать выражение гармонического колебания  $u(t)$  или  $i(t)$  (см. п.3.2.3) по данным таблицы 3.2.

**Напоминаем:**  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = A\sqrt{2} \cos(2\pi f \cdot t + \varphi)$

Таблица 3.2

№ задания	Комплексное действующее значение	Комплексная амплитуда	Частота
1	$(4 - j4)$ , В	-	$10^4$ рад/с
2	-	$10 e^{j75^\circ}$ , мА	$10^3$ Гц
3	$25 e^{j135^\circ}$ , мА	-	$10^4$ Гц
4	-	$(-5 - j5)$ , В	$10^2$ рад/с
5	$30 e^{j60^\circ}$ , В	-	$8 \cdot 10^5$ рад/с
6	-	$50 e^{j90^\circ}$ , мА	$10^4$ рад/с

### 3.5 Знания и умения

В результате работы над темой студент должен знать и уметь следующее.

#### Знать:

- 1) что представляет собой комплексное число, из каких частей оно состоит;
- 2) что такое мнимая единица  $j$ , что означает в векторном смысле умножение числа на  $j$  и  $(j)^2$ ;
- 3) как изображается комплексное число на комплексной плоскости;
- 4) три формы записи комплексного числа и переход от одной формы записи к другой;
- 5) чему равен модуль и аргумент мнимого числа, модуль и аргумент вещественного числа;
- 6) что такое комплексно-сопряженное число и каково произведение двух комплексно-сопряженных чисел;
- 7) какие формы записи комплексных чисел удобнее использовать при выполнении операций умножения, деления, сложения, вычитания, возведения в степень и извлечения корня;
- 8) два способа определения модуля и аргумента дробного комплексного выражения;
- 9) правило рационального определения модуля дробного комплексного выражения;
- 10) для каких целей, в каком режиме и при каком воздействии применим расчет методом комплексных амплитуд;
- 11) выражение гармонического колебания и его параметры;
- 12) определение амплитуды гармонического колебания  $A_m$  и график  $A_m(t)$ ;
- 13) основы символического метода: гармоническое колебание как проекция вращающегося вектора на комплексной плоскости;
- 14) почему в процессе расчета цепи в символической форме оператор вращения  $e^{j\omega \cdot t}$  опускается;
- 15) определение двухполюсника;
- 16) правила последовательного и параллельного соединения нескольких сопротивлений и, в частности, двух;

- 17) как записывается сопротивление индуктивности и емкости при работе методом комплексных амплитуд;
- 18) отличие понятий «комплексное сопротивление  $\dot{Z}_L, \dot{Z}_C$ » и «реактивное сопротивление  $X_L, X_C$ » и связь между ними.

**Уметь:**

- 1) производить любые алгебраические операции над комплексными числами, заданными в разных формах;
- 2) приводить «многоэтажное» дробное комплексное выражение к типовому виду  $\dot{T}$  (выражение (3.7));
- 3) определять рациональным способом модуль дробного комплексного выражения, предварительно сведенного к типовому виду;
- 4) находить двумя способами аргумент того же выражения;
- 5) уверенно определять, какой четверти комплексной плоскости соответствует аргумент комплексного числа или выражения на основе знаков вещественной и мнимой частей числа или выражения;
- 6) практически осуществлять переход от выражения для мгновенного значения гармонического колебания к записи комплексной амплитуды или комплекса действующего значения и наоборот;
- 7) вычислять сопротивление сложного двухполюсника на частоте  $\omega$ , для которой сопротивления отдельных участков цепи указаны на схеме в омах.

**Примечание:** без хорошо отработанных навыков работы с комплексными числами и выражениями и без твердых знаний основ символического метода и умений применять его в расчетах нельзя успешно овладеть материалом курса ОТЦ, который в свою очередь, является базовым курсом для изучения всех других специальных радиотехнических дисциплин.

### 3.6 Формы контроля

В конце занятия проводится контрольная работа на 10-15 минут. Она включает: определение модуля и аргумента комплексного дробного выражения, алгебраические операции над КЧ, вычисление  $Z_{BX}$  двухполюсника на некоторой частоте  $\omega$ , постоянном токе и  $\omega = \infty$ . В качестве примера могут служить упражнения п.3.3.

### 3.7 Рекомендуемая литература

1. Пойа Д. Математическое открытие.-М.: Наука,1970.-с.10.
2. Сладкевич В.Г. Роль технических средств в активизации познавательной деятельности студентов. - В кн.: Активизация познавательной деятельности студентов./Под ред. Никандрова Н.Д./-Л.: Ленинград. педагогический институт им. А.И.Герцена,1973.-с.90-99.
3. Зернов Н.В.,Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей.-М.: Энергия.1972. -с.35-37.
4. Белецкий А.Ф. Основы теории линейных электрических цепей.-М.: Связь, 1967.-с.244-257.
5. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.-М.: Высш.шк.,1972.-с.71-81.
6. Афанасьев В.П., Гольдин О.Е. и др.-М.:-Высш.шк.,1973.-с.103-111.

## 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕПИ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ

### 4.1 Цель занятия

В результате изучения темы следует:

- 1) усвоить понятия комплексной функции цепи, частотных характеристик и полосы пропускания цепи;
- 2) изучить методику нахождения комплексных выражений для входной и передаточной функций цепи, амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), фазо-частотных характеристик (ФЧХ) и полосы пропускания цепи;
- 3) научиться применять эту методику для анализа пассивных цепей и цепей с зависимыми источниками;
- 4) научиться графически изображать частотные характеристики (ЧХ) простейших цепей, как на основе выражений для АЧХ и ФЧХ, так и на основе самой схемы;
- 5) освоить методику построения диаграмм реактивных двухполюсников.

### 4.2 Краткие сведения по теории

#### 4.2.1 Комплексная функция цепи

Комплексная функция цепи (КФЦ) есть отношение комплексной амплитуды отклика к комплексной амплитуде воздействия

$$\dot{T}(j \cdot \omega) = \frac{A_{mOT}}{A_{mB}} = \frac{A_{OT}}{A_B}, \quad (4.1)$$

где

$\dot{T}(j\omega)$  - комплексная функция цепи,

$\dot{A}_{mOT}$ ,  $\dot{A}_{mB}$  - комплексные амплитуды отклика и воздействия,

$\dot{A}_{OT}$ ,  $\dot{A}_B$  - комплексы действующих значений отклика и воздействия.

Использование комплексных амплитуд (символической формы записи) свидетельствует о том, что цепь находится в установившемся режиме под гармоническим воздействием.

При анализе цепи как путем расчета, так и путем эксперимента, воздействие и отклик определяются конкретной интересующей исследователя КФЦ. Например, для цепи, схема которой представлена на рисунке 4.1, можно составить следующие КФЦ:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}, & \dot{K}_{12}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \\ \dot{K}_{21}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}, & \dot{Y}_{22}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}, \\ \dot{Z}_{21}(j\omega) &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}, & \dot{Y}_{12}(j\omega) &= \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \text{ и др.} \end{aligned}$$

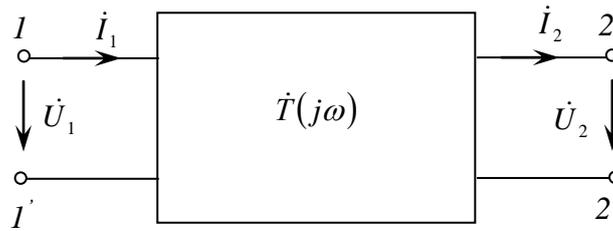


Рисунок 4.1 - Схема цепи, находящейся в режиме передачи сигнала.

Все КФЦ принято делить на входные и передаточные. КФЦ называется входной, если воздействие и отклик принадлежат одной и той же паре зажимов:  $\dot{Z}_1(j\omega)$ ,  $\dot{Y}_2(j\omega)$  и т.п.; КФЦ называется передаточной, если хотя бы один зажим (вывод) цепи не является общим для сигналов воздействия и отклика:  $\dot{K}_U(j\omega)$ ,  $\dot{K}_i(j\omega)$ ,  $\dot{Z}_{21}(j\omega)$  и т.п.

Двухполюсник (цепь с двумя зажимами) описывается только входными функциями. Трех-, четырех-, n-полюсник описываются как входными, так и передаточными КФЦ.

#### 4.2.2 Частотные характеристики цепи

Любая КФЦ несет информацию как об амплитудных, так и о фазовых соотношениях отклика и воздействия; поэтому любая КФЦ может быть представлена в виде двух характеристик: амплитудно-частотной и фазо-частотной.

$$\dot{T}(j\omega) = \frac{A_{OT} e^{j\varphi_{OT}}}{A_B e^{j\varphi_B}} = T(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.2)$$

АЧХ показывает закон изменения амплитуды отклика от частоты гармонического воздействия с неизменной амплитудой; математически АЧХ определяется как модуль КФЦ:

$$T(\omega) = |\dot{T}(j\omega)| = \text{Mod } \dot{T}(j\omega) = \frac{A_{OT}}{A_B}. \quad (4.3)$$

АЧХ может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной; если АЧХ в интересующем диапазоне частот изменяется на несколько порядков, пользуются логарифмическим масштабом; значения АЧХ в децибелах (дБ) определяется как

$$T(\omega) = 201g \frac{A_{OT}}{A_B}. \quad (4.4)$$

ФЧХ показывает как меняется фаза сигнала отклика относительно фазы сигнала воздействия при изменении частоты воздействия; математически ФЧХ определяется как аргумент КФЦ:

$$\varphi(\omega) = \varphi_{OT} - \varphi_B = \text{Arg } \dot{T}(j\omega). \quad (4.5)$$

ФЧХ измеряется либо в градусах, либо в радианах.

Общая **методика** получения выражений для частотных характеристик цепи состоит в следующем:

- 1) получают выражение интересующей КФЦ -  $\dot{T}(j\omega)$ ,
- 2) находят выражение АЧХ как модуль КФЦ -  $|\dot{T}(j\omega)|$ ,
- 3) находят выражение ФЧХ как аргумент КФЦ -  $\text{Arg } \dot{T}(j\omega)$ .

Эта методика одинакова для цепей любой сложности. Анализ простых и сложных цепей несколько отличается только на этапе реализации первого шага: отыскание отклика

на гармоническое воздействие. В сложной цепи для отыскания откликов обычно применяют методы контурных токов, узловых потенциалов (см. задачу 3), эквивалентного генератора и др., тогда как в простейших цепях в этом нет необходимости.

В цепях первого порядка (в составе схемы не более одной реактивности) и второго порядка (две независимых реактивности) предполагаемый характер частотных характеристик может быть изображен на основе анализа схемы на крайних частотах диапазона  $\omega = 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  (см. задачу 1).

При анализе схем с разнотипными реактивностями следует учитывать явление **фазового резонанса** и диаграммы реактивных сопротивлений (см. рисунок 4.3). Подробнее этот вопрос рассматривается в методических указаниях к курсовой работе.

**ВНИМАНИЮ СТУДЕНТОВ.** Несмотря на то, что ЧХ рассчитываются и экспериментально снимаются при гармоническом воздействии, они позволяют судить о поведении цепи при сложном воздействии как в установившемся, так и в переходном режимах.

Частотные характеристики - одно из фундаментальнейших понятий в теории цепей.

### 4.2.3 Полоса пропускания цепи (ППЦ)

ППЦ - непрерывная область частот, в пределах которой значения АЧХ отличаются от своего максимального значения не более чем в  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  раз или на 3 дБ.

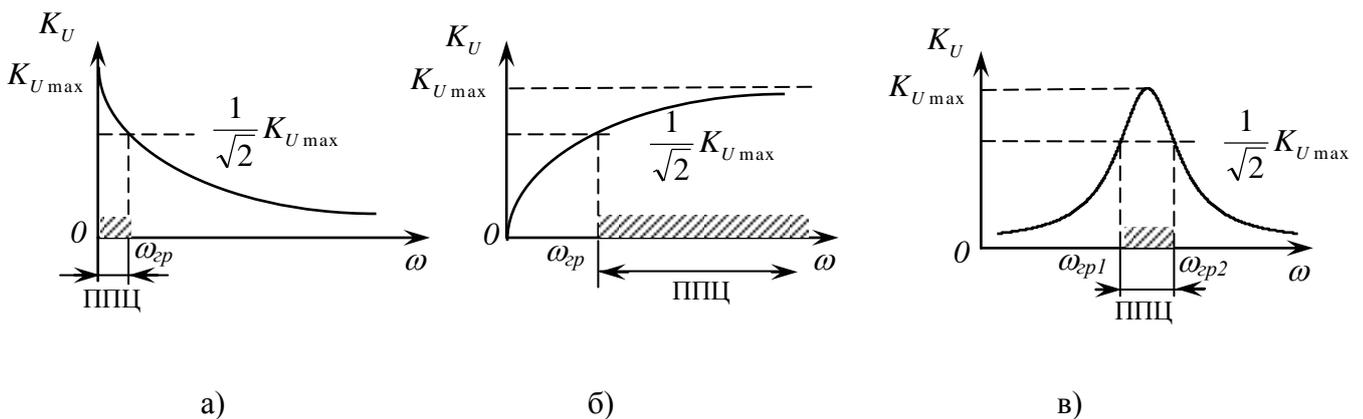


Рисунок 4.2 - Типовые АЧХ цепей и их полосы пропускания.

Методика определения ППЦ на основе графика АЧХ показана на рисунке 4.2.

**Методика** определения ППЦ на основе выражения АЧХ состоит в следующем:

- 1) определяется максимальное значение АЧХ -  $T_{\max}$ ,
- 2) выражение АЧХ приравнивается к значению  $\frac{1}{\sqrt{2}} T_{\max}$

$$T(\omega_{ep}) = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{\max}, \quad (4.6)$$

- 3) вычисляются значения граничных частот из равенства (4.6),
- 4) находится полоса пропускания цепи.

**Указания:** 1) для четырехполосников под функцией  $T(\omega)$  следует понимать функцию  $K_U(\omega)$  как на рисунке 4.2, а для двухполосников ППЦ определяется по функции  $Z_{BX}(\omega)$ ;  
2) для схем с единственной реактивностью  $T_{\max}$  соответствует либо частоте  $\omega = 0$ , либо частоте  $\omega = \infty$ , для схем с бо́льшим числом независимых реактивных элементов  $T_{\max}$  находят исследуя выражение АЧХ на экстремум.

#### 4.2.4 Реактивные двухполюсники (РД)

Двухполюсники, состоящие из идеальных индуктивностей, идеальных емкостей и не содержащие сопротивлений, называются РД. Как любые двухполюсники, РД описываются только входными функциями. Так как потери отсутствуют, то на основе соотношения

$$\dot{Z}_{BX}(j\omega) = R_{BX}(\omega) + jX_{BX}(\omega)$$

очевидно, что входное сопротивление РД - чисто реактивное.

Графики  $X_{BX}(\omega)$ , в дальнейшем просто  $X(\omega)$ , называют диаграммами реактивных сопротивлений (ДРС). Знание ДРС существенно облегчает анализ ряда электрических цепей с малыми потерями. В частности в курсе ОТЦ-II знание ДРС очень полезно при изучении сложных параллельных контуров, LC-фильтров и длинных линий.

В простейших случаях последовательного и параллельного соединения индуктивности  $L$  и емкости  $C$  ДРС имеют вид, показанный на рисунке 4.3. Частоты  $\omega_n$  и  $\omega_{II}$  называются соответственно частотами последовательного и параллельного резонансов. Частоты  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  к резонансным не относятся.

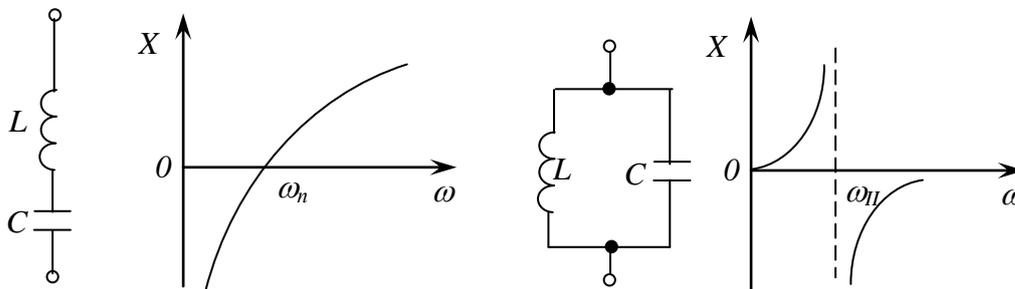


Рисунок 4.3 - Диаграммы реактивных сопротивлений простейших двухполюсников, представляющих последовательное и параллельное соединение L и C.

**Правила** построения ДРС более сложных двухполюсников состоят в следующем:

- 1) устанавливается число резонансов  $N_P$  РД (см. ниже);
- 2) “наклон” графиков  $X(\omega)$  определяется условием  $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$ ;
- 3) последовательные и параллельные резонансы обязательно чередуются между собой;
- 4) при переходе через любой резонанс сопротивление  $X(\omega)$  обязательно изменяет знак на противоположный;
- 5) если РД не пропускает постоянный ток (см. рисунок 4.3.a), то первым наступает последовательный резонанс, т.к.  $X(0) = -\infty$ ;
- 6) на бесконечно больших частотах  $X(\infty) = 0$ , если РД пропускает эти частоты, и  $X(\infty) = +\infty$ , если РД не пропускает большие частоты.

Число резонансов  $N_P$  определяется порядком цепи  $n$ :

$$N_P = n - 1.$$

Порядок цепи  $n$  не может превышать число независимых реактивных элементов  $L$  и  $C$  -  $k$ :  
 $n \leq k$ .

Например, на рисунке 4.3  $n = k = 2$ ,  $N_P = 1$ .

В общем случае порядок цепи  $n$  определяется порядком дифференциального уравнения цепи.

Если сопротивления цепи на крайних частотах диапазона имеют одинаковые по величине значения (рисунок 4.4)

$$X(0) = 0 \quad \text{и} \quad X(\infty) = 0$$

или

$$X(0) = -\infty \quad \text{и} \quad X(\infty) = +\infty,$$

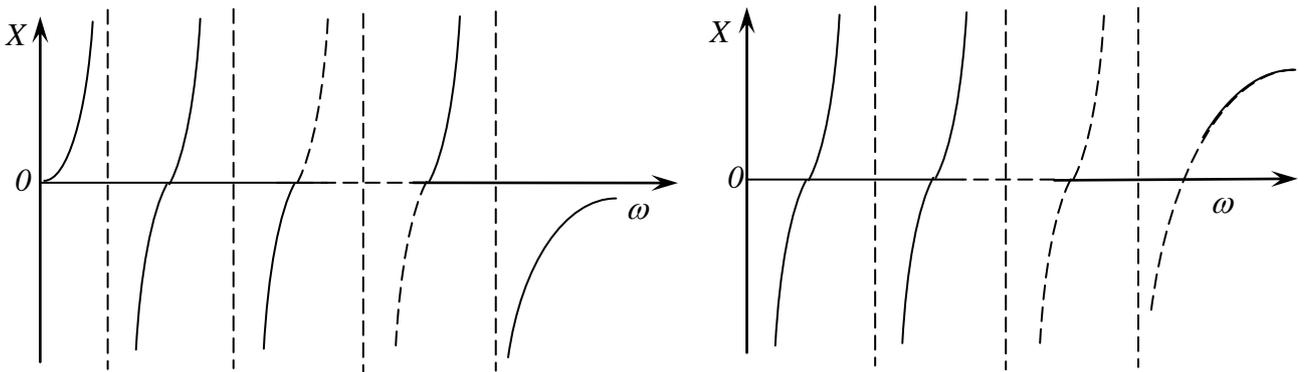
то число резонансов  $N_P$  - обязательно нечетное, что соответствует четному значению порядка цепи  $n$ . Если сопротивления имеют разные значения (рисунок 4.5)

$$X(0) = 0, \quad \text{а} \quad X(\infty) = \infty$$

или

$$X(0) = -\infty, \quad \text{а} \quad X(\infty) = 0,$$

то  $N_P$  - четное, а  $n$  - нечетное число. Во всех случаях число резонансов  $N_P = n - 1$ , причем значения  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  резонансами не являются.



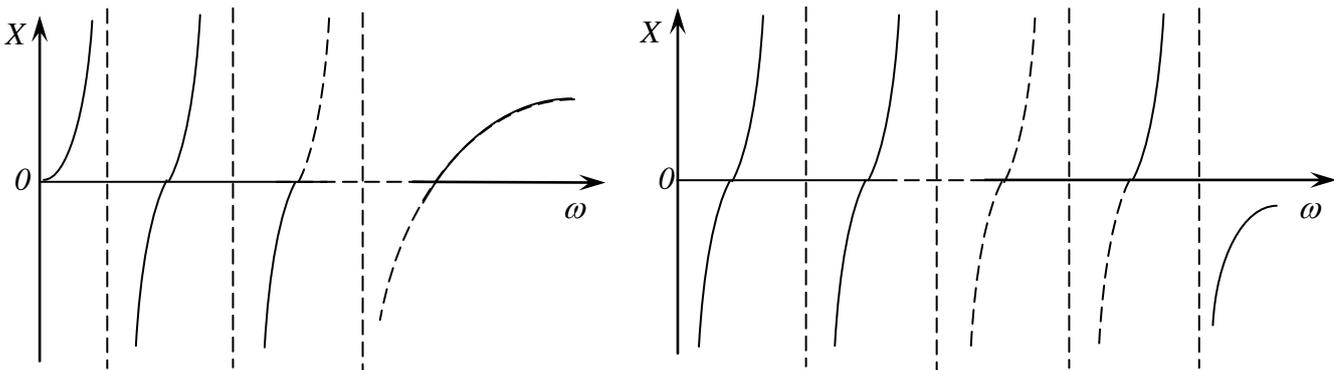
$$X(0)=0, X(\infty)=0$$

а)

$$X(0) = -\infty, X(\infty) = \infty$$

б)

Рисунок 4.4 - Диаграммы реактивных сопротивлений для цепей, имеющих четный порядок  $n$ .



$$X(0)=0, X(\infty)=\infty$$

а)

$$X(0) = -\infty, X(\infty) = 0$$

б)

Рисунок 4.5 - Диаграммы реактивных сопротивлений для цепей, имеющих нечетный порядок  $n$ .

В простых цепях, содержащих только последовательные и параллельные соединения реактивностей (рисунок 4.6), можно пользоваться упрощенным способом определения числа резонансов, т.к. обычно для них  $N_P = k - 1$  или  $N_P = k - 2$ .

В первом приближении принимается  $N_P = k - 1$  и строится ДРС на основании правил 1) - 5), затем проверяется правило 6) и последний резонанс либо отбрасывается, либо сохраняется в зависимости от значения  $X(\infty)$ .

Пример подобного способа построения ДРС дан на рисунке 4.6. Так как число реактивностей  $k = 8$ , то  $N_p \leq 7$ , причем  $X(0) = 0$ . Однако  $X(\infty) = \infty$ , поэтому последний резонанс “7” должен быть отброшен. Полученный результат полностью согласуется с рисунком 4.5.а.

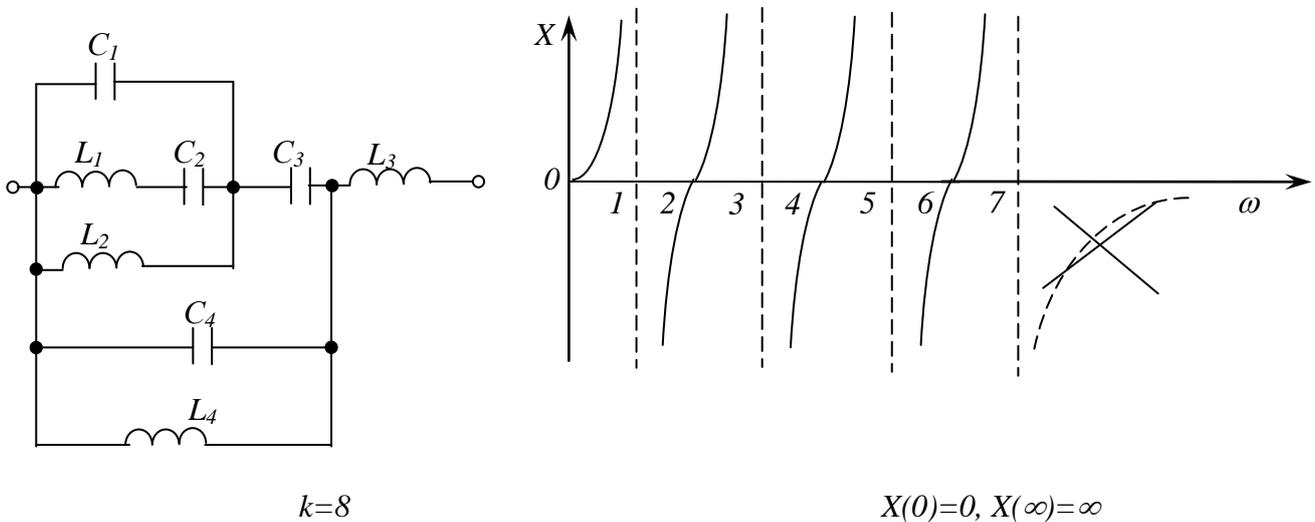


Рисунок 4.6 - Упрощенный способ определения числа резонансов  $N_p$ .

ДРС содержат информацию об АЧХ и ФЧХ для входного сопротивления РД. АЧХ - это модуль зависимости  $X(\omega)$ , ФЧХ принимает значения только  $+90^\circ$ , если  $X > 0$  или  $-90^\circ$ , если  $X < 0$ .

Во многих случаях знание ДРС позволяет сделать обоснованные предположения о частотных характеристиках для входного сопротивления RLC-цепи. Эти оценки тем точнее, чем меньше потери: сопротивления  $R$ , стоящие последовательно с реактивными элементами должны отвечать условию  $R \ll |X|$ , а стоящие параллельно  $R \gg |X|$  в рассматриваемом частотном диапазоне. Значения  $Z(0)$ ,  $Z(\infty)$ ,  $\varphi_z(0)$  и  $\varphi_z(\infty)$  определяются непосредственно по схеме (см. задачу 1).

## 4.3 Примеры решения и методические указания к решению задач

### 4.3.1 Примеры решения

#### Задача 1.

Для цепи, находящейся в режиме холостого хода (Х.Х.), схема которой изображена на рисунке 4.7,

- 1) изобразить АЧХ коэффициента передачи по напряжению и АЧХ входного сопротивления на основе анализа схемы, без вывода выражений;
- 2) найти выражение АЧХ коэффициента передачи по напряжению;
- 3) вычислить полосу пропускания;
- 4) изобразить ФЧХ входного сопротивления и ФЧХ коэффициента передачи на основе анализа схемы;
- 5) вычислить фазовый сдвиг между выходным и входным сигналами на граничной частоте полосы пропускания.

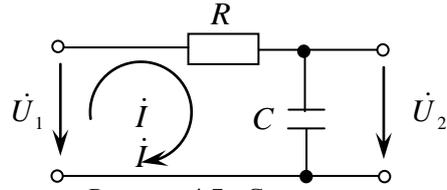


Рисунок 4.7 - Схема исследуемой цепи.

**Решение**

1) Построение АЧХ по схеме.

Так как в схеме один реактивный элемент, ЧХ цепи будут монотонными функциями частоты и для их изображения достаточно знать значения ЧХ на крайних частотах диапазона  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ .

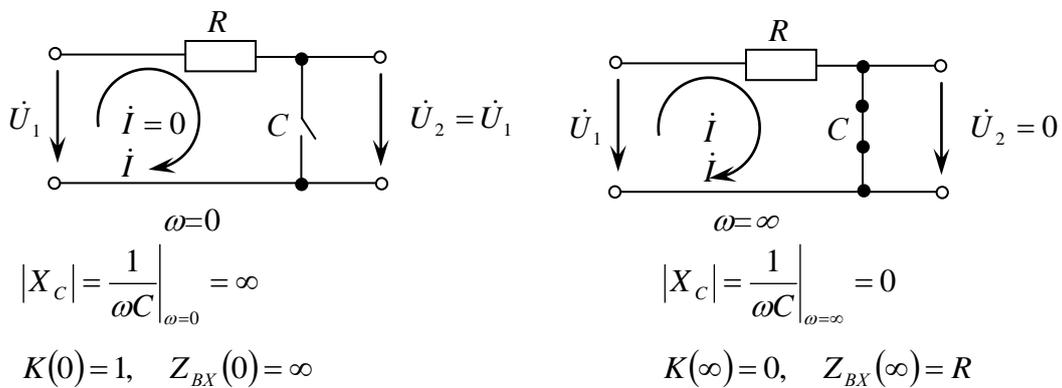


Рисунок 4.8 - Схемы замещения исследуемой цепи на крайних частотах диапазона.

АЧХ исследуемой цепи, построенные на основе анализа схем замещения, изображены на рисунке 4.9.

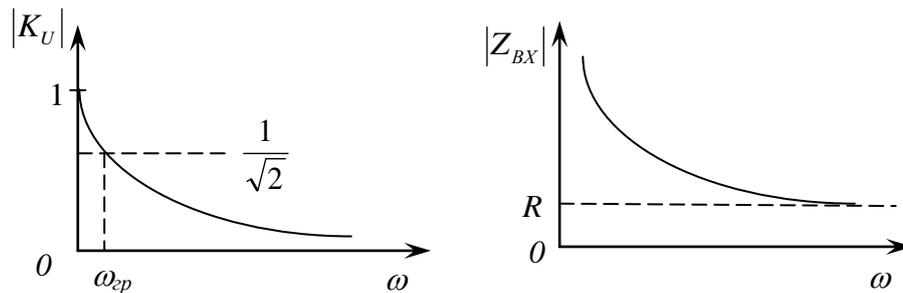


Рисунок 4.9 - АЧХ исследуемой цепи.

2) Получение выражения АЧХ производим в соответствии с методикой п.4.2.2. и формулой (4.3)

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{i \cdot \frac{1}{j\omega C}}{i \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega CR},$$

$$K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}},$$

откуда легко убедиться, что

$$K_U(0) = 1, \quad K_U(\infty) = 0.$$

3) Полоса пропускания определяется в соответствии с методикой п.4.2.3:

$$K_{U \max} = 1 \text{ (см. рисунок 4.9.a)}$$

$$K_U(\omega_{zp}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_{ГР} CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1,$$

откуда

$$\omega_{zp} = \frac{1}{CR}.$$

Полоса пропускания (см. рисунок 4.9.a) соответствует интервалу  $0 - \omega_{zp}$ .

4) Для построения ФЧХ непосредственно на основе схемы **необходимо сохранить характер реактивного сопротивления**. Поэтому эквивалентные схемы изобразим не для  $\omega = 0$ , а для  $\omega \rightarrow 0$ , не для  $\omega = \infty$ , а для  $\omega \rightarrow \infty$  (рис. 4.10).

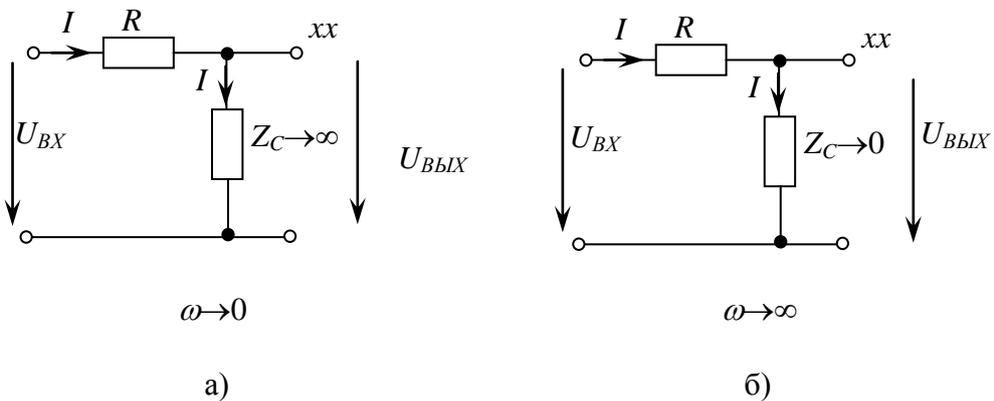


Рисунок 4.10

#### **ФЧХ входного сопротивления.**

На крайних частотах входное сопротивление определяется элементами какого-то одного типа:

если это сопротивление  $R$ , то  $\varphi_{Z_{BX}} = 0^0$ ,

если это индуктивное сопротивление  $\dot{Z}_L$ , то  $\varphi_{Z_{BX}} = +90^0$ ,

если это емкостное сопротивление  $\dot{Z}_C$ , то  $\varphi_{Z_{BX}} = -90^0$ .

В соответствие с рисунком 4.10

$Z(0) \approx Z_C$ , следовательно,  $\varphi_{Z_{BX}}(0) = -90^0$ ;

$Z(\infty) \approx R$ , следовательно,  $\varphi_{Z_{BX}}(\infty) = 0^0$ .

ФЧХ входного сопротивления изображена на рисунке 4.11a.

#### **ФЧХ коэффициента передачи.**

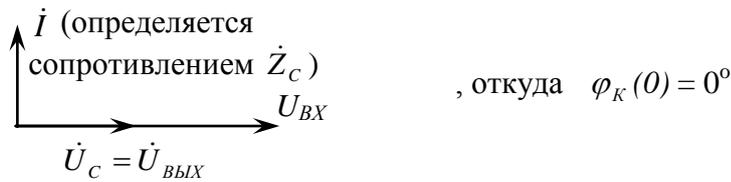
В соответствии с определением коэффициента передачи по напряжению  $\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_{BYYX}}{\dot{U}_{BX}}$ ,

Следовательно,  $\varphi_K = \varphi_{\dot{U}_{BYYX}} - \varphi_{\dot{U}_{BX}}$ .

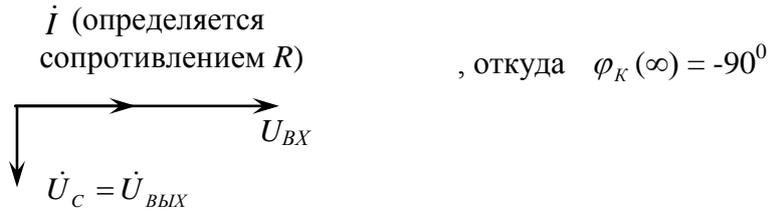
Для удобства положим  $\varphi_{\dot{U}_{BX}} = 0$ , тогда

$$\varphi_K = \varphi_{\dot{U}_{BYYX}}$$

Построим векторные диаграммы для схемы рисунка 4.10а



Векторные диаграммы для схемы рисунка 4.10б



ФЧХ коэффициента передачи изображена на рисунке 4.11.б.

5) Фазовый сдвиг на заданной частоте определяется на основе выражения ФЧХ, которая находится в соответствии с выражением (4.5):

$$\varphi_K(\omega) = \text{Arg } \dot{K}_U(j\omega) = -\text{arctg } \omega CR,$$

$$\varphi_K(\omega_{ep}) = -\text{arctg } \omega_{ep} CR = -45^\circ.$$

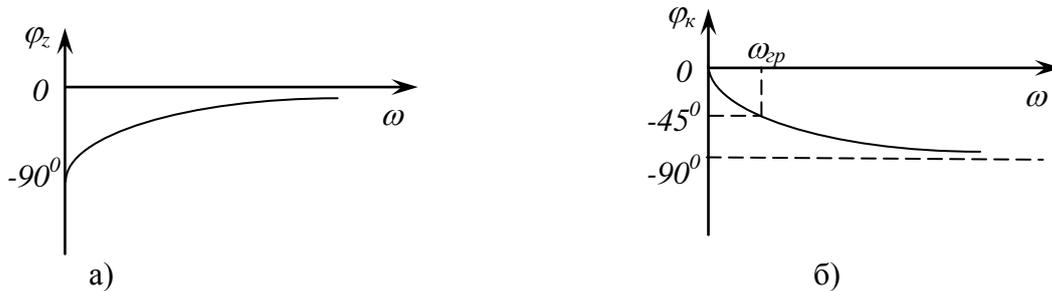


Рисунок 4.11- Фазочастотные характеристики исследуемой цепи.

**ВНИМАНИЮ СТУДЕНТОВ:** если исследуемая цепь нагружена на некоторое сопротивление  $Z_H$  (рисунок 4.12а), то это сопротивление можно “включить” в состав схемы, а последнюю опять рассматривать в режиме холостого хода (рисунок 4.12б). Методика расчета полностью сохраняется, а ЧХ цепи, очевидно, зависят от значения  $Z_H$ .

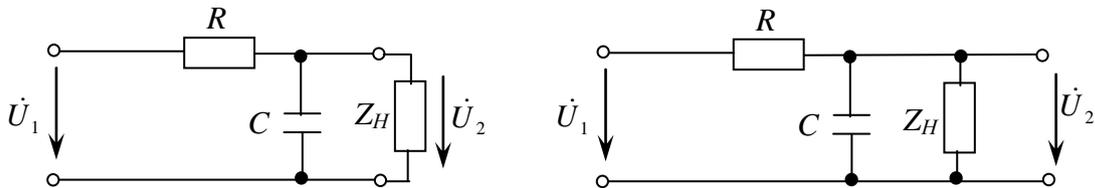


Рисунок 4.12 - Схема исследуемой цепи, нагруженной на сопротивление  $Z_H$ .

### Задача 2.

На цепь, схема которой изображена на рисунке 4.13, действует сложный сигнал  $u_1(t) = U_{m1}\cos\omega t + U_{m2}\cos 2\omega t$ . Параметры схемы определены следующими условиями:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = 10R.$$

Определить амплитуды первой и второй гармоник  $U_{m1BЫIX}$  и  $U_{m2BЫIX}$  выходного сигнала  $u_2(t)$ .

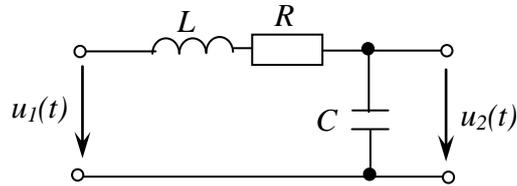


Рисунок 4.13 - Схема исследуемой цепи.

Пояснение: если в составе сигнала имеются колебания кратных частот  $n\omega$ , где  $n$  - целое число, то они называются **гармониками** сигнала.

#### **Анализ исходных условий.**

Решение задачи основано на следующих известных свойствах линейной цепи.

Во-первых, так как цепь линейна, то отклик цепи  $u_2(t)$  содержит колебания тех же частот, что и воздействие  $u_1(t)$ .

Во-вторых, для линейной цепи действует принцип наложения (суперпозиции), поэтому можно рассматривать прохождение колебаний каждой частоты независимо друг от друга.

В-третьих, при действии на цепь гармонического колебания в установившемся режиме следует пользоваться символической формой записи; из (4.1) следует

$$\dot{U}_{mBЫIX} = \dot{U}_{mBX} \cdot \dot{K}_U(j\omega), \quad (4.7)$$

т.е. при прохождении через цепь изменится как амплитуда, так и фаза колебаний. Выходной сигнал  $u_2(t)$  примет вид

$$u_2(t) = U_{m1} \cdot K_U(\omega_0) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] + U_{m2} \cdot K_U(2\omega_0) \cdot \cos[2\omega_0 t + \varphi(2\omega_0)], \quad (4.8)$$

где  $K_U(n\omega_0)$  и  $\varphi(n\omega_0)$  значения АЧХ и ФЧХ исследуемой цепи на частотах входного сигнала ( $n = 1, n = 2$ ).

#### **Решение.**

1) находится комплексная передаточная функция цепи и преобразуется к типовой форме записи (3.7)

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

2) записывается выражение АЧХ

$$K_U(\omega) = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

3) вычисляются значения АЧХ на заданных частотах  $\omega_0$  и  $2\omega_0$  (или на частотах первой и второй гармоник сигнала)

$$K_U(\omega_0) = \frac{\frac{\sqrt{LC}}{C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = 10.$$

$$K_U(2\omega_0) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{R^2 + \left(2\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{R^2 + \left(1,5\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}} \approx 0,33.$$

4) вычисляются амплитуды гармонических составляющих отклика на основе выражения (4.8)

$$U_{m1 \text{ Вых}} = U_{m1} \cdot K(\omega_0) = U_{m1} \cdot 10,$$

$$U_{m2 \text{ Вых}} = U_{m2} \cdot K(2\omega_0) = U_{m2} \cdot 0,33.$$

**ВНИМАНИЮ СТУДЕНТОВ.** Так как цепь рисунка 4.13 содержит два реактивных элемента, причем разного характера (реактивности разных знаков), то АЧХ цепи не является монотонной функцией частоты и для ее построения недостаточно информации о значении АЧХ на крайних частотах диапазона  $T(0)$  и  $T(\infty)$ . Для нахождения других характерных точек АЧХ надо исследовать выражение АЧХ на экстремум

$$\left. \frac{dT(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_{\text{эк}}} = 0,$$

откуда определяются частоты  $\omega_{\text{эк}}$ , соответствующие экстремумам АЧХ, и вычисляются значения АЧХ в этих экстремальных точках  $T(\omega_{\text{эк}})$ .

Полностью АЧХ строится на основе значений  $T(0)$ ,  $T(\omega_{\text{эк}})$ ,  $T(\infty)$ .

### Задача 3.

Найти выражения  $\dot{Z}_{\text{ВХ}}(j\omega)$  и  $\dot{K}_U(j\omega)$  для схемы рисунка 4.14 с зависимым источником  $j_{\text{зав}} = \alpha i_0$ , где  $i_0$  - управляющий ток,  $\alpha$  - безразмерный коэффициент.

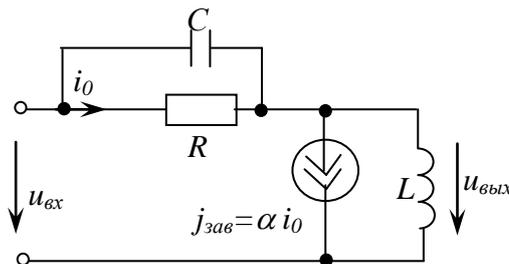


Рисунок 4.14

Так как надо определить КФЦ, воспользуемся методом комплексных амплитуд.

Так как схема содержит **зависимый источник**, используем метод узловых потенциалов (МУП) в типовой форме, для чего параметры схемы выразим через проводимости, выберем опорный узел, пронумеруем остальные узлы и подключим независимый пробный источник  $J_{PP}$  (рисунок 4.15).

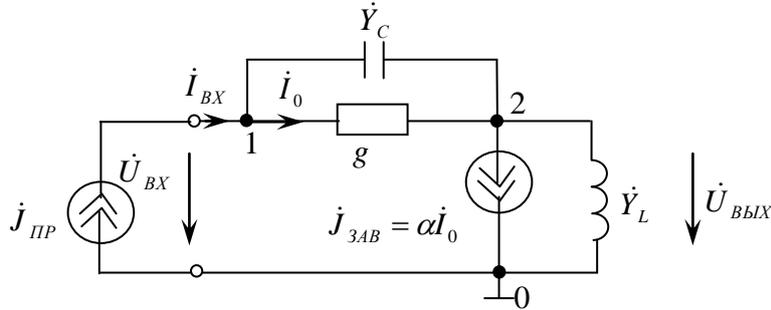


Рисунок 4.15.

**Решение.**

В соответствии с рисунком 4.15

$$\dot{Z}_{BX}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{BX}}{\dot{I}_{BX}} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{J}_{PP}}, \quad \dot{K}_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{BYX}}{\dot{U}_{BX}} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{U}_{10}}.$$

Задача сводится к отысканию узловых напряжений в схеме с зависимым источником:

- 1) запишем типовую систему по МУП

$$\dot{Y}_{11}\dot{U}_{10} + \dot{Y}_{12}\dot{U}_{20} = \dot{J}_{11}$$

$$\dot{Y}_{21}\dot{U}_{10} + \dot{Y}_{22}\dot{U}_{20} = \dot{J}_{22}$$

или

$$(g + \dot{Y}_C)\dot{U}_{10} + (-g - \dot{Y}_C)\dot{U}_{20} = \dot{J}_{PP}$$

(4.9)

$$(-g - \dot{Y}_C)\dot{U}_{10} + (g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L)\dot{U}_{20} = -\dot{J}_{3AB},$$

- 2) выразим зависимый источник  $\dot{J}_{3AB}$  через искомые величины - узловые напряжения

$$\dot{J}_{3AB} = \alpha \dot{I}_0 = \alpha \cdot \frac{(\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20})}{R} = \alpha \cdot g (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}), \quad (4.10)$$

Закон Ома для тока  $I_0$

- 3) подставим выражение (4.10) в (4.9) и приведем подобные по узловым напряжениям

$$(g + \dot{Y}_C)\dot{U}_{10} + (-g - \dot{Y}_C)\dot{U}_{20} = \dot{J}_{PP}$$

$$(-g - \dot{Y}_C + \alpha g)\dot{U}_{10} + (g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L - \alpha g) = 0$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} g + \dot{Y}_C & -(g + \dot{Y}_C) \\ \alpha g - (g + \dot{Y}_C) & g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L - \alpha g \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{ПП} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) найдем  $\dot{U}_{10}$  и  $\dot{U}_{20}$  по правилу Крамера

$$\dot{U}_{10} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{J}_{ПП} & -(g + \dot{Y}_C) \\ 0 & g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L - \alpha g \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{\dot{J}_{ПП}(g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L - \alpha g)}{\Delta_Y}$$

$$\dot{U}_{20} = \frac{\begin{vmatrix} g + \dot{Y}_C & \dot{J}_{ПП} \\ \alpha g - (g + \dot{Y}_C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{\dot{J}_{ПП}[(g + \dot{Y}_C) - \alpha g]}{\Delta_Y}$$

5) искомые функции

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{J}_{ПП}} = \frac{g + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L - \alpha g}{\Delta_Y},$$

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{U}_{10}} = \frac{g + \dot{Y}_C - \alpha g}{g + \dot{Y}_C - \alpha g + \dot{Y}_L},$$

где  $\Delta_Y$  - определитель матрицы проводимостей.

Осталось подставить выражения  $\dot{Y}_C$  и  $\dot{Y}_L$  и привести функции к типовой форме.

Однако, уже на этом этапе можно сделать заключение, что функции цепи определяются только ее параметрами и не зависят от значения пробного источника.

### 4.3.2 Методические указания и примеры решения

#### Указания к решению задачи 4.6.3

Обозначив

$$\dot{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1},$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2},$$

найти выражение  $\dot{K}_U(j\omega)$  и привести его к алгебраической форме записи

$$\dot{K}_U(j\omega) = \text{Re}(\dot{K}_U) + j\text{Im}(\dot{K}_U).$$

Так как ФЧХ на искомой частоте  $\omega_0$  имеет нулевое значение, то и  $\text{Im}[\dot{K}_U(j\omega_0)] = 0$ . При этих условиях на частоте  $\omega_0$  модуль функции  $K_U$  и ее реальная часть численно совпадают

$$|\dot{K}_U(j\omega_0)| = \text{Re}[\dot{K}_U(j\omega_0)].$$

Предлагаемый вариант решения проще, чем традиционный путь, связанный с нахождением значений АЧХ и ФЧХ цепи.

#### **Указания к решению задач 4.6.9 и 4.6.10**

По заданным схемам цепей легко убедиться, что АЧХ коэффициента передачи по напряжению имеет вид, показанный на рисунке 4.9а. Так как  $K_U(0)=1$ , постоянная составляющая входного сигнала проходит через цепь без изменений, а изменение переменной составляющей с известной частотой  $\omega$  определяется значением  $K_U(\omega)$ , которое вычисляется на основании выражения АЧХ.

#### **Указания к решению задачи 4.6.11.**

Для лучшего понимания задачи следует изобразить передаточную АЧХ на основе схемы  $CR$  (рисунок 4.20) в режиме Х.Х. и графически найти частоту, для которой спад АЧХ не превышает 10%, т.е. АЧХ принимает значение 0,9. Численное решение задачи выполняется на основе выражения АЧХ.

## **4.4 Знания и умения**

В результате изучения темы студент должен знать и уметь следующее.

### **Знать:**

- 1) определение комплексной функции цепи;
- 2) принцип деления комплексных функций цепи на входные и передаточные;
- 3) что показывает АЧХ цепи и какова методика получения выражения АЧХ;
- 4) что показывает ФЧХ цепи и какова методика получения выражения ФЧХ;
- 5) отличается ли методика нахождения ЧХ для простых и сложных электрических цепей, если отличается, то в чем;
- 6) как получить любую комплексную функцию сложной цепи;
- 7) возможные “размерности” для АЧХ и ФЧХ;
- 8) определение и методику нахождения полосы пропускания, как на основе графика, так и на основе выражения АЧХ;
- 9) влияет ли характер и значение параметров нагрузки на ЧХ цепи;
- 10) что такое реактивный двухполюсник;
- 11) основные свойства диаграмм сопротивлений  $X(\omega)$  реактивных двухполюсников.

### **Уметь:**

- 1) в простейших цепях составить любую комплексную входную или передаточную функцию;
- 2) по ней найти выражения АЧХ и ФЧХ и изобразить их графически;
- 3) строить АЧХ и ФЧХ для входной и передаточной функций простейших  $RC$ - и  $RL$ -цепей, не прибегая к выражениям АЧХ и ФЧХ, непосредственно по схеме цепи;
- 4) определять фазовый сдвиг и значение АЧХ на заданных частотах;
- 5) определять частоты, соответствующие заданным значениям ФЧХ и АЧХ, в частности, определять полосу пропускания цепи;
- 6) строить диаграммы сопротивлений  $X(\omega)$  реактивных двухполюсников;

7) в цепях с зависимыми источниками вывести комплексную входную или передаточную функцию.

## 4.5 Формы контроля

ТЕСТОВЫЙ ОПРОС включает вопросы определения АЧХ для заданной схемы, нахождение схемы по заданной АЧХ, определение значений сопротивлений  $Z(0)$  и  $Z(\infty)$  для заданной схемы и некоторые вопросы, связанные с правилами определения модулей и аргументов комплексных чисел и выражений.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА рассчитана на 25-30 минут. Она состоит из двух частей, оцениваемых отдельно, и включает:

1) построение АЧХ и ФЧХ для входной и передаточной функции на основе схемы цепи, получение выражения АЧХ передаточной функции и вычисление полосы пропускания для  $RL$ - и  $RC$ - схем, подобных схемам, изображенным на рисунке 4.16;

2) построение диаграммы сопротивлений для схем, подобных тем, что представлены на рисунке 4.21.

## 4.6 Упражнения и задачи для индивидуальной работы

4.6.1 Построить АЧХ и ФЧХ для  $\dot{Z}_{BX}$  и  $\dot{K}_U$  непосредственно по схеме рисунка 4.16 (схема задается преподавателем)

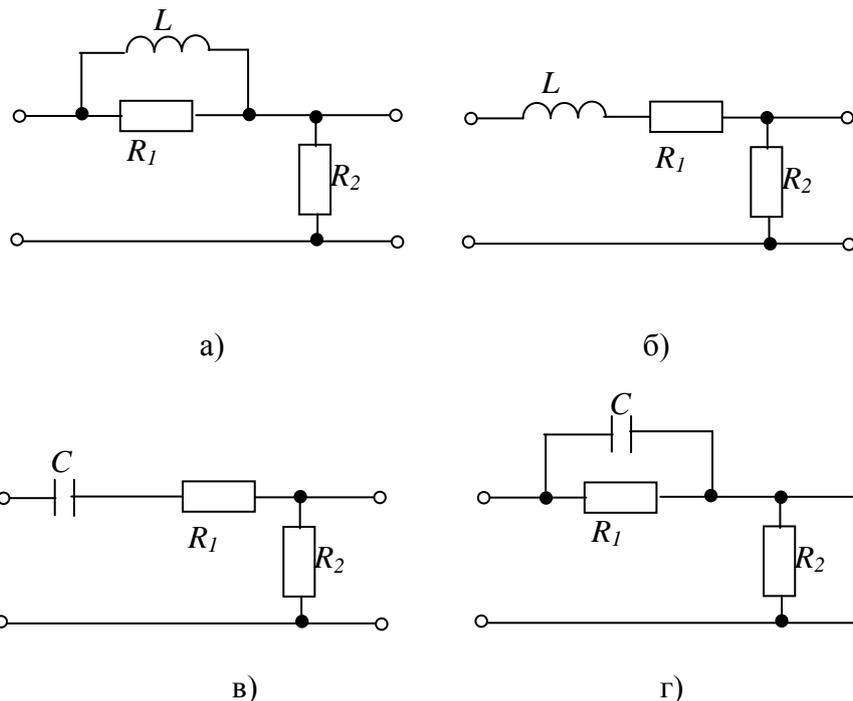


Рисунок 4.16 - Схемы к задачам 4.6.1 и 4.6.2

4.6.2 Найти выражение для  $\omega_{cp}$  и определить полосу пропускания цепи, схема которой дана на рисунке 4.16, если а)  $R_1 = R_2$ , б)  $R_1 = 2R_2$ , в)  $R_1 = 0,5R_2$  (схема и одно из условий задается преподавателем).

4.6.3 Определить частоту  $\omega_0$ , на которой фазовый сдвиг в цепи (рисунок 4.17) между  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  равен 0. Вычислить  $|\dot{K}_U|$  на этой частоте.

Ответ:  $\omega_o^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$ ,  $K_U = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}$ .

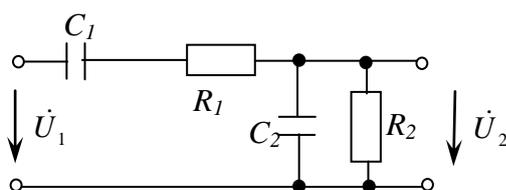


Рисунок 4.17 - Схема к задаче 4.6.3

4.6.4 Для цепи, имеющей схему рисунка 4.18, найти частоту  $\omega$ , на которой выходной сигнал в два раза меньше входного и рассчитать величину фазового сдвига между  $\dot{U}_{ВХ}$  и  $\dot{U}_{ВЫХ}$  на этой частоте.

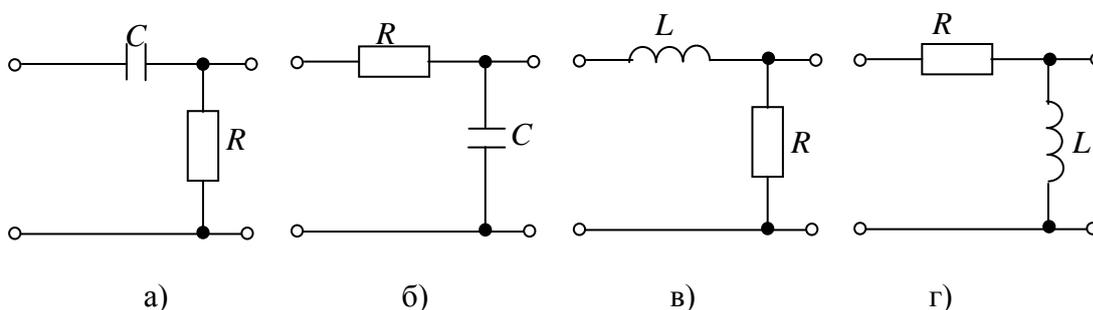


Рисунок 4.18 - Схемы к задачам 4.6.4, 4.6.6, 4.6.9 и 4.6.10.

4.6.5 Записать выражение для  $\dot{K}_U$  (рисунок 4.19) и вычислить значения АЧХ и ФЧХ на частоте  $\omega_o = 2 \text{ рад/с}$ .

Ответ:  $6,2 \cdot 10^{-2}$ ;  $-150^\circ$ .

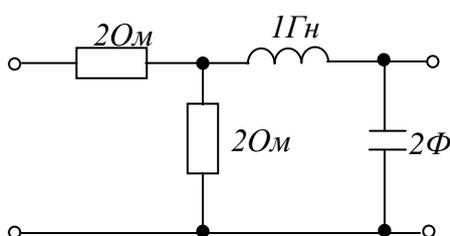


Рисунок 4.19 - Схема к задаче 4.6.5.

4.6.6 Для схемы г) на рисунке 4.18  $u_{ВХ}(t) = 10 \cos 2000t$  В,  $R = 10$  Ом. При каком значении  $L$   $K_U = 0.5$ ?

Ответ: 2,89 мГн.

4.6.7 Определить величину активного сопротивления последовательной RC- цепи, при котором сдвиг фаз между током, протекающим в цепи, и приложенным напряжением равен а)  $60^\circ$ , б)  $90^\circ$ . Реактивное сопротивление цепи  $X_C = -100$  Ом.

Ответ: 57,8 Ом; 0.

4.6.8 На вход последовательной RC - цепи подано напряжение  $u_1(t) = 300 \cos 4,1 \cdot 10^4 t$  В. Определить амплитуду напряжения на емкости  $U_{2m}$  и сдвиг фазы  $\dot{U}_2$  относительно  $\dot{U}_1$ , если  $R = 100$  кОм,  $C = 420$  пФ.

Ответ: 150 В;  $-60^\circ$ .

4.6.9 Какова должна быть величина сопротивления  $R$ , на схеме в) рисунка 4.18, чтобы пульсация напряжения на выходе составляла 0,5%?

Под пульсацией понимать отношение амплитуды переменной составляющей напряжения к постоянной.

$$u_{BX}(t) = 100 + 10 \cos 2\pi \cdot 800t \text{ В}, \quad L = 1 \text{ Гн.}$$

Ответ: 252 Ом.

4.6.10 Схема исследуемой цепи приведена на рисунке 4.18б.

$$R = 1 \text{ кОм}, \quad C = 20 \text{ мкФ}, \quad u_{BX}(t) = 20 + 0,5 \cos 314t \text{ В.}$$

Определить, во сколько раз пульсация напряжения на выходе меньше, чем на входе. Под пульсацией понимать отношение амплитуды переменной составляющей напряжения к постоянной.

Ответ: 6,36.

4.6.11 На рисунке 4.20 изображена схема входной цепи УНЧ.  $R = 0,5 \text{ МОм}$ .

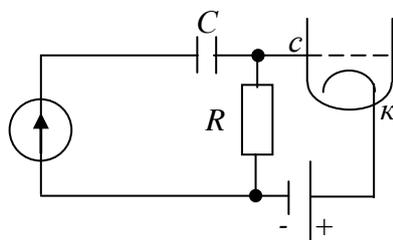
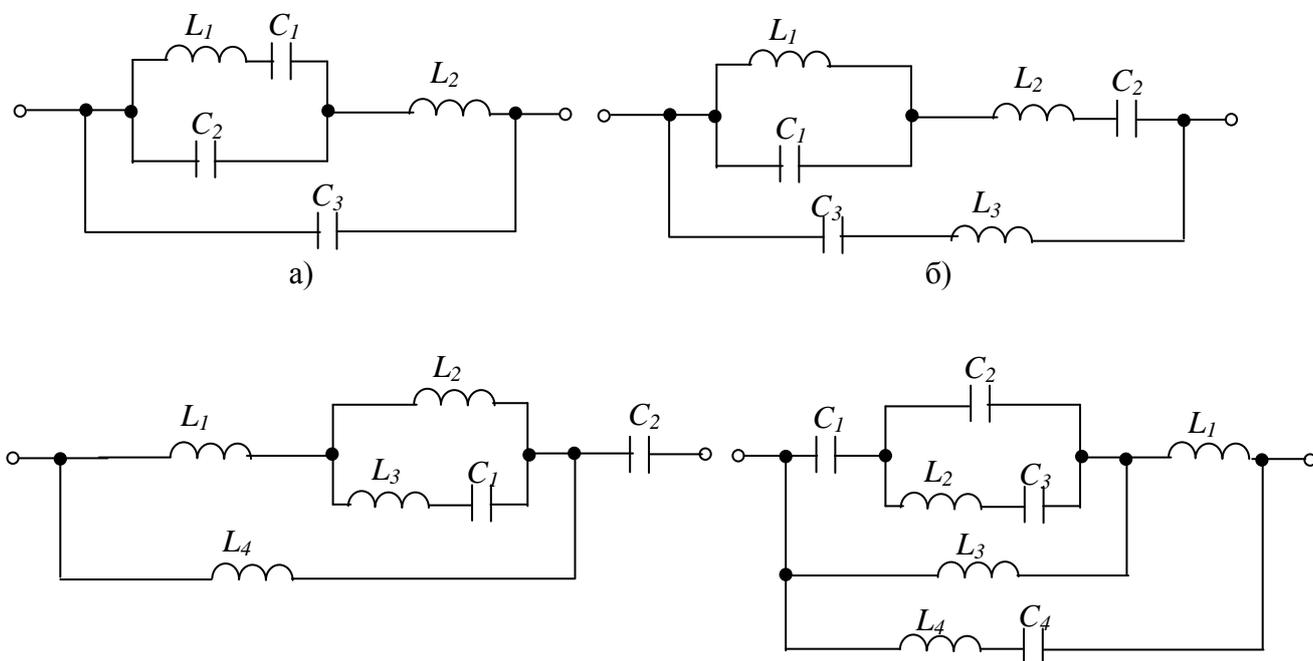


Рисунок 4.20 - Схема входной части УНЧ.

Определить, какова должна быть емкость конденсатора, чтобы спад частотной характеристики входной цепи на низшей частоте 80 Гц не превышал 10%.

**Примечание:** так как на сетку подано отрицательное смещение, сопротивление  $R_{СК}$ , т.е. входное сопротивление лампы, считать бесконечно большим.

4.6.12 Построить частотную характеристику  $X_{BX}(\omega)$  реактивного двухполюсника, изображенного на рисунке 4.21.



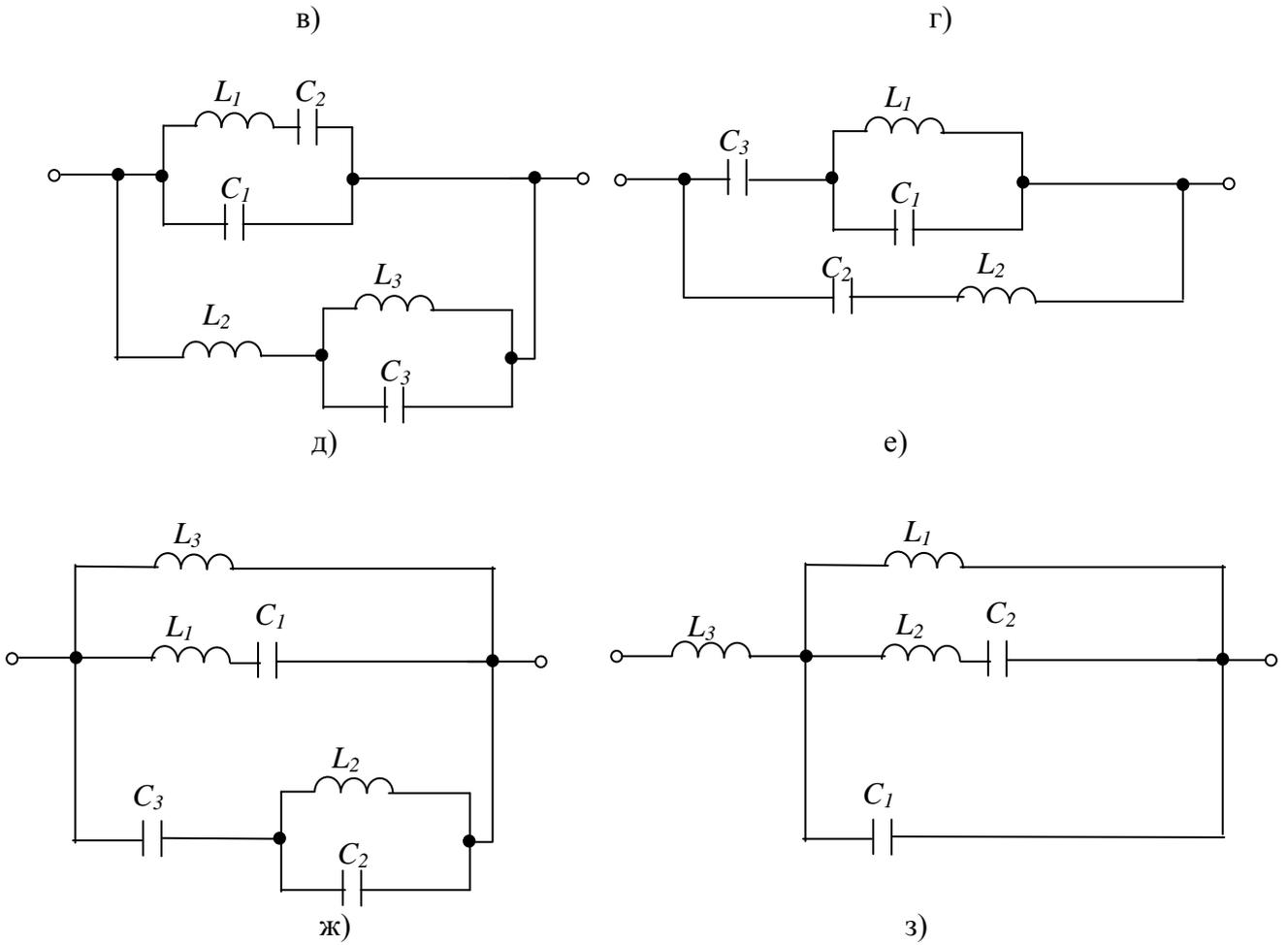
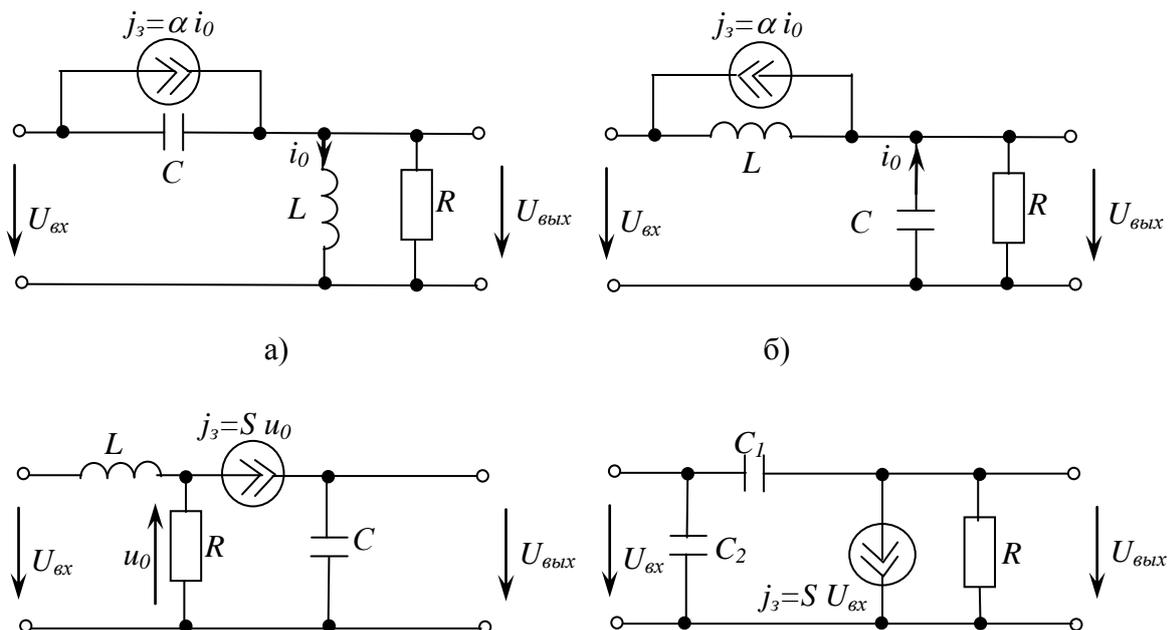


Рисунок 4.21 - Схемы реактивных двухполюсников.

4.6.13 Для схемы с зависимым источником (рисунок 4.22) найти выражение  $\dot{Z}_{BX}(j\omega)$  и  $\dot{K}_U(j\omega)$ ; выражения привести к стандартной форме (3.7).





## 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 5.1 Цель занятия

На примере последовательного контура усвоить основные понятия для резонансных цепей (добротность, характеристическое сопротивление, явление резонанса, расстройки и др.); изучить свойства последовательного колебательного контура.

### 5.2 Краткие теоретические сведения

Резонанс в любой электрической цепи, содержащей  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , наступает, когда частота  $\omega$  внешнего воздействующего сигнала совпадает с резонансной частотой  $\omega_p$  самой электрической цепи ( $\omega = \omega_p$ ). Резонанс в такой цепи сопровождается экстремальными значениями токов и напряжений, а также чисто активным входным сопротивлением.

Так как для любой  $L$ ,  $C$ ,  $R$ -цепи

$$\dot{Z}_{BX}(j\omega) = R_{BX}(\omega) + jX_{BX}(\omega),$$

то на частоте  $\omega = \omega_p$

$$X_{BX}(\omega_p) = 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{Z}_{BX}(j\omega_p) = R_{BX}(\omega_p) = R_P \quad (5.2)$$

Из условия (5.1) находятся резонансные частоты электрической цепи, из (5.2) - ее резонансные сопротивления.

Для последовательного контура (элементы  $L$ ,  $C$ ,  $R$  включены последовательно)

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad R_P = R,$$

где  $R$  - полное сопротивление потерь контура, включающее сопротивление потерь катушки индуктивности и конденсатора, потери на излучение, в соединительных проводах и др.

Расстройки:

$$\text{абсолютная расстройка} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_p,$$

$$\text{относительная расстройка} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_p},$$

$$\text{обобщенная расстройка} \quad \xi = \frac{X}{R} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \approx Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_p}.$$

Характеристическое сопротивление  $\rho$  - сопротивление полной индуктивности или полной емкости на резонансной частоте при последовательном обходе контура  $\rho = X_{PL} = |X_{PC}|$

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{X_L |X_C|} = \frac{U_{CP}}{I_P};$$

добротность или качество контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{U_{CP}}{E_{BX}} = \frac{\omega_p}{2\Delta\omega_{\Pi}} = \frac{f_p}{2\Delta f_{\Pi}},$$

где  $2\Delta\omega_{\Pi} = 2\pi(2\Delta f_{\Pi})$  - полоса пропускания контура.

На резонансной частоте  $\omega = \omega_p$ :

$$I_P = \frac{E_{BX}}{R},$$

$$U_{RP} = E_{BX},$$

$$U_{CP} = QE_{BX}, \quad U_{LP} = QE_{BX},$$

последние соотношения определяют название последовательного резонанса как резонанса напряжений; векторные соотношения представлены на рисунке 5.1.

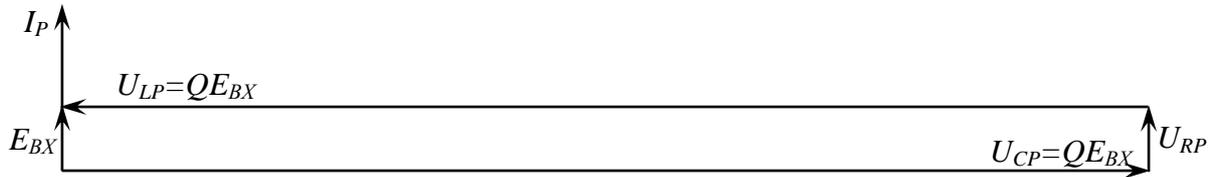


Рисунок 5.1 - Векторная диаграмма при резонансе.

АЧХ в резонансных цепях называются резонансными кривыми:

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= R \sqrt{1 + \xi^2}, \\ \frac{I}{I_P} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \\ \frac{U_L}{U_{LP}} &= \frac{\omega}{\omega_P} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \\ \frac{U_C}{U_{CP}} &= \frac{\omega_P}{\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Включение шунта ( $R_{ш}$  - сопротивление, включаемое параллельно катушке индуктивности или конденсатору) всегда снижает добротность контура, так как вносит дополнительные потери. При шунтировании емкости

$$R_{доп} \approx \frac{|X_C|^2}{R_{ш}}, \quad \text{если } R_{ш} \gg |X_C|,$$

на резонансной частоте  $|X_{CP}| = \rho$  и, следовательно,  $R_{доп} \approx \frac{\rho^2}{R_{ш}}$ .

### 5.3 Задачи для самостоятельной работы

Задачи, представленные в этом разделе, используются для самостоятельной работы в аудитории и индивидуальных домашних заданий.

Задачи расположены в порядке возрастания их сложности. Первые восемь задач наиболее простые.

5.3.1 На некоторой частоте  $f$  в последовательном контуре  $|X_C| = 220$  Ом,  $X_L = 178$  Ом,  $R = 4$  Ом. Является ли эта частота резонансной? Вычислить добротность контура.

Ответ: 49,5.

5.3.2. На резонансной частоте 1 МГц ток в последовательном контуре 200 мА, а на частотах 0,98 и 1,02 МГц ток в контуре принимает значение 142 мА. Определить добротность контура.

Ответ: 25.

5.3.3. Последовательный контур имеет следующие параметры:  $R = 50$  Ом,  $L = 316$  мкГн,  $C = 222$  пФ,  $E_{BX} = 0,1$  В. Найти  $U_{CP}$ ,  $U_{LP}$ ,  $U_{RP}$  при резонансе, полосу пропускания и ток на граничных частотах полосы пропускания.

Ответ: 2.4 В; 0.1 В;  $157 \cdot 10^3$  рад/с; 1,42 мА.

5.3.4. К последовательному контуру подключен источник напряжения с амплитудой 0,2 В.  $L = 300$  мкГн,  $C = 200$  пФ. Частота источника равна резонансной частоте контура. Определить амплитуду  $U_{Cm}$ , если полоса пропускания контура  $2\Delta f_{П} = 8$  кГц.

Ответ: 16 В.

5.3.5. Определить активное сопротивление контура, если известно, что при относительной расстройке 10% контур обеспечивает ослабление сигнала в 10 раз, а  $\rho = 500$  Ом.

Ответ: 10 Ом.

5.3.6. Последовательный колебательный контур имеет сопротивление потерь  $R = 5$  Ом,  $\rho = 100$  Ом. Какое дополнительное сопротивление следует включить в контур, чтобы увеличить его полосу пропускания на 50 %? Какое шунтирующее сопротивление даст такое же увеличение полосы пропускания?

Ответ: 2,5 Ом; 4 кОм.

5.3.7 Контур характеризуется параметрами  $L = 40$  мкГн,  $R = 20$  Ом. Определить  $2\Delta f_{П}$  и ток контура на крайних частотах полосы пропускания, если напряжение на входе контура 10 В.

Ответ: 80 кГц; 0,352 А.

5.3.8 Определить  $L$  и  $C$  последовательного контура, пропускающего полосу частот 10 кГц при  $R=5$  Ом и  $Q = 100$ .

Ответ: 79,6 мкГн; 318,5 пФ

5.3.9 Каким сопротивлением нужно шунтировать емкость контура, чтобы его добротность уменьшилась в 4 раза? Параметры контура  $L=8$  мкГн,  $C = 50$  пФ,  $Q = 80$ .

Ответ: 10,7 кОм

5.3.10 На последовательный контур действует э.д.с.  $e(t) = E_m \cos \omega t$ , действующее значение которой  $E = 2$  В; действующее значение тока  $I$  в контуре на резонансной частоте  $f_p = 200$  кГц равно 100 мА, а на частоте 202 кГц  $I = 70,7$  мА. Определить добротность и параметры  $L$ ,  $C$ ,  $R$  контура, а также мощность и сдвиг фаз между током и э.д.с. на обеих частотах.

Ответ: 50; 796 мкГн; 796 пФ; 20 Ом; 0,2 Вт;  $0^\circ$ ; 0,1 Вт;  $45^\circ$ .

5.3.11 К последовательному колебательному контуру подключен источник синусоидальных колебаний с амплитудой 1 В и частотой 3 МГц. Контур настроен на частоту источника и имеет параметры:  $C=60$  пФ,  $R=20$  Ом. Определить амплитуду напряжения на емкости при расстройке  $\Delta f = 18$  кГц.

Ответ: 39 В.

5.3.12. К настроенному последовательному колебательному контуру подключен генератор напряжения  $e(t) = 0,2 \cos 10^7 t$  с внутренним сопротивлением 14 Ом. Индуктивность контура 100 мкГн, сопротивление потерь 6 Ом. Определить добротность контура до и после подключения к генератору, а также амплитуду напряжения на индуктивности (емкости) при резонансе и на частоте  $\omega_1 = 1,01 \cdot 10^7$  рад/с.

Ответ: 167; 50; 10 В; 7,07 В.

5.3.13. На входе последовательного колебательного контура высокой добротности действует напряжение  $u_I(t) = 2 \cos \omega_0 t$  В;  $\omega_0 = 10^7$  рад/с -резонансная частота контура. Напряжение на емкостном элементе  $u_C(t) = 100 \cos(\omega_0 t - 90^\circ)$  В. Как изменится  $u_C(t)$  при увеличении емкости контура на 10%?

Ответ:  $19,58 \cos(10^7 t - 90^\circ - 78,15^\circ)$  В.

5.3.14. К последовательному колебательному контуру высокой добротности приложено напряжение  $u(t) = 0,2 \cos \omega t$  В. Частота  $\omega$  больше резонансной частоты контура на 0,5 %, добротность контура  $Q=80$ , сопротивление потерь 20 Ом. Определить напряжение на емкостном элементе  $u_C(t)$  и мощность, потребляемую контуром.

Ответ:  $12,44 \cos(\omega t - 90^\circ - 38,59^\circ)$  В; 0,611 мВт.

5.3.15. Последовательный контур высокой добротности имеет полосу пропускания  $2\Delta\omega_{П} = 20 \cdot 10^3$  рад/с, модуль входного сопротивления на границе полосы пропускания  $|Z| = 14,1$  Ом, емкость контура  $C = 800$  пФ. Определить  $R$ ,  $L$  и добротность контура  $Q$ .

Ответ: 10 Ом; 500 мкГн; 79.

5.3.16. Последовательный контур состоит из катушки индуктивностью  $L = 1,5$  мГн с активным сопротивлением  $R_L = 10$  Ом и воздушного конденсатора  $C = 1500$  пФ; параллельно конденсатору включено сопротивление  $R_{ш} = 50$  кОм. Определить полосу пропускания  $2\Delta f_{П}$ , добротность контура, а также значения тока в контуре, напряжений на индуктивности и на емкости при резонансной частоте и крайних частотах полосы пропускания. Определить сдвиг фаз между током и э.д.с. на этих частотах. Амплитуда э.д.с. равна 2В.

Ответ: 3,18 кГц; 33,3; 66,7 мА; 66,6 В;  $0^\circ$ ; 47 мА; 47 В;  $\pm 45^\circ$ .

5.3.17. Амплитуда напряжения на конденсаторе последовательного контура при резонансе, измеренная вольтметром, обладающим бесконечно большим входным сопротивлением, равна 100 В; амплитуда э.д.с., подключенной к контуру, 1 В. Сопротивление потерь контура 20 Ом. Какое напряжение покажет вольтметр с входным сопротивлением 100 кОм?

Ответ: 33,3 В.

5.3.18. Последовательный контур с добротностью 200 используется в качестве волномера. Определить относительную и абсолютную погрешность, получающуюся при измерении частоты 1 МГц, если индикатор резонанса волномера не реагирует на изменения тока, меньше чем 1%.

Ответ: 0,035%; 350 Гц.

5.3.19. Последовательный контур (рисунок 5.2) с добротностью  $Q=100$  настроен в резонанс на частоту радиостанции, работающей на длине волны  $\lambda_C = 1271$  м и наводящей в контуре э.д.с. сигнала  $E_C = 5$  мВ и ток  $I_C = 0,25$  мА. Чему равен ток, наводимый в контуре от радиостанции, работающей на длине волны  $\lambda_{П} = 1141$  м и создающей э.д.с. помехи  $E_{П} = 10$  мВ? Вычислить отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на емкости.

Ответ: 23 мкА; 12,05.

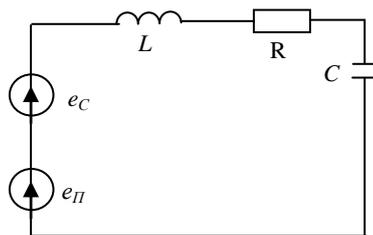


Рисунок 5.2 - Схема последовательного контура, находящегося под воздействием двух сигналов.

5.3.20. На последовательный контур (см. рисунок 5.2) действует э.д.с. сигнала  $e_C(t)=0,1 \cdot \cos 2\pi \cdot 10^6 t$  В и э.д.с. помехи  $e_{II}(t)=0,3 \cdot \cos 2\pi \cdot 9,8 \cdot 10^5 t$  В. Полоса пропускания контура 10 кГц,  $L=1$  мГн,  $\omega_p=\omega_c$ . Определить отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на емкости. Рассчитать мощность, расходуемую в контуре сигналом и помехой.

Ответ: 1,36; 79,6 мкВт; 41,31 мкВт.

5.3.21. На последовательный контур (см. рисунок 5.2) действует э.д.с. сигнала  $e_C(t)=0,05 \cos \omega_c t$  В и э.д.с. помехи  $e_{II}(t)=0,1 \cos \omega_{II} t$  В. Отношение тока сигнала к току помехи равно 8; полоса пропускания контура 10 кГц;  $C=1000$  пФ,  $L=1$  мГн,  $\omega_p=\omega_c$ . Определить частоту помехи.

**Указание:** для удобства решения обозначить  $\omega_{II} = n\omega_c$  и определять  $n$ .

Ответ:  $1,618 \cdot 10^6$  рад/с или  $0,618 \cdot 10^6$  рад/с.

5.3.22. На последовательный колебательный контур действует э.д.с. полезного сигнала с амплитудой  $E_{MC}=0,1$  В и частотой  $\omega_c=\omega_p$ . Емкость контура  $C=100$  пФ. Рассчитать индуктивность и сопротивление потерь контура, если амплитуда напряжения от сигнала на емкости должна быть 10 В, а полоса пропускания контура должна равняться 15 кГц.

Ответ: 112,7 мкГн; 10,6 Ом.

5.3.23. В контуре (см. рисунок 5.2) действует э.д.с. сигнала  $e_C(t)=2 \cos 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 t$  мВ и э.д.с. помехи  $e_{II}(t)=8 \cos 2\pi \cdot 4,2 \cdot 10^6 t$  мВ. Рассчитать параметры контура  $L$ ,  $C$ ,  $R$ , если отношение напряжения сигнала к напряжению помехи на емкости должно быть равно 5, а амплитуда тока сигнала  $I_{MC}=0,2$  мА. Контур настроен на частоту сигнала.

Ответ: 21,65 мкГн; 46,84 пФ; 10 Ом.

5.3.24. Рассчитать по данным таблицы 5.1 недостающие параметры последовательного колебательного контура, на который действуют одновременно сигнал и помеха (рисунок 5.2). Определить также параметр, указанный в таблице.

Таблица 5.1

№	$E_C$ , в	$\omega_c$ , рад/с	$E_{II}$ , в	$\omega_{II}$ , рад/с	$\frac{U_{CC}}{U_{CII}}$	$L$ , мГн	$I_C$ , мА	$I_C/I_{II}$	$2\Delta f_{П}$ , кГц	$C$ , пФ
1	2	$10^6$	8	$10^5$	15	-	0,2	-	-	-
2	1	$10^5$	10	$2 \cdot 10^4$	18	-	0,1	-	-	-
3	0,1	$10^6$	0,3	$2 \cdot 10^6$	Определить	1	-	-	10	-
4	1	$5 \cdot 10^6$	0,5	$10^6$	Определить	2	-	-	15	-
5	0,05	-	0,2	Определить	-	1	-	10	10	1000

**Примечание:**  $U_{CII}$  - напряжение на емкости, созданное помехой,  
 $U_{CC}$  - напряжение на емкости, созданное сигналом,  
 $I_C$  - ток в контуре на частоте сигнала,  
 $I_{II}$  - ток в контуре на частоте помехи.

5.3.25. Мощность, отдаваемая источником э.д.с., питающим настроенный последовательный контур, равна 50 мВт. Амплитуда напряжения на емкости 60 В.

Индуктивность контура 180 мкГн, емкость 500 пФ. Определить сопротивление потерь контура, полосу пропускания и амплитуду э.д.с.

Ответ: 10 Ом; 8,85 кГц; 1 В.

## 5.4 Методические указания и примеры решения

Указания к решению задач 5.3.13 и 5.3.14

В задаче 5.3.13 при увеличении емкости на 10% «новая»  $\omega_{PH}$  уменьшится

$$\omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot 1,1C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1,1}}$$

и частота внешнего воздействия  $\omega$  уже не будет равна резонансной частоте.

В общем случае для вычисления обобщенной расстройки лучше использовать точное выражение

$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_P} - \frac{\omega_P}{\omega} \right).$$

В частных случаях, в области частот, близким к резонансным (в задаче 5.3.14  $\omega = 1,005 \omega_P$ , т.е.  $\Delta\omega = \omega - \omega_P = 0,005 \omega_P$ ), можно пользоваться приближенной формулой для  $\xi$

$$\xi \approx Q \frac{2\Delta\omega}{\omega_P}.$$

Соотношение между  $U_C$  и  $U_{CP}$  зависит от  $\xi$  и определяется выражением (5.3). Обобщенная расстройка определяет все фазовые сдвиги в контуре:  $\varphi_Z$ ,  $\varphi_i$  и  $\varphi_{Uc}$ . Зная, что  $\varphi_Z = \arctg \xi$ , определите  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{Uc}$ , на основании закона Ома в комплексной форме.

Указания к решению задачи 5.3.18

Индикатор резонанса не реагирует на изменения тока меньше, чем 1%, что на нормированной резонансной кривой (рисунок 5.3) соответствует уровню 0,99.

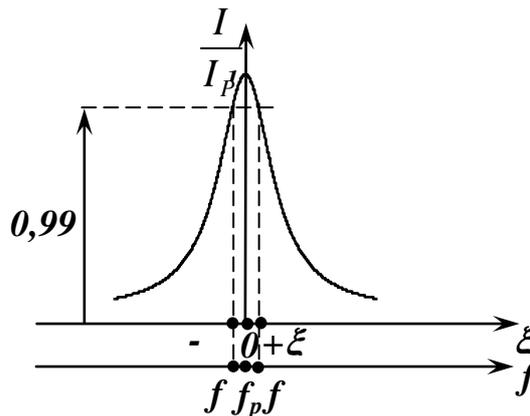


Рисунок 5.3 - Нормированная резонансная кривая.

Этому уровню соответствует  $\pm \xi_B$  или частоты  $f_1$  и  $f_2$ . Искомая относительная погрешность  $\frac{\Delta f}{f_P}$ , где  $\Delta f = f_2 - f_P = f_P - f_1$ , определяется зоной нечувствительности индикатора при изменении частоты относительно резонансной в любую сторону и не зависит от абсолютного значения  $f_P$ .

Указания к решению задач 5.3.19-5.3.21, 5.3.23 и 5.3.24 и пример решения

В задачах, когда на контур действуют одновременно э.д.с. сигнала и э.д.с. помехи (см. рисунок 5.2), следует полагать, что контур настроен на частоту сигнала, т.е.  $\omega_p = \omega_c$ . В таких задачах обязательно следует представить себе “расположение”  $\omega_c$  и  $\omega_{\Pi}$  относительно резонансной кривой (см. рисунок 5.3) и исходить из того, что на частотах  $\omega_{\Pi}$  и  $\omega_{\Pi}$  в соответствии с законом Ома величина тока в контуре определяется

$$I_c = \frac{E_c}{R}, \quad I_{\Pi} = \frac{E_{\Pi}}{|Z|} = \frac{E_{\Pi}}{R\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (5.4)$$

а величина напряжения на конденсаторе на основе  $U_c = I \cdot |Z_c|$  определяется как

$$U_{cc} = I_c \cdot \frac{1}{\omega_c \cdot C}, \quad U_{c\Pi} = I_{\Pi} \cdot \frac{1}{\omega_{\Pi} \cdot C},$$

тогда

$$\frac{U_{cc}}{U_{c\Pi}} = \frac{E_c}{E_{\Pi}} \cdot \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_c} \cdot \sqrt{1+\xi^2}, \quad (5.5)$$

где

$$\xi = Q \left( \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega_{\Pi}} \right).$$

#### Типовая задача.

На последовательный колебательный контур действуют одновременно сигнал  $e_c(t) = 1 \cos 10^6 t$  мВ и помеха  $e_n(t) = 10 \cos 5 \cdot 10^5 t$  мВ (рисунок 5.2). Рассчитать параметры контура, если известно, что составляющая напряжения на конденсаторе, созданная сигналом, превышает составляющую, созданную помехой в 10 раз, а составляющая тока с частотой сигнала имеет амплитуду 0,1 мА. Определить также амплитуды обеих составляющих напряжения на емкости.

Представим резонансную кривую последовательного контура и осмыслим условие задачи с помощью рисунка 5.4.

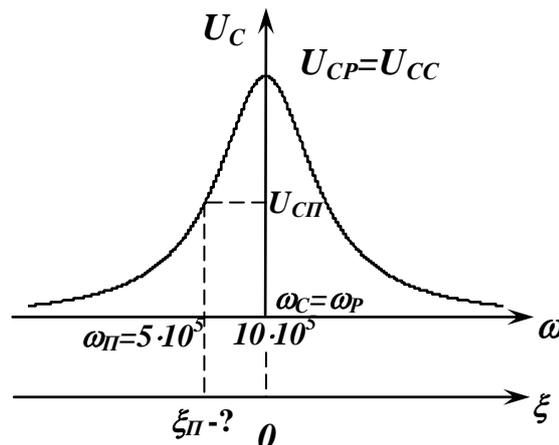


Рисунок 5.4

Из рисунка ясно, что  $\xi_{\Pi} < 0$  и  $|\xi_{\Pi}| \gg 1$ , т.к.  $\omega_{\Pi} = 0,5 \omega_p$ .

Если  $E_c = E_{\Pi}$ , то в соответствии с (5.3)

$$\frac{U_c(\omega_{\Pi})}{U_c(\omega_p)} = \frac{\omega_p}{\omega_{\Pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{\Pi}^2}}$$

и значения  $U_{CC}$  и  $U_{CП}$  соответствуют рисунку 5.4.

Однако, в нашем случае  $E_{П} = 10 E_C$ , тогда в силу линейности цепи

$$\left. \frac{U_{CП}}{U_{CC}} \right|_{E_{П}=10E_C} = 10 \cdot \frac{\omega_C}{\omega_{П}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{П}^2}} = \frac{1}{10}.$$

В общем случае, если  $E_{П} = n \cdot E_C$ , то

$$\frac{U_{CП}}{U_{CC}} = n \cdot \frac{\omega_C}{\omega_{П}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{П}^2}}.$$

### **Решение.**

1) в соответствии с вышесказанным и выражением (5.5)

$$\frac{U_{CП}}{U_{CC}} = \frac{\omega_C}{\omega_{П}} \cdot \frac{E_{П}}{E_C} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{П}^2}},$$

$$\frac{1}{10} = \frac{10 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^5} \cdot \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi_{П}^2}}, \text{ откуда } \xi_{П} = -200;$$

2) т.к.  $|\xi_{П}| \gg 1$ , нельзя пользоваться приближенным выражением  $\xi_{П}$ :

$$\xi_{П} = Q \left( \frac{\omega_{П}}{\omega_C} - \frac{\omega_C}{\omega_{П}} \right) \text{ или } -200 = Q \left( \frac{5 \cdot 10^5}{10 \cdot 10^5} - \frac{10 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^5} \right)$$

$$\text{откуда } Q = \frac{200}{1,5} = 133,3;$$

3) сопротивление потерь контура  $R = \frac{Emc}{Imc} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ Ом};$

$$4) \quad Q = \frac{\omega_p \cdot L}{R}, \text{ тогда } L = \frac{QR}{\omega_p} = \frac{133,3 \cdot 10}{10^6} = 1,33 \text{ мГн};$$

$$5) \quad Q = \frac{1}{\omega_p CR}, \text{ тогда } C = \frac{1}{Q \omega_p \cdot R} = \frac{1}{133,3 \cdot 10^6 \cdot 10} = 750 \text{ пФ};$$

$$6) \quad U_{CC} = E_C \cdot Q = 1 \cdot 133,3 = 133,3 \text{ мВ};$$

$$7) \quad U_{CП} = \frac{U_{CC}}{10} = \frac{133,3}{10} = 13,33 \text{ мВ}.$$

### **Пример решения задачи определения эффекта шунтирования**

Последовательный контур настроен в резонанс, его добротность  $Q = 200$ ,  $|X_{CP}| = 100 \text{ Ом}$ ,  $E_{BX} = 1,2 \text{ В}$ .

Определить величину напряжения на емкости. Какое напряжение показал бы вольтметр с чисто активным входным сопротивлением  $R_{BX} = 20 \text{ кОм}$ , если бы его подключить параллельно емкости?

**Решение.** Представим схему последовательного контура (рисунок 5.5) с подключенным вольтметром, входное сопротивление которого 20 кОм.

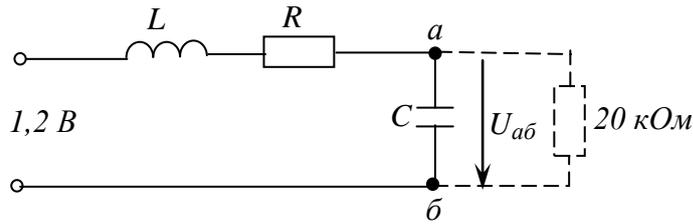


Рисунок 5.5

Напряжение на емкости обозначим  $U_{ab}$ . Входное сопротивление вольтметра выступает как шунтирующее сопротивление. Это приводит к снижению добротности и, в конечном итоге, к уменьшению напряжения на емкости.

Шунтирующее сопротивление  $R_{ВХ}$  необходимо пересчитать в дополнительное сопротивление потерь  $R_{ДОБ}$ , (рисунок 5.6)

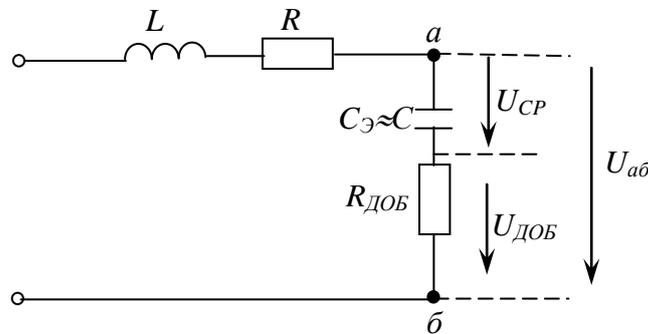


Рисунок 5.6

Если  $R_{ВХ} \gg |X_C|$ , то  $C_{Э} \approx C$ ,  $R_{ДОБ} \approx \frac{|X_C|^2}{R_i}$ ;

для  $\omega = \omega_p$   $|X_{CP}| = \rho$ ,

где  $\rho$  - характеристическое сопротивление (по определению - это сопротивление индуктивности или емкости на резонансной частоте).

$$R_{ДОБ} = \frac{X_{CP}^2}{R_{ВХ}} = \frac{100^2}{20 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ Ом.}$$

До включения вольтметра сопротивление потерь было

$$R = \frac{\rho}{Q} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ Ом.}$$

Общее сопротивление потерь  $R_{\Sigma} = R + R_{ДОБ}$ . или  $R_{\Sigma} = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ Ом.}$

Эквивалентная добротность контура с учетом  $R_{ДОБ}$  может быть рассчитана по формуле:

$$Q_{\Sigma} = \frac{\rho}{R + R_{ДОБ}} = \frac{100}{1} = 100 .$$

С учетом этого, напряжение на емкости  $U_{CP}$  окажется равным:

$$U_{CP} = Q_{\Sigma} \cdot E = 100 \cdot 1,2 = 120 \text{ В.}$$

Так как в схеме резонанс и  $\dot{Z}_L + \dot{Z}_C = 0$ , то

$$U_{\text{ДОБ}} = \frac{E}{R + R_{\text{ДОБ}}} \cdot R_{\text{ДОБ}} = \frac{1,2 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 0,6 \text{ В,}$$

$$U_{\text{аб}} = \sqrt{U_{CP}^2 + U_{\text{ДОБ}}^2} = \sqrt{100^2 + 0,06^2} = 100 \text{ В.}$$

**Вывод:** на результаты измерений оказывает большое влияние входное сопротивление измерительного прибора.

## 5.5 Знания и умения

В результате работы над темой студент должен знать основы теории и уметь решать задачи. Конкретно следующее.

### **Знать:**

- 1) понятие резонанса и условия его возникновения;
- 2) методику определения резонансных частот и методику определения резонансного сопротивления для любой линейной электрической цепи, содержащей  $L, C, R$ ;
- 3) физический смысл и выражения для  $\omega_p, \rho, Q, R_p$ ;
- 4) смысл и выражения для абсолютной, относительной и обобщенной расстроек;
- 5) понятие полосы пропускания и методику ее определения (расчета);
- 6) основные соотношения между током и напряжениями в последовательном колебательном контуре на резонансной частоте;
- 7) почему резонанс в последовательном колебательном контуре называется резонансом напряжений;
- 8) выражения и графики АЧХ или резонансных кривых для тока, напряжения на любом из элементов контура и входного сопротивления последовательного колебательного контура;
- 9) выражение и график ФЧХ для  $Z_{BX}$ ;
- 10) влияние шунтирующего сопротивления на основные характеристики колебательного контура: добротность, полосу пропускания, входное сопротивление; методику пересчета шунтирующего сопротивления в дополнительное сопротивление потерь и выражение для  $R_{\text{ДОБ}}$ , если  $R_{\text{Ш}} \gg \rho$ ;
- 11) при каких условиях последовательный контур, состоящий из  $L, C, R$ , можно назвать колебательным.

### **Уметь:**

- 1) рассчитывать различными вариантами добротность контура;
- 2) рассчитывать фазовый сдвиг между любыми двумя электрическими величинами ( $\dot{E}_{BX}$  и  $\dot{I}$ ,  $\dot{E}_{BX}$  и  $\dot{U}_C$  и др.) на заданной частоте, а также ФЧХ контура;
- 3) рассчитывать частоты, а также все виды расстроек, соответствующие заданному значению АЧХ и ФЧХ контура;
- 4) решать задачу анализа прохождения двухчастотного сигнала через колебательный контур, а также решать обратную задачу (синтеза), т.е. определять требуемые параметры контура, которые обеспечат заданное ослабление помехи по сравнению с сигналом;

5) рассчитывать мощности, выделяемые в контуре на резонансной частоте и при расстройке.

## 5.6 Формы контроля

*Тестовый опрос* с целью выяснения степени подготовки по теоретическому материалу и *самостоятельная работа* с целью выяснения приобретенных навыков в решении задач по данной теме. Для самостоятельной работы используются задачи п. 5.3.

## 5.7 Рекомендуемая литература

### *Основная*

1. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей.-Л.: Энергия, 1972.-с. 137-152.
2. Гуревич И.В. Основы расчетов радиотехнических цепей.-М.: Связь, 1975.- с.60-71.
3. Попов В.П. Основы теории цепей.-М.: Высш.шк.,1985.-с.158-175.
4. Попов В.П. Основы теории цепей.- М.: Высш.шк.,2005.-с.177-198.

### *Дополнительная*

1. Гольдин О.Е. Задачник по теории электрических цепей.-М.: Высш.школа, 1969.-с. 45-48.
2. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах.-М.: Высш.школа,1973.-с.137-139, 144-153.
3. Жуков В.П., Карташев В.Г., Николаев А.М. Сборник задач по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”.-М.: Сов.радио,1972.-с.31-33.
4. Сборник задач по теории электрических цепей./Под ред. Матханова П.Н. и Даниловой Л.В.-М.: Высш.школа,1980.-с.156.

## 6. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### 6.1 Цель занятия

Усвоить основные соотношения и характеристики простых и сложных параллельных контуров; научиться сравнительному анализу последовательного и параллельного контуров.

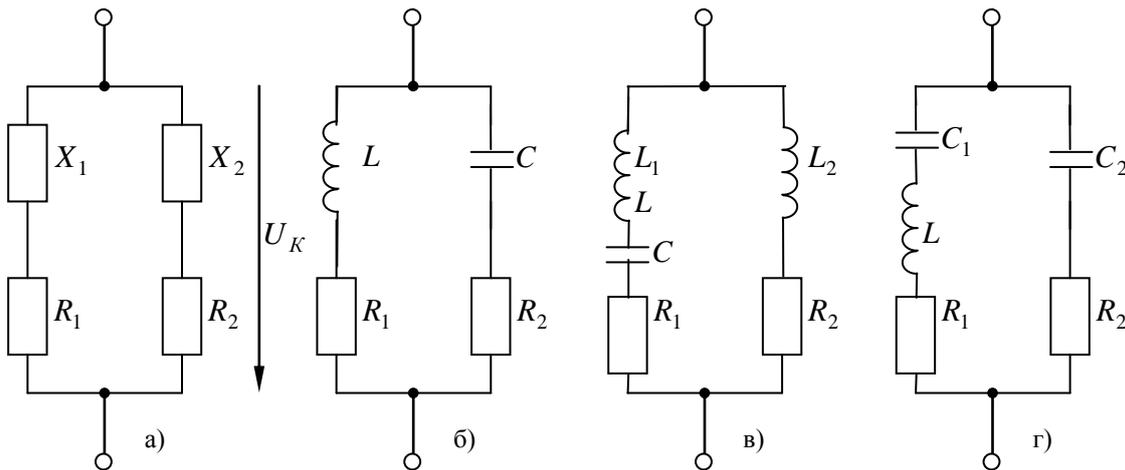
### 6.2 Краткие теоретические сведения

Для параллельного контура любого вида (рисунок 6.1) входное сопротивление на всех частотах, для которых выполняется условие

$$|X_1| \gg R_1 \text{ и } |X_2| \gg R_2 \quad (6.1)$$

определяется как

$$\dot{Z}_{BX} \approx - \frac{X_1 \cdot X_2}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = R_{BX} + jX_{BX} \quad , \quad (6.2)$$



- а) обобщенная схема параллельного контура
- б) простой контур I вида
- в) сложный параллельный контур с разделенными индуктивностями или контур II вида
- г) сложный параллельный контур с разделенными емкостями или контур III вида.

Рисунок 6.1- Схемы параллельных контуров.

В контурах с добротностью  $Q \geq 5$ , для которых  $|X_{1p}| \gg R_1$  и  $|X_{2p}| \gg R_2$ , условие (5.1) имеет вид

$$X_{1p} + X_{2p} = 0,$$

что определяет частоту резонанса токов как

$$\omega_{PT} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

а резонансное сопротивление, в соответствии с формулами (5.2) и (6.2), как

$$R_p \approx \frac{X^2_{1p}}{R} = \frac{X^2_{2p}}{R},$$

где  $L, C, R$  - полные параметры контуров, определяемые при “последовательном” обходе любого из контуров на рисунке 6.1:

$$R = R_1 + R_2, \quad L = L_1 + L_2, \quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Добротность контура любого вида

$$Q = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} = \frac{\omega_{PT} L}{R}.$$

Для простого параллельного контура

$$R_{pI} = \frac{(\omega_{PT} L)^2}{R} = \frac{1}{(\omega_{PT} C)^2 R} = \frac{\rho^2}{R} = Q\rho = Q^2 R = \frac{L}{CR}.$$

Для сложных параллельных контуров

$$R_{pII} = \frac{(\omega_{PT} L_2)^2}{R} = \frac{(\omega_{PT} L)^2}{R} \cdot p_L^2, \quad \text{где } p_L = \frac{L_2}{L}.$$

$$R_{pIII} = \frac{1}{(\omega_{PT} C_2)^2 R} = \frac{1}{(\omega_{PT} C)^2 R} \cdot p_C^2, \quad \text{где } p_C = \frac{C}{C_2}.$$

Если полные параметры простого и сложного контуров одинаковы, то

$$R_{pсл} = p^2 \cdot R_{pI},$$

где  $p < 1$  и соответственно  $p = p_L$  для II вида и  $p = p_C$  для III вида.

В простом контуре (см. рисунок 6.1б) на частоте резонанса  $\omega_{PT}$

$$I_K = Q \cdot I \tag{6.3}$$

где  $I$  – ток в неразветвленной ветви, т.е. входной ток контура,

$$I_K \approx |I_C| \approx |I_L| - \text{ток внутри контура.}$$

Соотношение (6.3) и обусловило название резонанса в параллельном контуре как резонанса токов.

На частотах, отличных от резонансных, любой из контуров представляет собой комплексное сопротивление

$$\dot{Z}_{BX} = R_{BX} + jX_{BX}.$$

Частотные характеристики простого параллельного контура при соблюдении условия (6.1):

$$\left. \begin{aligned} |\dot{Z}_{BX}| &= \frac{R_p}{\sqrt{1+\xi^2}}, & \varphi_Z &= -\arctg \xi \\ R_{BX} &= \frac{R_p}{1+\xi^2}, & X_{BX} &= -\xi \frac{R_p}{1+\xi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Частотные характеристики сложных параллельных контуров в области  $\omega_{PT}$  определяются также выражениями (6.4), при условии, что  $R_p$  -резонансное сопротивление сложного контура. В целом частотные характеристики простого и сложных контуров существенно отличаются, т.к. для последних имеют место и резонанс токов и резонанс напряжений.

Резонанс напряжений имеет место в ветвях, содержащих последовательно включенные  $L$  и  $C$ :

$$\omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} \quad \text{и} \quad \omega_{PH} = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

для контура II и III вида соответственно (см. рисунок 6.1).

Мощность, выделяемая в контуре любого вида, на частоте  $\omega_{PT}$

$$P_K = I^2 \cdot R_p = \frac{U_K^2}{R_p} = I_K^2 \cdot R$$

или

$$P_K = \frac{I_m^2 \cdot R_p}{2} = \frac{U_{Km}^2}{2 \cdot R_p} = \frac{I_{Km}^2 \cdot R}{2}.$$

Если контур питается от генератора напряжения (тока) с внутренним сопротивлением  $R_i$ , то в контуре любого вида выделяется максимально возможная для данного источника сигнала мощность при условии

$$R_p = R_i.$$

Шунтирующее сопротивление  $R_{ш}$  (а таковым является также и внутреннее сопротивление генератора  $R_i$ ) всегда увеличивает сопротивление потерь контура, снижает его добротность, увеличивает полосу пропускания. Добротность шунтированного контура.

$$Q_{ш} = \frac{\rho}{R + R_{дон}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_{дон}}{R}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_p}{R_{ш}}}$$

где  $R_{дон} \approx \frac{\rho^2}{R_{ш}}$ , если  $R_{ш} \gg \rho$ .

### 6.3 Задачи для самостоятельной работы

Задачи этого раздела используются для самостоятельной работы в аудитории и индивидуальных домашних заданий. Наиболее простыми являются задачи 6.3.1-6.3.13.

6.3.1 Найти сопротивление простого параллельного контура при резонансе по следующим данным:

№	Q	R, Ом	L, мкГн	C, пФ	$\rho$ , Ом	$f_p$ , кГц	$2\Delta f_p$ , кГц
1	20	5	-	-	-	-	-
2	-	10	-	-	300	-	-
3	-	10	-	120	-	300	-
4	-	5	$2 \cdot 10^3$	-	-	250	-
5	-	10	-	240	-	350	-
6	-	7	300	200	-	-	-
7	25	9	-	-	-	-	-
8	-	15	-	-	400	-	-
9	-	12	-	-	-	270	5

6.3.2 Определить, как следует распределить индуктивности или емкости сложного параллельного контура между его ветвями, чтобы его резонансное сопротивление было равно заданному. Расчеты произвести по данным таблицы, где L, C, R - полные параметры контуров

№	L, мкГн	C, пФ	R, Ом	$R_p$ , кОм
1	200	600	15	15
2	400	800	10	23
3	140	250	10	32
4	150	700	5	10

6.3.3. По данным таблицы вычислить активную составляющую, реактивную составляющую и модуль сопротивления простого параллельного контура на частоте  $f$ , не равной  $f_p$ ;  $\Delta f$  - абсолютная расстройка контура.

№	$f$ , МГц	L, мкГн	C, пФ	R, Ом	$\Delta f$ , кГц	Q	$f_p$ , МГц
1	-	600	200	20	-5	-	-
2	0,305	-	400	-	-	30	0,3
3	0,964	280	-	-	-	60	0,96
4	0,255	-	1000	30	-	-	0,25
5	-	-	200	-	-6	40	0,4

6.3.4. Простой параллельный контур имеет добротность  $Q=80$ , сопротивление потерь 20 Ом, полосу пропускания  $2 \cdot 10^4$  рад/с. Как изменится полоса пропускания контура при подключении к нему шунтирующего сопротивления 50 кОм?

Ответ:  $7 \cdot 10^4$  рад/с.

6.3.5. Контур (см. рисунок 6.1г) имеет следующие параметры:  $C_1=C_2=300$  пФ,  $R_1=5$  Ом,  $R_2=0$ ,  $L=300$  мкГн. К нему подключено шунтирующее сопротивление  $R_{ш}=5$  кОм. Найти частоты последовательного и параллельного резонансов; вычислить резонансное сопротивление и полосу пропускания с учетом  $R_{ш}$ .

Ответ:  $0,333 \cdot 10^7$  рад/с;  $4,72 \cdot 10^6$  рад/с; 4,76 кОм;  $0,35 \cdot 10^6$  рад/с.

6.3.6. Определить входное сопротивление двухполюсников (рисунок 6.2), если сопротивления отдельных участков цепи на схеме указаны в омах.

Ответ: 16,01 кОм; 50,005 кОм; 8,02 кОм; 40,1 кОм.

6.3.7. Для параллельных контуров на схемах рисунка 6.2 сопротивления участков цепи указаны в Омах. Вычислить добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$  и коэффициент включения индуктивности  $P_L$  или емкости  $P_C$ .

Ответ: а) 60; 600; 0,66(6); в) 45; 900; 0,44(4).

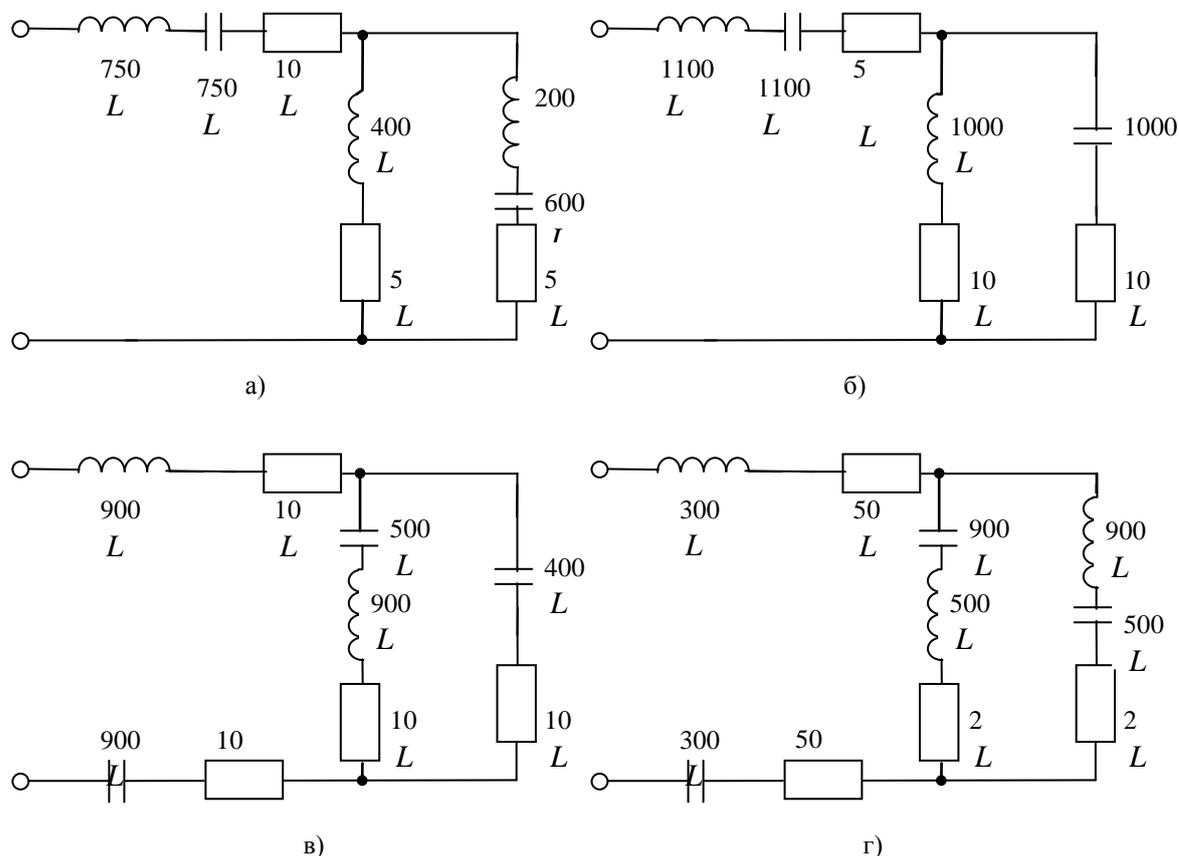


Рисунок 6.2 - Схемы двухполюсников.

6.3.8. В простом параллельном контуре высокой добротности  $L=144$  мкГн,  $C=400$  пФ. Мощность, потребляемая контуром при резонансе, равна 50 мВт, амплитуда напряжения на емкостном элементе  $U_{cm}=60$  В. Определить сопротивление потерь, добротность контура и полосу пропускания.

Ответ: 10 Ом; 60;  $6,95 \cdot 10^4$  рад/с.

6.3.9. Простой параллельный контур подключен к генератору напряжения с внутренним сопротивлением 50 кОм. Параметры контура:  $C=500$  пФ,  $Q=100$ ,  $\omega_r=106$  рад/с. Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания.

Ответ: 20;  $5 \cdot 10^4$  рад/с.

6.3.10. Генератор с частотой 320 кГц, амплитудой 100 В и внутренним сопротивлением 1 кОм подключен к простому параллельному контуру, настроенному в резонанс с частотой генератора. Индуктивность контура  $L=100$  мкГн, добротность  $Q=100$ . Определить мощность, выделяющуюся в контуре.

Ответ: 226 мВт.

6.3.11. Контур (см. рисунок 6.1г) имеет следующие параметры:  $L=2,7$  мкГн,  $C_1=80$  пФ,  $C_2=50$  пФ,  $R=9$  Ом. Амплитуда тока в неразветвленной части схемы 10 мА. Определить резонансную частоту параллельного контура, его резонансное сопротивление и найти мощность, выделяемую на контуре при резонансе.

Ответ: 17,5 МГц; 3,65 кОм; 0,182 Вт.

6.3.12. На частоте 4,5 МГц параллельный контур должен иметь чисто активное входное сопротивление, равное 10 кОм. Как следует включить параллельный контур, обладающий требуемой резонансной частотой, емкостью 150 пФ и добротностью 100, чтобы удовлетворить поставленному условию?

Ответ:  $p = 0,652$ .

6.3.13. Индуктивность катушки параллельного контура равна 1 мГн, сопротивление потерь контура определяется потерями в катушке и равно 10 Ом. Рассчитать контур так, чтобы на частоте 106 рад/с его сопротивление было активным и равным 25 кОм.

Ответ: 1000 пФ;  $p=0,5$ .

6.3.14. Контур (см. рисунок 6.1г) имеет параметры:  $R=5$  Ом,  $L=150$  мкГн, полная емкость  $C=500$  пФ,  $R_p=20$  кОм. Определить емкости  $C_1$  и  $C_2$ . Как надо включить элементы этой схемы, чтобы входное сопротивление на резонансной частоте было максимально возможным? Вычислить его значение.

Ответ: 1183 пФ; 866 пФ; 60 кОм.

6.3.15. Простой параллельный колебательный контур, имеющий  $Q=100$ , подключили к генератору с амплитудой  $E_m = 4$  В и внутренним сопротивлением  $R_i = 20$  кОм. При какой величине сопротивления потерь  $R$  в контуре выделяется максимальная мощность  $P_{к\max}$ ? Чему она равна? Какова относительная полоса пропускания контура при подключении его к генератору?

Ответ: 2 Ом; 0,1 мВт; 0,02.

6.3.16. Контур II вида (см. рисунок 6.1в) имеет параметры  $R_1=R_2=5$  Ом,  $L_2=500$  мкГн,  $C=1000$  пФ, он подключен к генератору напряжения с внутренним сопротивлением 10 кОм и  $E=10$  В. Какая мощность выделяется на контуре в момент резонанса токов, если известно, что резонанс напряжений наступает на частоте  $\omega_{PH}=106$  рад/с?

Ответ: 2,34 мВт.

6.3.17. Простой параллельный контур с параметрами  $L=200$  мкГн,  $C=400$  пФ,  $R=10$  Ом подключен к генератору напряжения с внутренним сопротивлением  $R_i=30$  кОм и э.д.с.  $e(t)=200\cos\omega t$  В. Найти напряжение на контуре  $U_K$ , ток  $I$  вне контура, контурный ток  $I_K$ , а также мощность, выделяемую в контуре при резонансе и на частоте  $f = 1,01$  фг.

Ответ: 125 В; 2,5 мА; 176,8 мА; 156,25 мВт; 123 мВт.

6.3.18. Контур с разделенными индуктивностями (см. рисунок 6.1в) настроен на длину волны  $\lambda=60$  м и имеет на этой частоте резонансное сопротивление 16 кОм, емкость контура 100 пФ, сопротивление потерь 4 Ома. Определить  $L_1$  и  $L_2$ .

Ответ: 2 мкГн; 8 мкГн.

6.3.19. Контур с двумя емкостями настроен на длину волны  $\lambda=100$  м, имеет  $R_{pIII} = 40$  кОм; его добротность  $Q=100$ ,  $L=30$  мкГн. Определить  $C_1$ ,  $C_2$  и сопротивление потерь.

Ответ: 585 пФ; 112 пФ; 5,65 Ом.

6.3.20. Амплитуда напряжения на параллельном контуре (см.рисунок 6.1б) 2 кВ, действующее значение тока в контуре 5 А, мощность колебаний 450 Вт. Определить параметры контура, если резонансная частота его 6 МГц.

Ответ: 18 Ом; 93,5 пФ; 7,5 мкГн.

6.3.21. Известно, что на резонансной частоте 0,5 МГц в простом параллельном контуре выделяется мощность 500 Вт, при этом амплитуда напряжения на контуре 3 кВ, а действующее значение тока в контуре 5 А. Определить L, C, R.

Ответ: 135 мкГн; 750 пФ; 20 Ом.

6.3.22. Рассчитать простой параллельный контур так, чтобы на частоте 107 рад/с его сопротивление было активным и равным 14 кОм, а на частоте  $1,07 \cdot 10^7$  рад/с модуль полного сопротивления контура был равен 1 кОм.

Ответ: 14 мкГн ; 715 пФ; 1,4 Ом.

6.3.23. Простой параллельный контур настроен на длину волны 400 м. Индуктивность контура 200 мкГн, сопротивление потерь 10 Ом. На какой частоте реактивная составляющая сопротивления контура имеет максимальное значение и емкостной характер?

Ответ: 754 кГц.

6.3.24. Через неразветвленную цепь простого параллельного контура протекает ток  $i(t) = 100 + 2\cos\omega t + 50\cos 2\omega t + 10\cos 3\omega t$  мА. Параметры контура: L=50 мкГн, C=200 пФ, R=5 Ом. Определить мгновенное напряжение на контуре.

Ответ:  $0,5 + 100\cos\omega t + 16,7\cos(2\omega t - 89,60) + 1,88\cos(3\omega t - 89,80)$  В.

6.3.25. Сложный параллельный контур (см.рисунок 6.1в) подключен к генератору с внутренним сопротивлением 100 кОм. Параметры контура: C=500 пФ, L<sub>2</sub>=500 мкГн, Q=100,  $\omega_{PT} = 106$  рад/с. Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания.

Ответ: 88,9; 11 250 рад/с.

6.3.26. Простой параллельный контур подключен к генератору с внутренним сопротивлением  $R_i = 15$  кОм и амплитудой  $E_m = 5$  В. Схема должна быть настроена на частоту 300 кГц, иметь полосу пропускания 6 кГц (с учетом влияния генератора); кроме того, в контуре должна выделяться максимальная мощность. Найти параметры контура L, C, R. Вычислить мощность в контуре на резонансной частоте.

Ответ: 80 мкГн; 3520 пФ; 1,5 Ом; 0,208 мВт.

6.3.27. Изобразить схему контура, рассчитать его параметры и резонансное сопротивление, если известно, что частота параллельного резонанса 600 кГц, а частота последовательного резонанса 400 кГц. Добротность контура на частоте параллельного резонанса равна 100, полное сопротивление потерь 5 Ом.

Ответ: 132,7 мкГн; 530,7 пФ; 15,42 кОм.

6.3.28. Параллельный контур должен быть настроен на частоту 600 кГц, иметь резонансное сопротивление 10 кОм и полосу пропускания 2 кГц. Кроме того, контур должен обеспечить подавление второй гармоники (1,2 МГц). Изобразить схему контура и определить его параметры.

Ответ: 15,73 мкГн; 4480 пФ; 0,2 Ом.

6.3.29. Изобразить схему и рассчитать параметры параллельного контура так, чтобы на частотах 1,6 и 4 МГц его сопротивление было активным и соответственно равным 5 Ом и 10 кОм. Сопротивление потерь контура равно 10 Ом. Каков характер реактивной составляющей сопротивления контура на частоте 1,59 и 4,04 МГц?

Ответ: 15 мкГн; 105,8 пФ.

6.3.30. Изобразить схему, рассчитать параметры и резонансное сопротивление параллельного контура, если известно, что частота параллельного резонанса должна быть равной 700 кГц, частота последовательного резонанса 500 кГц, добротность 150, сопротивление потерь 4 Ом.

Ответ: 136 мкГн; 379 пФ; 21,6 кОм.

6.3.31. Сложный параллельный контур настроен на частоту 25 МГц. При этом параметры контура выбраны так, что правая ветвь контура оказалась настроенной на частоту 50 МГц. Изобразить схему и определить параметры контура, если сопротивление потерь 10 Ом, а резонансное сопротивление  $R_{пл} = 18$  кОм.

Указание: выразите полосу пропускания через параметры R и L.

Ответ: 3,6 мкГн; 11,1 пФ.

6.3.32. Изобразить схему и рассчитать параметры сложного параллельного контура, который на частоте 107 рад/с должен обладать активным сопротивлением, равным 10 кОм, а на частоте  $2 \cdot 107$  рад/с - активным сопротивлением 10 Ом. Полное сопротивление потерь контура 20 Ом.

Ответ: 59,6 мкГн; 168 пФ; 10 Ом.

6.3.33. На входе сложного параллельного контура действует источник тока  $i(t) = 2 \cdot 10^{-3} \cos 106t + 2 \cdot 10^{-3} \cos 2 \cdot 106t$  А. Индуктивность контура  $L = 500$  мкГн. Определить структуру и параметры контура таким образом, чтобы напряжение на нем было  $u(t) = 15 \cdot 10^{-3} \cos 106t + 75 \cos 2 \cdot 106t$  В.

Ответ: 500 пФ; 15 Ом (полное).

6.3.34. Параллельный контур должен обеспечить подавление первой гармоники колебания, имеющей частоту 25 МГц, а на второй гармонике иметь резонансное сопротивление 10 кОм и полосу пропускания 500 кГц. Изобразить схему контура и определить его параметры.

Ответ: 0,567 мкГн; 18 пФ; 1,8 Ом.

6.3.35. Параметры простого параллельного контура:  $L = 17$  мкГн,  $C = 248$  пФ,  $R = 16$  Ом. Вычислите: 1) какой должна быть амплитуда напряжения на контуре, чтобы мощность, выделяемая в контуре при резонансе, была 150 Вт; 2) при каком  $R_i$  и  $E_m$  генератора напряжения эта мощность является максимально возможной; 3) мощность, выделяемую в контуре, подключенном к генератору с найденными параметрами  $E_m$  и  $R_i$  на граничных частотах полосы пропускания не шунтированного контура; во сколько раз она меньше максимально возможной мощности?

Ответ: 1133 В; 4,28 кОм; 2266 В; 120 Вт; 1,25.

6.3.36. Параллельный контур состоит из катушки  $L = 400$  мкГн,  $R_L = 18$  Ом и конденсатора  $C = 400$  пФ,  $R_C = 2$  Ом. Контур подключен к генератору синусоидальных колебаний с амплитудой  $E_m = 200$  В и внутренним сопротивлением 10 кОм. Как нужно подключить контур к генератору (как простой? как сложный с коэффициентом включения

p?), чтобы в нем выделялась максимальная мощность. Определить эту мощность. Определить полосу пропускания контура, подключенного к генератору.

Ответ:  $p = 0,445$ ;  $0,5$  Вт;  $105$  рад/с.

Примечание: в задачах 6.3.27-6.3.34 в ответах указаны полные значения  $L$  и  $C$ , чтобы ответ не являлся подсказкой о типе сложного контура, однако студент должен определить  $L_1$  и  $L_2$  для II вида и  $C_1, C_2$  для III вида контура.

## 6.4 Методические указания и примеры решения

### 6.4.1 Определение мощности на резонансной частоте и при расстройке

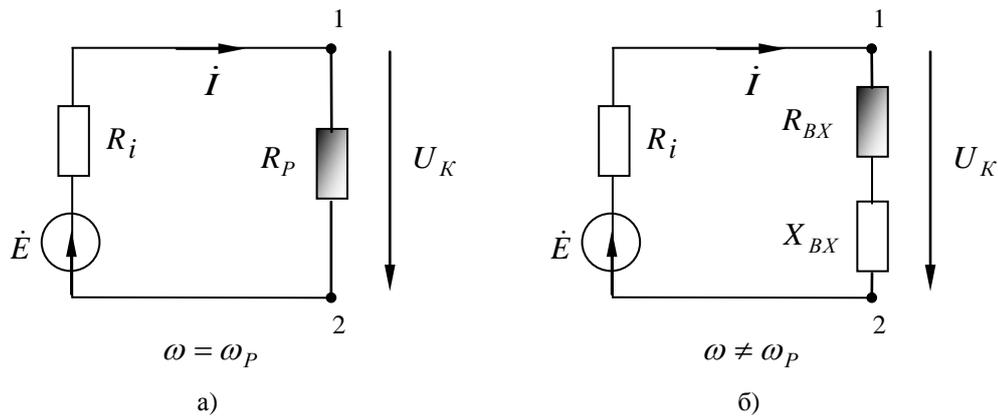


Рисунок 6.3 - Эквивалентные схемы колебательного контура, подключенного к генератору.

Контур подключается к генератору в точках 1 и 2 (рисунок 6.3). Так как входное сопротивление контура

$$\dot{Z}_{BX} = R_p \quad \text{при } \omega = \omega_p,$$

$$\dot{Z}_{BX} = R_{BX} + jX_{BX} \quad \text{при } \omega \neq \omega_p,$$

то соответственно ток в цепи при резонансе

$$I = \frac{E}{R_i + R_p},$$

а при расстройке

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_i + R_{BX})^2 + X_{BX}^2}},$$

где  $R_{BX} = \frac{R_p}{1 + \xi^2}$ ,  $X_{BX} = -\xi \frac{R_p}{1 + \xi^2}$

в соответствии с (6.4) для частот, на которых выполняется условие (6.1)  $|X_1| \gg R_1$  и  $|X_2| \gg R_2$ .

Мощность в контуре выделяется на сопротивлениях, отмеченных штриховкой.

### 6.4.2 Определение типа контура по исходным данным

В задачах 6.3.27-6.3.34 ключом к их решению является определение типа сложного контура. Если в сложном контуре задан порядок следования частот резонанса токов  $\omega_{PT}$  и резонанса напряжений  $\omega_{PH}$ , то тип контура устанавливается в соответствии с рисунком 6.4.

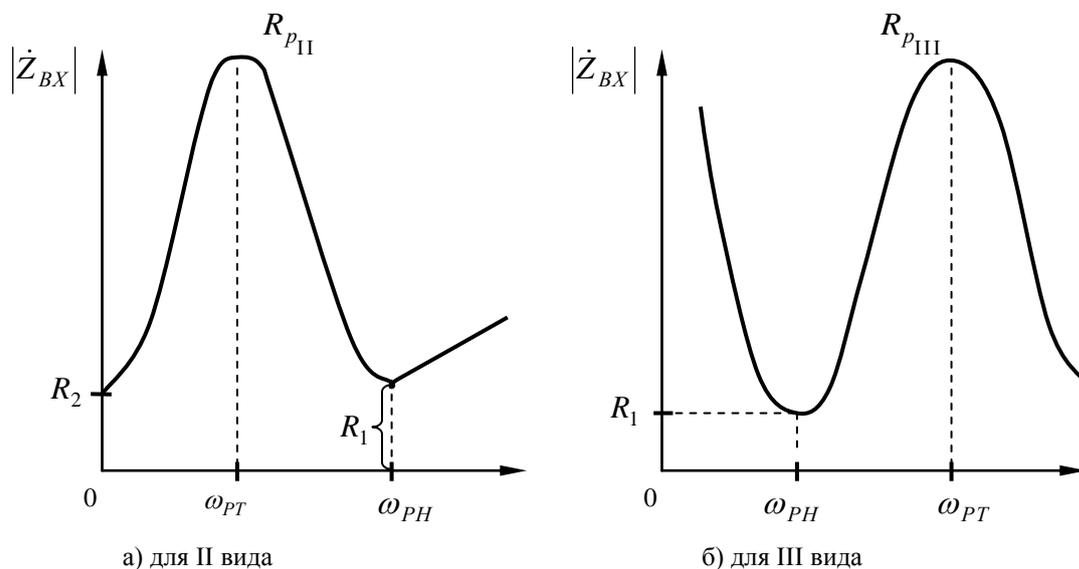


Рисунок 6.4 - Частотные зависимости входного сопротивления сложных контуров.

Однако, в ряде задач тип резонанса на заданных частотах должен определить сам студент.

#### Пример.

Ток в неразветвленной цепи контура  $i(t) = 2\cos\omega t + 2\cos 2\omega t$  мА. Спроектировать контур (определить тип, рассчитать параметры) таким образом, чтобы напряжение на нем было  $u(t) = 80\cos\omega t + 20 \cdot 10^{-3}\cos 2\omega t$  В; частоту  $\omega$  принять равной  $10^6$  рад/с, сопротивление потерь 15 Ом.

Так как начальные фазы соответствующих гармонических составляющих тока и напряжения равны, то сопротивление контура на частотах  $\omega$  и  $2\omega$  чисто активно, а, следовательно, сами частоты являются резонансными.

$$R_{BX}(\omega) = \frac{U_1}{I_1} = \frac{80}{2 \cdot 10^{-3}} = 40 \text{ кОм}$$

$$R_{BX}(2\omega) = \frac{U_2}{I_2} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ Ом}$$

Значения активных (резонансных) сопротивлений свидетельствуют о том, что на частоте  $\omega$  имеет место резонанс токов, а на частоте  $2\omega$  - резонанс напряжений, т.е. необходимо рассчитать сложный контур с разделенными индуктивностями (см. рисунок 6.4а).

Далее целесообразно уточнить исходные данные (см. рисунок 6.1в):  $R_{P_{II}} = 40$  кОм,  $R = 15$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом,  $\omega_{PT} = 10^6$  рад/с,  $\omega_{PH} = 2 \cdot 10^6$  рад/с; затем рассчитать  $L_1, L_2, C, R_2$ .

### 6.4.3 Методические указания и примеры решения

#### Задача 1.

Параллельный контур с полными параметрами:  $L=160$  мкГн,  $C=500$  пФ,  $R=10$  Ом подключить к генератору ( $E_m=10$  В,  $R_i=21$  кОм) таким образом, чтобы в контуре выделялась максимальная мощность.

#### Решение.

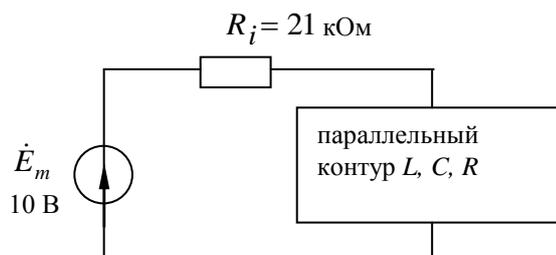


Рисунок 6.5

Определим резонансное сопротивление простого параллельного контура:

$$R_{p1} = \frac{L}{C \cdot R} = \frac{160 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 32 \text{ кОм}$$

Условие максимальной отдачи мощности в нагрузку  $R_H = R_i$  применительно к контуру

$$R_{p1} = R_i,$$

но в данном случае сопротивление  $R_{p1} > R_i$ . Значит, необходимо его уменьшить, используя частичное включение контура, т.е. рассчитать коэффициент включения:

$$R_{p_{CЛ}} = R_{p1} \cdot p^2, \quad \text{откуда} \quad p = \sqrt{\frac{R_{p_{CЛ}}}{R_{p1}}} = \sqrt{\frac{21}{32}} = 0,808.$$

Коэффициент включения должен быть равен 0,808, чтобы на контуре выделялась максимальная мощность.

Параметры ветвей сложного контура III вида (рисунок 6.1г) :

$$p_C = \frac{C}{C_2}, \quad C_2 = \frac{C}{p_C} = \frac{500}{0,808} = 620 \text{ пФ},$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2},$$

$$500 = \frac{C_1 \cdot 620}{C_1 + 620}, \text{ откуда } C_1 = 2580 \text{ пФ}.$$

Параметры ветвей сложного параллельного контура II вида:

для обозначений рисунка 6.1в  $p_L = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L_2}{L}$ ,

$$L_2 = L \cdot p_L = 160 \cdot 0,808 = 129,28 \text{ мкГн},$$

$$L_1 = L - L_2 = 160 - 129,28 = 30,72 \text{ мкГн}.$$

Мощность, отдаваемая генератором в контур на частоте резонанса

$$P_K = \frac{1}{2} I_m^2 \cdot R_{p_{СЛ}}, \quad I_m = \frac{E_m}{R_i + R_{p_{СЛ}}} = \frac{E_m}{2R_{p_{СЛ}}} = \frac{E_m}{2R_i},$$

$$P_K = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{2^2 R_{p_{СЛ}}^2} \cdot R_{p_{СЛ}} = \frac{1}{8} \frac{E_m^2}{R_{p_{СЛ}}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{10^2}{21 \cdot 10^3} = 0,595 \text{ мВт}.$$

### **Задача 2.**

Найти значения активной составляющей, реактивной составляющей и полного сопротивления простого параллельного контура, питаемого генератором с частотой  $f = 935$  кГц. Параметры контура:  $L = 240$  мкГн,  $C = 120$  пФ,  $R = 20$  Ом.

### **Решение.**

Находим резонансную частоту контура:

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{240 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{-12}}} = 940 \cdot 10^3 \text{ Гц}.$$

Определяем абсолютную расстройку:

$$\Delta f = f - f_p = 935 - 940 = -5 \text{ кГц}.$$

Рассчитываем обобщенную расстройку:

$$\xi = \frac{2\Delta\omega}{\omega_p} \cdot Q = \frac{2\Delta\omega}{\omega_p} \cdot \frac{\omega_p \cdot L}{R} = \frac{2\Delta\omega \cdot L}{R} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot \Delta f \cdot L}{R} = \frac{6,28 \cdot (-5 \cdot 10^3) \cdot 2 \cdot 240 \cdot 10^{-6}}{20} = -0,755$$

Определяем резонансное сопротивление контура:

$$R_p = \frac{L}{CR} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{120 \cdot 10^{-12} \cdot 20} = 10^5 \text{ Ом} = 100 \text{ кОм}$$

На частоте генератора контур расстроен и имеет комплексное сопротивление. Активная составляющая сопротивления в соответствии с (6.4)

$$R_{BX} = \frac{R_p}{1 + \xi^2} = \frac{10^5}{1 + (-0,755)^2} = 63,8 \cdot 10^3 \text{ Ом},$$

реактивная составляющая сопротивления,

$$X_{BX} = -\xi \cdot R_{BX} = -(-0,755) \cdot 63,8 \cdot 10^3 = 48,2 \cdot 10^3 \text{ Ом},$$

Так как расстройка отрицательна, то характер сопротивления - индуктивный. Полное сопротивление или модуль входного сопротивления

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{R_p}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{10^5}{\sqrt{1 + (-0,755)^2}} \cong 80 \text{ кОм}$$

## 6.5 Знания и умения

В результате работы над темой студент должен знать основы теории и уметь решать задачи. Конкретно следующее.

### **Знать:**

- 1) методику определения частоты резонанса токов, выражение для  $\omega_{pT}$  в контурах с относительно хорошей добротностью и границы его применимости;
- 2) порядок следования частот  $\omega_{pT}$  и  $\omega_{pH}$  в контурах II и III вида с соответствующими пояснениями;
- 3) выражения для добротности  $Q$  и характеристического сопротивления  $\rho$  для контуров любого вида;
- 4) общее выражение для резонансного сопротивления  $R_p$  в параллельном колебательном контуре с относительно хорошей добротностью любого вида, а также методику его получения;
- 5) варианты записи резонансного сопротивления для разных видов контуров  $R_{pI}$ ,  $R_{pII}$  и  $R_{pIII}$  на основе общего выражения для  $R_p$ ;
- 6) выражения для коэффициентов включения  $p_L$  и  $p_C$  применительно к любому заданному обозначению параметров на схемах II и III вида;
- 7) почему резонанс в параллельном колебательном контуре называется резонансом токов;
- 8) частотные зависимости  $|\dot{Z}_{BX}(j\omega)|$ ,  $R_{BX}(\omega)$ ,  $X_{BX}(\omega)$ ,  $\varphi_{\dot{Z}}(\omega)$  простого параллельного контура: выражения через обобщенную расстройку и графики;
- 9) качественный характер  $|\dot{Z}_{BX}(\omega)|$  для сложных контуров;
- 10) условие отдачи максимально возможной (для заданного генератора) мощности в настроенный контур;
- 11) методику расчета мощности, выделяемой в контуре на резонансе и при расстройке (см. п.6.4.1);
- 12) влияние шунтирующих сопротивлений, в том числе  $R_i$  генератора, на добротность, резонансное сопротивление и полосу пропускания контура (ППК);
- 13) методику определения ППК, не подключенного к генератору сигнала и контура, подключенного к генератору;

14) требования к значению  $R_i$  генератора для обеспечения разных условий: максимума отдачи мощности в контур, наибольшего напряжения на контуре, наименьшей возможной полосы пропускания для данного контура;

15) сравнение простого и сложного параллельных контуров с одинаковыми полными параметрами  $L, C, R$  по добротности, характеристическому сопротивлению, резонансным частотам и сопротивлениям, влиянию  $R_{ш}$  и  $R_i$  на ППК;

16) сравнение простого параллельного и последовательного контуров с одинаковыми параметрами  $L, C, R$  по добротности, характеристическому сопротивлению, резонансным частотам и сопротивлениям, частотной зависимости  $|\dot{Z}_{BX}(\omega)|$ ,  $R_{BX}(\omega)$ ,  $X_{BX}(\omega)$ , влиянию  $R_{ш}$  и  $R_i$  на характеристики и параметры контуров.

**Уметь:**

1) определять тип контура на основе исходных условий, заданных в явной или неявной форме (см. п.6.4.2);

2) рассчитывать  $Q$ ,  $\rho$ ,  $R_p$  и резонансные частоты для контура любого вида различными способами;

3) рассчитывать параметры любого типа контура на основе исходных данных, заданных в различной форме;

4) проводить энергетический расчет (т.е. расчет любых токов, напряжений, мощностей) цепи, содержащей генератор сигнала и контур любого типа как на частоте резонанса, так и при расстройке;

5) вычислять ППК до и после подключения контура к генератору сигнала;

6) рассчитывать активную и реактивную составляющие входного сопротивления, а также АЧХ и ФЧХ контура на любой заданной частоте.

## 6.6 Формы контроля

Те же, что в п. 5.6. Для самостоятельной работы используются задачи п. 6.3.

## 6.7 Рекомендуемая литература

Для работы над темой используется та же литература, что и в п.5.7.

**Основная:**

[1, с.152-162], [2, с.72–86], [3,с.175-187], [4,с.198-211].

**Дополнительная:**

[1,с.48–52], [2,с.140–142, 153–163], [3,с.33–37].

## 7. СИСТЕМА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

### 7.1 Цель занятий

При изучении раздела 7 на практических занятиях ставятся следующие основные цели:

- 1) изучить условия наступления каждого из возможных типов резонансов в связанной системе и основные соотношения между токами, напряжениями, мощностями и сопротивлениями в двухконтурной системе при резонансе, научиться уверенно определять тип резонанса в системе двух связанных контуров по различным исходным условиям;
- 2) усвоить понятия оптимальной и критической связи;
- 3) научиться вычислять входное сопротивление системы, токи, напряжения, мощности, выделяемые в контурах, к.п.д., а также фазовые сдвиги между токами и напряжениями как настроенной, так и расстроенной системы при последовательном и параллельном подключении генератора сигнала к первичному контуру;
- 4) научиться вычислять полосу пропускания системы при разных значениях связи между контурами;
- 5) усвоить форму АЧХ двухконтурной системы при разных значениях связи между контурами и аргументировано объяснять, какой тип резонанса имеет место в экстремумах резонансных кривых.

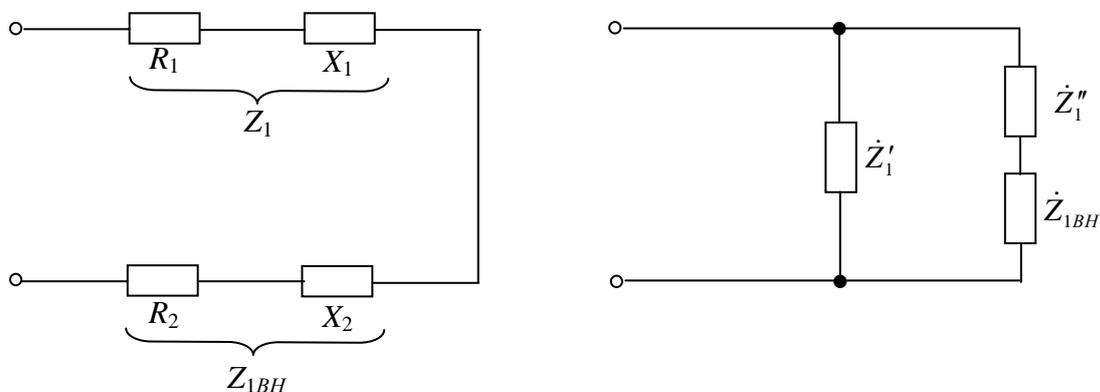
### 7.2 Краткие теоретические сведения

Контуров называются связанными, если электрические процессы в одном из них вызывают электрические процессы в другом, т.е. связанные контуры влияют друг на друга.

#### 7.2.1 Входное сопротивление системы

По отношению к источнику сигнала система связанных контуров, как всякая электрическая цепь, выступает в качестве двухполюсника. При этом входное сопротивление системы определяется способом подключения генератора сигнала к системе (рисунок 7.1).

На рисунке 7.1 представлены способы подключения генератора сигнала к системе связанных контуров, когда влияние второго контура на первый учтено в виде внесенных сопротивлений, т.е. система представлена в виде одноконтурной схемы замещения.



а) последовательный

б) параллельный

Рисунок 7.1 - Способы подключения генератора сигнала к системе связанных контуров.

При последовательном подключении генератора

$$\dot{Z}_{BX} = R_{1Э} + jX_{1Э} = (R_1 + R_{1BH}) + j(X_1 + X_{1BH}),$$

а при параллельном в общем случае

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{Z}'_1 (\dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH})}{\dot{Z}'_1 + \dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH}} = \frac{\dot{Z}'_1 (\dot{Z}''_1 + \dot{Z}_{1BH})}{R_{1Э} + jX_{1Э}},$$

где  $R_{1Э}$  и  $X_{1Э}$  - эквивалентные сопротивления первого контура с учетом влияния второго. Влияние второго контура на первый учитывается в виде внесенных сопротивлений

$$\dot{Z}_{1BH} = R_{1BH} + jX_{1BH}.$$

Здесь

$$R_{1BH} = \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} \cdot R_2 \quad \text{и} \quad X_{1BH} = - \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2, \quad (7.1)$$

где  $X_{CB}$  - сопротивление связи между контурами,

$X_1$  и  $X_2$  - полные реактивные сопротивления, а

$R_1$  и  $R_2$  - полные сопротивления потерь соответственно первого и второго контуров при их последовательном обходе, независимо от способа подключения генератора сигнала.

Примеры расчета входного сопротивления приводятся в пункте 7.3.2.

## 7.2.2 Виды резонансов

В системе двух связанных контуров резонанс, как и в любой электрической цепи, сопровождается условием

$$X_{BX}(\omega_{p.cucm}) = 0 \quad \text{или} \quad X_{1Э} = X_1 - \frac{X_{CB}^2}{R_2^2 + X_2^2} \cdot X_2 \Big|_{\omega_{p.cucm}} = 0. \quad (7.2)$$

При этом состояние резонанса может соответствовать либо обоим настроенным контурам ( $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ ), либо обоим расстроенным контурам ( $X_1 \neq 0$  и  $X_2 \neq 0$ ). Резонанс в системе невозможен, когда один контур настроен, а другой - расстроен. Возможные резонансы в двухконтурной системе представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 - Резонансы в системе двух связанных контуров

	Вид резонанса	$X_{вх}$	$X_1$	$X_2$	Связь
Оба контура настроены	индивидуальный	0	0	0	не оптимальная
	полный	0	0	0	$X_{CB.opt-пол} = \sqrt{R_1 \cdot R_2}$
Оба контура расстроены	частный	0	$\neq 0$	$\neq 0$	не оптимальная
	сложный	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$X_{CB.opt-сл} =  \dot{Z}_2  \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} =  \dot{Z}_1  \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$

Резонансы полный и сложный называются оптимальными, т.к. соответствуют оптимальной связи (см.п.7.2.5.). При этом, несмотря на то, что

$$X_{CB.optпол} < X_{CB.optсл},$$

при обоих значениях оптимальной связи

$$R_{1BH} = R_1 \quad \text{или} \quad R_{2BH} = R_2 \quad (7.3)$$

Выражение (7.2) при оптимальных связях вырождается в

$$X_{1Э} = X_1 - \frac{R_1}{R_2} \cdot X_2 = 0. \quad (7.4)$$

Последнее соотношение существенно упрощает расчеты при сложном резонансе, при полном резонансе выражение (7.4) практического значения не имеет.

### 7.2.3 Токи системы при разных способах ее подключения к генератору сигнала

При последовательном подключении генератора с э.д.с.  $E$  к первому контуру для любого из четырех видов резонанса токи в контурах определяются в самом общем случае как:

$$I_{1p} = \frac{E}{R_1 + R_{1BH}}, \quad I_{2p} = I_{1p} \cdot \frac{X_{CB}}{|Z_2|}, \quad (7.5)$$

а в частном случае любого из оптимальных резонансов эти токи принимают значения:

$$I_{1p.opt} = \frac{E}{2 \cdot R_1}, \quad I_{2p.opt} = I_{2p.max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}}. \quad (7.6)$$

Ток во втором контуре достигает максимально возможной для данной системы величины.

При параллельном подключении генератора к связанной системе токи в контурах можно рассчитывать по формулам (7.5) и (7.6), если параллельное подключение пересчитать в последовательное по методу эквивалентного генератора (рисунок 7.7). В противном случае, т.е. без пересчета, следует рассчитать ток в параллельном (первом) контуре так, как это сделали бы в **одиночном** параллельном контуре и затем вычислить второй ток как

$$I_2 = I_1 \cdot \frac{X_{CB}}{|Z_2 + Z_{2BH}|}. \quad (7.7)$$

При этом способе расчета взаимное влияние контуров удобнее учитывать путем внесения сопротивлений  $R_{2BH}$  и  $X_{2BH}$  во второй контур.

### 7.2.4 Энергетические соотношения

Мощности, выделяемые в первом и втором контурах, определяются как:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = \frac{I_{1m}^2}{2} \cdot R_1, \quad (7.8)$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = I_1^2 \cdot R_{1BH}, \quad (7.9)$$

а коэффициент полезного действия системы как

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{R_{1BH}}{R_1 + R_{1BH}}. \quad (7.10)$$

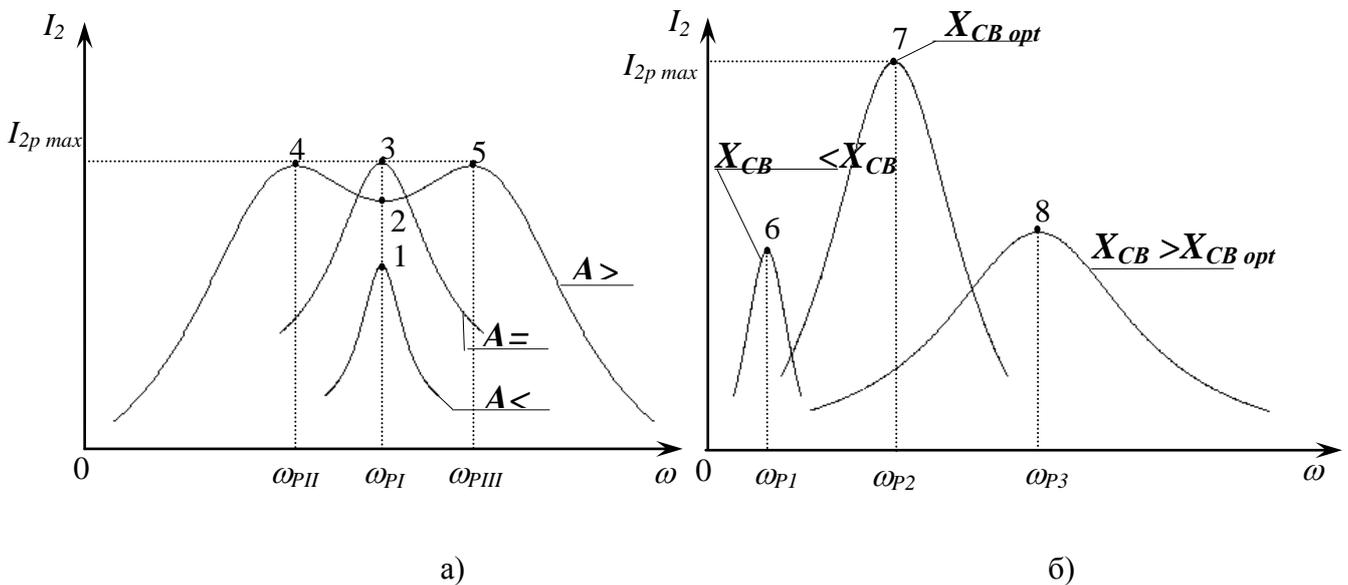
При оптимальной связи к.п.д. принимает значение  $\eta = 50\%$ , а мощность во втором контуре достигает наибольшего значения:

$$P_{2\max} = \frac{E^2}{4 \cdot R_1} = \frac{E_m^2}{8 \cdot R_1}, \quad (7.11)$$

где  $E_m$  - амплитуда э.д.с. генератора напряжения, включенного в первый контур последовательно.

### 7.2.5 Резонансные кривые. Понятие оптимальной и критической связи

На рисунке 7.2 изображены резонансные кривые тока во втором контуре при разных значениях связи между контурами для разных типов двухконтурной системы.



- а) резонансные кривые  $I_2(\omega)$  в системе двух одинаковых колебательных контуров  
 б) резонансные кривые  $I_2(\omega)$  в двухконтурной системе из колебательного и апериодического RL-контура

Рисунок 7.2 - Резонансные кривые двухконтурной системы/

На рисунке 7.2.а величина связи обозначена через фактор или параметр связи  $A/$

$$A = k \cdot \sqrt{Q_1 \cdot Q_2}$$

Если контуры, входящие в систему одинаковы, т.е.  $Q_1 = Q_2$ ,  $R_1 = R_2$ , то

$$A = k \cdot Q = \frac{k}{d} = \frac{X_{CB}}{R_1} = \frac{X_{CB}}{R_2},$$

где  $Q$  - добротность контура,

$$d - \text{затухание контура, } d = \frac{1}{Q},$$

$k$  - коэффициент связи между контурами;  
в частном случае трансформаторной связи:

$$k = \frac{X_{CB}}{\sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

В системе с апериодическим контуром (пусть это будет второй контур)  $X_2 \neq 0$  для всех частот, кроме  $\omega = 0$  (или  $\omega = \infty$  для апериодического RC-контура). В соответствии с условием (7.2) резонанс в системе возможен лишь на одной частоте, а в соответствии с таблицей 7.1 лишь частный (точки 6 и 8 на рисунке 7.2.б) или сложный (точка 7), когда ток достигает наибольшего значения.

В системе, с одинаковыми колебательными контурами (а также, если контуры имеют одинаковые резонансные частоты, но разные добротности  $Q_1$  и  $Q_2$ ) возможны все виды резонансов. На частоте  $\omega_{PI}$  оба контура настроены и может иметь место как индивидуальный резонанс (точки 1 и 2 на рисунке 7.2.а), так и полный резонанс (точка 3). На частотах  $\omega_{PII}$  и  $\omega_{PIII}$  оба контура расстроены, однако ток достигает наибольшего значения, т.е. имеет место сложный резонанс (точки 4 и 5). Таким образом, в зависимости от величины связи в системе возможно различное число резонансных частот и различные типы резонансов.

Понятие “критическая связь” связано с числом резонансных частот в системе. При связи критической ( $A=1$ ) и ниже критической ( $A<1$ ) (см. рисунок 7.2.а) в системе из двух колебательных контуров резонанс имеет место на единственной частоте  $\omega_{PI}$ . При связи выше критической ( $A>1$ ) в такой системе резонанс имеет место на трех частотах. Резонансные частоты  $\omega_{PII}$  и  $\omega_{PIII}$  называются частотами связи и при идентичных контурах вычисляются следующим образом:

$$\omega_{PII,III} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 \pm \frac{1}{Q} \cdot \sqrt{A^2 - 1}}} \quad (7.12)$$

К двухконтурной системе из колебательного и апериодического контуров понятие критической связи не применимо.

Понятие “оптимальная связь” связано с величиной второго или выходного тока. При оптимальной связи ток и, следовательно, напряжение и мощность во втором контуре достигают наибольших возможных значений. Оптимальная связь имеет место в точках 3,4,5 и 7 резонансных кривых рисунка 7.2.

Понятие критической и оптимальной связи совпадают лишь при полном резонансе - точка 3 на рисунке 7.2.

### 7.2.6 Полоса пропускания системы

Обозначим относительную полосу пропускания через  $S_0$

$$S_0 = \frac{2\Delta\omega_{II}}{\omega_p} = \frac{2\Delta f_{II}}{f_p}$$

и введем дополнительные индексы: для системы – SOC, для одиночного контура – SOK. Расчетные соотношения для полосы пропускания системы из двух колебательных контуров зависят от величины связи. Если контуры идентичны, то

$$S_{OC} = d\sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}} \quad \text{при } A \leq 1, \quad (7.13)$$

$$S_{OC} = d\sqrt{A^2 - 1 + 2 \cdot A} \quad \text{при } A \geq 1. \quad (7.14)$$

При критической связи ( $A=1$ )  $S_{OC} = \sqrt{2} \cdot d$ , т.е.

$$S_{OC} \approx 1,41 \cdot S_{OK}.$$

Наибольшую возможную полосу пропускания система из двух колебательных контуров имеет при факторе связи  $A=2,41$ :

$$S_{OC.max} = 3,1 \cdot d = 3,1 \cdot S_{OK}.$$

Для системы из колебательного и апериодического контура, полоса пропускания определяется как  $S_{OC} \approx \frac{1}{Q_{\mathcal{E}}}$ , где  $Q_{\mathcal{E}}$  - добротность колебательного контура с учетом внесенных сопротивлений из апериодического. Если первый контур колебательный с параметрами  $L1, C1, R1$ , а второй - апериодический с параметрами  $L2, R2$ , то

$$Q_{\mathcal{E}} = \frac{\rho_{1\mathcal{E}}}{R_{1\mathcal{E}}},$$

где  $R_{1\mathcal{E}} = R1 + R1_{BH}$ ,

$$\rho_{1\mathcal{E}} = \omega_{PC} \cdot (L1 - L1_{BH}) = \frac{1}{\omega_{PC} C1}.$$

Полоса пропускания двухконтурной системы увеличивается при усилении связи между контурами, что хорошо видно на рисунке 7.2.

### 7.2.7 Фазовые соотношения в связанной системе

В основе расчета любых фазовых соотношений связанной системы лежат общие выражения для токов, записанные в комплексной форме.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{1\mathcal{E}}}, \quad (7.16)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{\pm jX_{CB}}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{1\mathcal{E}}} \cdot \frac{\pm jX_{CB}}{\dot{Z}_2}, \quad (7.17)$$

где  $\dot{Z}_{1\mathcal{E}} = \dot{Z}_{BX} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_{1BH}$  есть полное входное сопротивление системы при последовательном ее подключении к генератору сигнала. Падение напряжения на любом участке схемы выражается по закону Ома в комплексной форме через токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ .

Фазовый сдвиг между любыми двумя электрическими величинами находится по известным правилам работы с комплексными выражениями (см. разделы 3 и 4).

Например, фазовый сдвиг между  $\dot{I}_1$  и  $\dot{E}$ .

$$\varphi_1 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{E}}\right) = -\text{Arg}(\dot{Z}_{1\mathcal{E}}),$$

фазовый сдвиг между  $\dot{I}_2$  и  $\dot{E}$

$$\varphi_2 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{E}}\right) = \pm 90^\circ - [\text{Arg}(\dot{Z}_{1\varnothing}) + \text{Arg}(\dot{Z}_2)]$$

фазовый сдвиг между  $\dot{U}_{C2}$  и  $\dot{E}$

$$\varphi_3 = \text{Arg}\left(\frac{\dot{U}_{C2}}{\dot{E}}\right) = \varphi_2 - 90^\circ$$

$$\text{т.к. } \dot{U}_{C2} = \dot{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}$$

## 7.3 Методические указания и примеры решения задач

### 7.3.1 Определение типа резонанса

Прежде чем решать любую задачу по изучаемой теме, надо ответить на вопрос находится система в резонансе или нет и, если находится, то установить тип резонанса в соответствии с условиями таблицы 7.1.

Примеры определения типа резонанса по некоторым исходным данным.

**Пример 1.** Система состоит из двух настроенных на частоту генератора контуров и имеет к.п.д. 60%.

Т.к. каждый контур настроен (подразумевается, что каждый контур колебательный), то  $X1 = 0$  и  $X2 = 0$ ; значит, в системе уже имеет место индивидуальный резонанс. Если бы связь была оптимальной, то  $\eta = 50\%$  и в системе имел бы место полный резонанс. В соответствии с заданными условиями  $\eta = 60\%$ , т.е. связь больше оптимальной, и система настроена в индивидуальный резонанс.

**Пример 2.** Система состоит из колебательного и апериодического контуров и настроена в резонанс. Известно, что э.д.с., включенная в первый контур,  $E_m = 10$  В, сопротивления  $R1 = 10$  Ом,  $R2 = 1$  кОм, а амплитуда тока во втором контуре 10 мА.

Т.к. один из контуров (пусть второй - это не имеет значения) апериодический, то  $X2 \neq$

$$X_{1\varnothing} = X_1 - \frac{X_{CB}^2}{|\dot{Z}_2|^2} \cdot X_2 = 0$$

0; но система в резонансе, т.е.

следовательно,  $X1 \neq 0$ .

При таких условиях возможен либо частный, либо сложный резонанс. Если в системе сложный резонанс, то амплитуда тока во втором контуре должен быть максимально возможной

$$I_{2P\max} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} = \frac{10}{2\sqrt{10 \cdot 10^3}} = 50 \text{ мА.}$$

В соответствии с условиями задачи ток во втором контуре меньше максимально возможного, поэтому в системе имеет место частный резонанс.

**Пример 3.** Система состоит из двух колебательных контуров; в системе имеет место оптимальный резонанс. Известно, что частота генератора 106 рад/с,  $L1 = 500$  мкГн,  $C1 = 500$  пФ.

В системе имеет место либо полный, либо сложный резонанс. Если  $X1 = 0$  или  $\omega P1 = \omega \Gamma$ , то в системе полный резонанс (см. таблицу 7.1)

$$\omega_{P1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{500 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 10^{-12}}} = 2 \cdot 10^6 \text{ рад/с} \neq \omega \Gamma .$$

Установлено, что первый контур расстроен относительно частоты питающего генератора  $X1 \neq 0$ , следовательно, и  $X2 \neq 0$  (в противном случае резонанс в системе невозможен вообще!).

Таким образом, система находится в сложном резонансе.

**Пример 4.** Система находится в резонансе; ее параметры:

$X1 = +100 \text{ Ом}$ ,  $R1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $X2 = +250 \text{ Ом}$ ,  $R2 = 50 \text{ Ом}$ .

Т.к.  $X1 \neq 0$  и  $X2 \neq 0$ , то возможен либо частный, либо сложный резонанс. Если в системе любой из оптимальных резонансов, то выполняется условие (7.4):

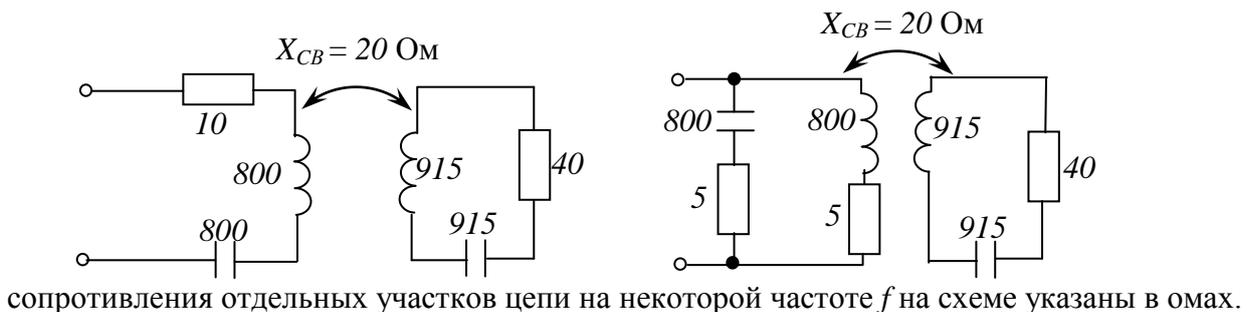
$$X_{13} = 100 - \frac{20}{50}(+250) = 0$$

Следовательно, связь оптимальная и система настроена в сложный резонанс.

### 7.3.2 Определение входного сопротивления системы

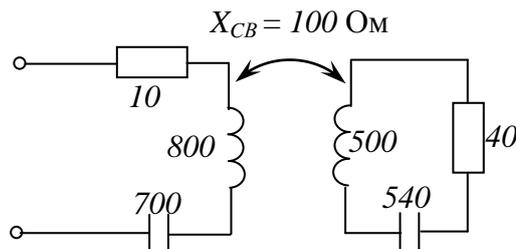
Общая методика состоит в следующем. Влияние второго контура на первый учитывается в виде внесенных сопротивлений, после чего второй контур “как бы не существует”. Входное сопротивление системы рассчитывается как у обычного одиночного контура в зависимости от способа подключения источника (см. рисунок 7.1).

**Пример 5.** Определить входное сопротивление систем (рисунок 7.3), если



а)

б)



в)

Рисунок 7.3 - Схемы связанных систем.

Система (см. рисунок 7.3.а) в резонансе, т.к.  $X_1 = 0$  и  $X_2 = 0$ . Это либо индивидуальный, либо полный резонанс в зависимости от величины связи.

$$X_{CB,opt} = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{10 \cdot 40} = 20 \text{ Ом.}$$

Так как связь оказалась оптимальной, то в системе полный резонанс и в соответствии с (7.3)

$$R_{1BH} = R_1 = 10 \text{ Ом}; X_{1BH} = 0, \quad \text{т.к. } X_2 = 0.$$

Входное сопротивление системы

$$Z_{BX}(\omega P) = R_{BX} = R_1 + R_{1BH} = 10 + 10 = 20 \text{ Ом}$$

В системе (см. рисунок 7.3.б) также полный резонанс, т.к.  $X_1=0$ ;  $X_2=0$ ,  $X_{CB} = 20 \text{ Ом} = X_{CB \text{ opt}}$ . Влияние второго контура на первый:

$$X_{1BH} = 0, \quad \text{т.к. } X_2 = 0; \quad R_{1BH} = R_1 = 10 \text{ Ом, так как связь оптимальная.}$$

Входное сопротивление системы определяется как сопротивление параллельного контура на резонансе

$$Z_{BX}(\omega_p) = R_p = \frac{(X'_{1P})^2}{R_{1\Omega}} = \frac{(X''_{1P})^2}{R_1 + R_{1BH}} = \frac{800^2}{10+10} = 32 \text{ кОм.}$$

Обратите внимание на существенное различие в величинах входного сопротивления (20 Ом и 32 кОм) в зависимости от способа подключения источника к системе с одними и теми же параметрами (см. свойства последовательного и параллельного контуров).

В системе (см. рисунок 7.3.в) при указанных параметрах наступление резонанса вообще невозможно, т.к. контуры расстроены и имеют сопротивления разного знака (характера):  $X_1 = +100 \text{ Ом}$ ,  $X_2 = -40 \text{ Ом}$ .

В соответствии с выражениями (7.1)

$$R_{1BH} = \frac{100}{40^2 + (-40)^2} = 125 \text{ Ом,}$$

$$X_{1BH} = \frac{-100^2}{40^2 + (-40)^2} \cdot (-40) = +125 \text{ Ом.}$$

$$R_{BX} = R_{1\Omega} = R_1 + R_{1BH} = 10 + 125 = 135 \text{ Ом,}$$

$$X_{BX} = X_{1\Omega} = X_1 + X_{1BH} = 100 + 125 = 225 \text{ Ом,}$$

$$Z_{BX} = R_{BX} + jX_{BX} = (135 + j225) \text{ Ом.}$$

### 7.3.3 Определение полосы пропускания системы

Во всех задачах, связанных с полосой пропускания системы связанных колебательных контуров, главным является вопрос, какова связь между контурами - выше или ниже критической. От этого зависит выбор расчетных формул (см.п.7.2.6).

**Пример 6.** Два одинаковых связанных контура имеют добротности, равные 100, резонансные частоты, равные  $10^7$  рад/с; частота генератора  $10^7$  рад/с, полоса пропускания системы 40 кГц. Определить какова связь, выше или ниже критической.

Сравним относительные полосы пропускания системы и одиночного контура, входящего в нее:

$$S_{ок} = \frac{1}{Q} = 0,01,$$

$$S_{ос} = \frac{2\Delta\omega_{П}}{\omega_p} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}{10^7} = 0,0251.$$

**Примечание:** обратите внимание на размерность частоты!

Частота генератора задана как  $\omega$  в рад/с, а полоса как  $2\Delta f_{П}$  в кГц.

При  $A = 1$   $S_{OC} = 0,01 \cdot 1,41 = 0,0141$ , а в нашем случае больше, т.е. связь выше критической. В то же время  $S_{OC} = 0,025$  не превышает максимально возможного значения полосы  $S_{OC \max} = 3,1 \cdot d$ , значит  $1 < A < 2,41$ .

### 7.3.4 Пример решения типовой задачи

Система двух одинаковых трансформаторно связанных колебательных контуров настроена в резонанс с источником э.д.с.  $e(t) = 40 \cdot \cos 106 \cdot t$  В, включенным в первый контур последовательно. При этом ток во втором контуре  $I_{m2} = 400$  мА. Параметры контуров:  $L1 = 0,5$  мГн,  $C1 = 2000$  пФ,  $R1 = 30$  Ом.

Установить тип резонанса на частоте источника, ответ пояснить. Изобразить примерный график  $I_2(\omega)$  при заданных параметрах.

Вычислить:

- 1) при каком значении взаимной индукции  $M$  между контурами амплитуда тока во втором контуре равна заданному значению;
- 2) к.п.д. системы и мощность, выделяемую во втором контуре;
- 3) полосу пропускания системы.

Решение:

- 1) установим тип резонанса:

$$\omega_{P2} = \omega_{P1} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2000 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \text{ рад/с} = \omega \Gamma,$$

т.е. оба контура настроены на частоту генератора ( $X1 = 0$  и  $X2 = 0$ ); амплитуда тока при оптимальной связи

$$I_{2P \max} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 \cdot R_2}} = \frac{E_m}{2R_1} = \frac{40}{2 \cdot 30} = 666,6 \text{ мА},$$

а заданная амплитуда  $I_{2m}$  только 400 мА.

Таким образом, в системе имеет место индивидуальный резонанс. При этом в общем случае возможна связь и ниже и выше критической. Проанализируем наши данные: при связи выше критической на частоте генератора  $I_{2m}$  не может уменьшиться более, чем в

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{2P \max}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{2P\max} = \frac{666,6}{\sqrt{2}} = 471,3 \text{ мА,}$$

следовательно, в системе индивидуальный резонанс при связи ниже критической. Примерный график  $I_2(\omega)$  показан на рисунке 7.4 сплошной линией. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром изображен ток при максимально возможной связи  $A = 2,41$ .

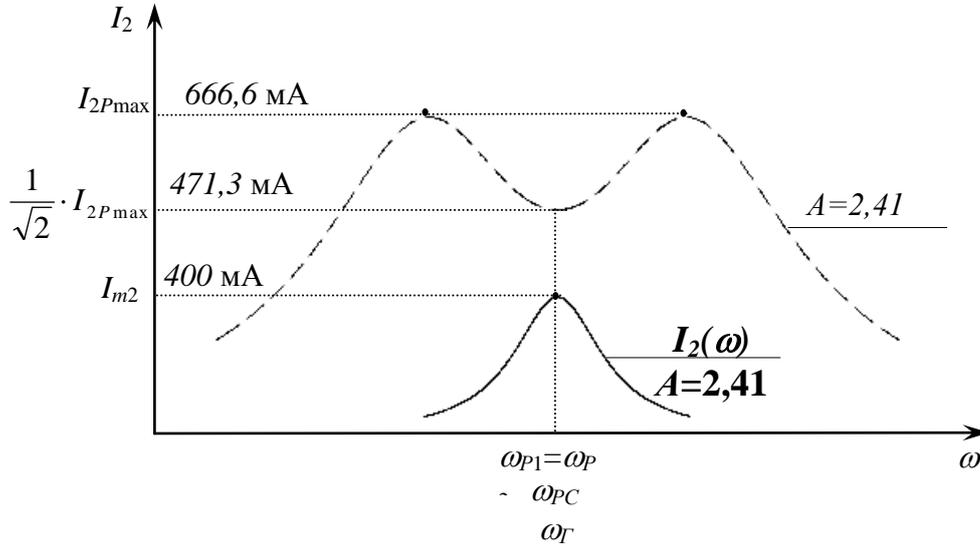


Рисунок 7.4 - Частотная характеристика тока во втором контуре.

2) найдем ХСВ, при котором  $I_{m2} = 400$  мА.

При индивидуальном резонансе ток во втором контуре:

$$I_{m2} = \frac{E_m}{R_1 + R_{1BH}} \cdot \frac{X_{CB}}{R_2} = \frac{E_m \cdot X_{CB}}{R_1 \cdot R_2 + X_{2CB}^2} = \frac{E_m \cdot X_{CB}}{R_1^2 + X_{CB}^2}$$

$$0,4 = \frac{40 \cdot X_{CB}}{30^2 + X_{CB}^2}, \text{ откуда}$$

$$X_{CB1} = 10 \text{ Ом, } X_{CB2} = 90 \text{ Ом.}$$

Оптимальное значение  $X_{CB\text{opt}} = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = R_1 = 30$  Ом соответствует фактору связи  $A=1$ . Соответственно  $X_{CB}=10$  Ом - фактору связи  $A=1/3$ , а  $X_{CB} = 90$  Ом - фактору связи  $A=3$ . Последнее значение превышает максимально допустимое ( $A=2,41$ ) и поэтому отбрасывается.

Итак,  $X_{CB} = 10$  Ом, связь ниже критической, что полностью соответствует первому пункту решения.

$$X_{CB} = \omega \cdot M, \text{ откуда } M = \frac{X_{CB}}{\omega} = \frac{10}{10^6} = 10 \text{ мкГн ;}$$

3) вычислим к.п.д. и мощность  $P_2$

$$\eta = \frac{R_{1BH}}{R_1 + R_{1BH}} = \frac{\frac{X_{CB}^2}{R_2}}{R_1 + \frac{X_{CB}^2}{R_2}} = \frac{X_{CB}^2}{R_1^2 + X_{CB}^2} = \frac{10^2}{30^2 + 10^2} = 0,1$$

$$P_2 = \frac{I_{m2}^2 \cdot R_2}{2} = \frac{(0,4)^2}{2} \cdot 30 = 2,4 \text{ Вт}$$

4) определим полосу пропускания системы

Т.к. связь ниже критической, то относительная полоса определяется по формуле (7.13).

$$S_{OC} = d \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}},$$

$$\text{где } d = \frac{R_1}{\omega_p L}.$$

$$2\Delta\omega_{II} = \frac{R}{L} \sqrt{A^2 - 1 + \sqrt{2(1 + A^4)}} = \frac{30}{0,5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)}} = 4,385 \cdot 10^4 \text{ рад/с,}$$

$$2\Delta f_{II} = \frac{2\Delta\omega_{II}}{6,28} = \frac{4,385 \cdot 10^4}{6,28} = 6,98 \text{ кГц}$$

Ответ: 10 мкГн; 0,1; 2,4 Вт; 6,98 кГц.

## 7.4 Задачи для самостоятельной работы

Первые семь упражнений и задач рекомендуются для общего разбора на занятиях с целью усвоения основных положений изучаемой темы и знакомства с типовыми задачами. Остальные задачи этого раздела используются для самостоятельной работы в аудитории и индивидуальных домашних заданий, наиболее простыми из них являются задачи 7.4.8-7.4.21.

7.4.1. Определить тип резонанса из следующих условий:

1) система настроена в резонанс и состоит из двух колебательных контуров, параметры первого контура  $C_1 = 500$  пФ,  $L_1 = 500$  мкГн, частота питающего генератора  $2 \cdot 10^6$  рад/с, связь оптимальная;

2) сохраняется предыдущее условие за исключением частоты генератора,  $\omega = 10^6$  рад/с;

3) в системе из двух колебательных контуров оба контура настроены на частоту генератора, а связь такова, что к.п.д. системы 60%;

4) в системе из двух колебательных контуров каждый контур настроен на частоту входного сигнала, а связь такова, что мощность во втором контуре в два раза больше мощности в первом ( $P_2 = 2P_1$ );

5) система из колебательного и апериодического контуров настроена в резонанс и имеет  $R_{1BH} = R_1$ ;

6) возможен ли в системе резонанс и какого типа, если  $f_{P1} = 500$  кГц,  $f_{P2} = 510$  кГц, а частота питающего генератора  $f$  равна:

а) 500 кГц, б) 520 кГц, в) 505 кГц, г) 510 кГц?

7.4.2. Вычислить входное сопротивление систем, изображенных на рисунке 7.5, на некоторой частоте  $f$ , если известно, что на этой частоте отдельные участки цепи имеют сопротивления, указанные на схеме в омах.

Является ли частота  $f$ -резонансной? Каков тип резонанса? Как изменится ZВХ системы (см. рисунок 7.5.а), если связь сделать оптимальной?

С каким входом (последовательным или параллельным) следует использовать систему связанных контуров в качестве нагрузки генератора:

а) с низкоомным внутренним сопротивлением, б) с высокоомным внутренним сопротивлением?

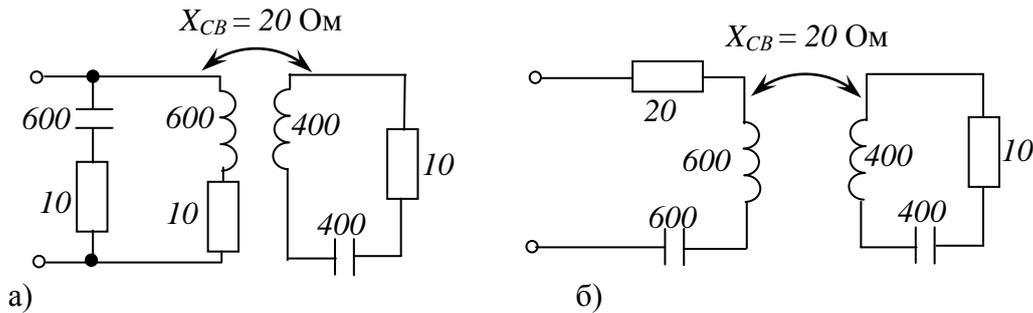


Рисунок 7.5 - Системы связанных контуров при разных способах подключения источника сигнала.

7.4.3. Параметры системы, изображенной на рисунке 7.6, следующие:  $E_m = 10$  В,  $L_1 = 10$  мкГн,  $L_2 = 50$  мкГн,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_H = 500$  Ом. Частота питающего генератора 107 рад/с. В системе имеет место “оптимальный” резонанс. Определить:

- 1) какой из “оптимальных” резонансов возможен в данной системе и почему;
- 2) значения  $M$  и  $C_1$  таким образом, чтобы ток во втором контуре достигал максимально возможного значения;
- 3) значение мощности, выделяемой во втором контуре;
- 4) каков к.п.д. системы при вычисленных значениях  $M$  и  $C_1$ ;
- 5) какова мощность в первом контуре;
- 6) относительную полосу пропускания системы;
- 7) изобразить качественный характер зависимости  $I_2(\omega)$ , отметить на графике взаимное расположение резонансных частот системы  $\omega_{PC}$  и первого контура  $\omega_{P1}$ .

Ответ: 14,14 мкГн; 1250 пФ; 625 мВт; 0,5; 625 мВт; 0,5.

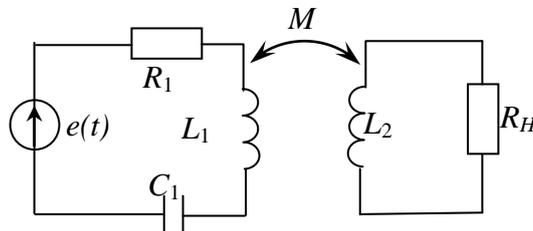


Рисунок 7.6 - Система связанных контуров с апериодическим контуром.

7.4.4. Система, состоящая из двух одинаковых колебательных контуров с  $Q = 100$ , настроена на частоту 1 МГц и имеет полосу пропускания 30 кГц. Изобразить характер  $I_2(\omega)$ , соответствующий заданным условиям.

7.4.5. В системе из двух одинаковых колебательных контуров  $Q_1=Q_2=50$ . При каком коэффициенте связи ширина полосы пропускания системы окажется равной ширине полосы пропускания одного отдельно взятого контура.

Ответ: 1,34%

7.4.6. Система состоит из двух одинаковых колебательных контуров (рисунок 7.7.а):  $\rho_1 = \rho_2 = 200 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $f_{P1} = f_{P2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ ,  $E = 600 \text{ В}$ ,  $R_1 = 40 \text{ кОм}$ .

Определить:

- 1) коэффициент связи  $k$  между контурами, при котором ток во втором контуре будет иметь максимальное значение при частоте питания  $2 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ ;
- 2) значение этого тока;
- 3) полосу пропускания системы без учета влияния генератора сигнала;
- 4) каков характер влияния генератора на полосу пропускания системы.

Примечание: ток второго контура вычислить двумя способами - непосредственно по схеме рисунка 7.7.а и путем пересчета параллельно включенного генератора в последовательно включенный (рисунок 7.7.б) по методу эквивалентного генератора (см. п.7.2.3).

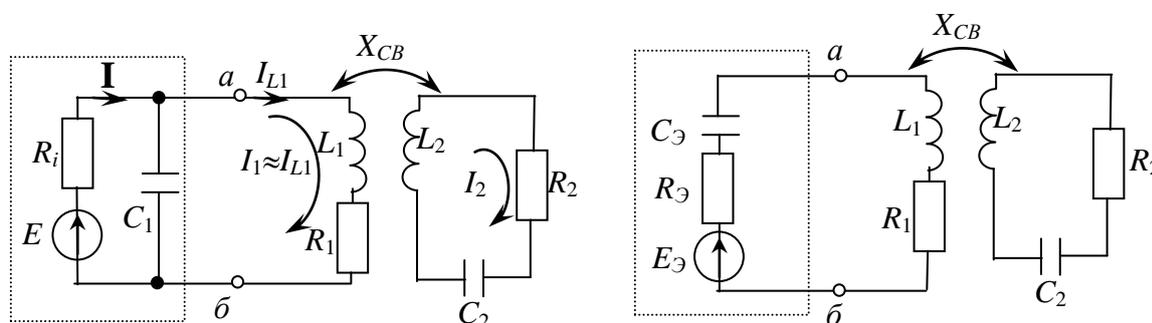


Рисунок 7.7 - Схемы к задаче 7.4.6

7.4.7. Система из двух колебательных контуров с трансформаторной связью последовательно подключена к источнику сигнала и на частоте источника имеет следующие параметры:  $R_1 = 24 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 200 \text{ Ом}$ ,  $|X_{C1}| = 168 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 320 \text{ Ом}$ ,  $|X_{C2}| = 240 \text{ Ом}$ .

Определить:

- 1) коэффициент связи  $k$  между катушками колебательных контуров, при котором мощность, расходуемая во втором контуре вдвое больше, теряемой в первом;
- 2) находится ли при этих условиях система в резонансе и, если да, то в каком именно.

Ответ: 35,34 %.

7.4.8. Определить входные сопротивления двухполюсников, если сопротивления отдельных участков цепи на схемах рисунка 7.8 указаны в омах.

Ответ: 40 Ом, 20 Ком, 20 Ом,  $(20 + j89) \text{ Ом}$ , 18 кОм, 12,8 кОм.

7.4.9. Два индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс. Частота генератора 400 кГц, э.д.с. генератора, последовательно подключенного к первому контуру,  $E = 100 \text{ В}$ ,  $M_{opt} = 20 \text{ мкГн}$ . Определить значение тока во втором контуре.

Ответ: 1 А.

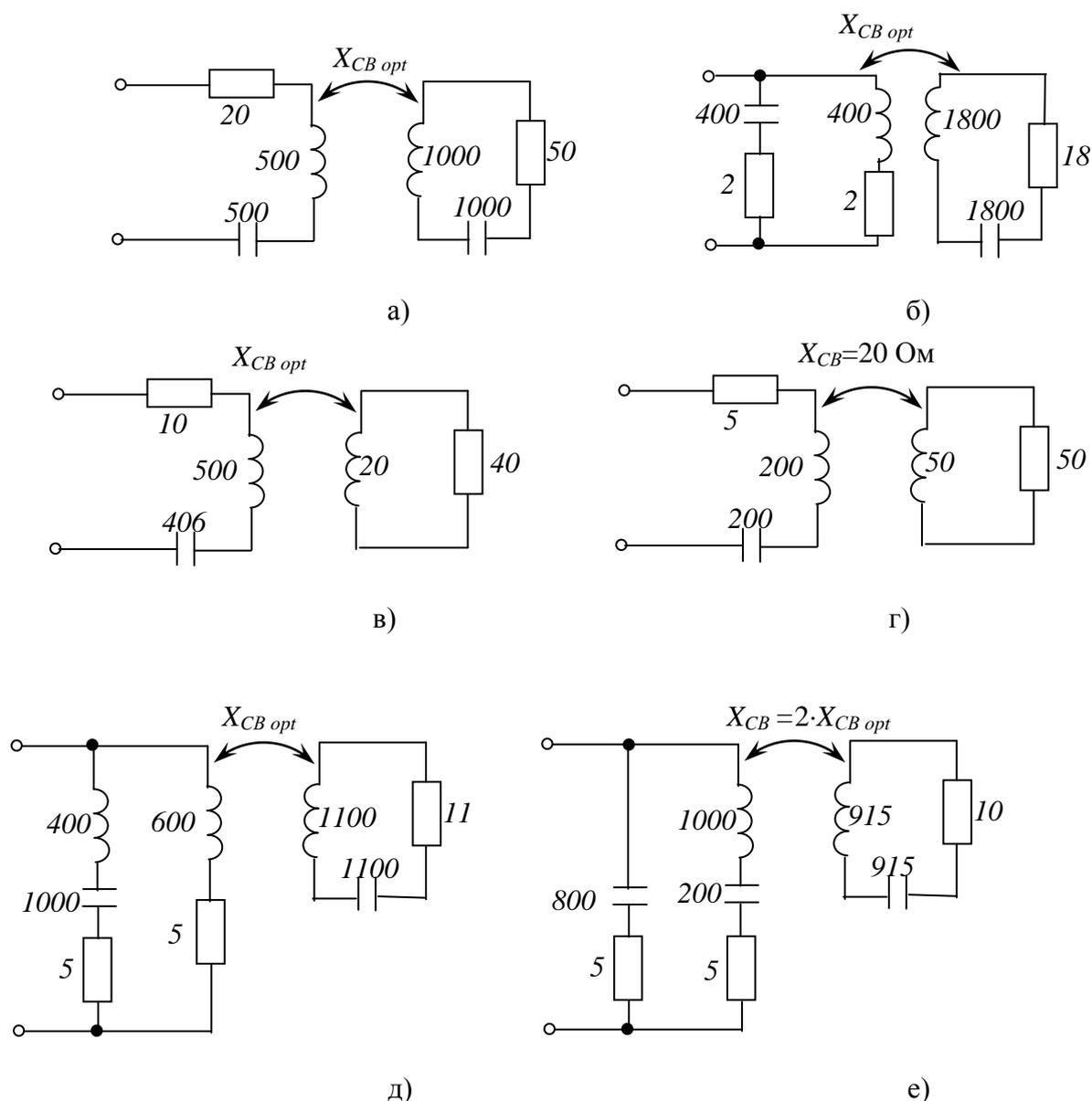


Рисунок 7.8 - Схемы двухполюсников со связанными контурами.

7.4.10. Каждый из одинаковых контуров двухконтурной связанной системы настроен в резонанс,  $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $P_2 = 10 \text{ кВт}$ . Найти токи  $I_1$  и  $I_2$ . Установить тип резонанса, ответ пояснить. Определить, во сколько раз полоса пропускания системы шире полосы пропускания контура входящего в нее? Изобразить характер зависимости  $I_2(\omega)$  при указанных условиях и установить типы резонансов в экстремальных точках резонансной кривой.

Ответ: 22,36 А; 44,72 А; в 2,65 раза.

7.4.11. Система состоит из двух связанных колебательных контуров. Оба контура настроены на частоту генератора, последовательно подключенного к первичному контуру и имеющего  $e(t) = \cos 106t \text{ В}$ ;  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $M = 20 \text{ мкГн}$ . Найти мощность, выделяющуюся во вторичном контуре и к.п.д. Установить тип резонанса на частоте генератора, ответ обосновать. Изобразить вид АЧХ при заданной связи.

Ответ: 556 мВт; 67 %.

7.4.12. Сопротивление потерь первого контура системы связанных контуров 5 Ом, второго - 4 Ом, эффективное значение э.д.с., включенной в первый контур - 60 В. Подобрать

сопротивление связи, обеспечивающее передачу во второй контур мощности 100 Вт. Каждый контур в отдельности настроен на частоту э.д.с. Изобразить характер АЧХ  $I_2(\omega)$ , соответствующий расчетным значениям сопротивления связи. Определить  $I_2P$  на частоте генератора и установить тип резонанса.

Ответ:  $\pm 10$  Ом или  $\pm 2$  Ом; 5 А.

7.4.13. Система состоит из двух подобных связанных колебательных контуров. Резонансная частота каждого отдельно взятого контура 600 кГц. Добротность каждого из контуров  $Q_1 = Q_2 = 40$ . Определить полосу пропускания системы при коэффициентах связи  $k_1 = 0,4$  кКР,  $k_2 =$  кКР и  $k_3 = 2$  кКР. Изобразить резонансные кривые  $I_2(\omega)$  для заданных значений связи.

Ответ: 11,6 кГц; 21,2 кГц; 39,6 кГц.

7.4.14. Система состоит из двух одинаковых колебательных контуров, настроенных на 600 кГц, фактор связи  $A = 1$ . Определить добротность контуров, если полоса пропускания системы 12 кГц.

Ответ: 70,5.

7.4.15. Определить полосу пропускания системы двух одинаковых связанных колебательных контуров, если  $L_1 = L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $M =$  МКР.

Ответ: 9,01 кГц.

7.4.16. Два связанных контура настроены в частный резонанс. Генератор с напряжением 50 В последовательно включен в первый контур, который имеет реактивное сопротивление 20 Ом, активное сопротивление 4 Ом. Второй контур соответственно имеет 15 Ом и 5,6 Ом. Определить сопротивление связи, максимальный ток в первом контуре и к.п.д. системы.

Ответ: 18,5 Ом; 4,34 А; 65,15%.

7.4.17. Два индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс на частоту генератора 500 кГц, включенного последовательно в первый контур. Напряжение генератора 40 В. Контур имеет активные сопротивления по 20 Ом. Емкость контура 1000 пФ. Определить напряжение на конденсаторе второго контура на резонансной частоте и полосу пропускания системы.

Ответ: 318 В; 44,3 кГц.

7.4.18. Приемная антенна (рисунок 7.9) индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром, параметры которого  $C = 300$  пФ,  $R = 8$  Ом;  $M = 20$  мкГн. Определить напряжение на сетке лампы, если ток  $I$  в приемной антенне 0,17 мкА.

Ответ: 1,42 мВ.

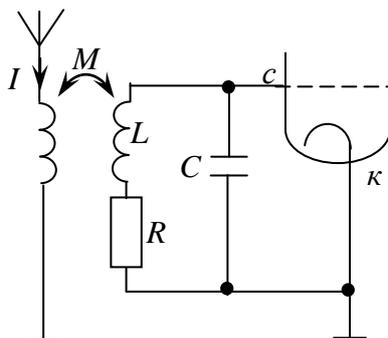


Рисунок 7.9 - Схема входной цепи.

7.4.19. Приемная антенна индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром (см. рисунок 7.9). Определить напряжение на сетке лампы по следующим данным:  $fP = 2$  МГц,  $M = 10$  мкГн,  $L = 30$  мкГн,  $R = 10$  Ом, ток в антенне  $I = 1$  мкА.

Ответ: 4,73 мВ.

7.4.20. Система состоит из двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $L1 = 100$  мкГн,  $R1 = 2$  Ом,  $L2 = 400$  мкГн,  $C2 = 100$  пФ,  $R2 = 8$  Ом.

Рассчитать:

1) значение  $C1$ ,  $M$  и частоту входного воздействия, при которых в системе наступает полный резонанс;

2) амплитуду  $E_m$  э.д.с., последовательно включенной в первый контур, при которой амплитудное значение тока во втором контуре равно 0,5 А;

3) амплитудное значение тока в первом контуре;

4) мощность, выделяемую в первом и втором контурах и к.п.д. системы;

5) абсолютную и относительную полосу пропускания системы.

Ответ: 400 пФ; 0,8 мкГн;  $5 \cdot 10^6$  рад/с; 4 В; 1 А; 1 Вт; 50 %;

$28,2 \cdot 10^3$  рад/с;  $5,64 \cdot 10^{-3}$ .

7.4.21. Дана система из двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров, каждый из которых настроен на частоту  $fP = 106$  Гц, частота генератора больше частоты  $fP$  на 3,18 кГц. Данные контуров:  $L = 500$  мкГн,  $R = 10$  Ом.

Найти взаимную индукцию  $M_{opt}$ , при которой ток во втором контуре на частоте генератора будет максимально возможным. Какой тип резонанса имеет место в системе при этих условиях? Ответ поясните.

Ответ: 3,55 мкГн.

7.4.22. Рассчитать необходимые параметры связанных контуров  $C1$ ,  $C2$ ,  $M_{opt}$  при полном резонансе, а также полосу пропускания системы, если  $L1 = 100$  мкГн,  $R1 = 8$  Ом,  $L2 = 400$  мкГн,  $R2 = 32$  Ом, частота входного воздействия 400 кГц.

Ответ: 1600 пФ; 400 пФ; 6,37 мкГн; 17,96 кГц.

7.4.23. Оба контура системы (рисунок 7.10) порознь настроены в резонанс на частоту генератора, внутреннее сопротивление которого  $R_i = 2$  Ом, сопротивления потерь контуров  $R1 = R2 = 2$  Ом, сопротивление емкости  $C2$  на частоте генератора равно 400 Ом. При каком значении сопротивления связи в нагрузке  $R_H = 80$  кОм будет выделяться максимальная мощность? Какова при этом относительная полоса пропускания системы  $SOC$ , если  $L1 = L2$ ?

Ответ: 4 Ома; 0,0141.

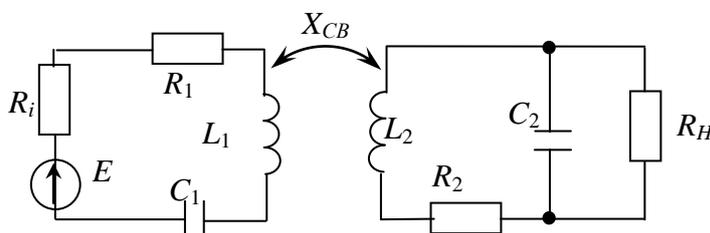


Рисунок 7.10 -Схема связанных контуров.

7.4.24. Параметры двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $L1 = 200$  мкГн,  $L2 = 250$  мкГн,  $R1 = R2 = 100$  Ом,  $C2 = 900$  пФ,  $M = 40$  мкГн, частота генератора 700 кГц. Рассчитать значение  $C1$ , при котором будет выполняться условие частного резонанса. Во сколько раз величина тока при частном резонансе меньше величины тока при сложном резонансе, который может быть достигнут в этой системе. Поясните методику настройки в сложный резонанс на заданную частоту генератора.

Ответ: 270 пФ; 2,5 раз.

7.4.25. Система состоит из двух колебательных контуров, связанных трансформаторной связью. Источник  $e(t) = 50 \cos 106t$  В,  $L_1 = 250$  мкГн,  $L_2 = 200$  мкГн  $C_1 = 2000$  пФ,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $M = 100$  мкГн. Найти величину емкости  $C_2$  и к.п.д. при частном резонансе.

Ответ: 4545 пФ; 92,6 %.

7.4.26. Рассчитать параметры  $L$ ,  $R$  и  $M$  системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, если резонансная частота каждого контура 600 кГц, емкость 250 пФ, резонансная кривая тока  $I_2 / I_{2P}$  двугорбая и на частоте 600 кГц имеет “провал”, ордината которого 0,707, полоса пропускания системы 8 кГц. Укажите типы резонансов в экстремальных точках резонансной характеристики, дав соответствующие пояснения.

Ответ: 282 мкГн; 4,60 Ом; 2,94 мкГн.

7.4.27. Два одинаковых связанных контура имеют  $Q_1 = Q_2 = 100$ .  $\omega P_1 = \omega P_2 = 107$  рад/с, коэффициент связи 1,5 %. Пропустит ли система полосу частот в 40 кГц? Если не пропустит, то каким образом можно получить нужную полосу пропускания? Изобразить резонансную кривую  $I_2(\omega)$  при заданном коэффициенте связи. Указать, пояснив, тип резонанса в экстремумах резонансной кривой.

Ответ: 1,88 %.

7.4.28. Дан полосовой фильтр в виде связанных контуров с частотами  $fP_1 = fP_2 = 456$  кГц. Параметры контуров:  $L_1 = L_2 = 800$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 20$  Ом,  $M = 15$  мкГн. Определить емкость контуров, полосу пропускания фильтра, а также значение тока во втором контуре, если амплитуда последовательно включенной в первый контур э.д.с.  $E_m = 2$  В, а частота 456 кГц. Изобразите резонансную кривую  $I_2(\omega)$ . Укажите, пояснив, тип резонанса в экстремумах характеристики.

Ответ: 152 пФ; 11,2 кГц; 38,3 мА.

7.4.29. Два одинаковых индуктивно связанных контура настроены в полный резонанс на частоту генератора  $5 \cdot 10^6$  рад/с, включенного последовательно в первый контур.  $C_2 = 100$  пФ. Найти  $M_{opt}$ , при котором напряжение на емкости второго контура будет в 10 раз больше напряжения генератора в первом контуре; вычислить полосу пропускания системы.

Ответ: 20 мкГн;  $0,35 \cdot 10^6$  рад/с.

7.4.30. Два одинаковых колебательных контура соединены трансформаторной связью, в первый контур включен источник э.д.с.  $e(t) = 4 \cos 106t$  В,  $L_1 = L_2 = 0,5$  мГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $M = 20$  мкГн,  $\omega P_1 = \omega P_2 = 106$  рад/с. Какой вид резонанса имеет место на частоте источника? Ответ пояснить.

Определить напряжение на конденсаторе второго контура на частоте источника. Вычислить полосу пропускания системы. Изобразить АЧХ вторичного тока и рассчитать значения ординаты и абсциссы, соответствующие экстремумам резонансной кривой.

Ответ: 80 В;  $5,29 \cdot 10^4$  рад/с; 0,16 А; 0,2 А;  $0,983 \cdot 10^6$  и  $1,018 \cdot 10^6$  рад/с.

7.4.31. Даны два индуктивно связанных контура, причем, частота генератора 600 кГц, а резонансная частота первого контура  $fP_1 = 610$  кГц. Найти частоту  $fP_2$  и величину взаимной индукции  $M$ , при которых ток во втором контуре системы имеет максимально возможное значение, если  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 16$  Ом,  $Q_1 = 60$ ,  $L_2 = 360$  мкГн.

Ответ: 607 кГц; 8,17 мкГн.

7.4.32. Параметры системы (см. рисунок 7.6) следующие:  $L_1 = L_2 = L = 800$  мкГн;  $C_1 = 800$  пФ,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_N = 1$  кОм,  $M = 100$  мкГн. Пользуясь теорией связанных контуров,

определите резонансную частоту и полосу пропускания системы. Для сравнения вычислите те же параметры для первого контура без учета влияния второго контура. Соблюдая относительный масштаб изобразите зависимости  $I(\omega)$  для одиночного контура  $L_1 C_1 R_1$  и  $\Pi(\omega)$  в связанной системе.

Примечание: для удобства вычислений следует обозначить искомую частоту  $\omega C = n \cdot 10^6$  и вычислять значение  $n$ .

Ответ:  $1,255 \cdot 10^6$  рад/с;  $2,27 \cdot 10^4$  рад/с;  $1,25 \cdot 10^6$  рад/с;  $1,25 \cdot 10^4$  рад/с.

7.4.33. Два индуктивно связанных контура имеют параметры:  $L_1 = 400$  мкГн,  $L_2 = 410$  мкГн,  $C_1 = 310$  пФ,  $C_2 = 290$  пФ,  $R_1 = 16$  Ом,  $R_2 = 14$  Ом,  $M = 36$  мкГн. Источник сигнала с частотой  $460$  кГц и э.д.с.  $E = 100$  В включен в первый контур последовательно. Найти фазовый сдвиг между напряжением на конденсаторе второго контура и э.д.с. на входе системы.

Ответ:  $-0,032$  рад или  $-1^\circ 50'$ .

7.4.34. Рассчитать параметры элементов двух одинаковых индуктивно связанных контуров  $L, R$  и  $M$ , если каждый контур настроен на длину волны  $\lambda P = 100$  м и имеет  $Q = 100$ ,  $C = 300$  пФ. Интервал между горбами  $6$  кГц. Вычислить полосу пропускания системы.

Ответ:  $9,39$  мкГн;  $1,77$  Ом;  $9,575 \cdot 10^{-2}$  мкГн;  $43,26$  кГц.

7.4.35. В системе двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров требуется получить двугорбую симметричную кривую вторичного тока, максимумы которой разнесены по частоте на  $20$  кГц. Оба контура порознь настроены на частоту  $1$  МГц. Вторичный ток на этой частоте должен быть в  $\sqrt{2}$  раз меньше максимально возможного. Найти значения добротности контуров и коэффициент связи между ними, обеспечивающие получение требуемой резонансной кривой; вычислить полосу пропускания системы.

Ответ:  $111,28$ ;  $2,17\%$ ;  $27,86$  кГц.

7.4.36. Система состоит из двух индуктивно связанных колебательных контуров. Э.д.с.  $E$  подключается к первому контуру последовательно. Параметры контуров:  $L_1 = 0,5$  мГн,  $L_2 = 1$  мГн,  $C_1 = 2000$  пФ,  $C_2 = 1000$  пФ,  $R_1 = 5$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $k = 8\%$ . Частота генератора равна резонансной частоте первого контура.

Находится ли система в резонансе, если да, то указать тип резонанса и привести необходимые обоснования для ответа.

Определить значение коэффициента передачи системы  $K(\omega) = \frac{U_{c2}(\omega)}{E}$  на частоте генератора. Вычислить фактор связи  $A$  и изобразить примерный вид частотной характеристики  $K(\omega)$ .

Ответ:  $17,4$ .

7.4.37. Система (см. рисунок 7.6) имеет параметры:  $L_1 = L_2 = 1$  мГн,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 1$  кОм, частота источника  $10^6$  рад/с.

Найти значения  $M$  и  $C_1$  при оптимальном резонансе. Вычислить полосу пропускания системы. Изобразить резонансную кривую  $U_{ВЫХ}(\omega)$ .

Ответ:  $141$  мкГн;  $1010$  пФ;  $22 \cdot 10^3$  рад/с.

7.4.38. Система состоит из двух связанных колебательных контуров. Частота э.д.с., включенной в первом контуре, равна  $10^6$  рад/с. Определить, возможно ли при заданной связи получить оптимальный резонанс. Если возможно, то какой именно и при каких значениях  $C_1$  и  $C_2$  он может быть получен? Параметры:  $L_1 = 2$  мГн,  $R_1 = 10$  Ом,  $L_2 = 250$  мкГн,  $R_2 = 5$  Ом.  $M = 50$  мкГн. Каков при этом получается коэффициент передачи по

напряжению  $K_U = \frac{U_{C2}}{E}$  на частоте генератора?

Ответ: 518 пФ; 4650 пФ; 15,2.

7.4.39. Параметры системы двух индуктивно связанных колебательных контуров:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 350 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 365 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = 250 \text{ пФ}$ . Оба контура в отдельности настроены в резонанс на частоту генератора, включенного в первый контур последовательно и имеющего э.д.с.  $E_m = 200 \text{ В}$ . Найти:

- 1) при каком коэффициенте связи  $k$  к.п.д. равен 75 %;
- 2) чему при этом равна мощность, выделяемая во втором контуре;
- 3) на сколько эта мощность меньше максимальной;
- 4) вычислить фактор связи и полосу пропускания системы.

Изобразить вид резонансной кривой  $I_2(\omega)$  при вычисленном значении связи.

Ответ: 1,28 %; 375 Вт; 125 Вт.

7.4.40. Параметры системы двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров:  $L_1 = L_2 = 0,5 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $\omega_{P1} = \omega_{P2} = 106 \text{ рад/с}$ ,  $M = 20 \text{ мкГн}$ . Источник сигнала с э.д.с.  $e(t) = 4 \cos 106 t \text{ В}$  включен в первый контур последовательно.

Определить какой вид резонанса имеет место в системе на частоте источника; ответ пояснить. Изобразить вид резонансной кривой  $I_2(\omega)$  при заданной связи.

Вычислить:

- 1) амплитуду напряжения  $U_{C2m}$  на частоте генератора;
- 2) к.п.д. и мощность, отдаваемую во второй контур;
- 3) полосу пропускания системы.

Ответ: 80 В; 0,8; 0,128 Вт;  $5,29 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$ .

7.4.41. Система двух одинаковых связанных колебательных контуров должна иметь полосу пропускания  $80 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$ . Контур настроен на частоту  $2 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$  и имеет добротность 50. В системе трансформаторная связь,  $M = 0,289 \text{ мкГн}$ . Источник э.д.с. с частотой  $2 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$  включен в первый контур последовательно. Определить параметры контуров, при которых система обеспечит требуемую полосу пропускания. Изобразить характер зависимости  $I_2(\omega)$ .

Ответ: 9,96 мкГн;  $25 \cdot 10^3 \text{ пФ}$ ; 0,4 Ом.

7.4.42. Система из двух колебательных контуров имеет следующие параметры:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 5 \text{ мГн}$ ,  $L_2 = 2,5 \text{ мГн}$ ,  $C_2 = 500 \text{ пФ}$ . Источник э.д.с.  $e(t) = 5 \cos 106 t \text{ В}$  включен в первый контур последовательно. Определить какой из оптимальных резонансов возможен в системе при заданных условиях. Ответ пояснить.

Вычислить значения:

- 1)  $C_1$  и  $M$ , при которых в системе имеет место оптимальный резонанс;
- 2) к.п.д. и мощности, отдаваемой во второй контур.

Ответ: 213,3 пФ; 395,3 мкГн; 0,5; 0,625 Вт.

7.4.43. Система двух связанных колебательных контуров настроена в резонанс с источником э.д.с.  $e(t) = 20 \cos 2 \cdot 10^6 t \text{ В}$ , включенным в первый контур последовательно. При этом ток во втором контуре  $I_{m2} = 200 \text{ мА}$ . Параметры системы:  $L_1 = 250 \text{ мкГн}$ ,  $C_1 = 1000 \text{ пФ}$ ,  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ .  $\omega_{P1} = \omega_{P2}$ .

Установить тип резонанса на частоте источника, ответ пояснить. Изобразить примерный график  $I_2(\omega)$  при заданных параметрах.

Вычислить:

- 1) при каком значении взаимной индукции  $M$  между контурами амплитуда тока во втором контуре равна заданному значению;
- 2) к.п.д. системы и мощность, выделяемую во втором контуре.

Ответ: 5 мкГн; 0,1; 1,2 Вт.

7.4.44. Два колебательных контура связаны трансформаторной связью и имеют параметры:  $L_1 = 180 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 200 \text{ мкГн}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 5000 \text{ пФ}$ . Э.д.с.  $e(t) = 5 \cos 106 t \text{ В}$  включена в первый контур последовательно. В системе имеет место оптимальный резонанс.

Установите тип резонанса, дав соответствующие пояснения.

Вычислите:

- 1) значения  $M$  и  $C_2$  при оптимальном резонансе;
- 2) значения к.п.д. системы, мощность потерь в первом контуре и мощность, расходуемую источником в связанной системе на резонансе.

Ответ:  $63,2 \text{ мкГн}$ ;  $3333 \text{ пФ}$ ;  $0,5$ ;  $156 \text{ мВт}$ ;  $312 \text{ мВт}$ .

7.4.45. Колебательный контур  $L, C, R$  индуктивно связан с передающей антенной, которая может быть представлена эквивалентным контуром, имеющим параметры  $R_A, X_A$ . Частота генератора меняется в пределах от  $f_1$  до  $f_2$  и при этом реактивное сопротивление антенны меняется в пределах от  $X_{A1}$  до  $X_{A2}$ . Определить значения емкости или индуктивности первого контура, при которых обеспечивается настройка заданной связанной системы по частному резонансу. Данные для расчета приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2.

№	Колебательный контур		Частота генератора				Данные антенного контура			Связь
	C пФ	L мкГн	$\lambda_1 \text{ м}$	$f_1 \text{ МГц}$	$\lambda_2 \text{ м}$	$f_2 \text{ МГц}$	$R_A \text{ Ом}$	$X_{A1} \text{ Ом}$	$X_{A2} \text{ Ом}$	M мкГн
1	400	-	680	-	600	-	16	-18	-24	20
2	300	-	650	-	620	-	10	-15	-21	20
3	-	500	-	0,8	-	0,9	10	50	10	10
4	-	400	-	0,4	-	0,5	10	40	5	30
5	-	600	-	0,4	-	0,6	12	20	6	40

Ответы к заданиям 1 и 3:

1	$L_1, \text{ мкГн}$	242
	$L_2, \text{ мкГн}$	218
3	$C_1, \text{ пФ}$	81
	$C_2, \text{ пФ}$	66,3

7.4.46. Рассчитать эквивалентное (входное) сопротивление системы, составляющей из двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров по данным таблицы 7.3. Генератор включен последовательно в первый контур.

Таблица 7.3.

№	Данные первого контура					Данные второго контура					Данные связи		Данные генератора	
	$L_1 \text{ мкГн}$	$C_1 \text{ пФ}$	$f_{P1} \text{ Ом}$	$R_1 \text{ Ом}$	$Q_1$	$L_2 \text{ мкГн}$	$C_2 \text{ пФ}$	$f_{P2} \text{ кГц}$	$R_2 \text{ Ом}$	$Q_2$	XCB Ом	M мкГн	f кГц	$\lambda \text{ м}$
1	164	600	-	4	-	195	540	-	6	-	-	4	500	-
2	-	500	340	-	30	-	460	320	-	34	-	6	330	-
3	150	650	-	5	-	200	500	-	8	-	-	4	550	-
4	-	400	350	-	25	-	400	340	-	30	-	5	360	-
5	226	220	-	6	-	248	200	-	8	-	12	-	-	420
6	-	60	3000	6	-	-	54	3004	5	-	9	-	3010	-
7	200	210	-	5	-	230	150	-	7	-	10	-	-	450
8	-	50	2900	7	-	-	52	2905	5	-	10	-	3005	-
9	374	1600	-	-	36	333	2000	-	8	-	-	10	200	-
10	350	1800	-	-	35	300	1800	-	7	-	-	8	250	-

## 7.5 Знания и умения

В результате работы над темой «Система двух связанных контуров» студент должен знать основы теории и уметь решать задачи. Конкретно следующее.

### **Знать:**

- 1) выражения для  $X_{BH}$ ,  $R_{BH}$ ,  $X_{BX}$ ,  $R_{BX}$ ,  $X_{CB\ opt}$  при полном и сложном резонансах, для токов  $I_1$  и  $I_2$  в общем случае и для любого из резонансов при последовательно включенном генераторе, для к.п.д. и мощности в каждом контуре;
- 2) методику определения резонансных частот системы и число резонансных частот в зависимости от величины связи в системах разного типа (система из двух колебательных контуров, система из колебательного и апериодического контуров);
- 3) условия наступления любого из резонансов в системе и методику настройки;
- 4) что такое “оптимальная” и что такое “критическая” связь;
- 5) Методику расчета входного сопротивления двухконтурной связанной системы при последовательном и параллельном подключении генератора к первому контуру;
- 6) методику расчета второго тока как при последовательном, так и при параллельном подключении генератора к системе;
- 7) методику вычисления фазового сдвига между любыми токами и напряжениями в двухконтурной связанной системе;
- 8) формулу АЧХ второго контура для различных значений связи в двухконтурных системах из двух одинаковых колебательных контуров и из колебательного и апериодического контуров;
- 9) как зависит полоса пропускания системы от величины связи в любой двухконтурной системе;
- 10) основные соотношения между полосами пропускания системы из двух колебательных контуров и одиночного контура при критической и максимально возможной связи между контурами.

### **Уметь:**

- 1) аргументировано установить, находится система в резонансе или нет и, если находится, то каков тип резонанса (см. п.7.3.1.);
- 2) вычислить входное сопротивление системы на заданных частотах при последовательном и параллельном подключении генератора сигнала к первому контуру (см. п.7.3.2);
- 3) вычислять токи и падения напряжения на любом участке связанной системы, а также к.п.д. и мощности в любом контуре и коэффициент передачи по напряжению на заданной частоте при известных параметрах системы;
- 4) решать обратную задачу, т.е. находить параметры системы  $C$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $k$ , обеспечивающие необходимые свойства системы: требуемую полосу пропускания, коэффициент передачи, энергетические соотношения и т.п.;
- 5) в системе из двух связанных колебательных контуров по данным, представленным в неявной форме, аргументировано установить, какова связь: критическая, выше или ниже критической (см. п.7.3.3);
- 6) вычислять полосу пропускания системы из двух колебательных контуров и системы из колебательного и апериодического контуров;
- 7) вычислять фазовый сдвиг между двумя любыми токами и напряжениями на заданной частоте.

## 7.6 Формы контроля

Тестовый опрос после изучения темы на аудиторных занятиях с целью выяснения степени усвоения основных соотношений и основных положений теории связанных контуров.

Самостоятельная работа с целью выявления навыков в решении задач по данной теме. Для самостоятельной работы используются задачи п.7.4.

## 7.7 Рекомендуемая литература

### *Основная*

Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей.-Л.: Энергия,1972.-с.174-207.

Афанасьев Б.П., Гольдин О.Е., Кляцкин И.Г., Пинес Г.Я. Теория линейных электрических цепей.-М.: Высш.шк.,1973.-с.159-185.

Гуревич И.В. Основы расчетов радиотехнических цепей.-М.: Связь.1975.-с.87-111.

Попов В.П. Основы теории линейных электрических цепей.-М.: Высш.шк.,2000.-с.211-223.

### *Дополнительная*

Гольдин О.Е. Задачник по теории электрических цепей.-М.: Высш.шк.,1969.-с.59-63.

Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах.-М.: Высш.шк.,1973.-с.171-212.

Жуков В.П., Карташев В.Г., Николаев А.М., Сборник задач по курсу “Радиотехнические цепи и сигналы”.-М.: Сов.радио.1972.-с.41-47.

## 8. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЦЕПОЧЕЧНЫЕ LC-ФИЛЬТРЫ

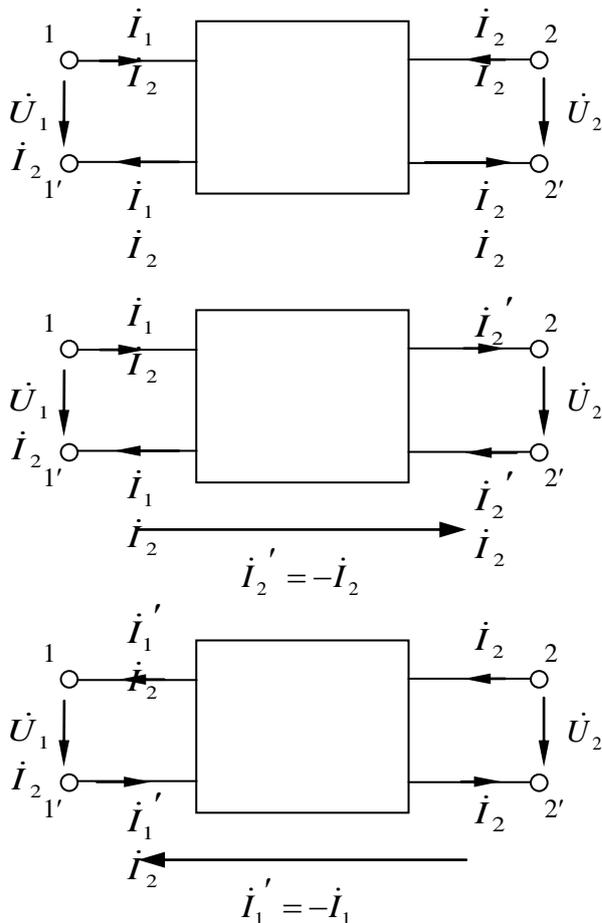
### 8.1 Цель занятия по теме «Четырехполосники»

Цель занятия - усвоить, что четырехполосник описывается разными типами параметров в зависимости от вида нагрузки; научиться методике нахождения внутренних параметров и определению их физического смысла; научиться методике определения характеристических параметров, усвоить их физический смысл; научиться определять входное сопротивление, коэффициент передачи и другие схемные функции четырехполосника при произвольных нагрузках.

### 8.2 Основные положения теории четырехполосников

#### 8.2.1 Определение и типы параметров

Устройство, имеющее две пары зажимов, токи в которых попарно равны и противоположно направлены, называется четырехполосником. На рисунке 8.1 показаны направления внешних токов и напряжений при описании четырехполосника через разные системы уравнений.



а) направления токов для описания четырехполосника через системы Z-, Y-, H-, G- параметров

б) направления токов для описания четырехполосника через A-параметры (передача слева направо)

в) направления токов для описания четырехполосника через B-параметры (передача справа налево)

Рисунок 8.1

Теория четырехполосников использует аппарат матричной алгебры и позволяет существенно упростить расчеты сложных схем.

Если четырехполюсники не содержат внутри независимых источников, то это неавтономные четырехполюсники. Ниже речь пойдет только о неавтономных линейных пассивных и активных (с зависимыми источниками) четырехполюсниках.

В зависимости от нагрузки четырехполюсник описывается тремя видами параметров:

1) внутренние (или первичные или собственные) описывают четырехполюсник в режиме

холостого хода или режиме короткого замыкания на входе или выходе;

2) характеристические (или вторичные) описывают четырехполюсник в режиме согласования;

3) рабочие описывают четырехполюсник в режиме произвольных нагрузок.

## 8.2.2 Внутренние параметры

Внешние токи и напряжения (рисунок 8.1) связаны друг с другом коэффициентами, имеющими разный смысл и разную размерность. Эти коэффициенты и называются внутренними параметрами. Число возможных перестановок из четырех по два равно шести, поэтому четырехполюсник описывается шестью системами уравнений. Все эти системы равноправны.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [\dot{Z}] \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{U}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [\dot{Y}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{H}_{11} \dot{I}_1 + \dot{H}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{I}_2 = \dot{H}_{21} \dot{I}_1 + \dot{H}_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [\dot{H}] \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{G}_{11} \dot{U}_1 + \dot{G}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{G}_{21} \dot{U}_1 + \dot{G}_{22} \dot{I}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [\dot{G}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \dot{U}_2 + \dot{A}_{12} \dot{I}_2' \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \dot{U}_2 + \dot{A}_{22} \dot{I}_2' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [\dot{A}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{I}_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{B}_{11} \dot{U}_1 + \dot{B}_{12} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2 = \dot{B}_{21} \dot{U}_1 + \dot{B}_{22} \dot{I}_1' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [\dot{B}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_1' \end{bmatrix}$$

Любая система состоит из двух уравнений и содержит четыре параметра или коэффициента, отсюда следует методика определения внутренних параметров: создать режим х.х. или к.з. на входе или выходе и подавить “лишнюю” пару параметров. Такая методика не только позволяет найти параметры, но и выявить их физический смысл. Например:

$$\dot{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{I_2' = 0} = \frac{1}{\dot{K}_{U_{xx}}} - \text{величина, обратная коэффициенту передачи по напряжению}$$

при хх на выходе,

$$\dot{A}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2'} \right|_{\dot{U}_2 = 0} - \text{передаточное сопротивление при передаче сигнала слева направо и}$$

к.з. на выходе,

$$\dot{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} - \text{входная проводимость при к.з. на выходе,}$$

$$\dot{H}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0} - \text{входное сопротивление при к.з. на выходе,}$$

$$\dot{H}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1 = 0} - \text{коэффициент передачи по напряжению справа налево при х.х. на входе.}$$

Примечание: если схема четырехполюсника совпадает с двухконтурной, то матрица  $\dot{Z}$  - параметров совпадает с матрицей сопротивлений по методу контурных токов; если схема четырехполюсника имеет два узла (входной и выходной) кроме опорного, то матрица  $\dot{Y}$  - параметров совпадает с матрицей проводимостей по методу узловых потенциалов.

Так как все системы описывают один и тот же четырехполюсник, то между параметрами существуют однозначные связи, представленные таблицей 8.1.

Примечание: таблица 8.1 из учебника /1/ соответствует направлениям токов, указанным на рисунке 8.1; при использовании подобных таблиц из других источников сначала уточните, какие направления токов использует автор, так как иной выбор направления токов ведет к частичному изменению знаков в таблицах.

Кроме того, существуют связи между параметрами внутри одной и той же системы. Если произвольный неавтономный четырехполюсник описывается четырьмя независимыми параметрами, то обратимый (а все пассивные – обратимые) только тремя независимыми, т.к.

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}, \quad \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}, \quad \Delta_A = 1, \quad \Delta_B = 1, \quad \dot{H}_{12} = -\dot{H}_{21}, \quad \dot{G}_{12} = -\dot{G}_{21}, \quad (8.1)$$

где  $\Delta_A$  и  $\Delta_B$  - определители матриц соответственно А- и В-параметров;

электрически симметричные четырехполюсники имеют только два независимых параметра, т.к. к условиям (8.1) добавляются условия (8.2):

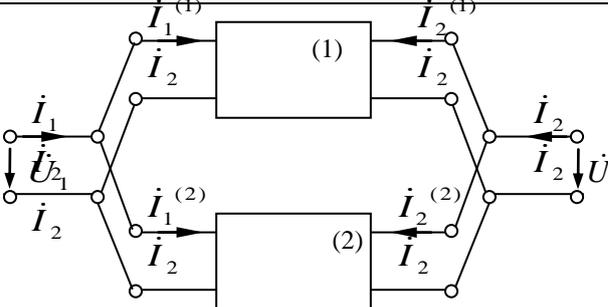
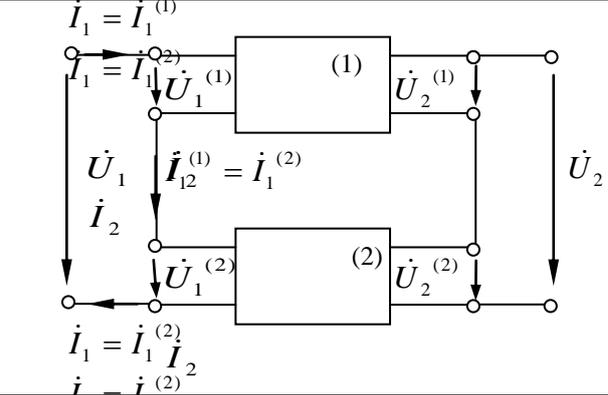
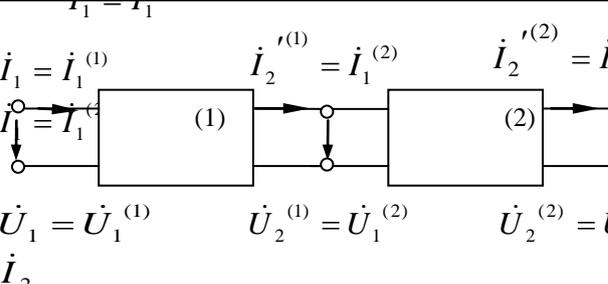
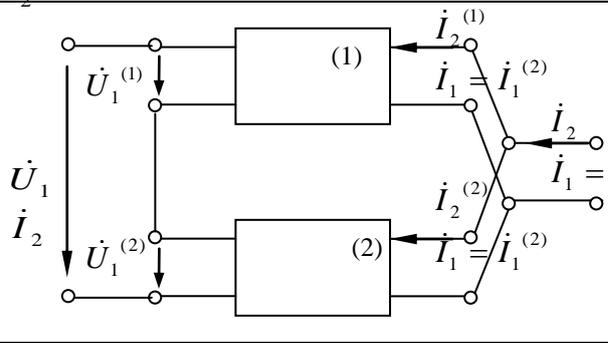
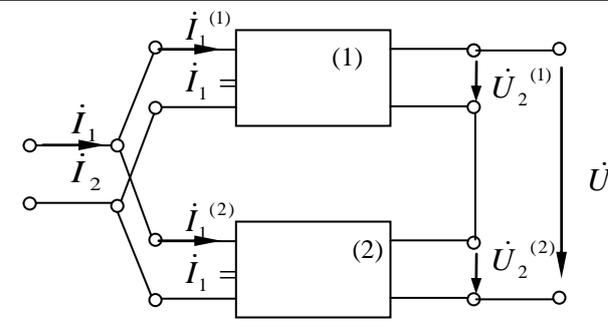
$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22}, \quad \dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{22}, \quad \dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}, \quad \dot{B}_{11} = \dot{B}_{22}, \quad \Delta_H = 1, \quad \Delta_G = 1, \quad (8.2)$$

где  $\Delta_H$  и  $\Delta_G$  - определители матриц Н - и G- параметров.

Таблица 8.1 - Соотношения между первичными параметрами четырехполосников

	Y		Z		H		G		A		B	
Y	$Y_{11}$	$Y_{12}$	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$	$\frac{-Z_{12}}{\Delta_Z}$	$\frac{1}{H_{11}}$	$\frac{-H_{12}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{-G_{22}}$	$\frac{G_{12}}{G_{22}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$	$\frac{-\Delta_A}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$	$\frac{-1}{B_{12}}$
	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$\frac{-Z_{21}}{\Delta_Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$\frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$\frac{-G_{21}}{G_{22}}$	$\frac{1}{G_{22}}$	$\frac{-1}{A_{12}}$	$\frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{-\Delta_B}{B_{12}}$	$\frac{B_{22}}{B_{12}}$
Z	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$	$\frac{-Y_{12}}{\Delta_Y}$	$Z_{11}$	$Z_{12}$	$\frac{\Delta_H}{H_{22}}$	$\frac{H_{12}}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}}$	$\frac{-G_{12}}{G_{11}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$	$\frac{\Delta_A}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$	$\frac{1}{B_{21}}$
	$\frac{-Y_{21}}{\Delta_Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	$Z_{21}$	$Z_{22}$	$\frac{-H_{21}}{H_{22}}$	$\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{G_{21}}{G_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{11}}$	$\frac{1}{A_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{21}}$	$\frac{B_{11}}{B_{21}}$
H	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$H_{11}$	$H_{12}$	$\frac{G_{22}}{\Delta_G}$	$\frac{-G_{12}}{\Delta_G}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$	$\frac{\Delta_A}{A_{22}}$	$\frac{B}{B_{11}}$	$\frac{1}{B_{11}}$
	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$H_{21}$	$H_{22}$	$\frac{-G_{21}}{\Delta_G}$	$\frac{G_{11}}{\Delta_G}$	$\frac{-1}{A_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{-\Delta_B}{B_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{11}}$
G	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta_H}$	$\frac{-H_{12}}{\Delta_H}$	$G_{11}$	$G_{12}$	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{-\Delta_A}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$	$\frac{-1}{B_{22}}$
	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{-H_{21}}{\Delta_H}$	$\frac{H_{11}}{\Delta_H}$	$G_{21}$	$G_{22}$	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{22}}$
A	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$	$\frac{-\Delta_H}{H_{21}}$	$\frac{-H_{11}}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}}$	$\frac{G_{22}}{G_{21}}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$\frac{B_{22}}{\Delta_B}$	$\frac{B_{12}}{\Delta_B}$
	$\frac{-\Delta_Y}{Y_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-H_{22}}{H_{21}}$	$\frac{-1}{H_{21}}$	$\frac{G_{11}}{G_{21}}$	$\frac{\Delta_G}{G_{21}}$	$A_{21}$	$A_{22}$	$\frac{B_{21}}{\Delta_B}$	$\frac{B_{11}}{\Delta_B}$
B	$\frac{-Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{-1}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{12}}$	$\frac{1}{H_{12}}$	$\frac{H_{11}}{H_{12}}$	$\frac{-\Delta_G}{G_{12}}$	$\frac{-G_{22}}{G_{12}}$	$\frac{A_{22}}{\Delta_A}$	$\frac{A_{12}}{\Delta_A}$	$B_{11}$	$B_{12}$
	$\frac{-\Delta_Y}{Y_{12}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{H_{22}}{H_{12}}$	$\frac{\Delta_H}{H_{12}}$	$\frac{-G_{11}}{G_{12}}$	$\frac{-1}{G_{12}}$	$\frac{A_{21}}{\Delta_A}$	$\frac{A_{11}}{\Delta_A}$	$B_{21}$	$B_{22}$

Способы объединения простых четырехполосников в сложные (или составные) и соответствующие им матричные уравнения представлены в таблице 8.2

Схема соединения	Название соединения и матричное уравнение
	<p>Параллельное</p> $\begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y^{(2)} \end{bmatrix}$
	<p>Последовательное или этажное</p> $\begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z^{(2)} \end{bmatrix}$
	<p>Каскадное</p> $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{(2)} \end{bmatrix}$
	<p>Последовательно-параллельное</p> $\begin{bmatrix} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{(2)} \end{bmatrix}$
	<p>Параллельно-последовательное</p> $\begin{bmatrix} G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^{(2)} \end{bmatrix}$

**Примечание:** соотношения, указанные в таблице 8.2, справедливы только для регулярного соединения четырехполюсников, т. е. такого соединения в результате которого

не происходит изменения параметров соединяемых четырехполюсников; подробнее см. /1,с.413-414/ или /2,с.387-388/.

### 8.2.3 Характеристические параметры

Характеристическое сопротивление  $\dot{Z}_C$  есть среднее геометрическое из входных сопротивлений при к.з. на выходе и х.х. на входе

$$\dot{Z}_C = \sqrt{\dot{Z}_{BKЗ} \cdot \dot{Z}_{BXХ}} \quad (8.3)$$

В общем случае  $\dot{Z}_C$  с разных сторон четырехполюсника разные

$$\dot{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{11} \cdot \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21} \cdot \dot{A}_{22}}}, \quad \dot{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{22} \cdot \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21} \cdot \dot{A}_{11}}} \quad (8.4)$$

Для электрически симметричных четырехполюсников

$$\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = \dot{Z}_C = \sqrt{\frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}}} \quad (8.5)$$

Свойство характеристического сопротивления: если сопротивление нагрузки с одной из сторон четырехполюсника равно характеристическому сопротивлению с той же стороны, то входное сопротивление с другой стороны становится характеристическим

$$\dot{Z}_{HСПРАВА} = \dot{Z}_{C2}, \quad \dot{Z}_{BKСЛЕВА} = \dot{Z}_{C1}$$

и наоборот

$$\dot{Z}_{HСЛЕВА} = \dot{Z}_{C1}, \quad \dot{Z}_{BKСПРАВА} = \dot{Z}_{C2}$$

Характеристическая постоянная передачи

$$\dot{g}_c = a_c + jb_c,$$

где  $a_c$  - характеристическое затухание,

$b_c$  - характеристическая фазовая постоянная.

Значения  $g_c$ ,  $a_c$  и  $b_c$  определяются в режиме полного согласования (рисунок 8.2) и индекс "с" подчеркивает этот факт.

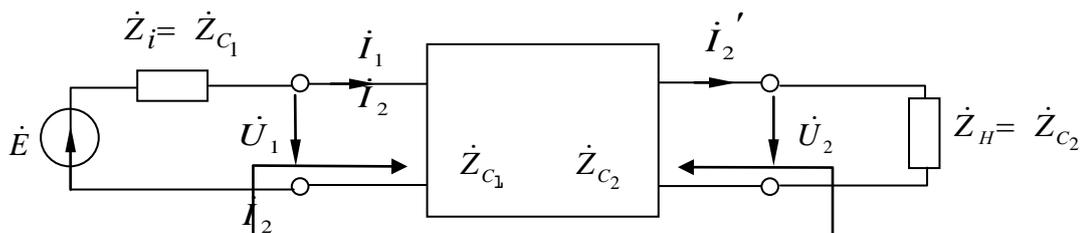


Рисунок 8.2

Примечание: не следует путать условие согласования  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_i$  и условие отдачи максимальной активной мощности  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_i^*$ , где, в общем случае,  $\dot{Z}_i$  - внутреннее сопротивление источника, а  $\dot{Z}_H$  - сопротивление нагрузки.

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2'} = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Z}_{c2}}{\dot{Z}_{c1}}} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2'} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c2}}} \quad (8.6)$$

Для электрически симметричного четырехполюсника

$$\dot{g}_c = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2'} \quad (8.7)$$

или

$$e^{-g_c} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2'}{\dot{I}_1} \quad (8.8)$$

Смысловое значение  $a_c$  и  $b_c$  в симметричном четырехполюснике видно из соотношения (8.9)

$$e^{-a_c} \cdot e^{-jb_c} = |\dot{K}_{UC}| e^{j\varphi_{\dot{K}_{UC}}}, \quad (8.9)$$

где 
$$e^{-a_c} = \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} = |\dot{K}_{UC}|,$$

$$b_c = -\varphi_{\dot{K}_{UC}} = -(\varphi_{\dot{U}_2} - \varphi_{\dot{U}_1}),$$

$\dot{K}_{UC}$  - коэффициент передачи четырехполюсника в режиме полного согласования.

Значения  $b_c$  измеряются в градусах или радианах, значения  $a_c$  в неперах или децибеллах:

$$\left. \begin{aligned} \text{в неперах} \quad a_c &= \ln \frac{A_1}{A_2} = 2,3 \lg \frac{A_1}{A_2}, \\ \text{в децибеллах} \quad a_c &= 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 20 \lg \frac{A_1}{A_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  - либо значения напряжений, либо значения токов.

Из (8.10) следует, что

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ неп} &\approx 8,69 \text{ дБ} \\ 1 \text{ дБ} &\approx 0,115 \text{ неп} \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

В выражениях (8.7) - (8.9) следует использовать  $a_c$  в неперах и  $b_c$  в радианах.

В случае каскадного согласованного включения (рисунок 8.3)

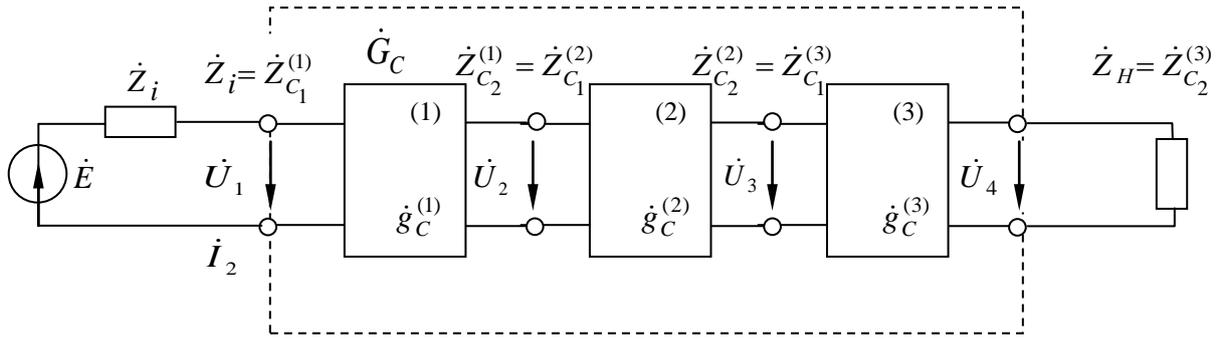


Рисунок 8.3

$$e^{-\dot{G}_C} = \frac{\dot{U}_4}{\dot{U}_1} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}^{(1)}}{\dot{Z}_{C2}^{(3)}}} = e^{-\dot{g}_C^{(2)}} \cdot e^{-\dot{g}_C^{(2)}} \cdot e^{-\dot{g}_C^{(3)}}$$

$$\dot{G}_C = \sum_i \dot{g}_C^{(i)} \quad (8.12)$$

При этом  $\dot{K}_{UC}$  всей схемы рисунка 8.3 определяется выражением (8.13)

$$\dot{K}_{UC} = \dot{K}_{UC}^{(1)} \cdot \dot{K}_{UC}^{(2)} \cdot \dot{K}_{UC}^{(3)} \quad (8.13)$$

Внутренние и характеристические параметры связаны между собой и могут быть найдены друг через друга. В выражениях (8.4) и (8.5)  $\dot{Z}_C$  уже дано через А-параметры, а

$$e^{\dot{g}_C} = \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}} + \sqrt{\dot{A}_{11} \cdot \dot{A}_{22}} \quad (8.14)$$

В свою очередь А-параметры выражаются через характеристические

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_{C2}}} \cdot ch \dot{g}_C, & \dot{A}_{12} &= \sqrt{\dot{Z}_{C1} \cdot \dot{Z}_{C2}} \cdot sh \dot{g}_C \\ \dot{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\dot{Z}_{C1} \cdot \dot{Z}_{C2}}} sh \dot{g}_C, & \dot{A}_{22} &= \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C2}}{\dot{Z}_{C1}}} \cdot ch \dot{g}_C \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

## 8.2.4 Рабочие параметры

Рабочая постоянная передачи  $\dot{g}_p = a_p + jb_p$  определяется для произвольно нагруженного четырехполюсника

$$\dot{g}_p = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_0 \cdot \dot{I}_0'}{\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_2} \quad (8.16)$$

где  $\dot{U}_2, \dot{I}_2'$  - напряжение и ток на выходе произвольно нагруженного четырехполюсника, работающего от генератора с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_i$  и э.д.с.  $\dot{E}$ ,  
 $\dot{U}_0, \dot{I}_0$  - напряжение и ток на полностью согласованной нагрузке, подключенной непосредственно к прежнему генератору в соответствии с рисунком 8.4.

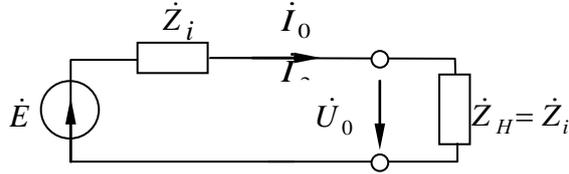


Рисунок 8.4

### 8.2.5 Схемные функции

Схемные функции произвольно нагруженного четырехполюсника ( $\dot{Z}_H \neq \dot{Z}_{C2}$  и  $\dot{Z}_i \neq \dot{Z}_{C1}$  в общем случае) (рисунок 8.5.) могут быть выражены через любые первичные параметры,

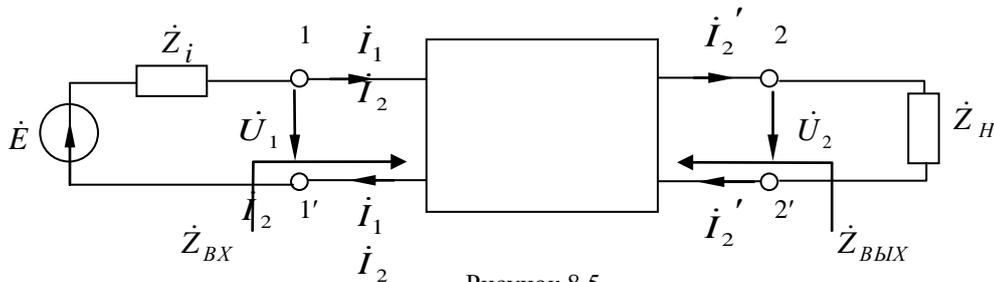


Рисунок 8.5

например,

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{Z}_H}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}} = -\frac{\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_H}, \quad (8.17)$$

$$\dot{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}} = \frac{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_H}{\Delta_Y + \dot{Y}_{11}\dot{Y}_H}, \quad (8.18)$$

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{I}_2'}{\dot{I}_1} = \frac{1}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}}, \quad (8.19)$$

где  $\dot{Y}_H = \frac{1}{\dot{Z}_H}$ , а  $\Delta_Y$  - определитель матрицы  $Y$  - параметров.

При определении  $\dot{Z}_{ВЫХ}$  источник  $\dot{E}$  помещается последовательно с  $\dot{Z}_H$ , а зажимы 1-1' соединяются через  $Z_i$

$$\dot{Z}_{ВЫХ} = \frac{\dot{A}_{22}\dot{Z}_i + \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}\dot{Z}_i + \dot{A}_{11}} = \frac{\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_i}{\Delta_Y + \dot{Y}_{22}\dot{Y}_i}, \quad (8.20)$$

$$\dot{Y}_i = \frac{1}{\dot{Z}_i}.$$

где

Схемные функции могут быть выражены через любые другие параметры с помощью таблицы 8.1.

### 8.3 Методические указания и примеры решения задач

**Задача 1.** Для заданного четырехполюсника (рисунок 8.6) определить параметры.

A-

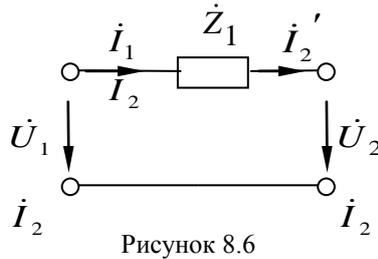


Рисунок 8.6

**Решение.**

**Вариант 1.** В соответствии с общей методикой поочередного устранения пары искомых параметров из системы A-параметров следует

$$\dot{A}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\substack{i_2' = 0 \\ \text{к.з. на вых.}}} = 1, \quad \text{т.к. на } Z_1 \text{ нет падения напряжения;}$$

$$\dot{A}_{21} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{i_2' = 0} = 0, \quad \text{т.к. } i_1 = i_2' = 0;$$

$$\dot{A}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_2} \Big|_{\substack{U_2 = 0 \\ \text{к.з. на вых.}}} = \dot{Z}_1, \quad \text{т.к. } i_2' = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1};$$

$$\dot{A}_{22} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2'} \Big|_{U_2 = 0} = 1, \quad \text{т.к. } i_1 = i_2' \text{ при к.з. на выходе.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В матричной форме

Проверка:  $\Delta A = 1$ , что соответствует пассивным цепям.

**Вариант 2.** Определим Y - параметры через матрицу проводимостей по методу узловых потенциалов, т.к. схема содержит два узла, кроме общего, опорного.

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} \end{bmatrix}$$

Перейдём к А-параметрам в соответствии с таблицей 8.1.

$$\begin{aligned} \dot{A}_{11} &= -\frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{21}} = 1, & \dot{A}_{12} &= -\frac{1}{\dot{Y}_{21}} = Z_1, \\ \dot{A}_{21} &= \frac{-\Delta_Y}{\dot{Y}_{21}} = 0, & \dot{A}_{22} &= -\frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{21}} = 1. \end{aligned}$$

т.к.  $\Delta Y = 0$ ;

Оба варианта дают одинаковый результат.

**Задача 2.** Определить А- и Y-параметры для четырехполюсника на рисунке 8.7а.

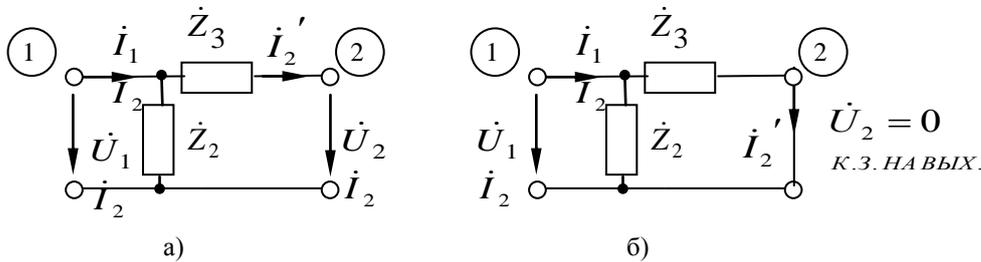


Рисунок 8.7

**Решение.**

В соответствии с общей методикой, как это сделано в первом варианте в задаче 1, по схеме рисунка 8.7.а (х.х. на выходе):

$$\dot{A}_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1, \quad \dot{A}_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 \dot{Z}_2} = \frac{1}{\dot{Z}_2};$$

по схеме рисунка 8.7.б (к.з. на выходе):

$$\dot{A}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2'} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 / \dot{Z}_3} = \dot{Z}_3, \quad \dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2'} = \frac{\dot{U}_1 / \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{U}_1 / \dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2}.$$

$\dot{A}_{22}$  можно было определить из условия  $\Delta A = 1$  при известных остальных параметрах. Для определения Y-параметров можно воспользоваться общей методикой

$$\dot{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0, \text{ к.з. на вых.}}, \quad \dot{Y}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2 = 0, \text{ к.з. на вых.}},$$

что соответствует схеме 8.8.а;

$$\dot{Y}_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\substack{\dot{U}_1 = 0 \\ \text{К.З. НА ВХ.}}}, \quad \dot{Y}_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\substack{\dot{U}_1 = 0 \\ \text{К.З. НА ВХ.}}}$$

что соответствует схеме 8.8.б.

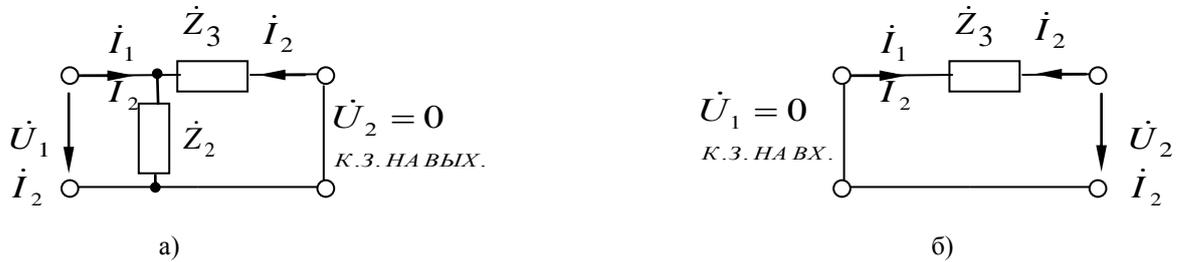


Рисунок 8.8

Для определения  $Y$ -параметров можно воспользоваться формулами перехода от  $A$ -параметров к  $Y$ -параметрам в таблице 8.1. И, наконец, т.к. в схеме (рисунок 8.7.а) только два узла, кроме опорного, проще всего определить  $Y$ -параметры через матрицу проводимостей по методу узловых потенциалов

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} & -\frac{1}{\dot{Z}_3} \\ -\frac{1}{\dot{Z}_3} & \frac{1}{\dot{Z}_3} \end{bmatrix}$$

**Задача 3.** Определить  $A$ -параметры  $T$ -образной схемы на рисунке 8.9

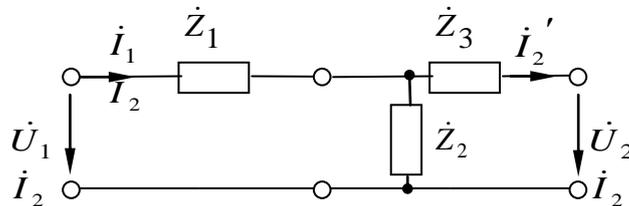


Рисунок 8.9

**Решение.**

Т.к. заданную схему можно рассматривать как каскадное соединение двух четырехполюсников с известными параметрами, то в соответствии с соотношениями из таблицы 8.2

$$[A_T] = [A_{\equiv}] \times [A_{\Gamma}] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & Z_3 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2} & \frac{\dot{Z}_2 + Z_3}{\dot{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$[A_T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_3 + \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

Обратите внимание, что в случае симметричной схемы на рисунке 8.9, т.е.  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3$ ,  $\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22}$  и независимо от симметрии  $\Delta A = 1$ .

**Задача 4.** Найти коэффициент передачи  $\dot{K}_U$  для схемы рисунка 8.9, нагруженной на сопротивление  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_2$ , при условии, что  $\dot{Z}_3 = \dot{Z}_1$ . Получить такое же выражение  $\dot{K}_U$  одним из нижеперечисленных способов: по методу контурных токов, по методу узловых потенциалов, по методу эквивалентного генератора, с использованием эквивалентных преобразований.

**Решение.**

В соответствии с выражением (8.17)

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{Z}_H}{\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}}$$

В задаче 3 были определены А-параметры Т-образной схемы; с учетом  $\dot{Z}_3 = \dot{Z}_1$

$$\dot{A}_{11} = 1 + \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2},$$

$$\dot{A}_{12} = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_1(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1)}{\dot{Z}_2} = 2 \cdot \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_1^2}{\dot{Z}_2}.$$

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{Z}_2}{\left(1 + \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right)\dot{Z}_2 + 2 \cdot \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_1^2}{\dot{Z}_2}} = \frac{\dot{Z}_2^2}{\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2 + 3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}.$$

Получим  $\dot{K}_U$  последним из заданных способов. Схему рисунка 8.10а представим в виде схемы на рисунке 8.10б.

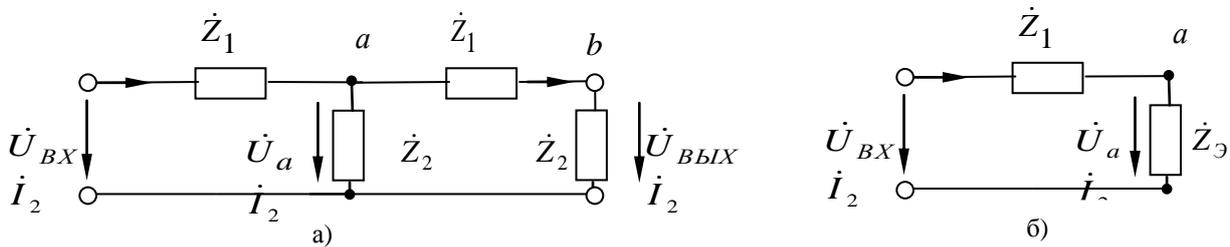


Рисунок 8.10

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_2 \cdot (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)}{\dot{Z}_2 + (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)},$$

$$\dot{K}_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{U}_{BX}} = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}, \quad \dot{K}_b = \frac{\dot{U}_{BYLX}}{\dot{U}_a} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2},$$

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_{BYLX}}{\dot{U}_{BX}} = \dot{K}_a \cdot \dot{K}_b = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} \cdot \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_2^2}{\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2 + 3\dot{Z}_1\dot{Z}_2}.$$

Итоговые выражения  $\dot{K}_U$ , его АЧХ и ФЧХ зависят от конкретного содержания двухполюсников  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3$  и  $\dot{Z}_H$ .

Например, для частного случая  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3 = j\omega L$ ,  $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_H = R$

$$\dot{K}_U = \frac{R^2}{-\omega^2 L^2 + R^2 + j\omega LR}$$

$$|\dot{K}_U| = \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 - \omega^2 L^2)^2 + (\omega LR)^2}}$$

$$\varphi_{\dot{K}_U} = -\operatorname{arctg} \frac{\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2}$$

**Примечание:** 1) для типовых схем (Г-, Т-, П-образных и ряда других) значения первичных параметров табулированы, что существенно упрощает расчеты схемных функций достаточно сложных цепей, если они могут быть представлены известными соединениями таких четырехполюсников;

2) преимущества теории четырехполюсников невозможно оценить в процессе решения задач для простых схем; некоторое представление о преимуществах использования теории четырехполюсников дает следующая задача.

Задача 5. Транзистор описывается известными Н-параметрами. Оценить влияние обратной связи при известном значении  $\dot{Y}_{OC}$  на функции коэффициента передачи и входного сопротивления  $\dot{Z}_{BX}$  (рисунок 8.11).

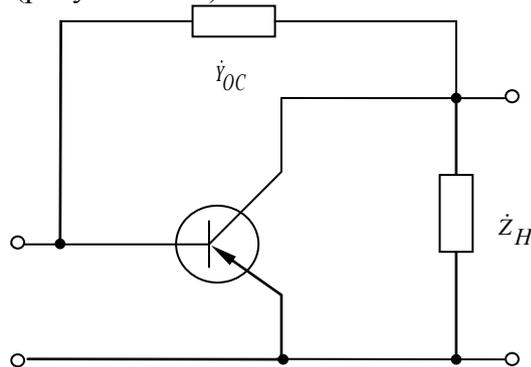


Рисунок 8.11

**Решение.**

Схему рисунка 8.11 можно рассматривать как параллельное соединение четырехполюсника транзистора и четырехполюсника обратной связи (рисунок 8.12).

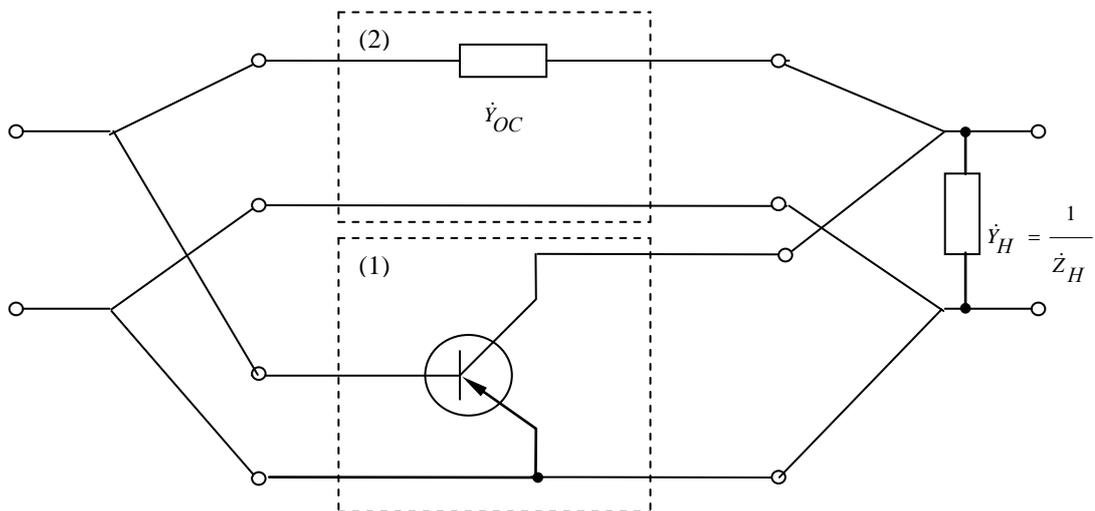


Рисунок 8.12

**Основные этапы решения:**

1) от H-параметров транзистора по соотношениям таблицы 8.1 перейти к Y-параметрам, т.к. соединение параллельное

$$[Y^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{H}_{11}} & -\frac{\dot{H}_{12}}{\dot{H}_{11}} \\ \frac{\dot{H}_{21}}{\dot{H}_{11}} & \frac{\Delta_H}{\dot{H}_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} ;$$

2) записать Y-параметры для четырехполюсника обратной связи

$$[Y^{(2)}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{OC} & -\dot{Y}_{OC} \\ -\dot{Y}_{OC} & \dot{Y}_{OC} \end{bmatrix} ;$$

3) найти Y-параметры полной схемы как

$$[Y] = [Y^{(1)}] + [Y^{(2)}] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{OC} & \dot{Y}_{12} - \dot{Y}_{OC} \\ \dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{OC} & \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{OC} \end{bmatrix} ;$$

4) записать для нагруженного транзистора без обратной связи и нагруженного четырехполюсника с обратной связью.

В соответствии с выражением (8.17)

$$\dot{K}_U^{(1)} = -\frac{\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_H}, \quad \dot{K}_U = -\frac{\dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{OC}}{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{OC} + \dot{Y}_H};$$

5) аналогичным образом записать  $\dot{Z}_{BX}^{(1)}$  и  $\dot{Z}_{BX}$  всей схемы в соответствии с выражением (8.18);

6) используя заданные значения для транзистора и цепи обратной связи сделать вывод о влиянии обратной связи.

**Задача 6.** На некоторой частоте  $\omega_1$  параметры четырехполюсника (рисунок 8.13.а) заданы в омах. Вычислить характеристические сопротивления  $\dot{Z}_{C1}$  и  $\dot{Z}_{C2}$ .

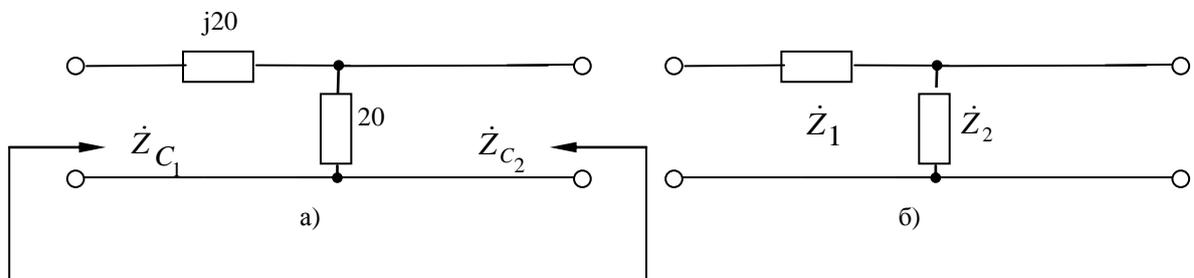


Рисунок 8.13

**Решение.**

**Вариант 1** - по выражению (8.3).

Для  $\dot{Z}_{C1}$ :  $\dot{Z}_{BX_{K3}} = j20$ ,  $\dot{Z}_{BX_{XX}} = 20 + j20$ ,

$$\dot{Z}_{C_1} = \sqrt{j20(20 + j20)} = 20\sqrt{(-1 + j)} = 20\sqrt{\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ}},$$

$$\dot{Z}_{C_1} = 23,78e^{j67,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Для  $\dot{Z}_{C_2}$ :  $\dot{Z}_{BXK3} = \dot{Z}_{BXXX} = 20$ ,

$$\dot{Z}_{C_2} = \sqrt{\frac{j20}{1+j}} \cdot 20 = 16,82 \cdot e^{j22,5^\circ} \text{ Ом.}$$

**Вариант 2** - по выражениям (8.4).

Найти А-параметры для Г-образной модели рисунка 8.13.б

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\dot{z}_1 = j20 \text{ Ом}$ ,  $\dot{z}_2 = 20 \text{ Ом}$ .

$$\dot{Z}_{C_1} = \sqrt{\frac{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1) \cdot \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_2}} = \sqrt{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) \cdot \dot{Z}_1} = \sqrt{(j20 + 20)j20} = 23,78 \cdot e^{j67,5^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{Z}_{C_2} = \sqrt{\frac{1 \cdot \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_2}{(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1)}} = \dot{Z}_2 \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}} = 20 \sqrt{\frac{j20}{j20 + 20}} = 16,82 \cdot e^{j22,5^\circ} \text{ Ом.}$$

**Задача 7.** Вычислить  $a_c$  и  $b_c$  для четырехполюсника (рисунок 8.13.а) тремя способами. Исходные данные как в задаче 6.

**Решение.**

**Вариант 1.** Определим  $\dot{g}_c$  на основе выражения (8.6)

$$e^{-\dot{g}_c} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C_1}}{\dot{Z}_{C_2}}},$$

где  $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \dot{K}_{UC}$  в режиме полного согласования (рисунок 8.14)

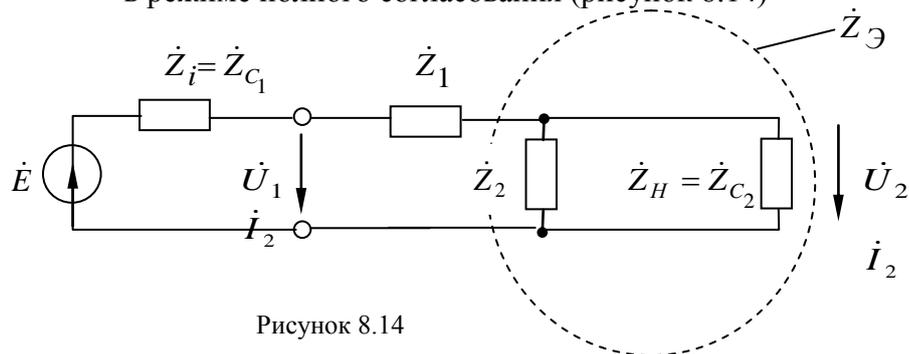


Рисунок 8.14

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{Z}_\varnothing}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_\varnothing}, \quad \dot{Z}_\varnothing = \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_{C_2}}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_{C_2}},$$

Значения  $\dot{Z}_{C_1} = 23,78e^{j67,5^\circ}$  Ом и  $\dot{Z}_{C_2} = 16,82e^{j22,5^\circ}$  Ом определены в задаче 6.

$$\dot{Z}_\varnothing = \frac{20 \cdot 16,82e^{j22,5^\circ}}{20 + 16,82e^{j22,5^\circ}} = 9,3134e^{j12^\circ 14'}$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{9,3134e^{j12^\circ 14'}}{j20 + 9,3134e^{j12^\circ 14'}} = 0,3916e^{-j55^\circ 18'}$$

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{C_1}}{\dot{Z}_{C_2}}} = \sqrt{\frac{23,78e^{j67,5^\circ}}{16,82e^{j22,5^\circ}}} = 1,189e^{j22,5^\circ}$$

$$e^{-\dot{g}_C} = 0,3916e^{-j55^\circ 18'} \cdot 1,189e^{j22,5^\circ} = 0,466e^{-j32^\circ 48'}$$

$$e^{-a_C} = 0,466, \quad -b_C = -32^\circ 46'.$$

$$a_C = 0,765 \text{ неп} \approx 6,6 \text{ дБ}, \quad b_C = 32^\circ 48'.$$

**Вариант 2.** Определим  $\dot{g}_C$  на основе выражений (8.15).

$$\dot{A}_{11} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C_1}}{\dot{Z}_{C_2}}} \cdot ch \dot{g}_C, \quad \dot{A}_{11} = \frac{1}{\dot{K}_{U_{XX}}} \text{ для схемы 8.13а.}$$

$$\dot{K}_{U_{XX}} = \frac{20}{20 + j20} = \frac{1}{1 + j}; \quad \dot{A}_{11} = 1 + j = \sqrt{2}e^{j45^\circ};$$

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}_{C_1}}{\dot{Z}_{C_2}}} = 1,189e^{j22,5^\circ}$$

- определено выше ;

$$ch \dot{g}_C = \frac{\dot{A}_{11}}{\sqrt{\frac{\dot{Z}_{C_1}}{\dot{Z}_{C_2}}}} = \frac{\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{1,189e^{j22,5^\circ}} = 1,189e^{j22,5^\circ} = 1,098 + j0,455,$$

$$\text{откуда } e^{\dot{g}_C} = 2,141e^{j32^\circ 48'},$$

$$e^{-\dot{g}_C} = 0,466e^{-j32^\circ 48'}, \quad a_C = 0,765 \text{ неп}, \quad b_C = 32^\circ 48'.$$

$$\text{Примечание: } ch \dot{g}_C = \frac{e^{\dot{g}_C} + e^{-\dot{g}_C}}{2} = \dot{N} = a + jb,$$

$$\text{если } e^{\dot{g}_C} = y, \text{ то } \begin{cases} y^2 - 2\dot{N} \cdot y + 1 = 0, \\ y_{1,2} = +\dot{N} \pm \sqrt{\dot{N}^2 - 1} \end{cases}$$

**Вариант 3.** Определим  $\dot{g}_C$  на основе выражения (8.14).

A-параметры для схемы рисунка 8.13а при  $\dot{Z}_1 = j20$  Ом,  $\dot{Z}_2 = 20$  Ом

$$[\dot{A}] = \begin{bmatrix} 1+j & j20 \\ \frac{1}{20} & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{\dot{g}_C} = \sqrt{\dot{A}_{12}\dot{A}_{21}} + \sqrt{\dot{A}_{11}\dot{A}_{22}} = \sqrt{\frac{j20}{20}} + \sqrt{(1+j)1} = 1,798 + j1,162 = 2,141 e^{j32^{\circ}49'}$$

$$e^{a_C} = 2,141, \quad a_C = 0,765 \text{ неп}, \quad b_C = 32^{\circ}49'.$$

## 8.4 Задачи для самостоятельной работы

8.4.1. Найти выражения для  $\dot{Z}_C$  T-образного четырехполюсника и  $\dot{Z}_C$  Г-образного четырехполюсника с T-образной стороны (рисунок 8.15а, в) и убедиться, что они одинаковы. Объяснить результат, исходя из свойства характеристического сопротивления (см.п.8.2.2) и каскадного согласованного включения Г-образных четырехполюсников.

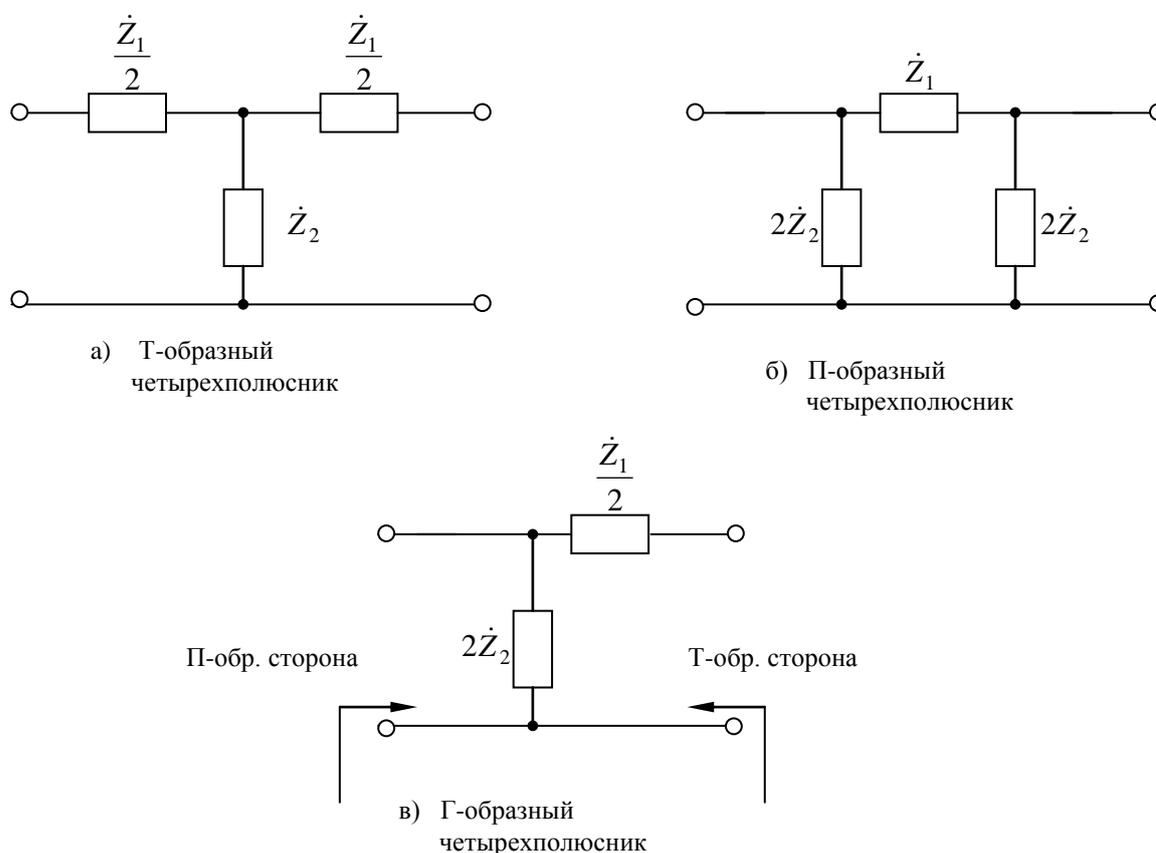


Рисунок 8.15

4.2. Доказать, что характеристические сопротивления  $\dot{Z}_C$  П-образного и Г-образного четырехполюсников (рисунок 8.15б, в) с П-образной стороны совпадают. Объяснить результат, исходя из свойства характеристического сопротивления и каскадного согласованного включения Г-образных четырехполюсников (см. п.8.2.2).

8.4.3. Получить выражение параметра  $\dot{A}_{11}$  для T- и П-образных четырехполюсников на рисунке 8.15. Сделать заключение и дать необходимые пояснения.

8.4.4. На некоторой частоте  $\omega_1$  значения сопротивлений на схемах рисунка 8.16 указаны в омах. Вычислить  $\dot{Z}_C$  для четырехполюсников а) и г). По результатам сделать заключение, дать пояснение.

8.4.5. Для четырехполюсников (рисунок 8.16б, в) вычислить значения  $\dot{Z}_C$ , если сопротивления на схемах заданы в омах. Сделать вывод, дать необходимые пояснения.

8.4.6. Любым удобным способом вычислить характеристическое затухание  $a_C$  и характеристическую фазовую постоянную  $b_C$  на частоте  $\omega_1$ , для которой значения сопротивлений указаны в омах на рисунке 8.16а, г. Результаты для схем а) и г) сравнить и сделать вывод с необходимыми пояснениями.

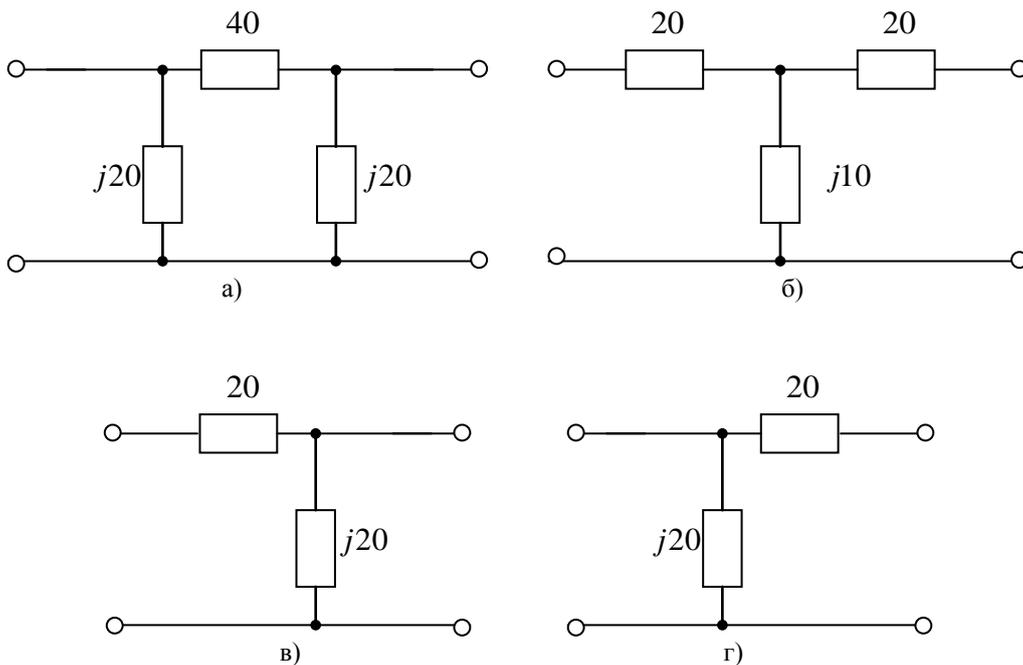


Рисунок 8.16

8.4.7. На схемах рисунка 8.16б, в сопротивления для частоты  $\omega_1$  указаны в омах. Вычислить  $a_C$  и  $b_C$  на частоте  $\omega_1$ . Сравнить результаты расчета для схем б) и в), сделать вывод с необходимыми пояснениями.

8.4.8. Для Г-образных схем в) и г) на рисунке 8.16 сопротивления указаны в омах и соответствуют некоторой частоте  $\omega_1$ . Любым удобным способом вычислить значения  $a_C(\omega_1)$  и  $b_C(\omega_1)$  по результатам вычисления сделать выводы и дать необходимые пояснения.

8.4.9. На некоторой частоте  $\omega_1$  двухполюсники на схеме рисунка 8.17 имеют следующие параметры:  $\dot{Z}_1 = j40$  Ом,  $\dot{Z}_2 = 20$  Ом,  $\dot{Z}_3 = -j60$  Ом. Получить матрицу Z-параметров и матрицу H-параметров.

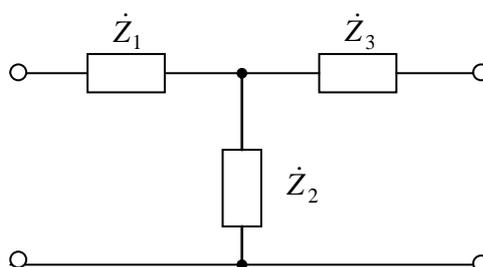


Рисунок 8.17

8.4.10. Используя выражения схемных функций четырехполюсника, вычислить значения  $\dot{Z}_{вх}(j\omega_1)$  и  $\dot{K}_U(j\omega_1)$  для схемы рисунка 8.17 с подключенной нагрузкой, если на частоте  $\omega_1$  параметры имеют значения  $Z_{н} = Z_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $\dot{Z}_1 = j40 \text{ Ом}$ ,  $\dot{Z}_3 = -j60 \text{ Ом}$ . Результат сравнить со значениями, полученными на основе эквивалентных преобразований.

8.4.11. Получить матрицу Y-параметров для четырехполюсника рисунка 8.17, если  $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3$

- а) через Z-параметры,
- б) любым другим способом.

8.4.12. На некоторой частоте  $\omega_0$  параметры элементов схемы на рисунке 8.18 указаны в килоомах. Вычислить коэффициент передачи на частоте  $\omega_0$

- а) в режиме х.х.
- б) при  $R_H = 2 \text{ кОм}$ .

**Указание:** схему рисунка 8.18 рассматривать как параллельное соединение двух T-образных симметричных четырехполюсников.

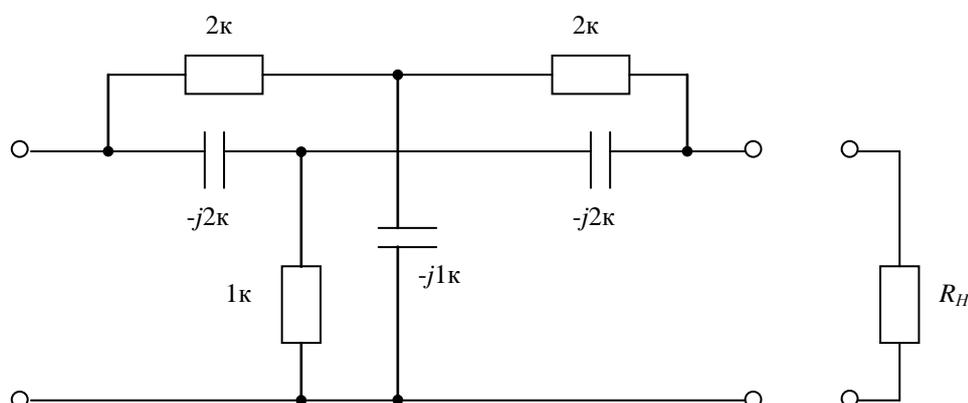


Рисунок 8.18

8.4.13. Четырехполюсник с сопротивлениями 100, 200 и 400 Ом, нагружен на сопротивление  $R_H = 200 \text{ Ом}$  и питается от генератора напряжения с параметрами  $E = 50 \text{ В}$ ,  $R_i = 50 \text{ Ом}$  (рисунок 8.19). Используя теорию четырехполюсников, вычислить значения  $I_1, U_2$  и  $I_2'$ .

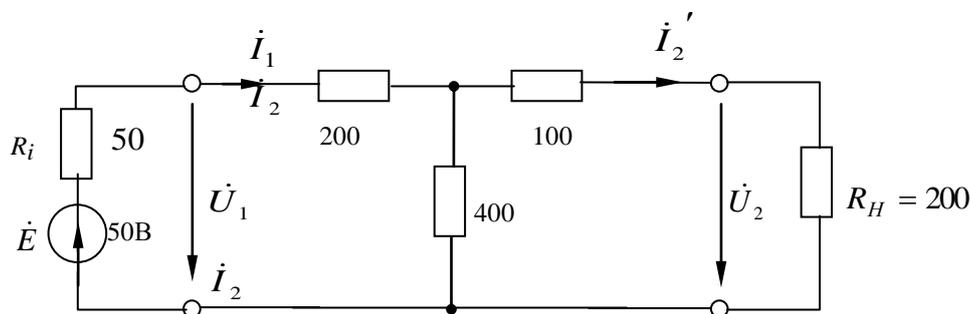


Рисунок 8.19

**Указания:** 1) для определения  $U_1$  вычислить  $Z_{ВХ}$  четырехполюсника, далее рассчитать  $I_1$  и  $U_2$  по выражениям соответствующих схемных функций;  
2) ответ проверить по методу контурных токов.

8.4.14. Известны параметры обратимого четырехполюсника:  $\dot{A}_{11} = 1 - j0,5$ ,  $\dot{A}_{21} = -j0,005 \text{ Ом}$ ,  $\dot{A}_{22} = 0,5$ . Вычислить недостающий А-параметр. Определить значение входного сопротивления четырехполюсника при к.з. на выходе и коэффициент передачи по току при замкнутом выходе.

**Указание:** смотри систему Н-параметров.

8.4.15. По известным характеристическим параметрам  $\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = 50 \text{ Ом}$ ,  $\dot{g}_C = -j\frac{\pi}{4}$  определить А-параметры пассивного четырехполюсника.

**Указание:** см. соотношения (8.15).

8.4.16. По известным характеристическим параметрам  $\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = j75 \text{ Ом}$ ,  $a_C = 2$  неп,  $b_C = \pi$  рад, определить А-параметры четырехполюсника.

**Указание:** см. соотношения (8.15).

8.4.17. Доказать, что коэффициент передачи по напряжению четырехполюсника, нагруженного произвольным сопротивлением  $Z_H$ , равен коэффициенту передачи по напряжению при х.х., деленному на  $\left(1 + \frac{Z_{2К.З.}}{Z_H}\right)$ , где  $Z_{2К.З.}$  - входное сопротивление со стороны выходных зажимов при к.з. на входе.

**Указание:** см. смысл Y-параметров и таблицу 8.1.

## 8.5 Цель занятия по теме “Цепочечные LC-фильтры”

Цель - освоить расчет цепочечных LC-фильтров типа  $k$  и  $m$  по характеристическим параметрам, научиться изображать частотные зависимости  $a_C(\omega)$ ,  $b_C(\omega)$ ,  $\dot{Z}_{CT}(\omega)$  и  $\dot{Z}_{CT}(\omega)$  фильтров нижних частот (ФНЧ), фильтров верхних частот (ВФЧ) и полосовых фильтров  $k$  и  $m$ , усвоить принцип создания бесконечно большого затухания в фильтрах типа  $m$  на частотах, отличных от нуля и бесконечности, осмыслить достоинства и недостатки фильтров  $k$  и  $m$  и преимущества их совместной работы в режиме согласования.

## 8.6 Основные положения теории цепочечных LC-фильтров

Четырехполюсники, пропускающие колебания одних частот с большим затуханием, а других с малым, называются фильтрами.

Структура цепочечного фильтра представлена на рисунке 8.20. На рисунке 8.21 показаны Т-образные, П-образные и Г-образные схемы фильтров, из которых образуется цепочечная структура.

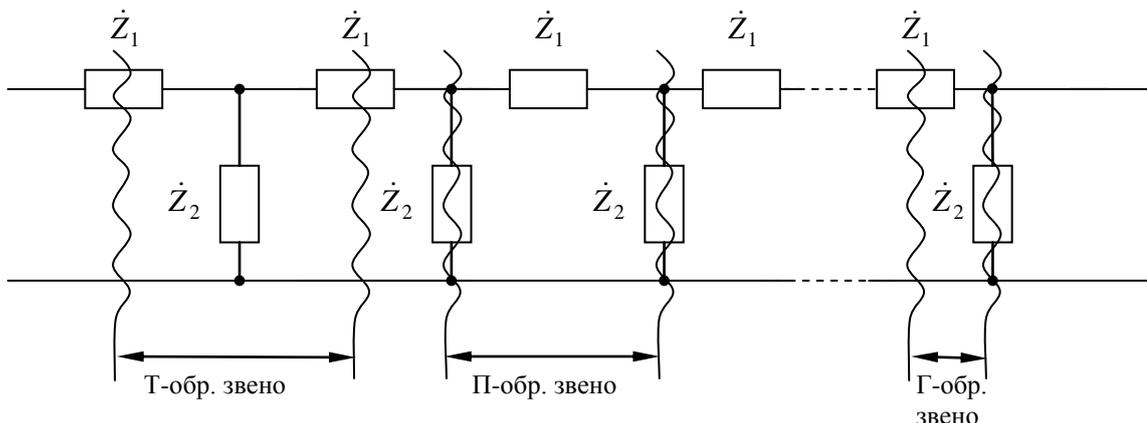


Рисунок 8.20

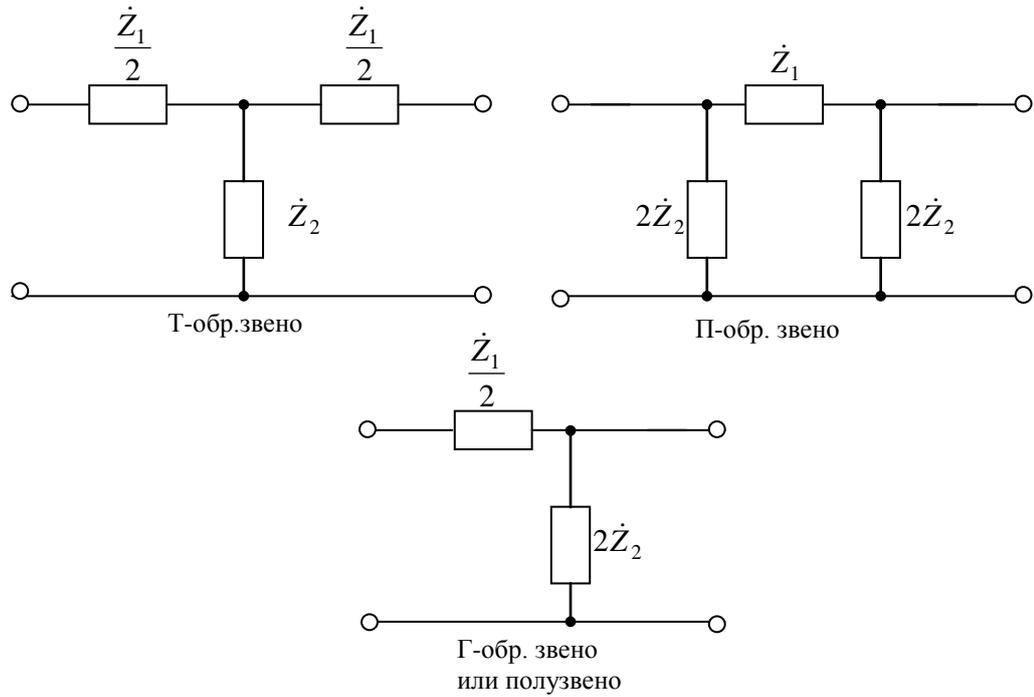


Рисунок 8.21

Каскадное согласованное включение двух полувзеньев образует либо  $\Pi$ -, либо  $T$ -образное звено (рисунок 8.22).

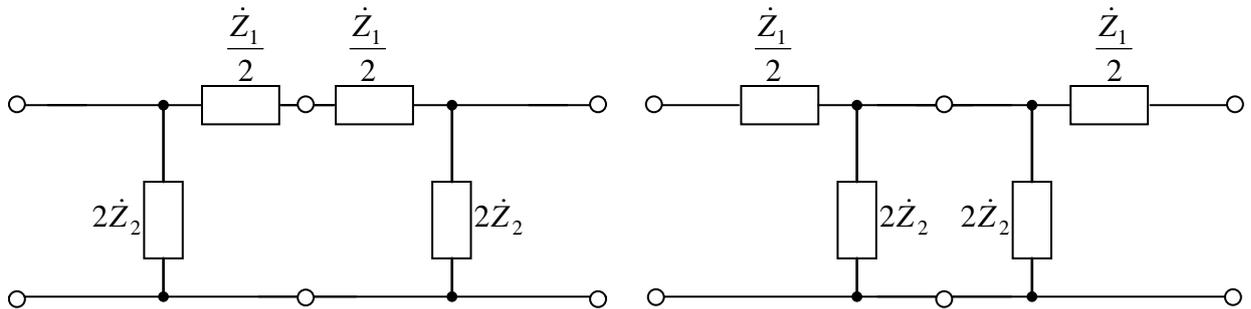


Рисунок 8.22

Из определения характеристического сопротивления

$$\dot{Z}_C = \sqrt{\dot{Z}_0 \cdot \dot{Z}_\infty} = \sqrt{\dot{Z}_{K3} \cdot \dot{Z}_{XX}}$$

следует, что для  $T$ -образного звена и полувзена с  $T$ -образной стороны

$$\dot{Z}_{CT} = \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2} \cdot \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}, \quad (8.21)$$

а для  $\Pi$ -образного звена и полувзена с  $\Pi$ -образной стороны

$$\dot{Z}_{C\Pi} = \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}}. \quad (8.22)$$

В соответствии с названием “LC-фильтры” двухполюсники  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$ , входящие в состав схем (см. рисунок 8.21), чисто реактивные двухполюсники. Очевидно, что при однотипных реактивностях  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$

$$\dot{Z}_1 = \pm jX_1 \quad \text{и} \quad \dot{Z}_2 = \pm jX_2$$

фильтрация невозможна, т.к. получается делитель из однотипных элементов. При разнотипных реактивностях

$$\dot{Z}_1 = \pm jX_1, \quad \dot{Z}_2 = \mp jX_2$$

схема работает как фильтр и описывается соотношениями на с.3а для Т- и П-образных схем.

Обратите внимание, что затухание  $a_c$ , фазовая постоянная  $b_c$ , сопротивления  $\dot{Z}_{СТ}$  и  $\dot{Z}_{СП}$  и полоса прозрачности определяются через “ключевое” соотношение  $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}$ .

Для полувзвеньев, в соответствии с правилами согласованного каскадного соединения четырехполюсников (см. выражение (8.12)),  $a_c$  и  $b_c$  в два раза меньше, чем у Т- и П-звеньев.

Если произведение  $\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = const$  и не зависит от частоты, то такие фильтры на рисунке 8.21. называются фильтрами типа “к”. При этом  $\sqrt{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2} = R_0$  - номинальное характеристическое сопротивление. По пропускаемым частотам фильтры делятся на ФНЧ и ФВЧ; полосовые фильтры делятся на полосопропускающие (ППФ) и полосозадерживающие (ПЗФ) или режекторные. На рисунке 8.23 представлены полувзвенья всех типов фильтров типа к, причем коэффициенты для L и C соответствуют коэффициентам при  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  для полувзвена

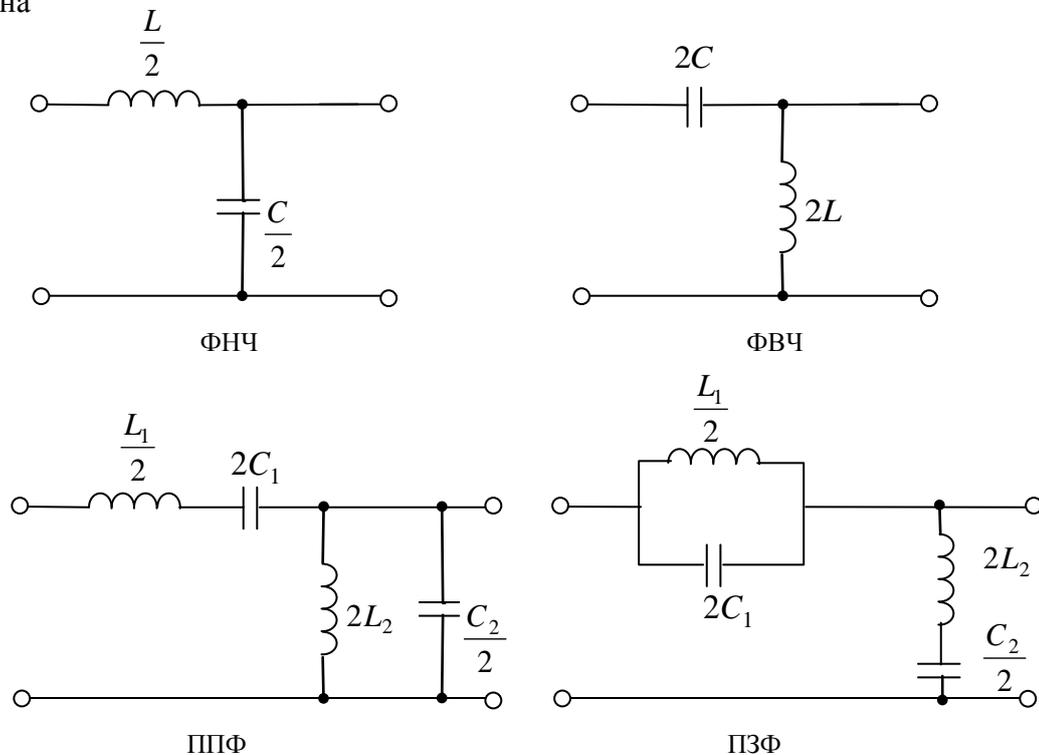


Рисунок 8.23

Основные соотношения для Т- и П- образных схем.

-2		-1	0
Полоса задерживания (ПЗ)		Условие полосы прозрачности (ПП): $-1 \leq \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \leq 0$	
$a_C:$	$ch \frac{a_C}{2} = \sqrt{\left  \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \right }$	0	$\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}$
$b_C:$	$\pm \pi$	$sin \frac{b_C}{2} = \pm \sqrt{\left  \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \right }$	$\dot{Z}_1 = \pm jX_1$ $\dot{Z}_2 = \pm jX_2$
$\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}$	вещественное	вещественное	$\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$ - однотипные реактивности; делитель из однотипных реактивностей не может служить фильтром
$\sqrt{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}$	мнимое	вещественное	
$\dot{Z}_{CT}$ по (8.21)	} чисто реактивное	} чисто активное	
$\dot{Z}_{СП}$ по (8.22)			
$\dot{Z}_{CT}$	0	Значения $\dot{Z}_C$ на граничных частотах ПП	
$\dot{Z}_{СП}$	$\infty$		$\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}$

Выражения для  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  сведены в таблицу 8.3.

Таблица 8.3

	ФНЧ	ФВЧ	ППФ	ПЗФ
$\dot{Z}_1$	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$	$\frac{\frac{L_1}{C_1}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}$
$\dot{Z}_2$	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$	$\frac{\frac{L_2}{C_2}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}$	$j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$

Полосовые фильтры соответствуют определению фильтра  $k$ , если резонансные частоты последовательного и параллельного контуров, используемых как двухполюсники  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$ , совпадают, т.е.  $L_1 C_1 = L_2 C_2$ .

Ключевое соотношение для ФНЧ

$$\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} = -x^2, \quad (8.23)$$

а для ФВЧ

$$\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} = -\frac{1}{x^2}, \quad (8.24)$$

где  $x = \frac{\omega}{\omega_{CP}}$ ;

в свою очередь,

$$\omega_{CP\text{ФНЧ}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_{CP\text{ФВЧ}} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \quad (8.25)$$

причем,  $\omega_{CP}$  для ФНЧ и ФВЧ всегда совпадает с резонансной частотой полувзвена (см. рисунок 8.23).

С учетом сказанного частотные характеристики в соответствии с “Основными соотношениями” на с.3а

$$\begin{array}{ll} \text{для ФНЧ} & \text{для ФВЧ} \\ ch \frac{a_C}{2} = x & ch \frac{a_C}{2} = \frac{1}{x} \end{array} \quad (8.26)$$

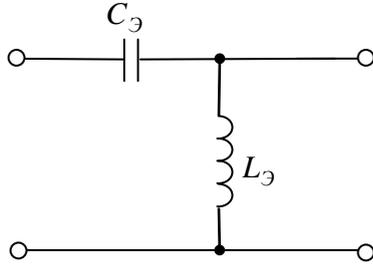
$$\begin{array}{ll} sin \frac{b_C}{2} = +x & sin \frac{b_C}{2} = -\frac{1}{x} \end{array} \quad (8.27)$$

$$\begin{array}{ll} \dot{Z}_{CT} = R_0 \sqrt{1-x^2} & \dot{Z}_{CT} = R_0 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \end{array} \quad (8.28)$$

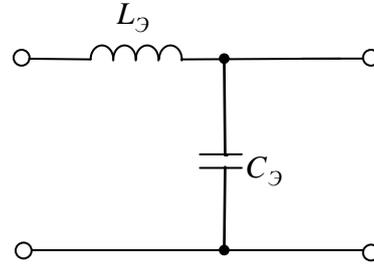
$$\begin{array}{ll} \dot{Z}_{CP} = \frac{R_0}{\sqrt{1-x^2}} & \dot{Z}_{CP} = \frac{R_0}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \end{array} \quad (8.29)$$

Частотные характеристики полосовых фильтров легко получить формальным объединением ЧХ ФВЧ и ФНЧ, “состыковывая” их полосами прозрачности для ППФ и полосами задерживания для ПЗФ. Это следует из анализа схем полосовых фильтров на рисунке 8.23. Например, для ППФ:

Для  $\omega < \omega_p$  ППФ как ФВЧ



Для  $\omega > \omega_p$  ППФ как ФНЧ



Фильтрам типа k присущи два недостатка:

- 1) медленное нарастание затухания  $a_c$  в полосе задерживания ( $a_c \rightarrow \infty$  только при  $\omega \rightarrow \infty$  в ФНЧ и  $\omega = 0$  в ФВЧ);
- 2) сильная частотная зависимость  $\dot{Z}_c(\omega)$ , а, следовательно, невозможность согласования с нагрузкой, что дополнительно ухудшает характеристики фильтра.

Указанные недостатки можно в значительной степени устранить при переходе к более сложным схемам фильтров типа m. При этом исходное полузвено фильтра типа k называется прототипом, а образованное из него полузвено фильтра m - производным полузвеном.

Параметры последнего рассчитываются из условия согласования с прототипом с одной из сторон. Если прототип и производное полузвено согласованы с Т-образных сторон, то образуется последовательно - производное полузвено, а если с П-образных сторон, то параллельно-производное полузвено (рисунок 8.24), где m-коэффициент перераспределения реактивностей ( $m < 1$ ).

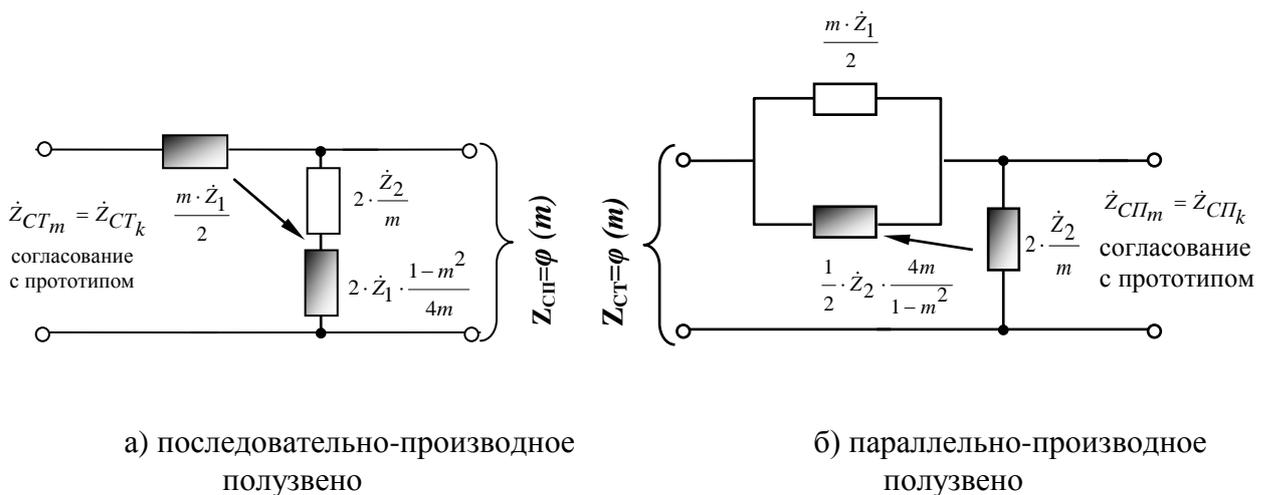


Рисунок 8.24

В производных полузвеньях на частоте входного сигнала  $\omega = \omega_p$  последовательного контура в схеме а) и параллельного контура в схеме б) рисунка 8.24 коэффициент передачи обращается в нуль, а затухание в бесконечность:  $a_c(\omega_p) = \infty$ ,  $K_c(\omega_p) = 0$ , поэтому частоту

$\omega_p$  принято называть частотой бесконечно большого затухания и обозначать  $\omega_\infty$ ; на этой частоте схемы рисунка 8.24 имеют вид, представленный на рисунке 8.25.

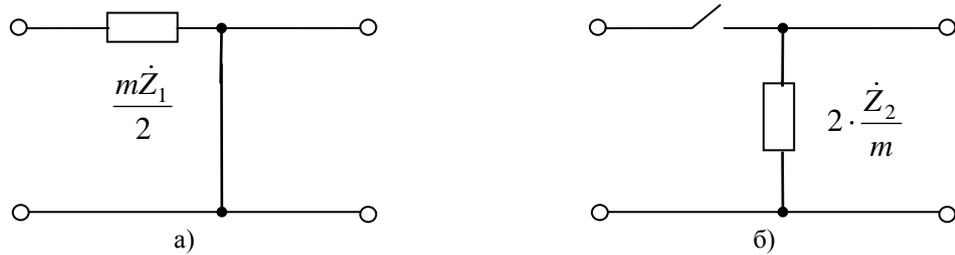


Рисунок 8.25

Для фильтров типа  $m$  ключевое отношение  $\frac{\dot{Z}_{1m}}{4\dot{Z}_{2m}}$  имеет вид

$$\frac{\dot{Z}_{1m}}{4\dot{Z}_{2m}} = \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \cdot \frac{m^2}{1 + \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \cdot (1 - m^2)} \quad (8.30)$$

“Основные соотношения” на с. 3а и выражения для  $\dot{Z}_{СТ}$  и  $\dot{Z}_{СП}$  (формулы (8.21) и (8.22)) справедливы и для звеньев фильтров  $m$ , если  $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}$  заменить на  $\frac{\dot{Z}_{1m}}{4\dot{Z}_{2m}}$ .

Анализ выражений (8.30), (8.21), (8.22) и “Основных соотношений” на с. 3а приводит к следующему заключению:

- 1) полоса прозрачности прототипа и производных полузвеньев одинакова;
- 2)  $\omega_\infty = \omega_p$  находится в полосе задерживания и, чем ближе  $\omega_\infty$  к  $\omega_{CP}$ , тем круче нарастает затухание; при этом  $\omega_\infty$  зависит от  $m$ :

$$\omega_{\infty ФНЧ} = \frac{\omega_{CP}}{\sqrt{1 - m^2}}, \quad \omega_{\infty ФВЧ} = \omega_{CP} \sqrt{1 - m^2}$$

Однако, поскольку рост  $a_C(\omega)$  связан с резонансом в контурах, то  $a_C(\omega)$  так же быстро спадает при уходе от резонансной частоты, что является существенным недостатком фильтров  $m$ ;

3) производные полузвенья согласованы с прототипом с одной из сторон, а с другой стороны их характеристическое сопротивление  $\dot{Z}_C$  зависит от  $m$   $\dot{Z}_C = \varphi(m)$ , поэтому подбором параметра  $m$  можно добиться практически постоянного сопротивления  $\dot{Z}_C$  в полосе прозрачности; хороший результат ( $\dot{Z}_C \approx R_0$ ) в большей части полосы прозрачности получается при  $m \approx 0,6$ .

Таким образом, и фильтры типа  $k$  и фильтры типа  $m$  имеют свои недостатки, однако при каскадном согласованном включении обоих типов (рисунок 8.26) можно получить вполне удовлетворительные частотные характеристики затухания.

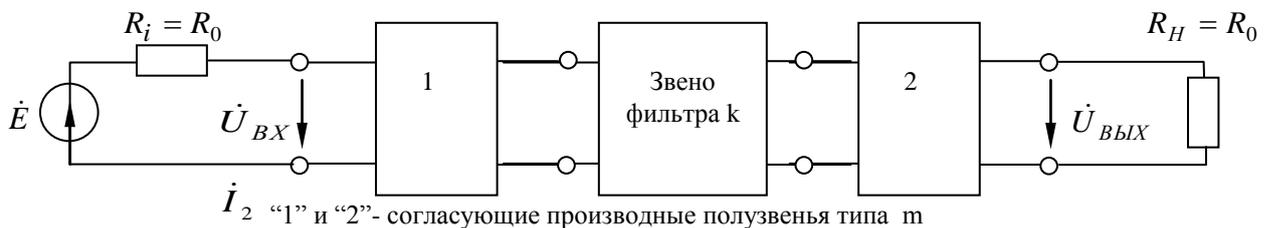


Рисунок 8.26

Частотные характеристики производных полузвеньев полосовых фильтров удобно получать путем соответствующей стыковки частотных характеристик полузвеньев ФНЧ и ФВЧ типа  $m$ , т.е. так же, как это было рекомендовано выше для прототипа.

## 8.7 Методические указания и примеры решения задач

### Задача 1.

На рисунке 8.27 изображена частотная зависимость характеристического сопротивления  $\dot{Z}_C$  с одной из сторон Г-образного звена фильтра типа  $k$ .

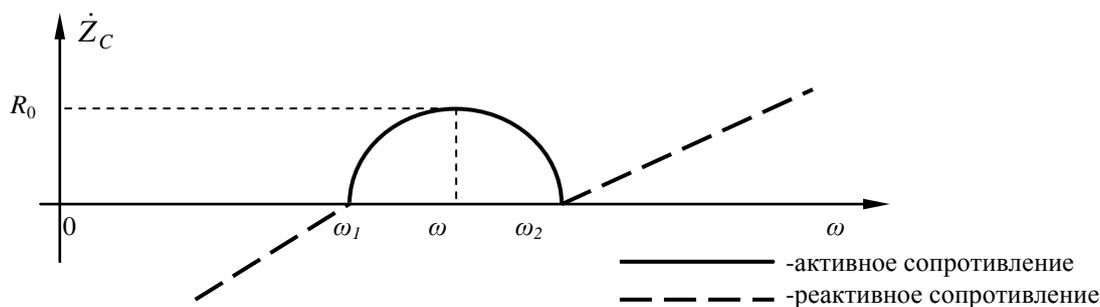


Рис. 8.27

Установить тип фильтра; определить какой из сторон Т- или П- соответствует заданная характеристика  $\dot{Z}_C$ ; изобразить график  $\dot{Z}_C(\omega)$  с другой стороны полузвена; изобразить схему полузвена и указать его параметры.

### Решение.

Как следует из “Основных соотношений” на с.3а  $\dot{Z}_C$  имеет активный характер в ПП и реактивный в полосе задерживания, а частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют частотам среза  $\omega_{ср1}$  и  $\omega_{ср2}$ , т.е. это ППФ.

Т.к. активное сопротивление изменяется в пределах от нуля до  $R_0$ , то заданный график соответствует Т-образной стороне, т.е. это  $\dot{Z}_{СТ}(\omega)$ .

В фильтрах  $k$  сопротивления  $\dot{Z}_{СП}(\omega)$  и  $\dot{Z}_{СТ}(\omega)$  жестко связаны и могут быть получены одно из другого с помощью формальных приемов. В ПП, где  $\dot{Z}_C$  с обеих сторон активно, “0” для Т-стороны заменяется на “ $\infty$ ” для П-стороны,  $R_0$  сохраняется на прежних частотах; в ПЗ сопротивления с обеих сторон чисто реактивные и на одной и той же частоте носят противоположный характер, при этом с ростом частоты  $X(\omega)$  только растет, т.е.  $\frac{dX}{d\omega} > 0$ . Результат для  $\dot{Z}_{СП}(\omega)$  представлен на рисунке 8.28.

В полосовых фильтрах в качестве сопротивлений плеч  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  используются идеальные контуры последовательный и параллельный (см.рисунок 8.23 и таблицу 8.3).

**Примечание:** зависимости  $\dot{Z}_C(\omega)$  на рисунках 8.27 и 8.28 для ППФ можно рассматривать как “состыкованные” зависимости  $\dot{Z}_C(\omega)$  ФВЧ в диапазоне, где  $0 \leq \omega \leq \omega_p$ , и  $\dot{Z}_C(\omega)$  ФНЧ в диапазоне, где  $\omega \geq \omega_p$ , обращенные друг к другу полосами прозрачности;

резонансная частота плеч фильтра  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ , номинальное характеристическое сопротивление  $R_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ .

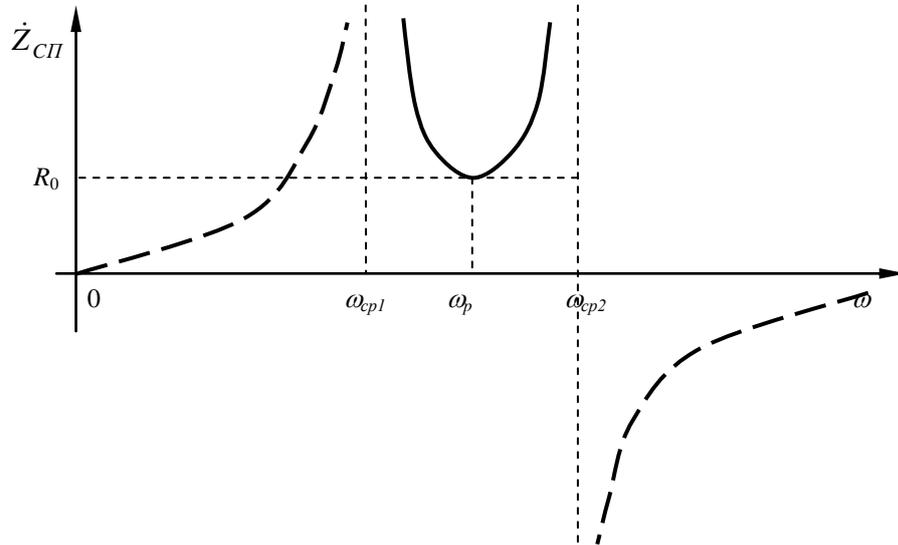


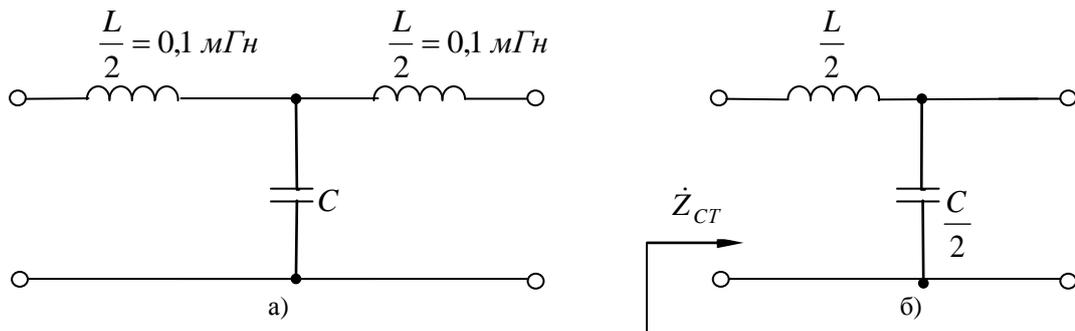
Рисунок 8.28

**Задача 2.**

Задан Т-образный ФНЧ, состоящий из двух индуктивностей, каждая из которых равна 0,1 мГн, и емкости 2 мкФ. Вычислить частоту среза и изобразить график характеристического сопротивления.

**Решение.**

Схемы Т-образного звена и полузвена представлены на рисунке 8.29, откуда  $L = 0,2$  мГн.



По (8.25)

Рисунок 8.29

$$\omega_{CP\text{ФНЧ}} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 10^5 \text{ рад/с.}$$

График  $\dot{Z}_{CT}$  для ФНЧ можно построить по (8.28), но качественный характер зависимости  $\dot{Z}_{CT}(\omega)$  удобно рассматривать на основе схемы рисунка 8.29.б и известного выражения  $Z_C = \sqrt{Z_{KЗ} \cdot Z_{ХХ}}$

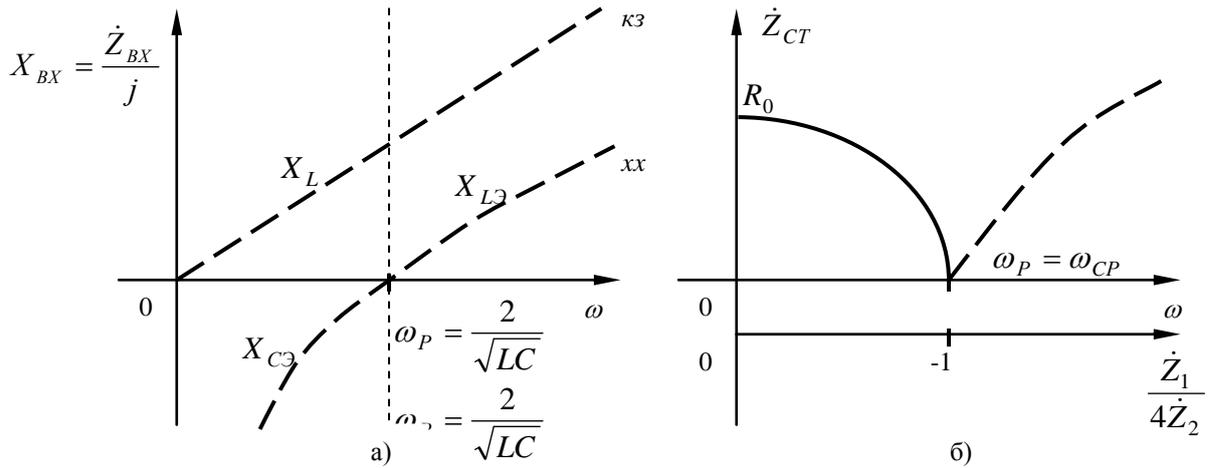


Рисунок 8.30

На рисунке 8.30.а изображены входные сопротивления с Т-образной стороны для схемы 8.29.б при к.з. и х.х. на выходе, т.е. с П-образной стороны. Для частот  $\omega > \omega_{CP}$  в выражении для  $\dot{Z}_C$  под корнем произведение из  $\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_{L3}$ , т.е.  $\dot{Z}_C$  носит индуктивный характер; на частоте  $\omega_P$  под корнем произведение, равное 0, а на частотах  $\omega < \omega_{CP}$  под корнем произведение  $\dot{Z}_L \cdot \dot{Z}_{C3}$  - вещественное значение, что соответствует активному характеру  $\dot{Z}_C$ , которое с Т-образной стороны может изменяться только в пределах  $0 - \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2} = R_0$ . Результат подобного анализа представлен на рисунке 8.30б.

**Задача 3.**

На рисунке 8.31 задана частотная зависимость  $a_C(\omega)$  звена фильтра. Изобразить примерный характер  $K_C(\omega)$  звена, определить тип фильтра, изобразить один из возможных вариантов схемы полувзвена фильтра, имеющего заданный характер  $a_C(\omega)$ .

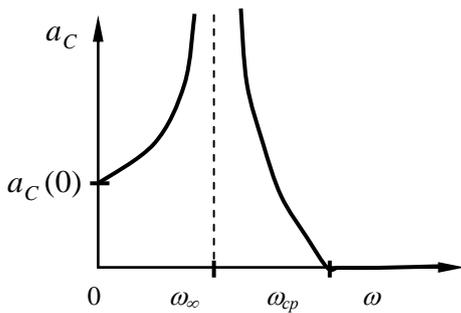


Рисунок 8.31

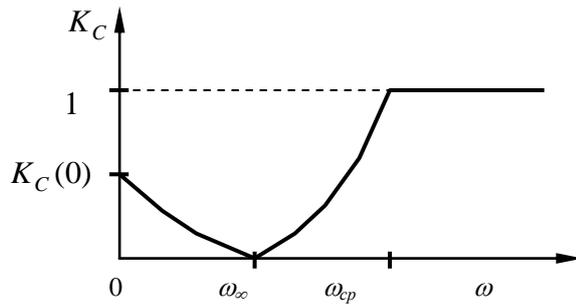


Рисунок 8.32

**Решение.**

Примерный характер  $K_C(\omega)$  изображен на рисунке 8.32. Так как фильтр пропускает высокие частоты  $\omega > \omega_{CP}$ , то это ФВЧ. Так как в ПЗ  $a_C = \infty$  на частоте  $\omega \neq 0$ , то это ФВЧ типа м.

Полувзвено прототипа изображено на рисунке 8.23. В соответствии с рисунком 8.24 может быть образовано последовательно-производное или параллельно-производное полувзвено. Пример последнего изображен на рисунке 8.33, коэффициенты при L и C соответствуют коэффициентам при  $\dot{Z}_1$  и  $\dot{Z}_2$  на рисунке 8.24.б.

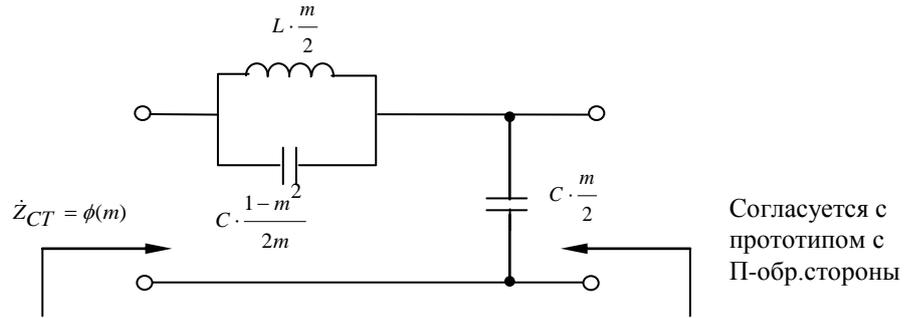


Рисунок 8.33

## 8.8 Задачи для самостоятельной работы

8.8.1 Задан П-образный ФНЧ, состоящий из индуктивности  $0,2 \text{ мГн}$  и двух емкостей по  $1 \text{ мкФ}$  каждая. Определить частоту среза и изобразить график характеристического сопротивления на основе схемы ФНЧ. Вычислить значения  $Z_C$  на частотах  $0,5\omega_{\text{ср}}$  и  $2\omega_{\text{ср}}$ .

8.8.2 Рассчитать  $L$  и  $C$  ФНЧ типа  $k$ , имеющего  $f_{\text{ср}} = 20 \text{ кГц}$  и номинальное характеристическое сопротивление  $50 \text{ Ом}$ . Вычислить частоту, на которой фильтр в режиме согласования обеспечивает затухание  $40 \text{ дБ}$ . Изобразить Т-образную модель фильтра с указанием численных значений параметров элементов схемы.

**Указание:** при подстановке в соответствующие формулы  $a_C$  перевести в неперы.

8.8.3 Определить параметры  $L$  и  $C$  ФНЧ типа  $k$ , если на частоте  $f = 360 \text{ кГц}$  звено фильтра с номинальным характеристическим сопротивлением  $50 \text{ Ом}$  в режиме согласования обеспечивает затухание  $60 \text{ дБ}$ . Изобразить схему звена и полузвена ФНЧ с указанием численных значений параметров элементов. Каково затухание полузвена на этой же частоте?

8.8.4 Определить параметры  $L$  и  $C$  ФВЧ типа  $k$ , если на частоте  $f = 40 \text{ кГц}$  звено фильтра с номинальным характеристическим сопротивлением  $600 \text{ Ом}$  обеспечивает затухание  $40 \text{ дБ}$ . Изобразить схему звена и полузвена ФВЧ с указанием численных значений параметров элементов. Каково затухание полузвена на этой же частоте?

8.8.5 Вычислить параметры  $L$  и  $C$  ФВЧ, обеспечивающего частоту среза  $50 \text{ кГц}$  и предназначенного для работы с генератором сигнала, имеющим  $R_i = 75 \text{ Ом}$ . Вычислить значения  $a_C$  и  $b_C$  на частотах  $0,1f_{\text{ср}}$ ,  $0,9f_{\text{ср}}$  и  $2f_{\text{ср}}$ . Изобразить схему на основе П-образной модели прототипа и согласующих полузвеньев (рисунок 8.26), указав на ней соответствующие коэффициенты при элементах  $L$  и  $C$ . Изобразить частотную зависимость входного сопротивления всего фильтра, если  $R_n = 75 \text{ Ом}$ . Какова величина выходного напряжения фильтра на частоте  $2f_{\text{ср}}$ , если генератор на этой частоте обеспечивает в режиме ХХ значение  $U_{\text{ХХ}} = 6 \text{ В}$ ?

8.8.6 Два Г-образных ФВЧ, каждый из которых состоит из емкости  $1 \text{ мкФ}$  и индуктивности  $10 \text{ мГн}$ , образуют Т-образный фильтр. Вычислить для Т-образного фильтра частоту среза  $f_{\text{ср}}$ , номинальное характеристическое сопротивление  $R_0$ , характеристическое затухание  $a_C$  на частоте  $2f_{\text{ср}}$  и фазовую постоянную  $b_C$  на частоте  $0,5f_{\text{ср}}$ .

8.8.7 Два Г-образных ФВЧ, указанные в предыдущей задаче, образуют П-образный фильтр. Вычислить  $f_{\text{ср}}$ ,  $R_0$ ,  $a_C$  и  $b_C$  на частоте  $0,5f_{\text{ср}}$ .

8.8.8 Для Г-образного ФВЧ, состоящего из емкости 2 мкФ и индуктивности 20 мГн вычислить частоту среза  $f_{ср}$ , значение  $\dot{Z}_{СТ}$  и  $\dot{Z}_{СП}$  на частотах  $2f_{ср}$  и  $0,5f_{ср}$ , изобразить характер частотных зависимостей  $\dot{Z}_{СТ}(\omega)$  и  $\dot{Z}_{СП}(\omega)$ .

8.8.9 Характеристическое сопротивление с одной из сторон Г-образного звена типа к задано графиком рисунка 8.34.

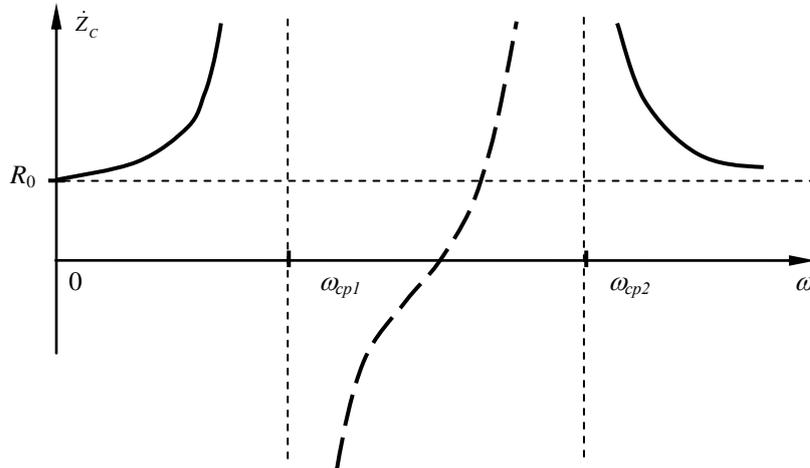


Рисунок 8.34

Определить тип фильтра, пояснить какое из сопротивлений  $\dot{Z}_{СТ}$  или  $\dot{Z}_{СП}$  изображено на графике, построить характер  $\dot{Z}_c$  с противоположной стороны, изобразить схему полувзена с указанием параметров.

8.8.10 Частота среза Т-образного звена ФВЧ 30 кГц. Изобразить схему согласующего производного полувзена и вычислить частоту бесконечно большого затухания, если  $m = 0,6$ .

Изобразить графики характеристических сопротивлений с Т- и П-образной сторон согласующего производного полувзена.

8.8.11 Частота среза П-образного звена ФНЧ 30 кГц. Изобразить схему согласующего производного полувзена и вычислить частоту бесконечно большого затухания, если  $m = 0,6$ .

Изобразить графики характеристических сопротивлений с Т- и П-образной сторон согласующего производного полувзена.

## 8.9 Знания и умения

### Знать:

- 1) системы уравнений неавтономного четырехполюсника;
- 2) понятия первичных, вторичных и рабочих параметров;
- 3) методики определения внутренних и характеристических параметров;
- 4) матричные уравнения для составных четырехполюсников при разных способах соединения;

5) условие для определения ПП, выражение для расчета характеристического затухания  $a_c$  в ПЗ, выражение для расчета характеристической фазовой постоянной  $b_c$  в ПП через

“ключевое” отношение  $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}$ ;

6) принцип увеличения крутизны характеристического затухания в фильтрах типа  $m$  по сравнению с затуханием для прототипа;

7) достоинства и недостатки фильтров типа  $k$  и  $m$  и преимущества их совместной работы в режиме согласования.

**Уметь:**

- 1) найти любой внутренний параметр четырехполюсника и определить его физический смысл;
- 2) найти  $\dot{Z}_C, a_C, b_C$  при заданных параметрах схемы четырехполюсника;
- 3) рассчитать значения  $L$  и  $C$  любого звена лестничного фильтра по заданным частоте среза  $\omega_{ср}$  и номинальному характеристическому сопротивлению  $R_0$ ;
- 4) образовать последовательно-производное и параллельно-производное полузвено и рассчитать частоты бесконечно большого затухания  $\omega_\infty$ ;
- 5) согласовывать звенья типа  $k$  с нагрузкой и генератором сигнала путем использования согласующих производных полузвеньев типа  $m$ .

## 8.10 Формы контроля

Тестовый опрос по теме “Четырехполюсники”, тестовый опрос по теме “LC-фильтры”, индивидуальные задачи и расчетное индивидуальное задание (см. п.8.11).

## 8.11 Задание “Четырехполюсники и LC-фильтры” и варианты исходных данных

Исходные данные: Т- или П-образная схема (рисунок 8.35) и её параметры на некоторой частоте  $\omega_1$  (таблица 8.4).

**Вычислить:**

- 1) характеристическое сопротивление  $\dot{Z}_C$ ;
- 2) характеристическое затухание  $a_C$  и характеристическую фазовую постоянную  $b_C$  двумя способами:

$$e^{-\dot{g}_C} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \cdot \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_{C2}}}$$

- на основе соотношения при полностью согласованном включении,

$$\dot{A}_{11} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_{C2}}} \cdot chg_C$$

на основе соотношения

Справка:  $ch(a+jb) = cha \cdot \cos b + jsha \cdot \sin b$

- 3) изобразить полузвено для заданной схемы и доказать, вычислив любым способом по выбору, что  $a_C$  и  $b_C$  полузвена в два раза меньше, чем  $a_C$  и  $b_C$  полного звена (при условии согласованного включения полузвеньев);

4) полагая, что каждый двухполюсник  $\dot{Z}_a$  и  $\dot{Z}_b$  (см.таблицу) состоит только из одного элемента, изобразить схему фильтра;

- 5) вычислить отношение  $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}$ , сделать заключение о том, какой полосе (прозрачности или задерживания) соответствует частота  $\omega_1$ , рассчитать нормированное значение частоты  $\omega_1/\omega_{ср}$ ;

6) изобразить частотные зависимости  $\dot{Z}_C(\omega)$ ,  $a_C(\omega)$ , КС ( $\omega$ ),  $b_C(\omega)$  для заданного фильтра, указав на них положение частоты  $\omega_1$ ;

7) вычислить  $a_C(\omega_1)$ ,  $b_C(\omega_1)$  и КС ( $\omega_1$ ) полного звена фильтра по соотношениям

$$\operatorname{ch} \frac{a_C}{2} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}, \sin \frac{b_C}{2} = \pm \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}}, K_C = |K_C| = e^{-a_C}$$

и сравнить с соответствующими значениями для заданного четырехполюсника ;

8) из заданного фильтра образовать последовательно-производное или параллельно-производное полужвено, исходя из условий согласования фильтра типа к с нагрузкой  $R_n = R_0$  и генератором  $R_i = R_0$ .

9) изобразить схему согласованно включенного фильтра в соответствии со структурой, представленной на рисунке 8.26; коэффициенты при L и C записать в общем виде (через параметр m) и в числовом;

10) изобразить частотные зависимости  $\dot{Z}_{CT}(\omega)$ ,  $\dot{Z}_{СП}(\omega)$ ,  $a_C(\omega)$ , КС ( $\omega$ ),  $b_C(\omega)$  для полужвена фильтра типа m, если  $m=0,6$ ; определить нормированную частоту  $\frac{\omega_\infty}{\omega_{CP}}$ , пояснить по схеме фильтра, почему в полосе задерживания  $b_C=0$  и  $a_C=\infty$  (КС=0) на частотах  $\omega \neq 0$  и  $\omega \neq \infty$ .

Примечание: графики для фильтров типа к и m строить, соблюдая относительный масштаб!

11) изобразить график входного сопротивления согласованного фильтра  $\dot{Z}_{BX}(\omega)$ ;

12) определить значение  $\dot{U}_{ВЫХ}$  по сравнению со значением E в полосе прозрачности на частоте  $\omega_2$ , отличающейся в два раза от  $\omega_{ср}$ , ответ пояснить.

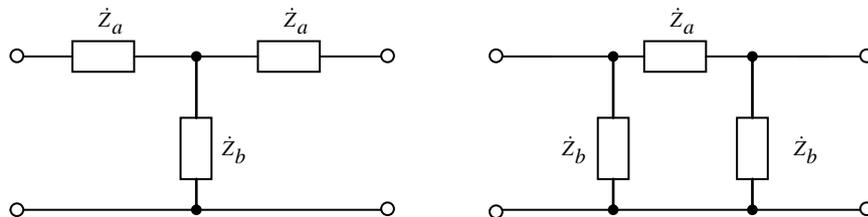


Рисунок 8.35

Таблица 8.4

Вариант	Модель	$\dot{Z}_a$ , Ом	$\dot{Z}_b$ , Ом	Вариант	Модель	$\dot{Z}_a$ , Ом	$\dot{Z}_b$ , Ом
1	Т-	+j2	-j0,5	21	Т-	+j16	-j4
2	П-	+j2	-j0,5	22	П-	-j40	+j80
3	П-	+j2	-j2	23	Т-	-j40	+j60
4	П-	-j40	+j10	24	П-	+j20	-j5
5	Т-	+j20	-j5	25	Т-	-j40	+j5
6	П-	+j16	-j32	26	П-	+j20	-j40
7	Т-	+j80	-j20	27	П-	-j10	+j2
8	П-	-j10	+j20	28	Т-	+j40	-j30

9	Т-	-j8	+j0,5	29	Т-	-j20	+j5
10	П-	+j16	-j2	30	П-	+j10	-j2
11	Т-	+j2	-j4	31	П	-j25	+j10
12	П-	+j8	-j2	32	П-	+j32	-j24
13	Т-	-j16	+j1	33	Т-	+j40	-j10
14	П-	-j8	+j1	34	Т-	-j20	+j20
15	Т-	+j16	-j1	35	П-	+j10	-j20
16	П-	-j60	+j15	36	П-	-j25	+j50
17	Т-	+j60	-j15	37	Т-	-j32	+j32
18	П-	-j20	+j30	38	П-	+j32	-j4
19	Т-	-j80	+j5	39	Т-	-j4	+j8
20	П-	+j4	-j1	40	Т-	-j32	+j8

## 8.12 Рекомендуемая литература

- 1 Попов В.П. Основы теории цепей.–М.: Высшая школа,2000.-с.399-431.
2. Попов В.П. Основы теории цепей.–М.: Высшая школа,1985.-с.373-404.
3. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах.- М.:Высшая школа,1973.-с.425-474
4. Бирюков В.Н., Попов В.П., Семенцев В.И. Сборник задач по теории цепей.- М.:Высшая школа, 1985.с-.146-178.
5. Атабеков Г.И. Основы теории цепей.–М.:Энергия,1969.-с.370-384,390.

## 9. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

### 9.1 Цель занятия

Основные цели практического занятия следующие:

- 1) усвоить понятие длинной линии как цепи с распределенными параметрами и особенности распространения электромагнитных колебаний в таких цепях;
- 2) изучить режимы работы линии без потерь (ЛБП) при различных нагрузках, а именно:
  - связь между характером нагрузки и режимом работы;
  - физику процессов в линии в установившемся режиме, распределение токов и напряжений вдоль линии;
  - характер входного сопротивления и его зависимость от координаты сечения линии и нагрузки;
- 3) научиться оценивать влияние потерь на распределение токов и напряжений и величину входного сопротивления линии;
- 4) закрепить знания о коэффициенте отражения, коэффициентах бегущей и стоячей волны;
- 5) освоить методику решения задач.

### 9.2 Краткие теоретические сведения

#### 9.2.1 Общие соотношения для однородной линии в установившемся режиме

Длинная линия относится к классу линейных электрических цепей с распределенными параметрами, продольные геометрические размеры которых соизмеримы с длиной волны  $\lambda$  воздействующего электромагнитного колебания. Вследствие этого отклик в длинной линии является функцией не только времени, но и координаты точки, в которой он определяется. Иными словами, напряжение или ток в какой-либо точке являются функциями двух переменных: времени  $t$  и координаты  $x$ .

В цепях с распределенными параметрами каждый элементарный участок  $dx$  (рисунок 9.1) цепи обладает индуктивностью, емкостью, сопротивлением и проводимостью, которые определяются длиной участка  $dx$  и погонными (первичными) параметрами:  $L$ , Гн/м;  $C$ , Ф/м;  $R$ , Ом/м;  $G$ , См/м. Погонные параметры определяются типом, конструктивными размерами линии и свойствами диэлектрика; если они постоянны по всей длине, то линия называется однородной.

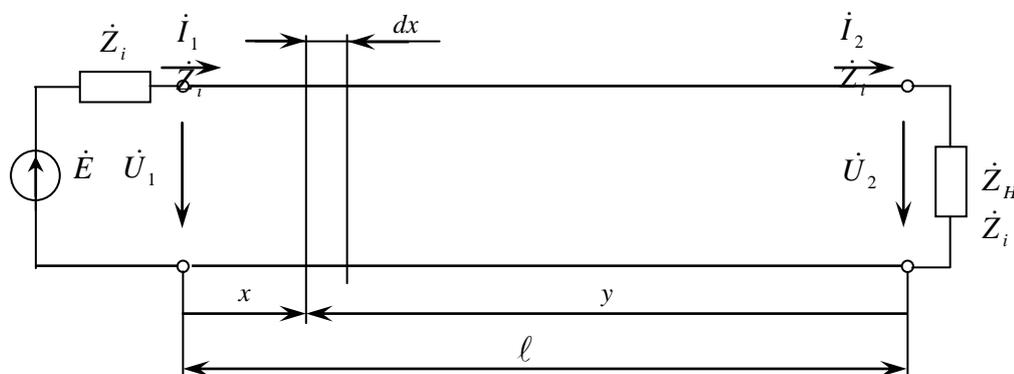


Рисунок 9.1 - Длинная линия

В установившемся режиме в линии в общем случае имеют место две волны: падающая и отраженная. При гармоническом воздействии падающая волна есть гармоническое колебание, распространяющееся от начала к концу, а отраженная - гармоническое колебание, распространяющееся от конца к началу линии. Интенсивность затухания амплитуд падающей и отраженной волн (рисунок 9.2) определяется коэффициентом затухания  $\alpha$ , а соотношение падающей и отраженной волн в конце линии ( $x = \ell$  или  $y = 0$ ) - коэффициентом отражения  $\dot{p}$  (выражение (9.5)).

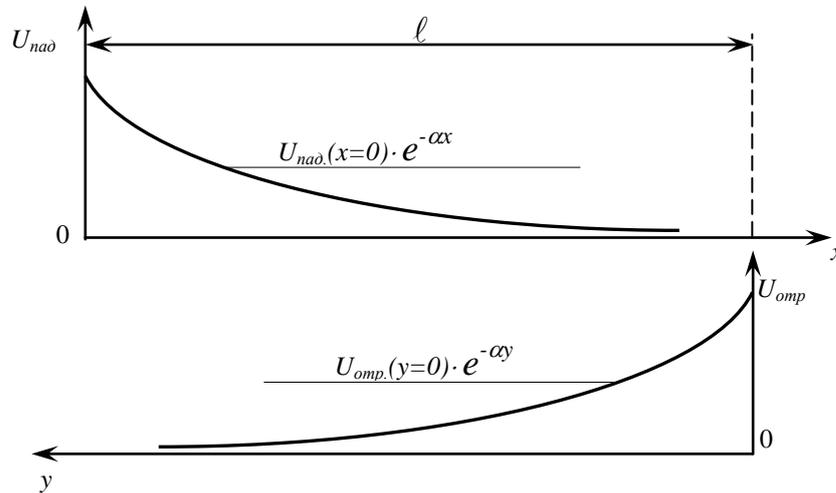


Рисунок 9.2 - Распределение амплитуд падающей и отраженной волн вдоль линии.

В установившемся режиме в каждом сечении линии в любой момент времени ток и напряжение определяются как результат интерференции падающей и отраженной волн или двух гармонических колебаний одинаковой частоты со своими амплитудами и начальными фазами.

Закон распределения комплексных амплитуд суммарных колебаний в однородной линии описывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(y) &= \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B}{2} \cdot e^{\dot{\gamma}y} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B}{2} \cdot e^{-\dot{\gamma}y} \\ \dot{I}(y) &= \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B}{2 \cdot \dot{Z}_B} \cdot e^{\dot{\gamma}y} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B}{2 \cdot \dot{Z}_B} \cdot e^{-\dot{\gamma}y} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_2 \cdot ch\dot{\gamma}y + \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_B \cdot sh\dot{\gamma}y \\ \dot{I}(y) &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_B} \cdot sh\dot{\gamma}y + \dot{I}_2 \cdot ch\dot{\gamma}y \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где  $\dot{Z}_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$  - волновое сопротивление линии,

$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$  - коэффициент распространения,

$\alpha$  и  $\beta$  - соответственно коэффициенты затухания и фазы на единицу длины линии,  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$  - напряжение и ток в конце линии (рисунок 9.1).

Из системы (9.1) ясно, что в любом сечении отношение падающих волн напряжения и тока есть величина постоянная

$$\frac{\dot{U}_{ПАД}}{\dot{I}_{ПАД}} = \dot{Z}_B.$$

Линии, отвечающие условиям

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad \text{или} \quad \omega L \gg R \quad \text{и} \quad \omega C \gg G,$$

называются неискажающими, т.к.  $\dot{Z}_B$  и фазовая скорость  $V_\varphi$  не зависят от частоты

$$Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho, \quad V_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т.е. колебания разных частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью и испытывают одинаковое сопротивление.

По отношению к генератору сигнала линия вместе с нагрузкой выступает как двухполюсник. Характер его входного сопротивления определяется тем, в какой степени названный двухполюсник поглощает энергию, поступающую на его вход от генератора сигнала:

входное сопротивление чисто **активно**, если энергия поглощается полностью;

входное сопротивление чисто **реактивно**, если энергия не поглощается совсем;

входное сопротивление имеет **комплексный** характер, если энергия поглощается частично.

В общем случае входное сопротивление линии определяется выражением (9.3), полученным из системы (9.2):

$$\dot{Z}_{BX}(y) = \dot{Z}_H \cdot \frac{1 + \frac{\dot{Z}_B}{\dot{Z}_H} \cdot th \dot{\gamma} y}{1 + \frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_B} \cdot th \dot{\gamma} y} \quad (9.3)$$

Справка:

$$th \dot{\gamma} y = th(\alpha y + j\beta y) = \frac{th \alpha y + jt g \beta y}{1 + jth \alpha y \cdot tg \beta y} \quad (9.3.a)$$

## 9.2.2 Режимы работы линии без потерь

Сама ЛБП (без учета нагрузки) энергии не поглощает ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ), следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 0, \quad \dot{\gamma} = j\beta; \quad \beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad Z_B = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ th \dot{\gamma} y = jt g \beta y; \quad ch \dot{\gamma} y = \cos \beta y; \quad sh \dot{\gamma} y = j \sin \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Вычисление значений  $\dot{I}(y), \dot{U}(y)$  и  $\dot{Z}_{BX}(y)$  можно вести по формулам (9.1)-(9.3) с учетом условий (9.4).

В зависимости от характера нагрузки в ЛБП возможны следующие три установившихся режима работы:

режим бегущей волны (РБВ);  
 режим стоячих волн (РСВ);  
 режим смешанных волн (РСМВ).

В таблице 9.1 нагрузки сгруппированы по признаку поглощения или отражения энергии. Степень отражения оценивается коэффициентом отражения по напряжению  $\dot{p}$ :

$$\dot{p} = \frac{\dot{U}_{\text{ОТР}}}{\dot{U}_{\text{ПАД}}}\bigg|_{y=0} = \frac{\dot{Z}_H - \dot{Z}_B}{\dot{Z}_H + \dot{Z}_B} = \frac{\dot{Z}_H - \rho}{\dot{Z}_H + \rho}\bigg|_{\alpha=0}. \quad (9.5)$$

Таблица 9.1 - Режимы работы ЛБП

Название режима	Нагрузка	$ \dot{p} $	Энергия нагрузкой	Характер входного сопротивления
РБВ	$\dot{Z}_H = \rho$	0	Поглощается полностью	чисто активный
РСВ	к.з. ( $Z_H=0$ ) х.х. ( $Z_H=\infty$ ) $Z_H = \pm jX_H$	1	не поглощается	чисто реактивный
РСМВ	$\dot{Z}_H = R_H < \rho$ $\dot{Z}_H = R_H > \rho$ $\dot{Z}_H = R_H \pm jX_H$	$ \dot{p}  < 1$	Поглощается частично	комплексный

### 9.2.2.1 Режим бегущей волны

В РБВ в связи с согласованностью нагрузки ( $Z_H = \rho$ ) отражения энергии в конце линии не происходит  $\dot{U}_{\text{ОТР}} = 0$ ,  $\dot{I}_{\text{ОТР}} = 0$ .

В линии имеют место только падающие волны напряжения и тока, распространяющиеся с фазовой скоростью

$$V_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

амплитуды их постоянны по всей длине линий, а начальные фазы определяются координатой сечения линии. В любом сечении

$$u(t, y) = U_\Pi \cos(\omega t + \varphi_\Pi + \beta y),$$

$$Z_{\text{ВХ}}(y) = \rho,$$

где комплексное значение падающей волны в соответствии с (9.1)

$$\dot{U}_\Pi = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_B}{2} e^{j\beta y} \bigg|_{\substack{\alpha=0 \\ \text{ЛБП}}} = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \rho}{2} e^{j\beta y} = U_\Pi e^{j\varphi_\Pi} e^{j\beta y}. \quad (9.6)$$

### 9.2.2.2 Режим стоячих волн

Ни одна нагрузка, соответствующая РСВ, не поглощает энергию и, следовательно, в ЛБП амплитуда отраженного колебания равна амплитуде падающего, а фаза каждого из них

меняется в зависимости от рассматриваемого сечения линии. В результате интерференции двух гармонических колебания с одинаковыми амплитудами и разными фазами получается распределение амплитуд суммарных колебаний вдоль линии, показанное на рисунке 9.3.

Узлы ( $U = 0$  или  $I = 0$ ) образуются в точках, где падающая и отраженные волны встречаются в противофазе ( $\Delta\varphi = 180^\circ$ ), пучности ( $2U_{\Pi}$ ,  $2I_{\Pi}$ ), где эти же колебания встречаются в фазе ( $\Delta\varphi = 0^\circ$ ).

Различным видам нагрузок соответствуют разные начала координат (см. рисунок 9.3). Обратите внимание, что построение всех графиков начинается от конца линии ( $y = 0$ ), где всегда известно значение  $Z_{BX}$ , т.к.

$$Z_{BX}(y = 0) = Z_H$$

в любом режиме работы линии, а в ряде случаев (х.х., к.з.) легко могут быть определены значения тока  $I_2$  или напряжения  $U_2$ .

Значения  $U_1$ ,  $I_1$  и  $Z_{BX}(y = \ell)$  в начале линии определяются длиной линии  $\ell$ , причем целое число значений  $n \cdot \frac{\lambda}{2}$  может быть опущено в силу периодичности рассматриваемых функций.

В РСВ мгновенные значения напряжений и токов описываются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u(y, t) &= 2U_{\Pi} \cos\left(\beta y - \frac{\varphi_P}{2}\right) \cos\left(\omega t + \varphi_{\Pi} + \frac{\varphi_P}{2}\right) \\ i(y, t) &= 2I_{\Pi} \sin\left(\beta y - \frac{\varphi_P}{2}\right) \sin\left(\omega t + \varphi_{\Pi} + \frac{\varphi_P}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

где  $\varphi_P = \text{Arg } \dot{p}$  - аргумент коэффициента отражения  $\dot{p}$ .

Подчеркнутые части выражений (9.7), взятые по модулю, - амплитуды суммарных колебаний, показанные на рисунке 9.3. Ясно видно, что  $U(y)$  и  $I(y)$  сдвинуты на  $90^\circ$  или  $\lambda/4$ .

Из рисунка 9.3 следует, что для построения графиков  $U(y)$ ,  $I(y)$  и  $Z_{BX}(y)$  при разных нагрузках в РСВ достаточно знать такое **взаимно увязанное** построение для единственной нагрузки, обычно к.з. или х.х. Для любой другой нагрузки начало построения при  $y = 0$  определяется значением  $Z_{BX}(y = 0) = Z_H : 0, +jX_L, -jX_C$ . При этом значения  $Z_{BX} = 0$  и  $Z_{BX} = \infty$ , т.е. узлы и пучности напряжения, в общем случае уже не соответствуют точкам  $y$ , кратным  $\lambda/4$  или  $\lambda/2$ , а отсчитываются от «нового» конца линии, обычно по графику  $X_{BX}(y)$  (повторяющиеся значения  $X_H$  следуют через  $\lambda/2$ ).

Входное сопротивление ЛБП, нагруженной на сопротивления, полностью отражающие энергию, имеет чисто реактивный характер и может быть определено по выражению (9.3) с учетом условия (9.4) и конкретных нагрузок.

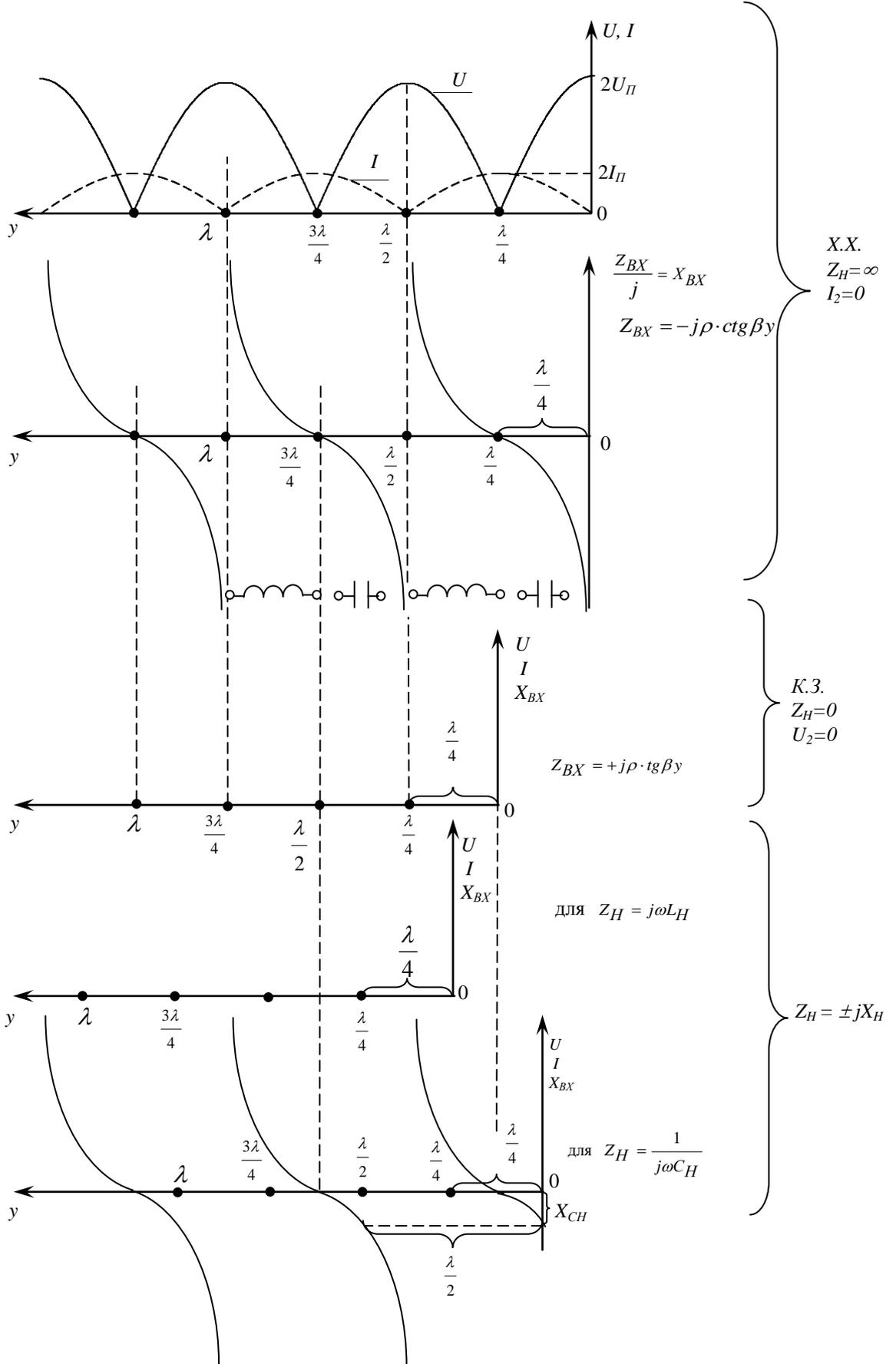


Рисунок 9.3 – Зависимость  $U(y)$ ,  $I(y)$  и  $Z_{BX}(y)$  для РСВ.

### 9.2.2.3 Режим смешанных волн

В РСМВ за счет частичного поглощения энергии нагрузкой амплитуда отраженной волны меньше амплитуды падающей. Следовательно, даже в точках, где суммируются волны в противофазе не может быть полной компенсации и вместо узлов образуются минимумы. Соответственно, при суммировании падающей и отраженной волн, находящихся в фазе, образуются не пучности, а максимумы (рисунок 9.4).

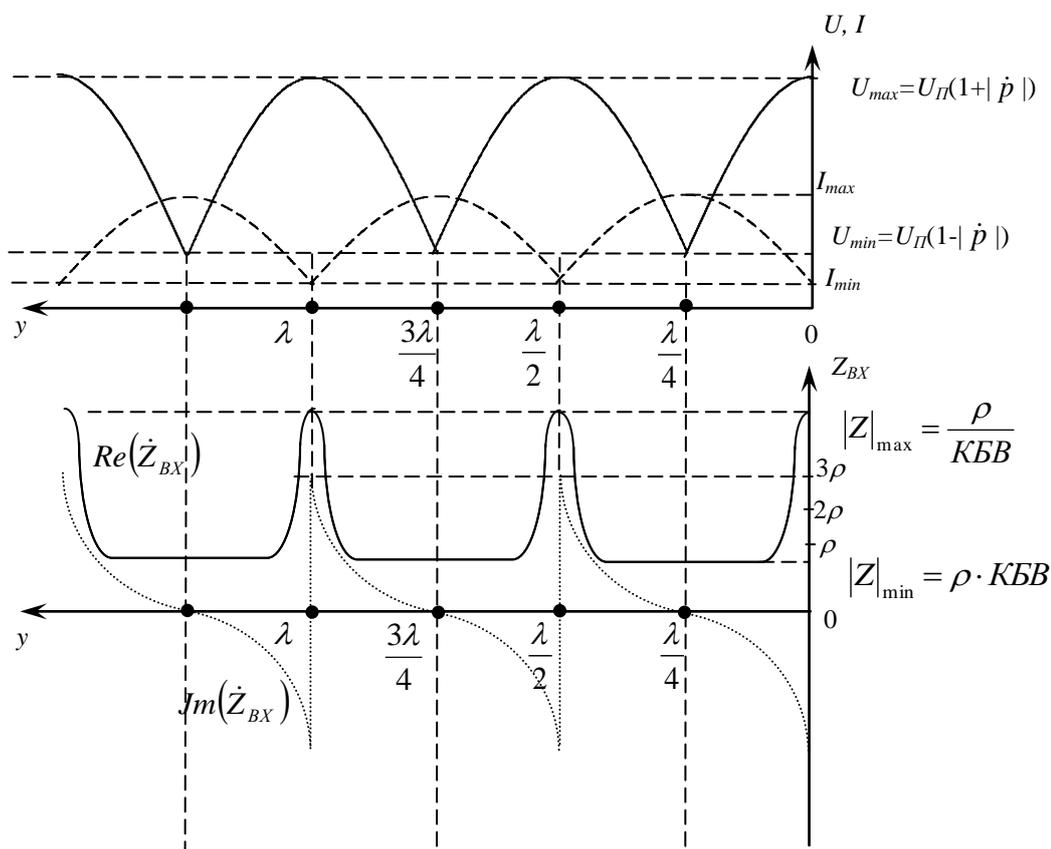


Рисунок 9.4 - Зависимости  $U(y)$ ,  $I(y)$ ,  $Z_{BX}(y)$  для  $R_H > \rho$ .

Значения токов, напряжений и  $Z_{BX}$  в конце линии определяются конкретными значениями нагрузок (при фиксированных значениях  $\dot{E}$ ,  $\dot{Z}_B$ ,  $\dot{Z}_i$ ).

Мгновенные значения напряжений в РСМВ:

$$u(t, y) = U_{\Pi}(1 - |\dot{p}|)\cos(\omega t + \varphi_{\Pi} + \beta y) + 2U_{\Pi}|\dot{p}|\cos\left(\beta y - \frac{\varphi_P}{2}\right)\cos\left(\omega t + \varphi_{\Pi} + \frac{\varphi_P}{2}\right) \quad (9.8)$$

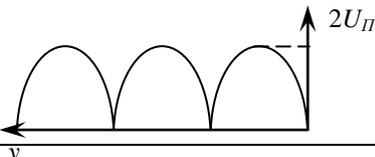
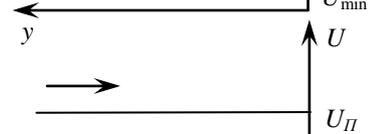
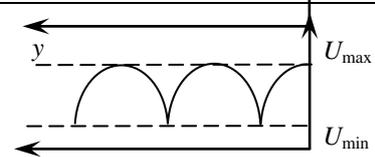
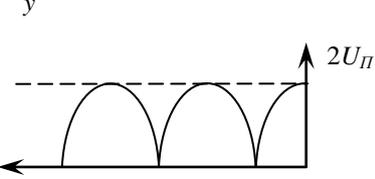
Первое слагаемое выражения (9.8) описывает бегущую волну, второе - стоячую. Соотношение доли бегущей и стоячей волн принято оценивать коэффициентом бегущей волны (КБВ) или обратным ему коэффициентом стоячей волны (КСВ)

$$КБВ = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{1 - |\dot{p}|}{1 + |\dot{p}|}, \quad КСВ = \frac{1}{КБВ}. \quad (9.9)$$

### 9.2.2.4 Работа ЛБП при изменяющейся чисто активной нагрузке

Весьма наглядно режимы работы ЛБП проявляются при изменении чисто активной нагрузки в пределах  $0 - \infty$ .

Таблица 9.2 - Распределение амплитуд напряжений вдоль линии для разных активных нагрузок

Режим	$U(y)$	Нагрузка	$ \dot{p} $	$\varphi_p$
РСВ		$R_H = 0$ к.з.	1	$180^\circ$
РСМВ		$R_H < \rho$	менее 1	$180^\circ$
РБВ		$R_H = \rho$	0	$0^\circ$
РСМВ		$R_H > \rho$	менее 1	$0^\circ$
РСВ		$R_H = \infty$ х.х.	1	$0^\circ$

### 9.2.3 Линия с потерями

Распределение токов и напряжений в линии с потерями в общем случае определяется выражениями (9.1) и (9.2), а входное сопротивление выражением (9.3). Наиболее наглядно влияние потерь можно оценить на примере РСВ.

В РСВ, независимо от наличия потерь, в конце линии, где  $x = \ell$  или  $y = 0$ ,

$$|\dot{p}| = 1 \quad \text{или} \quad |\dot{U}_{отр}| = |\dot{U}_{пад}|.$$

Однако, по мере удаления от конца к началу линии значения напряжения в узлах и пучностях в линии с потерями все сильнее отличаются от идеальных. Так при встрече в противофазе падающей и отраженной волн (см. рисунок 9.2) уже не происходит их полного поглощения ( $|\dot{U}_{отр}| < |\dot{U}_{пад}|$ ), а образуется остаток или минимум, который тем больше, чем ближе к началу линии.

В “бывших узлах”

$$U_{\min}(y) = |\dot{U}_{пад}| - |\dot{U}_{отр}| = 2 \cdot |\dot{U}_{отр}(y=0)| \cdot sh\alpha y, \quad (9.10)$$

соответственно в “бывших пучностях”  $U_{\max}(y)$  уже не равен  $2|\dot{U}_{пад}|$ , а имеет выражение

$$U_{\max}(y) = |\dot{U}_{пад}| + |\dot{U}_{отр}| = 2 \cdot |\dot{U}_{отр}(y=0)| \cdot ch\alpha y. \quad (9.11)$$

Входные сопротивления ЛБП в РСВ имеют реактивный характер, а по модулю представляют чередование нулевых и бесконечно больших значений как на рисунке 9.5.а. Из-за потерь входное сопротивление становится комплексным, значения в “бывших нулях”

$$|Z_{\min}| = Z_B \cdot \operatorname{th} \alpha y, \quad \text{при } \alpha y \ll 1 \quad |Z_{\min}| \approx \rho \cdot \alpha y; \quad (9.12)$$

в “бывших бесконечностях”

$$|Z_{\max}| = \frac{Z_B}{\operatorname{th} \alpha y}, \quad \text{при } \alpha y \ll 1 \quad |Z_{\max}| \approx \frac{\rho}{\alpha y}, \quad (9.13)$$

где  $\alpha$  определяется погонными параметрами.

При  $\alpha y \geq 1$   $Z_{BX}(y) \approx Z_B$ , как показано на рисунке 9.5.б для короткозамкнутой линии.

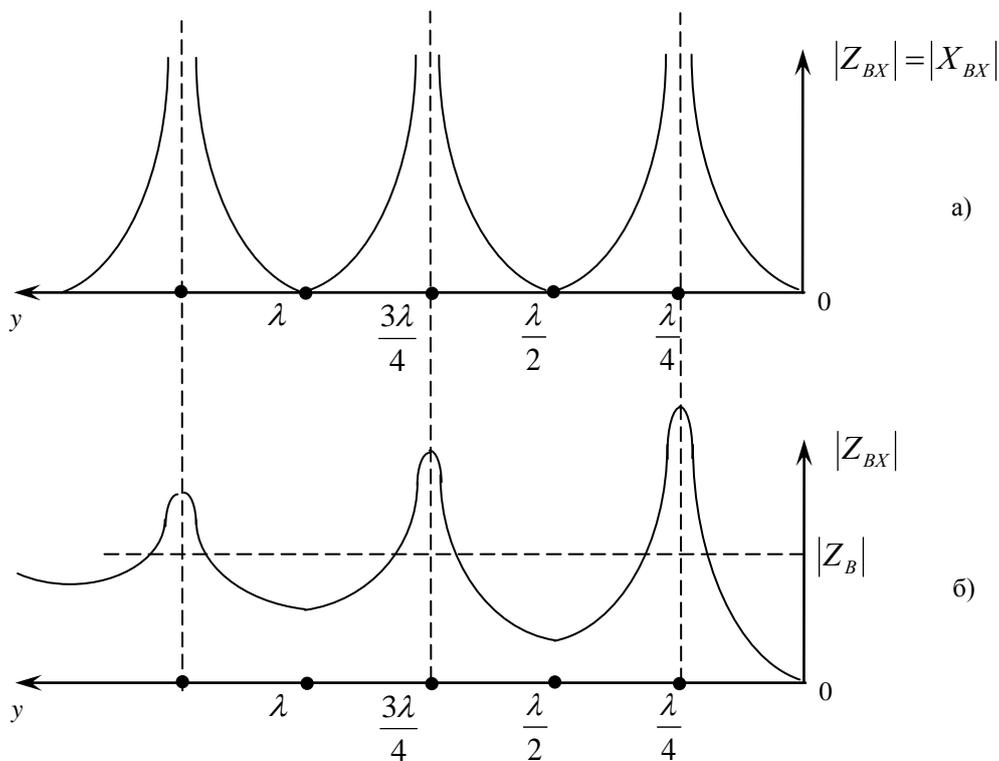


Рисунок 9.5 - Модуль входного сопротивления ЛБП (а) и линии с потерями (б) при  $Z_H=0$  (к.з.)

### 9.3 Методические указания и примеры решения задач

Прежде чем приступить к расчетам в любой задаче, а особенно в задачах, связанных с законами распределения  $Z_{BX}(y)$ ,  $Z_{BX}(\omega)$ ,  $U(y)$ ,  $I(y)$  в ЛБП, необходимо на основе исходных данных установить, каков режим работы линии и на основе соответствующих графиков оценить ожидаемый результат; только после этого выполнить цифровые расчеты. Ниже приводятся примеры решения задач.

9.3.1 Найти напряжение на конце разомкнутой воздушной линии длиной 20 м, если напряжение на зажимах генератора, питающего ЛБП, в установившемся режиме равно 20 В, а частота равна 3 МГц. Определить также напряжение падающей и отраженной волн

напряжения. Определить характер входного сопротивления линии в точке подключения генератора.

**Анализ исходных данных:**

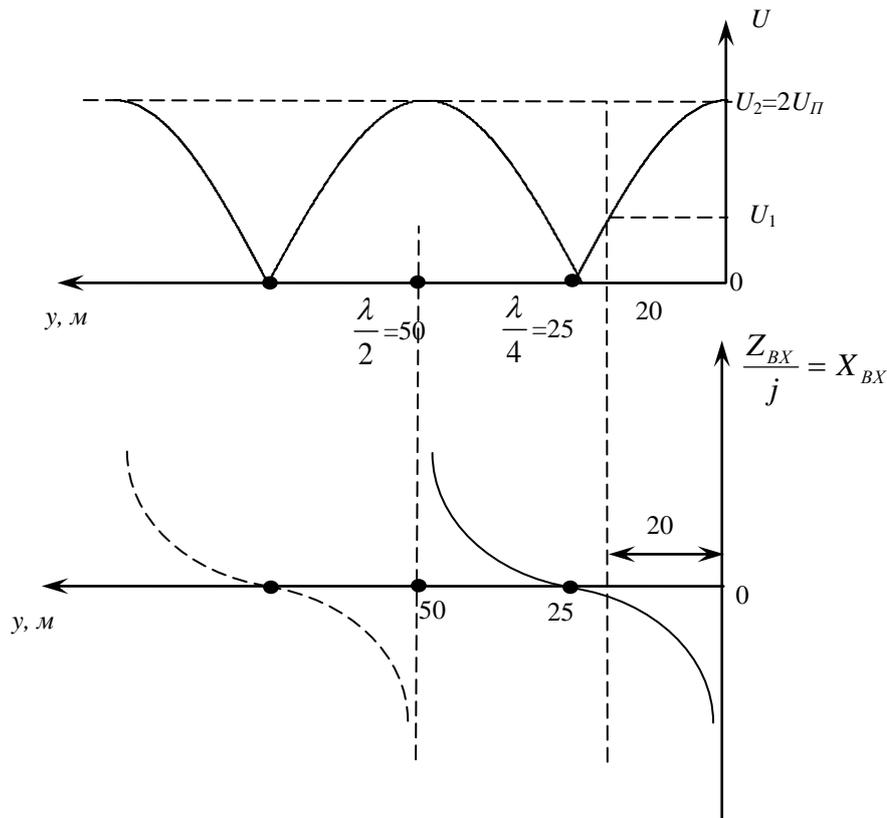
$Z_H = \infty$  (х.х.), т.е. режим стоячих волн;

$$f_{\Gamma} = 3 \cdot 10^6 \text{ Гц, т.е. } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{3 \cdot 10^6 \text{ Гц}} = 100 \text{ м;}$$

длина линии  $\ell = 20$  м меньше чем  $\frac{\lambda}{4} = 25$  м;

$U_1 = 20$  В - напряжение в начале линии, т.е. на зажимах генератора; в установившемся режиме это сумма падающей и отраженной волн, как и в любом другом сечении линии.

Рисунок 9.6 - Зависимости  $U(y)$  и  $Z_{BX}(y)$  в РСВ



Анализ исходных данных (см. рисунок 9.6) показывает, что при заданных условиях искомое напряжение  $U_2 > U_1$ ,  $U_{\Pi} = 0,5 U_2 = U_{OTP}$ ,  $Z_{BX}$  носит емкостный характер.

**Решение**

Из формулы (9.7) при  $y = \ell = 20$  м следует

$$U_1 = 2U_{\Pi} \cos\left(\beta\ell - \frac{\varphi_{\Gamma}}{2}\right) = U_2 \cdot \cos(\beta\ell),$$

т.к.  $\varphi_{\Gamma} = \text{Arg } \dot{p} = 0$  в режиме х.х. (см. выражение (9.5)).

Такое же расчетное соотношение получается из первого уравнения системы (9.2) с учетом нагрузки ( $I_2 = 0$ ) и условия (9.4) ( $\dot{\gamma} = j\beta$ ,  $\cos j\ell = \cos\beta\ell$ ).

$$\text{Коэффициент фазы } \beta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \ell\right)} = \frac{20}{\cos\left(\frac{2\pi}{100} \cdot 20\right)} = 65 \text{ В,}$$

$$U_{II} = U_{OTP} = 0,5U_2 = 0,5 \cdot 65 = 32,5 \text{ В.}$$

**Примечание:** обратите внимание, что при увеличении длины линии до 25 м, 75 м и т.д. в соответствии с условием  $\left(\frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2}\right)$ , напряжение на зажимах того же генератора окажется равным нулю. Естественно, что в этом случае в прежней постановке задача не может быть решена.

9.3.2. Генератор, питающий воздушную линию без потерь длиной 60м, имеет частоту 1 МГц. Рассчитать  $Z_H$ , при которой  $Z_{BX} = 0$ , если  $\rho = 100 \text{ Ом}$ .

**Анализ исходных данных.**

Т.к.  $Z_{BX} = 0$ , то единственно возможный режим работы - РСВ (в РБВ  $Z_{BX}$   $(y) = \rho = \text{const}$ ; в РСМВ  $Z_{BX} \neq 0$  (см. рисунок 9.4).

График  $Z_{BX}(y)$  в РСВ имеет вид, показанный на рисунке 9.3. Приняв на графике за начало ЛБП любую точку, имеющую  $Z_{BX} = 0$ , перемещаемся вправо (к концу линии) на расстояние  $\ell = 60\text{м}$  (рисунок 9.7).

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{10^6 \text{ Гц}} = 300 \text{ м.}$$

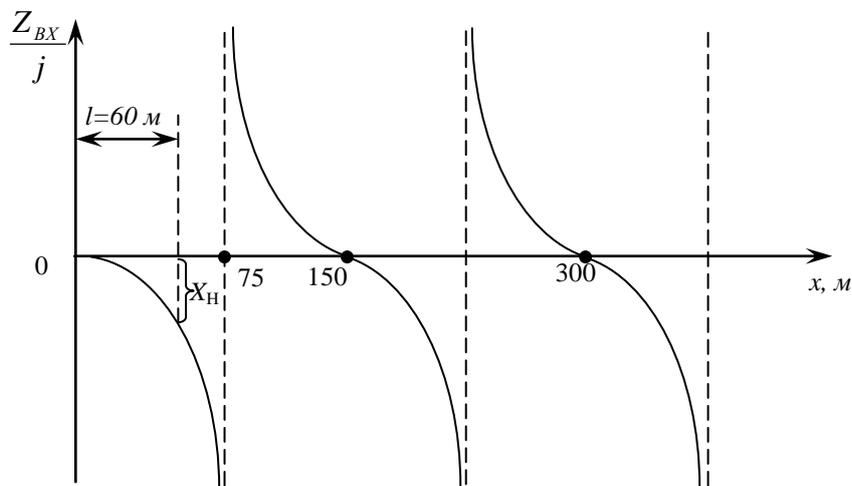


Рисунок 9.7 - Зависимость входного сопротивления от сечения линии в РСВ.

Предварительный анализ показал, что  $Z_H = -jX_H$ , т.е. имеет емкостный характер.

**Решение**

Выражение (9.3) с учетом (9.4) для ЛБП:

$$Z_{BX}(y) = \frac{Z_H + j\rho \operatorname{tg} \beta y}{1 + j \frac{Z_H}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}$$

При  $y = \ell$ ,  $Z_{BX}(\ell) = 0$ :

$$Z_H + j\rho \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \ell = 0,$$

$$Z_H = -j\rho \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \ell = -j100 \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 60}{300} = -j308 \text{ Ом.}$$

9.3.3. Определить волновое сопротивление воздушной линии, если на частоте 100 МГц ее разомкнутый отрезок длиной  $\ell$  имеет входное сопротивление  $Z_{XX} = -j24,4$  Ом, а короткозамкнутый отрезок той же длины имеет входное сопротивление  $Z_{KЗ} = j 231$  Ом. Какова длина  $\ell$  рассматриваемого отрезка линии?

**Анализ исходных данных.**

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{10^8 \text{ Гц}} = 3 \text{ м.}$$

Из рисунка 9.3 ( $Z_H = \infty$  и  $Z_H = 0$ ) следует, что наименьшая длина  $\ell_{\min}$  использованного отрезка линии не превышает  $\frac{\lambda}{4}$ , т.е. 75 см; могут быть использованы также отрезки длиной  $\ell = \ell_{\min} + n \frac{\lambda}{2}$ . При определении волнового сопротивления отрезок линии длиной  $\ell$  выступает как четырехполюсник (используется информация только о  $Z_H$  и  $Z_{BX}$ )

$$Z_B = \sqrt{Z_{XX} \cdot Z_{KЗ}}.$$

Ответ: 75 Ом;  $(60+n \cdot 150)$  см, где  $n=0,1,2,..$

9.3.4. Длина волны  $\lambda$  в линии с потерями 0,8 м, коэффициент затухания  $\alpha=0,08$  неп/м. Линия питается от генератора гармонических колебаний с параметрами  $E=60$  В,  $R_i=100$  Ом, подключенного к линии согласованно, т.к.  $Z_B \approx \rho=100$  Ом.

Рассчитать входное сопротивление линии в режиме бегущих волн и для этой же линии, разомкнутой на конце, если её длина

а)  $\ell=0,4$  м;      б)  $\ell=0,6$  м;      в)  $\ell=0,9$  м.

Сравнить результаты для ЛБП.

**Решение**

В РБВ линия согласована на выходе  $\dot{Z}_H = \dot{Z}_B$ , отраженная волна отсутствует и её входное сопротивление независимо от длины линии равно  $\dot{Z}_B$ , а для ЛБП  $\dot{Z}_{BX} = \rho$ .

В режиме стоячих волн для ЛБП в соответствии с рисунком 9.3 (х.х.) для случая а)  $\ell=0,4$  м  $=\lambda/2$  входное сопротивление бесконечно велико, а в линии с потерями в соответствии с рисунком 9.5 (для х.х.  $y=0$  должен соответствовать первому наибольшему максимуму) и выражением (9.13)

$$|Z_{\max}| = \frac{Z_B}{\operatorname{th}(\alpha \ell)} = \frac{Z_B}{\alpha \ell},$$

т.к.  $\alpha \ell = 0,08 \cdot 0,4 = 0,032$  неп  $\ll 1$ .

$$|Z_{\max}| = \frac{100}{0,032} = 3125 \text{ Ом.}$$

Для условия б)  $\ell=0,6$  м  $= \frac{3\lambda}{4}$  в соответствии с рисунком 9.3 в ЛБП  $Z_{BX}=0$ , а в линии с потерями по выражению (9.12)

$$|Z_{\min}| = Z_B \cdot \alpha \ell = 100 \cdot 0,08 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ Ом.}$$

Для условия в)  $\ell=0,9$  м, т.е.  $\lambda < \ell < \frac{5\lambda}{4}$   $Z_{BX}$  для ЛБП носит емкостный характер и может быть определено по выражению

$$Z_{BX \text{ } XX} = -j \cdot \frac{\rho}{\operatorname{tg}(\beta y)},$$

полученному из выражения (9.3) с учетом условия (9.4) и того, что  $Z_H=\infty$ . Для ЛБП целое число  $\lambda/2$  может быть отброшено в силу периодичности функции  $Z_{BX}(y)$ :

$$Z_{BX \text{ } XX} = -j \cdot \frac{100}{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{0,8} \cdot 0,9\right)} = -j \cdot \frac{100}{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{0,8} \cdot 0,1\right)} = -j100 \text{ Ом.}$$

Для линии с потерями при  $\ell \neq n \cdot \frac{\lambda}{4}$ , где  $n=1,2,3,\dots$ ,  $Z_{BX}$  определяется по выражению (9.3),

где  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

9.3.5. Для линии, описанной в задаче 9.3.4., вычислить напряжение на входе и выходе линии в режиме бегущих волн и для линии, разомкнутой на конце, если её длина

а)  $\ell=0,4$  м;      б)  $\ell=0,6$  м;      в)  $\ell=0,9$  м,

сравнить с результатами для ЛБП.

### **Решение**

#### **Режим бегущих волн**

Т.к.  $Z_{BX}=100$  Ом (см. решение предыдущей задачи), то в соответствии с рисунком к задаче 9.4.28

$$U_{BX} = \frac{E \cdot Z_{BX}}{R_i + Z_{BX}} = \frac{60}{100 + 100} \cdot 100 = 30 \text{ В.}$$

Это значение падающей волны на входе  $U_{1ПД}$ . Для ЛБП значение  $U_{ПД}$  не зависит от координаты, а в линии с потерями (рисунок 9.2) падающая волна уменьшается и в конце линии при  $x=\ell$  или  $y=0$

$$U_{2ПД} = U_{1ПД} \cdot e^{-\alpha \ell}.$$

#### **Режим стоячих волн (х.х.)**

Т.к. по выражению (9.5) коэффициент отражения  $\dot{\rho} = +1$ , то **в конце линии**

$\dot{U}_{2ОТР} = \dot{U}_{2ПД}$  и суммарное напряжение  $U_2 = 2U_{2ПД}$ .

В ЛБП  $U_2 = 2 \cdot 30 = 60$  В независимо от длины линии, а в линии с потерями  $U_2$  тем меньше, чем больше длина линии при прочих равных условиях.

Напряжение **на входе линии** с потерями может быть определено двумя способами:

- 1) по рисунку к задаче 9.4.28, т.к.  $Z_{BX}$  уже вычислено в задаче 9.3.4;
- 2) как результат интерференции падающей и отраженной волн на входе

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ОТР}},$$

причем при определении  $|\dot{U}_1|$  важен **только фазовый сдвиг**  $\dot{U}_{\text{ПАД}}$  и  $\dot{U}_{\text{ОТР}}$ , а не сами значения начальных фаз.

При  $\ell = 0,4 \text{ м} = \lambda/2$  очевидно, что падающая и отраженная волны встречаются **в фазе** (для ЛБП это пучность напряжения, где суммарное напряжение равно 60 В), а при  $\ell = 0,6 \text{ м} = \frac{3\lambda}{4}$  **в противофазе** (для ЛБП – узел напряжения) и можно использовать выражения (9.11) и (9.10), где при  $x=0$

$$|\dot{U}_{1\text{ПАД}}| = 30 \text{ В},$$

$$|\dot{U}_{2\text{ОТР}}| = |\dot{U}_{1\text{ПАД}}| e^{-\alpha\ell},$$

$$|\dot{U}_{1\text{ОТР}}| = |\dot{U}_{2\text{ОТР}}| e^{-\alpha\ell} = |\dot{U}_{1\text{ПАД}}| e^{-2\alpha\ell}.$$

При  $\ell \neq n \cdot \frac{\lambda}{4}$  для х.х. и к.з. и реактивных нагрузках  $L_H$  или  $C_H$ , фазовый сдвиг между  $\dot{U}_{\text{ОТР}}$  и  $\dot{U}_{\text{ПАД}}$  в любом сечении

$$\psi_{\text{ОТР}} - \psi_{\text{ПАД}} = \varphi_{\dot{p}} - 2\beta y,$$

где  $\varphi_{\dot{p}} = \arg \dot{p}$ .

Пусть  $\ell = 0,9 \text{ м}$ , для  $y = \ell$ , т.е. в начале линии

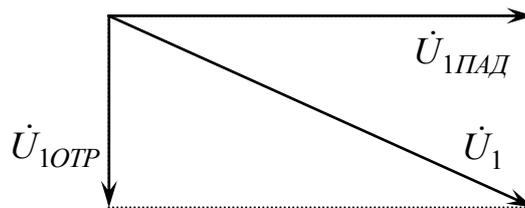
$$\dot{U}_{1\text{ПАД}} = 30 e^{j\psi_{\text{ПАД}}},$$

$$\dot{U}_{1\text{ОТР}} = 30 e^{-2 \cdot 0,08 \cdot 0,9} e^{j\psi_{\text{ОТР}}} = 30 e^{-0,144} e^{j(\psi_{\text{ПАД}} - 0,5\pi)},$$

т.к.  $\varphi_{\dot{p}} - 2\beta y = 0 - 2 \cdot \frac{2\pi}{0,8} \cdot 0,9 = -4,5\pi = -0,5\pi$ ,

поскольку целое число ( $2\pi$ ) для фазового сдвига удобно отбросить.

В нашем частном случае **взаимное** расположение векторов, отображающих падающую и отраженную волны (для удобства примем  $\psi_{\text{пад}} = 0$ ), имеем вид:



Следовательно,  $|\dot{U}_1| = \sqrt{30^2 + (\text{число})^2} = \text{ответ В}$ .

**Примечание:** значение  $\dot{U}_1$  можно вычислить непосредственно по выражению (9.2) с учетом, что в режиме х.х.  $I_2 = 0$ , однако, способ решения рассмотренный

выше, помогает усвоить понятие падающей и отраженной волн и процесс формирования суммарного колебания в установившемся режиме при действии гармонического сигнала.

## 9.4 Задачи для самостоятельной работы

9.4.1. Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь, если длина линии равна 24 м, а рабочая длина волны  $\lambda=62$  м. Рассматривается коаксиальная воздушная линия, у которой радиус наружной трубы ( $r_2$ ) равен 200 мм, а радиус внутренней ( $r_1$ ) - 60 мм. Определить значение емкости или индуктивности, которое соответствует найденному входному сопротивлению.

Указание: для коаксиальной воздушной линии  $\rho = 60 \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Ответ:  $-j 62,5$  Ом; 525 пФ.

9.4.2. Определить длину воздушной короткозамкнутой линии без потерь, имеющей  $Z_{BX} = j 60$  Ом,  $\rho = 180$  Ом и работающей от генератора с частотой 70 МГц.

Ответ: 0.22 м.

9.4.3. Амплитуда напряжения на конце разомкнутой воздушной линии (антенны) равна 600 В. Найти амплитуду напряжения на расстоянии 40 м от конца линии на частоте  $f = 10^6$  Гц, а также амплитуду тока на этом же расстоянии, приняв волновое сопротивление  $\rho = 300$  Ом.

Ответ: 401 В; 1,49 А.

9.4.4. На конце воздушной ЛБП с волновым сопротивлением  $\rho = 80$  Ом включена индуктивность  $L_H$ . Частота генератора, питающего линию, 750 МГц. Ближайший к нагрузке узел напряжения находится на расстоянии 15 см от нее. Определить  $L_H$ . Задачу решить несколькими способами.

Ответ: 17 нГн.

9.4.5. Частота генератора гармонического сигнала, питающего разомкнутую воздушную ЛБП, 100 МГц. Длина линии  $\ell = 4$  м,  $\rho = 200$  Ом, амплитуда напряжения на разомкнутом конце 80 В. Найти  $Z_{BX}$  линии, а также напряжение и ток на ее входе.

Ответ:  $j 115,5$  Ом; 40 В; 0.346 А.

9.4.6. Источник э.д.с. подключен к линии длиной 75 см, закороченной на конце. Длина волны источника 3 м,  $\rho = 100$  Ом. Определить ток, протекающий в закорачивающей перемычке, если амплитуда напряжения на зажимах источника равна 100 В.

Ответ: 1 А.

9.4.7. Рассчитать входное сопротивление разомкнутой линии без потерь, имеющей волновое сопротивление 200 Ом. Длина линии равна 9,7 м, а длина волны генератора, питающего линию, 36 м. Рассчитать также емкость или индуктивность, соответствующую данному входному сопротивлению.

Ответ: 24,5 Ом; 0.47 мкГн.

9.4.8. Известно напряжение в конце разомкнутой линии  $U_2 = 200$  В и ток на расстоянии, равном 2 м от конца линии,  $I = 0,5$ . Длина волны генератора  $\lambda = 20$  м. Найти волновое сопротивление линии.

Ответ: 235 Ом.

9.4.9. Рассчитать наименьшую длину воздушной короткозамкнутой линии, обеспечивающей входное сопротивление емкостного характера и равное 120 Ом. Волновое сопротивление линии равно  $\rho = 100$  Ом. Длина волны генератора, питающего линию,  $\lambda = 10$  м.

Ответ: 3,6 м.

9.4.10. Воздушная линия без потерь, имеющая волновое сопротивление  $\rho = 100$  Ом, нагружена на чисто индуктивное сопротивление, равное 50 Ом. Найти входное сопротивление линии на частоте  $f = 3 \cdot 10^6$  Гц при длине линии, равной 5 м.

Ответ:  $j 98,2$  Ом.

9.4.11. Линия, питаемая генератором синусоидального напряжения частотой  $f = 25$  МГц, имеет погонные параметры  $C = 16$  пФ/м,  $L = 1$  мкГн/м. Найти фазовую скорость распространения радиоволн в такой линии и длину волны в линии.

Ответ:  $2,5 \cdot 10^8$  м/с; 10 м.

9.4.12. Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой воздушной коаксиальной линии без потерь, эквивалентную емкость или индуктивность если: радиус наружной трубы  $r_2 = 60$  мм, радиус внутренней трубы  $r_1 = 16$  мм, длина линии 6 м, длина волны в линии 20 м (см. указание к задаче 9.4.1).

Ответ:  $-j 244$  Ом; 43,5 пФ.

9.4.13. Рассчитать наименьшую длину короткозамкнутой линии, если входное сопротивление имеет емкостной характер и равно 80 Ом, волновое сопротивление  $\rho = 200$  Ом, длина волны в линии  $\lambda = 60$  м.

Ответ: 26,3 м.

9.4.14. Найти входное сопротивление разомкнутой воздушной линии без потерь, имеющей волновое сопротивление  $\rho = 140$  Ом, длину  $\ell = 14$  м, частоту питающего генератора  $f = 80$  МГц.

Ответ:  $-j 14,7$  Ом.

9.4.15. Найти напряжение на конце разомкнутой линии без потерь, если напряжение питающего генератора  $U = 40$  В, длина волны в линии  $\lambda = 40$  м, длина линии  $\ell = 8$  м.

Ответ: 129 В.

9.4.16. Найти напряжение на конце разомкнутой воздушной линии без потерь, если напряжение генератора  $U = 120$  В, длина линии 12 м, а частота питающего генератора  $f = 30 \cdot 10^6$  Гц.

Ответ: 388 В.

9.4.17. Вычислить амплитуду напряжения и амплитуду тока в точке, находящейся от конца разомкнутой воздушной линии на расстоянии  $y = 2,5$  м при условии, если амплитуда напряжения на конце линии 250 В, длина волны генератора  $\lambda = 20$  м, волновое сопротивление  $\rho = 500$  Ом.

Ответ: 177 В; 0,353 А.

9.4.18. Рассчитать напряжение на конце разомкнутой линии без потерь по следующим данным: напряжение генератора  $U = 15$  В, длина волны в линии  $\lambda = 80$  м, длина линии  $\ell = 18$  м.

Ответ: 96 В.

9.4.19. Вычислить амплитуду напряжения и амплитуду тока в точке, отстоящей от конца разомкнутой воздушной линии  $y = 12$  м, при условии: амплитуда напряжения в конце линии  $U_2 = 120$  В, частота генератора  $30 \cdot 10^6$  Гц, волновое сопротивление  $\rho = 240$  Ом.

Ответ: 37,1 В; 0,475 А.

9.4.20. К линии подведен генератор напряжения с  $E = 20$  В и внутренним сопротивлением  $R_i = 600$  Ом. При этом линия, имеющая  $\rho = 200$  Ом, нагружена на сопротивление  $R_H = 200$  Ом. Определить напряжение и ток в начале линии.

Ответ: 5 В; 0,025 А.

9.4.21. К разомкнутой воздушной линии без потерь длиной 60 км приложено синусоидальное напряжение  $U = 10$  В;  $\omega = 5 \cdot 10^3$  рад/с;  $L = 0,24 \cdot 10^{-2}$  Гн/км,  $C = 0,67 \cdot 10^{-8}$  Ф/км. Определить напряжение в конце линии и ток в ее начале.

Ответ: 27,9 В; 44 мА.

9.4.22. Определить входное сопротивление линии без потерь, имеющей длину  $\ell = \lambda/4$  и нагруженной на сопротивление: 1)  $Z_H = j20$  Ом; 2)  $Z_H = -j100$  Ом. Принять волновое сопротивление линии  $Z_B = \rho = 80$  Ом.

Ответ:  $-j320$  Ом;  $j64$  Ом.

9.4.23. На входе разомкнутой воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 200$  Ом действует источник синусоидального напряжения  $u(t) = U_m \cos \omega t$ , длина волны в линии  $\lambda = 2$  м, значение напряжения в конце линии  $U_2 = 100$  В. Определить амплитуду тока и напряжения в точке, отстоящей от конца линии на расстоянии 0,3 м.

Ответ: 58,8 В;  $j 0,405$  А.

9.4.24. Линия без потерь, имеющая длину  $\ell = 55$  м, характеристическое сопротивление  $\rho = 500$  Ом и фазовую постоянную  $\beta = 0,05\pi$  рад/с, нагружена на сопротивление  $Z_H = 500 e^{j60^\circ}$  Ом. Вычислить значения напряжения  $\dot{U}_1$ , тока  $I_1$  на входе линии и величину входного сопротивления.

Ответ:  $36,6 e^{j105^\circ}$  В;  $272,8 e^{j105^\circ}$  мА; 134 Ом.

9.4.25. ЛБП длиной 100 м имеет фазовую постоянную  $\beta = 0,05\pi$  рад/м и характеристическое сопротивление 75 Ом. Вычислить коэффициент отражения  $\dot{p}$  и входное сопротивление линии, если линия нагружена на  $R_H = 50$  Ом. Изобразить график распределения напряжения вдоль линии  $U(y)$  с указанием значений в характерных точках. Напряжение на входе линии  $U_1 = 20$  В.

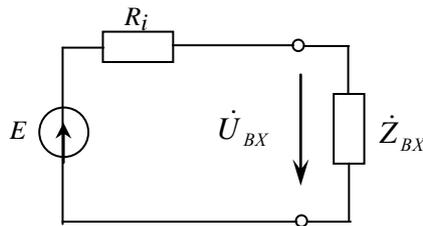
9.4.26. На конце воздушной ЛБП с волновым сопротивлением  $\rho = 75$  Ом включена емкость  $C_H$ . Длина волны в линии 0,5 м. Ближайший к нагрузке узел напряжения находится на расстоянии 5 см от нее. Вычислить  $C_H$ . Задачу решить несколькими способами.

9.4.27. Линия с потерями длиной 2 м закорочена на конце. Рассчитать напряжение в точке, отстоящей от конца на расстоянии 1,5 м, если длина волны распространяющихся по линии колебаний 1 м, а напряжения на входе и выходе этой же линии в режиме бегущих волн соответственно 10 В и 7 В.

**Указания:** по данным РБВ вычислить коэффициент затухания  $\alpha$ , значения падающей и отраженной волны в заданной точке; при вычислении суммарного напряжения учесть принцип образования узлов и пучностей в ЛБП.

9.4.28. Длина волны в разомкнутой линии с потерями 1 м. Длина линии 1,5 м. Линия питается от генератора с параметрами:  $E = 10$  В,  $R_i = 50$  Ом. Вычислить напряжение на входе линии, если известно, что в РБВ  $|\dot{U}_2| = 0,9|\dot{U}_1|$ , где  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  - напряжения на входе и на конце линии. Сравнить с  $U_{BX}$ , которое имела бы ЛБП при прочих равных условиях. Волновое сопротивление  $Z_B$  принять равным  $\rho = 50$  Ом.

**Указание:** сначала определите  $Z_{BX}$  разомкнутой линии без потерь и с потерями, а потом рассчитайте  $U_{BX}$  в соответствии со схемой



9.4.29. Длина волны  $\lambda$  в короткозамкнутой линии с потерями 0,8 м. Длина линии  $\ell = 0,6$  м. Вычислить входное сопротивление линии, если  $Z_B \approx \rho = 100$  Ом, а значения напряжения на входе и в конце линии в режиме бегущих волн соответственно 8 В и 7,5В. Сравнить со входным сопротивлением короткозамкнутой ЛБП, если  $\ell$  и  $\lambda$  - прежние.

9.4.30. Вычислить комплексное сопротивление  $\dot{Z}_H$ , если в ЛБП, имеющей  $\rho = 50$  Ом,  $U_{\min} = 2$  В,  $U_{\max} = 8$  В, длина волны в линии 80 см, а ближайший к нагрузке минимум напряжения находится на расстоянии а) 15 см, б) 5 см от конца линии. Задачу решить двумя способами: через  $Z_{\text{вх}}$  и через  $\rho$ .

9.4.31. Линия без потерь длиной  $\ell$ , разомкнутая на конце, питается от генератора гармонических колебаний с параметрами  $E=100$  В,  $R_i=150$  Ом. Определить напряжение на конце линии, если волновое сопротивление 150 Ом, а длина волны в линии 10м.

- а)  $\ell=4$  м;      б)  $\ell=2$  м.

**Указание:** определив входное сопротивление линии, найдите входное напряжение линии в соответствии с рисунком к задаче 9.4.28.

9.4.32. Короткозамкнутая воздушная ЛБП длиной  $\ell$  питается от генератора гармонических колебаний с параметрами  $E=50$  В,  $R_i=100$  Ом и частотой 150 МГц. Определить токи в начале и в конце линии, если её волновое сопротивление 100 Ом.

- а)  $\ell=0,2$  м;      б)  $\ell=0,75$  м.

См. указание к задаче 9.4.31.

9.4.33. К воздушной ЛБП с волновым сопротивлением  $\rho=400$  Ом и длиной  $\ell$  подключен генератор напряжения с  $E=20$  В, внутренним сопротивлением 600 Ом и частотой 30 МГц. Линия нагружена на сопротивление 200 Ом. Определить ток и напряжение в начале линии. Вычислить КБВ и построить закон распределения напряжения вдоль линии  $U(y)$ .

- а)  $\ell=7,5$  м;      б)  $\ell=5$  м;      в)  $\ell=8$  м.

См. указание к задаче 9.4.31.

9.4.34. Генератор, питающий линию с потерями длиной  $\ell$

а)  $\ell=1,5 \cdot \lambda$ ;      б)  $\ell=1,25 \cdot \lambda$ ;      в)  $\ell=1,1 \cdot \lambda$ .

согласован с линией ( $\dot{Z}_i = \dot{Z}_B$ ) и в режиме бегущих волн создает на входе напряжение 10 В. Длина волны в линии 1 м, коэффициент затухания  $\alpha=0,08$  неп/м. Вычислить напряжение на входе этой линии, если поставить её в режим х.х. и питать от прежнего генератора.

### 9.5 Задание “Длинные линии” и варианты исходных данных

В задании исследуется однородная длинная линия при гармоническом воздействии в разных режимах.

**Исходные данные** зависят от значения  $N$ , которое задается двузначным числом от 01 до 99:

1) погонная индуктивность линии в мкГн на метр

$$L = 1 + 0,01 \cdot N;$$

2) погонное сопротивление линии в омах на метр

$$R = 0,3 + 0,002 \cdot N;$$

3) длина линии в метрах

$$\ell = 125 + 4 \cdot N;$$

4) при нечетном  $N$  расчет вести для линии с фазовой скоростью  $V_\phi = 3 \cdot 10^8$  м/с и частотой  $f = 3$  МГц, при четном  $N$  расчет вести для  $V_\phi = 10^8$  м/с и  $f = 1,5$  МГц;

5) напряжение в начале линии в вольтах независимо от значения  $N$

$$u_1(t) = 20 \sqrt{2} \cos \omega t .$$

#### **Задание.**

**Для линии без потерь** ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ) выполнить следующие семь пунктов:

1) вычислить волновое сопротивление, коэффициент распространения, коэффициент фазы и длину волны в линии;

2) считая, что линия нагружена на реактивное сопротивление, найти и построить зависимости амплитудных или действующих значений тока и напряжения от координаты в установившемся режиме;

*Указание:* если значение  $N$  делится на 3 или 4, то в качестве нагрузки принять индуктивное сопротивление  $\dot{Z}_L$ , у которого  $X_{LH} = 2\rho$ , а для остальных  $N$  нагрузкой считать емкостное сопротивление  $\dot{Z}_C$ , у которого  $|X_{CH}| = 0,5 \rho$ , где  $\rho$  - волновое сопротивление ЛБП;

3) определить расстояние от конца линии до ближайшего к нему узла напряжения;

4) заменить индуктивность  $L_H$  или емкость  $C_H$  нагрузки (см. п.2) эквивалентной длиной линии, разомкнутой на конце (режим х.х.) или замкнутой накоротко (режим к.з.) и имеющей те же параметры  $\rho$  и  $\dot{\gamma}$ , определить наименьшую длину этой добавочной линии;

5) нагрузить линию активным сопротивлением  $R_H$ , равным реактивному сопротивлению  $R_H = X_{LH}$  или  $R_H = |X_{CH}|$  в зависимости от варианта, найти и построить для этого режима зависимости амплитудных или действующих значений напряжения и тока от координаты вдоль линии; на эти же графики нанести аналогичные зависимости для согласованной линии;

6) для п.п. 2), 4) и 5) определить коэффициенты отражения волны в конце линии;

7) рассчитать волновое сопротивление четвертьволнового согласующего трансформатора, который необходимо включить между линией и нагрузкой (п.5) для их согласования и изобразить график распределения напряжения от координаты вдоль линии и согласующего четвертьволнового трансформатора с указанием характерных численных значений напряжения и продольной координаты линии.

**Для линии с потерями** ( $R$  соответствует исходным данным,  $G = 0$ ) рассчитать:

- 1) значения постоянной распространения  $\dot{\gamma}$  коэффициента затухания  $\alpha$  в неперах на метр и децибелах на метр;
  - 2) значение напряжения  $|U_2|$  в конце линии при согласованной нагрузке (РБВ);
  - 3) величину напряжения падающей и отраженной волн в точке, отстоящей на  $0,75 \lambda$  от конца короткозамкнутой или разомкнутой линии;
  - 4) значение напряжения в сечении линии, удаленном от ее конца на расстояние равное  $0,75 \lambda$ 
    - а) для короткозамкнутой линии, если  $N$ -четное,
    - б) для разомкнутой линии, если  $N$ -нечетное,
- результат сравнить с аналогичным для ЛБП;

**Указание:** напряжение в заданной точке вычислить двумя способами: как результат интерференции падающей и отраженной волн из п.3) и на основе соотношений (9.2) или (9.10), (9.11).

- 5) изобразить предполагаемый характер распределения  $U(y)$  в линии с потерями при к.з. на выходе или х.х. на выходе в соответствии с заданным  $N$ .
- 6) вычислить  $|Z_{BK}|$  линии с потерями в точке  $y = 0,75 \lambda$  для короткозамкнутой или разомкнутой линии в соответствии с подразделом 9.2.3; результат сравнить с аналогичным для ЛБП.

## 9.6 Знания и умения

**Знать:**

- 1) при каких условиях электрическая цепь рассматривается как цепь с распределенными параметрами;
- 2) почему токи и напряжения в цепях с распределенными параметрами являются функциями двух переменных - времени и координаты;
- 3) почему при гармоническом воздействии отклик такой цепи ищется как функция единственной переменной - координаты вдоль линии;
- 4) что представляют собой падающая и отраженная волны в линии при гармоническом воздействии;
- 5) что представляет собой ток (напряжение) в любой точке линии в установившемся режиме при гармоническом воздействии;
- 6) что такое первичные (погонные) и вторичные (волновые) параметры длинной линии;
- 7) по какому принципу группируются виды нагрузок, определяющие три возможных режима работы ЛБП;
- 8) почему в режиме бегущих волн входное сопротивление ЛБП чисто активно, в РСВ - чисто реактивно, а в РСМВ носит комплексный характер;
- 9) “физику” образования узлов и пучностей в РСВ, минимумов и максимумов в РСМВ;

- 10) влияние потерь на распределение  $U(y)$  и  $I(y)$  в линии с потерями в разных режимах;
- 11) выражения для коэффициента отражения, коэффициента бегущей волны КБВ, фазовой постоянной  $\beta$ ;
- 12) выражение для  $Z_{BX}$  ЛБП при коротком замыкании и холостом ходе на выходе.

**Уметь:**

- 1) строить закон распределения напряжения (тока) в ЛБП для любого вида нагрузки при заданной длине линии и известной длине волны в линии;
- 2) изображать зависимость  $Z_{BX}(y)$  в РБВ и РСВ для ЛБП при разных нагрузках;
- 3) изображать зависимость  $Z_{BX}(\omega)$  в РСВ для ЛБП при коротком замыкании и холостом ходе на выходе;
- 4) определить характер нагрузки по виду распределения токов и напряжений вдоль линии;
- 5) по условиям задачи установить режим работы и, изобразив необходимые графики  $U(y)$ ,  $I(y)$ ,  $Z_{BX}(y)$ , сделать обоснованные предположения о способах решения и возможных ответах;
- 6) определить характер входного сопротивления при известных параметрах нагрузки и линии;
- 7) определить амплитуды токов (напряжений) на любом расстоянии от конца (начала) линии при известных параметрах нагрузки и линии как без потерь, так и с потерями;
- 8) вычислить значения входного сопротивления линии при известных параметрах нагрузки и линии как без потерь, так и с потерями.

## 9.7 Формы контроля

Тестовый опрос и индивидуальное задание.

## 9.8 Рекомендуемая литература

**Основная:**

1. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей.-М.: “Радио и связь”, 1986.-с.337-374.
2. Попов В.П. Основы теории цепей.-М.: Высш.шк.,2000.-с.462-487.

**Дополнительная:**

1. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. -Л.: Энергия,1965.-с.306-341.
2. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. М.: Высш.шк.,1973.-с.363-402.
3. Матханов П.Н., Данилов Л.В. Сборник задач по теории электрических цепей. -М.: Высш.школа,1980.-с.164-179.
4. Методические указания и контрольные задания по курсу ОТЦ.-М.: МИРЭА, 1980.-с.47-48.
- Белецкий А.Ф. Основы линейных электрических цепей. –М.: Связь, 1967.- с.353-377.

## 10. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 10.1 Цель занятия

Освоить расчет переходных процессов (ПП) классическим методом и операторным на основе операторной схемы замещения.

### 10.2 Краткие теоретические сведения

**Переходный процесс (ПП)** – состояние цепи между двумя установившимися режимами. Для возникновения ПП необходимы:

- 1) скачкообразное изменение воздействия или скачкообразное изменение параметров цепи (коммутация);
- 2) наличие в схеме реактивных элементов;
- 3) изменение запаса электрической или магнитной энергии в цепи.

Для **линейной** цепи справедливы законы коммутации:

$$u_c(0_-) = u_c(0_+) \quad \text{и} \quad i_L(0_-) = i_L(0_+). \quad (10.1)$$

**Начальные условия (НУ)** – значение всех токов и напряжений в момент  $t=0_+$ ; докоммутационные при  $t=0_-$ ; установившиеся (вынужденные) при  $t \rightarrow \infty$ . НУ нулевые, если все независимые НУ  $u_c$  и  $i_L$  равны 0; остальные НУ называют зависимыми.

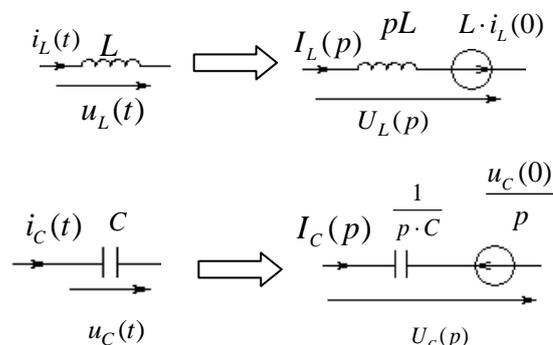
#### Порядок расчета классическим методом:

- 1) определить независимые НУ из докоммутационной схемы;
- 2) вычислить необходимые зависимые НУ из послекоммутационной схемы;
- 3) вычислить установившиеся значения искомых токов и напряжений в схеме после коммутации;
- 4) получить характеристическое уравнение цепи и рассчитать его корни;
- 5) записать искомое  $u_c(t)$  или  $i_L(t)$  как сумму вынужденной и свободной составляющей;
- 6) используя НУ, определить постоянные интегрирования.

#### Порядок расчета по операторной схеме замещения:

- 1) изобразить операторную схему цепи, заменив:

$$e(t) \rightarrow E(p), \quad i(t) \rightarrow I(p);$$



- 2) любым удобным способом найти изображение искомых величин  $I(p)$ ,  $U(p)$ ;
- 3) перейти к мгновенным значениям (оригиналам) для искомых величин  $i(t)$  и  $u(t)$ .

### 10.3 Методические указания и примеры решения задач

**Задача 1.** Для схемы на рисунке 10.1 вычислить переходные  $i_L(t)$ ,  $u_L(t)$

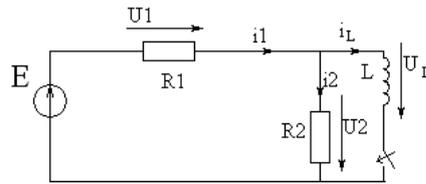


Рисунок 10.1

**Решение:**

1) Составим таблицу граничных условий, содержащую докоммутационные, начальные и установившиеся значения:

Таблица10.1

t:	$0_-$	$0_+$	$\rightarrow\infty$
$i_1$	$\frac{E}{R_1 + R_2}$	$\frac{E}{R_1 + R_2}$	$\frac{E}{R_1}$
$i_2$	$\frac{E}{R_1 + R_2}$	$\frac{E}{R_1 + R_2}$	0
$i_L$	0	0	$\frac{E}{R_1}$
$u_1$	$\frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2}$	E
$u_2$	$\frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$	0
$u_L$	0	$\frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2}$	0

В цепи до коммутации  $t=0_-$  ключ в ветви с индуктивностью разомкнут. Соответственно, ток через индуктивность равен нулю. Оставшиеся токи и напряжения определяются с помощью законов Кирхгофа и закона Ома.

Для расчета значений при  $t=0_+$  (время после коммутации) для послекоммутационной схемы составляют балансные уравнения по числу разных токов, записывают закон Ома для всех сопротивлений  $R$  и учитывают независимые НУ (необходимо помнить, что по закону коммутации ток через индуктивность не зависит от коммутации, а значит, сохраняет свое значение):

$$i_1 - i_2 - i_L = 0 \quad i_L = 0$$

$$U_1 + U_2 = E$$

$$U_2 = U_L$$

$$U_1 = i_1 R_1$$

$$U_2 = i_2 R_2$$

Для расчета установившихся значений ( $t \rightarrow \infty$ ) требуется изобразить послекоммутационную схему с учетом характера воздействия (постоянное или гармоническое)

В задаче задано:  $E = \text{const}$ , т.е.  $\omega = 0$ . Тогда в установившемся режиме при постоянном воздействии индуктивность обращается в короткое замыкание, а, соответственно, схема на рисунке 10.1 будет вырождена в следующую:

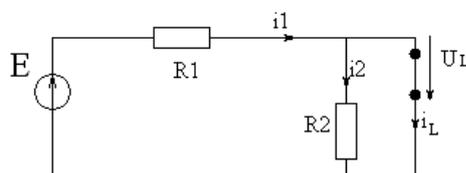


Рисунок 10.2. Схема цепи в установившемся режиме при постоянном воздействии

Так как в ветви, содержащей индуктивность сопротивление равно нулю, то, соответственно, ток на сопротивлении R2 будет равен нулю, тогда:

$$I_1 = I_L = E/R$$

$$U_L = 0 \text{ (на элементе } L \text{ короткое замыкание),}$$

В сложных схемах составляют ММЦ:

$$i_1 - i_2 - i_L = 0$$

$$u_1 + u_2 = E$$

$$u_2 - u_L = 0$$

$$u_1 = i_1 R_1$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \text{ т.к. при действии постоянной ЭДС } E \quad i_L = I_L = const, \text{ то } U_L = 0.$$

Далее находим остальные токи и напряжения

2) Определим характеристическое уравнение, которое может быть составлено несколькими способами:

если имеется дифференциальное уравнение относительно искомого тока (напряжения), то путем алгебраизации

левой части:  $U_L \rightarrow p^0$ ,  $\frac{dU_L}{dt} \rightarrow p$ ,  $\frac{d^2 U_L}{dt^2} \rightarrow p^2$ ,  $U_C \rightarrow p^0$ ,  $\frac{dU_C}{dt} \rightarrow p$ ,  $\frac{d^2 U_C}{dt^2} \rightarrow p^2$ , правая часть обнуляется;

ZBX=0, если входное воздействие ЭДС или YBX(p)=0, если входное воздействие – источник тока;

3) путем алгебраизации и приравнивания нулю определителя ММЦ по МУП или по МКТ.

Для заданной схемы

$$\text{По МКТ: } \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + pL \end{vmatrix} = pL \cdot (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2 = 0$$

Решаем полученное уравнение относительно неизвестного оператора p. Корень характеристического уравнения будет равен  $p = \frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)}$ ,  $p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}$ ;

Для пассивных схем корни могут быть либо отрицательные вещественные простые или кратные, либо попарно комплексно - сопряжённые с отрицательной действительной частью. Это свидетельствует о том, что свободные составляющие стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , и остается только новый установившийся режим.

3) Так для определения закона изменения переходного процесса необходимо рассчитать дифференциальное уравнение, необходимо записать полное решение с помощью постоянных интегрирования. Переходный процесс складывается из свободной и вынужденной составляющей, где вынужденная составляющая – это значение искомой величины тока или напряжения в новом установившемся режиме:

$$i_L(t) = i_{Lcв}(t) + i_{Lвын}(t)$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} + A \cdot e^{pt} \quad i_L(t) = A \cdot e^{pt} + \frac{E}{R_1}$$

где A – неизвестная постоянная интегрирования, p – корень характеристического уравнения.

Для того, чтобы рассчитать значение постоянной интегрирования, достаточно приравнять  $t$  к нулю, тогда:

При  $t=0+$ :

$$i_L(0_+) = A + \frac{E}{R_1};$$

Значение тока на индуктивности в этот момент времени равно нулю. Соответственно:

$$0 = A + \frac{E}{R_1} \rightarrow A = -\frac{E}{R_1};$$

Подставляя полученные значения в выражение для тока, получим:

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1} \cdot e^{pt},$$

где

$$0 = \frac{E}{R_1} + A \rightarrow A = -\frac{E}{R_1}$$

$$p = \frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot (R_1 + R_2)} i_L(0_+) = \frac{E}{R_1} + A$$

$i_L(t) = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1} \cdot e^{pt}$ , где  $p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}$  при заданных числовых значениях параметров цепи – конкретное число.

**Примечание:** Для схем второго порядка порядок расчета переходных процессов остается прежним. Единственное, потребуется введение в уравнение двух постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

$$i_L(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + i_{L_{\text{вын}}}$$

Так как неизвестных две, а уравнение одно, то необходимо записать еще одно уравнение для расчета постоянных интегрирования. Для этого можно воспользоваться компонентными уравнениями:

$$U_L(t) = L \left[ \frac{di_L(t)}{dt} \right] = L [A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 t} + i'_{L_{\text{вын}}}]$$

Последующий расчет постоянных интегрирования соответствует расчету переходного процесса классическим методом в цепях первого порядка:

для  $t=0+$ :

$$i_L(0_+) = i_{L_{\text{вын}}} + A_1 + A_2$$

$$U_L(0_+) = L[A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2]$$

**Примечание:** При комплексно - сопряженных корнях характеристического уравнения значения постоянных интегрирования также окажутся комплексно - сопряженными.

**Задача 2.** Для задачи 1 рассчитать переходный процесс операторным методом.

**Решение:**

1) Исходя из порядка расчета операторным методом, составим операторную схему замещения в цепи после коммутации. Операторная схема замещения представлена на рисунке 10.3:

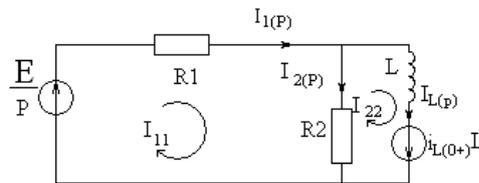


Рисунок 10.3

2) любым удобным способом определяем изображение искомых величин. Для этого воспользуемся МКТ. Составим математическую модель цепи и рассчитаем уравнения относительно тока  $I_{22}$ , который будет являться током через индуктивность.

$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + pL \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ p \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$I_{22} = I_L(p) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E \\ -R_2 & p \end{vmatrix}}{\Delta Z} = \frac{E \cdot R_2}{p \cdot \Delta Z} \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + pL \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta Z = pL \cdot (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2 -$$

характеристический

ПОЛИНОМ

$$I_{22} = I_L(p) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E \\ -R_2 & p \end{vmatrix}}{\Delta Z} = \frac{E \cdot R_2}{p[\Delta Z]}$$

$$I_L(p) = \frac{E \cdot R_2}{L(R_1 + R_2) \cdot (p - p_n) \cdot p},$$

где  $p_n$  - корень характеристического уравнения.

$$i_L(t) = \text{Res}|_{p=0} + \text{Res}|_{p=p_n}$$

$$\text{Res}|_{p=0} = \frac{E \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{(p-0)}{p \cdot (p-p_n)} \Big|_{p=0} = \frac{E}{R_1}$$

$$\text{Res}|_{p=p_n} = \frac{E \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{(p-p_n)}{p \cdot (p-p_n)} \Big|_{p=p_n} = -\frac{E}{R_1} \cdot e^{p_n \cdot t}$$

$$\text{Res}|_{p=0} = \frac{E \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{(P-0)}{P(P-P_n)} \Big|_{p=0} = \frac{E}{R_1}$$

$$\text{Res}|_{p=p_n} = \frac{E \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{(P-p_n)}{P(P-P_n)} \Big|_{p=p_n} = -\frac{E}{R_1} e^{p_n t} \quad I_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{p_n t}$$

По полученному результату построим график изменения тока через индуктивность (см. рис.10.4).

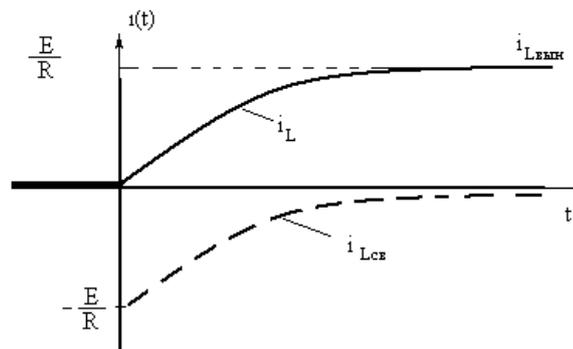
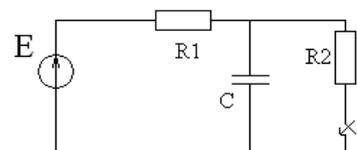
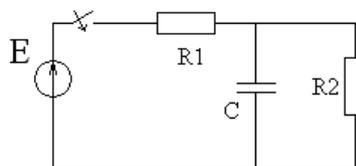
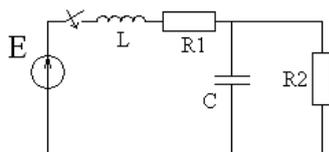


Рисунок 10.4 Графическое представление переходного процесса

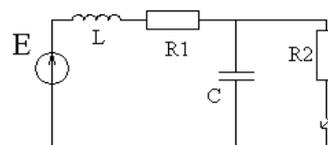
## 10.4 Задачи для самостоятельной работы



а)



б)



в)

$$R_1 = 2R_2; R_1 = 4R_2; R_1 = R_2$$

д)

Рисунок 10.5 Схемы для самостоятельной работы в аудитории

## 10.5 Знания и умения

В результате изучения темы, студент должен знать и уметь следующее.

### **Знать:**

- 1) определение ПП и условия его возникновения;
- 2) законы коммутации;
- 3) что такое зависимые, независимые, нулевые и ненулевые НУ;
- 4) алгоритм расчета ПП классическим методом;
- 5) алгоритм расчета ПП по операторной схеме замещения;
- 6) операторное изображение типовых сигналов – постоянного и гармонического;
- 7) прямое и обратное преобразование Лапласа.

### **Уметь:**

- 1) определить значения всех токов и напряжений в схеме до коммутации, их начальные и установившиеся значения в схеме после коммутации;
- 2) выполнить расчет ПП классическим методом;
- 3) изобразить операторную схему замещения цепи после коммутации;
- 4) найти изображения искомых величин и перейти к мгновенным значениям;
- 5) построить графики переходных токов и напряжений.

## 10.6 Расчетное задание по теме: «Переходные процессы»

Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи произвести классическим и операторным методами.

Исходные данные: модель цепи и ее параметры задаются шифром (см. ниже).

В электрической цепи производится коммутация.

Выполнить следующее задание:

- 1) найти вынужденные докоммутационные значения, установившиеся послекоммутационные значения и начальные значения всех токов и напряжений для заданной схемы цепи в общем виде и цифрах; результаты свести в таблицу и проверить по законам Кирхгофа;
- 2) составить характеристическое уравнение для заданной схемы любыми двумя способами, вычислить корни характеристического уравнения, произвести проверку числовых значений корней уравнения;
- 3) найти законы изменения тока и напряжения в цепи в послекоммутационный период классическим методом:

а)  $i_L(t), u_L(t)$ ;

б)  $i_C(t), U_C(t)$ ;

4) по найденным выражениям  $i(t), u(t)$  вычислить значения  $i(0), u(0)$  и убедиться в правильности результата;

5) используя операторный метод расчета ПП, определить закон изменения тех же  $i(t), u(t)$ , что и в п.3;

6) построить кривые изменения всех токов и напряжений, указав на графиках соответствующие докоммутационные значения;

7) записать алгоритм определения всех остальных токов и напряжений;

8) вычислить время переходного процесса для найденного переходного тока или напряжения;

9) сделать заключение (с соответствующим пояснением) о возможности рассматривать в определенном масштабе полученный  $i(t), u(t)$   $i(t)$  и  $U(t)$  в качестве соответствующей переходной характеристики цепи;

10) сформулировать общие выводы по работе.

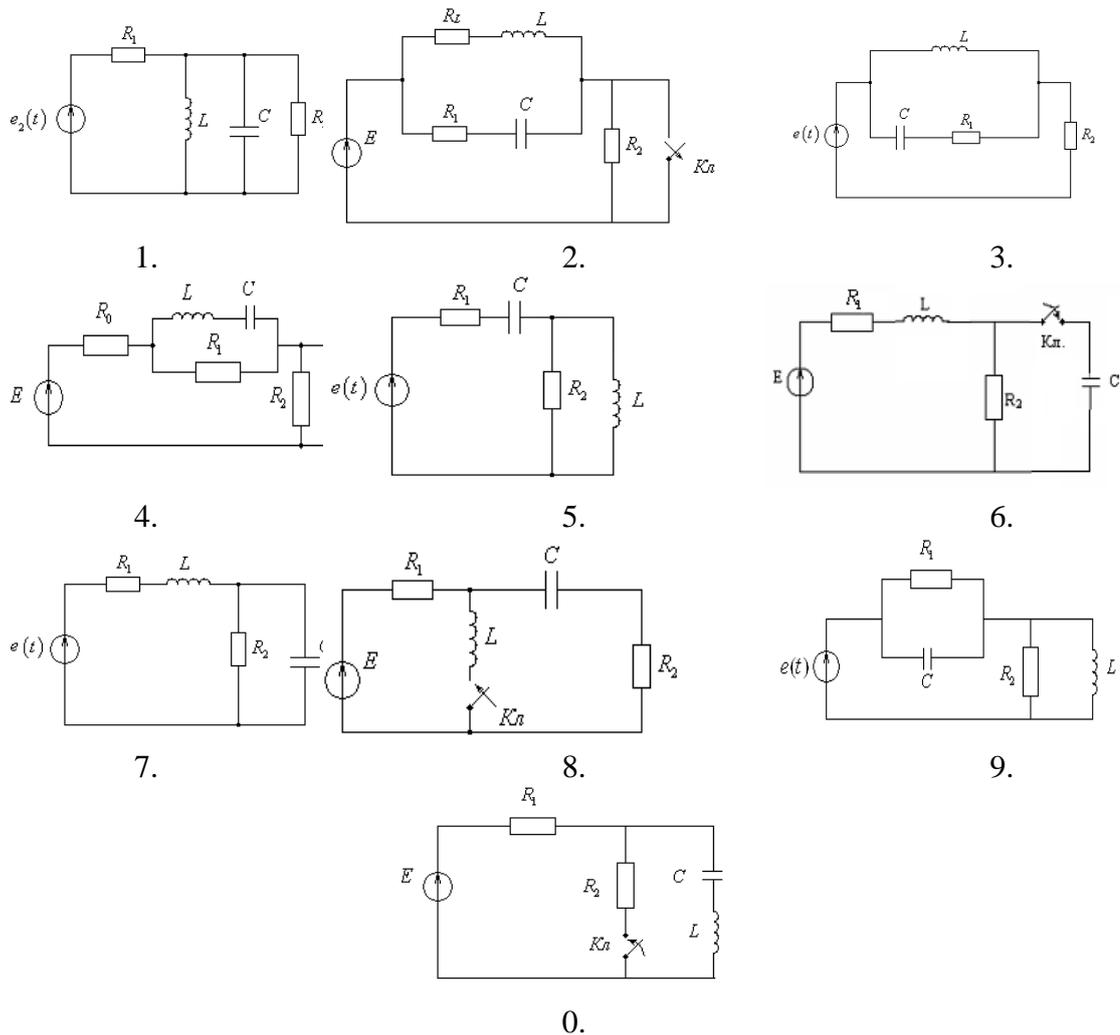
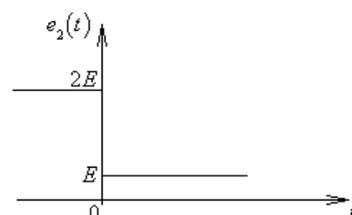
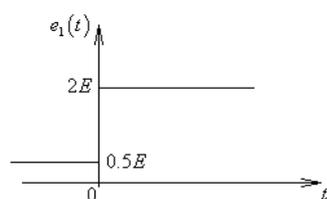
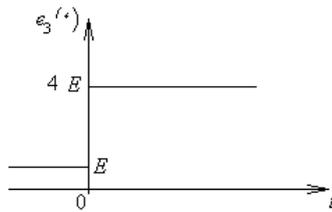


Рисунок 10.6 Схемы электрических цепей

**Варианты задания источника сигнала  $e(t)$ :**



$$e_1(t) = \begin{cases} 0.5E, & t \leq 0_- \\ 2E, & t \geq 0_+ \end{cases}$$

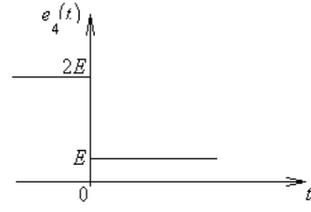


$$e_3(t) = \begin{cases} E, & t \leq 0_- \\ 4E, & t \geq 0_+ \end{cases}$$

Таблица 1

№	E, В	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом
1	100	100	300
2	120	400	800
3	50	50	150
4	40	200	800
5	200	100	500
6	80	800	200
7	90	750	150
8	110	500	1000
9	70	1000	2500
0	150	200	400

$$e_2(t) = \begin{cases} 2E, & t \leq 0_- \\ E, & t \geq 0_+ \end{cases}$$



$$e_4(t) = \begin{cases} 2E, & t \leq 0_- \\ E, & t \geq 0_+ \end{cases}$$

Таблица 2

№	L, мкГн	C, пФ
1	100	300
2	200	500
3	300	1000
4	400	400
5	1000	2500
6	300	10000
7	500	5000
8	1000	250
9	800	200
0	800	800

$R_0 = 100 \text{ Ом}$  для схемы №7

$R_L = 50 \text{ Ом}$  для схемы №6

**Параметры элементов**

**Примеры шифров:**

**0a45**

0-№ схемы

а – счет  $i_L(t), U_L(t)$ ;

4 – строка таблицы 1

5 – строка таблицы 2

**4623e2**

4-№ схемы

б – счет  $i_C(t), U_C(t)$ ;

2 – строка таблицы 1

4 – строка таблицы 2

e2 -

## 10.7 Рекомендуемая литература

1. Попов В.П. Основы теории цепей.-М.: Высшая школа, 2007.-574 с.
2. Атабеков Г.И. Основы теории цепей.-- СПб.: Лань, 2009.-432 с.

## 11. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ И ИХ СВЯЗЬ С ЧАСТОТНЫМИ

### 11.1 Цель занятия

Усвоить определения и смысл переходной и импульсной характеристик, их связь с частотными характеристиками. Научится по одной из характеристик цепи, находить другие характеристики этой же цепи.

### 11.2 Краткие теоретические сведения

**Переходная характеристика**  $h(t)$  численно совпадает с реакцией  $y(t)$  линейной цепи с нулевыми НУ на действие функции Хэвисайда (функции включения, единичного скачка).

Если воздействие равно  $A \cdot I(t)$ ,

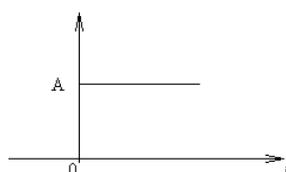


Рисунок 11.1

то переходная характеристика имеет вид:

$$h(t) = \frac{y(t)}{A} . \quad (11.1)$$

Характеристика  $h(t)$  отражает закон изменения переходного напряжения (или тока) при подключении постоянного напряжения к линейной цепи с нулевыми НУ

**Импульсная характеристика**  $g(t)$  численно совпадает с реакцией  $y(t)$  линейной цепи с нулевыми НУ на действие  $\delta(t)$ .

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Математическая запись  $\delta$ -функции

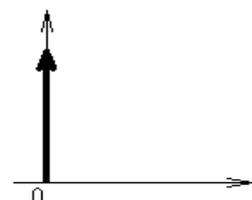


Рисунок 11.2

$$g(t) = \frac{y(t)}{S_U} , \quad (11.2)$$

где  $S_U$  — площадь входного кратковременного импульса. Условие кратковременности:

$$\text{или } S_\delta = 1 .$$

Характеристика  $g(t)$  отражает закон изменения интересующего напряжения (или тока) после «электрического толчка», т.е. характер свободных процессов после кратковременного поступления энергии в электрическую цепь. Следовательно,  $g(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех устойчивых цепей.

Т.к. воздействия цепи (функция Хэвисайда и  $\delta$ -функция) связаны между собой соотношением:  $\delta(t) = \frac{dI(t)}{dt}$ , то и отклики линейной цепи на соответствующее воздействие связаны таким же образом во всей временной области :

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = h'(t)$$

или

$$g(t) = h(0) \cdot \delta(t) + h'(t) \quad \mathbf{g(t) = h(0) \cdot \delta(t) + h'(t)}, \text{ для } t > 0$$

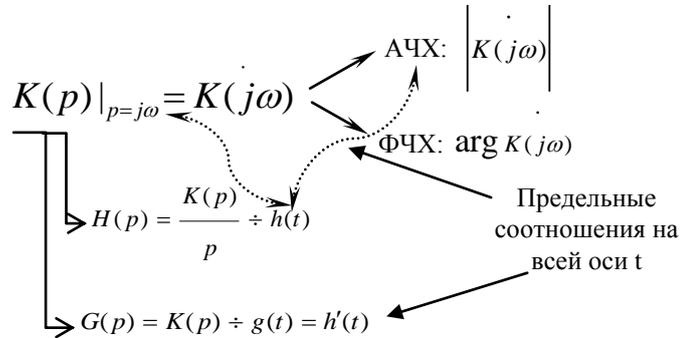


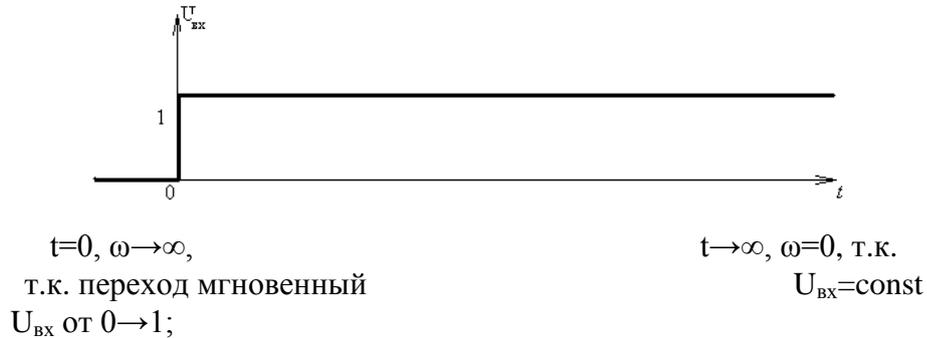
Рисунок 11.3 Взаимосвязь характеристик цепи

**Предельные соотношения:**

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} K(p) \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} K(p)$$

Если  $\varphi_k = \arg K \neq 180^0$  при  $\omega=0$  или  $\omega = \infty$ , то  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega)$   
 или  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K(\omega)$

**Пояснение к предельным соотношениям:**



**11.3 Методические указания и примеры решения задач**

**Задача 1.** На рисунке 11.4 задана характеристика  $K(\omega)$ . Изобразить два варианта схем с заданной  $K(\omega)$ . Построить зависимости  $h(t)$  и  $g(t)$ .

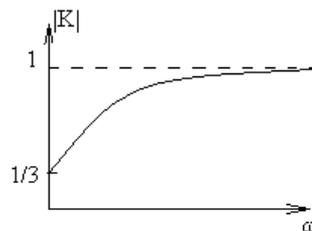


Рисунок 11.4

**Задача 2.** На рисунке 11.5 задана характеристика  $h(t)$ . Изобразить соответствующую АЧХ и два варианта схем с такой АЧХ. Изобразить характер  $g(t)$ .

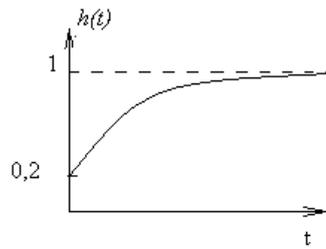


Рисунок 11.5

**Указания:**

1) при переходе от  $K(\omega) \rightarrow h(t)$  и от  $h(t) \rightarrow K(\omega)$  использовать предельные соотношения;

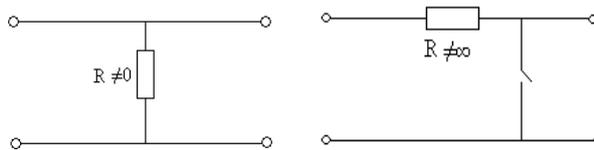
2) при переходе от  $h(t) \rightarrow g(t)$  использовать «графическое дифференцирование, смысл производной; обратить внимание на знак («+», если функция растет, «-» если убывает).

Типичная ошибка – утеря  $\delta(t)$  в составе  $g(t)$  или утеря коэффициента перед  $\delta(t)$ : в задаче 2 –

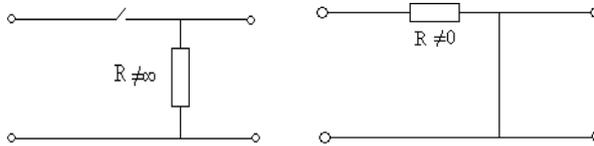
$$n(e) = 0.2 \cdot \delta(e) + h'(t);$$

3) при построении схем с единственным реактивным элементом, как в задачах 1 и 2, использовать «базовые» варианты Г-образных схем:

$K=1$ :



$K=0$ :



**Задача 3.** Задана импульсная характеристика выражением  $g(t) = \frac{1}{2 \cdot [\delta(t) - \alpha \cdot e^{-\alpha t}]}$ . Найти выражение переходной характеристики  $h(t)$ , построить ее график. Изобразить зависимость  $K(\omega)$ .

**Указание.** Т.к.  $g(t) = h(0) \cdot \delta(t) + h(t)$ , очевидно, что  $h(0) = \frac{1}{2}$  и  $h(t)$  содержит множитель  $e^{-\alpha t}$ .  $h(0) = \frac{1}{2}$  и  $h(t)$  содержит множитель  $e^{-\alpha t}$ ; переходная характеристика будет иметь вид:  
 $h(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha t}$

**Задача 4.** Для схемы без потерь, представленной на рисунке 11.6:

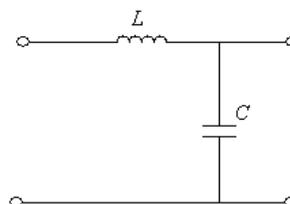


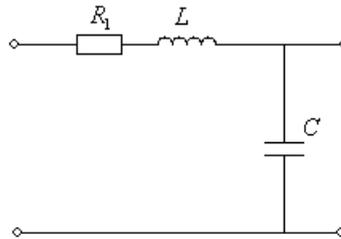
Рисунок 11.6

- 1) изобразить график  $K(\omega)$  и  $\varphi_k(\omega)$  на основе анализа схемы;
- 2) получить выражение  $K(p)$ , ввести типовые обозначения  $\frac{1}{LC} = \omega_p^2$ ;
- 3) получить выражения  $g(t)$  и  $h(t)$  и изобразить их графически.

**Указание.**  $K(p) \rightarrow G(p) \rightarrow g(t)$

$K(p) \rightarrow H(p) \rightarrow h(t)$

**Задача 5.** Для схемы с потерями обсудить изменения в характеристиках  $K(\omega)$ ,  $h(t)$ ,  $g(t)$ , полученных при решении задачи 4 для схемы без потерь.



## 11.4 Знания и умения

### **Знать:**

- 1) характер входных воздействий при определении АЧХ, ФЧХ,  $h(t)$ ,  $g(t)$ ;
- 2) определение и что конкретно отражает каждая из временных характеристик;
- 3) «смысл» предельных соотношений;
- 4) связь временных характеристик между собой и обоснование этой связи;
- 5) связь частных и временных характеристик;

### **Уметь:**

- 1) по одной из характеристик  $K(\omega)$ ,  $h(t)$  или  $g(t)$ , изобразить две другие;
- 2) на основе выражения  $K(p)$  находить изображения временных характеристик  $G(p)$  и  $H(p)$  и переходить к их оригиналам  $g(t)$  и  $h(t)$ .

## 11.5 Формы контроля

Тестовый опрос.

## 11.6 Рекомендуемая литература

1. Попов В.П. Основы теории цепей.-М.: Высш. школа, 2007.-574 с.