Федеральное агентство по образованию

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра механики, графики и управления качеством

Б.А. ЛЮКШИН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ТОМСК
2012

Оглавление

АННОТАЦИЯ

В учебном пособии изложены основы теоретической механики по статике, кинематике, динамике материальной точки и абсолютно твердого тела в объеме, соответствующем образовательным стандартам для специальностей радиотехнического профиля. Приведены примеры решения задач, сопровождающиеся методическими указаниями.

Для студентов всех форм обучения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки дипломированного специалиста «Автоматизация и управление». Оно представляет собой адаптированное к объему часов, предусмотренному образовательным стандартом, изложение «Краткого курса теоретической механики» С.М. Тарга. Это пособие [1] предназначено для студентов высших технических учебных заведений, в том числе механических специальностей, и потому его содержание и объем много шире, чем это предусмотрено образовательным стандартом для указанного выше направления. Студентам, желающим получить более полное представление о вопросах теоретической механики, можно рекомендовать указанное пособие для самостоятельной проработки.

В пособии отражены теоретические вопросы курса. Хотя в нем и сохранены некоторые наиболее характерные примеры решения задач, приведенные в упомянутом пособии С.М. Тарга, основные навыки решения задач для студентов очной формы обучения приобретаются в общении с преподавателем на практических занятиях. Для студентов, обучающихся по дистанционной технологии и по заочной форме, автором разработано пособие в виде практикума по решению задач теоретической механики применительно к объему и содержанию теоретической части, изложенной в настоящем пособии. Это пособие предназначено для самостоятельной работы студентов в части решения задач теоретической механики.

При всех формах обучения предусмотрен контроль знаний студентов. Он заключается в выполнении как минимум двух контрольных работ в виде решения задач. Обычно это одна работа по статике и одна работа по вопросам кинематики и динамики. В этом отношении статика выделена как наиболее важный раздел теоретической механики. Внимательный читатель пособия обратит внимание на то, что построение теоретической части курса – и это характерно не только для учебника С.М. Тарга – в значительной мере сводит многие вопросы динамики к формулировкам, характерным для проблем статики. Видимо, этому есть объяснение, один из элементов которого связан с историей развития дисциплины. В течение почти полутора тысячелетий, начиная с трудов Архимеда, все вопросы, позднее ставшие составной частью теоретической механики, рассматривались в статической постановке. Поэтому методы решения задач статики, как наиболее развитые, стараются использовать и при решении динамических задач.

Что касается теоретической части курса, то для контроля знаний используются традиционные формы в виде зачета или экзамена. Для студентов, обучающихся по дистанционной технологии, создан так называемый банк вопросов, позволяющий проводить контроль теоретических знаний в виде теста. Следует отметить, что этот банк вопросов для студентов очной формы обучения был бы весьма полезен как способ самоконтроля степени усвоения курса.

Хотелось бы отметить, что объем и содержание классического курса теоретической механики – например, читаемого студентам механических и строительных специальностей, а также механико-математических факультетов университетов – много шире, чем отражено в настоящем пособии. Так, совершенно не отражены вопросы динамики тел с переменной массой. Не освещены вопросы теории гироскопов даже в элементарной форме, и т.д. Более того, даже те вопросы, что нашли место в этом пособии, изложены местами практически конспективно. Причины выше указаны.

Студентам, которым хотелось бы расширить свои знания по настоящему курсу, можно рекомендовать учебные пособия, приведенные в списке литературы.

В пособии нет списка используемых обозначений, каждое из них комментируется и расшифровывается по мере появления обозначения в тексте. Следует только обратить внимание читателя на обозначения векторных величин. Каждая из них обозначается либо надчерком над соответствующей буквой, либо выделением этой буквы жирным шрифтом, например, обозначения $\overline{F}$ и $\boldsymbol{F}$ эквивалентны.

ВВЕДЕНИЕ

Изменение материи является ее основным, общим, вечным, неотъемлемым свойством, или способом существования. Любое изменение материи называется движением. В самом широком смысле слова под движением можно понимать все процессы, происходящие во Вселенной – от простого механического перемещения до мышления.

Механика – наука о механическом движении и о механическом взаимодействии тел.

Независимо от профиля инженерной специальности – машиностроение, радиотехника, электроника, строительство, энергетика и т.д. – специалисту приходится сталкиваться с разнообразными вопросами, решение которых зачастую связано с исследованием механического движения и (или) механического взаимодействия материальных тел. Так, для специалистов в области электронного приборостроения и машиностроения задачи теоретической механики возникают при конструировании механизмов настройки и управления радиоэлектронной аппаратуры, при создании разного рода электромеханических устройств, защиты аппаратуры от вибрации, ударов и т.п. Главенствующую роль играет механика в вопросах робототехники и т.д.

Классическая механика исходит из предположения, что свойства пространства и времени не зависят от того, какие материальные объекты участвуют в движении и как именно они движутся. Поэтому появляется возможность выделить и описать некоторые общие свойства движения. При таком подходе рассматриваются лишь некоторые общие геометрические характеристики движения, которые в равной мере могут быть отнесены к движению самых разных объектов – молекулы или Солнца, изображения на экране телевизора или тени самолета на Земле.

Предполагается, что пространство однородно и изотропно, а время однородно. Однородность (соответственно изотропность) пространства означает, что в пространстве нет каких-либо точек (направлений), которые отличаются от других. Однородность времени означает, что при течении времени нет каких-либо примечательных, специально выделенных моментов и безразлично, от какого момента ведется отсчет. Пространство и время предполагаются «метризуемыми», т.е. в пространстве можно ввести масштаб, а во времени – часы.

Сам термин «механика» введен впервые Аристотелем (384–322 гг. до н.э.) и в те времена ассоциировался с такими понятиями, как «сооружение, машина».

В настоящее время под механикой понимается наука, охватывающая математические методы описания механических движений.

Механическое движение – происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Примерами механического движения являются движения небесных тел, течения газов и жидкостей, тепловое движение молекул, движения транспортных средств и живых существ и т.д. Приведенные в этом ряду примеры движений существенно отличаются пространственными и временными масштабами. Тем не менее, с точки зрения механики, они описываются во многом сходными понятиями и закономерностями.

Механическое взаимодействие тел – такое воздействие тел друг на друга, в результате которого происходит изменение движения, формы и (или) размеров тел.

Мерой механического взаимодействия является **сила**.

Сам термин «механика» является в настоящее время достаточно широким понятием. Возможны разные способы классификации разделов механики, в том числе в зависимости от пространственных и временных масштабов описания явлений. Например, есть классификация, в соответствии с которой механика делится на три ветви: 1) теоретическую, 2) квантовую и 3) релятивистскую. О первом направлении пойдет речь в нашем курсе, второе изучает объекты микроскопических масштабов, в третьем речь идет о движении тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме.

Так, в современной механике, которую лишь обобщенно можно назвать теоретической, можно выделить следующие направления, каждое из которых тоже представляет собой комплекс развивающихся научных дисциплин.

1. Собственно **теоретическая** (общая) **механика**. О ней будет речь идти ниже на протяжении всего курса

2. **Реология** (буквально – наука об изменении, о течении). Это направление, в свою очередь, в качестве одной из важнейших составных частей содержит в себе механику деформируемого твердого тела. Она делится на такие составляющие, как теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, прикладная механика, теория оболочек, теория балок и стержней (сопротивление материалов), теория механизмов и машин, и т.д. Второе крупное направление – механика жидкости, газа и плазмы. Можно детализировать и дальше каждую из перечисленных выше научных дисциплин, но здесь важно подчеркнуть то обстоятельство, что во всех частных или более общих разделах реологии используются понятия и методы, составляющие предмет теоретической механики. На них мы и остановимся.

В основе классической механики лежат законы Ньютона, которые являются обобщением опытных данных. Эти законы верны для подавляющего большинства приложений, во всяком случае, пока мы не принимаем во внимание поправки, связанные с теорией относительности.

Основной метод исследования в механике – **моделирование**. Модель – это всегда абстракция, некоторое упрощенное представление об объекте или явлении, отражающее их характерные черты. Модель иногда сравнивают с карикатурой: это не портрет и не фотография, но сходство с оригиналом обычно является настолько очевидным, что не нужно объяснять, о ком или о чем идет речь.

В классической механике почти все используемые положения и понятия являются абстракциями, или моделями.

Вместо реальных объектов в теоретической механике рассматриваются:

- материальная точка;
- абсолютно твердое тело;
- сплошная среда;
- идеальная жидкость и т.д.

Материальная точка по аналогии с математической точкой не имеет пространственной протяженности, но, в отличие от математической точки, обладает массой. На практике понятие точки используется обычно тогда, когда для описания движения реального тела достаточно знать положение его «в целом», а ориентация тела значения не имеет. Материальный объект может рассматриваться как материальная точка, если можно считать, что в любой момент времени скорости и ускорения всех точек объекта одинаковы. Вопрос о том, можно ли рассматривать тот или иной объект как материальную точку, определяется не размерами объекта, а особенностями его движения и степенью идеализации задачи. Описание движения самолета или ракеты по траектории можно проводить с использованием понятия материальной точки, если не интересоваться ориентацией их в пространстве. Аналогичным образом движение Земли или любой другой планеты вокруг Солнца можно рассматривать как движение материальной точки. Как только нужно учесть ориентацию самолета или ракеты, Земли или планеты на траектории, модель материальной точки уже непригодна.

Абсолютно твердое тело – это объект, который не меняет своих размеров при любой нагрузке и при любом движении. Иногда используется другое определение: абсолютно твердое тело – множество материальных точек, расстояние между которыми во время движения не меняется. Под это определение, в частности, может подходить не только привычное для нас понятие непрерывного твердого тела, но и некоторый дискретный набор точек. Например, если 8 материальных точек находятся в вершинах некоторого куба и при движении их положение отвечает положению вершин такого куба, то они тоже представляют собой абсолютно твердое тело. Ясно, что все реальные тела в той или иной степени подвержены изменению формы и/или размеров. Введение модели абсолютно твердого тела означает, что такими изменениями можно пренебречь по сравнению с исходными размерами тела.

Сплошная среда – это модель, предполагающая, что некоторый объем, часть пространства, заполняется такой средой полностью, без пустот. Если вспомнить, что реальные среды имеют атомно-молекулярное строение, то, поскольку внутри атома материальные частицы занимают ничтожно малую часть его объема, можно говорить, что практически любое тело состоит в основном «из пустоты». При использовании модели сплошной среды от этого обстоятельства отвлекаются и считают, что в любой точке пространства есть материальная среда.

Модель **идеальной жидкости** предполагает, что речь идет о несжимаемой жидкости, не обладающей вязкостью и подчиняющейся всем классическим законам – Паскаля, Архимеда и т.д.

Хотя это все абстрактные понятия, при их изучении получается большое количество практически полезных результатов.

Теоретическая механика в инженерном образовании является базой многих областей современной техники.

По характеру рассматриваемых задач механика (независимо от объектов и методов исследования) делится на три больших основных раздела – **статика, кинематика и динамика.**

Статика – учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил.

Кинематика – описание геометрических свойств движения твердых тел.

Динамика – учение о движении материальных тел под действием сил.

Из этих определений следует, что синтетическим разделом механики, в известном смысле объединяющим в себе статику и кинематику, является динамика. По этой причине, в частности, в разных учебниках по теоретической механике можно найти различную последовательность изложения предмета – в одних излагается сначала статика, а затем кинематика, в других эта последовательность изменена, но динамика излагается всегда в последнюю очередь. Ниже изложение начинается со статики. В известном смысле это соответствует истории развития механики.

*   *   *

Историческая справка

Происхождение термина, как было отмечено выше, связывается с именем Аристотеля.

Возникновение и развитие механики – впрочем, как и подавляющего большинства других наук – тесно связано с развитием производительных сил общества, уровнем техники на каждом этапе его развития.

Так, приемы **статики** уже широко использовались при строительстве таких сооружений, как знаменитые пирамиды древнего Египта, дворцовые и храмовые комплексы, дошедшие и до наших дней. Систематически начала статики впервые изложены в трудах Архимеда (287–212 гг. до н.э.).

Именно статика дала теорию так называемых простейших машин – строительных приспособлений, таких как блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость и т.д.

Практически до XV–XVI вв. статика и теоретическая механика в целом не получили никакого существенного развития. Лишь в связи с развитием мореплавания, военного дела, с появлением огнестрельного оружия в XVII веке сформулированы законы динамики Галилеем (1564–1642 гг.) и позднее Ньютоном (1643–1727 гг.). По прошествии столетий мы сегодня считаем этих ученых почти современниками, но следует заметить, что год рождения Ньютона приходится на следующий год после смерти Галилея.

Все более или менее значимые результаты этого периода приведены в систему в труде И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1687 г.).

Кинематика как особый раздел механики начала оформляться в XVIII–XIX веках под влиянием развития машиностроения. Практически в то же время начинает развиваться и **динамика**.

Аналитические методы механики – с использованием дифференциального и интегрального исчисления – начали развиваться в XVIII веке и связаны с именами Л. Эйлера (1707–

1783), Ж. Даламбера (1717–1783), Ж. Лагранжа (1736–1813). Эти методы остаются основными до сих пор.

Из российских ученых необходимо отметить таких исследователей, оставивших заметный след в развитии многих направлений механики, как М.В. Ломоносов(1711–1765), Л. Эйлер, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев, С.В. Ковалевская, А.М. Ляпунов, И.В. Мещерский, К.Э. Циолковский, А.Н. Крылов, Н.Е. Жуковский и многие, многие другие.

В дальнейшем при изложении материала ссылки на авторов тех или иных результатов не приводятся.

1 СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1 Основные понятия и аксиомы статики

Статика – раздел механики, представляющий собой учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Можно сразу заметить, забегая вперед, что в статике и динамике (эти ветви теоретической механики объединяют термином кинетика) речь идет о движении и равновесии именно материальных тел, в отличие от кинематики, где могут рассматриваться геометрические характеристики движения нематериальных объектов, например, тени, солнечного зайчика и т.д. В отличие от материальных тел такие объекты не проявляют гравитационных свойств.

Равновесие – состояние покоя тела по отношению к другим телам. Забегая вперед, можно заметить, что состояние покоя всегда является относительным.

В курсе теоретической механики рассматривается равновесие твердых тел (абсолютно твердых тел – **АТТ**).

Все реальные тела при действии нагрузок деформируются, т.е. меняют форму и/или размеры, проявляя такое свойство, как сопротивление. Оно проявляется в том, что тело, подвергающееся воздействию, изменяет свое движение или форму и размеры не мгновенно, а с течением времени. Это свойство называется инертностью.

Для обеспечения прочности подавляющего большинства изделий из распространенных материалов необходимо, чтобы деформации были малыми. Если мерой деформации считать относительное изменение размеров изделия, то оно не должно превышать доли процента, редко – для материалов типа полимеров – единицы процентов, и только уж совсем необычные в этом отношении материалы типа каучука и резины, а также некоторые полимеры без разрушения выдерживают деформации, измеряемые десятками и сотнями процентов. При изучении условий равновесия «обычных» тел принимается, что допустимо пренебрегать изменением формы и размеров по сравнению с исходными их значениями и считать тело абсолютно твердым.

Абсолютно твердое тело (АТТ) – такое тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда постоянно.

Силой называется мера механического взаимодействия твердых тел. В механике постулируется принцип независимости действия сил: сила, обусловленная каким-либо источником, не зависит от наличия сил, обусловленных другими источниками.

Величина силы определяется на основе некоторых эталонов. Поскольку при действии силы (механического взаимодействия) меняются либо размер и форма тела (возникают деформации), либо закон его движения, все распространенные измерители сил связаны с использованием этих факторов. Известны разного рода упругие силоизмерительные устройства. Простейшим примером являются пружинные весы, служащие для определения веса тел, т.е. сил тяжести, действующих на эти тела. Реже используются устройства, основанные на свойствах инерции.

Все величины в механике являются тензорами ранга **n** в трехмерном пространстве. Число компонент тензора равно 3^n.

Таким образом, скалярные величины (т.е. характеризуемые только своей величиной, число параметров $1 = 3^0$) являются тензорами нулевого ранга. Сила является векторной величиной, и при введении ортогональной системы координат (в частном случае декартовой) она может быть разложена на три взаимно перпендикулярные компоненты. Поскольку $3 = 3^1$ (n = 1), вектор является тензором первого ранга. В механике сплошных сред широко используются тензоры второго ранга, в математике оперируют с тензорами произвольного ранга.

Сила как вектор характеризуется:

1. Величиной.
2. Направлением.
3. Точкой приложения.

Единицей измерения силы в системе СИ является 1 ньютон (Н); 1 Н – это сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Графически сила изображается, как и любой вектор, в виде направленного отрезка.

В тех случаях, когда величина силы и ее направление зависят только от положения точки, говорят, что существует силовое поле. В этом случае вектор силы связывается не с материальной точкой, на которую действует сила, а с точкой пространства, где находится материальная точка. Если в каждой точке пространства нарисовать вектор силы, то получится совокупность векторов, которая является наглядной характеристикой силового поля. Если рассматриваемые силы явно не зависят от времени, говорят, что силовое поле стационарно. Примерами силовых полей могут служить поле сил тяжести, силы упругости, силы электрического или магнитного взаимодействия и т.д.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

Определения

1. **Система** сил – совокупность сил, приложенных к телу (или к телам). Если линии действия всех сил расположены в одной плоскости, система сил называется **плоской**, иначе – **пространственной**. Если линии действия сил пересекаются в одной точке, то силы являются **сходящимися**. Если линии действия сил параллельны, то и силы называются **параллельными**.
2. Если тело из данного положения можно свободно перемещать, оно называется **свободным**.
3. Если при замене одной системы сил на другую тело не меняет своего равновесия (или движения), эти системы сил **эквивалентны**.
4. Система сил, под действием которой тело может находиться в покое, называется **уравновешенной** или эквивалентной нулю.
5. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей**.

6. Силы **внешние,** если они действуют на данное тело со стороны других тел; **внутренние** – если отражают взаимодействие частей тела (или тел данной системы).

7. Сила, приложенная к телу в данной точке, – **сосредоточенная**. Силы, приложенные к части или всей поверхности или объему, – **распределенные**.

Классификация сил

Силы можно классифицировать по различным признакам. Так, **по способу приложения** можно различать силы **равномерные** или **неравномерные поверхностные,** действующие на поверхность тела или ее часть, и **объемные,** приложенные к каждой точке тела (например, силы тяжести). При этом различают силы **локальные,** т.е. приложенные к части поверхности или объема. **Распределенные силы** приложены ко всей поверхности или объему. **Сосредоточенные** силы приложены в точке поверхности или объема, и т.д.

По характеру изменения во времени силы бывают **постоянными и переменными**; последние могут быть, в частности, периодическими.

Силы можно классифицировать **по источнику механического действия**, например, это силы тяготения или силы тяжести, реакции опор, упругие воздействия от пружин, рессор и т.д., электрические и магнитные поля, напор потока жидкости или газа.

Классификация сил возможна и **по вызываемому ими эффекту.** Так, можно различать силы **ускоряющие и замедляющие** движение тела. **Возмущающие** силы вызывают отклонение точки от положения равновесия. **Управляющие** силы вызывают такое воздействие на объект, выбранное из множества возможных воздействий на основе информации о движении тела, которое приводит к движению тела по заданному закону.

В процессе изложения курса по мере необходимости мы будем вводить в рассмотрение и использовать различные силы.

Аксиомы статики

1. Если на свободное АТТ действуют две силы, то тело может находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны (по величине) и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

2. Действие данной системы сил на АТТ не изменится, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему сил.

Это означает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

Следствие

Действие силы на АТТ не изменится при перенесении точки приложения силы вдоль линии действия.

Для доказательства приложим, кроме силы $\overline{F}$, еще $\overline{F_1} = \overline{F}$ и $\overline{F}_2 = -\overline{F}$ (рис. 1.1).

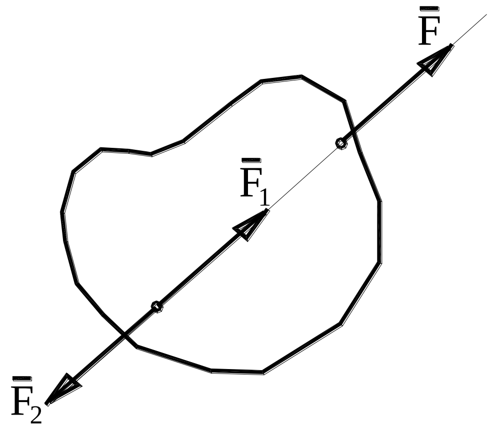


Рис. 1.1

Отбросив $\overline{F} + \overline{F}_2 = 0$, получим силу $\overline{F}_1$, эквивалентную $\overline{F}$. В данном случае вектор $\overline{F}$ является и называется скользящим, т.е. таким вектором, который можно передвигать вдоль линии действия.

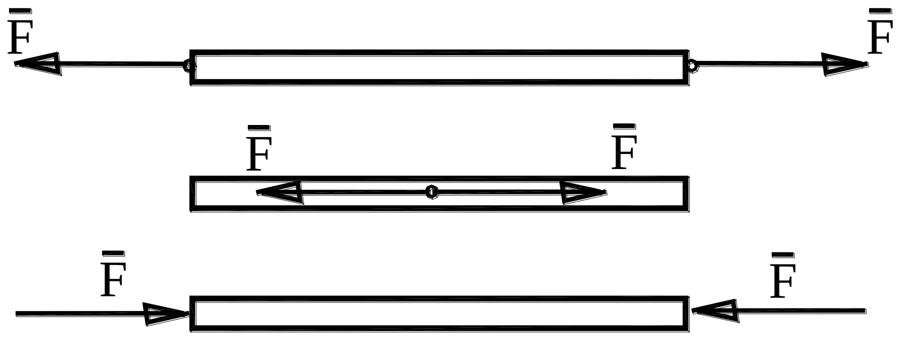


Рис. 1.2

Этот результат справедлив только для АТТ. Если тело деформируемо, то его напряженное и деформированное состояния существенно зависят от точки приложения силы. Так, для трех случаев, показанных на рис. 1.2, в первом случае стержень растянут, во втором – не напряжен, в третьем – сжат.

Это значит, что **при определении внутренних напряжений в теле точку приложения силы вдоль линии ее действия переносить нельзя!**

3. Если в одной точке тела приложены две силы, то они суммируются по правилу параллелограмма (как векторы). В механике это формулируется в виде общего закона, который носит название **закона параллелограмма сил**:

Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (рис. 1.3), называется

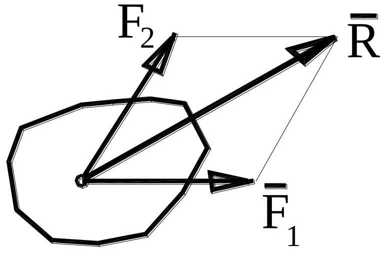


Рис. 1.3

геометрической суммой векторов $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

Закон параллелограмма сил можно сформулировать еще так:

две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Сумма сил и равнодействующая сила – разные понятия. Сумма сил строится как сумма любых векторных величин и **существует всегда**, в отличие от равнодействующей.

4. Закон равенства действия и противодействия:

при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Этот закон является одним из основных законов механики. Из него следует, что для двух взаимодействующих тел А и В это взаимодействие характеризуется двумя силами, равными по величине, действующими вдоль одной прямой в противоположных направлениях (рис. 1.4).

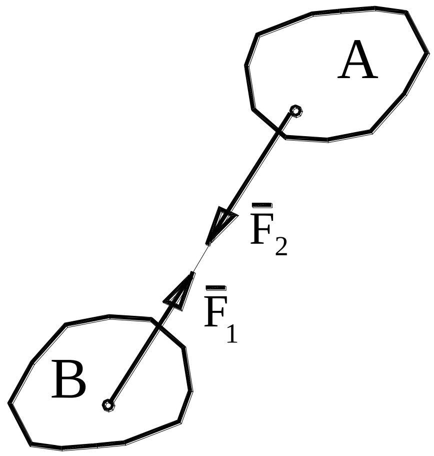


Рис. 1.4

Т.к. мы рассматриваем АТТ, то любые его две части действуют друг на друга одинаково по величине и в противоположных направлениях, и соответствующие силы образуют самоуравновешенную систему. Поэтому в дальнейшем при исследовании АТТ ведем речь только о внешних силах.

В теоретической механике формулируется и широко используется так называемый **принцип отвердевания**:

равновесие деформируемого тела под действием данной системы сил не нарушится, если тело считать отвердевшим, т.е. АТТ.

Этот принцип широко используется, если ведется расчет таких элементов конструкций, как цепи, тросы, ремни и т.п.

Определение

Связь – это то, что ограничивает перемещение данного тела в пространстве.

Связью называем тело, которое реализует это ограничение (нить, трос, рельс, поверхность и т.д.). Так, для груза на столе это поверхность стола, для двери – петли, на которых она висит, и т.д.

Реакция связи – это **сила**, с которой связь действует на тело.

Направление реакции связи всегда противоположно направлению, куда связь не дает перемещаться телу.

Если сама связь препятствует перемещениям тела в нескольких направлениях, то направление реакции становится неизвестным, и оно должно определяться в процессе решения задачи.

Примеры связей:

- гладкая поверхность; реакция такой связи всегда направлена по нормали к поверхности, иначе должна существовать сила трения, что не согласуется с самим понятием гладкой поверхности;

- нить; реакция этой связи направлена вдоль нити к точке подвеса, так как считается, что гибкая нить не может дать заметную силу сопротивления в поперечном к нити направлении;

- цилиндрический шарнир, реакция такой связи может быть ориентирована в любом направлении в плоскости, перпендикулярной оси шарнира;

- сферический шарнир, реакция его может быть направлена в любом направлении в пространстве.

При решении задач на схеме, наряду с заданными внешними (активными) силами, изображаются и реакции связей. В тех случаях, когда направление этой реакции (а реакция связи по определению – сила) известно, как в примере с нитью, она изображается в виде вектора, направление которого задано, а величина подлежит определению. Если же направление реакции сразу не может быть определено, как правило, изображаются составляющие этой реакции вдоль осей координат, и эти составляющие в дальнейшем отыскиваются. Если в задаче нужно определить полную реакцию, то ее величина и направление определяются так же, как для любого вектора, по его составляющим. При решении конкретной задачи может получиться, что те или иные составляющие получились отрицательными. Это просто означает, что на самом деле соответствующая составляющая реакции действует в другую сторону, противоположную выбранной и изображенной на схеме. Не следует переделывать чертеж и заново строить решение задачи – по исходной схеме понятно, как выбраны направления составляющих, и знаки в ответе ясно показывают, как реально они действуют.

1.2 Сложение сил. Система сходящихся сил

Главным вектором системы сил называется величина, равная геометрической сумме всех сил.

Если суммируем силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ориентированные под углом α друг к другу, то для суммарного вектора $\overline{R}$ получим:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin\alpha}.$$

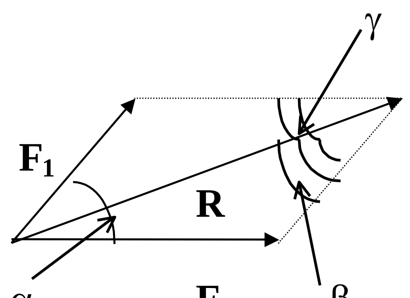


Рис. 1.5

Построение суммарного вектора проводится по правилу параллелограмма (рис. 1.5), в случае трех сил, не лежащих в одной плоскости, – по правилу косоугольного параллелепипеда. Самый простой способ геометрического суммирования заключается в построении так называемого силового многоугольника (рис. 1.6). В этом случае, как и при суммировании обычных векторов, начало каждого следующего вектора совмещается с концом предыдущего, а сумма векторов получается «замыканием» – результирующий вектор получается соединением начала первого вектора с концом последнего.

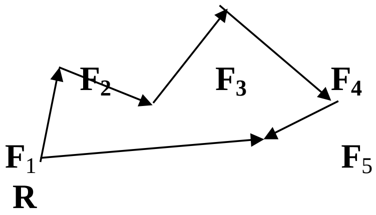


Рис. 1.6

Если рассмотреть систему сходящихся сил (т.е. таких, линии действия которых пересекаются в одной точке), то она эквивалентна системе сил, приложенных к этой точке. Это следует из доказанного выше утверждения, что каждую силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия.

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения линий действия.

Часто возникает задача разложения сил на составляющие – на плоскости или в пространстве. Однозначное решение всегда существует, если заданы направления, вдоль которых нужно делать это разложение. На плоскости это должны быть два непараллельных направления, и тогда речь идет о построении параллелограмма по заданным диагонали и направлениям сторон. В пространстве задаются три направления, и строится соответствующий косоугольный параллелепипед по заданной диагонали.

Аналитический метод решения задач статики основывается на использовании понятия проекции силы на ось.

Проекция силы на ось, как и любого другого вектора, – **это число со знаком** (алгебраическая величина).

Величина проекции равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

Проекция на плоскость – это двумерный <u>вектор</u> (!), имеющий длину и направление. На это следует обратить особое внимание, впредь такие случаи – проецирования вектора на плоскость и на оси – будут встречаться, и следует понимать, что в итоге получается, вектор или число.

В трехмерном пространстве силу, как и любой вектор, можно задать через ее величину и косинусы углов с осями координат, т.е. сначала должна быть определена система координат.

На практике иногда удобнее задать силу через ее проекции на оси вводимой системы координат. Далее, когда нет специальных оговорок, используется декартова система координат. В этом случае модуль силы и направляющие косинусы, которыми определяется направление силы, вычисляются по формулам

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$
$$\cos\alpha = F_x / F,\ \cos\beta = F_y / F, \cos\gamma = F_z / F,$$

где α, β, γ - углы, которые образует вектор силы соответственно с осями OX, OY, OZ.

На плоскости вектор (его модуль и так называемые направляющие косинусы, т.е. косинусы углов, которые составляет вектор с положительными направлениями осей) определяется через две составляющие (проекции) в виде

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \cos\alpha = F_x / F, \cos\beta = F_y / F.$$

Сумма векторов определяется суммами одноименных проекций. Так, если

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k ,$$

то

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{xk},\quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{yk},\quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{zk}.$$

Для системы **сходящихся** сил можно сформулировать условия равновесия в следующих формах.

1. **Геометрическая форма:**

- для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы соответствующий силовой многоугольник был замкнутым ($\overline{R} = 0$).

2. **Аналитическая форма:**

- для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из координатных осей были равны нулю.

В самом деле, если $\overline{R} = 0$, то $R = 0$, но тогда необходимо

$$R_x = R_y = R_z = 0.$$

Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, **лежащих в одной плоскости**, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим любые две силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (рис. 1.7); поскольку они не параллельны и лежат в одной плоскости, то обязательно пересекаются в некоторой точке А. Тогда их можно заменить равнодействующей силой $\overline{R}$.

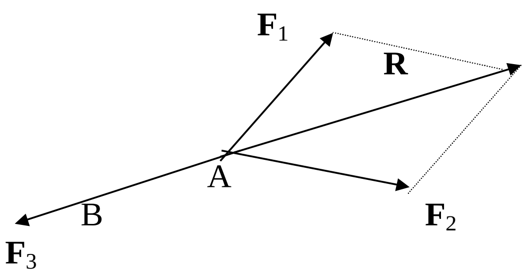


Рис. 1.7

Если тело в равновесии, то эта сила должна быть уравновешена силой $\mathbf{F}_3$, причем эта сила должна лежать на прямой АВ – линии действия силы **R**. Но это и означает, что линия действия силы $\mathbf{F}_3$ проходит тоже через точку А.

Обратная теорема неверна: из пересечения линий действия сил не следует равновесие тела.

Полученные выше результаты позволяют решать ряд задач статики. Это задачи, в которых:

1) известны полностью или частично все приложенные к телу силы и нужно найти, при каких соотношениях между силами тело будет в равновесии; или в каком положении тело придет в равновесие;

2) известно, что тело находится в заданном положении равновесия и нужно найти все или часть неизвестных сил, приложенных к нему. Во всех случаях реакции связей подлежат определению – по величине и по направлению.

Последовательность решения можно описать следующим набором действий. В первую очередь рисуется схема, на которой изображаются рассматриваемое тело и все приложенные к нему (заданные условием задачи) силы. Реакции связей (неизвестные силы) рисуются явно в виде векторов, если известны их направления. Если эти направления заранее неизвестны, лучше реакции изобразить в виде их составляющих (компонент), направленных вдоль осей выбранной системы координат. Далее записывается условие равновесия тела в виде сумм проекций сил и реакций на каждую ось, равных нулю в случае равновесия.

Если оказывается, что определяемые в процессе решения некоторые значения сил или реакций отрицательны, это не означает, что решение неправильно – просто на схеме неудачно выбраны направления сил или реакций, они на самом деле действуют в противоположную сторону. Не нужно при получении такого результата перерисовывать схему или менять знаки в ответе. Знаки полученных величин и наличие схемы позволяют правильно проанализировать решение.

1.3 Момент силы относительно центра. Пара сил

Из общего курса физики известно, что сила может как перемещать, так и поворачивать тело вокруг некоторой точки или оси. Это означает, что сила характеризуется не только величиной и направлением, но и тем, какое «поворачивающее» действие она производит.

Введем понятие момента силы относительно точки.

Точка, относительно которой берется момент, называется центром момента. Под действием момента силы тело стремится совершать вращательное движение, и вращательный эффект силы характеризуется моментом.

Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из центра **на линию действия силы.**

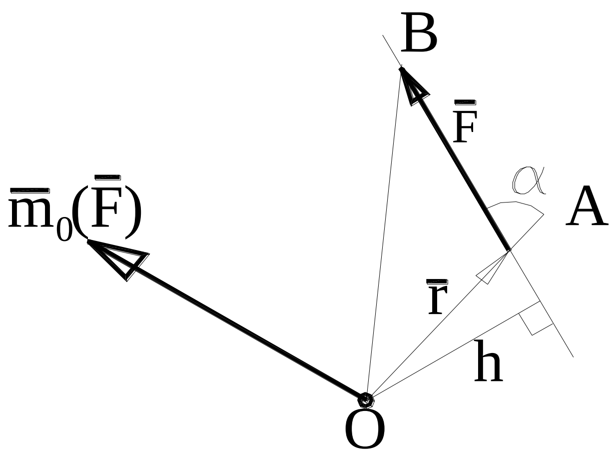


Рис. 1.8

Определение

Моментом силы $\overline{F}$ **относительно центра О называется вектор** $\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$, **приложенный в точке О, модуль которого равен** $F \cdot h$ **(**h **– плечо), и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через О и линию**

действия силы так, что при взгляде с конца вектора $\overline{F}$ тело стремится повернуться против часовой стрелки (рис. 1.8).

Проще назвать способ определения направления момента «правилом буравчика», известным из школьного курса физики. Из определения

$$\left|\overline{m}_0(\overline{F})\right| = \left|\overline{r}\right|\left|\overline{F}\right|\sin\alpha.$$

Заметим, что $\left|\overline{r}\right|\sin\alpha = h,\ \ \left|\overline{F}\right| = AB,$ тогда

$$\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = AB \cdot h = 2S,$$

где S – площадь треугольника OAB.

Свойства момента силы:

1) момент не меняется при движении точки приложения силы вдоль линии действия;

2) момент равен нулю, если линия действия силы проходит через центр.

Из определения величины момента следует, что момент силы определяется не величиной силы или плечом, а произведением этих величин. Можно одно и то же значение момента получить разными способами – меняя величину силы и ее плечо. Нам это хорошо известно из практических ситуаций – когда мы открываем любую дверь, обратите внимание, что ручка двери находится как можно дальше от оси вращения. Если мы попробуем открыть дверь, прикладывая рукой усилие ближе к оси, для получения такого же эффекта потребуется значительно большее усилие. Эта же ситуация повторяется при откручивании или закручивании гаек и т.д.

Размерность момента определяется произведением силы на плечо, в системе СИ размерность момента Н·м.

Теорема Вариньона

Пусть $\overline{R}$ - равнодействующая системы сходящихся в точке А сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, т.е. $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n$ (рис. 1.9).

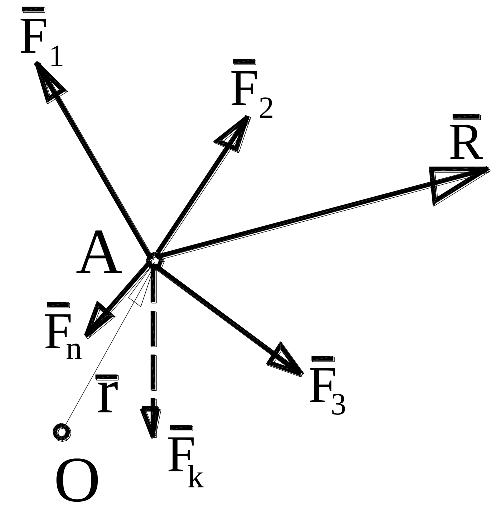


Рис. 1.9

Из некоторого центра, точки О, проведем радиус вектор $\overline{r}$ в точку А приложения сил и равнодействующей. Домножим предыдущее равенство векторно на радиус-вектор $\overline{r}$:

$$\overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + ... + \overline{r} \times \overline{F}_n.$$

По определению момента силы относительно центра это равенство можно записать в виде

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \overline{m}_O(\overline{F}_1) + \overline{m}_O(\overline{F}_2) + ... + \overline{m}_O(\overline{F}_n),$$

или

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Таким образом, момент равнодействующей относительно центра равен геометрической сумме моментов сил, составляющих эту равнодействующую, относительно того же центра.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на АТТ.

Пара сил не имеет равнодействующей. Это утверждение означает, что **пару сил нельзя заменить никакой одной силой**. Плоскость, проходящая через линии действия сил (поскольку эти линии параллельны, такую плоскость всегда можно построить), называется **плоскостью действия пары**.

Расстояние h между линиями действия сил называется **плечом пары**.

Момент пары (вращающий эффект) характеризуется следующими параметрами:

1. Модулем Fh.
2. Положением плоскости действия пары в пространстве.
3. Направлением поворота пары в этой плоскости.

Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}$, модуль которого равен F·h и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары так, что с конца вектора **m** пара видна как поворачивающая тело против часовой стрелки.

В отличие от момента силы, вектор **m** может быть приложен в любой точке (такой вектор называется свободным).

Момент пары относительно любого центра O равен сумме моментов сил, образующих пару (рис. 1.10):

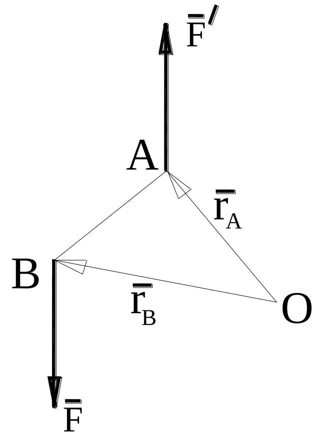


Рис. 1.10

$$\overline{m} = \overline{m}_O(\overline{F}) + \overline{m}_O(\overline{F}'),$$

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}_B \times \overline{F}; \qquad \overline{m}_O(\overline{F}') = \overline{r}_A \times \overline{F}' = -\overline{r}_A \times \overline{F};$$

$$\overline{m}_O(\overline{F})+\overline{m}_O(\overline{F}^{/})=(\overline{r}_B-\overline{r}_A)\times\overline{F}=\overline{A}\overline{B}\times\overline{F}=\overline{m}.$$

В частности, момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.

Две пары, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны. Это означает, что можно одновременно менять расстояние между линиями действия сил, составляющих пару, и величину каждой из сил, если при этом произведение Fh не меняется.

Если на тело действует несколько пар сил, то сумма моментов эквивалентна одной паре (это формулировка теоремы о сложении пар):

$$\overline{M}=\sum\overline{m}_k.$$

Итак, сформулируем следующие **свойства пары сил**:

1) пару сил можно переносить в плоскости ее действия куда угодно, при этом действие пары на твердое тело не изменится;

2) действие пары не изменится, если одновременно менять величину сил и плечо между ними таким образом, чтобы величина момента не изменилась;

3) если пару сил перенести в плоскость, параллельную данной, то ее действие на твердое тело не изменится.

1.4 Приведение системы сил к центру. Условия равновесия

Теорема: силу, приложенную к АТТ, можно переносить из данной точки в любую другую, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда она переносится.

Доказательство.

Если есть сила $\overline{F}$, приложенная в точке А, то прибавление системы любых сил $\overline{F}^{/} = -\overline{F}^{//}$, приложенных в любой точке, например, в точке В, равных другу по величине и противоположно направленных вдоль одной прямой, ничего не меняет (рис. 1.11).

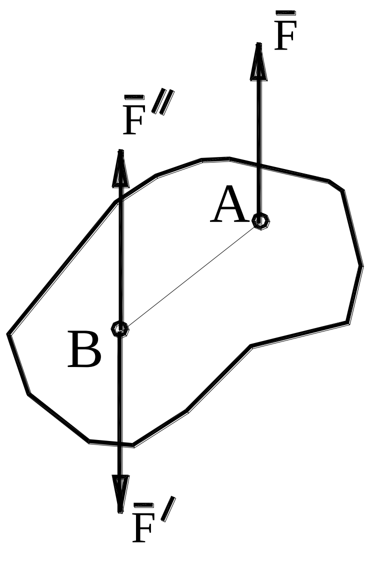


Рис. 1.11

Это следует из аксиом статики. Если теперь принять, что модули этих сил равны между собой: $F = F^{/} = F^{//}$, то в случае, когда эта прямая параллельна направлению силы $\overline{F}$, имеем просто случай переноса точки приложения силы $\overline{F}$ из точки А в точку В с прибавлением пары сил $\overline{F}$ и $\overline{F}^{//}$.

Пример 1

Брус-балка будет в равновесии, если его вес уравновесить приложенной в середине силой Q (рис. 1.12). Если же попытаться удержать эту же балку за ее конец, то нужно еще добавить пару сил, компенсирующих вращательный момент от силы тяжести (вспомните упражнение со стулом для «силачей», когда предлагается поднять стул за ножку, держась за ее конец и сохраняя горизонтальное положение стула).

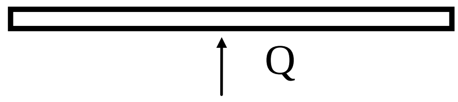


Рис. 1.12

Пример 2

Барабан (рис. 1.13) будет одинаково вращаться в обоих случаях, но в первом реакция опоры равна нулю, а во втором она должна еще уравновесить силу $2\boldsymbol{F}$.

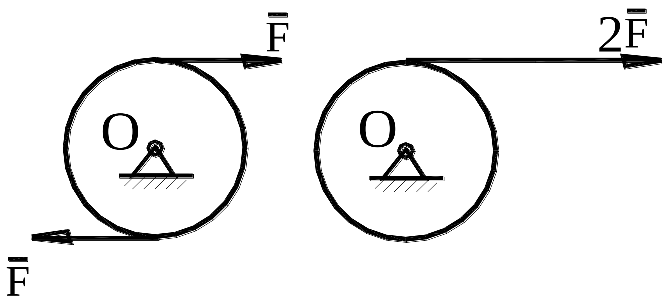


Рис. 1.13

Рассмотрим задачу о приведении системы сил к данному центру, т.е. о замене ее к одной силе и паре (моменту).

Пусть на тело действует система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Выберем точку О за центр приведения и перенесем туда все силы – с добавлением соответствующих пар сил. В итоге к центру О будет приложена система сил, равных $\overline{F}_k$ (k=1,2,...,n), а к телу в целом еще и система моментов $\overline{m}_O(\overline{F}_k)$ (k=1,2,...,n).

Сходящиеся в точке О силы можно заменить главным вектором $\overline{R}$, приложенной в этой же точке, причем

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Система пар в результате сложения векторов моментов заменится одной парой

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

$\overline{R}$ – геометрическая сумма всех сил – т.н. главный вектор системы сил.

$\overline{M}_O$ - геометрическая сумма моментов – главный момент системы сил.

Этот результат формулируется как **теорема о приведении системы сил:**

Любая система сил, действующих на АТТ, при приведении к произвольному центру О заменяется одной силой, равной главному вектору этих сил, приложенному в этом центре, и одной парой с моментом, равным моменту системы относительно центра О.

Важно заметить, что $\overline{R}$ не является равнодействующей данной системы сил, т.к. заменяет эту систему только вместе с парой.

Следствие

Две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного центра, эквивалентны (условие эквивалентности систем сил).

1.5 Плоская система сил

Рассмотрим случай, когда все силы ориентированы в одной плоскости. Такая система сил называется плоской.

Для плоской системы моменты всех сил относительно любого центра перпендикулярны плоскости и могут отличаться лишь направлением. Одно из них принимаем за положительное направление, и его будем отмечать знаками плюс, тогда второе, противоположное направление, отмечаем знаками минус. Тогда момент любой силы $\overline{F}$ относительно центра О будет алгебраической величиной.

Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно центра О равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо:

$$m_0(F)=\pm Fh,$$

причем направление момента и соответственно знак в правой части определяются по так называемому правилу буравчика.

Алгебраический момент пары равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил на плечо пары:

$$m=\pm Fd,$$

при этом остаются в силе прежние правила определения направления момента и знака.

Как и в общем случае, плоская система сил приводится к главному вектору и главному моменту:

$$R_x=\sum_k F_{kx},\ R_y=\sum_k F_{ky},\ M_0=\sum_k m_0(\overline{F}_k),$$

причем моменты – алгебраические величины.

В результате такого приведения могут быть следующие варианты:

1. $\overline{R}=0$, $M_0\neq 0$ – в этом случае говорят, что система сил приведена к одной паре с моментом M_0.

2. $\overline{R} \neq 0$ – система приведена к равнодействующей, при этом возможны следующие случаи:

2.а. $\overline{R} \neq 0$, $M_0 = 0$. Раз момента нет (он равен нулю), это значит, что равнодействующая проходит через центр О. Другие варианты в этом случае невозможны, ибо тогда неизбежно должен возникать момент.

2.б. $\overline{R} \neq 0$, $M_0 \neq 0$. В этом случае пару, дающую момент M_0, заменим силами $\overline{R}' = \overline{R}$, $\overline{R}'' = -\overline{R}$. Величину d = OC – плечо пары – выбираем из условия, что Rd = $|M_0|$. Силу $\overline{R}'$ (вектор, ее изображающий), совмещаем с исходным вектором $\overline{R}$, тогда сила $\overline{R}''$ направлена противоположно исходному вектору $\overline{R}$ и уравновешивает его.

Отбрасывая $\overline{R}$ и $\overline{R}''$, получаем, что вся система сил заменяется равнодействующей $\overline{R}' = \overline{R}$, проходящей через точку С. Положение этой точки определяется условиями:

1) OC = d;

2) знак момента относительно точки О силы, приложенной в точке С, должен совпадать со знаком M_0.

*　　　*　　　*

Равновесие любой **системы сил** обеспечивается, если

$$\overline{R} = 0,\ \overline{M}_O = 0. \tag{1.1}$$

Соответствующие аналитические условия равновесия можно записать в трех формах.

1. **Основная форма** условий равновесия сводится к записи первого из векторных равенств (1.1) в проекциях на оси, а второго – в виде суммы моментов от отдельных сил: суммы проекций сил на оси координат и сумма моментов этих сил относительно произвольного центра должны быть равны нулю:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ \Sigma F_{ky} = 0,\ \Sigma m_0(\mathbf{F}_k) = 0. \tag{1.2}$$

2. **Вторая форма**: для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил относительно каких-либо центров А, В и сумма их проекций на ось ОХ, не перпендикулярную АВ, были равны нулю:

$$\Sigma m_A(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma F_{kx}=0.$$

Необходимость этих условий очевидна: если какое-либо из равенств нарушено, то или $\mathbf{R}\neq 0$, или $M_A\neq 0\neq M_B$, и равновесия не будет.

Достаточность докажем. Пусть для данной системы сил выполнены два первых условия, тогда $M_A = M_B = 0$. Такая система сил может не быть в равновесии и иметь равнодействующую R, проходящую через точки А, В (иначе моменты относительно этих точек не равны нулю, что противоречит условию). Но по третьему условию необходимо $R_x = 0$. Т.к. ось x не перпендикулярна АВ, то и $\overline{R} = 0$.

3. **Третья форма** (уравнение трех моментов): для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы для любых трех центров А, В, С, не лежащих на одной прямой, выполнялись равенства:

$$\Sigma m_A(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_B(\mathbf{F}_k)=0,\ \Sigma m_C(\mathbf{F}_k)=0.$$

Необходимость очевидна.

Достаточность следует из того, что если при выполнении этих условий система сил не находится в равновесии, то она может иметь равнодействующую, но эта равнодействующая обязана проходить через все точки А, В, С (иначе моменты не будут равны нулю), но эти точки по условию теоремы не лежат на одной прямой.

*　　　*　　　*

В любом из рассмотренных выше случаев используются три условия равновесия.

Если имеем систему параллельных сил, то одно из равенств (1.2) выполнится автоматически. Так, например, если ось OX перпендикулярна направлению действия сил, остается лишь два условия равновесия:

$$\Sigma F_{ky}=0,\ \ \Sigma m_0(\overline{F}_k)=0.$$

Для второй формы условий равновесия:

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k)=0,\ \ \Sigma m_B(\overline{F}_k)=0.$$

При этом точки A, B не должны лежать на одной прямой, параллельной силам.

*   *   *

Задачи называются **статически определимыми**, **(и системы – статически определимыми),** если число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции.

Пример статически определимой системы – груз, подвешенный на одном или двух тросах. В последнем случае имеем две неизвестные силы (усилия в тросах) и два условия равновесия (рис. 1.15).

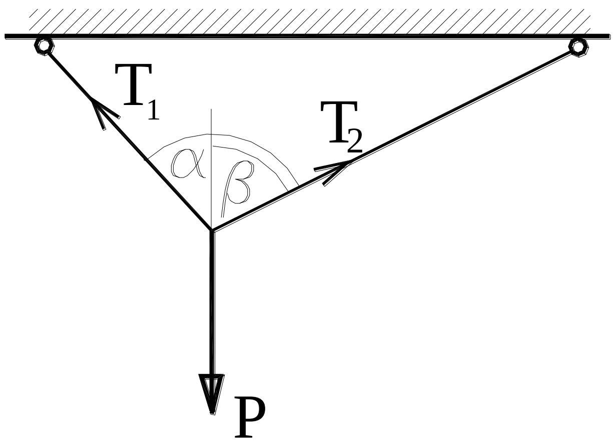


Рис. 1.15

$$T_2\cos\beta + T_1\cos\alpha = P,$$
$$T_1\sin\alpha - T_2\sin\beta = 0.$$

Примером статически неопределимой системы может служить груз, подвешенный на трех тросах, лежащих в одной вертикальной плоскости. В этом случае можно записать по-прежнему два уравнения равновесия, а реакций (усилий в тросах) будет три. Это значит, что такая система не решается однозначно.

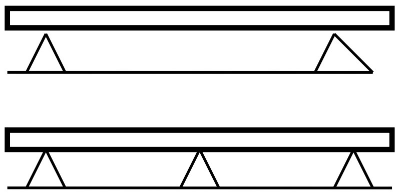


Рис. 1.16

По той же причине балка, лежащая на двух опорах, статически определима, а на трех – нет (рис. 1.16).

Расчет плоских ферм

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных по концам шарнирами.

Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах.

Далее пренебрегаем весом стержней, и тогда **стержни фермы работают только на растяжение или сжатие**.

Рассмотрим жесткие плоские фермы без лишних стержней, образованные из треугольников. Число стержней k, число узлов n, при этом для таких ферм выполняется связь между этими числами

$$k = 2n - 3.$$

При $k = n = 3$ ферма вырождается в треугольник из трех стержней. Присоединение каждого следующего узла требует добавления двух стержней, поэтому для всех новых узлов количеством $(n-3)$ нужно добавить $2(n-3)$ стержней. В итоге общее число стержней составит

$$k = 3 + 2(n-3) = 2n - 3.$$

Можно показать, что при меньшем количестве узлов ферма не будет жесткой, при большем количестве становится статически неопределимой.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Метод вырезания узлов

Этот метод удобен, когда нужно найти усилия во всех стержнях. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов.

Рассмотрим ферму (рис. 1.17), образованную одинаковыми равнобедренными треугольниками. К ферме приложены силы $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}_3 = \overline{F}$, действующие в горизонтальном направлении, как показано на рисунке. Определим усилия в стержнях.

В данном примере число узлов 6, стержней 9. Каждый из узлов отрезается от всей остальной фермы, а действие отрезанной части заменяется силами, направленными вдоль соответствующих стержней.

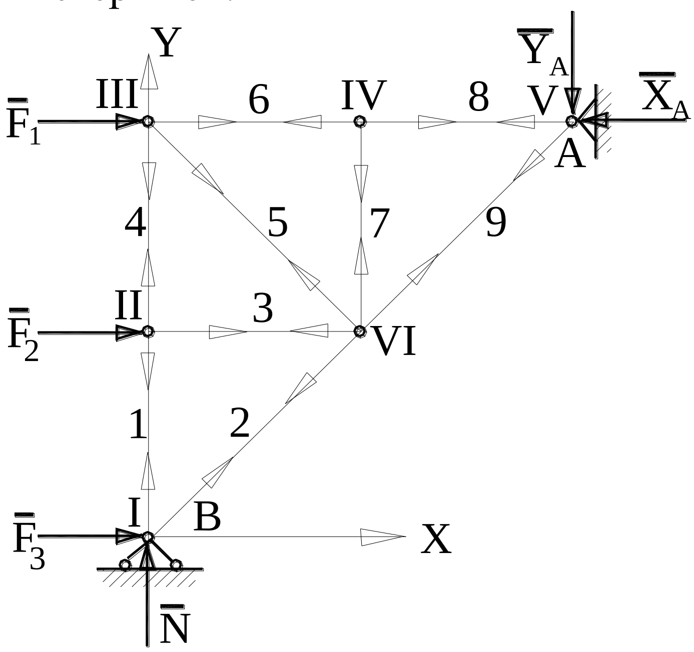


Рис. 1.17

При этом для каждого вырезанного таким образом узла **все усилия направляем от узла**, что соответствует предположению о том, что все стержни растянуты. Если при решении получим отрицательный знак усилия в стержне, это означает, что сила сжимающая.

Решение задач о равновесии ферм начинается всегда с определения реакций опор. Для этого **принимается, что ферма представляет собой абсолютно жесткую конструкцию** (АТТ) и **реакции опор определяются из рассмотрения равновесия фермы в целом**.

В нашем случае получается X_A = 3F (эта реакция уравновешивает все три силы), Y_A = 1.5 F. Последний результат следует из условия равновесия в форме моментов сил относительно центра В. Из условия $\sum F_{ky} = 0$ получим N = Y_A = 1.5 F.

Составим уравнения равновесия сил, сходящихся в каждом узле:

$$\Sigma F_{kx}=\Sigma F_{ky}=0.$$

Расчет начнем с узла I, где сходятся два стержня. Искомые усилия в стержне 1обозначим $\bar{S}_1$, в стержне 2 - $\bar{S}_2$ и т.д. Тогда из двух условий равновесия можно найти две силы:

$$F + S_2\cos 45^{\circ} = 0, \quad N + S_1 + S_2\sin 45^{\circ} = 0.$$

Тогда

$$S_2 = -F\sqrt{2}; \; S_1 = -N - S_2\sqrt{2}/2 = -F/2.$$

Зная S_1, можно составить два уравнения равновесия для узла II, где тоже остаются два неизвестных усилия, и т.д.

Если теперь свести результаты в таблицу, то получим

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие	-F/2	$-2F\sqrt{2}$	-2F	-F	$F\sqrt{2}$	-3F	0	-3F	$-3F\sqrt{2}$

Таким образом, только 5-й стержень растянут, все остальные сжаты, кроме 7-го – этот стержень вообще не нагружен. Его роль сводится к фиксации шарнира, соединяющего стержни 6 и 8. Если эти стержни заменить одним стержнем, то стержень 7 можно удалить, т.к. ничего не изменится. Как видно из таблицы, $S_6 = S_8$.

1.6 Трение

Сила сопротивления относительному скольжению тел называется трением скольжения. Такое сопротивление существует практически для всех соприкасающихся тел. В одних случаях трение играет положительную роль, например, при торможении транспортных средств и при ходьбе (вспомните, как неприятно ездить и ходить в гололед). В других случаях, например, в разного рода двигателях, передачах и т.д., такая сила заставляет тратить энергию на ее преодоление и играет отрицательную роль.

На основе многочисленных экспериментальных исследований сформулированы три следующих основных закона трения скольжения.

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (сцепления) F, для которой существуют ограничения

$$0 \leq F \leq F_{пр}.$$

Здесь $F_{пр}$ называется предельной силы трения.

Сила трения всегда направлена против направления, в котором действующие на тело силы стремятся его сдвинуть.

2. Предельная сила трения определяется соотношением

$$F_{пр} = f_0 \cdot N,$$

где f_0 – безразмерный коэффициент трения (покоя), N – нормальное давление, т.е. давление, которое оказывает одно из соприкасающихся тел на другое по нормали к поверхности контакта. Если такая поверхность горизонтальна, то свободно лежащее на ней тело давит силой своего веса P (P = N), если же поверхность наклонна, то нужно учесть именно нормальную к этой поверхности составляющую веса тела. Коэффициент трения

f_0 зависит от материалов и состояния поверхностей контактирующих тел.

3. Значение $F_{пр}$ в широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

*   *   *

Очевидно, при равновесии тела под действием приложенной сдвигающей силы F справедливо соотношение $F < F_{пр}$, или $F < f_0 \cdot N$. Если $F = F_{пр}$, то налицо случай предельного равновесия. Значения коэффициента трения для различных пар соприкасающихся тел варьируются в широких пределах. В некоторых машиностроительных справочниках, наряду с другими значениями, обязательной является величина силы трения пары тел из одного материала. Для примера приведем ряд значений:

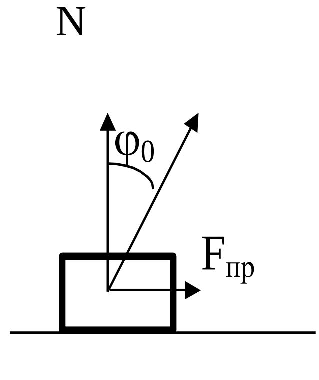
$f_0 =$ 0.4...0.7 – дерево по дереву,
$f_0 =$ 0.15...0.25 – металл по металлу,
$f_0 =$ 0.027 – сталь по льду.

При движении **сила трения всегда направлена против направления движения**, при этом $F = f \cdot N$, f – динамический коэффициент трения скольжения; этот коэффициент определяется экспериментально.

Величина f зависит от скорости скольжения V; обычно с ростом V сначала f уменьшается, далее f = const.

Реакция $\bar{R}$ шероховатой поверхности имеет две составляющие – нормальную $\bar{N}$ и силу трения $\bar{F}$. В итоге $\bar{R}$ всегда отклонена от нормали на угол φ_0 (рис. 1.18):

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = F_{пр}/N.$$



φ_0 – наибольший угол, который образует с поверхностью полная реакция шероховатой связи. Это т.н. угол трения. Т.к.

$$F_{пр} = f \cdot N,$$

то

Рис. 1.18

$$tg\ \varphi_0 = f_0.$$

Если тело в равновесии, то полная реакция $\overline{R}$ всегда находится внутри угла трения. Если к телу приложить силу, прижимающую его к поверхности под углом $\alpha<\varphi_0$, то это тело не сдвинется. Для движения необходимо, чтобы

$$P\sin\alpha > F_{пр} = f_0 \cdot P\cos\alpha, \text{ или } tg\ \alpha > f_0.$$

Это объясняет эффект «самозаклинивания» или самоторможения тел.

Таким образом, груз тащить лучше за веревочку, нежели его толкать. В первом случае сила давления на грунт уменьшается за счет натяжения веревочки, а во втором случае увеличивается за счет вертикальной составляющей силы, с которой толкаем груз.

Трение нити о цилиндрическую поверхность

Рассмотрим равновесие участка нити длиной $Rd\theta$ (рис. 1.19).

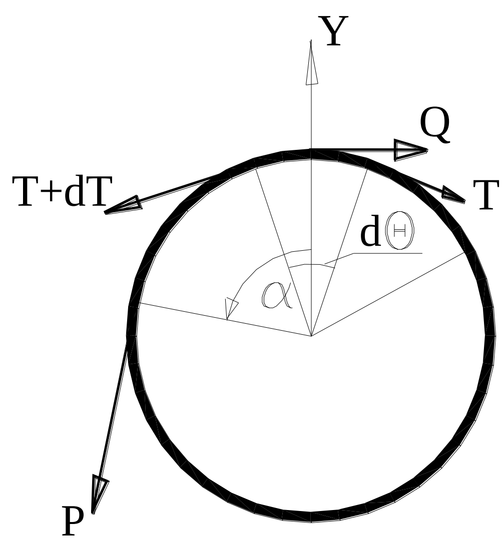


Рис. 1.19

Обозначим разность натяжений нити через

$$dT = f_0 \cdot dN,$$

(*)

где dN – нормальная реакция. Ее определяем из уравнения равновесия в проекции на ось Y.

$$dN = T\sin(d\theta/2) + (T + dT)\sin(d\theta/2) \approx Td\theta.$$

Подставим это в (*):

$$dT = f_0 T\, d\theta, \quad dT/T = f_0\, d\theta.$$

Слева берем интеграл от Q до P, справа – от 0 до α (при α=0 $Q \equiv P$):

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = \int_0^\alpha f_0 d\theta, \qquad \ln\frac{P}{Q} = f_0\alpha, \qquad Q = Pe^{-f_0\alpha}.$$

Так, если на деревянный столб наматывать пеньковый канат, то при $f_0 = 0.5$ получим:

α	π	π	π	π
Q/P	0.208	0.043	0.009	0.002

Таким образом, дважды обмотав канат вокруг столба, мы при усилии 20 Н удержим 10000 Н.

Трение качения

Трение качения – сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

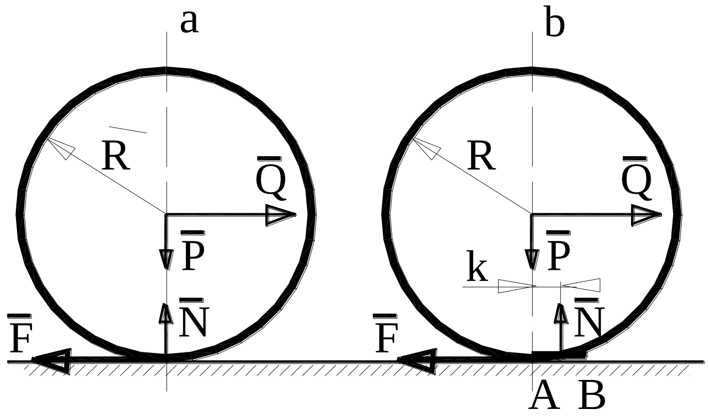


Рис. 1.20 – Идеальная (a) и реальная (b) схемы взаимодействия катящегося круглого цилиндра с горизонтальной опорой

Если, например, цилиндрический каток катится по шероховатой абсолютно твердой поверхности, то вес $\overline{P}$ уравновешен реакцией $\overline{N}$ (рис. 1.20, a), а горизонтальная сила $\overline{Q}$ с силой трения $\overline{F}$ образуют пару, т.к. численно они равны. В этом случае при любом, даже самом малом, значении $\overline{Q}$ должно начаться качение.

В действительности дело обстоит иначе.

Вследствие деформации тел их реальное взаимодействие идет по некоторой площадке AB (рис. 1.16, b). В итоге реакция связи (в данном случае горизонтальной опоры) $\overline{N}$ смещается в сторону точки B. С увеличением Q это смещение растет до некоторого предельного значения k. В предельном положении, когда $Q = Q_{пр}$, имеем

$$Q_{пр} \cdot R = N \cdot \mathrm{k}, \text{ или } Q_{пр} = \mathrm{k/R} \cdot N.$$

При $Q < Q_{пр}$ каток будет находиться в покое.

k – это линейная (размерная) величина и называется коэффициентом трения качения. Величина k (в см) для случаев:

дерево по дереву 0.05...0.8;
колесо по рельсу 0.005;
шарикоподшипник 0.001.

Как правило, $k/R \ll f_0$, поэтому скольжение всегда стараются заменить качением.

1.7 Пространственная система сил

Выше вводилось понятие момента силы относительно точки. Им особенно удобно пользоваться для плоской системы сил, хотя само по себе это понятие справедливо для произвольной системы. Однако в пространственном случае удобнее использовать понятие момента силы относительно оси.

Проекция вектора **m_0(F)**, т.е. **момента силы относительно какого-либо центра, на ось z, проходящую через этот центр, называется моментом силы F относительно оси z:**

$$m_z(\overline{F}) = \left[\overline{m}_O(\overline{F})\right]_z = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| \cos\gamma,$$

где γ – угол между вектором $\overline{m}_O(\overline{F})$ и осью z. Таким образом, момент силы относительно оси $m_z(\overline{F})$ – величина алгебраическая (в отличие от момента силы относительно точки).

Из рис. 1.21 видно, что

$$2пл.\Delta O_1A_1B_1 = 2пл.\Delta OAB\cdot\cos\gamma = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right|\cos\gamma = m_z(\overline{F}).$$

Таким образом,

$$2пл.\Delta O_1A_1B_1 = m_z(\overline{F}) = \pm\overline{F}_{xy}\cdot h,$$

где $\overline{F}_{xy}$ – проекция силы $\overline{F}$ на плоскость O_1xy, h – кратчайшее расстояние от точки O_1 до линии действия вектора $\overline{F}_{xy}$.

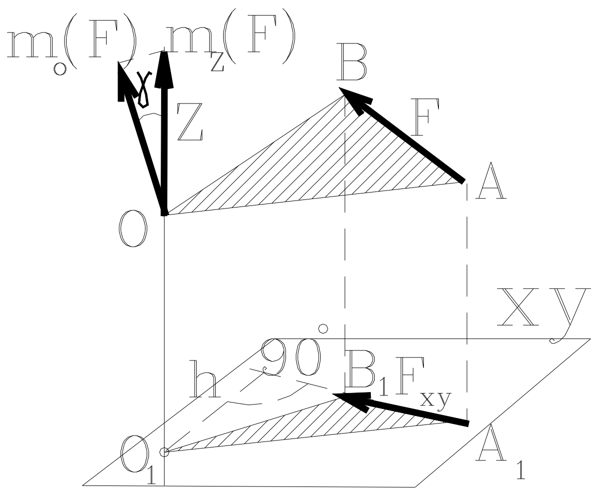


Рис. 1.21

Таким образом, момент силы F относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси z с этой плоскостью.

Правило знаков: момент положителен, если при взгляде с положительного конца оси z **поворот** осуществляется **против часовой стрелки**.

Если точка O будет перемещаться вдоль оси z, то момент относительно точки будет меняться, а относительно оси – нет.

Величина $m_z(\overline{F})$ – характеристика вращательного эффекта силы $\overline{F}$ вокруг оси z.

Последовательность определения момента силы относительно оси z:

1. Проводим плоскость XУ $\perp$z.
2. Проектируем $\overline{F}$ на эту плоскость – получаем $\overline{F}_{xy}$.
3. Находим длину перпендикуляра h от оси до линии действия $\overline{F}_{\mathbf{xy}}$.
4. Находим произведение $F_{xy} \cdot h$.
5. Определяем знак момента.

Частные случаи:

1. Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (формально это следует из равенства $F_{xy} = 0$).
2. Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю (h = 0).

Из этих частных случаев следует: **если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно оси всегда равен нулю**.

3. Если сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на плечо, взятому с соответствующим знаком.

Для моментов силы относительно оси справедлива **теорема Вариньона**:

$$m_z(\bar{R}) = \Sigma m_z(\bar{F}_k),$$

где $\bar{R}$ – равнодействующая системы сил $\bar{F}_{\mathbf{k}}$. Формулировка этой теоремы может выглядеть таким образом: **момент равнодействующей системы сил относительно какой-либо оси равен сумме моментов сил системы относительно той же оси**.

Этой теоремой удобно пользоваться при нахождении моментов силы относительно оси, разлагая силы на составляющие, которые параллельны осям или их пересекают. Для этого разложим силу на составляющие вдоль осей. Тогда по теореме Вариньона

$$m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}_x) + m_x(\bar{F}_y) + m_x(\bar{F}_z);$$

но $m_x(\bar{F}_x) = 0$, т.к. $\bar{F}_x \,||\, x$, а $m_x(\bar{F}_y) = -z\,|\bar{F}_y|$, $m_x(\bar{F}_z) = y\,|\bar{F}_z|$, т.к. эти последние две составляющие перпендикулярны оси x.

В итоге

$$m_x(\bar{F}) = y\,|\bar{F}_z| - z\,|\bar{F}_y|,$$
$$m_y(\bar{F}) = z\,|\bar{F}_x| - x\,|\bar{F}_z|,$$
$$m_z(\bar{F}) = x\,|\bar{F}_y| - y\,|\bar{F}_x|. \qquad (*)$$

Эти соотношения являются аналитическими выражениями моментов силы относительно координатных осей. Моменты вычисляются по проекциям силы и координатам точки их приложения.

Левые части в (*) одновременно есть проекции вектора $\bar{m}_O(\bar{F})$ на оси координат (с началом отсчета в точке О). Модуль этого момента

$$|\ \bar{m}_0(\bar{F})\ | = \sqrt{\left[m_x(\bar{F})\right]^2 + \left[m_y(\bar{F})\right]^2 + \left[m_z(\bar{F})\right]^2}.$$

Главный вектор и главный момент системы сил определяли ранее:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k, \qquad \overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Выразим эти величины через их проекции. В итоге получим достаточно очевидные равенства:

$$R_x = \Sigma F_{kx}, \quad R_y = \Sigma F_{ky}, \quad R_z = \Sigma F_{kz};$$

$$M_x = \Sigma m_x(\overline{F}_k), \; M_y = \Sigma m_y(\overline{F}_k), \; M_z = \Sigma m_z(\overline{F}_k).$$

Поскольку любая система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то шесть величин слева в этих равенствах задают и определяют любую систему сил.

Приведение системы сил к простейшему виду

Как показано выше, любая система сил сводится к главному вектору $\overline{R}$ и к главному моменту $\overline{M}_O$. Рассмотрим существующие варианты ее упрощения.

1. Если $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, то система сил сводится к паре сил. В этом случае значение $\overline{M}_O$ от выбора центра О не зависит.

2. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку О. Это следует из равенства момента нулю – если сила не проходит через точку, то момент не может быть равным нулю

3. Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, а $\overline{M}_O \perp \overline{R}$ (рис. 1.22), то система приводится к равнодействующей, не проходящей через точку О.

Выбирая плечо ОО$^{/}$ так, чтобы пара сил $\overline{R}^{/}$, $\overline{R}^{//}$, по модулю равных $\overline{R}$, давала момент $\overline{M}_O$, получим этот вариант реализованным. По существу, этот случай встречался при анализе плоской системы сил. Именно для такой системы вектор-момент всегда перпендикулярен плоскости действия сил.

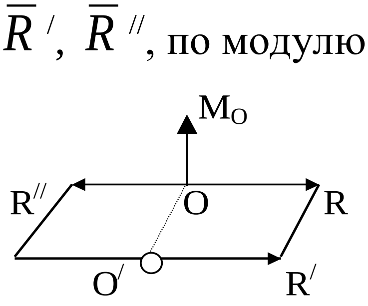


Рис. 1.22

4. Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, а вектор $\overline{R}$ параллелен вектору $\overline{M}_O$, то система сил приводится к силе $\overline{R}$ и паре сил $\overline{P}$, $\overline{P}^{/}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{R}$ (рис. 1.23).

Такая совокупность силы и пары называется **динамическим винтом**, а прямая вдоль $\overline{R}$ – осью винта. Эта система сил более не упрощается, т.е. не приводится к одной силе или паре сил.

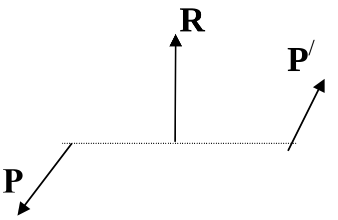


Рис. 1.23

Если при движении вдоль оси винта вращение направлено по часовой стрелке, винт называется правым, иначе – левым.

Аналогия с обычной резьбой вполне очевидна.

Если $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$, а эти векторы не параллельны и не перпендикулярны, то такая система сил приводится к динамическому винту, ось которого не проходит через точку О.

Равновесие системы сил

Система будет в равновесии, если $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$. Но это означает, что

$$R_x = R_y = R_z = 0,\ M_x = M_y = M_z = 0,$$

или

$$\Sigma F_{kx} = \Sigma F_{ky} = \Sigma F_{kz} = 0,$$
$$\Sigma m_x(F_k) = \Sigma m_y(F_k) = \Sigma m_z(F_k) = 0.$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси и суммы их моментов относительно осей были равны нулю.

При этом суммирование проекций сил можно проводить в одной системе осей, а проекций моментов – в другой.

1.8 Центр тяжести

Когда есть система сил, параллельных, например, оси z, то проекции этих сил на оси x, y равны нулю, и моменты относительно оси z тоже равны нулю.

Тогда из шести уравнений равновесия останутся только три:

$$\Sigma F_{kz} = 0,\ \ \Sigma m_x(\overline{F}_k) = 0,\ \ \Sigma m_y(\overline{F}_k) = 0.$$

Итак, для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную этим силам, и суммы проекций их моментов на другие оси были равны нулю.

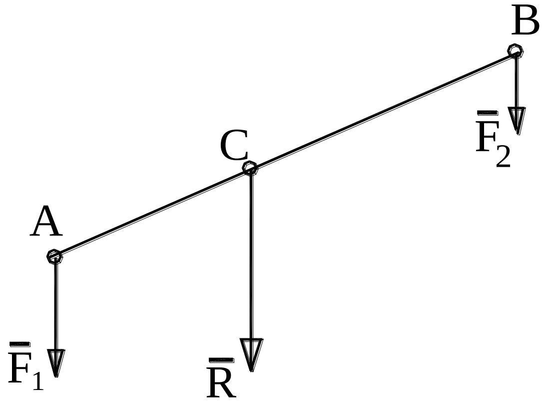


Рис. 1.24

Пусть в точках A, B приложены однонаправленные параллельные силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ (рис. 1.24). Они должны иметь равнодействующую $\overline{R}$ в некоторой точке C, при этом $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Чтобы система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ сводилась к равнодействующей $\overline{R}$, необходимо

$$F_1 \cdot AC - F_2 \cdot BC = 0.$$

Это требование означает, что сумма моментов сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ относительно точки С равна нулю. Тогда сила $\overline{R}$ и есть равнодействующая (она одна эквивалента системе сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$).

Если одновременно обе силы повернуть на один и тот же угол, при этом они останутся параллельными, то новая их равнодействующая тоже пройдет через точку С, повернувшись на такой же угол.

Этот результат – возможность приведения системы параллельных сил к равнодействующей, проходящей через некоторый центр – справедлив для любого числа сил. В самом деле, после приведения системы двух сил к центру рассматриваем равнодействующую этих сил и третью силу как новую систему двух сил. Повторяя все рассуждения, сделанные выше, опять приведем такую систему к новой равнодействующей (разумеется, проходящей в общем случае через новый центр), и т.д. Окончательно полученный центр называется центром параллельных сил.

Найдем координаты центра параллельных сил. Положение точки С не должно зависеть от выбора системы координат (систему координат мы выбираем сами, и этот выбор не меняет положение центра сил) и от направления действия сил. Повернем все силы так, чтобы они были параллельны оси z. Применим к повернутым силам теорему Вариньона с учетом, что $\overline{R}^{/}$ – равнодействующая системы сил $\overline{F}_k^{/}$, где $\left|\overline{R}^{/}\right| = \left|\overline{R}\right|, \quad \left|\overline{F}_k^{/}\right| = \left|\overline{F}_k\right|.$.

Тогда

$$m_y(\overline{R}^{/}) = \Sigma m_y(\overline{F}_k^{/}),$$

но

$$m_y(\overline{R}) = \left|\overline{R}\right| \cdot x_c, \;\; m_y(\overline{F}_k) = \left|\overline{F}_k\right| \cdot x_k.$$

Отсюда следует

$$R x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + ... + F_n x_n,$$

и тогда

$$x_c = \Sigma F_k x_k / R, \quad y_c = \Sigma F_k y_k / R, \quad z_c = \Sigma F_k z_k / R.$$

Можно отметить, что эти формулы справедливы и для параллельных сил, направленных в разные стороны, но тогда нужно у сил учитывать знаки, предварительно условившись одно из направлений считать положительным, а противоположное - отрицательным; кроме того, необходимо, чтобы $R \neq 0$. Если последнее требование нарушается, т.е. $R = 0$, то система сил либо уравновешена, либо сводится к главному моменту, который можно заменить парой сил, не имеющей, как было отмечено, равнодействующей. В том и другом случае о приведении системы сил к центру говорить не имеет смысла.

Определение:

область, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует сила, зависящая (в общем случае) от положения точки, называется силовым полем.

Пример силового поля – поле сил тяжести.

Для тел, размеры которых невелики по сравнению с размерами Земли, силы тяжести параллельны друг другу и не зависят от положения точки тела при его поворотах. Такое поле сил называется однородным.

Равнодействующая сил тяжести, приложенных ко всем частицам тела, называется весом тела:

$$\boldsymbol{P} = \Sigma\, \boldsymbol{p}_k.$$

При любом повороте тела силы $\boldsymbol{p}_k$ приложены в одних и тех же точках и остаются параллельными друг другу. Следовательно, их равнодействующая $\boldsymbol{P}$ будет проходить всегда через одну и ту же точку – центр тяжести. Следует заметить, что центр тяжести не всегда является точкой, принадлежащей телу, для которого определяется этот центр. Например, центр тяжести кольца находится в его геометрическом центре – на «пустом месте»; центр тяжести дуги также находится вне ее, и т.д.

Поскольку одновременный и одинаковый поворот параллельных сил не меняет точку приложения их равнодействующей, центром тяжести твердого тела называется точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести при любом повороте тела.

Координаты центра тяжести определяются так же, как центра параллельных сил:

$$x_c = \Sigma p_k x_k/P, \quad y_c = \Sigma p_k y_k/P, \quad z_c = \Sigma p_k z_k/P,$$

где x_k, y_k, z_k – координаты точек приложения сил тяжести $\bar{p}_k$.

Если тело однородно, то вес любой его части объемом v_k определится как

$$p_k = \gamma \cdot v_k, \text{ где } \gamma \text{ – удельный вес.}$$

Тогда вес всего тела объемом V будет $P = \gamma \cdot V$, и в итоге

$$x_c = \Sigma v_k x_k/V, \quad y_c = \Sigma v_k y_k/V, \quad z_c = \Sigma v_k z_k/V.$$

Таким образом, в этом случае величина γ = const не играет роли и центр тяжести тела полностью определяется формой и размерами тела. В таких случаях говорят о «центре тяжести объема» V.

Для плоской фигуры координаты «центра тяжести площади» определяются формулами

$$x_c = \Sigma s_k x_k/S, \quad y_c = \Sigma s_k y_k/S.$$

Здесь S – площадь всей фигуры, s_k – площадь отдельной k-той части.

Наконец, для пространственной линии координаты «центра тяжести линии»

$$x_c = \Sigma x_k l_k/L, \quad y_c = \Sigma y_k l_k/L, \quad z_c = \Sigma z_k l_k/L.$$

Когда тело непрерывное (сплошное), тогда, вместо сумм, во всех полученных выше выражениях следует перейти к интегралам.

Так, для объемного трехмерного тела объемом V:

$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x dv, \quad y_c = \frac{1}{V}\int_V y dv, \quad z_c = \frac{1}{V}\int_V z dv.$$

Для плоской фигуры площадью S:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_S x ds, \quad y_c = \frac{1}{S}\int_S y ds,$$

для пространственной кривой длиной L:

$$x_c = \frac{1}{L}\int_L x dl, y_c = \frac{1}{L}\int_L y dl, z_c = \frac{1}{L}\int_L z dl.$$

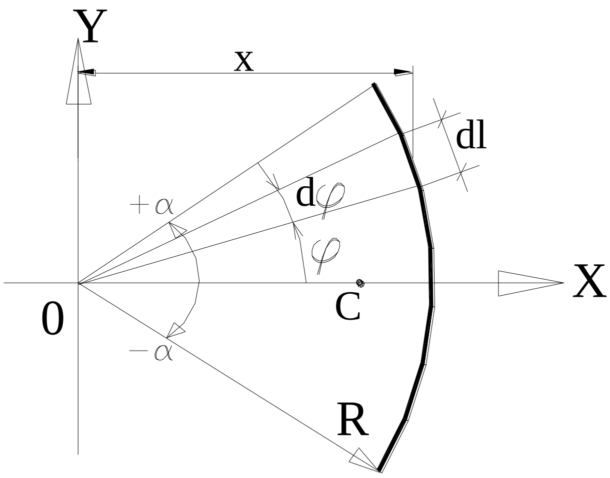


Рис. 1.25

Пример 1

Определить центр тяжести дуги окружности радиусом *R*, раствором 2α (рис. 1.25).

Координата элемента дуги определяется как *x* = *R*cosφ, величина элементарного участка дуги *dl* = *Rd*φ.

Тогда

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi = \frac{2R^2}{L}\sin\alpha.$$

Но $L = R\cdot 2\alpha$. Тогда $x_c = R\sin\alpha/\alpha$.

Если $\alpha \to 0$, то $x_c \to R$, если $\alpha = \pi/2$, то $x_c = 2R/\pi \approx 2/3\cdot R$.

Пример 2

Найти центр тяжести сектора с той же геометрией (см. рис. 1.25).

Для любого элементарного треугольника с основанием dS его центр тяжести находится на расстоянии $2/3R$ от вершины сектора. Это следует из того, что центр тяжести треугольника находится на пересечении его медиан.

Таким образом, центры тяжести набора элементарных секторов образуют дугу радиусом $r = 2/3R$. Но для определения центра тяжести дуги уже получена формула, и если ее использовать, получим

$$x_c = r\cdot\sin\alpha/\alpha = 2/3\cdot R\sin\alpha/\alpha.$$

Можно идти непосредственно от выражений координат центра тяжести для плоской фигуры, в частности:

$$x_c = \frac{1}{S}\int_S x ds.$$

В полярных координатах площадь элемента сектора $ds = rd\varphi dr$, а текущая координата точки $x = r\cos\varphi$. Здесь по сравнению с предыдущим случаем для дуги величина радиуса r является переменной, и по ней нужно проводить интегрирование от 0 до R. Тогда

$$x_c = \frac{1}{S}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi r d\varphi dr = \frac{1}{S}\int_0^R r^2 dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{S}\frac{R^3}{3}2\sin\alpha.$$

В свою очередь, часть площади круга $S = 2\alpha/2\pi\cdot\pi R^2 = \alpha R^2$, и тогда $x_c = 2R\sin\alpha/3\alpha$ – т.е. получается тот же результат, что и выше.

Пример 3

Найти центр тяжести объема полушария.

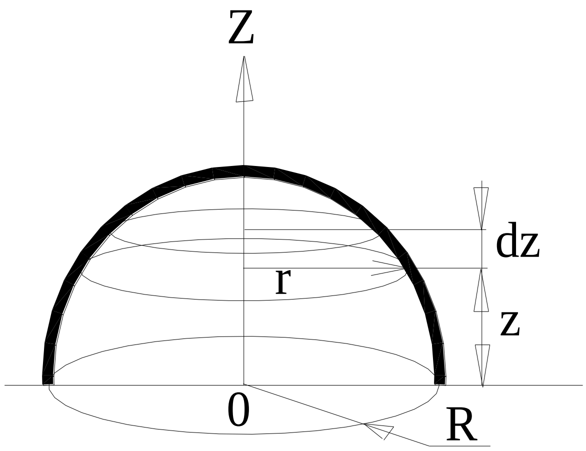


Рис. 1.26

Из соображений симметрии $x_c = y_c = 0$, и необходимо найти лишь одну из координат по формуле $z_c = \dfrac{1}{V}\int\limits_V z dv.$

В качестве элемента объема рассматривается часть полушара, заключенная между сечениями *z* и *dz,* тогда

$$dv = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz,$$

а интегрирование по объему можно заменить теперь интегрированием по координате *z* в пределах от 0 до *R*:

$$z_c = \frac{1}{V}\int\limits_V z dv = \frac{1}{V}\int\limits_V z\pi r^2 dz = \frac{1}{V}\int\limits_0^R z\pi(R^2 - z^2)dz =$$

$$= \frac{\pi}{V}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi R^4}{4V}.$$

$V = 2/3\pi R^3$; $z_c = 3/8 \cdot R$.

Следует обратить внимание, что положение центра тяжести полушара здесь отсчитывается от сечения так называемого большого круга.

2 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1 Кинематика точки

2.1.1 Основные понятия

Кинематика – раздел механики, изучающий геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил. Фактически этот раздел можно считать частью геометрии, если в последнюю ввести понятия, связанные с изменением координат, скорости и других характеристик движения точки во времени.

Этот раздел имеет как самостоятельное значение, так и как введение в динамику.

В дальнейшем движение будет рассматриваться в конкретных системах координат, или системах отсчета. Эти системы выбираются наблюдателем, и формально все системы равноправны. Все кинематические зависимости, справедливые в одной системе координат, справедливы в другой.

Кинематические зависимости в теоретической механике формулируются в привычном для нас обычном **(евклидовом)** пространстве и с использованием понятия абсолютного времени t.

Все кинематические величины – функции времени t; момент времени $t = 0$ в большинстве задач означает начало отсчета, некоторый условный момент времени.

Кинематически задать движение тела – значит, задать его положение относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики – зная закон движения тела (точки), установить все остальные кинематические величины, характеризующие движение.

Наиболее употребительными являются такие величины: 1) траектория; 2) скорость точки (тела); 3) ускорение точки (тела).

Траекторией называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.

Если траектория – прямая линия, движение называется **прямолинейным**, иначе – **криволинейным**.

Движение точки может быть задано тремя способами:

- векторным способом;
- координатным;
- естественным.

1. Векторный способ

В любой момент времени *t* положение точки можно определить радиус-вектором ***r*** (рис. 2.1); описание движения сводится к построению зависимости

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (2.1)$$

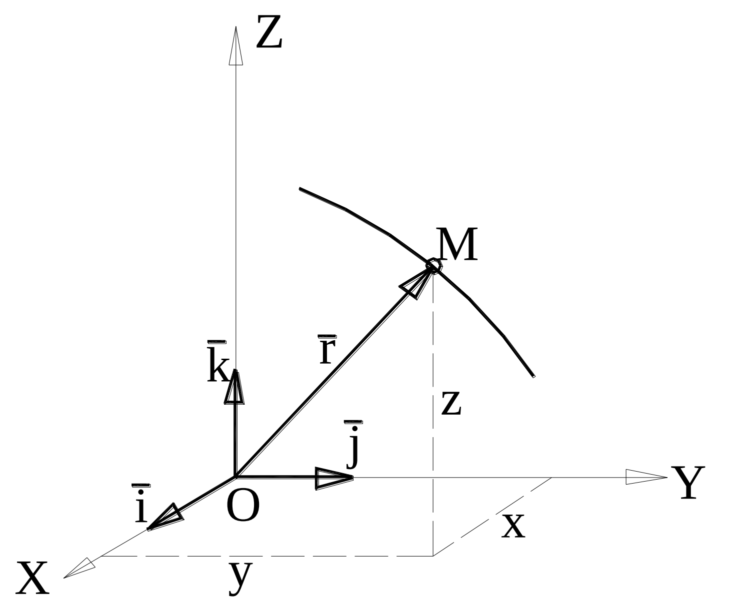


Рис. 2.1

Геометрическое место концов вектора **r** (годограф вектора) определяет траекторию движения.

Если

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,$$

то

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \qquad (2.2)$$

2. Координатный способ

Если задать

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\ , \qquad (2.3)$$

то соотношения (2.3) представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Аналогичные по существу зависимости можно записать для цилиндрических, сферических и т.д. систем координат.

В случае, когда точка движется в плоскости, задают

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \qquad (2.4)$$

а при движении вдоль прямой, принимая ее за ось X,

$$x = f(t). \qquad (2.5)$$

По существу, (2.3) и (2.4) представляют собой т.н. параметрическое задание траектории. Исключая t, получаем привычные формы записи $y = y(x)$ и т.д.

3. Естественный (траекторный) способ

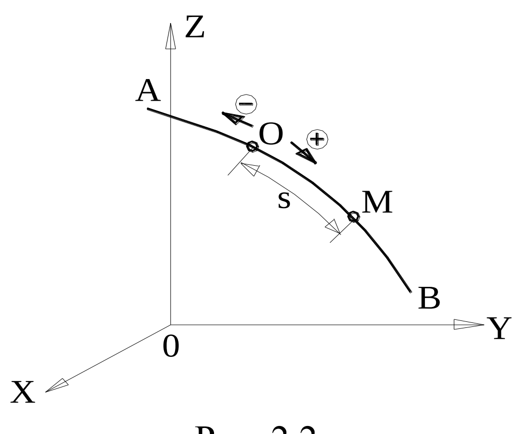


Рис. 2.2

Этот способ описания движения удобен, когда траектория точки известна заранее. В этом случае, принимая на траектории некоторую точку О за начало отсчета и определив положительное направление этого отсчета, закон движения можно представить в виде (рис. 2.2)

$$s = s\,(t), \tag{2.6}$$

где *s* – расстояние от начала отсчета, измеренное вдоль траектории, называемое дуговой координатой.

Таким образом, при этом способе нужно задать:

1) траекторию;
2) начало отсчета;
3) положительное направление отсчета дуговой координаты;
4) закон движения в виде (2.6).

Следует отметить, что *s* есть не путь, пройденный точкой, а ее текущее положение. Например, при колебаниях величина *s* меняется в некоторых конечных пределах, а пройденный точкой путь все время растет.

2.1.2 Вектор скорости точки

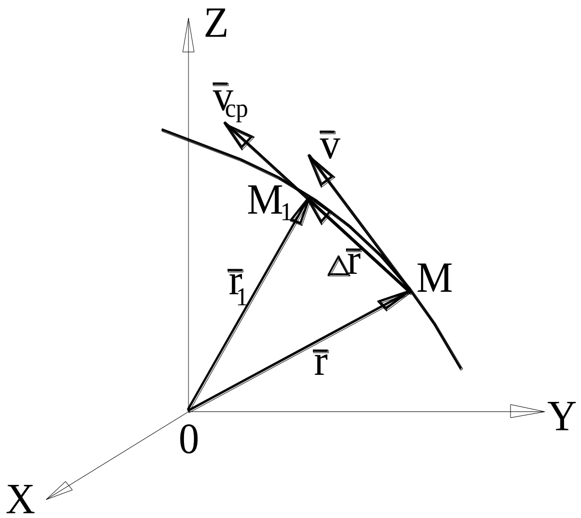


Рис. 2.3

Перемещение точки за время Δt определится вектором $\Delta \boldsymbol{r} = = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = MM_1$ ($\boldsymbol{r}_1$ – текущий радиус-вектор точки M_1, $\boldsymbol{r}$ – исходный для точки M, рис. 2.3). Если траектория прямолинейна, то приращение $\Delta \boldsymbol{r}$ – вдоль этой траектории, если криволинейна – то по хорде.

Средняя скорость определяется как отношение смещения за некоторое время к величине этого времени:

$$\boldsymbol{v}_{cp} = \Delta \boldsymbol{r} / \Delta t. \tag{2.7}$$

Скорость в данный момент времени (мгновенная скорость) определяется предельным переходом при уменьшении интервала времени:

$$\bar{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}_{cp}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{2.8}$$

Направление вектора скорости – по касательной к траектории в сторону движения. Можно заметить, что средняя и мгновенная скорости по величине совпадают, если в рассматриваемом интервале времени скорость движения постоянна, а по направлению совпадение этих скоростей будет только при прямолинейном движении.

Размерность скорости соответственно получается как отношение единицы длины (пройденного пути) к единице времени:

$$[v] = \text{м/с}, \quad \text{см/мин}, \quad \text{км/час и т.д.}$$

2.1.3 Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение скорости (по модулю и направлению) с течением времени.

За время Δt скорость меняется на величину $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$. Вектор приращения скорости $\Delta \boldsymbol{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории. Это легко можно установить, рассмотрев два смежных направления вектора скорости точки при ее движении по криволинейной траектории.

Среднее ускорение (рис. 2.4) определяется формулой

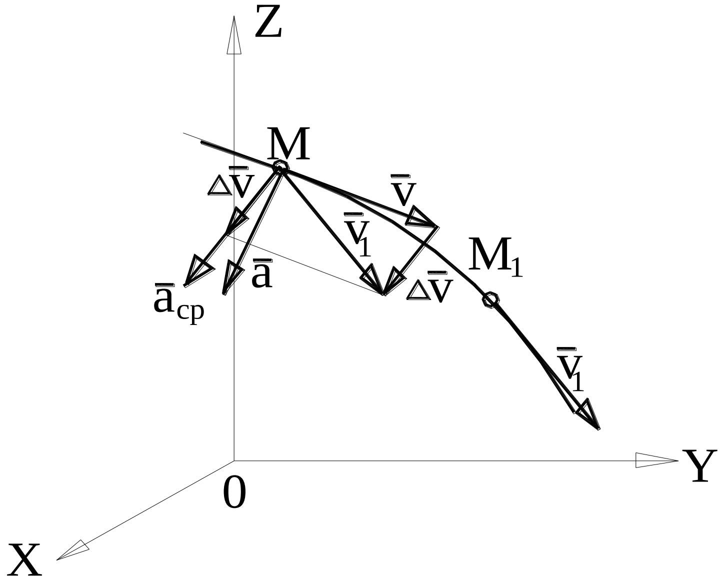


Рис. 2.4

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \qquad (2.9)$$

Мгновенное ускорение

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \qquad (2.10)$$

[a]=L/T^2= м/с^2 и т.д.

При прямолинейном движении ускорение ориентировано вдоль траектории.

Если траектория – плоская кривая, то вектор ускорения лежит в плоскости кривой и направлен в сторону вогнутости.

Если траектория – пространственная кривая, то вектор ускорения направлен в сторону вогнутости кривой и находится в плоскости, проходящей через точку М (исходную) и прямую, параллельную касательной в точке $М_1$ (текущей). В пределе при $\Delta t \to 0$ эта плоскость занимает положение так называемой соприкасающейся плоскости. В этой плоскости происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при малом перемещении точки.

2.1.4 Определение скорости и ускорения при координатном задании движения

Используется следующая теорема:

проекция производной от вектора на неподвижную ось равна производной от проекции вектора на ту же ось, т.е. если

$$\bar{q} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \text{ то}$$

$$q_x = \frac{dp_x}{dt}, q_y = \frac{dp_y}{dt}, q_z = \frac{dp_z}{dt}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

В соответствии с этим

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \qquad (2.12)$$

или

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}. \qquad (2.12')$$

Здесь и далее точка над переменной означает производную по времени от этой переменной, являющейся функцией времени. Соответственно две точки – вторую производную, и.т.д.

Итак, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующих координат точки.

По проекциям скорости точки определяются ее величина и направление:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \ \cos\alpha = v_x / v, \ \cos\beta = v_y / v, \ \cos\gamma = v_z / v. \qquad (2.13)$$

Здесь α, β, γ - так называемые направляющие углы, составляемые вектором скорости с осями X, Y, Z соответственно.

По аналогии для ускорения справедливо:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ \ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\ \ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \qquad (2.14)$$

или проекции ускорения на оси системы координат равны первым производным по времени от проекций скоростей или вторым производным по времени от координат точки.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},\ \cos\alpha_1 = a_x / a, \cos\beta_1 = a_y / a,\ \cos\gamma_1 = a_z / a. \qquad (2.15)$$

В случае движения точки в плоскости упрощения очевидны: исчезают проекции скорости и ускорения на ось z.

Для прямолинейного движения (одномерный случай):

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \ a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (2.16)$$

2.1.5 Примеры решения задач кинематики точки

Пример 1

Пусть заданы уравнения движения точки в плоскости координатным способом:

$$x = 8t - 4t^2,\ \ y = 6t - 3t^2. \qquad (2.17)$$

Найти траекторию, скорость и ускорение точки.

Из (2.17) следует:

$3x - 4y = 0$, или $y = (3/4)\cdot x$ –

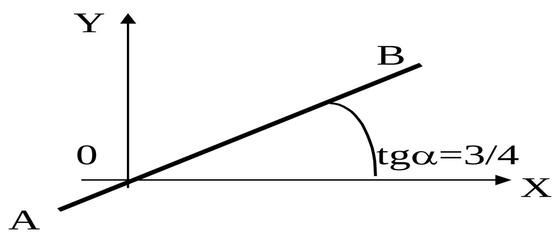


Рис. 2.5

это уравнение описывает форму траектории, в данном случае прямую линию, проходящую через точки A(0, 0) и B(4, 3) (рис. 2.5).

Составляющие скорости

$$v_x = 8–8t, \quad v_y = 6–6t.$$

Тогда величина скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}\,|1 - t| = 10|1 - t|.$$

Ускорение

$$a_x = –8, \quad a_y = –6, \quad a = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Вектор ***a*** направлен вдоль траектории (прямой) AB (рис. 2.5), причем в начальный момент времени точка находится в начале координат (при $t = 0$ координаты точки $x = y = 0$). Так как проекции этого вектора отрицательны (они постоянны и не меняются во все время движения), точка движется с ускорением, направленным от точки B к точке A. При

$$t = 0: v = 10;$$
$$t = 1: v = 0;$$
$$t > 1: \; v_x < 0, \; v_y < 0,$$

т.е. и скорость после этого момента направлена от B к A. Итак, движение точки начинается в момент времени $t = 0$ из точки 0 к точке B, в начальный момент времени ($t = 0$) и далее вплоть до момента $t = 1$ обе компоненты скорости положительны. Координаты точки в момент остановки будут $x_B = 4$, $y_B = 3$. После этого при $t > 1$ компоненты скорости становятся отрицательными, т.е. движение идет уже в обратную сторону. При $t = 2$ точка проходит снова через точку 0 и затем с нарастающей скоростью продолжает движение в ту же сторону вдоль прямой BA.

Пример 2

Пусть заданы уравнения пространственного движения точки:

$$x = R\sin\omega t, y = R\cos\omega t, z = ut,$$

где R, u, ω – постоянные величины.

Поскольку

$$x^2 + y^2 = R^2 ,$$

то траектория лежит на круглом цилиндре радиуса R. С течением времени точка перемещается по поверхности этого цилиндра, одновременно продвигаясь вдоль оси z, так что в итоге получается так называемая винтовая линия. Один виток точка проходит за время t_1, определяемое из равенства

$$\omega t_1 = 2\pi.$$

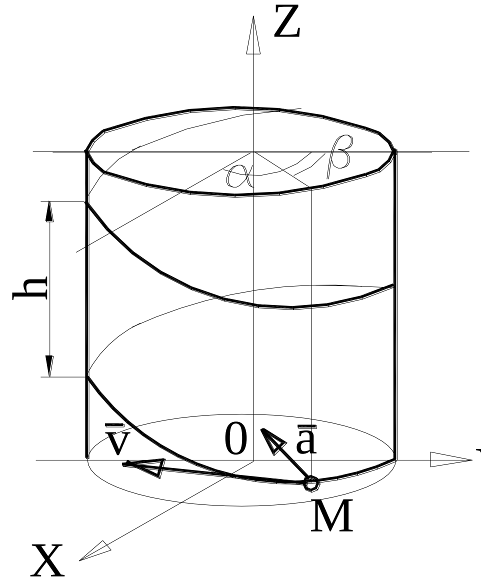


Рис. 2.6

За это время вдоль оси цилиндра точка смещается на величину

$$h = u\cdot 2\pi/\omega;$$

эта величина называется шагом винтовой линии.

Проекции вектора скорости

$$v_x = R\omega\cos\omega t, v_y = -R\omega\sin\omega t, v_z = u,$$

а скорость

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2} = const$$

Ненулевые проекции ускорения непостоянны:

$$a_x = -R\omega^2\sin\omega t, a_y = -R\omega^2\cos\omega t, a_z = 0.$$

Ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = const\ .$$

$$\cos\alpha_1 = a_x/a = -\sin\omega t = -x/R,$$
$$\cos\beta_1 = a_y/a = -\cos\omega t = -y/R,\ \cos\gamma_1 = a_z/a = 0.$$

С другой стороны,

$$x/R = \cos\alpha,\ \ y/R = \cos\beta,$$

где α, β – углы, образованные R с осями x, y соответственно. Но это означает, что ускорение направлено вдоль радиуса к оси цилиндра.

Пример 3

Человек ростом h идет от фонаря, висящего на высоте $H > h$, со скоростью u (рис. 2.7).

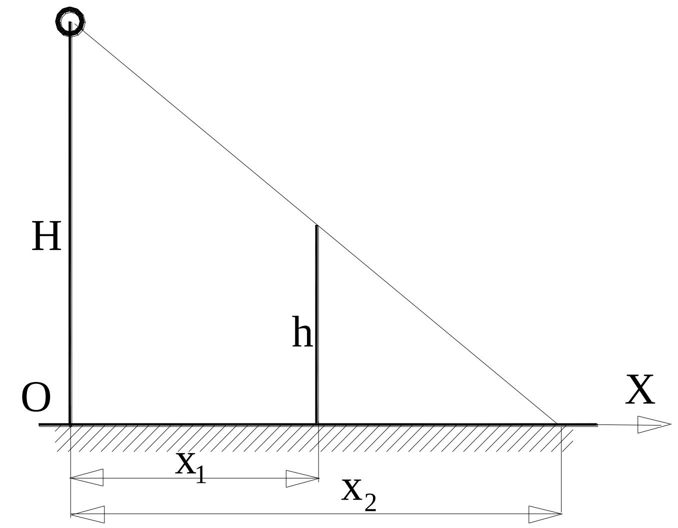


Рис. 2.7

Определить скорость движения конца тени.

Из подобия треугольников

$$x_2 = (H/(H-h))\cdot x_1,$$

а искомая скорость

$$v = (H/(H-h))\cdot u.$$

Пример 4

Определить траекторию, скорость и ускорение средней точки шатуна М (рис. 2.8), если

$$OA=AB=2b,\ \varphi = \omega t.$$

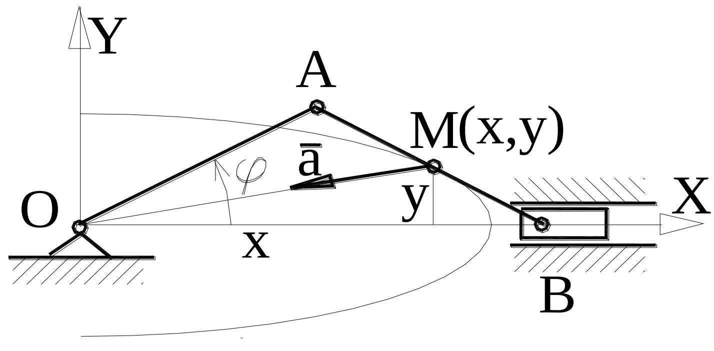


Рис. 2.8

Определим координаты точки М в зависимости от угла φ

$$x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi = 3b\cos\varphi; \quad y = b\sin\varphi,$$

или

$$x = 3b\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t,$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение траектории движения точки, или уравнение эллипса.

Проекции скорости и полная скорость

$$v_x = -3b\omega\sin\omega t, v_y = b\omega\cos\omega t,$$

$$v = b\omega\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = b\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}.$$

Таким образом, скорость меняется от величины bω до 3bω.

Проекции ускорения

$$a_x = -3b\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x,$$
$$a_y = -b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Тогда полное ускорение

$$a = \omega^2 r;$$

причем r отсчитывается от точки О к точке М.

$$\cos\alpha_1 = a_x/a = -x/r; \quad \cos\beta_1 = a_y/a = -y/r.$$

Из этих формул следует, что ускорение направлено вдоль линии ОМ к точке О, центру эллипса.

2.1.6 Оси естественного трехгранника. Числовые значения скорости. Касательное и нормальное ускорение точки

Понятие осей естественного трехгранника используется, когда закон движения задан естественным, или траекторным, способом.

В этом случае проекции скорости и ускорения строятся в осях $M\tau nb$, движущихся вместе с точкой М. Оси этого так называемого естественного трехгранника направлены следующим образом:

- ось τ направлена по касательной к траектории в сторону положительных значений s;

- ось n направлена по нормали к траектории, расположенной в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории;

- ось b направлена по нормали к τ и n таким образом, чтобы в итоге система осей была правой.

n носит название главной нормали, b – бинормали.

В этих осях скорость точки определяется только одной проекцией на ось τ, причем $v_\tau = \pm v$, т.е. проекция скорости может отличаться только знаком. Поэтому далее обозначаем $v_\tau = v$ и называем v числовым (алгебраическим) значением скорости.

Как и ранее,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Знак v совпадает со знаком ds, т.е. при движении в положительном направлении s будет $v > 0$.

Вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ всегда находится в соприкасающейся плоскости $M\tau n$. Следовательно, проекция этого вектора на ось b всегда равна нулю. Остается определить две другие проекции. Обозначим проекции вектора $d\mathbf{v}$ на оси τ и n соответственно через dv_τ и dv_n; тогда

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \bar{a}_n = \frac{dv_n}{dt}.$$

Модуль вектора $d\boldsymbol{v}_n$ (рис. 2.9):

$$dv_n = v d\varphi, \quad d\varphi \text{ – угол смежности.}$$

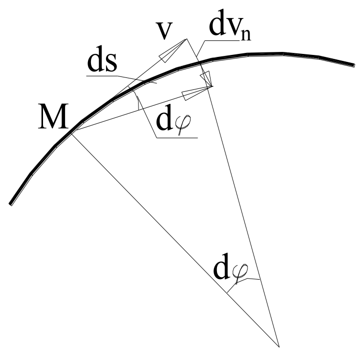


Рис. 2.9

Отношение $d\varphi/ds$ определяет так называемую кривизну траектории

$$d\varphi/ds = k = 1/\rho,$$

где ρ – радиус кривизны. Тогда

$$a_n = v\frac{d\varphi}{dt} = v\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Окончательно

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_b = 0.$$

Если траектория – плоская кривая, то можно ввести понятие угловой скорости

$$\omega = d\varphi/dt, \qquad \text{тогда} \quad a_n = v\cdot\omega \text{ –}$$

нормальное ускорение равно произведению скорости точки на угловую скорость поворота касательной к траектории.

Полное ускорение точки

$$a=\sqrt{a_n{}^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

2.1.7 Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение.

В этом случае радиус кривизны траектории равен бесконечности и

$$\rho=\infty,\ a_{\text{n}}=0 \text{ и } a=a_\tau=dv/dt.$$

Направление движения не меняется, т.к. касательное (оно же и полное) ускорение характеризует изменение только числового значения скорости.

2. Равномерное криволинейное движение

В случае равномерного криволинейного движения скорость по величине не изменяется. В силу криволинейности траектории в этом случае скорость меняет только направление

$$v=\text{const},\ a_\tau=0.$$

Ускорение

$$a_n=v^2/\rho,$$

причем вектор ускорения $\boldsymbol{a}_n$ направлен по нормали к траектории. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Закон равномерного криволинейного движения следует из равенства

$$\int_{s_0}^{s} ds=\int_0^t v\,dt,$$

что дает

$$s = s_0 + vt.$$

Если $s_0 = 0$, то $s = vt$, $v = s/t$.

3. Равномерное прямолинейное движение

В этом случае $a_n = a_\tau = 0$. Это означает, что при равномерном прямолинейном движении (и ни в каких других случаях!) ускорение точки равно нулю.

4. Равнопеременное криволинейное движение

Движение называется равнопеременным, если $a_\tau = \text{const}$.
В этом случае

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2.$$

Сопоставляя направления векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, можно ввести понятия ускоренного (угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ острый) и замедленного (угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ тупой) движения. Если скорость и ускорение имеют одинаковые знаки, то движение равноускоренное, если разные – равнозамедленное.

5. Гармонические колебания

Движение представляет собой простые гармонические колебания, если оно подчиняется уравнению

$$x = A \cos kt,$$

где A, k – постоянные величины, A – амплитуда колебаний.

Т.к. функция косинус периодическая с периодом 2π, то $T = 2\pi/k$ – период колебаний. Скорость и ускорение определяются из закона движения однократным и двойным дифференцированием по времени соответственно:

$$v = -Ak \sin kt, \quad a = -Ak^2 \cos kt. \tag{2.18}$$

Таким образом, при гармонических колебаниях все характеристики движения – координата, скорость и ускорение – меняются по гармоническому закону.

Все полученные выше результаты остаются в силе, если закон колебаний задать в виде

$$x = A \sin kt,$$

только знаки у скорости и ускорения после дифференцирования могут быть другими.

Гармоническое движение (колебания) и все его закономерности могут быть справедливы при криволинейном движении, только вместо координаты x вводится величина s, отсчитываемая вдоль траектории:

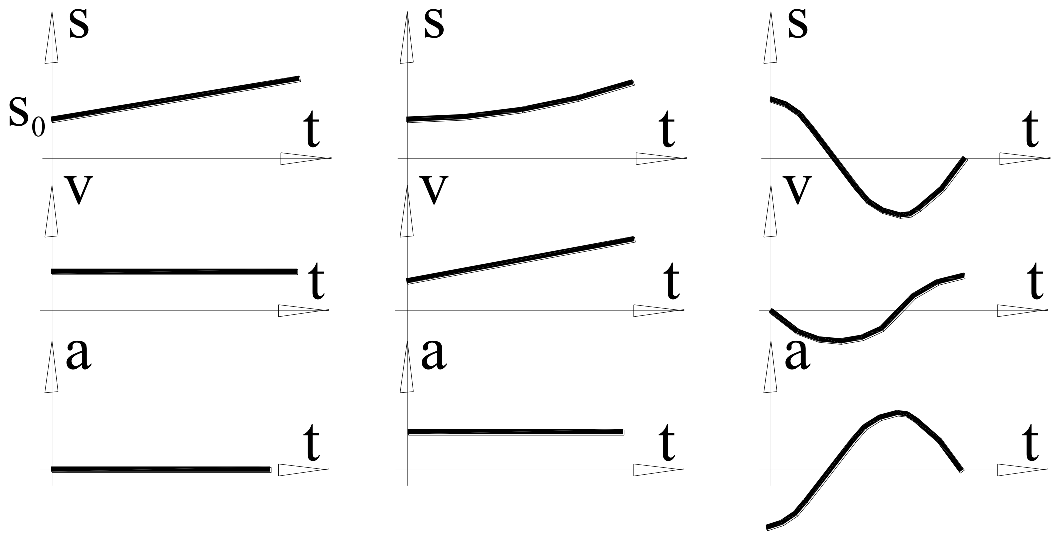
$$s = A \cos kt.$$

В этом случае имеется касательное ускорение, направленное по касательной к траектории, а нормальная составляющая ускорения определяется как

$$a_n = v^2 / \rho.$$

2.1.8 Графики движения, скорости и ускорения точки

Если в декартовых координатах по оси абсцисс откладывать время, а по оси ординат – расстояние s, то графиком движения точки будет кривая $s = f(t)$.



$s = vt$ $s = s_0+v_0+a_\tau t^2/2$ $s = A \cos kt$

а) б) в)

Рис. 2.10

Совершенно аналогично строятся графики скорости v(t) и ускорения полного $a(t)$, касательного $a_\tau(t)$ и нормального $a_n(t)$. На рисунке приведены зависимости положения точки (s) , скорости (v) и ускорения (a) от времени t для трех разных законов движения – равномерного (рис. 2.4, а), равнопеременного (рис. 2.4, б) и гармонического (рис. 2.4, в).

График движения не следует путать с траекторией. Нормальное и полное ускорения зависят от вида траектории (ее кривизны), и при одном и том же законе движения они могут сильно отличаться.

2.1.9 Примеры решения задач

Пример 1

Пусть колебания груза, подвешенного на нити длиной l, описываются законом

$$s = A \sin kt,\ A = \text{const},\ k = \text{const}$$

(начало отсчета в нижней точке траектории). Найти скорость, нормальное и касательное ускорения груза и те точки на траектории, где они обращаются в нуль.

Из заданного закона движения дифференцированием по времени определяются скорость и касательное ускорение, а нормальное ускорение определяется через скорость и длину l нити (она определяет радиус кривизны траектории груза):

$$v = ds/dt = Ak \cos kt,$$
$$a_\tau = dv/dt = -Ak^2 \sin kt,$$
$$a_n = v^2/l = A^2k^2/l \cdot \cos^2 kt.$$

Из этих выражений видно, что скорость обращается в нуль в крайних точках, т.к. там $\sin kt = \pm 1$, следовательно, $\cos kt = 0$. Это же справедливо и для a_n.

Ускорение касательное в этих точках максимально и равно $a_\tau = \pm Ak^2$.

Таким образом, при криволинейном неравномерном движении в отдельных точках траектории a_n, a_τ могут обращаться в нули. При этом касательное ускорение равно нулю, если $dv/dt = 0$, а нормальное – если $v = 0$ или $\rho \to \infty$. Последнее означает, что траектория становится прямой линией или имеет точку перегиба.

Пример 2

Пусть для точки М

$$x = R \cos(\varepsilon t^2/2), \quad y = R \sin(\varepsilon t^2/2).$$

где R имеет размерность длины, ε – углового ускорения, а их величины принимаются постоянными.

Определить движение точки естественным способом.

Определить движение точки естественным способом – значит задать траекторию и закон движения вдоль этой траектории.

Поскольку $x^2 + y^2 = R^2$, то траектория представляет собой окружность радиусом R с центром в начале координат.

При $t = 0$ $x = R$, $y = 0$. Эту точку принимаем за начало отсчета. Тогда $s(0) = 0$.

При $t > 0$ координата y начинает расти, а координата x – убывать, т.е. точка начинает двигаться по окружности против часовой стрелки.

Для определения дуговой координаты s найдем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\dot{x}\,dt)^2 + (\dot{y}\,dt)^2,\ s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

$$\dot{x} = -Rt\varepsilon\sin(\varepsilon t^2/2), \dot{y} = Rt\varepsilon\cos(\varepsilon t^2/2); s = R\varepsilon\int_0^t t\,dt = R\varepsilon t^2/2.$$

$$v = \dot{s} = Rt\varepsilon; a_\tau = R\varepsilon; a_n = v^2/R = r\varepsilon^2 t^2,$$

$$a = R\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^2}, tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = 1/\varepsilon t^2.$$

При $t = 0$ получаем $a = a_\tau = R\varepsilon$ ($a_{\text{n}} = 0$), $\text{tg}\mu = \infty$, $\mu = \pi/2$.

Это значит, что в начальный момент времени ускорение направлено строго по касательной к окружности. С течением времени (при $t \to \infty$) $\text{tg}\mu \to 0$, или $\mu \to 0$, т.е. полное ускорение направлено по радиусу к центру O.

Пример 3

Рассмотрим движение горизонтально брошенного камня со скоростью v_0. Уравнения его движения в координатной форме имеют вид:

$$x = v_0 t, \quad y = gt^2/2. \tag{2.19}$$

здесь g – ускорение свободного падения.

Траектория точки в обычном виде получается после исключения времени из этих соотношений (по существу соотношения (2.19) уже представляют собой уравнения траектории в так называемой параметрической форме). В итоге траекторией оказывается парабола:

$$y = gx^2/2v_0^2.$$

Дифференцируя уравнения движения по времени, получим

$$v_x = \dot{x} = v_0, \quad v_y = \dot{y} = gt, \; v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}. \qquad (2.19^{/})$$

При t = 0 из условия задачи v = v_0, с ростом времени растет и скорость.

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = g.$$

В итоге a = a_y = g – постоянная величина.

Условием равноускоренного движения является a_τ = const, в данном случае эта величина непостоянна:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{gt^2}{v}.$$

Можно t определить через v из последнего соотношения (2.19$^{/}$):

$$t = \frac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{g},$$

тогда

$$a_\tau = \frac{g\sqrt{v^2 - v_0^2}}{v} = g\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2}.$$

Таким образом, a_τ изменяется от нуля до ускорения свободного падения, когда скорость меняется от начального значения до бесконечности.

Радиус кривизны траектории определяется из соотношения

$$a_n = v^2/\rho, \text{ откуда } \rho = v^2/a_n = v^3/v_0 g.$$

Кривизна максимальна (радиус минимален) в начальный момент времени, и со временем с ростом скорости она стремится к нулю.

2.1.10 Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Если движение точки происходит в одной плоскости, оно может быть описано в полярных координатах r, φ (см. рис. 2.11):

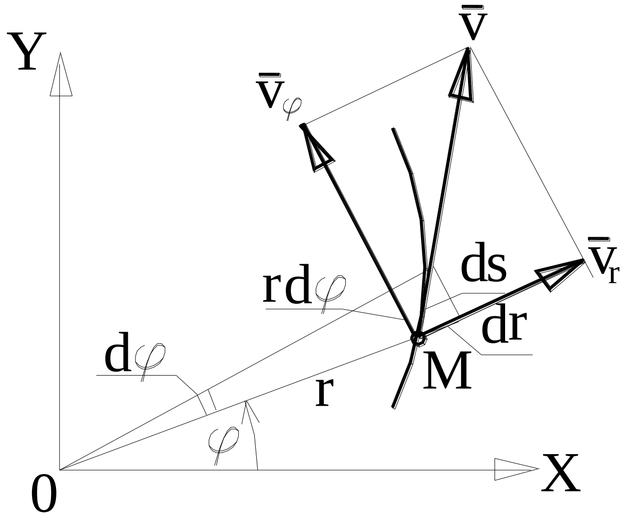


Рис. 2.11

$$r = f_1(t),\ \ \varphi = f_2(t).$$

Составляющие скорости

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}, v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Эти же равенства можно получить чисто формально, сделав замены

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$

тогда

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

По той же схеме после определения $\ddot{x}, \ddot{y}$ можно найти ускорение в виде выражения

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}.$$

В первой скобке под радикалом не что иное, как составляющая ускорения $\boldsymbol{a}_r$ вдоль радиуса r, во второй – составляющая $\boldsymbol{a}_\varphi$, направленная по касательной к окружности радиуса r.

2.2 Поступательное и вращательное движения твердого тела

2.2.1 Поступательное движение

В кинематике абсолютно твердого тела рассматриваются две основные задачи:

- о движении тела как целого;
- об определении характеристик движения отдельных точек.

В первом случае, как отмечалось во введении, для описания движения тела можно использовать модель материальной точки, поскольку, когда говорится о движении тела как целого, имеется ввиду, что пространственная ориентация тела значения не имеет.

Во втором случае используется модель абсолютно твердого тела.

Определение

Поступательным движением твердого тела называется такое, при котором любая прямая, принадлежащая этому телу, при его перемещении остается параллельной своему начальному положению.

Не следует путать вид траектории движения и характер движения – поступательное или вращательное. Так, движение стеклоочистителя («дворника») на большинстве легковых автомашин является вращательным, на больших автобусах и грузовиках, где обычно используется устройство привода в виде параллелограмма – поступательным. Таким образом, при поступательном движении тела в целом траектория любой точки тела может быть криволинейной.

Свойства поступательного движения можно сформулировать в виде следующей теоремы:

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (т.е. совпадающие при наложении) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Пусть точки А и В (рис. 2.12) принадлежат твердому телу.

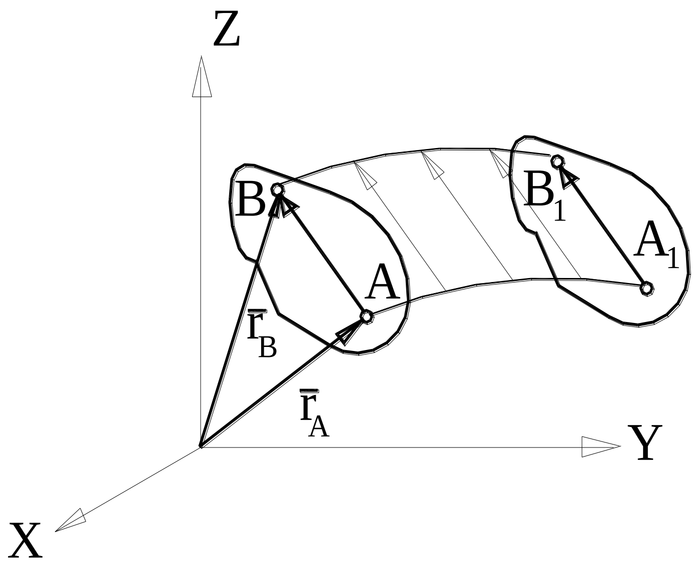


Рис. 2.12

Тогда длина AB постоянна, т.к. тело абсолютно твердое, направление AB постоянно по определению поступательного движения. Это значит, что вектор ***AB*** = $\overline{A}\overline{B}$ является постоянным (его длина и направление не меняются). Тогда радиусы-векторы точек A и B отличаются в любой момент времени на постоянную векторную величину:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + A\overline{B}$$

но $\overline{AB} = \overline{const}$, и все точки траекторий A и B отличаются на постоянный вектор. При соответствующем смещении они совпадут, что и означает одинаковость (равенство) траекторий.

Поскольку первая и вторая производные по времени от постоянной величины (в том числе векторной) равны нулю

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{A}\overline{B}\right) = 0, \frac{d^2}{dt^2}(\overline{A}\overline{B}) = 0,$$

то

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B, \quad \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B.$$

Т.к. точки *A* и *B* взяты произвольно, эти утверждения справедливы для любых точек тела.

Скорости и ускорения точек образуют векторные поля – скоростей и ускорений. Эти поля однородны (т.е. одинаковы по пространству), но в общем случае нестационарны, т.е. со временем могут меняться.

Полученные результаты означают, что для описания поступательного движения твердого тела достаточно знать закон движения его единственной точки. Для любой другой точки все характеристики движения будут такими же.

2.2.2 Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Определение

Вращательным движением АТТ вокруг неподвижной оси называется такое, при котором какие-нибудь две точки тела остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения.

Т.к. тело абсолютно твердое, то все точки на оси вращения неподвижны, а вне оси описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси, и центры этих окружностей расположены на оси.

Если зафиксируем некоторое начальное положение плоскости, проходящей через ось, то угол поворота тела определится текущим положением плоскости (рис. 2.13). На рисунке неподвижная плоскость (слева от оси вращения ZZ) показана более плотной штриховкой, текущее положение плоскости, вращающейся вместе с телом, выделено справа от оси более редкой штриховкой. Угол поворота тела определится положением именно этой подвижной плоскости в виде соотношения, связывающего угол поворота φ и время *t*:

$$\varphi = f(t). \tag{2.20}$$

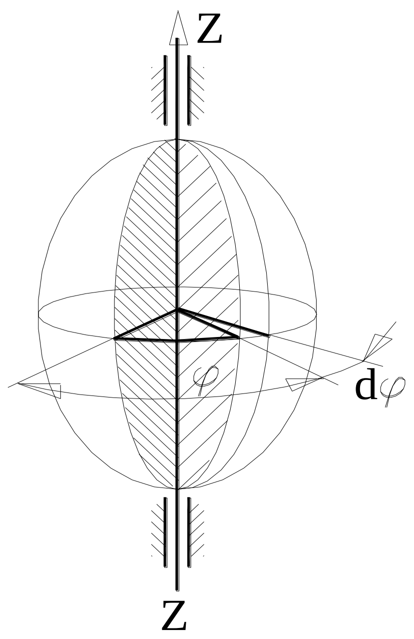


Рис. 2.13

Размерность этой характеристики – это размерность угла. В большинстве случаев наиболее употребительны радианы. Следует помнить, что радиан – безразмерная величина, так как, по определению, один радиан – это такой центральный угол, у которого длина дуги, на которую он опирается, равна радиусу. Измерить угол в радианах означает найти отношение длины дуги к радиусу, а это отношение всегда безразмерно.

$$[\ \varphi\ ] = \text{рад}.$$

Уравнение (2.20) представляет собой закон вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси. Очевидно, что для описания такого движения не нужно привлекать какие-либо еще соотношения. В таких случаях, когда единственное уравнение полностью определяет движение твердого тела, задавая закон изменения одного параметра как функцию времени, говорят, что тело имеет одну степень свободы.

Основными кинематическими характеристиками АТТ при его вращении вокруг неподвижной оси являются угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Векторы угловой скорости $\overline{\omega}$ и углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ направляют вдоль оси вращения в ту или другую сторону, в соответствии с известным правилом буравчика. Поэтому обычно угловая скорость и угловое ускорение рассматриваются как алгебраические величины, которым в зависимости от выбранного положительного направления приписывают знаки плюс или минус.

Определяются угловая скорость и угловое ускорение из закона вращательного движения аналогично обычной линейной скорости и линейному ускорению – дифференцированием соответствующего закона движения (2.20) по времени:

$$\omega = d\varphi/dt, \quad \varepsilon = d^2\varphi/dt^2 = d\omega/dt.$$

Эти величины имеют соответствующие размерности:

$[\omega]$ = рад/с или $с^{-1}$,
$[\varepsilon]$ = рад/$с^2$ или $с^{-2}$.

Угловая скорость часто изображается в виде вектора, направленного вдоль оси по правилу буравчика.

Угловое ускорение тоже всегда направлено вдоль оси. При ускоренном вращении направления векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$ совпадают, при замедленном движении их направления противоположны.

2.2.3 Равномерное и равнопеременное вращения

Если угловая скорость постоянна, вращение тела называется равномерным. Тогда из соотношения

$$d\varphi/\mathrm{d}t = \omega$$

следует

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \varphi/t \quad \text{при} \quad \varphi_0 = 0.$$

В технике часто используют для измерения угловой скорости так называемую внесистемную единицу – обороты в минуту. Для перехода к $с^{-1}$ нужно использовать формулу

$$\omega = 2\pi \cdot n/60 \approx 0.1\, n,$$

где n выражено в об/мин.

Вращение тела называется равнопеременным, если $\varepsilon = \mathrm{const}$.

Тогда

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,\ \varphi = \varphi_0 + \omega t + \varepsilon t^2/2.$$

Аналогия с равноускоренным поступательным движением очевидна: зависимость угловой скорости от углового ускорения такая же, как зависимость линейной скорости от линейного ускорения. То же справедливо и для угла поворота как функции времени – зависимость точно такая же, как пройденного пути от времени в случае поступательного движения тела, с точностью до обозначений.

2.2.4 Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Если точка АТТ находится на расстоянии h от оси вращения, а тело за время dt поворачивается на угол $d\varphi$, то скорость движения этой точки определяется как

$$v = h\, d\varphi/dt = h\omega.$$

Для v обычно используется термин «линейная» или «окружная» скорость точки М. Числовое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости на расстояние от точки до оси вращения.

Линейная скорость v направлена по касательной к окружности, перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и ось вращения. Т.к. угловая скорость одинакова для всех точек тела, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстоянию от них до оси.

Ускорение точек тела получается из формул

$$a_\tau = dv/dt, \quad a_n = v^2 / \rho.$$

Тогда

$$a_\tau = hdv/dt = h\varepsilon, \; a_n = h^2\omega^2/h = h\omega^2.$$

Ускорение $\bar{a}_\tau$ направлено по касательной к окружности, при ускоренном вращении – в сторону движения.

Ускорение $\bar{a}_n$ всегда направлено по радиусу к оси вращения.

Таким образом, касательное и нормальное ускорения всегда ориентированы взаимно перпендикулярно, поэтому величина полного ускорения определяется по формуле:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Отклонение вектора полного ускорения $\bar{a}$ от радиального направления определяется углом

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Т.к. ε и ω одинаковы для всех точек тела, то ускорения всех точек тела пропорциональны h, и угол, составляемый вектором полного ускорения $\bar{a}$ с радиусом, одинаков для всех точек.

Таким образом, зная закон движения одной любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, мы можем определить эти законы для любых точек тела.

Если возьмем начало координат на оси вращения, и обозначим $\bar{r}$ – радиус-вектор, то (рис. 2.14)

$$h = |\bar{r}| \cdot \sin\alpha,$$

тогда

$$|\bar{v}| = \omega h = |\bar{\omega}||\bar{r}|\sin\alpha .$$

С другой стороны, модуль векторного произведения

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{\omega}||\bar{r}|\sin\alpha .$$

Т.к. направления $\bar{v}$ и $\bar{\omega}\times\bar{r}$ совпадают (оба этих вектора перпендикулярны плоскости, проходящей через точку и ось), то

$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}\,, \tag{2.21}$$

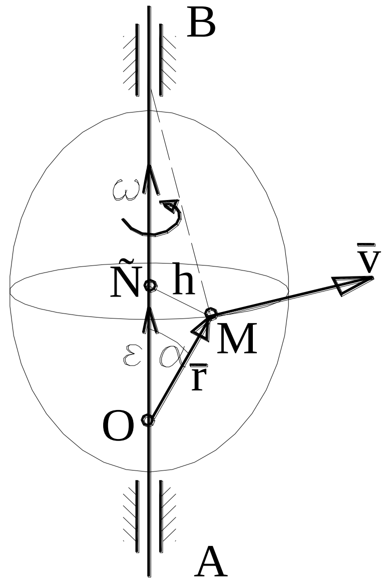


Рис. 2.14

т.е **вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки**. Соотношение (2.21) иногда называют формулой Эйлера.

Для полного ускорения справедливо

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\bar{r}\right)+\left(\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=(\bar{\varepsilon}\times\bar{r})+(\bar{\omega}\times\bar{v}). \tag{2.22}$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой вектор, направленный так же, как $\bar{\omega}\times\bar{r}$, – по касательной к траектории. При этом

$$\left|\bar{\varepsilon}\times\bar{r}\right|\left|\bar{\varepsilon}\right|\left|\bar{r}\right|\sin\alpha=\varepsilon h.$$

Следовательно, первое слагаемое является касательным ускорением $\bar{a}_{\tau}$.

Второе слагаемое $\overline{\omega} \times \overline{v}$ направлено по радиусу (поскольку $\overline{\omega}$ направлено вдоль оси, $\overline{v}$ – по касательной), при этом

$$\left|\overline{\omega} \times \overline{v}\right| = \left|\overline{\omega}\right|\left|\overline{v}\right| \sin 90^0 = \omega v = \omega h^2,,$$

т.к. $v = \omega h$. Таким образом, второе слагаемое представляет собой нормальное ускорение $\overline{a}_n$.

Пример 1

Вал вращается со скоростью 90 об/мин и после выключения вращается равнозамедленно, останавливаясь через $t_1 = 30$ с. Определить, сколько оборотов сделал вал до полной остановки.

Принимаем $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2; \qquad \text{(a)}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad \text{(b)}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость, в нашем случае это $2\pi n/60$. Конечная скорость равна нулю. Тогда из формулы (b) находим

$$0 = 2\pi n/60 + \varepsilon t_1; \quad \varepsilon = -\pi n/(30 t_1).$$

Если K – число оборотов до остановки, тогда $\varphi = 2\pi K$, и подстановка этого значения φ в (a) дает

$$2\pi K = (\pi n/30 t_1)\cdot t_1 - 1/2\cdot(\pi n/30 t_1)\cdot t_1^2 = \pi n/60\cdot t_1;$$

Откуда

$$K = n/120\cdot t_1 = n/4 = 22.5 \text{ (оборота)}.$$

Пример 2

Маховик радиусом 0.7 м равномерно вращается со скоростью 100 об/мин. Найти скорость и ускорение точки на ободе.

$$v = R\omega = 2\pi n/60 \cdot R \approx 7 \text{ м/с}.$$

Т.к. $\omega = \text{const}$, то

$$a_\tau = 0,\ a_n = a = v^2 / R \approx 70 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение направлено по радиусу к оси вращения.

2.3 Плоскопараллельное движение твердого тела

3.3.1 Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным, или **плоским, движением** называется такое, при котором все точки абсолютно твердого тела (АТТ) перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Частным случаем плоскопараллельного движения является вращение АТТ вокруг оси.

Если тело совершает плоское движение около плоскости P, то все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной P, движутся одинаково (рис. 2.15).

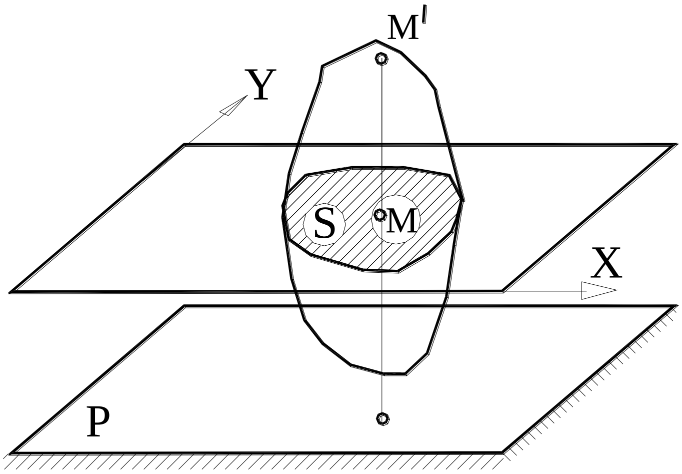


Рис. 2.15

Поэтому для описания движения тела достаточно изучить движение некоторого его сечения S. Далее рассматривается движение S в плоскости Oxy.

Такое движение будет описано, если известно положение некоторого отрезка AB в сечении S (рис. 2.16). Для этого достаточно знать, например, x_A, y_A и угол φ между отрезком AB и осью Ox. В этом случае точка A называется **полюсом**.

Таким образом, плоское движение задано, если известны зависимости:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \qquad (2.23)$$

Уравнения (2.23) – уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости. Одновременно это и уравнения плоскопараллельного движения твердого тела.

Как видим, для описания этого вида движения задаются три уравнения, определяющие изменение во времени трех параметров – две координаты полюса и один угол вращения. Это означает, что при таком движении тело имеет три степени свободы.

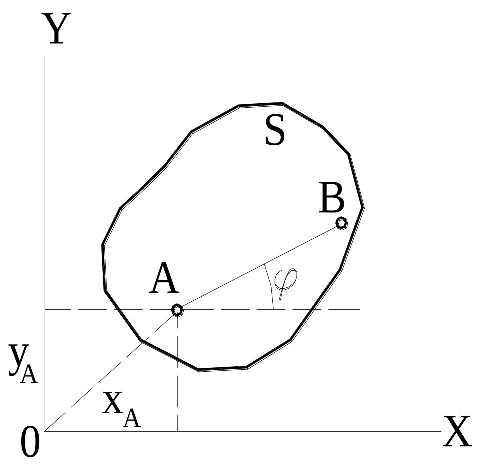


Рис. 2.16

Если φ = const, то (2.23) представляют собой уравнения поступательного движения АТТ.

Если x_A = const, y_A = const, то (2.23) определяет вращение плоской фигуры вокруг точки А (или вращение АТТ вокруг оси, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости этой плоской фигуры).

Таким образом, в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости слагается из поступательного движения полюса и вращения фигуры вокруг этого полюса.

Характеристиками плоского движения являются: *скорость и ускорение поступательного движения* полюса А и *угловые скорость и ускорение вращательного движения* вокруг этого полюса.

Все эти величины и определяются из уравнений движения (2.23).

В качестве полюса можно выбрать любую точку фигуры. При этом характеристики поступательного движения в общем случае изменятся (только в том случае, когда тело движется поступательно, изменение полюса не приведет к изменению уравнения его движения). Что касается вращательного движения, оно не меняется. Это усматривается из следующего рассуждения: если из точки C (нового полюса) провести прямую CD || AB, то эти прямые всегда параллельны. Но это и означает, что вращательное движение не зависит от выбора полюса.

2.3.2 Определение траекторий точек плоской фигуры

Рассмотрим точку M плоской фигуры, так что угол MAB = α, а расстояние AM = b (рис. 2.17).

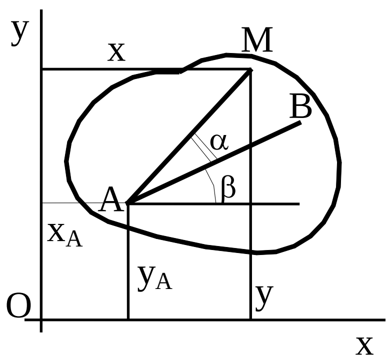


Рис. 2.17

Для точки M:

$$x_M = x_A + b\cos(\varphi+\alpha), \quad y_M = y_A + b\sin(\varphi+\alpha). \qquad (2.24)$$

В этих уравнениях величины x_A, y_A, φ известны из (2.23). По существу, зависимости (2.24) и есть уравнение траектории в параметрическом виде. Если исключим t, получим более привычную форму: $y = y(x)$.

Пример. AB = d, AM = b (рис. 2.18).

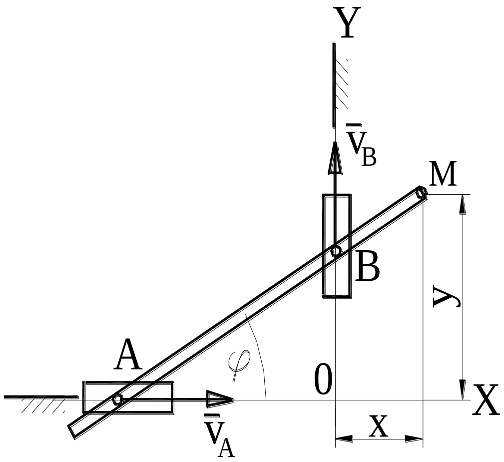


Рис. 2.18

Если положение линейки определяется углом φ при перемещении A и B вдоль осей, то для точки M:

$$x = (b - d)\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Исключая отсюда φ, получим:

$\dfrac{x^2}{(b-d)^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 -$ уравнение эллипса с полуосями $b - d$ и b и с центром в точке O.

Таким образом, меняя d и b, можно с помощью этого прибора строить эллипсы с различными полуосями. Прибор называется эллипсографом.

2.3.3 Скорости точек плоской фигуры

Положение точки M определяется радиус-вектором:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{AM}.$$

Тогда скорость

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AM}}{dt}.$$

Справа первое слагаемое – это скорость полюса $\bar{v}_A$, второе, в силу того, что AM=const, есть скорость точки M за счет вращения вокруг полюса A:

$$v_{MA} = \omega \cdot MA,$$

причем $\bar{v}_{MA} \perp MA;$ ω – угловая скорость плоской фигуры.

Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры геометрически складывается из скорости полюса и скорости за счет вращения этой точки вокруг полюса.

ПРИМЕР

Определить скорость точки M на ободе колеса, катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения, если известна скорость оси колеса $\boldsymbol{v}_C$ (рис. 2.19).

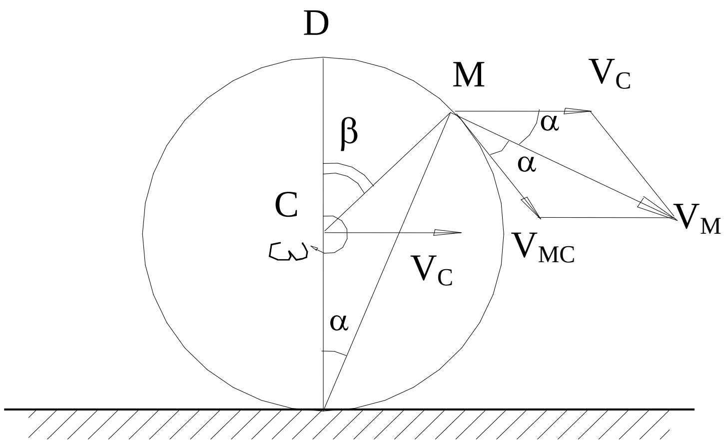


Рис. 2.19

Скорость произвольной точки M, как отмечалось выше, складывается из скорости полюса и скорости точки в ее движении вокруг полюса. В качестве полюса в данном случае логично взять точку C, закон движения которой по условию известен. Тогда

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{MC};$$

$$v_{MC} = v_{KC} = \omega \cdot R = v_C/R \cdot R = v_C.$$

Величина угловой скорости ω определена из следующих соображений. Поскольку точка касания колеса с рельсом неподвижна, то, приняв ее за полюс, движение точки С можно рассматривать как вращение ее вокруг точки касания. Но линейная скорость точки С известна, расстояние от точки С до точки касания равно радиусу R, поэтому $\omega = v_C/R$.

Угол внутри ромба $2\alpha = \beta$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). С другой стороны, при точке К угол тоже равен $\alpha = \beta/2$ – он вписан в окружность и опирается на ту же дугу, что и β.

В связи с этим $v_M = 2v_C \cos\alpha$.

2.3.4 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Теорема

Проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

С физической точки зрения это очевидно: если такое требование не выполняется, то расстояние между точками будет меняться, а для АТТ это невозможно.

Математически:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Проектируя это равенство на ось, направленную вдоль AB, учитываем при этом, что $\bar{v}_{BA} \perp AB$ (рис. 2.20),тогда

$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$, где α, β – углы между векторами $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ и осью.

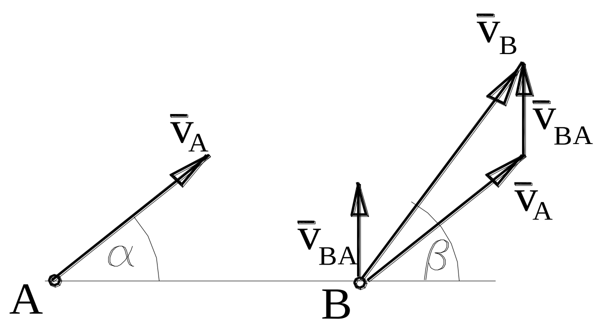


Рис. 2.20

Пример

Найти зависимость между скоростями точек эллипсографа.

Поскольку направления движения точек A и B известны, проектируем векторы скоростей $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ на AB.

По теореме:

$$v_A \cos\varphi = v_B \cos(90^o - \varphi); \qquad v_A = v_B \operatorname{tg}\varphi.$$

2.3.5 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Центроиды

Мгновенным центром скоростей (МЦС) плоской фигуры называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

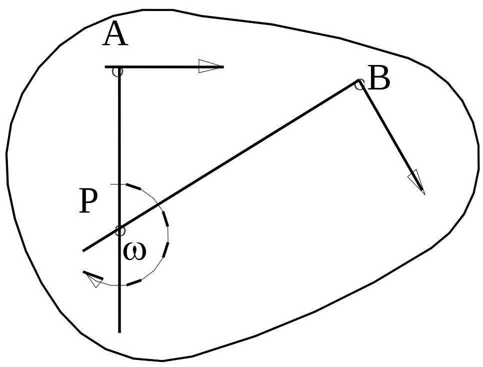


Рис. 2.21

При непоступательном движении тела такая точка существует всегда. Пусть две точки тела A и B имеют непараллельные скорости (рис. 2.21).

Тогда мгновенным центром скоростей будет точка P, поскольку $v_P = 0$. Точка P лежит на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек A и B, проведенных через эти точки. Если вектор $v_P \neq 0$, то он был бы одновременно перпендикулярен АР и ВР, но эти отрезки не могут быть параллельными между собой, поскольку они перпендикулярны непараллельным по условию векторам.

Никакая другая точка в это время не может иметь скорость, равную нулю – это следует из теоремы о проекциях скоростей.

Найдем с помощью МЦС скорость точки А, принимая за полюс точку Р:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{AP} = \bar{v}_{AP}, \quad \text{и} \quad |\bar{v}_{AP}| = \omega \cdot AP = |\bar{v}_A|.$$

Аналогично скорость точки В:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{v}_{BP} = \bar{v}_{BP}, \text{ и } |\bar{v}_{BP}| = \omega \cdot BP = |\bar{v}_B|,$$

т.е. скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Выводы:

1. Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей двух точек тела (плоской фигуры); мгновенный центр находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из этих точек к направлениям их скоростей (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать скорость (модуль и направление) какой-либо точки А и направление скорости другой точки В.

Мгновенный центр скоростей определяется, как это уже показано выше; по расстоянию АР определяется угловая скорость ω. Для любой точки М скорость ее определяется как $\omega \cdot PM$.

3. Угловая скорость плоской фигуры в каждый момент времени равна отношению скорости какой-либо точки А к расстоянию АР до мгновенного центра скоростей Р:

$$\omega = v_A / AP.$$

Для угловой скорости ω можно найти и другое выражение. Так, скорость точки В относительно А определяется как:

$$v_{BA} = |v_B - v_A|, \text{ и } v_{BA} = \omega \cdot BA,$$

отсюда $$\omega = \frac{|v_B - v_A|}{AB} = \frac{|v_B + (-v_A)|}{AB}. \qquad (2.24')$$

Если $v_A = 0$ (т.е. точка А – мгновенный центр скоростей), то получаем тот же результат, что и выше.

Частные случаи:

1. Качение тела без скольжения по неподвижно поверхности другого тела (например, колеса по неподвижному рельсу). В точке касания находится мгновенный центр скоростей.

2. Если скорости точек А и В параллельны, а вектор $\bar{v}_A$ не перпендикулярен АВ, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности, а скорости всех точек параллельны $\bar{v}_A$ (рис.2.22,а). В этом случае говорят о мгновенном поступательном движении тела и поступательном распределении скоростей (угловая скорость в этот момент равна нулю).

3. Если скорости двух точек параллельны $\bar{v}_A || \bar{v}_B$, а $AB \perp \bar{v}_A$, то мгновенный центр скоростей строится в соответствии с рисунком 2.22, b. В этом случае нужно знать не только направления, но и величины скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$.

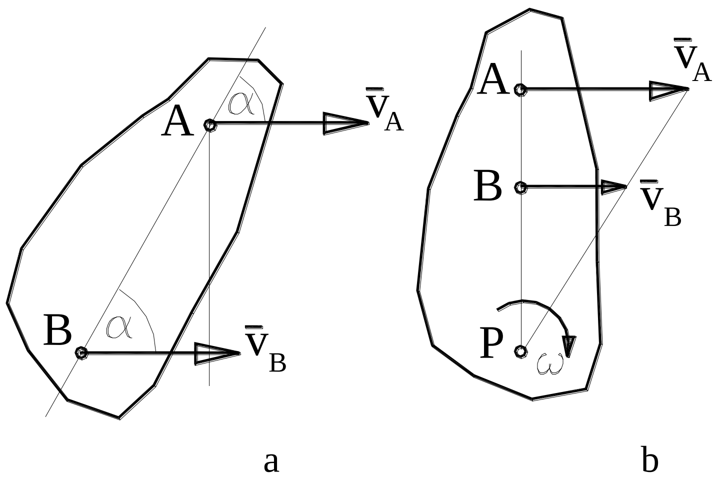


Рис. 2.22

4. Если для точки А известен вектор скорости $\bar{v}_A$ и угловая скорость ω, то положение мгновенного центра Р определяется по выражению:

$$BP = \omega_A/\omega.$$

В общем случае со временем положение мгновенного центра скоростей Р меняется.

ЦЕНТРОИДЫ

Как показано выше, плоское движение тела в каждый конкретный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенного центра скоростей (или мгновенного центра вращения). Этот центр, или точка на плоскости, в общем случае все время меняет свое положение. Например, качение колеса по рельсу можно представить как поступательное перемещение оси (полюса) и вращение вокруг оси, или же как серию вращений вокруг последовательно меняющих свое положения точек касания колеса с рельсом.

Мгновенный центр вращения меняет свое положение как на неподвижной (отсчетной) плоскости, так и на подвижной плоскости, связанной с движущимся телом. Геометрическое место мгновенных центров вращения, т.е. их положений, на неподвижной плоскости называется неподвижной центроидой. Соответственно геометрическое место этих центров на подвижной плоскости называется подвижной центроидой. В примере с колесом неподвижная центроида – это прямая линия, обозначающая поверхность рельса, а подвижная центроида – окружность колеса. В каждый момент времени обе центроиды касаются друг друга, имея единственную общую точку. Пересекаться центроиды не могут – иначе это означало бы, что в данный момент времени существует два центра вращения, что невозможно.

Таким образом, при плоском движении тела происходит качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной, поскольку положение мгновенного центра вращений меняется непрерывно. Предположим, что мы обе центроиды осуществили в наглядном материальном виде, тогда плоское движение тела можно получить, скрепив подвижную центроиду с телом и катя эту центроиду без скольжения по неподвижной.

Пример 1

Найти скорость точки M обода колеса с помощью мгновенного центра скоростей.

Точка касания и есть МЦС. Вектор скорости точки M проходит через точку D, т.к. $\bar{v}_M \perp MP$, а вписанный прямой угол должен опираться на диаметр DP.

Из пропорции

$$\frac{v_M}{PM} = \frac{v_C}{R}$$

с учетом того, что PM = 2R cosα, следует:

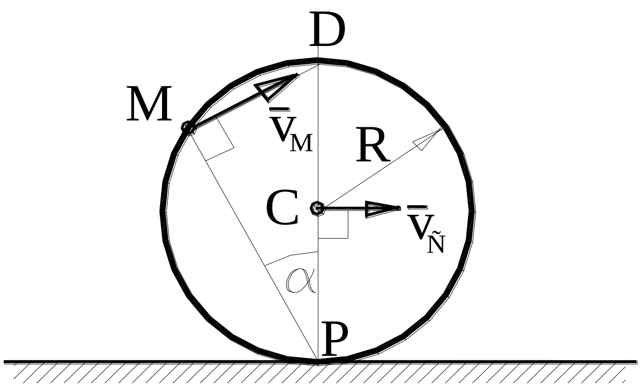


Рис. 2.23

$v_M = 2v_C \cos\alpha$.

Очевидно, что $v_D = 2v_C$ – скорость именно этой точки обода максимальна.

Пример 2

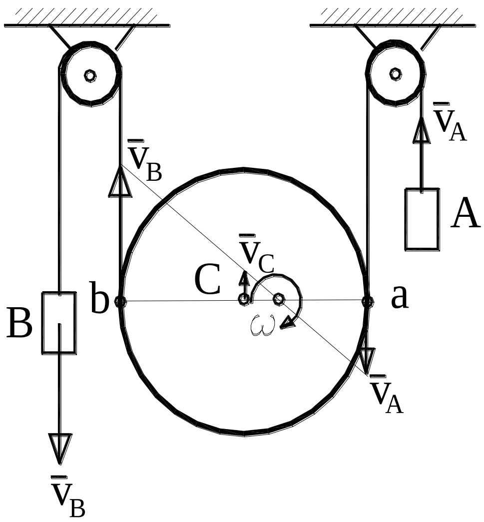


Рис. 2.24

Груз B (рис. 2.24) через блок опускается со скоростью v_B, груз A поднимается со скоростью v_A. Найти скорость центра C подвижного блока радиусом r и его угловую скорость. Ветви нити вертикальны, нить по блоку не проскальзывает.

Поскольку нить не проскальзывает, точки блока a, b движутся со скоростями, равными по величине скоростям грузов. Положение мгновенного центра вращения находится по аналогии со случаем, показанным на рис. 2.22, b. Для нахождения угловой скорости используем формулу (2.24$'$) с учетом направлений скоростей точек A и B:

$$\omega = \left|\bar{v}_B - \bar{v}_A\right| / 2r = (v_B + v_A) / 2r.$$

Скорость точки C равна средней арифметической скоростей точек A и B, что с учетом направлений скоростей дает

$$v_C = (v_B - v_A)/2.$$

Если $v_B > v_A$, то точка C поднимается; при $v_B < v_A$ точка C опускается, при $v_B = v_A$ остается неподвижной.

Решение имеет смысл и в том случае, когда оба груза одновременно поднимаются или опускаются.

2.3.6 Ускорения точек плоской фигуры

Как и скорость, ускорение любой точки плоской фигуры складывается из ускорений за счет поступательного и вращательного движений фигуры.

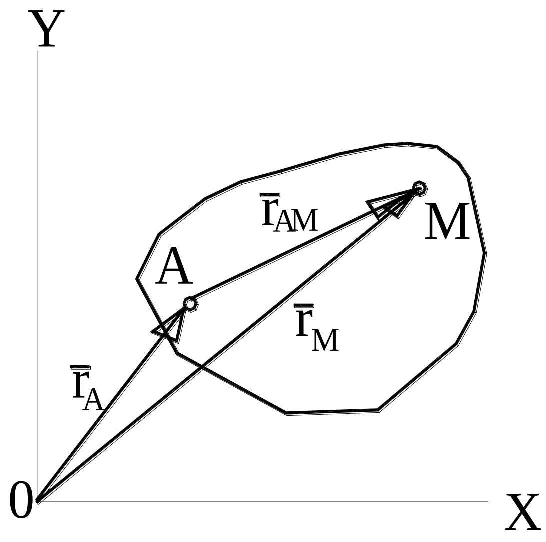


Рис. 2.25

Для точки M ее радиус-вектор (рис. 2.25)

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_{MA}.$$

Ускорение:

$$\bar{a}_M = \frac{d^2\bar{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}_{MA}}{dt^2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}.$$

Первое слагаемое справа – ускорение полюса A, второе – ускорение точки M при вращении плоской фигуры вокруг полюса.

Второе слагаемое определяется так же, как в п.2.2.4 при анализе вращения тела вокруг неподвижной оси:

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где ω и ε – угловая скорость и угловое ускорение фигуры, μ – угол между вектором $\bar{a}_{MA}$ и МА.

Таким образом, ускорение любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из ускорения точки А (полюса) и ускорения, которое получает точка М при вращении фигуры вокруг этого полюса.

Проводить такое построение неудобно. Поэтому обычно заменяют ускорение $\bar{a}_{MA}$ его касательной и нормальной составляющими, так что

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n};$$

$\bar{a}_{MA}^{\tau}$ (вектор) всегда направлен в сторону вращения при ускоренном вращении. Нормальная составляющая – в сторону полюса А.

Численно:

$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon, \quad a_{MA}^{n} = MA \cdot \omega^2.$$

Ускорение самого полюса А можно представить как геометрическую сумму касательной и нормальной составляющих, и тогда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}.$$

При анализе этого выражения нужно иметь в виду, что верхние индексы у слагаемых в правой части, формально обозначающие касательные и нормальные составляющие ускорения, у первой пары слагаемых и у второй **разные**. У первой пары эти составляющие связаны с видом траектории точки А (полюса), у второй - с ускорением точки М при ее вращательном движении вокруг полюса.

Если траектория движения точки M известна, то и в левой части последней формулы можно разложить ускорение на касательную и нормальную составляющие:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_M^{\tau} + \bar{a}_M^{n}.$$

Пример 1

Центр колеса перемещается со скоростью v = 1 м/с, ускорением a = 2 м/с^2, радиус колеса R = 0.2 м (рис. 2.26).

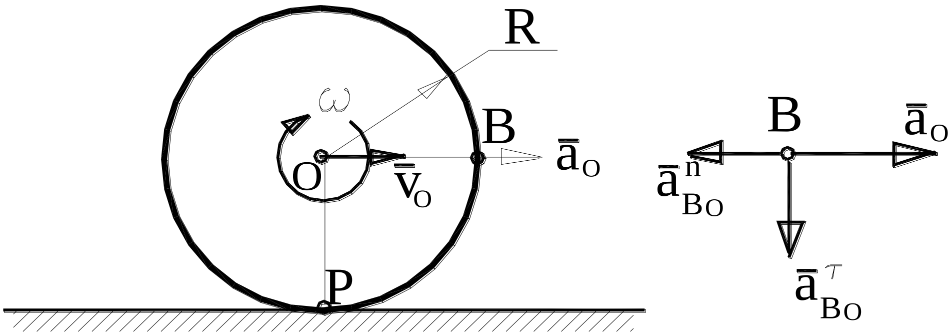


Рис. 2.26

Найти ускорения точек B и P.

Принимаем центр колеса O за полюс – для него известны скорость и ускорение. Мгновенная угловая скорость относительно P (мгновенный центр скоростей) ω = v/R, и поскольку R=const, то угловое ускорение

$$\varepsilon = dv/Rdt = a/R.$$

Это справедливо, поскольку точка O – центр колеса – движется прямолинейно.

Для точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_O + \bar{a}_{BO}^{\tau} + \bar{a}_{BO}^{n}. \qquad \text{(a)}$$

Величина первого слагаемого известна: a_O = 2 м/с;

второго a_{BO}^{τ} = R·ε = a_O = 2 м/с;

третьего a_{BO}^{n} = BO·ω^2 = R·ω^2 = v_O^2 /R = 5м/с^2.

Определимся теперь с направлениями этих составляющих ускорения (см. схему справа на рис. 2.26):

a_0 направлено вправо – из условия.

Второе слагаемое направлено перпендикулярно радиусу BO (вниз на рис. 2.26).

Третье – влево, к центру колеса.

В итоге величина ускорения:

$$a_B = \sqrt{(a_0 - a_{BO}^{n})^2 + (a_{BO}^{\tau})^2} = \sqrt{9+4} \approx 3.6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для определения ускорения точки P можно записать векторное равенство, аналогичное (а), после анализа которого найдем

$$a_P = a_P{}^n = v^2/R = 5 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

и это ускорение направлено от точки P к точке O.

Пример 2

По неподвижной шестерне радиусом r_1 = 0.3 м катится без проскальзывания шестерня 2 радиусом r_2 = 0.2 м с помощью кривошипа OA (рис. 2.27). Кривошип вращается вокруг точки O против хода часовой стрелки с угловой скоростью ω = 1 с$^{-1}$ и угловым ускорением ε = –4 с$^{-2}$. Найти в данный момент времени ускорение точки D.

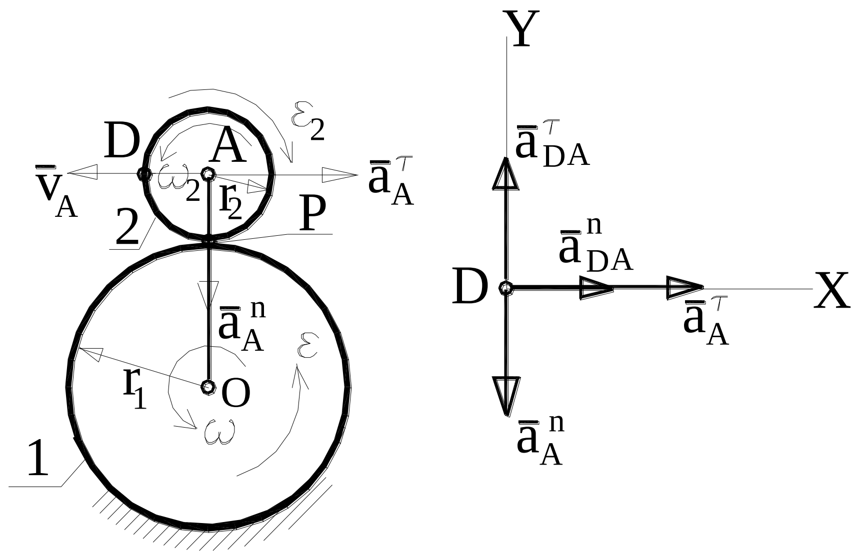


Рис. 2.27

Поскольку для точки A скорость и ускорение ее легко определяются, ее принимаем за полюс. Тогда

$$v_A = (r_1 + r_2)\cdot\omega = 0.5 \text{ м/с};$$

$$a_A^{\tau} = (r_1 + r_2) * \varepsilon = -2 м/с^2;\ a_A^n = (r_1 + r_2) * \omega^2 = 0.5 м/с^2.$$

Поскольку угловое ускорение кривошипа отрицательно при положительном значении угловой скорости, то его вращение замедленное. Так как точка касания P является мгновенным центром скоростей для шестерни 2, то

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = 2.5 c^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{2}{r_2}\frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A^{\tau}}{r_2} = -10 c^{-2}.$$

Поскольку знаки ω_2 и ε_2 разные, вращение шестерни 2 замедленное.

Для точки D (схема показано справа на рис. 2.27):

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{DA}^{\tau} + \bar{a}_{DA}^n, \qquad DA = r_2;$$

$$a_{DA}^{\tau} = r_2\varepsilon_2 = -2 м/с^2;\ a_{DA}^n = r_2\omega_2^2 = 1.25 м/с^2.$$

Проецируя выражение для $\bar{a}_D$ на ось x, находим:

$$a_{Dx} = \left|a_A^\tau\right| + a_{DA}^n = \left|-2\right| + 1.25 = 3.25 м/с^2.$$

Проецируя его на ось y, получим:

$$\left|a_{Dy}\right| = \left|a_{DA}^\tau\right| - a_A^n = 2 - 0.5 = 1.5\ \ м/с^2.$$

Полное ускорение по величине равно:

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} = \sqrt{3.25^2 + 1.5^2} \approx 3.58$$ (м/с)

2.4 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела

2.4.1 Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

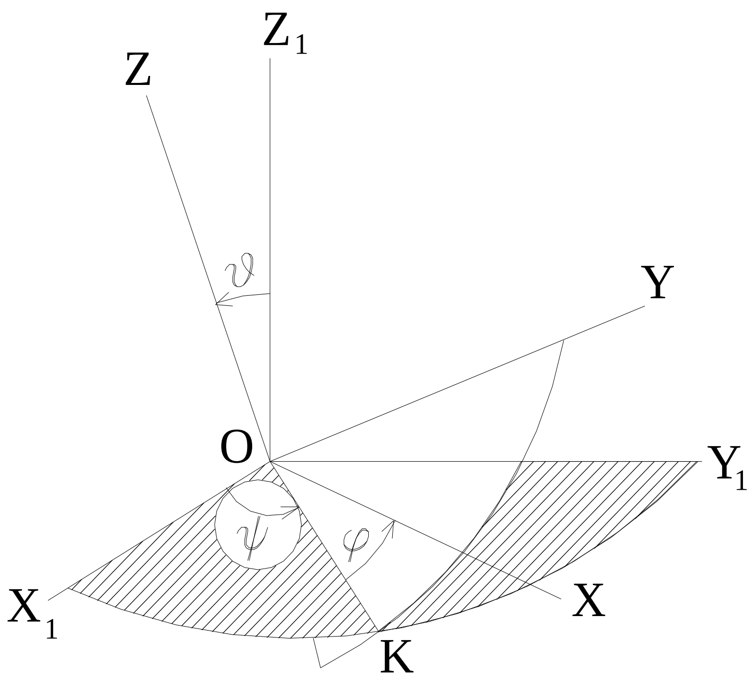


Рис. 2.28

Для определения параметров, характеризующих положение твердого тела, вводим трехгранник Oxyz, жестко связанный с телом (рис. 2.28). Точка O – неподвижная, и она одновременно является началом системы неподвижных координат $Ox_1y_1z_1$.

Линия OK пересечения плоскостей Oxy и Ox_1y_1 – так называемая линия узлов.

Положение тела полностью определяется углами:

$$\varphi = KOX, \;\; \psi = X_1OK, \;\; \vartheta = Z_1OZ.$$

Это углы Эйлера:

φ – угол собственного вращения,

ψ – угол прецессии,

ϑ – угол нутации.

Положение тела будет полностью определено, если известны зависимости

$$\varphi = f_1(t),\ \psi = f_2(t),\ \vartheta = f_3(t). \qquad (2.15)$$

Эти зависимости и являются уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Таким образом, тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, имеет три степени свободы.

Изменение угла φ приводит во вращение тело вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью

$$\omega_1 = d\varphi/dt.$$

При изменении угла ψ происходит вращение вокруг оси Oz_1; угловая скорость этого вращения

$$\omega_2 = d\psi/dt.$$

При изменении ϑ происходит вращение вокруг линии узлов OK (нутация); угловая скорость этого вращения

$$\omega_3 = d\vartheta/dt.$$

Векторы угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ направлены соответственно вдоль осей Oz, Oz_1, OK (рис. 2.29). В общем случае все три угла со временем меняются, поэтому тело вращается с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, равной геометрической сумме

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3.$$

Поскольку составляющие справа изменяются, то и слева величина угловой скорости изменяется, и поэтому она носит название мгновенной угловой скорости тела, а соответствующая ось OP, вдоль которой направлен ее вектор, – мгновенной оси вращения. Она в общем случае меняет как направление в пространстве, так и положение внутри тела, проходя все время через неподвижную точку O.

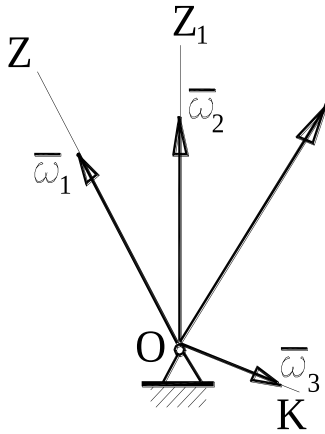


Рис. 2.29

В итоге движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку.

Вектор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt,$$

характеризующий изменение угловой скорости по направлению и по величине, называется мгновенным угловым ускорением.

Вектор угловой скорости со временем меняется, и его конец описывает в пространстве некоторую траекторию – годограф (рис. 2.30).

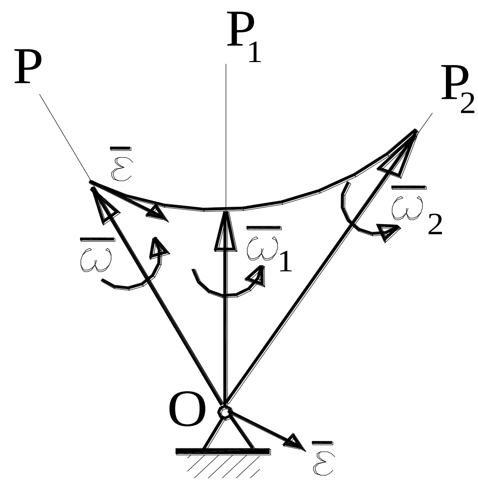


Рис. 2.30

Скорость движения конца вектора **ω** вдоль этой траектории и есть угловое ускорение **ε**. Оно направлено вдоль касательной к этой траектории. Таким образом, в отличие от вращения тела вокруг неподвижной оси, направления угловой скорости **ω** и углового ускорения **ε** не совпадают.

2.4.2 Кинематические уравнения Эйлера

Приведем без вывода уравнения, связывающие проекции вектора угловой скорости тела на подвижные оси и углы Эйлера. Точка сверху над переменной, как и ранее, означает дифференцирование по времени.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Проекции вектора угловой скорости на неподвижные оси $Ox_1y_1z_1$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \omega_{x1} &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi, \\ \omega_{y1} &= -\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi + \dot{\vartheta}\sin\psi, \\ \omega_{z1} &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.4.3 Скорости и ускорения точек тела

В данный момент тело поворачивается вокруг мгновенной оси вращения ОР со скоростью **ω** (рис. 2.31). Тогда для точки М с радиусом-вектором ***r*** относительно точки О

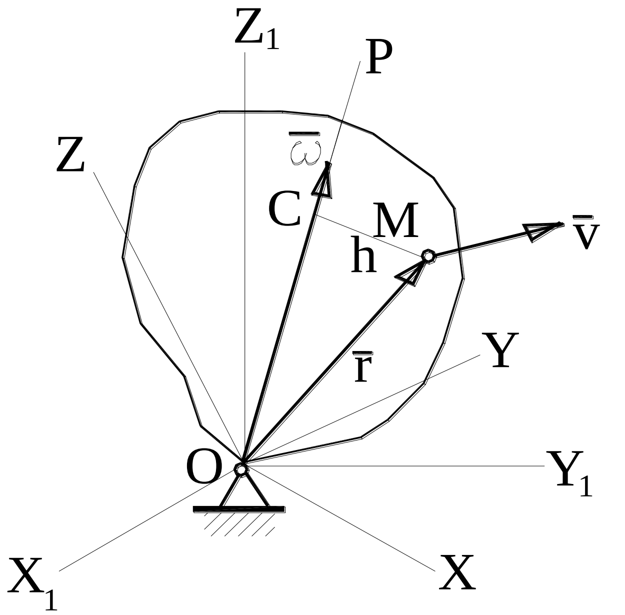


Рис. 2.31

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{2.28}$$

Направлен вектор $\boldsymbol{v}$ перпендикулярно плоскости МОР (проходящей через точку М и ось ОР) в сторону поворота тела. Численно

$$v = \omega h,$$

где h – расстояние от точки М до мгновенной оси.

Геометрически скорость любой точки тела М в момент t можно найти, зная скорость $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ какой-либо точки А и направление скорости $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$ любой другой точки В.

Так, зная $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$, можно построить плоскость 1, перпендикулярную этой скорости – в этой плоскости должна быть ось мгновенная вращения.

С другой стороны, плоскость 2, перпендикулярная скорости $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$, тоже должна содержать эту же ось. Линия пересечения плоскостей и даст мгновенную ось вращения. Но тогда $\omega = v_A/h$ – мгновенная угловая скорость, а для точки М ее скорость $v_M = \omega \cdot d$, где d – расстояние от М до оси. Вектор v_{M} перпендикулярен плоскости МОР и направлен в сторону движения точки М (рис. 2.32).

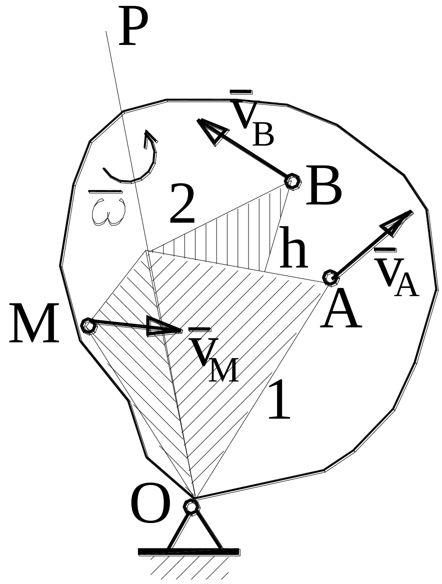


Рис. 2.32

В частном случае, если скорость какой-то точки М в данный момент равна нулю, то мгновенная ось вращения заведомо проходит через нее и точку О и положение этой оси определяется сразу.

В векторной алгебре существует форма записи векторного произведения:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Если при этом еще учесть, что

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k},$$

то

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x. \tag{2.29}$$

Это так называемые формулы Эйлера. Они получаются одна из другой циклической заменой индексов.

Разумеется, эти формулы справедливы и для случая вращения тела вокруг неподвижной оси. Поскольку при этом $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$, то $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$.

Для определения ускорения точки М дифференцируем (2.28) по времени:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}) = (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) + (\bar{\omega} \times \bar{v}). \tag{2.30}$$

Справа первое слагаемое обозначим $\bar{a}_1$ – вращательное ускорение, второе обозначим $\bar{a}_2$ – носит название осестремительного ускорения точки М.

Вектор $\bar{a}_1$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через М и вектор $\bar{\varepsilon}$ (рис. 2.33), при этом по модулю

$$a_1 = r \cdot \varepsilon \cdot \sin\beta = \varepsilon \cdot h_1.$$

Вектор $\bar{a}_2$ перпендикулярен одновременно векторам **v** и **ω**, направлен вдоль МС, при этом $a_2 = \omega \cdot v \cdot \sin 90 = \omega^2 h$, т.к. $v = \omega \cdot h$.

В отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, здесь a_1 не является вектором касательного ускорения точки М (по касательной направлен вектор $v = \omega \times r$), следовательно, и a_2 не есть нормальное ускорение точки М.

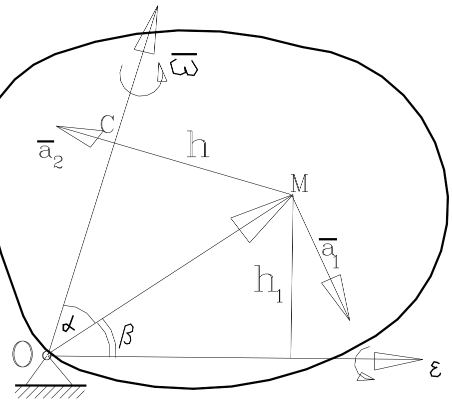


Рис. 2.33

Пример

Найти скорости точек B и C конического катка, бегущего по конической неподвижной поверхности со скоростью центра v_A (рис. 2.18).

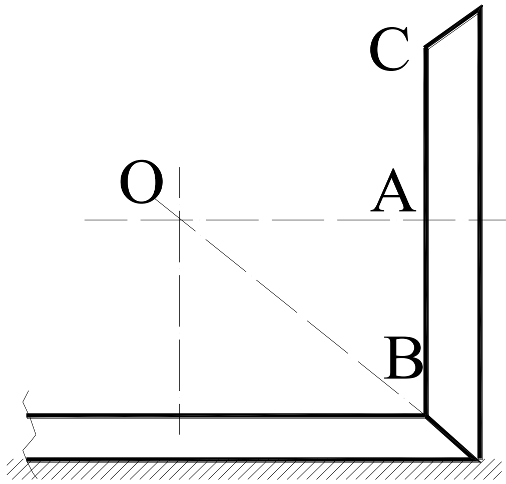


Рис. 2.34

Поскольку точка O неподвижна, а качение по поверхности конического катка идет без скольжения, то скорости точек, расположенных на линии OB, равны нулю, и линия OB является мгновенной осью вращения. Тогда

$$v_A = \omega h_1,$$

где ω – угловая скорость катка при его повороте вокруг оси ОВ; h_1 – расстояние от точки А до оси ОВ. Эта скорость определяется как

$$\omega = v_A/h_1.$$

Поскольку расстояние от точки С до оси вращения вдвое больше, чем от точки А, то $v_C = 2v_A$. Поскольку точка В находится на мгновенной оси вращения, то $v_B = 0$.

2.4.4 Общий случай движения свободного твердого тела

Движение АТТ полностью определится, если задать движение какой-либо его точки А, принятой за полюс, и положение «вмороженной в тело» системы координат:

$$\begin{gathered} x_{1A} = f_1(t),\; y_{1A} = f_2(t),\; z_{1A} = f_3(t), \\ \varphi = f_4(t),\quad \psi = f_5(t),\quad \vartheta = f_6(t). \end{gathered} \tag{2.31}$$

Первые три соотношения определяют движение полюса, вторые три – вращение тела вокруг этого полюса. Таким образом, в самом общем случае свободно движущееся тело твердое может иметь максимум шесть степеней свободы.

В общем случае движение твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс со скоростью $\boldsymbol{v}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс А.

Основными кинематическими характеристиками такого движения являются скорость $\boldsymbol{v}_A$ и ускорение $\boldsymbol{a}_A$ полюса, определяющие поступательное движение, и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$, определяющие вращение вокруг этого полюса.

Можно отметить, что приняв другую точку В за полюс, получим в общем случае $\boldsymbol{v}_A \neq \boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{a}_A \neq \boldsymbol{a}_B$. Что касается характеристик вращательной составляющей движения, то они не меняются – так же, как и в случае плоского движения.

В частном случае плоскопараллельного движения АТТ векторы угловой скорости и углового ускорения всегда перпендикулярны плоскости движения. Достаточно очевидно, что скорость любой точки М

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} = \bar{v}_A + (\bar{\omega} \times A\overline{M}),$$

а ускорение

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA},$$

где второе слагаемое определяется по соотношению вида (2.30).

2.5 Сложное движение точки

2.5.1 Относительное, переносное и абсолютное движения

В ряде задач механики целесообразно рассматривать движение точки в двух системах координат одновременно. Одна из них считается неподвижной (условно неподвижной), а вторая определенным образом движется относительно первой. При такой постановке движение точки (или тела) называют сложным, или составным.

Много задач при таком подходе упрощается. Если объект движется, например, внутри транспортного средства (внутри вагона, самолета и т.п.), то можно разложить движение на два: одно связано с движением объекта по отношению к транспортному средству, а второе с движением самого этого средства по отношению к неподвижной внешней местности. Такой подход делает описание и исследование такого движения намного проще.

Пусть точка М движется в системе *Oxyz*, которая сама движется по отношению к системе $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2.35).

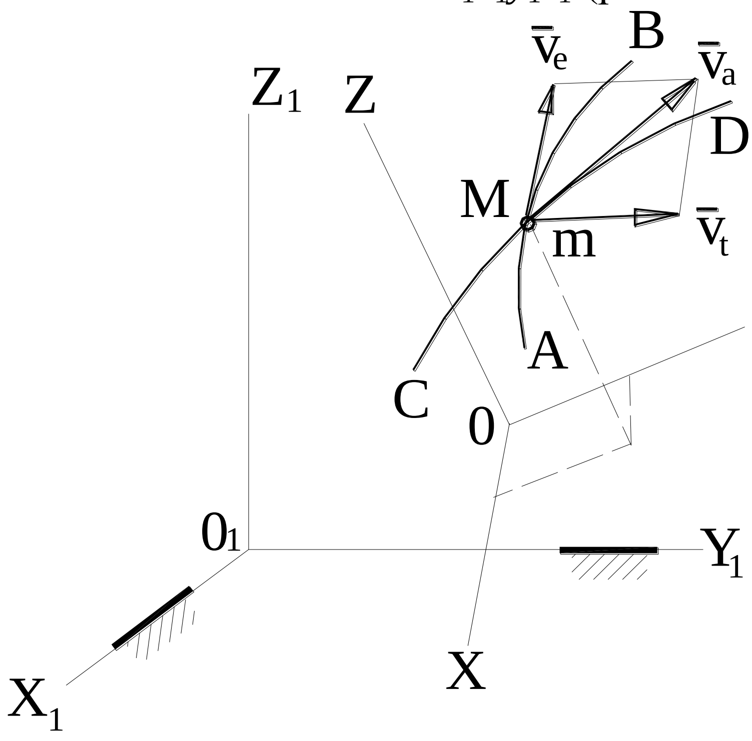


Рис. 2.35

Определения.

1. Движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz* называется относительным.

Траектория АВ, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной.

Скорость и ускорение точки в этом движении называются относительными и обозначаются индексом r.

2. Движение, совершаемое системой *Oxyz* (и всеми связанными с ней точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки М переносным движением.

Скорость той точки m, неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz*, с которой совпадает в данный момент точка М, относительно $O_1x_1y_1z_1$ называется переносной скоростью, а ускорение – переносным ускорением, и обозначаются индексом e:

$$\bar{v}_e = \bar{v}_m, \bar{a}_e = \bar{a}_m.$$

3. Движение, которое совершает точка М по отношению к неподвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, называется абсолютным, или сложным.

Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость – абсолютной скоростью, ускорение абсолютным ускорением, и все соответствующие величины обозначаются индексом *a*.

2.5.2 Теорема о сложении скоростей

Пусть за время $\Delta t = t_1 - t$ точка М совершит некоторое относительное перемещение $MM^/$ (рис. 2.36). За это же время сама кривая (траектория) из положения АВ перейдет в новое – A_1B_1. Точка *m* кривой АВ, совпадавшая с точкой М в момент времени *t*, совершает переносное движение $m\overline{m}_1 = M\overline{m}_1$. В итоге точка M переходит в положение M_1, т.е. ее абсолютное перемещение будет MM_1.

Из векторного треугольника Mm_1M_1 следует

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

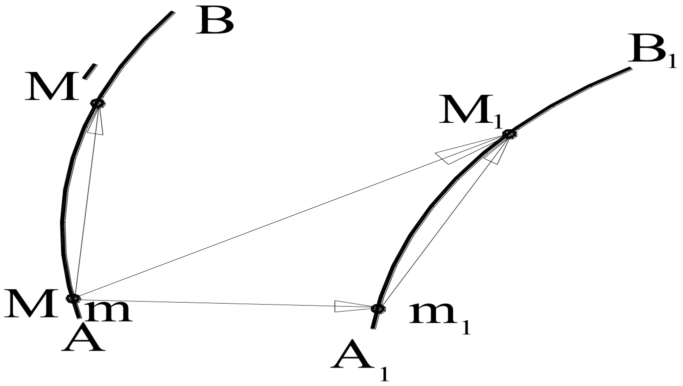


Рис. 2.36

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим слева значение абсолютной скорости, а справа – сумму относительной (по траектории A_1B_1) и переносной скоростей движения точки m:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e.$$

Последнее слагаемое есть следствие движения траектории AB и перехода ее в положение A_1B_1.

Направлены векторы скоростей по касательным к соответствующим траекториям. Это выливается в **формулировку теоремы**.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна <u>геометрической</u> сумме относительной и переносной скоростей.

Речь идет о суммировании векторных величин, поэтому в данной формулировке неслучайно подчеркнуто слово «геометрической».

Пример 1

Точка М движется вдоль отрезка прямой ОА с постоянной скоростью *u*, а прямая вращается в плоскости чертежа вокруг точки О с угловой скоростью ω. Найти скорость точки в зависимости от расстояния ОМ (рис. 2.37).

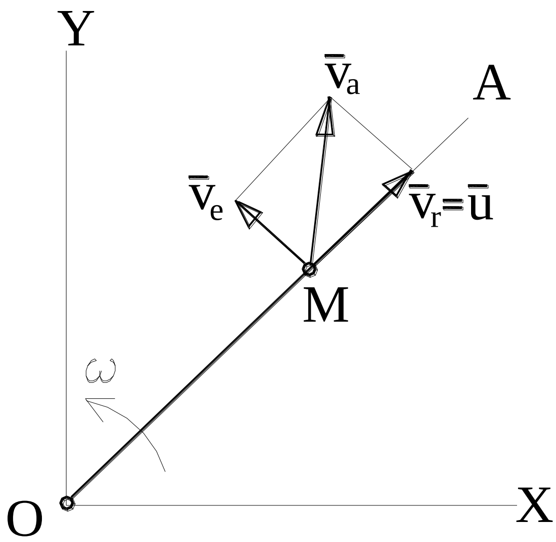


Рис. 2.37

Движение точки М вдоль ОА является относительным, и скорость этого движения $v_r = u$ известна. Переносным является движение точки, совпадающей в данный момент времени с точкой М и лежащей на прямой ОА. Скорость этого движения v_e определяется формулой $v_e = \omega r$, где r = ОМ. Направления относительной и переносной скоростей взаимно перпендикулярны, поэтому величина абсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

Пример 2

Кривошип ОА длиной r вращается с угловой скоростью ω. Длина шатуна АВ = b (рис. 2.38). Для данного угла φ найти скорость ползуна В относительно кривошипа ОА и его абсолютную скорость.

Относительное движение шатуна АВ по отношению к кривошипу ОА – это вращение вокруг шарнира А, и относительная скорость точки В направлена по нормали к АВ. Абсолютная скорость точки В направлена вдоль ОВ.

Переносным для точки В является движение кривошипа ОА. Представим, что ОАВ – жесткий треугольник, вращающийся вместе с кривошипом вокруг оси О с угловой скоростью ω. Тогда скорость точки В этого треугольника, совпадающей с точкой В шатуна АВ, будет переносной скоростью точки В шатуна и направлена перпендикулярно ОВ:

$$v_e = \omega \cdot OB = \omega(r\cos\varphi + l\cos\beta).$$

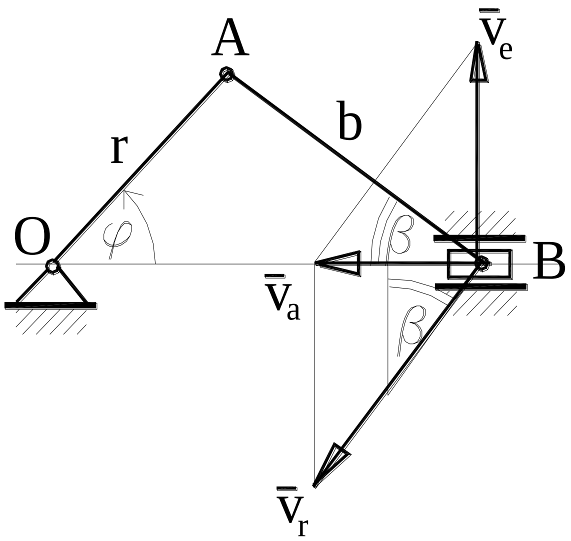


Рис. 2.38

Построив из векторов $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ параллелограмм скоростей, в котором диагональю является абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_a$, найдем

$$v_r = v_e / \cos\beta = \omega\left(r\frac{\cos\varphi}{\cos\beta} + l\right).$$

Для получения зависимости $v_r(\varphi)$ исключим угол β. Заметим, что $b \sin\beta = r \sin \varphi$, и

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi}; \qquad v_r = \omega b\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{b^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right).$$

После этого можно получить

$$v_a = v_r \cdot \sin\beta.$$

Учитывая, что $\sin\beta = (r\sin\varphi)/b$, получим

$$v_a = (v_r r \sin\varphi)/b.$$

Если $r = b$, то

$$v_r = 2\,\omega \cdot b, \;\; v_a = 2\omega b \sin\varphi.$$

2.5.2 Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение точки

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt}.$$

Производные справа определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются из изменений при относительном и переносном движениях. Т.е. если отмечать изменения векторов $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ при относительном движении индексом 1, а при переносном – индексом 2, то

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_{r1}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e1}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e2}}{dt}. \qquad (2.32)$$

Но по определению относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении, т.е. движение осей *Oxyz* (переносное) при этом во внимание не принимается.

Поэтому

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_{r1}}{dt}.$$

В свою очередь, переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости только при переносном движении, т.к. $\bar{a}_e = \bar{a}_m$, где m – точка, жестко связанная с осями Oxyz, и получает ускорение только при движении вместе с ними. Поэтому

$$\bar{a}_e = \frac{d\bar{v}_{e2}}{dt}.$$

В итоге

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \frac{d\bar{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e1}}{dt}. \qquad (2.33)$$

Обозначим

$$\bar{a}_{kor} = \frac{d\bar{v}_{r2}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{e1}}{dt} - \qquad (2.34)$$

эта величина характеризует изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости при ее относительном движении и называется поворотным, или **кориолисовым,** ускорением точки. Тогда

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}. \qquad (2.35)$$

Это не что иное, как теорема Кориолиса –

При сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений – относительного, переносного и поворотного (кориолисова).

Найдем для определения кориолисова ускорения формулу, вытекающую из (2.34).

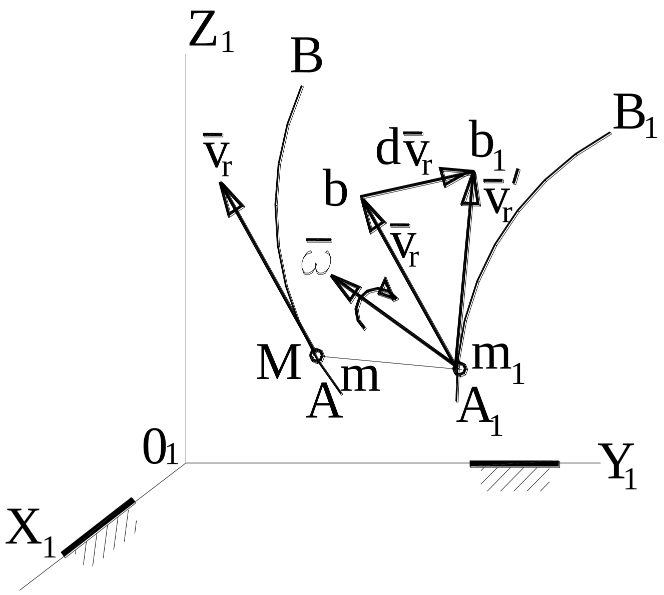


Рис. 2.39

Сама траектория AB в общем случае движется поступательно вместе с некоторым полюсом и вращается вокруг этого полюса со скоростью $\overline{\omega}$, называемой переносной угловой скоростью. Величина этой скорости не зависит от выбора полюса.

Начнем с определения $\dfrac{d\overline{v}_{r2}}{dt}$ (рис. 2.39). За время dt вектор $\overline{v}_r$ переместится в положение m_1b и еще повернется в положение m_1b_1. В итоге за счет относительного движения изменение вектора $\overline{v}_r$ составит величину $\overline{bb_1}$. Поскольку это связано с вращением, то

$$d\overline{v}_{r2} = \overline{\omega} \times \overline{m_1 b} = \overline{\omega} \times \overline{v}_r \cdot dt; \quad \frac{d\overline{v}_{r2}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{v}_r. \qquad (2.36)$$

Теперь определим $\dfrac{d\overline{v}_{r1}}{dt}$.

Скорость переносного движения равна скорости точки m кривой AB, с которой в данный момент совпадает точка M. Примем точку O за полюс и обозначим (рис. 2.40)

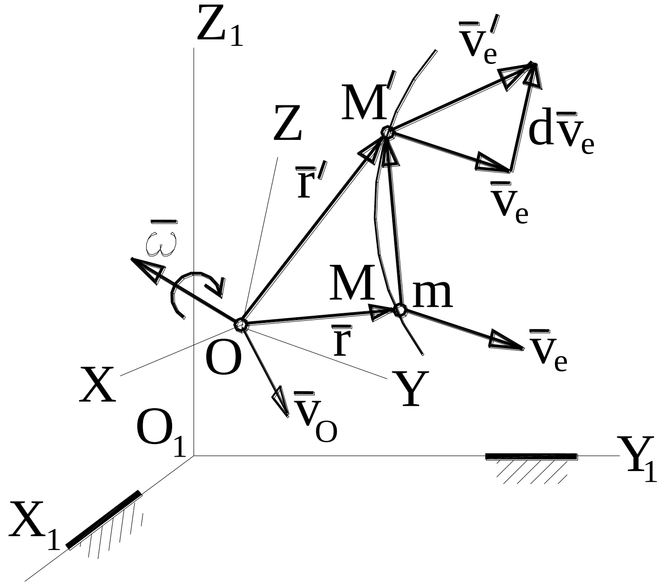


Рис. 2.40

$$\overline{OM} = \overline{Om} = \bar{r}.$$

Тогда

$$\bar{v}_r = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} \ \_$$

скорость полюса плюс скорость вращения вокруг него. За время dt точка M перейдет в положение $M^{/}$. Для него

$$\bar{r}^{\,/} = \bar{r} + \overline{MM}^{\,/}, \ \bar{v}_r^{\,/} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}^{\,/} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times (\bar{r} + \overline{MM}^{\,/}).$$

Приращение скорости за счет относительного перемещения $\overline{MM_1}$ составит

$$d\bar{v}_{r1} = \bar{v}_r^{\,/} - \bar{v}_r = \bar{\omega} \times \overline{MM}_1 = \bar{\omega} \times \bar{v}_r \cdot dt.$$

Тогда

$$\frac{d\overline{v}_{r1}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{v}_r.$$

В итоге

$$\overline{a}_{kor} = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{rel}).$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

При поступательном переносном движении угловая скорость равна нулю, и тогда

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e.$$

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений, как в обычном случае по теореме о сложении скоростей.

Кориолисово ускорение обращается в нуль в случаях:

1. Когда переносное движение является поступательным (переносная угловая скорость равна нулю).
2. Когда равна нулю относительная скорость, т.е. точка «привязана» к в подвижной системе координат.
3. Когда вектор скорости относительного движения $\overline{v}_r$ параллелен оси переносного вращения.

2.5.3 Примеры решения задач

Пример 1

Клин с углом α при вершине движется горизонтально с ускорением $\boldsymbol{a_1}$. Найти ускорение стержня DE в вертикальных направляющих (рис. 2.41).

Направлено ускорение точки D вверх.

Оно слагается из двух составляющих – относительного ускорения вдоль щеки клина и переносного ускорения, равного ускорению клина $\boldsymbol{a_1}$. Из «треугольника ускорений» следует

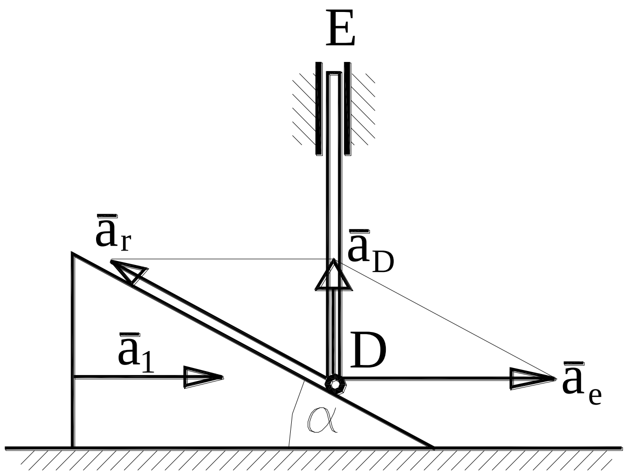


Рис. 2.41

$$a_D = a_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

В этом примере рассматривался случай, когда переносное движение было поступательным.

Пример 2

Кулиса ОА вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси О (рис. 2.42). По кулисе перемещается ползун В с постоянной скоростью u. Найти абсолютное ускорение ползуна в зависимости от расстояния x точки В до оси О.

Рис. 2.22

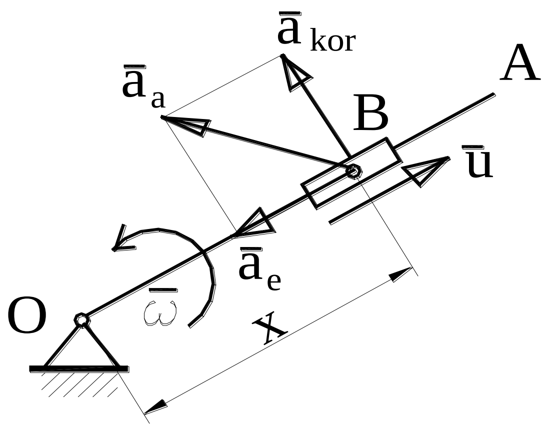


Рис. 2.42

Относительное ускорение $a_r = 0$, т.к. относительное движение является прямолинейным, и u = const. Движение кулисы ОА для ползуна В – переносное. Переносное ускорение ползуна В равно ускорению соответствующей точки кулисы с координатой x. Так как угловая скорость кулисы постоянна, то ускорение этой точки направлено вдоль ОА к оси вращения и по модулю равно

$$a_e = \omega^2 x.$$

Кориолисово ускорение – в рассматриваемом примере движение плоское – определяется как

$$a_{kor} = 2\cdot\omega\cdot u.$$

Направлено это ускорение перпендикулярно ОА в сторону вращения кулисы.

По теореме Кориолиса

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}.$$

Первое слагаемое равно нулю, а два других по направлению перпендикулярны друг другу, и полное ускорение по величине определяется формулой

$$\bar{a}_a = \sqrt{a_e^2 + a_{kor}^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + 4\omega^2 u^2} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}.$$

Пример 4

Точка движется по земному меридиану с севера на юг с постоянной относительной скоростью u (рис. 2.43).

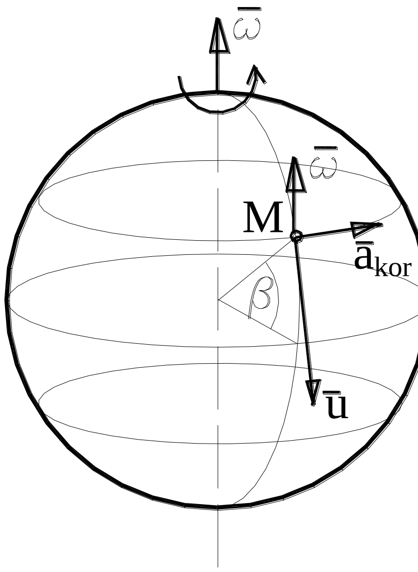


Рис. 2.43

Найти модуль и направление кориолисова ускорения, когда точка находится на широте β.

Угол, который составляет вектор скорости $\bar{u}$ с осью вращению, равен β. Поэтому ускорение Кориолиса равно величине

$$a_{kor} = 2 \cdot \omega \cdot u \cdot \sin \beta,$$

где ω – скорость вращения Земли.

Очевидно, что при $\beta = 90^0$ (на полюсе) кориолисово ускорение максимально, на экваторе, при $\beta = 0$ оно равно нулю.

По определению векторного произведения кориолисово ускорение направлено на восток. По этой причине в северном полушарии у реки, текущей на север, всегда правый берег подмывается водой, и является обычно более крутым, чем левый. Интересно отметить, что для реки, текущей в северном полушарии на юг, тоже правый ее берег (определяемый относительно направления течения) будет сильнее подмыт водой. Это легко определить, приняв в схеме рис. 2.43 другой направление скорости $\boldsymbol{u}$.

2.6 Сложное движение твердого тела

2.6.1 Сложение поступательных движений

Движение тела называется сложным, если тело движется относительно подвижных осей Oxyz, а эти оси движутся по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$.

Основные кинематические характеристики движения тела – его поступательные и угловые скорости и ускорения. Далее рассматриваются только скорости.

Если в относительном движении для всех точек скорость одинакова (что и говорит о поступательном движении) и равна $\mathbf{v}_1$, а в переносном движении постоянна и равна $\mathbf{v}_2$, то абсолютная скорость любой точки будет $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, и абсолютное движение тела будет тоже поступательным. Нужно обратить внимание на то, что эти равенства записаны в векторной форме, то есть при суммировании имеется в виду **геометрическая** сумма.

Итак, при сложении двух поступательных движений со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ результирующее движение тоже будет поступательным со скоростью $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.

2.6.2 Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Пусть тело вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси аа, содержащей точку А, а эта ось вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси bb, содержащей точку В (рис. 2.44).

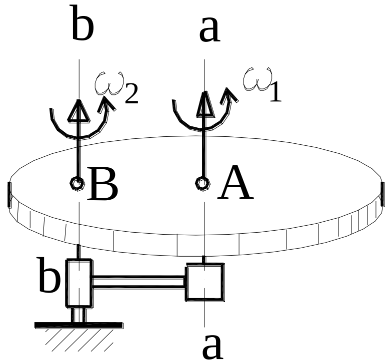


Рис. 2.44

Рассмотрим частные случаи.

1. **Вращения направлены в одну сторону**

Построим плоскость S, перпендикулярную осям; в этой плоскости находятся точки A и B (рис. 2.45). Очевидно, что относительно точки A скорость точки B определяется обычным образом:

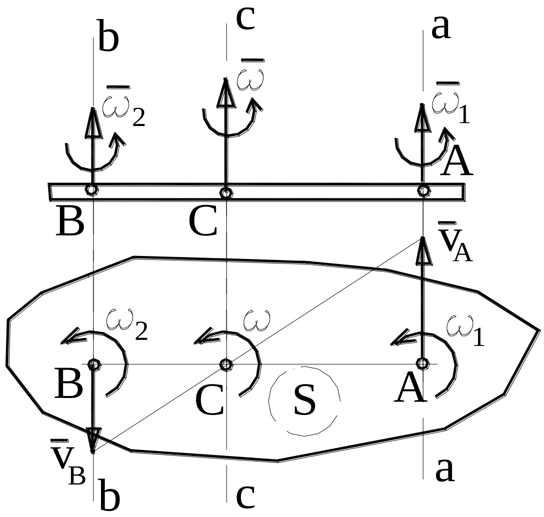


Рис. 2.45

$$v_B = \omega_2 \cdot AB.$$

Относительно точки B скорость точки A определяется аналогично

$$v_A = \omega_1 \cdot AB.$$

Очевидно, что эти скорости параллельны и направлены в разные стороны. Но тогда точка C – мгновенный центр скоростей, а ось cc – мгновенная ось вращения тела. Для угловой скорости вращения ω вокруг оси cc справедливо:

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC.$$

Тогда на основании свойства пропорций (из равенства a/A = =b/B следует, что (a + b)/(A + B)), можно записать

$$\omega = (v_A + v_B) / AB.$$

Это дает

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Итак, если тело одновременно участвует в двух вращениях вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону, результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, параллельной данным.

Т.к. ось аа перемещается, то ось мгновенного вращения сс описывает цилиндрическую поверхность.

2. Вращения направлены в разные стороны

Пусть для определенности $\omega_1 > \omega_2$; величины скоростей точек А и В определяются соотношениями (рис. 2.46)

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB.$$

При этом скорости параллельны и направлены в одну сторону. Тогда центр вращения – в точке С, причем

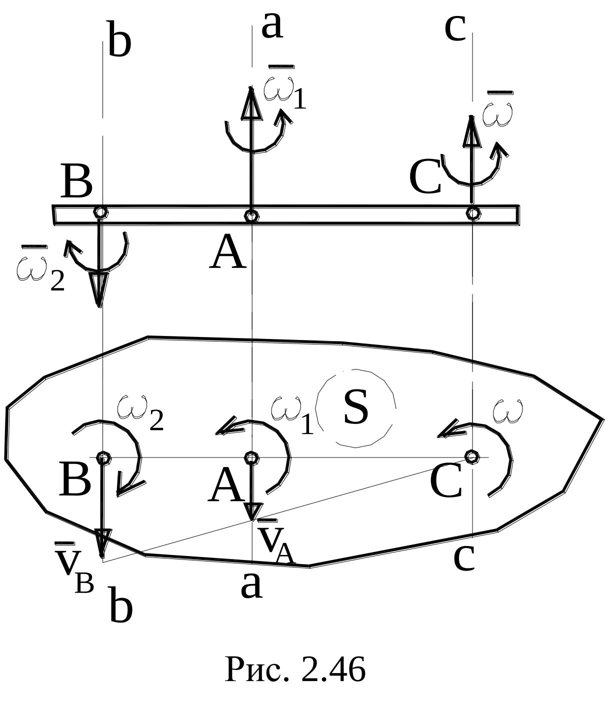


Рис. 2.46

$$\omega = v_B/BC = v_A/AC,$$

и

$$\omega = (v_B - v_A)/AB = \omega_1 - \omega_2.$$

Таким образом, в этом случае результирующее движение представляет собой мгновенное вращение вокруг оси сс со скоростью

$$\omega = \omega_1 - \omega_2.$$

3. Пара вращений

В этом случае $\omega_1 = \omega_2$ и направлены эти вращения в разные стороны. ω_1 и ω_2 образуют пару угловых скоростей. При этом $v_A = v_B$, но это означает, что мгновенный центр скоростей находится на бесконечности и все точки тела в данный момент имеют одинаковые скорости

$$v = \omega_1 \cdot AB = \omega_2 \cdot AB.$$

Результирующее движение будет поступательным (мгновенно поступательным) со скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.

Таким образом, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению со скоростью, равной моменту пары угловых скоростей этих вращений.

Примеры такого движения являют движения педали велосипеда, стеклоочистителя на больших автомобилях или автобусах, и т.д.

Верен и обратный вывод: поступательное движение твердого тела эквивалентно паре вращений, у которых момент угловых скоростей этих вращений равен поступательной скорости тела.

2.6.3 Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть вокруг оси аа вращается тело, а сама эта ось вращается вокруг оси bb, пересекающейся с осью аа в точке О (рис. 2.47).

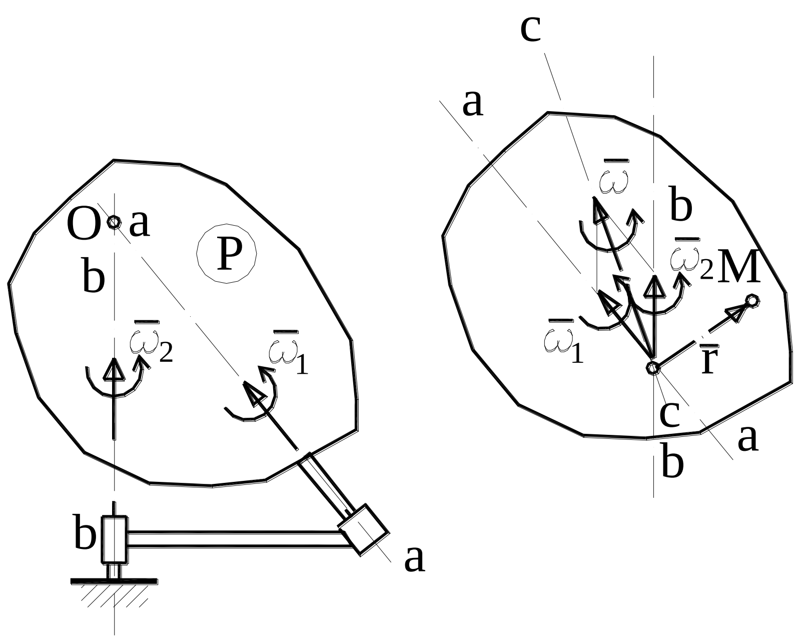


Рис. 2.47

За счет вращения вокруг оси bb скорость

$$\bar{v}_r = \bar{\omega}_1 \times \bar{r},$$

за счет вращения вокруг оси аа

$$\bar{v}_e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r},$$

тогда

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \times \bar{r}.$$

В то же время результирующее движение должно быть мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку О с некоторой угловой скоростью ω, так что

$$\boldsymbol{v}_{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Поскольку М – любая точка, то эти равенства должны выполняться при любых $\boldsymbol{r}$, что означает $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Итак, при сложении вращений вокруг пересекающихся осей результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через ту же точку. Вектор **ω** определяется как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.

С течением времени мгновенная ось меняет свое положение, описывая коническую поверхность.

Этот результат можно обобщить в виде

$$\overline{\omega} = \sum \overline{\omega}_k$$

для случая вращений вокруг нескольких осей, пересекающихся в одной точке.

2.6.4 Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение

Пусть вокруг оси, проходящей через точку A под углом α к горизонту, происходит вращательное относительное движение тела P с угловой скоростью **ω**, а переносным будет поступательное движение со скоростью ***v*** (рис. 2.48).

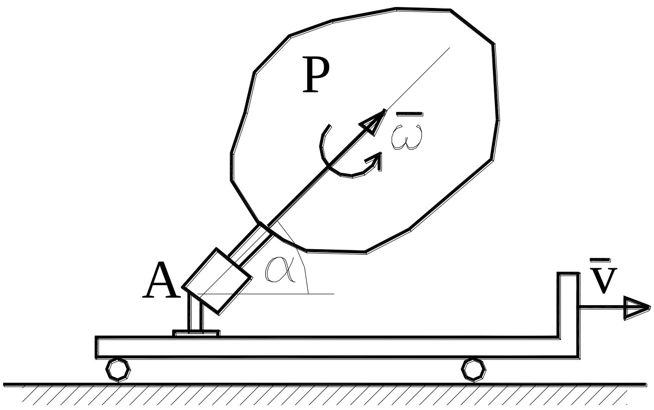


Рис. 2.48

В зависимости от величины угла α возможны три варианта.

1. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ – векторы линейной скорости и угловой скорости взаимно перпендикулярны.

Это случай плоскопараллельного движения, подробно рассмотренный выше. Если принять точку A за полюс, то итоговое движение складывается из поступательного движения этого полюса со скоростью $\boldsymbol{v}_\mathbf{A} = \boldsymbol{v}$ и вращательного движения вокруг оси Аа.

Как показано выше, поступательное движение тела можно рассматривать как пару вращений, в данном случае вокруг осей, параллельных оси Аа. Подбирая расстояние h между осями этих вращений таким, чтобы величина угловой скорости была равной скорости **ω,** а ось одного из вращений этой пары, противоположного заданному вращению вокруг оси Аа, совпадала с осью Аа, получим, что такое движение можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси Рр, параллельной Аа. Эта ось смещена от нее оси Аа на расстояние h. Ось Рр является осью мгновенного вращения, а точка Р - мгновенным центром скоростей для сечения тела S, перпендикулярного оси Аа.

2. $\boldsymbol{v}\,||\,\boldsymbol{\omega}$ – векторы линейной скорости и угловой скорости параллельны (рис. 2.49).

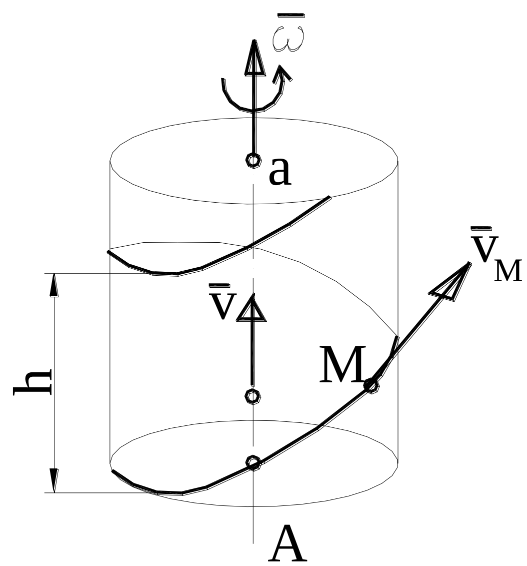


Рис. 2.49

В этом случае ось вращения Аа называется осью винта. Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены в одну сторону, то это т.н. правый винт, иначе – левый. Шаг винта – расстояние, проходимое точкой тела на оси за время одного оборота:

$$h = 2\cdot v\cdot\pi/\omega ,$$

где ω – величина угловой скорости, v – поступательной.

При постоянном шаге любая точка М (не находящаяся на оси) описывает винтовую линию. Скорость ее

$$v_M = \sqrt{\omega^2 r^2 + v^2}.$$

Направлена скорость по касательной к траектории, в данном случае по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка М, развернуть, разрезав вдоль образующей, то винтовые линии обратятся в прямые линии, наклонные к основанию цилиндра под углом

$$\alpha = arctg(h/2\pi r) = arctg(v/\omega r).$$

3. Произвольный угол между угловой скоростью **ω** и поступательной скоростью ***v*** равен α.

В этом случае разложим вектор поступательной скорости на составляющие – вдоль **ω** ($v^{/} = v\cdot\cos\alpha$) и перпендикулярно ей ($v^{//} = v\cdot\sin\alpha$). Тем самым движение тела сведется к сумме винтового и поступательного движений. Т.к. в общем случае ***v*, ω** и α все время меняются, движение тела можно рассматривать как серию мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно меняющихся осей.

3 ДИНАМИКА

3.1 Введение в динамику. Законы динамики

Динамика – раздел механики, изучающий движение тел под действием сил.

В отличие от кинематики, при изучении движения тел в динамике принимаются во внимание как действующие на тело силы, так и инертность самих тел. Как силы, так и реакции связей в общем случае могут быть переменными. Все полученные в статике результаты для постоянных сил относятся и к переменным силам, так как условия постоянства сил ранее не оговаривались и не использовались.

Количественной мерой инертности является масса тела. В классической механике масса – величина скалярная, положительная и постоянная для данного тела.

Поскольку в общем случае движение тела зависит не только от массы, но и от его формы, на первом этапе рассматриваются материальные точки, т.е. точки с конечной массой.

При решении конкретных задач тело можно рассматривать как материальную точку, если не принимать во внимание вращательную часть движения. Так, движение планеты вокруг Солнца или снаряда на траектории можно рассматривать как движение материальной точки.

Поступательно движущееся тело всегда можно рассматривать как движение материальной точки с такой же массой.

Законы динамика (Ньютона)

1. Закон инерции

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Системы отсчета, в которых справедлив этот закон, называются инерциальными.

Для практических задач такой системой можно считать систему координат (отсчета), жестко связанную с Землей.

2. Основной закон динамики

Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением действия силы.

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad \text{и} \quad ma = F. \tag{3.1}$$

При действии нескольких сил одновременно их можно заменить равнодействующей, и тогда

$$m\bar{a} = \bar{R}, \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k. \tag{3.2}$$

Этот же результат можно получить из закона независимости действия сил:

При одновременном действии на точку нескольких сил каждая из них сообщает точке такое ускорение, какое бы она сообщила, действуя одна.

3. Закон равенства действия и противодействия

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположно направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Этот закон постоянно использовался нами и в статике. При взаимодействии двух материальных точек они, в соответствии с законами 2 и 3, будут двигаться с ускорениями, обратно пропорциональными их массам.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что система двух взаимодействующих тел порождает две равные по величине силы, действующие вдоль одной прямой в разные стороны, но, **в отличие рассмотренного выше в статике случая равновесия не возникает**. Причина здесь в том, что в статике речь шла о системе таких сил, приложенных к одному твердому телу, здесь же эти силы приложены к разным телам.

Основные задачи динамики точки:

1) зная закон движения точки, найти действующую на нее силу;
2) зная действующую на точку силу, найти закон ее движения – это т.н. вторая, или основная, задача динамики.

Системы единиц

Для измерения всех механических величин достаточно ввести 3 независимых размерных величины. Обычно две из них – единица длины и единица времени. В качестве третьей в разных системах выступают единица массы или единица силы.

В системе СИ такими величинами являются единица массы килограмм (кг), единица длины метр (м), единица времени секунда (с).

Следует отличать размерность (для скорости это, например, L/T) от единицы измерения (м/с, км/ч и т.д.).

Основные силы

1. **Сила тяжести**

$$P = mg.$$

В зависимости от положения точки на Земле вес (и ускорение g) могут меняться, но m = const.

2. **Сила трения**.

Для трения скольжения

$$F = f \cdot N,$$

где f – коэффициент трения, N – нормальная реакция.

3. **Сила тяготения** – это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу (закон всемирного тяготения Ньютона):

$$F = f{\cdot}m_1m_2/r^2,$$

где m_1, m_2 – массы тел, r – расстояние между ними, f – гравитационная постоянная:

$$f = 6.673{\cdot}10^{-11}\ (\text{м}^3/\text{кг}{\cdot}\text{с}^2).$$

4. **Силы упругости**.

Для пружины

$$F = c{\cdot}\lambda,$$

где c – коэффициент жесткости пружины, λ - деформация (удлинение или сжатие) пружины.

5. **Сила вязкого трения** (по Ньютону):

$$R = \mu{\cdot}v,$$

где μ – коэффициент сопротивления, v – скорость тела в вязкой среде.

6. **Сила аэро- (гидро-) динамического сопротивления**:

$$R = \frac{1}{2}c_x\rho S v^2,$$

где ρ – плотность среды, S – площадь миделя, v – скорость потока, обтекающего тело, c_x – безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела и его ориентации.

Масса тела входит и в закон инерции, и в закон всемирного тяготения. С теоретической точки зрения это могут быть различные понятия. На практике можно использовать экспериментально установленный факт, что инертная и гравитационная массы эквивалентны (с относительной точностью эксперимента 1971 г. в 10^{-12}).

Далее эти понятия не различаем и используем единый термин «масса».

3.2 Дифференциальные уравнения движения точки. Решение задач динамики точки

3.2.1 Основные соотношения

В прямоугольных декартовых координатах движение точки задается уравнениями:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{3.3}$$

Задача динамики – по этим уравнениям найти действующую на точку силу или по известной силе (системе сил) найти уравнения (3.3).

Это можно сделать с помощью второго закона динамики.

Проектируя все силы $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ на оси x, y, z и соответствующие ускорения на эти же оси, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_k F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_k F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_k F_{kz}, \tag{3.4}$$

или

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \tag{3.5}$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах. В общем случае правые части этих уравнений могут быть функциями времени t, координат x, y, z, скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

В осях естественного трехгранника проектируем обе части равенства $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ на оси Mτ – касательную к траектории точки, Mn – главную нормаль, Mb – бинормаль. Учтем, что

$$a_\tau = dv/dt, \; a_n = v^2/\rho, \; a_b = 0.$$

Тогда

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau},\ m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn},\quad 0 = \sum F_{kb}. \tag{3.6}$$

Эти уравнения, где $v = ds/dt$, – уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника.

Если ускорение точки известно, то действующие силы или реакции связей определяются сразу по соотношению $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$. Если известен закон движения в какой-либо форме, то силы определяются по соотношениям (3.5) или (3.6).

3.2.2 Примеры решения задач

Пример 1

Воздушный шар весом P спускается с ускорением a. Какой груз Q нужно выбросить, чтобы шар начал подниматься с тем же ускорением?

Уравнение движения шара под действием веса $\bar{P}$ и подъемной силы $\bar{F}$ в проекции на вертикальную ось, направленную вниз

$$P/g \cdot a = P - F.$$

Если выбросить груз Q, то вес шара станет $(P - Q)$, а подъемная сила не изменится, и уравнение движения шара вверх в проекции на вертикальную ось, направленную вверх, будет иметь вид

$$(P - Q)/g \cdot a = F - (P - Q).$$

Совместно решая эти уравнения движения, получим

$$Q = 2P/(1+g/a).$$

Изменим условие: пусть необходимо, чтобы подъем происходил с ускорением b. Тогда система уравнений будет следующей:

$$P/g \cdot a = P–F, \quad (P–Q)/g \cdot b = F–(P–Q).$$

В итоге

$$Q = P \cdot (a+b)/(g+b).$$

Если $a = b$, то получается предыдущий результат.

Пример 2

Лифт весом P поднимается с ускорением a. Определить натяжение троса T.

Решение этой задачи записывается в одну строчку:

$$P/g \cdot a = T – P, \qquad T = P \cdot (1+a/g).$$

При $a = 0$ получается $T = P$.

Пример 3

Кулиса К перемещается за счет вращения кривошипа ОА = b с постоянной угловой скоростью ω. Вес кулисы Р. Найти силу давления ползуна на кулису (рис. 2.50).

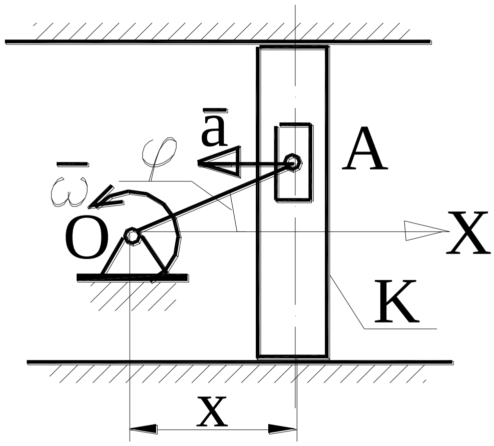


Рис. 2.50

$$x = b \cdot cos\varphi = b \cdot cos\ \omega t,$$

$$d^2x/dt^2 = -b \cdot \omega^2\ cos\omega t = -\omega^2 x.$$

Давление Q определится из уравнения

$$P/g \cdot \omega^2 x = Q,$$

т.е. сила давления на кулису пропорциональна x.

3.2.3 Основная задача динамики точки при прямолинейном движении

Если при прямолинейном движении ось Ох направлена вдоль траектории (это в рассматриваемом случае прямая), то движение точки опишется уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad или \quad m\ddot{x} = \sum F_{kx}. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) – дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки. Его иногда заменяют системой двух уравнений

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x. \tag{3.8}$$

Когда нужно найти зависимость $v_x(x)$ (а не $v_x(t)$), уравнения (3.8) преобразуют к переменной x. В первом уравнении

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v_x \cdot \frac{dv_x}{dx},$$

и тогда

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = \sum F_{kx}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x. \tag{3.9}$$

Решение первой задачи динамики сводится к определению закона $x = x(t)$. Поскольку в общем случае

$$F_{kx} = F_{kx}(x, dx/dt, t),$$

то (3.8) принимает вид

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \tag{3.10}$$

Общий вид решения после интегрирования будет

$$x = f\,(t, C_1, C_2\,), \tag{3.11}$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Для их определения используются начальные условия, т.е. положение и скорость точки в момент $t = 0$.

В случае прямолинейного движения это условия:

$$\text{при } \ t = 0: \qquad x = x_0, \quad v = v_0\,. \tag{3.12}$$

Определив с помощью (3.12) постоянные C_1, C_2, можно записать частное решение в виде

$$x = f\,(t, x_0, v_0). \tag{3.13}$$

Пример

Пусть точка M с массой m движется вдоль оси Ox под действием постоянной по модулю и направлению силы P при начальных условиях (3.12).

Найти закон движения.

Закон движения

$$m\frac{dv}{dt} = P,$$

После первого интегрирования находим

$$v = \frac{P}{m}t + C_1.$$

Подставляем далее вместо скорости выражение производной от координаты

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{P}{m}t + C_1.$$

После второго интегрирования получаем

$$x = \frac{P}{2m}t^2 + C_1 t + C_2.$$

Это и есть общее решение. Использование начальных условий (3.12) дает

$$C_0 = v_0,\ C_2 = x_0,$$

и окончательно частное решение принимает вид

$$x = \frac{P}{2m}t^2 + v_0 t + x_0.$$

Это не что иное, как закон движения при постоянном ускорении – закон равнопеременного движения.

3.2.4 Последовательность и примеры решения задач

При решении задач динамики точки рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Составляется уравнение движения. Для этого, в случае прямолинейного движения:

- выбираются начало отсчета, а координатная ось, как правило, направляется в сторону движения;
- точка изображается в произвольном положении при $x > 0$ и $v_x > 0$ (последнее существенно, если силы зависят от скорости); показываются все силы;
- сумма проекций всех сил на координатную ось подставляется в правую часть уравнения движения. Переменные силы выражаются через те величины, от которых они зависят (x, dx/dt, t).

2. Интегрируются уравнения движения. Если действующие силы являются функциями одной из переменных – координаты x, времени t или скорости v, то есть

$$F = F(x), \text{ или } F = F(t), \text{ или } F = F(v),$$

то можно использовать метод разделения переменных.

3. Определяются постоянные интегрирования – это можно делать сразу после каждого интегрирования.

4. Находятся искомые величины и анализируются полученные результаты.

Пример 1

Сила зависит от времени $F = kt$, где $k = const$.

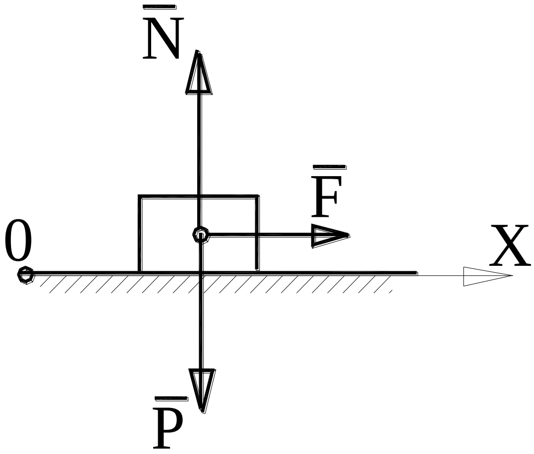


Рис. 3.1

Тело движется по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\overline{F}$ (рис. 3.1). Уравнение движения в проекции на ось x:

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = kt \Rightarrow \frac{P}{g}v = kt^2/2 + C_1.$$

Если в начальный момент времени тело было в покое (t = 0, v = 0), то C_1 = 0. Далее

$$\frac{P}{g}\frac{dx}{dt} = \frac{kt^2}{2}; \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{kg}{2P}t^2; \qquad x = \frac{kg}{2P}\frac{t^3}{3} + C_2.$$

Если в начальный момент времени x = 0, то окончательно

$$x = kg/6P{\cdot}t^3.$$

Пример 2

Сила зависит от расстояния.

Какое время нужно телу массой m для прохождения вдоль хорды Земли по каналу АВ (рис. 3.2)? При этом считать, что сила F притяжения к центру Земли пропорциональна расстоянию r от тела до центра:

$$F = mgr/R,$$

тогда на поверхности это будет обычная сила тяжести. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

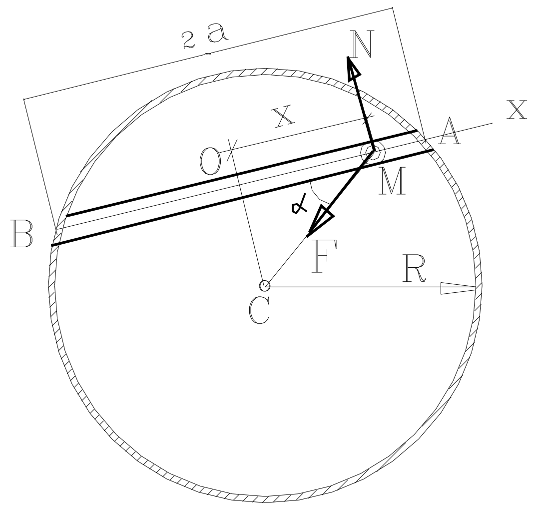


Рис. 3.2

Пусть начало отсчета – в точке О, ось x направлена вправо. Длина АВ пусть $2a$. Тогда начальные условия:

$$t = 0: \quad x = a, \quad v = 0.$$

Вдоль x действует сила

$$-F\cos\alpha = -mgr\cos\alpha/R \;=\; -\,mgx/R.$$

$$m\frac{dv}{dt} = -m\frac{gx}{R}; \qquad v\frac{dv}{dx} = -k^2x; \;\; (k^2 = \frac{g}{R}) \qquad vdv = -k^2xdx;$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{k^2x^2}{2} + C_1.$$

Из начальных условий находим

$$C_1 = \frac{k^2a^2}{2};$$

тогда скорость определяется соотношением

$$v = \pm k\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Если для показанного на рисунке 3.2 положения скорость точки М направлена к точке О, то в этом выражении принимается знак минус.

$$\frac{dx}{dt} = -k\sqrt{a^2 - x^2}; \qquad \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -kdt;$$

и после интегрирования получаем

$$kt = \arccos(x / a) + C_2.$$

Учет начального условия (при $t = 0$ $x = 0$) дает $C_2 = 0$, и тогда

$$x = a \cdot \cos kt \text{ –}$$

это закон гармонических колебаний с амплитудой a. Период этих колебаний t_1 определится из соотношения $kt_1 = 2\pi$, тогда $t_1 = 2\pi/k$, а время прохождения вдоль канала – половина периода $t_2 = \pi/k = \pi\sqrt{R/g}$. Это время составляет 42 мин 11 с и, что следует из полученных зависимостей, не зависит от длины хорды a. Таким образом, при движении под действием сил тяжести по любой хорде, соединяющей две точки поверхности Земли, время прохождения от одной точки до другой всегда одно и то же. Максимальная скорость такого движения – при $x = 0$, $v_{max} = ka$ – эта величина уже зависит от a. Если, например, туннель такого вида прорыть между Москвой и Санкт-Петербургом, то максимальная скорость будет ($2a$ = =637 км) 1422 км/час.

Пример 3

Сила зависит от скорости. Это типичный случай вязкого сопротивления.

Пусть лодку массой 40 кг толкнули со скоростью v_0 = 0.5 м/с (рис. 3.3). Если сила сопротивления воды $R = \mu v$, а μ = 9.1 кг/с, то через какое время скорость станет вдвое меньше начальной и какой при этом будет пройден путь? Какой путь пройдет лодка до полной остановки?

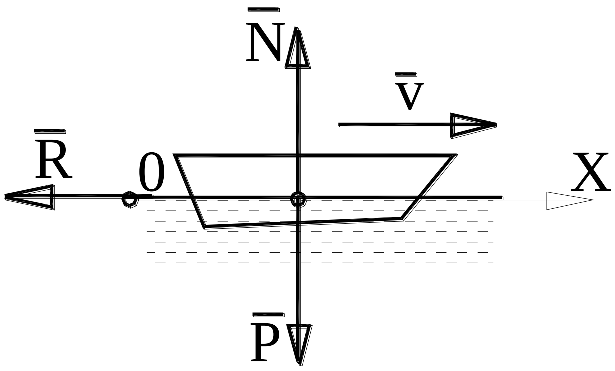


Рис. 3.3

В начальный момент $t = 0$: $x = 0$, $v = v_0$.

Сила вдоль x – это величина $-R = -\mu v$.

Уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu v \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{\mu}{m}t,$$

$$t = \frac{m}{\mu}\ln\frac{v_0}{v}.$$

Если $v = v_0/2$, то $t = \frac{m}{\mu}\ln 2 = \frac{m}{\mu}0.61 \approx 3\,c$.

Чтобы найти пройденный лодкой путь, построим уравнение движения как зависимость $v(x)$; тогда

$$mv\frac{dv}{dx} = -\mu v \Rightarrow \int_{v_0}^{v}dv = -\frac{\mu}{m}\int_0^x dx \Rightarrow v - v_0 = -\frac{\mu}{m}x \Rightarrow$$

$$x = \frac{m}{\mu}(v_0 - v) = \frac{m}{\mu}\frac{v_0}{2} \approx 1.1\,\text{м}.$$

До полной остановки, когда $v = 0$, $x = \frac{mv_0}{\mu} \approx 2.2\,\text{м}$. Если теперь найти время до полной остановки, то $t \to \infty$.

3.2.5 Решение основной задачи динамики точки при криволинейном движении

Если решение строится в декартовых координатах, то начальные условия для (3.4) имеют вид:

$$\text{при } t = 0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$
$$v_x = v_{x0}, v_y = v_{y0}, v_z = v_{z0}. \qquad (3.14)$$

После интегрирования (3.4) нужно определить 6 постоянных интегрирования с помощью начальных условий (3.14).

Пример

Описать движение тела, брошенного под углом α к горизонтальной плоскости со скоростью v_0, рассматривая его как материальную точку с массой m (рис. 3.4).

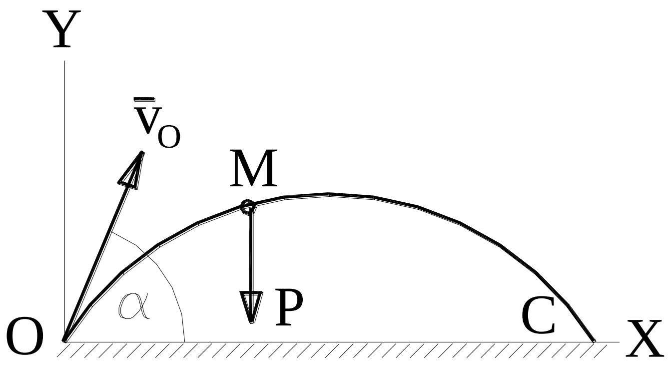


Рис. 3.4

Пренебрегаем сопротивлением воздуха, считаем силу тяжести P постоянной, поверхность Земли считаем плоской (т.е. считаем, что дальность полета много меньше радиуса Земли).

На точку M в произвольном ее положении на траектории действует единственная сила – сила тяжести P, направленная вертикально вниз. Проекции этой силы на оси системы координат (ось Z не показана, движение точки происходит в плоскости XY) будут

$$P_x = 0, P_z = 0, P_y = - P = - mg.$$

Подставим эти выражения в уравнения (3.4) с учетом того, что $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt}$ и т.д., после сокращения на m получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g, \quad \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

После умножения уравнений на dt и интегрирования найдем

$$v_x = C_1, \quad v_y = -gt + C_2, \quad v_z = C_3.$$

Начальные условия в задаче имеют вид:

При $t = 0$ точка М находится в начале координат:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

а составляющие скорости вдоль координатных осей

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha, \quad v_z = 0.$$

Подчиняя этим условиям полученные выше компоненты скоростей, получим

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0.$$

Подставляя эти значения в выражения для скоростей и заменяя $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и т.д., получим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x = v_0 t \cos\alpha + C_4, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_5, \quad z = C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, и окончательно уравнения движения точки М принимают вид

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0.$$

В частности, из последнего уравнения следует, что движение точки М происходит в плоскости XOY.

3.3 Общие теоремы динамики точки

Общие теоремы устанавливают наглядные зависимости между динамическими характеристиками движения тел. Кроме того, с помощью таких теорем осуществляются общие для многих задач операции интегрирования, что упрощает процесс их решения.

3.3.1 Количество движения точки. Импульс силы

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость $m\bar{v}$. Размерность этой величины кг·м/с, а направлен вектор количества движения так же, как и скорость, т.е. по касательной к траектории движения точки. Это следует из того, в частности, что умножение вектора на скаляр может изменить только длину вектора, но не меняет его направления.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени dt:

$$d\bar{S} = \bar{F}dt\,.$$

Направлен импульс силы вдоль линии действия силы.

Импульс времени за конечный промежуток времени dt_1 определяется интегралом

$$\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} \cdot dt.$$

Если сила постоянна по модулю и направлению, то $\bar{S} = \bar{F}t_1$. Размерность импульса силы такая же, как у количества движения:

кг·м/с = Н·с…

3.3.2 Теорема об изменении количества движения точки

Для точки с постоянной массой основной закон динамики можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \sum \bar{F}_k - \qquad (3.15)$$

производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.

Пусть точка в момент времени $t = 0$ имеет скорость v_0, а в момент t_1 – скорость v_1. Умножим обе части равенства (3.15) на dt и проинтегрируем в пределах v_0, v_1 и 0, t_1. Тогда

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt = \sum \bar{S}_k. \qquad (3.16)$$

Это означает, что

изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.

Соотношение (3.16) можно переписать в проекциях на оси координат:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}, mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky}, mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}. \quad (3.17)$$

Соотношения (3.16) и (3.17) позволяют решать следующие задачи:

1) оценивать импульс сил по изменению скорости;
2) по импульсу сил определять изменение скорости.

Пример

Телу массой m, лежащему на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщена горизонтальная скорость v_0 (рис. 3.5). Если сила сопротивления (трения скольжения) постоянна, то через какое время t_1 тело остановится?

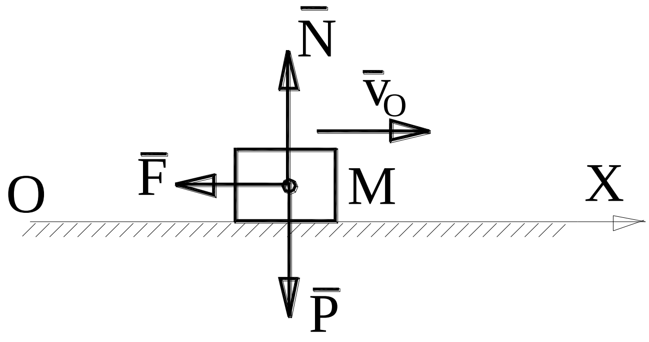


Рис. 3.5

Применяя первое из уравнений (3.17), получим

$$m(v_0 - 0) = F \cdot t_1 \quad (\text{Т.к. } F = const);$$

$$\text{откуда} \quad t_1 = mv_0/F.$$

Если в этой же задаче принять, что сила сопротивления меняется по линейному закону пропорционально времени $F = k \cdot t$, то решение (при условии, что в момент остановки сила максимальна и равна F) строится с использованием (3.16). Тогда

$$mv_0 = \int_0^{t_1} ktdt = kt_1^2/2; \ (kt_1 = F \Rightarrow k = F/t_1);$$

$$mv_0 = \frac{F}{t_1} \cdot t_1^2/2 \Rightarrow t_1 = 2mv_0/F,$$

т.е. в этом случае время до полной остановки увеличивается вдвое.

3.3.3 Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)

В качестве динамической характеристики движения точки часто выступает не вектор количества движения $m\mathbf{v}$, а его момент относительно некоторого центра или оси.

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\boldsymbol{m}_O = \boldsymbol{m}_O(m\mathbf{v})$, определяемая равенством

$$\overline{m}_O = \overline{r} \times m\overline{v}, \tag{3.18}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки относительно точки О (рис. 3.6).

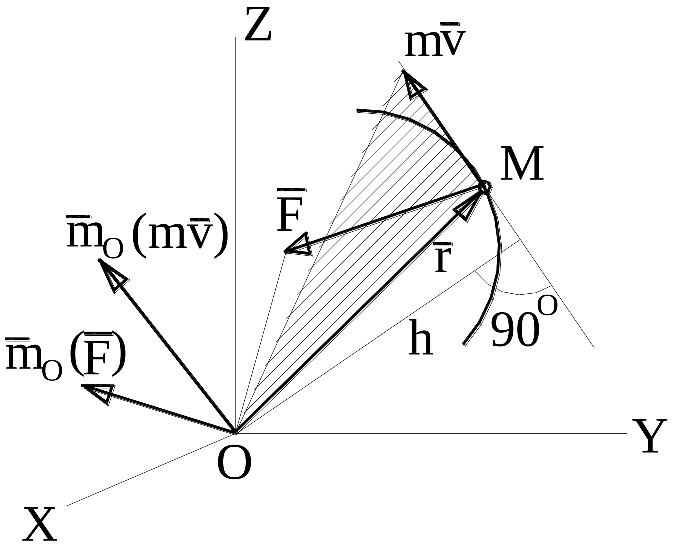


Рис. 3.6

Направление и величина $\boldsymbol{m}_O$ определяются правилами векторного произведения:

$$\left|\overline{m}_O\right| = mvh,$$

где h – кратчайшее расстояние от точки О до линии вектора скорости (или $m\boldsymbol{v}$).

Момент количества движения точки относительно оси Oz равен проекции вектора m_O на эту ось:

$$m_z = m_z(mv) = \left[\overline{m}_O\right]_z = \left|\overline{m}_O\right| \cos\gamma,$$

где γ – угол между осью z и вектором $\boldsymbol{m}_O$.

Дифференцируя (3.18) по времени, получим:

$$\frac{d\overline{m}_O}{dt} = \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v}\right) + \left(\overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt}\right) = (\overline{v} \times m\overline{v}) + (\overline{r} \times m\overline{a}).$$

Первое слагаемое равно нулю по правилу векторного произведения, так как производная от радиуса вектора по определению есть скорость, следовательно, в первой скобке векторное произведение однонаправленных векторов равно нулю. Во втором величина ***ma*** = ***F*** (в случае действия нескольких сил $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ - сумма сил). Но произведение $(\bar{r} \times \bar{F})$ представляет собой момент силы относительно точки О, т.е. $\bar{m}_O(\bar{F})$..

Таким образом, доказана теорема моментов относительно центра:

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{m}_O(m\bar{v})\right] = \bar{m}_O(\bar{F}), \tag{3.19}$$

или

производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого центра равна моменту приложенной силы относительно того же центра.

По существу, связь между *m**v***, ***F*** и их моментами относительно центра совершенно идентична.

Если теперь спроектируем (3.19) на ось Oz, получим теорему моментов относительно оси:

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(m\bar{v})\right] = m_z(\bar{F}). \tag{3.20}$$

Из (3.19) следует, что если момент силы относительно центра равен нулю, то и момент количества движения точки – величина постоянная.

3.3.4 Движение под действием центральной силы. Закон площадей

Сила называется центральной, если линия действия ее всегда проходит через заданный центр.

Примеры таких сил: сила притяжения планет к Солнцу; сила натяжения подвески вращающегося груза и т.д. Для таких сил всегда

$$\overline{m}_O(\overline{F}) \equiv 0.$$

Но тогда

$$\bar{r} \times m\bar{v} = const, \bar{r} \times \bar{v} = const.$$

Последний вектор (постоянство векторной величины означает, что ни длина, ни направление этого вектора не меняются) перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы ***r*** и ***v***. Но это значит, что эти векторы всегда лежат в одной плоскости, а траектория точки – плоская кривая. Кроме того, vh = const.

$$vh = h{\cdot}ds/dt,$$

но

$$h{\cdot}ds = 2dT –$$

удвоенная площадь элементарного треугольника M_1OM (рис. 3.7).

Величина dT/dt – скорость изменения площади, ометаемой радиусом-вектором ОМ при движении М, называемая секторной скоростью точки. В рассматриваемом случае именно это скорость постоянна.

Итак, при движении под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т.е. при этом радиус-вектор точки в любые равные промежутки времени ометает равные площади (закон площадей).

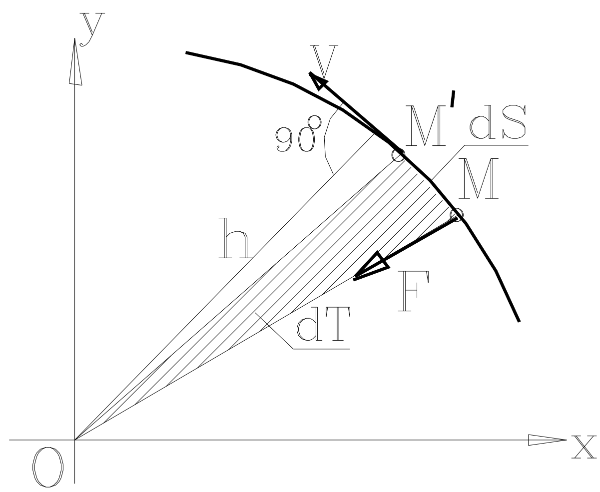


Рис. 3.7

При описании движения планет это формулировка одного из законов Кеплера.

3.3.5 Работа сил. Мощность

Элементарной работой силы $\overline{F}$ называется скалярная величина

$$dA = \overline{F}_\tau d\overline{S} \ ,$$

где F_τ – проекция силы на касательную к траектории точки М, к которой приложена сила, dS – величина элементарного перемещения точки (рис. 3.8). Т.к. $F_\tau = F\cos\alpha$, где α – угол между F и Mτ, то

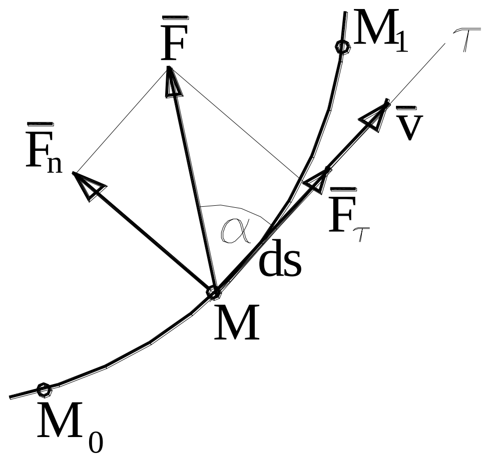


Рис. 3.8

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha. \qquad (3.21)$$

В зависимости от значения угла α элементарная работа может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Поскольку $dS = |d\bar{r}|$, выражение (3.21) можно представить в виде скалярного произведения

$$dA = F \cdot dr \text{ –} \qquad (3.22)$$

элементарная работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения. В проекциях на оси координат (3.22) можно переписать как

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz. \qquad (3.23)$$

Здесь x, y, z – координаты точки приложения силы.

Если точка прошла расстояние MM_1, то

$$A = \int_M^{M_1} F_\tau ds = \int_M^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (3.24)$$

Интеграл берется вдоль кривой MM_1 и является криволинейным.

В частном случае, когда сила постоянна, а траектория прямолинейна, и сила направлена вдоль траектории:

$$A = FS. \qquad [\,A\,] = \text{Дж} = \text{Н}\cdot\text{м} = \ldots$$

Геометрический смысл интеграла (3.24) – площадь σ под кривой зависимости силы от пути (рис. 3.9).

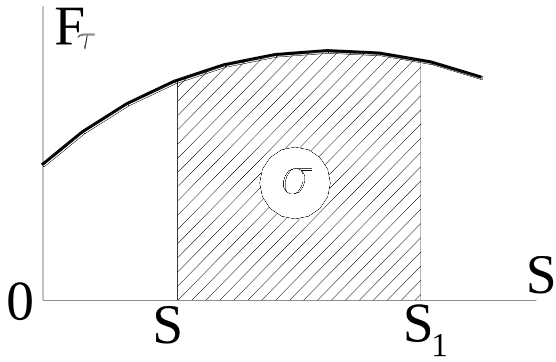


Рис. 3.9

Мощностью называется скалярная величина

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau \cdot v. \qquad (3.25)$$

Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость точки приложения силы.

$[\,N\,]$ = Ватт=Дж/с=…

Из (3.25) ясно, что если мощность (например, двигателя) постоянна, то для выигрыша в силе нужно уменьшить скорость движения.

3.3.6 Примеры

1. Работа силы тяжести

Пусть точка М под действием силы тяжести **P** перемещается из положения $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в положение $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Направим ось Oz вертикально вверх (рис. 3.10). Тогда

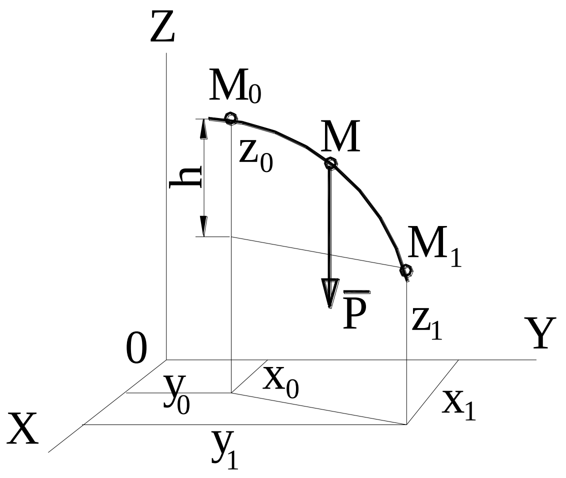


Рис. 3.10

$$P_x = P_y = 0,\ P_z = -P.$$

Из (3.24) следует

$$A = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P(z_0 - z_1).$$

Обозначим $h = z_0 - z_1$, тогда $A = Ph$.

Если $z_0 > z_1$, $h > 0$, то $A > 0$, т.е. работа положительна.

Как видно из этих выкладок, работа силы тяжести зависит только от соотношения начальной и конечной высот и не связана с формой траектории перемещения. Силы такого рода называются потенциальными.

2. Работа силы упругости

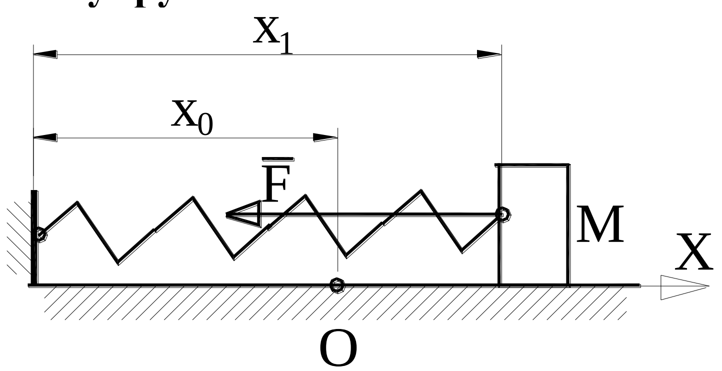


Рис.3.11

Рассмотрим груз М, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к концу пружины (рис. 3.11). В этом случае сила упругости пружины линейно связана с перемещением вдоль x: $F_x = -cx$; это равенство справедливо как при положительных значениях x, так и отрицательных. Знак минус свидетельствует о том, что пружина всегда стремится вернуть груз в положение равновесия. Что касается других составляющих силы, то

$$F_y = F_z = 0.$$

Работа сил упругости на перемещении из положения будет

$$A = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

Работа будет положительной, если точка М движется к положению равновесия, т.е. когда $x_0 > x_1$.

Силы упругости тоже относятся к классу потенциальных.

2. Работа сил трения

Сила трения

$$F_x = -f \cdot N, \quad F_y = F_z = 0; \qquad A = -\int_{M_0}^{M_1} f \cdot N \cdot ds.$$

Работа сил трения всегда отрицательна, и чем длиннее путь, тем эта работа больше. Таким образом, силы трения не потенциальны.

3.3.7 Теорема об изменении кинетической энергии точки

Кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Размерность кинетической энергии такая же, как у работы. Поэтому рассмотрим связь кинетической энергии с работой. Для этого рассмотрим уравнение движения в проекции на касательную

$$ma_\tau = F_\tau \sum F_{k\tau}); \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{dv}{ds}; \; mv\frac{dv}{ds} = F_\tau;$$

$$d(\frac{mv^2}{2}) = \sum F_{k\tau}ds = \sum dA_k. \qquad (3.26)$$

В (3.26) справа – элементарная работа сил F на пути ds. (3.26) представляет собой запись теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме.

Проинтегрировав (3.26) в соответствующих пределах, получим

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(M_0 M_1),$$

т.е. **изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех приложенных к точке сил на том же перемещении.**

Среди сил могут быть и реакции связей, но при движении, например, вдоль гладкой кривой или поверхности их реакция $\overline{N}$ направлена перпендикулярно касательной к траектории движения и $N_\tau = 0$. Таким образом, при движении вдоль гладкой кривой или поверхности изменение энергии определяется работой так называемых активных сил.

Если же поверхность не гладкая, нужно учитывать работу сил трения.

Если сама кривая или поверхность движутся (переносное движение), то абсолютное перемещение точки может быть неперпендикулярным направлению реакции, и тогда работа реакции может быть не равной нулю.

Пример 1

Груз массой 2 кг брошен из точки А с высоты h = 5 м со скоростью v_0 = 20 м/с, а в точке падения С имеет скорость v_1 = 16 м/с (рис. 3.12). Найти работу сил сопротивления воздуха.

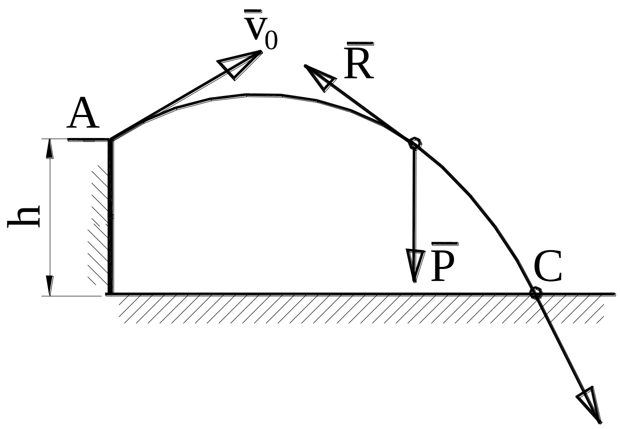


Рис. 3.12

Кинетическая энергия меняется за счет работы сил тяжести $\overline{P}$ и работы $A(\overline{R})$ силы сопротивления воздуха $\overline{R}$.

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mgh+A(\overline{R}),\quad и$$

$$A=\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}-mgh\approx-242.4\,(Дж).$$

Пример 2

Груз весом P подвешен на нити длиной l. Его отклоняют на угол φ_0 и отпускают без начальной скорости (рис. 3.13). Найти скорость груза в положении φ, если сила сопротивления воздуха постоянна и равна R.

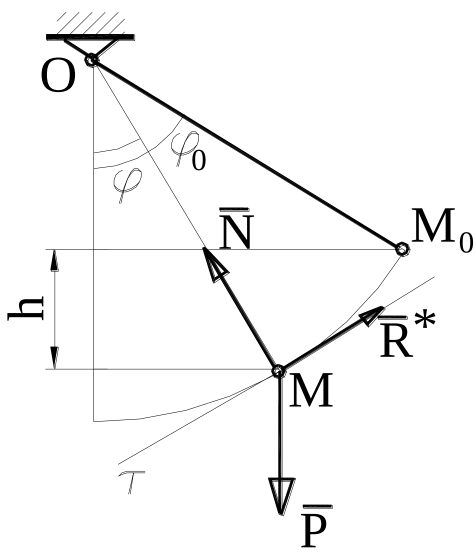


Рис. 3.13

Сила натяжения нити $\overline{N}$ направления перпендикулярно направлению движения груза τ, и не совершает работы. Сила сопротивления $\overline{R}$ направлена против движения, и вклад ее работы в изменение кинетической энергии принимаем со знаком минус. В итоге из уравнения дли изменения кинетической энергии получим выражение скорости

$$P\frac{v^2}{2g} = Ph - R \cdot l \cdot (\varphi_0 - \varphi);$$

$$v = \sqrt{2gh - 2gl(\varphi_0 - \varphi) \cdot R / P}.$$

При $R = 0$ это известная формула Галилея.

Пример 3

Под грузом весом P упругая балка получает статический прогиб a_{st}. Чему равен динамический прогиб балки a_{din} при падении того же груза с высоты h (рис. 3.14)?

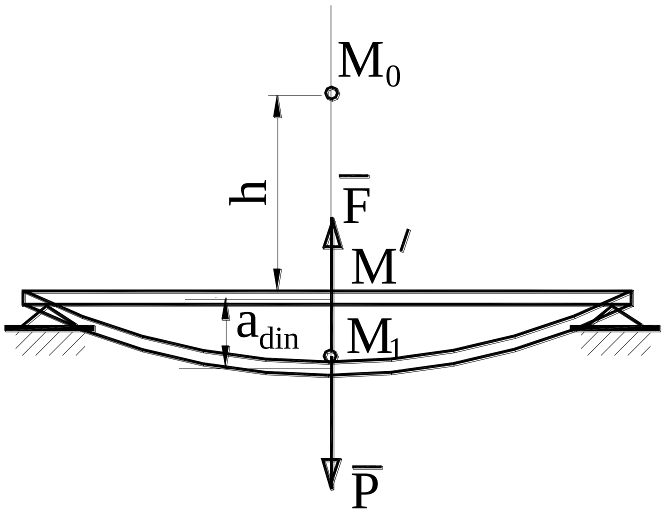


Рис. 3.14

Изменение кинетической энергии в данном случае равно нулю, так как и начальная скорость груза в точке M_0, и конечная в точке M_1 равны нулю. Работа сил тяжести при падении груза равна $P{\cdot}(h{+}a_{din})$, а запасаемая упругая энергия, работа сил упругости, равна $-c{\cdot}a^2_{din}/2$; при нулевом изменении кинетической энергии сумма этих работ равна нулю:

$$P\cdot(h+a_{din})-c\cdot a_{din}^2/2=0.$$

При статическом нагружении $P = c{\cdot}a_{st}$, и тогда

$$a_{din}^2-2\cdot a_{st}\cdot a_{din}-2\cdot h\cdot a_{st}=0.$$

$$a_{din}=a_{st}\pm\sqrt{a_{st}^2+2\cdot h\cdot a_{st}}\,.$$

При $h = 0$ получается $a_{\text{din}} = 2a_{st}$, т.е. динамическое приложение нагрузки вдвое увеличивает прогиб балки.

3.4.1 Несвободное движение точки

Рассмотрим движение точки М по гладкой заданной неподвижной кривой под действием активных сил $\overline{F}_1^{\,a}$, $\overline{F}_2^{\,a}$, … , $\overline{F}_n^{\,a}$ и реакции связи $\overline{N}$. Положение точки относительно начала отсчета O^1 будем определять дуговой координатой *s*, отсчитываемой от точки O^1. Проведем из точки М оси Mτnb, так что ось Mτ направлена в сторону положительного направления отсчета *s*, M*n* – вдоль главной нормали к центру кривизны траектории, Mb – по

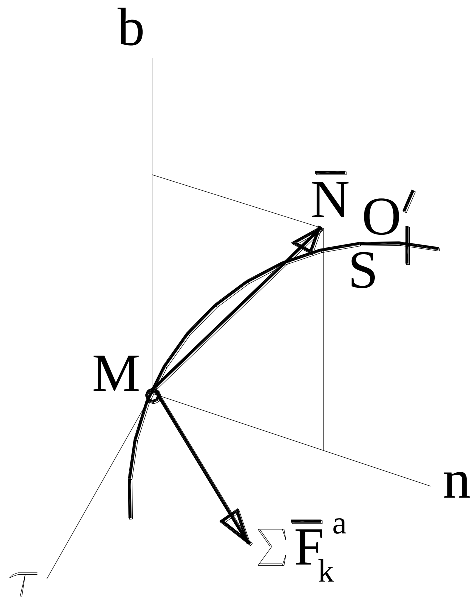


Рис. 3.15

бинормали (рис. 3.15). Для гладкой кривой ее реакция направлена по нормали к ней и лежит в плоскости M*bn*. Поэтому $N_\tau = 0$. В результате дифференциальные уравнения движения точки вдоль заданной будут иметь вид:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}^{a}, \qquad \textit{или} \qquad \left(m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_{k\tau}^{a} \right);$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{kn}^{a} + N_n, \qquad 0 = \sum F_{kb}^{a} + N_b. \tag{3.27}$$

Из первого уравнения, где нет неизвестной реакции, можно определить закон движения точки вдоль кривой. Этим же уравнением можно пользоваться и при наличии трения, но тогда в первое уравнение войдет ила трения, выраженная через реакцию *N*. Два уравнения (оставшиеся) служат для определения реакции связи. Нужно отметить, что при криволинейном движении реакция связи зависит от скорости движения, в отличие от случая статики. Эту скорость, если она не задана, можно найти либо из уравнения (3.27), либо с помощью закона сохранения энергии, что обычно проще.

Пример 1

Кольцу М массой *m*, нанизанному на горизонтально расположенную проволочную окружность, сообщается начальная скорость v_0, направленная вдоль касательной к этой окружности (рис. 3.16); на кольцо действует сила сопротивления $F = kmv^{1/2}$, где *k* – постоянный коэффициент. Найти время, по истечении которого кольцо остановится.

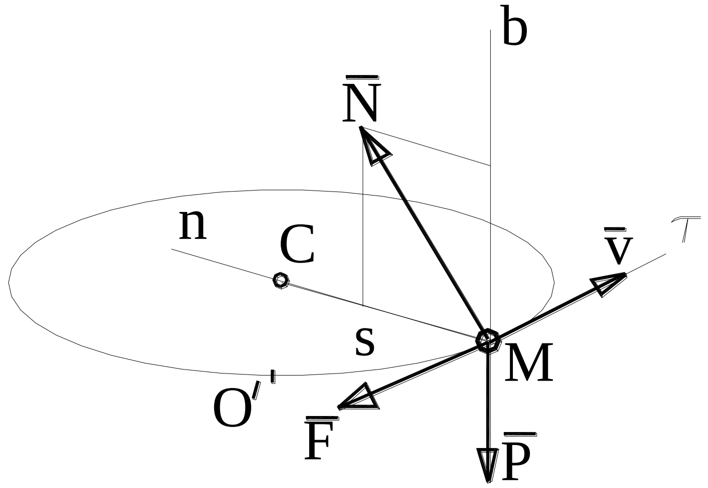


Рис. 3.16

Примем начало отсчета в начальном положении кольца. Уравнение движения кольца составим с учетом того, что сила тяжести $\overline{P}$ в него не войдет (она перпендикулярна оси Mτ и на движение кольца не влияет). То же относится и к реакции связи $\overline{N}$.

$$m\frac{dv}{dt} = -km\sqrt{v}; \quad \textit{отсюда} \qquad \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int_0^t dt,$$

$$\textit{и} \qquad 2(\sqrt{v_0} - \sqrt{v}) = kt.$$

В момент остановки $t = t_1$ $\;v = 0$, тогда

$$t_1 = \frac{2\sqrt{v}}{k}.$$

Время до остановки в этом примере является конечной величиной.

Пример 2

Пусть в предыдущем примере сила сопротивления представляет собой силу трения $F = f{\cdot}N$. Для конкретности R = 0.3 м, v_0 = 2 м/с, f = 0.3. Какой путь до остановки пройдет кольцо?

Составляя уравнения (3.27), получим:

$$m\frac{dv}{dt} = -F,\ \frac{mv^2}{R} = N_n,\ N_b = P.$$

Сила трения

$$F = fN = f\sqrt{N_b^2 + N_n^2}.$$

Т.к. $N_b = P = mg$, то

$$F = fm\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

Таким образом, сила трения зависит от скорости кольца. После замены *dv/dt=v·dv/ds* и сокращения на *m* получим уравнение движения в виде

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{R}\sqrt{g^2R^2 + v^4}$$

Разделяя переменные и беря в обеих частях равенства определенные интегралы, получим

$$\int_{v_0}^{v}\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}} = -2\frac{f}{R}\int_0^s ds,$$

откуда

$$-2fs/R = \ln(v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4}) - \ln(v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 + v_0^4})$$

Окончательно

$$s = \frac{R}{2f}\ln\frac{v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4}}.$$

В момент остановки $v = 0$, поэтому приближенно (считая g = 10 м/с^2) получаем $s \approx 0.55$ м.

Пример 3

Груз весом Р висит на нитке длиной *b*. Его отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. Определить натяжение нити в момент, когда груз будет в нижнем положении (рис. 3.17).

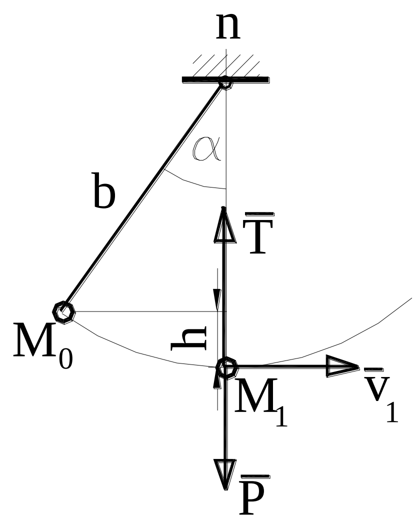


Рис. 3.17

Рассмотрим груз в нижнем положении. На него действуют сила натяжения нити $\overline{T}$ и вес $\overline{P}$. Радиус кривизны траектории определяется длиной нити b, и уравнение движения груза в проекции на нормаль к траектории n (в сторону вогнутости траектории)

$$mv_1^2 / b = T - P,$$

или

$$T = P + mv_1^2 / b,$$

где v_1 – скорость груза в нижнем положении. Для ее определения используем теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Ph = Pb(1 - \cos\alpha).$$

Поскольку $v_0 = 0$, то

$$mv_1^2 = 2Pl(1 - \cos\alpha),$$

и окончательно получаем

$$T = P \cdot (3 - 2\cos\alpha).$$

В частном случае, если нить в начальном положении отклонена на 90^o, натяжение нити в нижней точке будет равно утроенному весу груза.

Пример 4

Груз М подвешен на нити длиной b = ОМ (рис. 3.18). Какую наименьшую скорость нужно сообщить грузу, чтобы он описал полную окружность в вертикальной плоскости?

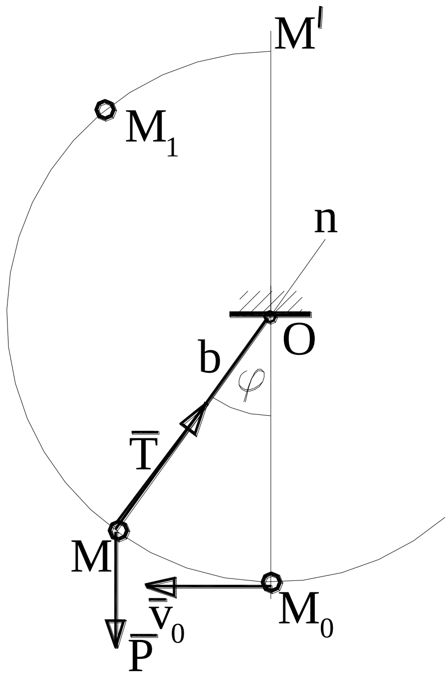


Рис. 3.18

Найдем натяжение нити в произвольном положении, определяемом углом φ, и будем исходить из того, чтобы при любом его значении натяжение нити было положительным.

В положении М на груз действуют сила натяжения нити $\overline{T}$ и вес $\overline{P}$. Составим уравнение движения в проекции на главную нормаль Mn. Тогда

$$mv^2/b = T - P\cdot\cos\varphi, \tag{3.28}$$

где v - скорость груза в положении М. Для ее определения применяем теорему об изменении кинетической энергии:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = -Ph = -Pb\cdot(1-\cos\varphi).$$

Тогда

$$mv^2 = mv_0^2 - 2\cdot P\cdot b\cdot(1-\cos\varphi).$$

Подставим это значение mv^2 в (3.28) и вычислим T:

$$T = P(v_0^2/gb-2+3\cdot\cos\varphi).$$

Наименьшее значение величина Т будет иметь при $\varphi=180^o$:

$$T_{min} = P(v_0^2/gb-5).$$

Отсюда, при условии $T_{min} > 0$ имеем

$$v_0 > (5gb)^{1/2}.$$

Если груз подвешен на невесомом стержне, который может работать и на сжатие, то груз опишет полную окружность при условии, что его скорость нигде (кроме верхней точки) не обращается в нуль. Но тогда изменение кинетической энергии от начального значения до нуля равно работе сил тяжести при перемещении груза из нижнего положения в верхнее:

$$mv_0^2/2 = 2mgb, \text{ откуда } v_{min} = (4gb)^{1/2}.$$

3.4.2 Относительное движение точки

Все законы динамики справедливы для абсолютного движения точки. Теперь рассмотрим движение точки по отношению к системе Oxyz, которая сама движется относительно неподвижной (инерциальной) системы $O_1x_1y_1z_1$. Для абсолютного движения справедливо:

$$m\bar{a}_a = \sum \bar{F}_k.$$

В то же время из кинематики известно, что

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{kor}.$$

В дальнейшем обозначим $\bar{a} = \bar{a}_r$ (нас интересует в данном случае относительное движение точки), и тогда, введя переносную и кориолисову силы инерции, получим уравнение движения:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_e^{in} + \bar{F}_{kor}^{in}. \tag{3.29}$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{F}_e^{in} = -m\bar{a}_e, \quad \bar{F}_{kor}^{in} = -m\bar{a}_{kor}$$

Полученные уравнения - не что иное, как запись основного закона динамики для относительного движения точки.

Следовательно,

Все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются точно так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

Частные случаи:

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то в (3.29) исчезает справа последнее слагаемое (отсутствует кориолисово ускорение), и закон относительного движения принимает вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k + \bar{F}_e^{in}.$$

2. Если подвижные оси движутся поступательно, равномерно и прямолинейно, то в (3.29) справа останется лишь первое слагаемое, т.е. закон движения будет иметь точно такой же вид, как и в неподвижной системе координат. Следовательно, такая система отсчета будет инерциальной.

Отсюда вытекает следствие:

никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится данная система отсчета в покое или в состоянии равномерного прямолинейного движения.

В этом заключается так называемый **принцип относительности классической механики**, открытый еще Галилеем.

3. Если точка неподвижна относительно подвижных осей, то $\overline{F}_{kor}^{in} = 0$, относительное ускорение точки тоже равно нулю. Тогда (3.29) принимает вид

$$\sum \overline{F}_k + \overline{F}_e^{in} = 0.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение относительного равновесия (покоя) точки. Из него следует, что уравнения относительного равновесия составляются точно так же, как уравнения в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам добавить переносную силу инерции.

3.5 Прямолинейные колебания точки

3.5.1 Свободные колебания без учета сил сопротивления

Колебания можно классифицировать по физическим признакам: механические, акустические, радиотехнические и т.д. Далее рассматриваются механические колебания, но многие законы, справедливые для них, справедливы и для других. Преимущество изучения механических колебаний заключается в их наглядности.

Рассмотрим движение точки вдоль прямой при действии силы, которая всегда направлена к некоторому центру (точке) О и пропорциональна расстоянию от этого центра, проекция которой на ось Ох (рис. 3.19):

$$F_x = -cx.$$

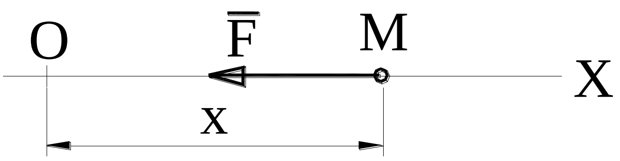


Рис. 3.19

Такая сила иногда называется восстанавливающей. Примеры таких сил – силы упругости, сила тяжести.

Дифференциальное уравнение движения точки массы m в проекции на ось Ох прямой будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx, \quad или \qquad \ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{3.30}$$

Где $$k^2 = c/m.$$

Это дифференциальное уравнение описывает свободные колебания точки при отсутствии сил сопротивления.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad (3.31)$$

или в другой форме

$$x = A \sin (kt+\alpha)). \qquad (3.31a)$$

В этих соотношениях C_1, C_2 (A, k) – постоянные интегрирования.

Последняя форма представления решения удобнее для общих исследований.

Скорость точки

$$v_x = \dot{x} = Ak\cos(kt+\alpha). \qquad (3.32)$$

Колебания, совершаемые точкой по закону (3.31), называются гармоническими. A – амплитуда колебаний, $\varphi = kt+\alpha$ – фаза колебаний, причем фазы, отличающиеся на 2π, считаются одинаковыми. Фаза, в отличие от координаты x, определяет не только положение точки, но и направление ее дальнейшего движения.

Величина α определяет начальную фазу колебаний.

Величина k называется круговой частотой колебаний; она определяет, сколько полных колебаний происходит за 2π секунд.

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает полное колебание, называется периодом. По определению $kT = 2\pi$, откуда $T = 2\pi/k$.

Величина ν, обратная периоду, называется частотой; она определяет число колебаний, совершаемых в одну секунду:

$$\nu = 1/T = k/2\pi.$$

Таким образом, обычная и круговая частоты отличаются друг от друга множителем 2π.

Для определения постоянных интегрирования можно использовать или начальные условия, или краевые.

Так, **начальные условия**:

$$\text{при} \quad t = 0: \qquad x = x_0, \quad v = v_0.$$

Тогда из (3.31) и (3.32) получаем

$$x_0 = A \sin\alpha, \;\; v_0/k = A \cos\alpha,$$

и

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \quad tg\alpha = kx_0 / v_0.$$

Краевые условия

Пусть при $t = 0 \quad x = 0$, а при $t = t_1 \quad x = l$.

Тогда

$$0 = \sin\alpha, \;\; l = A \sin(kt+\alpha); \quad \alpha = 0, \;\; A = l/\sin kt_1,$$

откуда решение уравнения колебаний будет

$$x = (l/\sin kt_1)\cdot\sin kt –$$

если только $t_1 \neq \pi/k = T/2$ (иначе знаменатель дроби в скобках обращается в нуль).

Решение существует только при $l = 0$ ($l = A \sin\pi$), иначе решения нет. Но если $l = 0$ и $t_1 = \pi/k$, то для определения A уравнение имеет вид $0 = A \sin \pi$, откуда ясно, что A может быть любым. Т.е. решение имеет вид

$$x = A \sin kt,$$

где A – любое число. Таким образом, в отличие от начальных условий, краевые могут приводить либо к отсутствию решения, либо к его неоднозначности.

Свойства свободных колебаний

1. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий (или краевых условий).
2. Частота и период колебаний от начальных (краевых) условий не зависят.

Колебания, рассмотренные выше, называются линейными.

Если к точке приложить постоянную по модулю и направлению силу, то характер колебаний не изменится, только центр колебаний смещается в сторону действия силы на величину соответствующего статического отклонения точки.

3.5.2 Свободные колебания при вязком сопротивлении

Если помимо восстанавливающей силы к телу приложена сила вязкого сопротивления

$$R = -\mu v,$$

то дифференциальное уравнение движения будет

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}, \textit{или}$$
$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (3.33)$$

Здесь $$c/m = k^2, \mu/m = 2b.$$

Это уравнение свободных колебаний точки при наличии силы вязкого сопротивления, пропорциональной скорости. Ищем его решение в виде $x = e^{nt}$. Подставим это решение в (3.33) и получим характеристическое уравнение

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0,$$

корни которого

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \tag{3.34}$$

1. Пусть $k > b$, т.е. сопротивление мало по сравнению с восстанавливающей силой. Обозначим

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2},$$

тогда

$$n_{1,2} = -b \pm ik,$$

и корни характеристического уравнения – комплексные. Тогда решение имеет вид

$$x = e^{-bt}\,(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)\,, \text{ или}$$

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \tag{3.35}$$

Постоянные в этих выражениях, например, в последнем соотношении A и α, определяются по начальным условиям.

Решение (3.35) описывает так называемые затухающие колебания. Величина $T_1 = =2\pi/k_1$ – период затухающих колебаний. Ее можно представить в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}} \approx T\left(1 + \frac{b^2}{2k^2}\right). \tag{3.36}$$

В этом выражении T – период свободных колебаний без учета вязкого сопротивления. Отсюда видно, что при наличии вязкого сопротивления период колебаний немного возрастает. При малом сопротивлении этим изменением можно пренебречь и считать, что период не меняется, т.е. $T_1 \approx T$. Если первое максимальное отклонение вправо x_1 происходит в момент t_1, то второе – в момент (t_1+T_1) и т.д. Тогда по (3.35) с учетом k_1T_1 = 2π получим

$$x_1 = Ae^{-bt_1}\sin(k_1t_1+\alpha),$$
$$x_2 = Ae^{-b(t_1+T_1)}\sin(k_1t_1+k_1T_1+\alpha) = x_1e^{-bT_1}.$$

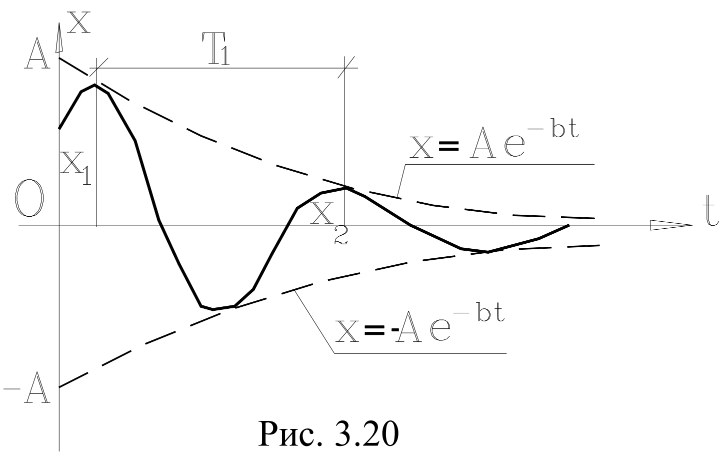


Рис. 3.20

Этот результат (рис. 3.20) в более общем случае можно представить в виде

$$x_{n+1} = x_ne^{-bT_1}.$$

Это означает, что размах колебаний убывает по геометрической прогрессии со знаменателем exp(–bT_1), который называется **декрементом колебаний**, а модуль его логарифма – величина bT_1 – **называется логарифмическим декрементом**.

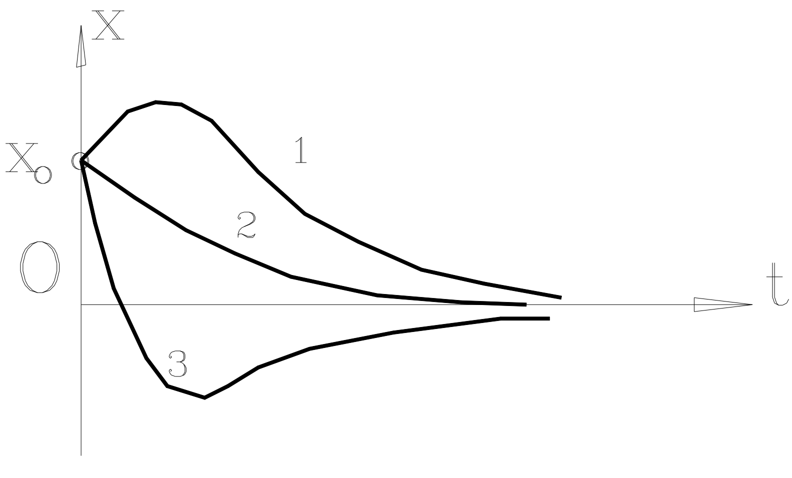


Рис. 3.21

2. Пусть $b > k$, т.е. сопротивление велико по сравнению с восстанавливающей силой. Обозначим величину $b^2 - k^2 = r^2$, тогда корни характеристического уравнения будут $n_{1,2} = -b \pm r$ – они оба действительны и отрицательны (т.к. $r < b$). Следовательно, решение уравнения (3.33) в этом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}.$$

Движение точки будет уже не колебательным. Аналогичный вывод справедлив и для случая $b = k$. Графики движения – зависимости x от времени – приведены на рис. 3.21.

3.5.3 Вынужденные колебания. Резонанс

Пусть к точке, помимо восстанавливающей силы, приложена еще периодическая сила, проекция которой на ось Ox:

$$Q = Q_0 \cdot \sin pt,$$

называемая возмущающей силой. Колебания при наличии такой силы называются вынужденными.

Рис. 3.21

1. Рассмотрим движение точки при наличии возмущающей силы и при отсутствии сопротивления.

Дифференциальное уравнение движения будет

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt. \Rightarrow \\ &\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt, \quad \textit{где} \\ &(k^2 = c/m, P_0 = Q_0/m). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Здесь P_0 имеет размерность ускорения.

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (3.37).

Общее решение однородного уравнения известно – оно получено ранее и имеет вид, определяемый формулой (3.31). Частное решение неоднородного уравнения для случая $p \neq k$ ищем в виде

$$x_2 = B \sin pt, \tag{3.38}$$

где B нужно выбирать из условия, чтобы равенство (3.37) обратилось в тождество. Подставим это значение x_2 и его вторую производную в (3.37), тогда

$$-p^2 B \sin pt + k^2 B \sin pt = P_0 \sin pt.$$

Откуда $B = \dfrac{P_0}{k^2 - p^2}$, а частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt,$$

а общее принимает вид

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{3.39}$$

Как и ранее, постоянные интегрирования A и α должны определяться из начальных условий.

Из (3.39) следует, что колебания точки складываются из:

1) колебаний с амплитудой A, зависящей от начальных условий, и с частотой k; (это собственные колебания);

2) колебаний с амплитудой B, не зависящей от начальных условий, и частотой p вынуждающей силы; это вынужденные колебания.

В реальных условиях свободные колебания всегда затухают, и движение будет вынужденными колебаниями с частотой вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний

$$B = \frac{P_0}{(k^2 - p^2)} = \frac{\lambda_0}{\left|1 - p^2 / k^2\right|},$$

где λ_0 – величина статического отклонения точки под действием вынуждающей силы:

$$\lambda_0 = P_0 / k^2 = Q_0 / c.$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот собственных колебаний и вынуждающей силы. При $p \approx k$ она становится бесконечной. **Явление, при котором частота собственных колебаний и частота периодической вынуждающей силы совпадают (p=k), носит название резонанса.**

3.5.4 Вынужденные колебания при вязком сопротивлении

Пусть точка движется под действием:

- восстанавливающей силы F;
- силы вязкого сопротивления R;
- возмущающей силы $Q = Q_0 \sin pt$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin\ pt. \qquad (3.44)$$

Полученное неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет решение вида $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение однородного уравнения, соответствующего (3.44), когда правая часть равна нулю (при $b < k$ это решение представлено формулой (3.35)), а x_2 – частное решение (3.44).

Частное решение ищется в виде:

$$x_2 = B \sin (pt - \beta). \tag{3.45}$$

Постоянные B и β подбираются так, чтобы уравнение (3.44) выполнялось тождественно. Подставим это значение x_2 и его производных в уравнение (3.44). Обозначив $\psi = pt - \beta$, получим

$$B(-p^2 + k^2)\sin\psi + 2bpB\cos\psi = P_0(\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi).$$

Чтобы это равенство выполнялось при любых значениях $\psi = pt - \beta$, коэффициенты при $\sin\psi$, $\cos\psi$ в левой и правой частях порознь должны быть равны друг другу:

$$B(k^2 - p^2) = P_0\cos\beta, \quad 2bpB = P_0 \sin\beta.$$

Отсюда

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}, \quad tg\beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}. \tag{3.46}$$

Таким образом, решение уравнения (3.44) будет иметь вид

$$x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha) + B\sin(pt - \beta), \tag{3.47}$$

где A и α определяются из начальных условий, а величины B и β определяются формулами (3.46) и от начальных условий не зависят. При $b = 0$ получается рассмотренный ранее случай отсутствия сопротивления.

Первое слагаемое справа в выражении (3.47) отвечает собственным колебаниям, затухающим со временем. Второе слагаемое представляет собой решение, отвечающее вынужденным колебаниям. По истечении периода времени установления первое слагаемое становится малым и остаются лишь вынужденные колебания.

Введем обозначения:

- отношение частот $z = p/k$;
- характеристика сопротивления $h = b/k$;
- величина статического отклонения точки под действием силы Q_0, равная $\lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c$.

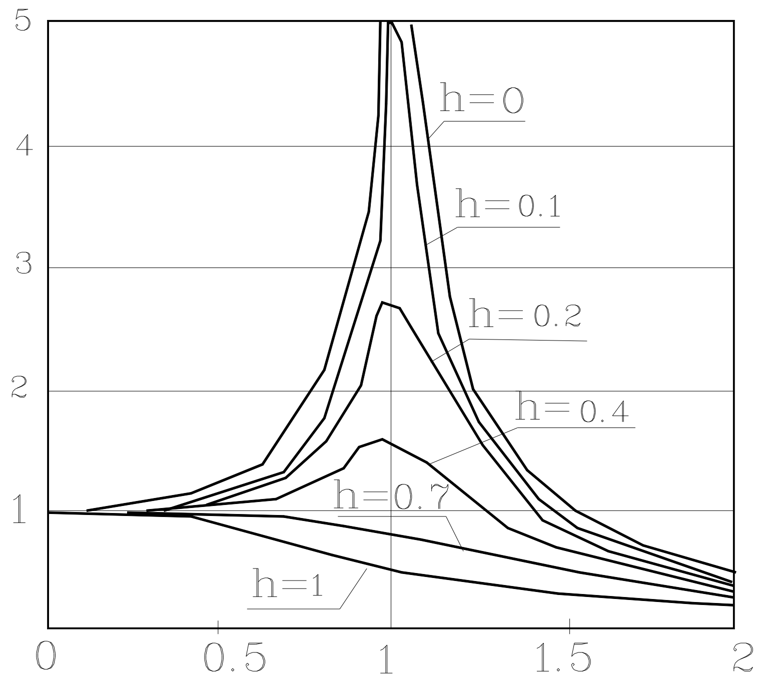


Рис. 3.21

Тогда выражение (3.46) можно переписать как

$$B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4h^2 z^2}}, \quad tg\beta = \frac{2hz}{1-z^2}. \qquad (3.47)$$

Таким образом, величины B и β зависят от двух безразмерных параметров z, h. Вид этой зависимости приведен на рисунке 3.21, где введено обозначение $\eta = B/\lambda_0$ для величины, показывающей, во сколько раз амплитуда B больше статического отклонения λ_0, от отношения частот z. Эта величина называется коэффициентом динамичности.

Итак, вынужденные колебания точки, в отличие от собственных колебаний, имеют следующие свойства.

1. Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

2. Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают.

3. Частота вынужденных колебаний равна частоте возмущающей силы и от характеристик колеблющейся системы не зависит.

4. Даже при малой величине возмущающей силы можно получить интенсивные вынужденные колебания за счет резонанса.

5. Даже при большой возмущающей силе можно получить сколь угодно малые колебания системы, если частота вынуждающей силы p много меньше частоты k собственных колебаний системы.

4 ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

В механике, в том числе и в теоретической механике, различаются две группы величин. Одна из них характеризует меру механического движения материальных объектов; вторая - меру механического взаимодействия материальных объектов.

К первой группе относятся
- количество движения;
- кинетический момент;
- кинетическая энергия.

Ко второй группе относятся:
- сила;
- импульс силы;
- импульс момента;
- мощность;
- работа.

Общие теоремы динамики устанавливают зависимости между мерами механического движения материальных объектов и мерами механического взаимодействия между ними.

При изучении каждой из общих теорем динамики сначала рассматривается определенная мера движения, а затем соответствующая ей мера механического взаимодействия.

Для сопоставления любого явления с другими аналогичными требуется **количественное выражение его качеств**. При этом возникает понятие масштаба (размера), которое нужно выразить количественно в виде некоторых величин, чисел. Такое число зачастую выражает собой не одно, а несколько свойств данного явления. Например, сила ветра или землетрясения оцениваются в баллах, причем каждому из уровней в баллах обычно ставится в соответствие целый набор признаков.

Для характеристики масштабов механического движения используются и меры механического движения.

Наиболее старой (возникшей исторически первой) является количество движения. Еще Ньютон ее определял следующим образом: «Количество движения есть мера такового, устанавливаемого пропорционально скорости и массе». Эта мера используется лишь тогда, когда механическое движение сравнивается тоже с механическим движением (в отличие, например, от работы, которая может из механической формы переходить в тепловую).

Меры механического взаимодействия – это физические величины, характеризующие интенсивность механического взаимодействия между телами.

Различают меры механического взаимодействия мгновенные (сила) и интегральные, за некоторый промежуток времени (импульс силы).

4.1 Введение в динамику системы.

Моменты инерции

Определение

Механической системой называется система материальных точек или тел, между которыми существуют силы взаимодействия.

Примером такой системы может служить солнечная система – центральное светило и планеты связаны силами закона всемирного тяготения.

Все силы в системе делятся на внешние, действующие на тела и точки системы со стороны внешних точек и тел, не входящих в состав данной механической системы, и внутренние как результат взаимодействия тел и точек внутри системы. Это разделение является условным – одни и те же силы могут быть и внешними, и внутренними. Так, силы, действующие на Землю и Луну со стороны Солнца при анализе движения системы Земля – Луна, – внешние. При изучении движения всей солнечной системы эти же силы являются внутренними.

Свойства внутренних сил

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равна нулю.
2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равна нулю.

Для доказательства этих утверждений вспомним, что два любых тела по третьему закону динамики действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами, в сумме дающими нуль. Суммирование по всем таким парным взаимодействиям тоже даст нуль.

Аналогично относительно любого центра такая

система сил даст суммарный момент, равный нулю. Ясно, что это

справедливо и для произвольной оси.

Масса системы равна сумме масс тел, образующих систему.

Распределение масс характеризуется значениями масс m_i и их координатами x_i, y_i, z_i. Однако при описании движения системы (например, для описания твердого тела как совокупности отдельных его частей) во многих случаях достаточно знать не эти параметры, а некоторые суммарные (интегральные) характеристики системы. Такими характеристиками являются:

- координаты центра масс;
- осевые моменты инерции;
- центробежные моменты инерции.

Центр масс

Мы ранее располагали выражением для определения координат центра тяжести системы тел или материальных точек. Заменив в них выражение веса P на величину $M{\cdot}g$, а для отдельных частей p_k на $m_k g$, в тех же формулах после сокращения на g получим выражения для координат центра масс

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k, y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k, z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k.$$

Геометрическая точка с этими координатами называется центром масс или центром инерции механической системы.

Если положение центра масс определять его радиусом вектором $\bar{r}_C$, то для него из приведенных выражений получится формула

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k \bar{r}_k,$$

где $\bar{r}_k$ - радиусы-векторы точек, образующих систему.

Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции

Моментом инерции тела (системы) относительно оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_k h_k^2.$$

Отсюда видно, что момент инерции тела относительно любой оси положителен и не равен нулю. Далее будет показано, что осевой момент инерции является мерой инертности тела при его вращательном движении. Единица измерения момента инерции кг·м^2.

Поскольку расстояние от точки m_k до оси Oz определяется величиной $x_k^2 + y_k^2$, где x_k и y_k – координаты точки с номером k, аналогично и до осей Ox, Oy, то

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2),\ J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2),\ J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

В ходе расчетов удобно пользоваться так называемым радиусом инерции тела. Это величина, определяемая относительно оси Oz равенством

$$J_z = M\rho_z^2,$$

где M – масса тела. Таким образом, радиус инерции равен расстоянию от оси Oz до той точки, где нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела от суммирования в полученных выше формулах нужно перейти к интегрированию. Если учтем, что $dm = \rho dV$, где ρ – плотность, V – объем, то

$$J_z = \int_V h^2 dm = \int_V \rho h^2 dV = \int_V \rho(x^2 + y^2)dV$$

и т.д.

Пример 1

Найти момент инерции однородного стержня AB длиной l и массой M относительно оси Oz, проходящей через его конец A перпендикулярно стержню (рис. 3.22).

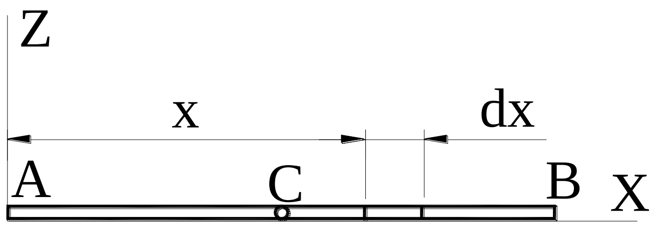


Рис. 3.22

Обозначим через $\rho_1 = M/l$ массу единицы длины стержня. Тогда, поскольку $h = x$, а масса $dm = \rho_1 dx$, получим

$$J_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}.$$

Пример 2

Найти момент инерции тонкого круглого однородного кольца радиусом R и массой M относительно оси Oz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

Так как все точки кольца находятся на расстоянии R от оси, то

$$J_C = \sum m_k R^2 = MR^2.$$

Очевидно, что такой же результат будет и для круглой

цилиндрической тонкой оболочки.

Пример 3

Найти момент инерции круглой тонкой однородной пластины массы M и радиуса R относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через центр (рис. 3.23).

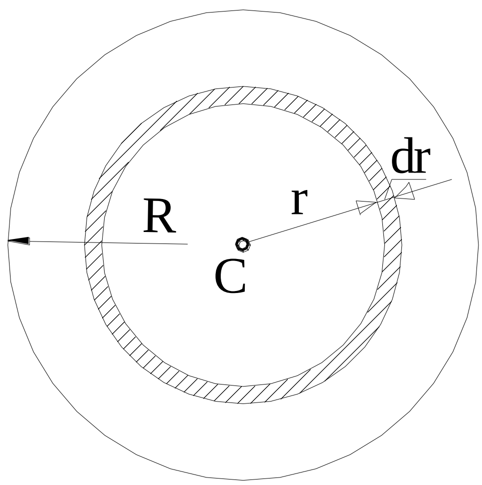


Рис. 3.23

Для элементарного кольца радиусом r и шириной dr его масса будет

$$dm = \rho_2 \cdot 2\pi r dr,$$

где ρ_2 – масса единицы площади пластины $M/\pi r^2$. Тогда для этого элементарного кольца будет

$$dJ_C = r^2 \cdot dm = \rho_2 \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot dr,$$

а для всей пластины

$$J_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho_2 R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}.$$

Справка.

Для тел распространенной формы приведем выражения моментов инерции без вывода.

1. Моменты инерции прямоугольной пластины массой M относительно осей x, y, параллельных сторонам пластины $a \parallel x$, $b \parallel y$ и проходящим через ее центр:

$$J_x = Mb^2/3, \qquad J_y = Ma^2/3.$$

2. Момент инерции конуса массой M относительно оси z, проходящей вдоль оси конуса, радиус основания конуса R:

$$J_z = 0.3MR^2,$$

3. Момент инерции сплошного шара массой M и радиусом R относительно оси z, направленной вдоль диаметра шара:

$$J_z = 0.4MR^2.$$

Теорема Гюйгенса

Пусть известен момент инерции тела относительно некоторой оси Cz', проходящей через центр масс тела, точку C (рис. 3.24). Проведем параллельно этой оси другую ось Oz на расстоянии d от нее таким образом, что она пересекает ось Ox. Тогда момент инерции относительно исходной оси будет

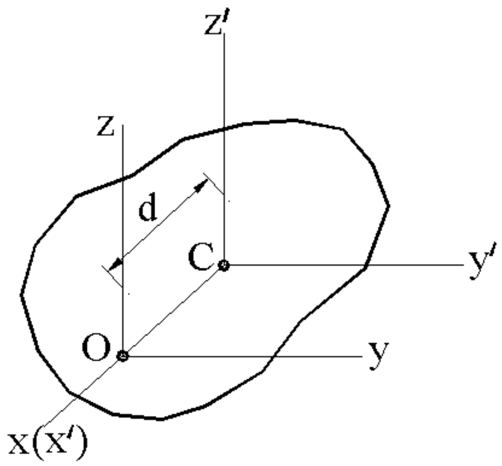


Рис. 3.24

$$J_C = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

а для параллельной оси Oz' с учетом равенств

$$x_k' = x_k + d, \qquad y_k' = y_k$$

получим

$$J_O = \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) + \left(\sum m_k\right) d^2 + \left(\sum m_k x_k'\right) 2d.$$

Справа первое слагаемое есть не что иное, как J_C.

Второе слагаемое - произведение массы тела на расстояние между осями.

В третьем слагаемом в скобках не что иное, как произведение массы тела M на координату x_C его центра масс. Но по построению исходная система осей проходит через центр масс, и $x_C = 0$, таким образом, последнее слагаемое равно нулю.

Таким образом, **момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей**

параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:

Это и есть формулировка теоремы Гюйгенса

$$J_{Oz} = JCz^{/} + Md^2. \qquad \text{(a)}$$

Из этой формулы видно, что $J_{Oz} > J_{Cz}{}^{/}$, т.е. для всех параллельных осей минимальный момент инерции тела будет для той оси, которая проходит через центр масс.

Теорема Гюйгенса позволяет найти момент инерции тела относительно данной оси Oz_1 и в том случае, когда известен его момент инерции относительно любой оси Az_2, параллельной Oz_1. При этом нужно знать расстояния d_1 и d_2 от этих осей до центра масс тела. Тогда, зная J_{Az_2} и d_2, мы по формуле (a) определяем $J_{Cz}{}^{/}$, а затем по той же формуле искомый момент J_{Oz_1} .

4.2 Теорема о движении центра масс

4.2.1 Дифференциальные уравнения движения системы

Для системы n материальных точек основной закон динамики для каждой отдельной точки имеет вид

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \tag{4.1}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$, а индексы «e» (exterior – внешний) относятся к внешним, индексы «i» (interior - внутренний) – к внутренним силам рассматриваемой системы. Полученная система n уравнений представляет собой дифференциальные уравнения в векторной форме. Интегрирование этой системы, то есть поиск точного решения для каждой точки системы, возможно при n > 2 лишь в отдельных частных случаях. Однако часто ценность имеют решения для всей системы в целом.

Рассмотрим для начала пример интегрирования системы типа (4.1) для простейшего случая, когда n = 2.

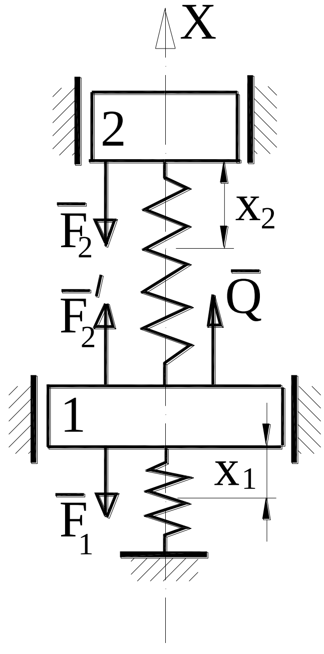


Рис. 4.1

Пусть груз массой m_1 на пружине с жесткостью c_1 (рис. 4.1) совершает колебания в вертикальном направлении под действием вынуждающей силы, проекция которой на ось X

$$Q_x = Q_0 \cdot \sin pt.$$

Определить, при каких условиях эти колебания можно погасить за счет крепления к первому грузу второго с массой m_2 через пружину с жесткостью c_2.

Учитываем силы, действующие на обе массы за счет удлинения пружин, отсчитываемого от положения статического равновесия каждого груза.

Тогда первый груз движется под действием силы упругости пружины с коэффициентом жесткости c_1, пружины с коэффициентом жесткости c_2, расположенной между телами, и вынуждающей силы. Дифференциальное уравнение движения первого груза в проекции на ось X имеет вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) + Q_0 \sin pt.$$

Второй груз движется только под действием пружины с коэффициентом жесткости c_2, и дифференциальное уравнение движения его будет иметь вид :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1).$$

Решать эту систему уравнений нужно совместно. При этом нас интересует случай гашения колебаний первого груза, т.е. условия, когда $x_1 = 0$. При выполнении этого условия уравнения движения принимают вид

$$c_2 x_2 + Q_0 \sin pt = 0, \qquad m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 x_2.$$

Из первого уравнения выражаем x_2, дважды дифференцируем и подставляем во второе. После сокращений получим

$$m_2p^2 = c_2.$$

Это и есть условие гашения колебаний – его можно выполнить, подбирая либо массу, либо жесткость пружины, либо то и другое. При этом слишком малое значение массы m_2 (из требования минимума дополнительного веса) может привести к малому c_2, а это даст очень большую амплитуду колебаний дополнительной массы.

Решение такого рода задач при количестве масс $n > 2$, как отмечено выше, возможно только в некоторых исключительных случаях. Поэтому далее рассматриваем движения системы как некоторого целого образования.

4.2.2. Теорема о движении центра масс

Определим закон движения центра масс системы.

Возьмем за основу систему уравнений (4.1) и почленно сложим ее левые и правые части. Тогда получим

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i. \tag{4.2}$$

Формула для радиуса-вектора центра масс имеет вид:

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C.$$

Беря вторую производную от обеих частей этого равенства, получим в уравнении (4.2)

$$\sum m_k \bar{a}_k = M\bar{a}_C.$$

В правой части уравнения (4.2) суммирование внутренних сил даст нуль, и в итоге уравнение (4.2) принимает вид:

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e. \tag{4.3}$$

Это уравнение выражает **теорему о движении центра масс системы**:

произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Другая формулировка:

центр масс системы движется, как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Проектируя уравнение (4.3) на оси системы координат, получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e,\; M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e,\; M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e.$$

Выводы

1. Ранее, когда мы рассматривали движение материальной точки, мы сознательно отвлекались от ее размеров. Рассмотренная теорема говорит о том, что это вполне оправдано. В частности, когда рассматривается поступательное движение системы, ее всегда можно рассматривать как материальную точку с соответствующей массой.

2. При изучении движения центра масс любой системы теорема позволяет сразу исключить из рассмотрения все внутренние силы, как правило, неизвестные.

Следствия

1. Если сумма всех внешних сил равна нулю, то центр масс движется прямолинейно и равномерно. **Действие внутренних сил движение центра масс не меняет.**

2. Если сумма проекций всех внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось – величина постоянная.

Эти результаты выражают собой закон движения центра масс.

Рассмотрим систему трех тел (точек) с массами m_1, m_2, m_3, центры масс которых вдоль оси X определяются координатами x_1, x_2, x_3, а начальное положение центра масс всей системы вдоль той же оси определяется координатой x_C. Если обозначим массу всей системы M, то справедливо соотношение

$$Mx_C = m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3.$$

Пусть точки смещаются под действием внутренних сил на расстояния вдоль оси X соответственно на расстояния b_1, b_2, b_3. Поскольку внешние силы отсутствуют, то центр тяжести всей системы не смещается вдоль оси X, а для нового положения точек справедливо равенство

$$Mx_C = m_1(x_1+b_1)+m_2(x_2+b_2)+m_3(x_3+b_3).$$

Сравнивая два последних равенства, получаем

$$m_1b_1+m_2b_2+m_3b_3 = 0. \qquad (a)$$

Таким образом, если имеет место закон сохранения движения центра масс вдоль оси X, то алгебраическая сумма произведений масс точек (тел) системы на проекции абсолютных перемещений их центров масс равна нулю, если начальная скорость центра масс равна нулю. При вычислении величин b_1, b_2, b_3 нужно всегда учитывать их знаки.

Формула (a) останется справедливой после умножения всех ее слагаемых на любую постоянную величину. Если в качестве этой постоянной принять ускорение свободного падения g, то вместо масс в формуле (a) можно записать вес каждой точки.

Пример 1

На носу и на корме лодки расположены два человека разного веса p_A и p_B, вес лодки p. Пренебрегая сопротивлением воды, определить величину и направление смещения лодки, если люди поменяются местами (рис. 4.2).

Рассматриваем лодку и людей на ней как единую систему, тогда силы взаимодействия людей с лодкой при их передвижении можно считать внутренними. Внешними силами для этой системы будут вертикальные силы тяжести (вес лодки $\overline{p}$, вес каждого из людей $\overline{p}_A$, $\overline{p}_B$) и вертикально направленная реакция воды $\overline{N}$.

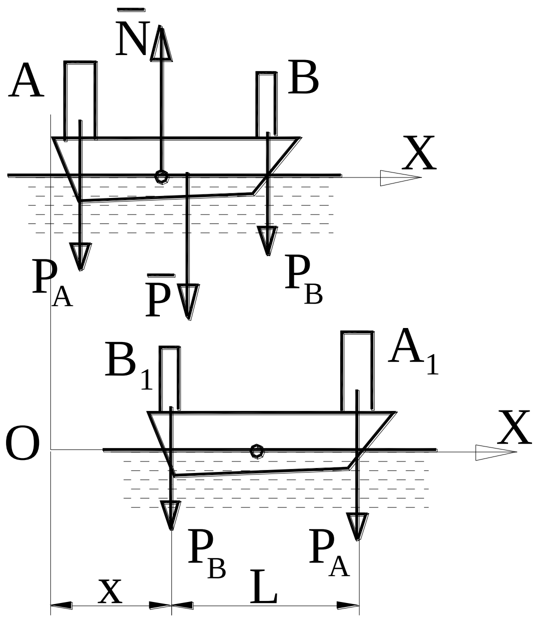


Рис. 4.2

Сумма проекций всех этих вертикальных сил на горизонтальную ось ОХ равна нулю, поэтому, принимая начальную скорость лодки равной нулю, можем в соответствии с теоремой считать, что центр масс системы останется на месте

$$x_C = 0.$$

На рис. 4.2 показано положение лодки, которому отвечает положительное смещение от начального положения величиной x. Если при решении задачи окажется, что $x < 0$, это будет означать, что смещение лодки в действительности происходит в другую сторону.

Если перемещение каждого по лодке из людей принять равным L, а итоговое перемещение лодки обозначить как x, то в соответствии со схемой полное перемещение первого человека, показанное на схеме как AA_1, будет $x+L$, а перемещение второго x-L. Тогда в соответствии с формулой (a) можно записать

$$px+p_A(x+L)+p_B(x-L)=0.$$

Отсюда определяется смещение лодки

$$x = \frac{(p_A - p_B)L}{P}, \qquad где \qquad P = p + p_A + p_B.$$

Направление смещения определяется соотношением весов $p_А$ и $p_В$. При $p_А > p_В$ лодка переместится вправо, при $p_А < p_В$ – влево, при $p_А = p_В$ лодка останется на месте.

4.3 Теорема об изменении количества движения системы

Определение

Количеством движения системы называется векторная величина $\overline{Q}$, равная геометрической сумме количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k .$$

Если учесть, что

$$\sum m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_C ,$$

то после взятия производной по времени от обеих частей этого равенства получим

$$\overline{Q} = M\overline{v}_C ,$$

т.е. **количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс**.

Таким образом, если при движении системы ее центр масс находится в покое, то количество движения системы равно нулю. Если движение тела (системы) является сложным, то его вращательная часть не влияет на количество движения. Например, для катящегося колеса количество его движения равно произведению массы колеса на скорость его центра масс независимо от скорости вращения вокруг центра масс.

Таким образом, количество движения есть характеристика поступательного движения системы, а при сложном движении – характеристика поступательной части движения.

Рассмотрим систему из n материальных точек. Записывая для них дифференциальные уравнения движения и почленно суммируя, получим

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i.$$

Второе слагаемое справа равно нулю. Преобразуем левую часть

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt}\sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\overline{Q}}{dt},$$

и окончательно

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e. \qquad (4.4)$$

Это уравнение выражает **теорему об изменении количества движения системы** в дифференциальной форме:

производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Соотношение (4.4) в проекциях на оси системы координат имеет вид

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \qquad (4.4')$$

Домножая обе части равенства (4.4) на dt и интегрируя по времени с учетом того, что при t = 0 $\overline{Q} = \overline{Q}_0$, а при t = t_1 $\overline{Q} = \overline{Q}_1$, получим

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt = \sum \bar{S}_k^e,$$

что дает **формулировку теоремы в интегральной** форме:

изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

Формулировки теоремы в дифференциальной и интегральной формах совершенно равноправны.

Практическое значение теоремы заключается в том, что она позволяет исключить из рассмотрения внутренние силы системы, обычно неизвестные (например, при описании движения жидкости силы давления ее частиц друг на друга).

Если правая часть в уравнении (4.4) равна нулю, то $\overline{Q}$ = const, что означает:

если сумма всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянным по величине и направлению.

В этом заключается закон сохранения количества движения системы.

Если равна нулю сумма проекций внешних сил на какую-либо ось, то проекция количества движения на эту же ось будет постоянной величиной.

Примеры проявления закона сохранения количества движения:

- отдача (откат) орудия при выстреле;
- работа гребного винта или пропеллера, когда движение судна или самолета осуществляется за счет придания скорости, следовательно, и количества движения, частицам воды или воздуха, а в целом для системы количество движения сохраняется;
- реактивное движение (в отличие от пропеллера, здесь речь идет о движении за счет выбрасывания продуктов горения из двигателя).

Закон сохранения количества движения широко используется в теории удара.

Пример

Снаряд массой m, летящий горизонтально со скоростью $\overline{u}$, попадает в неподвижно стоящую платформу с песком, суммарная масса платформы и песка M (рис. 4.3). С какой скоростью начнет двигаться платформа?

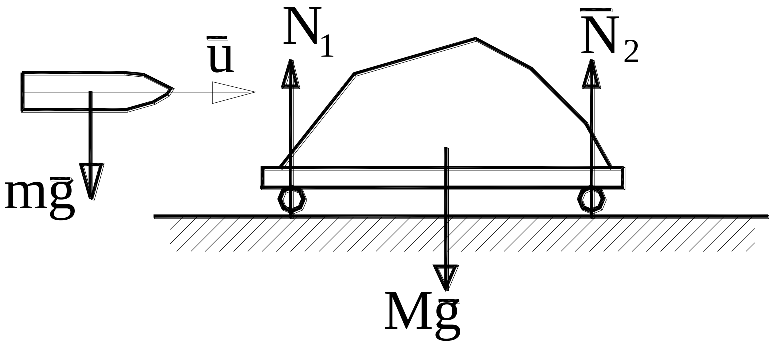


Рис. 4.3

Рассматриваем снаряд и платформу как единую систему, тогда можно не принимать во внимание силы (внутренние), возникающие при ударе снаряда о песок. Другие внешние силы (при решении этой задачи пренебрегаем силами сопротивления воздуха) в проекции на горизонтальную ось дают нуль (они показаны на рисунке). Это означает, что количество движения системы снаряд – платформа не меняется, т.е. $Q_x = const$. Поскольку до удара платформа неподвижна, то суммарное количество движения системы равно количеству движения снаряда $Q_0 = mu$. После удара снаряд и платформа двигаются совместно со скоростью, которую обозначим v, и количество движения системы равно $Q_1 = (M+m)v$. Поскольку $Q_0 = Q_1$, получаем

$$v = \frac{mu}{M+m}.$$

4.4 Теорема об изменении момента количеств движения системы.

Определение

Главным моментом количеств движения (кинетическим моментом) относительно данного центра О называется величина, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\bar{K}_O = \sum \bar{m}_O (m_k \bar{v}_k).$$

Аналогично определяются моменты количеств движения относительно координатных осей

$$K_x = \sum m_x (m_k \bar{v}_k), K_y = \sum m_y (m_k \bar{v}_k), K_z = \sum m_z (m_k \bar{v}_k).$$

Одновременно величины K_x, K_y, K_z – проекции вектора K_o на координатные оси.

Если количество движения системы характеризует поступательное движение системы, то главный момент количеств движения характеризует ее вращательное движение.

Рассмотрим кинетический момент вращающегося тела относительно оси Oz. Пусть при этом скорость вращения вокруг оси – величина ω (рис. 4.4). Тогда скорость любой точки на расстоянии h от оси будет $h \cdot \omega$. Тогда для этой точки

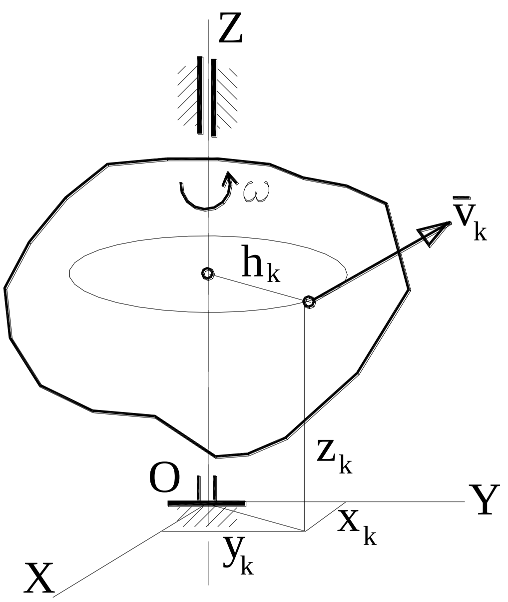


Рис. 4.4

$$m_z(m_k v_k) = m_k v_k h_k = m_k h_k^2 \omega.$$

Для всего тела множитель ω можно вынести за скобки, тогда

$$K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k) = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega.$$

Величина в скобках представляет собой момент инерции тела относительно оси z. Окончательно

$$K_z = J_z \omega.$$

Таким образом, **кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.**

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной оси, то

$$K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_n.$$

Мы рассматривали ранее теорему моментов для точки. Поскольку она справедлива для всех k точек системы, то для любой точки с номером k

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \overline{m}_O(m_k \overline{v}_k)\right] = \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\,e}) + \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\,i}),$$

где справа в скобках – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Суммируя такие уравнения по всем точкам системы, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \overline{m}_O(m_k \overline{v}_k)\right] = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\,e}) + \sum \overline{m}_O(\hat{\overline{F}}_k^{\,i}).$$

Последняя сумма равна нулю. В итоге

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{\,e}). \tag{4.5}$$

Это и есть формулировка теоремы моментов для системы:

производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов внешних сил системы относительно того же центра.

Это равенство можно записать в проекциях на оси координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_k^{\,e}), \qquad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\overline{F}_k^{\,e}), \qquad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^{\,e}).$$

Этой теоремой широко пользуются при описании вращательного движения тела, в том числе в теории гироскопов. Если при описании общего движения тела за полюс принять центр масс, то поступательная часть движения может быть описана с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная – с помощью теоремы моментов.

Если в (4.5) правая часть равна нулю, то $\overline{K}_O = const$, что означает:

если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра будет постоянен.

Если сумма моментов внешних сил относительно какой-либо оси равна нулю, то и главный момент количеств движения относительно этой оси тоже равен нулю.

Эти результаты представляют собой **закон сохранения главного момента количеств движения системы.**

Из него, в частности, следует, что **внутренние силы не могут изменить главный момент количеств движения системы.**

Если рассмотрим вращающуюся вокруг неподвижной оси Z систему, то из указанной теоремы следует:

- для неизменяемой системы (твердого тела) J_z = const, но тогда и ω = const, т.е. твердое тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью;
- для изменяемой системы, в которой точки ее могут менять расстояние от оси, при уменьшении расстояния растет угловая скорость, и наоборот.

Примером такой системы является так называемая платформа (скамья) Жуковского. Сидящий или стоящий на ней человек меняет момент инерции своего тела, опуская или поднимая руки, и скорость вращения такой платформы заметно меняется. Такой же эффект наблюдается у фигуристов на льду: чтобы получить наибольшую скорость вращения вокруг вертикальной оси, фигурист должен принять положение, когда он весь вытянут вдоль оси вращения и руки его либо прижаты к корпусу, либо вытянуты вверх.

Реактивный момент винта вертолета приводит к тому, что для предотвращения вращения корпуса вертолета необходимо ставить уравновешивающий винт на хвосте корпуса (тем самым увеличивается плечо тяги малого винта, или его расстояние от оси вращения большого винта). В некоторых системах вертолетов используются два соосно расположенных или разнесенных винта, вращающихся в разные стороны, что приводит к взаимному уравновешиванию реактивных моментов.

Пример

Два диска насажены на общий упругий вал (рис. 4.5). Вал слегка закручивают и отпускают. Моменты инерции дисков J_1 и J_2 относительно оси вала X известны. Пренебрегая массой вала, найти зависимости между углами поворотов и угловыми скоростями дисков при их крутильных колебаниях.

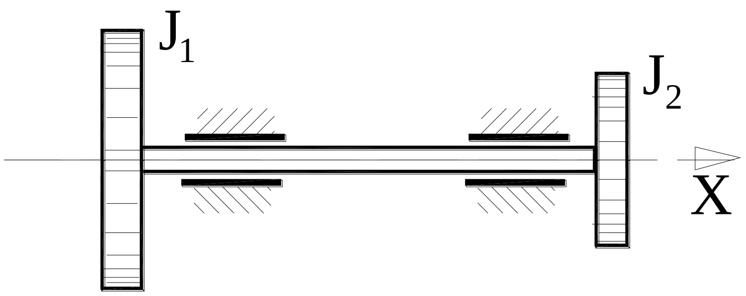


Рис. 4.5

Рассматриваем оба диска и вал как одну систему, тогда можно не принимать во внимание силы упругого взаимодействия вала и дисков. Внешние силы – силы тяжести и реакции опор – пересекают ось X, поэтому их момент относительно этой оси равен нулю. Это означает в соответствии с теоремой, что главный момент количеств движения системы K_x относительно оси X не меняется. Поскольку в исходном состоянии (в состоянии покоя) этот момент был равен нулю, то и во все время колебаний справедливо $K_x = 0$. Не учитывая момент количеств движения вала, запишем

$$K_x = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0,$$

откуда следует

$$\omega_1 = -J_2\omega_2/J_1.$$

Угла закручивания дисков φ_1 и φ_2 определяются интегрированием этого равенства. Если эти углы отсчитывать от начального положения дисков, то постоянные интегрирования равны нулю, и

$$\varphi_1 = -J_2\varphi_2/J_1.$$

4.5 Теорема об изменении кинетической энергии системы

4.5.1 Кинетическая энергия системы

Определение

Кинетической энергией системы называется скалярная величина *T*, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2. \tag{4.6}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Это величина скалярная и положительная, поэтому не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменения этих направлений.

Внутренние силы системы не меняли векторные характеристики – количество движения и момент количеств движения. В то же время, если под действием внутренних сил меняются скорости точек, то меняется и *T*. Таким образом, **в отличие от векторных величин, изменение энергии зависит и от внешних, и от внутренних сил.**

Рассмотрим частные случаи определения кинетической энергии твердых тел.

1. Поступательное движение

В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс. Тогда

$$v_k = v_C,$$

и

$$T_{post} = \sum m_k v_C^2 / 2 = \left(\sum m_k\right) v_C^2 / 2 = M v_C^2 / 2.$$

Таким образом,

при поступательном движении тела кинетическая энергия системы равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

2. Вращательное движение

Если тело вращается вокруг оси Oz, то скорость любой его точки определяется как

$$v_k = h_k \cdot \omega.$$

Справа первый сомножитель – расстояние от точки до оси вращения, второй – угловая скорость. Подставляя это в выражение (4.6), получим

$$T_{vr} = \sum m_k \omega^2 h_k^2 / 2 = \left(\sum m_k h_k^2\right) \omega^2 / 2 = J_z \omega^2 / 2,$$

т.е. **кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.**

3. Плоскопараллельное движение

Движение тела можно рассматривать в этом случае как вращение вокруг мгновенного центра скоростей. В этом случае его кинетическая энергия будет

$$T = J_p \omega^2 / 2, \qquad (4.7)$$

здесь J_P – момент инерции относительно мгновенной оси вращения. J_P является величиной переменной, так как меняется мгновенная ось вращения.

Введем вместо этого момента инерции J_P постоянный момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. По теореме Гюйгенса

$$J_p = J_C + md^2.$$

Здесь d – расстояние между осью, проходящей через центр масс, и мгновенной осью вращения. Если теперь это выражение подставим в (4.7), получим

$$T = Mv_C^2 + J_C\omega^2/2,$$

и, таким образом, **при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг центра масс.**

4.5.2 Теорема об изменении кинетической энергии точки

Применим доказанную ранее теорему об изменении точки для любой точки системы

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i.$$

Справа в этом выражении – элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие же уравнения для всех точек и складывая их затем почленно, получим

$$dT = \Sigma\, dA_k^e + \Sigma\, dA_k^i, \tag{4.8}$$

а это выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если рассмотрим перемещение системы из одного положения с кинетической энергией T_0 в положение с кинетической энергией T_1, то после интегрирования (4.8) в соответствующих пределах получим

$$T_1 - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i, \tag{4.9}$$

Это выражает теорему в интегральной форме: **изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил**.

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы и их работа не исключаются. Это связано с тем, что силы взаимодействия частиц противоположно направлены и равны, но перемещения частиц – не обязательно вдоль соответствующей прямой, и тогда работа сил не равна нулю. Например, внутренние силы при выстреле совершают работу и сообщают кинетическую энергию снаряду и орудию.

Рассмотрим два важных частных случая.

1. Неизменяемая система

Неизменяемой системой будем называть такую, в которой расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками остается во все время движения постоянным.

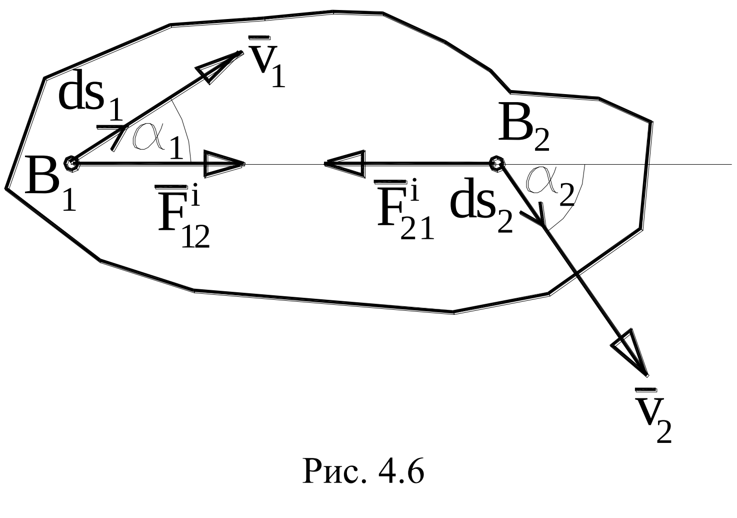


Рис. 4.6

Рассмотрим две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (B_1B_2 = const), взаимодействующие между собой с силами $\overline{F}{}_{12}^{\,i}$ *и* $\overline{F}{}_{21}^{\,i} = -\overline{F}{}_{12}^{\,i}$. Применим теорему о проекциях скоростей точек твердого тела (рис. 4.6), тогда

$$v_1\cos\alpha_1 = v_2\cos\alpha_2.$$

Умножив обе части этого равенства на dt, получим

$$ds_1\cos\alpha_1 = ds_2\cos\alpha_2.$$

Работа каждой из сил, показанных на рисунке, определяется произведением силы на перемещение точки и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения. Учитывая, что эти силы равны по величине и противоположны по направлению, получим сумму элементарных работ в виде

$$dA_1 + dA_2 = F_{12}^i ds_1 \cos\alpha_1 - F_{21}^i ds_2 \cos\alpha_2 = 0.$$

Для всех других взаимодействующих точек системы получим тот же результат. В итоге приходим к выводу: в случае неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Тогда уравнения (4.8) и (4.9) принимают вид соответственно

$$dT = \sum dA_k^e \qquad и \qquad T_1 - T_0 = \sum A_k^e.$$

2. Система с идеальными связями

Связи, не изменяющиеся во времени, называются идеальными, если сумма работ их реакций при элементарном перемещении системы равна нулю. Примером такого рода связи может служить гладкая поверхность (гладкая кривая) – при движении вдоль такой поверхности (гладкой кривой) ее реакция направлена перпендикулярно направлению перемещения, и работа реакции равна нулю.

Если разделим все силы, действующие на точки системы, на активные и реакции связей, то (4.8) можно записать в виде

$$dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^\tau ,$$

где dA_k^a - элементарная работа действующих на k-тую точку внешних и внутренних активных сил, dA_k^τ - элементарная работа сил реакций внешних и внутренних связей, наложенных на ту же точку. Если связи являются идеальными, то в соответствии с данным выше определением сумма их работ равна нулю. В этом случае (4.8) и (4.9) принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e , \qquad T_1 - T_0 = \sum A_k^e .$$

Это означает, что изменение кинетической энергии системы с идеальными связями при любом перемещении системы равно сумме работ на этом перемещении внешних и внутренних активных сил. Таким образом, при идеальных, не изменяющихся во времени связях, величины реакций этих связей определять не нужно при оценке кинетической энергии системы.

Пример

Стержень АВ длиной b подвешен на шарнире в точке А (рис. 4.7). Какую минимальную угловую скорость нужно сообщить стержню, чтобы он отклонился до горизонтального положения?

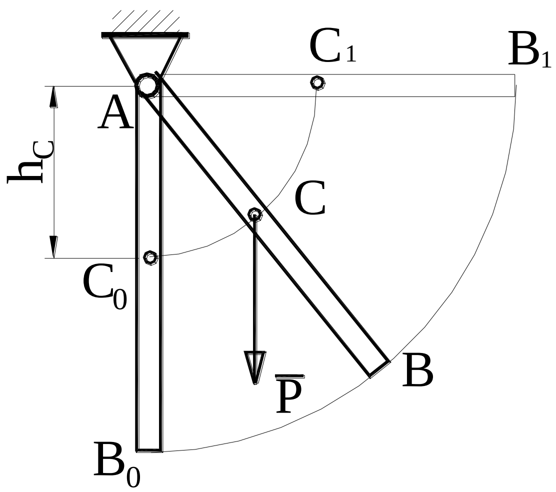


Рис. 4.7

Искомая угловая скорость будет минимальной, если в горизонтальном положении стержень остановится, т.е. его конечная угловая скорость будет равна нулю $\omega_1 = 0$. Перемещение системы полностью определяется углом B_0AB_1. Изменение кинетической энергии стержня в соответствии с теоремой определяется работой внешних сил:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \tag{a}$$

Вычислим входящие в это равенство величины. В конечном положении скорость стержня равна нулю, т.е. $T_1 = 0$. В начальный момент времени, когда стержню сообщается угловая скорость ω_0 (искомая величина), кинетическая энергия определяется половиной произведения момента инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через точку A, на квадрат его угловой скорости

$$T_0 = J_A \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{Mb^2\omega_0^2}{6}.$$

Здесь учтено, что момент инерции стержня J_A относительно перпендикуляра к оси стержня, проведенного через его конец, равен

$$J_A = \frac{Mb^2}{3}.$$

Шарнир A является идеальной связью – его реакция направлена вдоль стержня, перпендикулярно направлению его движения в любой момент времени, и не дает вклада в работу на этом перемещении. Работу совершает только внешняя сила – сила тяжести. Эта работа – при повороте стержня до горизонтального положения – отрицательна (сила тяжести направлена вниз, против направления движения) и равна $-Mgb/2$. Подставляя эти значения в (a), получим искомое значение начальной угловой скорости

$$\omega_0 = \sqrt{3g/b}.$$

4.5.3 Динамика твердого тела

Рассмотрим приложение общих теорем к динамике твердого тела.

4.5.3.1 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Так как изучение поступательного движения твердого тела сводится к задачам динамики точки, то рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 4.8).

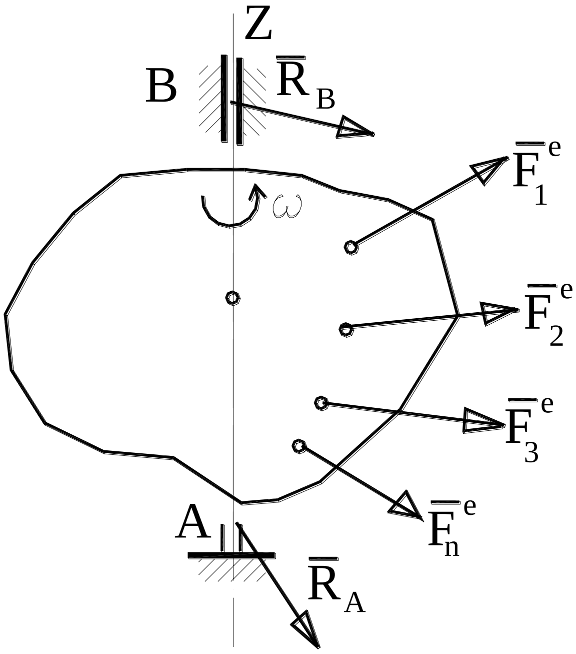


Рис. 4.8

Пусть на твердое тело действуют силы $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, ..., \overline{F}_n^e$. Кроме того, на тело действуют реакции подшипников $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$. Поскольку эти реакции проходят через ось вращения, моменты их относительно оси Z равны нулю. С учетом этого запишем теорему моментов:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z = \sum m_z(\overline{F}_k^e).$$

В дальнейшем величину M_z называем вращающим моментом. Подставляя в предыдущее соотношение вличину $K_z = J_z\omega$, получим

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z, \quad или \quad J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad \text{(b)}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела. Из него следует, что произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту

$$J_z\varepsilon = M_z.$$

Это равенство показывает, что **при заданном значении вращающего момента угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции тела.** Таким образом, момент инерции тела при его вращательном движении играет такую же роль, как масса тела при его поступательном движении, или момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Частные случаи:

1. Если $M_z = 0$, то ω = const, и тело вращается равномерно.
2. Если M_z = const, то ε = const, и тело вращается равнопеременно.

Пример

Вертикальный цилиндрический ротор, момент инерции которого относительно оси равен J_z, приводится во вращение под действием вращающего момента M. Найти закон изменения угловой скорости ω, если начальная угловая скорость равна нулю, а момент сил сопротивления M_c пропорционален ω: $M_c = \mu\omega$ (рис. 4.9).

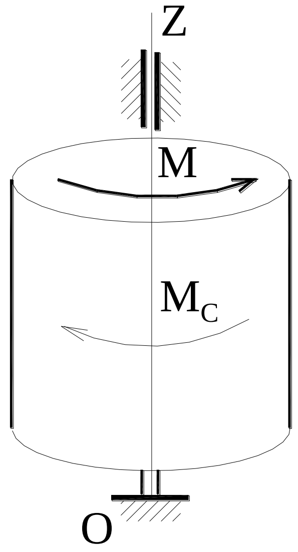


Рис. 4.9

Считаем положительными моменты, направленные в сторону вращения ротора. Тогда дифференциальное уравнение его вращательного движения имеет вид

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M - M_c = M - \mu\omega.$$

Обозначим $n = \mu/J_z$, разделяем переменные и берем определенные интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{-\mu d\omega}{M - \mu\omega} = -n\int_0^t dt.$$

Отсюда

$$\ln\frac{M - \mu\omega}{M} = -nt \qquad или \qquad \frac{M - \mu\omega}{M} = e^{-nt},$$

и окончательно

$$\omega = \frac{M}{\mu}(1 - e^{-nt}).$$

Отсюда следует, что угловая скорость ротора со временем возрастает, стремясь к величине $\omega_* = M / \mu$.

4.5.3.2. Плоскопараллельное движение твердого тела

Положение тела при его плоскопараллельном движении определено, если известны координаты полюса и угол поворота тела вокруг полюса. Задачи динамики решаются наиболее просто, если в качестве полюса принимается центр масс, и тогда положение тела определяется тремя величинами координатами x_C, y_C и углом φ (рис. 4.10).

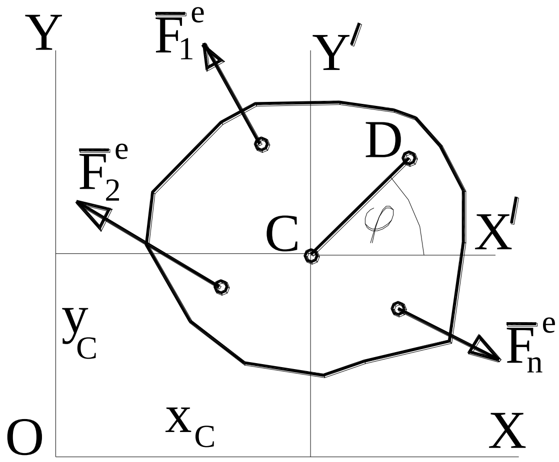


Рис. 4.10

На рисунке показано сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс. Пусть на тело действуют внешние силы $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, ..., \overline{F}_n^e$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнение движения центра масс найдем по теореме о движении центра масс:

$$M\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e, \qquad \text{(c)}$$

а вращательное движение вокруг центра C определится уравнением (b).

Уравнение (c) после проектирования обеих частей равенства на координатные оси принимает вид

$$Ma_{Cx} = \sum F_{kx}^{e}, \quad Ma_{Cy} = \sum F_{ky}^{e}, \quad J_{C}\varepsilon = \sum m_{C}(F_{k}^{e}),$$

или

$$M\ddot{x}_{C} = \sum F_{kx}^{e}, \quad M\ddot{y}_{C} = \sum F_{ky}^{e}, \quad J_{C}\ddot{\varphi} = \sum m_{C}(F_{k}^{e}).$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. С их помощью по заданным силам определяется закон движения тела, или по заданному закону движения находится главный вектор и главный момент действующих на тело сил.

4.6 Принцип Даламбера

Уравнения движения или равновесия твердого тела можно получить, используя не уравнения, вытекающие из законов Ньютона, а некоторые общие принципы механики. Это позволяет в ряде случаев найти более эффективные методы решения задач.

Один из таких общих принципов носит название принципа Даламбера.

4.6.1 Принцип Даламбера для материальной точки и системы точек

Пусть некоторая точка с массой m находится под действием активной силы $\bar{F}^{a}$ и реакции связи $\bar{N}$. Под действием этих сил (а реакция связи – это тоже сила) точка в инерциальной системе отсчета будет двигаться с некоторым ускорением $\bar{a}$. Введем в рассмотрение величину, имеющую размерность силы

$$\boldsymbol{F}^{и} = -\,m{\cdot}a.$$

Эта векторная величина, равная по модулю произведению

массы точки на ее ускорение и направленная против ускорения,

называется силой инерции.

При приложении этой силы к движущейся точке можно утверждать, что:

если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакциям связи присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной:

$$\boldsymbol{F}^{a} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}^{и} = 0.$$

Это равенство выражает принцип Даламбера для материальной точки.

Легко видеть, что оно внешне представляет собой просто другую форму записи второго закона Ньютона.

Рассмотрим теперь систему n материальных точек. Для некоторой конкретной точки с номером k после введения ускорения a_k и соответствующей силы инерции $\overline{F}_k^u = -m_k \overline{a}_k$ принцип Даламбера запишем в виде

$$\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^u = 0. \tag{4.10}$$

Индекс «*e*», как и раньше, относится к внешним силам, индекс «*i*» – к внутренним. Те и другие силы включают в себя как активные силы, так и реакции связей.

Записав аналогичные выражения для всех точек системы, придем к результату, который можно сформулировать следующим образом:

если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме внешних и внутренних сил, добавить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все положения статики.

Это и есть формулировка принципа Даламбера для системы точек.

По существу, принцип Даламбера позволяет рассматривать задачи движения как аналогичные задачи о равновесии систем, которые хорошо изучены в статике. Часто это упрощает проведение конкретных расчетов.

Для системы сил, находящейся в равновесии, в статике были получены условия равенства нулю главного вектора и главного момента сил. Это утверждение справедливо как для неподвижной системы, так и для движущейся. Но тогда для выполнения этих условий нужно просуммировать все силы, входящие в уравнение (4.10), и моменты относительно некоторого центра О. Получим

$$\sum\left(\overline{F}_k^e+\overline{F}_k^i+\overline{F}_k^u\right)=0,$$
$$\sum\left[\overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\overline{m}_O(\overline{F}_k^i)+\overline{m}_O(\overline{F}_k^u)\right]=0. \tag{4.11}$$

Введем главный вектор сил инерции $\boldsymbol{R^u}$ и главный момент сил инерции относительно центра $\boldsymbol{M_O^u}$:

$$\overline{R}^u=\sum\overline{F}_k^u, \overline{M}_O^u=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^u).$$

Поскольку геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, из уравнения (4.4) получим

$$\sum\overline{F}_k^e+\overline{R}^u=0,\quad \sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^e)+\overline{M}_O^u=0. \tag{4.12}$$

Здесь нет внутренних сил системы, часто неизвестных из условия задачи, и решение значительно упрощается. По существу, эти уравнения эквивалентны уравнениям, входящим в формулировки теорем об изменении количества движения и главного момента количеств движения системы.

В отличие от переносной и кориолисовой сил инерции, которые вводились для того, чтобы привести уравнения относительного движения по форме к уравнениям для инерциальной системы отсчета, в принципе Даламбера в инерциальной системе вводятся силы инерции, чтобы свести уравнения динамики по форме к уравнениям статики.

Если сравнить первое из уравнений (4.12) с уравнением, выражающим теорему о движении центра масс системы, то получается:

$$\overline{R}^u=-m\overline{a}_C, \tag{4.12$'$}$$

т.е. **главный вектор сил инерции механической системы (в том числе и твердого тела) равен произведению массы системы (твердого тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.**

При поступательном движении все точки системы (тела) имеют одинаковые скорости и ускорения, а силы инерции образуют систему параллельных сил, аналогичную силам тяжести. Эти силы имею равнодействующую, проходящую через центр тяжести системы (тела).

Из второго уравнения (4.12) с учетом теоремы моментов получается (аналогичное выражение можно получить относительно оси):

$$\overline{M}_O^u = -\frac{d\overline{K}_O}{dt},$$
$$M_z^u = -\frac{dK_z}{dt}, \qquad (4.12^{//})$$

т.е. **главный момент сил инерции системы (твердого тела) относительно некоторого центра О равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра.**

Совершенно аналогичное утверждение можно сделать и для главного момента инерции относительно оси.

Приведение сил инерции твердого тела

В статике рассматривалось приведение системы сил к простейшему виду. Аналогично систему сил инерции твердого тела можно заменить можно заменить главным вектором, приложенным в произвольной точке О, и главным моментом, который можно представить в виде пары сил. Рассмотрим частные случаи.

1. Поступательное движение

В этом случае ускорения всех точек тела одинаковы и равны ускорению центра масс $\overline{a}_C$. Тогда все силы инерции параллельны между собой и аналогичны силам тяжести. Поэтому силы инерции, как и силы тяжести, имеют равнодействующую, проходящую через центр масс тела, точку С.

Таким образом, при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей $\overline{R}^{u} = -m\overline{a}_{C}$, проходящей через центр масс тела.

2. Вращательное движение

Пусть твердое тело имеет плоскость симметрии Oxy и вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости (рис. 4.11, на рисунке показано сечение тела плоскостью Oxy).

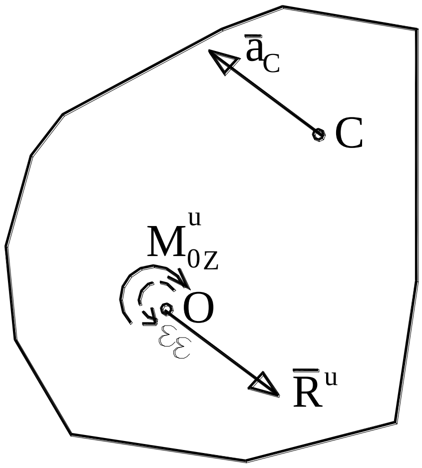


Рис. 4.11

Если привести силы инерции к центру O, то вследствие симметрии результирующая сила и пара будут лежать в плоскости Oxy и момент пары будет M^{u}_{Oz}. Тогда, так как $K_z = J_{Oz}\omega,$ то по второй из формул $(4.12^{//})$ получаем

$$M^{u}_{Oz} = -J_{Oz} \cdot \dot{\omega} = -J_{Oz} \cdot \varepsilon, \qquad (4.12^{///})$$

где ε - угловое ускорение тела.

Следовательно, система сил инерции вращающегося тела приводится к силе $\overline{R}^{u}$, определяемой формулой $(4.12^{/})$ и приложенной в точке O, и к паре с моментом M^{u}_{Oz}, определяемой по формуле $(4.12^{///})$ и лежащей в плоскости симметрии тела.

3. ***Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела***

Если вращение происходит вокруг оси, проходящей через центр масс, то $\overline{R}^{u} = 0$, так как ускорение центра масс равно нулю. Но тогда система сил инерции тела приводится к одной паре с моментом M_{Oz}^{u}, лежащей в плоскости симметрии тела.

4. Плоскопараллельное движение

Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости, то система сил инерции приводится к лежащей в плоскости симметрии силе $\overline{R}^{u}$ и приложенной в центре масс, а также к паре с моментом $M_{Cz}^{u} = -J_{Cz} \cdot \varepsilon$.

Принцип Даламбера позволяет определять реакции связей иногда более просто, нежели обычным образом, особенно когда движение системы известно или может быть определено с помощью уравнений, не содержащих реакций связей, например, из теоремы об изменении кинетической энергии.

Пример 1

Пусть по горизонтальной поверхности движутся два груза P_1 и P_2 под действием силы Q, приложенной к первому грузу (рис. 4.12,а). Грузы связаны нитью. Коэффициент трения грузов о поверхность f. Определить ускорения грузов и натяжение нити.

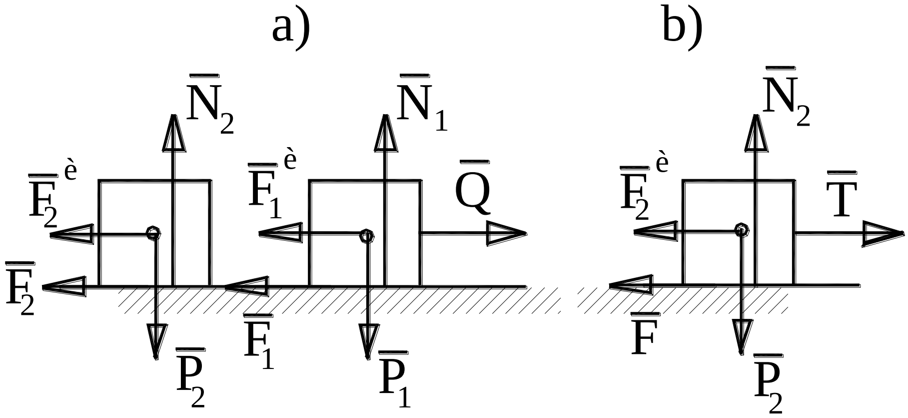


Рис. 4.12

При составлении условия равновесия системы сил используем принцип Даламбера добавляя при этом силы инерции. Так как ускорение грузов одинаково, то по модулю эти силы будут

$$F_1^и = \frac{P_1}{g}a,\ F_2^и = \frac{P_2}{g}a.$$

Силы трения равны $F_1 = f{\cdot}P_1$, $F_2 = f{\cdot}P_2$. Составим уравнения равновесия системы сил в проекции на горизонтальную ось:

$$Q - f(P_1 + P_2) - (P_1 + P_2){\cdot}a/g = 0.$$

Отсюда ускорение

$$a = [Q/(P_1 + P_2) - f]{\cdot}g.$$

Силу натяжения нити T между грузами определим, применяя принцип Даламбера для второго груза.

$$T - f{\cdot}P_2 - P_2{\cdot}a/g=0$$

и с учетом значения ускорения получим

$$T = Q{\cdot}P_2/(P_1 + P_2).$$

Заметим, что сила натяжения нити не зависит от трения. При постоянном суммарном весе системы эта сила тем меньше, чем меньше вес второго (заднего) груза. Поэтому для менее напряженного режима работы сцепки в железнодорожном составе выгоднее в голову поезда помещать более тяжелые, а в хвост – более легкие вагоны.

В рассмотренном примере пусть Q = 200 Н, P_1 = 400 Н, P_2 = =100 Н, f < 0.4.

При таком расположении грузов в соответствии с их нумерацией натяжение нити составит величину T = 40 Н. Если же поменять грузы местами, то будет T = 160 Н.

Пример 2

Однородный стержень AB весом P и длиной b вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Ay. В точке A – шарнир, угол с вертикальной осью – α (рис. 4.13). Найти натяжение нити T, удерживающей стержень в таком положении.

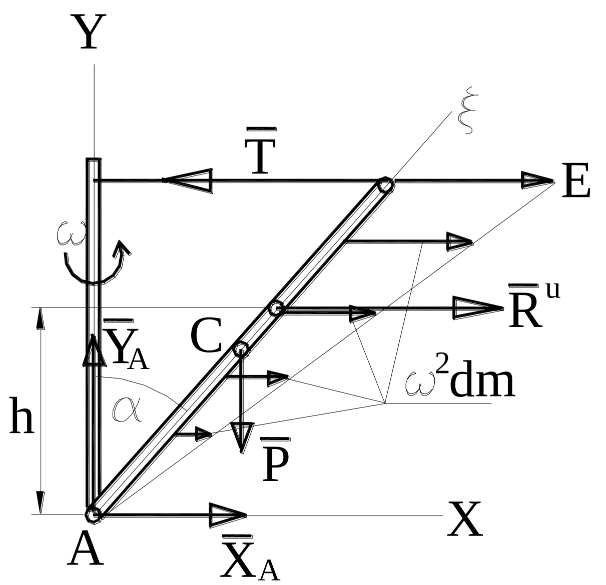


Рис. 4.13

На стержень действуют сила тяжести $\overline{P}$, реакции шарнира X_A, Y_A, сила натяжения нити $\overline{T}$. По принципу Даламбера присоединим еще силы инерции. На каждый элемент стержня массой Δm действует центробежная сила инерции $\Delta m \cdot \omega^2 \cdot x$, где x – расстояние от данного элемента до оси вращения. Эти силы распределены по линейному закону вдоль длины стержня, и их равнодействующая приложена в центре тяжести соответствующего треугольника распределенных сил, т.е. на расстоянии

$$h = (2/3)\cdot l\cdot \cos\alpha$$

от оси Ax. В данном случае величина этой равнодействующей определяется как главный вектор сил инерции

$$R^{u} = ma_C = m\omega^2 x_C = \frac{P}{g}\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha.$$

Составим теперь уравнение равновесия моментов относительно точки А:

$$Tl\cos\alpha - R^{u}h - \frac{Pl}{2}\sin\alpha = 0.$$

Подставляя сюда все найденные ранее величины, получаем искомое натяжение нити

$$T = P\left(\frac{l\omega^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\,\alpha\right).$$

4.7 Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

4.7.1 Классификация связей

Ранее мы вводили понятие и давали определение связей. Рассмотрим их классификацию.

Связи, не меняющиеся со временем, называются **стационарными**, изменяющиеся – **нестационарными**.

Связи, накладывающие ограничения на положение точек системы, называются **геометрическими**. Если связи ограничивают еще и скорости точек системы, то они называются **кинематическими или дифференциальными**.

Если можно перейти от дифференциальной связи к геометрической, то такая связь называется **интегрируемой** (т.е. в этом случае можно перейти от ограничений на скорости к ограничениям на координаты точек), в противном случае – **неинтегрируемой.**

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи объединяются термином **голономные связи**, а неинтегрируемые дифференциальные связи называются неголономными.

Сами **механические системы** в зависимости от наличия тех или иных связей **называются голономными** или **неголономными.**

Наконец, различают связи удерживающие (которые работают при любом положении системы) и неудерживающие. В последнем случае говорят, что система может освобождаться от связей. Например, нить не может препятствовать движению груза в направлении точки подвеса.

4.7.2 Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Наличие механических связей ранее мы учитывали, вводя их реакции при рассмотрении равновесия или движения системы. Можно их учитывать по-другому: рассматривая только такие движения, которые не нарушают эти связи.

Такие перемещения системы (не нарушающие связей) называются **возможными** или **виртуальными** перемещениями. Они должны удовлетворять двум условиям:

1) быть элементарными (малыми), так как при конечных (больших) перемещениях система может перейти в положение, при котором эффект связей может быть другим по сравнению с исходным положением;

2) быть такими, чтобы все наложенные в данный момент времени на систему связи сохранялись, иначе может измениться вид рассматриваемой системы.

Итак, **возможным перемещением механической системы будем называть любую совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.**

При этом понимается, что даже при наличии неудерживающих связей система от них не освобождается.

Далее используем для обозначения действительных элементарных перемещений символ $d\mathbf{r}$, а для возможных – $\delta\mathbf{r}$. При стационарных связях действительное перемещение совпадает с одним из возможных. При нестационарных связях действительное перемещение не совпадает ни с одним из возможных. Это можно продемонстрировать на примере перемещения груза в лифте, когда пол лифта представляет собой связь. Виртуальные перемещения направлены вдоль пола, а действительное перемещение при движении лифта всегда содержит вертикальную составляющую и никогда не совпадет ни с одним из возможных.

Число возможных перемещений может быть бесконечным. Однако можно указать некоторое число так называемых независимых перемещений, через которые выражаются любые возможные. Например, плоскость задает такую связь, что все возможные движения в этой плоскости можно выразить в виде комбинации (суперпозиции) двух непараллельных векторов.

Число независимых возможных перемещений механической системы называется числом степеней свободы этой системы. Точка на плоскости имеет две степени свободы, т.к. положение точки на плоскости определяется двумя координатами.

Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы. Ее положение определяется соответственно тремя координатами.

Этот результат имеет общий характер: у механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом степеней свободы. Т.е. число степеней свободы и число возможных перемещений всегда совпадают.

4.7.3 Принцип возможных перемещений

Рассмотрим один из принципов механики, устанавливающий условия ее равновесия в инерциальной системе отсчета при наличии стационарных связей.

Введем понятие возможной работы активной силы – это ее работа на возможном перемещении точки: $\delta A^a = \overline{F}^a \cdot \delta\overline{r}$, а возможная работа реакции связи N: $\delta A^r = \overline{N} \cdot \delta\overline{r}$.

Введем понятие идеальных связей.

Идеальными связями называем такие, для которых сумма элементарных работ их реакций на возможных перемещениях системы равна нулю, т.е.

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

Докажем, что если механическая система с идеальными связями находится в равновесии под действием приложенных сил, то при любом возможном перемещении системы выполняется равенство

$$\sum \delta A_k^a = 0,$$

или

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta \overline{r}_k = \sum F_k^a \delta s_k \cos \alpha_k = 0,$$

где α_k – угол между силой и возможным перемещением.

Для доказательства рассмотрим условие равновесия каждой из точек системы, которые находятся под действием активной силы и реакции связей. В этом случае необходимо

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k = 0,$$

и, следовательно, сумма работ этих сил на возможном перемещении

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Составив такие равенства для всех точек системы и просуммировав их по всем точкам, получим, что вторая сумма (для работы идеальных связей) равна нулю по определению. Таким образом,

$$\sum \delta A_k^a = 0,$$

что и требовалось доказать.

Принцип возможных перемещений

Рассматриваем равновесное состояние системы в некоторой инерциальной системе отсчета, считая при этом все наложенные на систему связи стационарными.

Введем понятие возможной работы как элементарную работу, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. Возможную работу активной силы $\overline{F}^{a}$ обозначим $\delta A^{a} = \overline{F}^{a} \cdot \delta\overline{r}$, а возможную работу реакции связи $\overline{N}$ обозначим $\delta A^{r} = \overline{N} \cdot \delta\overline{r}$.

Дадим общее определение идеальной связи: **идеальными связями называем такие, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю**, т.е.

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

Так как при стационарных связях каждое действительное перемещение совпадает с одним из возможных, это определение совпадает с ранее введенным определением в п. 4.5.2.

Докажем, что если механическая система с идеальными связями находится под действием приложенных сил в равновесии, то при любом возможном перемещении системы должно выполняться равенство

$$\sum \delta A_k^a = 0, \quad или \quad \sum \overline{F}_k^a \delta\overline{r}_k = \sum F_k^a \delta s_k \cos\alpha_k = 0, \qquad (a)$$

где α_k – угол между силой и возможным перемещением.

Обозначим равнодействующие всех (внешних и внутренних) активных сил и реакций связей, действующих на точку с номером k, соответственно через $\overline{F}_k^a$, $\overline{N}_k$. Поскольку каждая точка системы находится в равновесии, то

$$\overline{F}_k^a + \overline{N}_k = 0.$$

Работа этой нулевой суммы сил на любом перемещении точки равна нулю, но тогда после суммирования получим

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Поскольку связи идеальные, а перемещения точек являются возможными, то вторая сумма в полученном равенстве равна нулю. Тогда равна нулю и первая сумма. Этим доказывается, что равенство (a) выражает условие равновесия системы.

Можно показать, что это условие является не только необходимым, но и достаточным условием равновесия.

Таким образом, доказан **принцип возможных перемещений**:

для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Пример 1

Найти зависимость между силами P и Q в механизме, показанном на рис. 4.14, при равновесии.

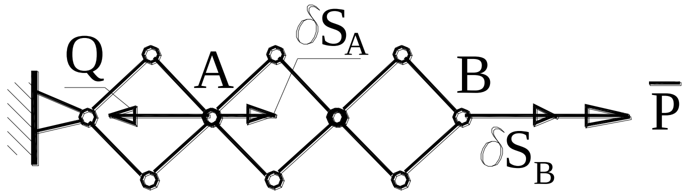


Рис. 4.14

У этой системы одна степень свободы. Придадим системе возможное горизонтальное перемещение, тогда каждая горизонтальная диагональ ромба, образованного стержнями, удлинится на одну и ту же величину δS. В итоге смещение точки B составит $\delta S_B = 3\delta S$, а смещение точки A будет $\delta S_A = \delta S$. Используем условие равновесия (а), в нашем случае оно принимает вид

$$P\delta S_B - Q\delta S_A = 0, \text{ или } (3P-Q)\,\delta S = 0,$$

откуда $Q = 3P$.

Пример 2

Найти зависимость между силами $\overline{P}$, $\overline{Q}$ в подъемном механизме, детали которого неизвестны, если при каждом полном обороте рукоятки AB длиной b винт D выдвигается на величину h (рис. 4.15).

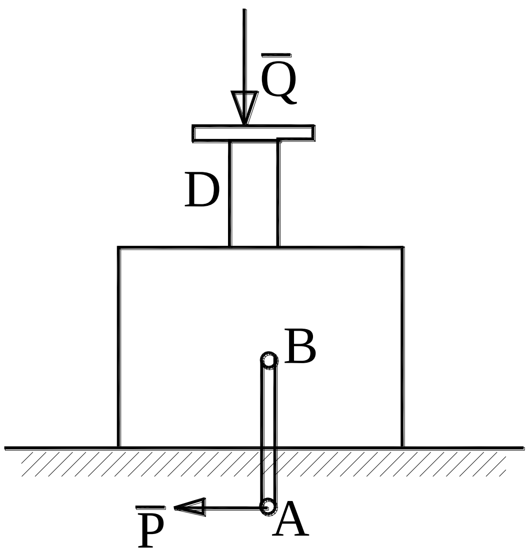


Рис. 4.15

Возможное перемещение точки A приложения силы определяется величиной $b\delta\varphi$, где φ характеризует поворот рукоятки. Возможное перемещение винта D обозначим δS. Условие равновесия (а) приводит к равенству

$$P\, b\delta\varphi - Q\delta S = 0. \qquad (*)$$

Если считаем, что при вращении рукоятки AB винт D выдвигается равномерно, то

$$\delta\varphi/2\pi = \delta S/h.$$

Выражая отсюда $\delta\varphi$ и подставляя в условие равновесия (*), получаем

$$Q = 2\pi bP/h.$$

Заметим, что решение получено при отсутствии какой-либо информации о строении механизма, и другими методами – например, методами геометрической статики – его получить невозможно.

4.7.4 Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Таким образом, объединяя и используя эти два принципа одновременно, получаем общий метод решения задач динамики.

Итак, пусть имеется система материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил и реакций связей, добавим еще и силы инерции. Тогда, в соответствии с принципом Даламбера, система сил будет находиться в равновесии. Применим теперь принцип возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Первое слагаемое – работа активных силы, второе – сил инерции, третье – реакций связей. Но последняя сумма по определению идеальных связей равна нулю. Тогда

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0. \tag{4.13}$$

Это равенство выражает собой принцип Даламбера-Лагранжа:

при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Уравнение (4.13) называется общим уравнением динамики.

В аналитической форме оно может быть записано в виде

$$\sum \left[(F_{kx}^a + F_{kx}^u)\delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^u)\delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^u)\delta z_k \right] = 0. \tag{4.14}$$

Уравнения (4.13) или (4.14) позволяют составить уравнения движения механической системы. Если система представляет собой совокупность твердых тел, нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

Пример

Пусть центробежный регулятор равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 4.16). Вес каждого из шаров *p*, а вес муфты равен Q_3 . Пренебрегая весом стержней, найти угол α, если $OD_1 = OD_2 = l$, $OB_1 = OB_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = b$.

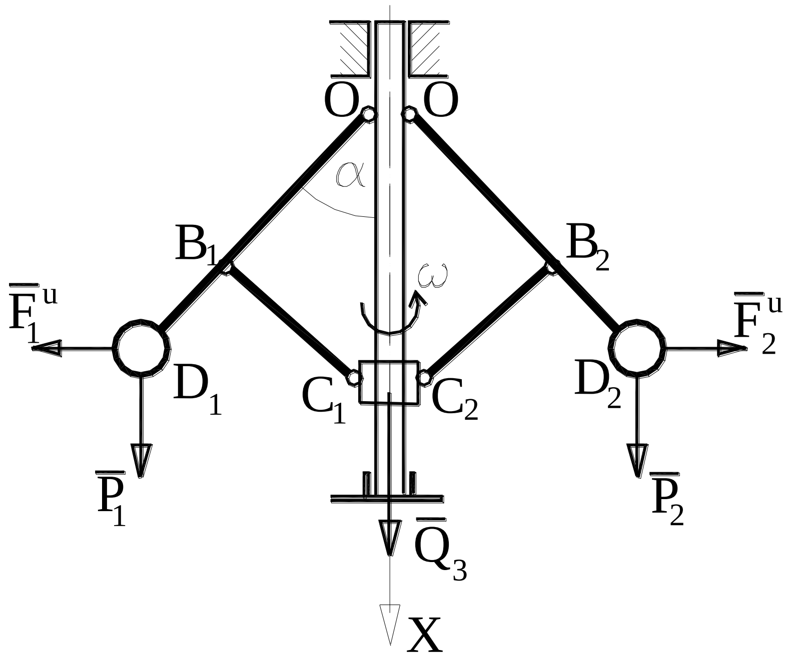


Рис. 4.16

Активные силы в данном примере – силы тяжести *p*, Q_3. Присоединяем к ним еще силы инерции шаров (для муфты этой силой пренебрегаем – она много меньше, чем силы инерции шаров). Составим общее уравнение динамики в форме (4.14):

$$p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 - F_1^u\delta y_1 + F_2^u\delta y_2 + Q_3\delta x_3 = 0. \qquad (*)$$

Далее учитываем, что

$$Q_3 = Q,\ p_1 = p_2 = p, \quad F_1^u = F_2^u = (p/g)a_D = (p/g)\omega^2 l \sin\alpha.$$

Координаты точек приложения сил

$$x_1 = x_2 = l\cdot\cos\alpha,\ y_2 = -y_1 = l\cdot\sin\alpha,\ x_3 = 2b\cdot\cos\alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, находим

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -l\cdot\sin\alpha\cdot\delta\alpha,$$
$$\delta y_2 = -\delta y_1 = l\cdot\cos\alpha\cdot\delta\alpha,$$
$$\delta x_3 = 2b\cdot\sin\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Подставляя все эти выражения в уравнение работ (*), получаем

$$[-2pl\cdot\sin\alpha + 2(p/g)l^2\,\omega^2 \sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2Qb\cdot\sin\alpha]\cdot\delta\alpha = 0.$$

Отсюда окончательно

$$\cos\alpha = \frac{(pl+Qb)g}{pl^2\omega^2}. \qquad (4.15)$$

Поскольку необходимо, чтобы $\cos\alpha \le 1$, то шары будут отклоняться, если

$$\omega^2 \ge (pl+Qb)g/pl^2.$$

С увеличением угловой скорости $\cos\alpha$ в соответствии с (4.15) будет стремиться к нулю, а сам угол – к величине прямого угла.

4.8 Условия равновесия и движения системы в обобщенных координатах

4.8.1 Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Ранее было установлено, что для системы с голономными (геометрическими) связями число независимых координат, определяющих ее положение, совпадает с числом ее степеней свободы. В качестве таких координат можно выбирать параметры, имеющие любую размерность и любой геометрический или механический смысл. Так, координатами могут служить отрезки прямых, дуг, углы, площади и т.д.

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называют обобщенными координатами системы. Далее для обозначения этих координат используем букву q. Положение системы с s степенями свободы будет определяться, таким образом, обобщенными координатами

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s.$$

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то элементарные приращения этих координат

$$\delta q_1,\ \ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta q_s \tag{4.16}$$

тоже независимы между собой. При этом каждая из величин (4.16) определяет соответствующее возможное перемещение системы, независимое от других.

Известно, что всегда можно перейти от одной системы координат к другой, с таким же числом независимых координат.

Так, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки системы можно выразить через обобщенные координаты зависимостями вида

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_s),$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \ldots, q_s),$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, \ldots, q_s).$$

Следовательно, для радиуса-вектора этой точки тоже можно записать выражение

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s).$$

Пример 1

Плоский математический маятник ОМ имеет одну степень свободы, так как для описания его положения достаточно одной координаты (рис. 4.17, а). В качестве такой обобщенной координаты можно выбрать или угол φ, или длину дуги s, отсчитываемую от положения равновесия, или площадь сектора σ. В любом случае необходимо только указать положительное и отрицательное направления отсчета этих координат. Неудачным следует признать выбор в качестве обобщенной координаты расстояния вверх от положения равновесия, так как одному значению координаты могут отвечать два положения маятника – слева и справа от положения равновесия.

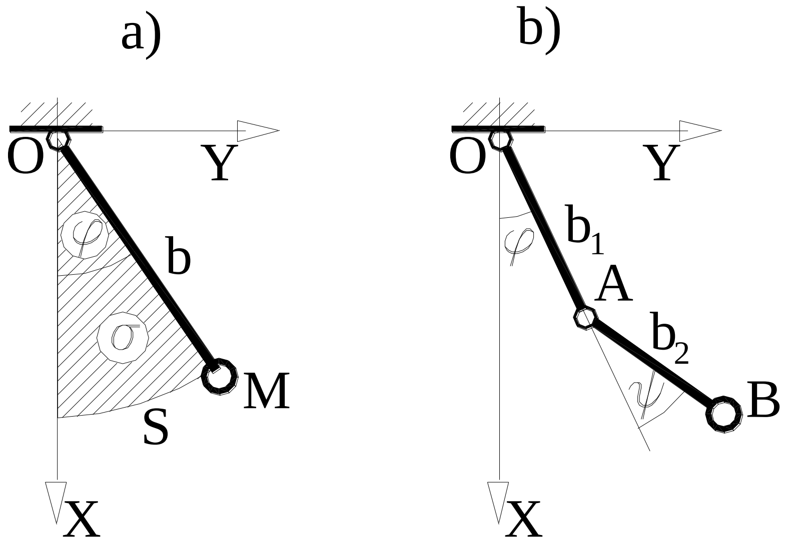


Рис. 4.17

Если в качестве обобщенной координаты взять угол φ, то возможному перемещению маятника отвечает приращение δφ. Поскольку

$$x = b \cdot \cos\varphi,\ y = b \cdot \sin\varphi,$$

то окончательно можно получить зависимость $r = r(\varphi)$, что и означает переход к обобщенным координатам.

Пример 2

Рассмотрим двойной плоский маятник OAB (рис. 4.17, b) как систему с двумя степенями свободы, для которой в качестве обобщенных координат можно взять углы φ и ψ ($q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$). Очевидно, что эти углы между собой независимы. Тогда величины δφ и δψ определяют независимые между собой перемещения системы. Поскольку

$$x_A = b_1 \cdot \cos\varphi,\ \ x_B = b_1 \cdot \cos\varphi + b_2 \cdot \cos(\varphi + \psi),$$

и т.д., то в этом случае имеем

$$r_A = r_A(\varphi),\quad r_B = r_B(\varphi,\psi).$$

При движении системы меняется ее положение и соответственно значения обобщенных координат, что можно записать в виде

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \ldots, q_s = f_s(t).$$

Эти уравнения называются кинематическими уравнениями движения системы в обобщенных координатах.

Производные по времени от обобщенных координат называются обобщенными скоростями системы. Обозначаются эти производные как обычно – точкой над соответствующим символом или как dq_k/dt. Размерность обобщенной скорости зависит от того, какая величина принята в качестве обобщенной координаты. Так, если координата линейная величина, то обобщенная скорость имеет размерность обычной линейной скорости. Если координата – угол, то обобщенная скорость имеет размерность угловой скорости, если в качестве координаты берется площадь сектора, то соответствующая скорость – секторная скорость и т.д.

4.8.2 Обобщенные силы

Пусть на систему n материальных точек действуют силы $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, … , $\boldsymbol{F_n}$. Сама система имеет s степеней свободы, и ее положение описывается соответствующим числом обобщенных координат. Пусть мы сообщаем системе такое возможное перемещение, при котором координата q_1 получит приращение δq_1, а остальные координаты не меняются. Тогда каждый из радиусов-векторов системы получит элементарное приращение $(\delta \bar{r}_k)_1$. Такое обозначение вводится для элементарного приращения соответствующего радиуса-вектора с номером k только при изменении q_1 на δq_1. Сам радиус-вектор зависит от всех обобщенных координат, поэтому $(\delta \bar{r}_k)_1$ можно получить как частный дифференциал, т.е.

$$(\delta \bar{r}_k)_1 = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Сумму работ всех действующих сил на рассматриваемом

перемещении обозначим индексом 1:

$$\begin{aligned}\delta A_1 &= \bar{F}_1 \cdot (\delta \bar{r}_1)_1 + \bar{F}_2 \cdot (\delta \bar{r}_2)_1 + \ldots + \bar{F}_n \cdot (\delta \bar{r}_n)_1 = \\ &= \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \ldots + \bar{F}_n \cdot \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1.\end{aligned}$$

Вынесем в последней строчке этого выражения общий множитель δq_1 за скобки и получим

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1,$$

(*)

где введено обозначение

$$Q_1 = \sum \overline{F}_k \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}.$$

По аналогии с обычным выражением для работы величину Q_1 называем далее обобщенной силой, отвечающей обобщенной координате q_1. Очевидно, сообщая системе другое аналогичное перемещение, при котором меняется только вторая обобщенная координата, после повторения всех выкладок получим выражение для обобщенной силы, отвечающей второй координате $Q_2 = \sum \overline{F}_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}$ и т.д.

Если системе сообщить перемещение, при котором меняются все обобщенные координаты, то сумма элементарных работ будет

$$\Sigma \delta A_k = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \ldots + Q_s \cdot \delta q_s. \tag{4.17}$$

Эта формула дает выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах. Из нее видно, что **обобщенные силы – это величины (коэффициенты) при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.**

Если связи в системе идеальные, то работа их реакций равна нулю, и работу совершают только активные силы. В этом случае величины Q_k представляют собой обобщенные активные силы системы.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты.

Размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты:

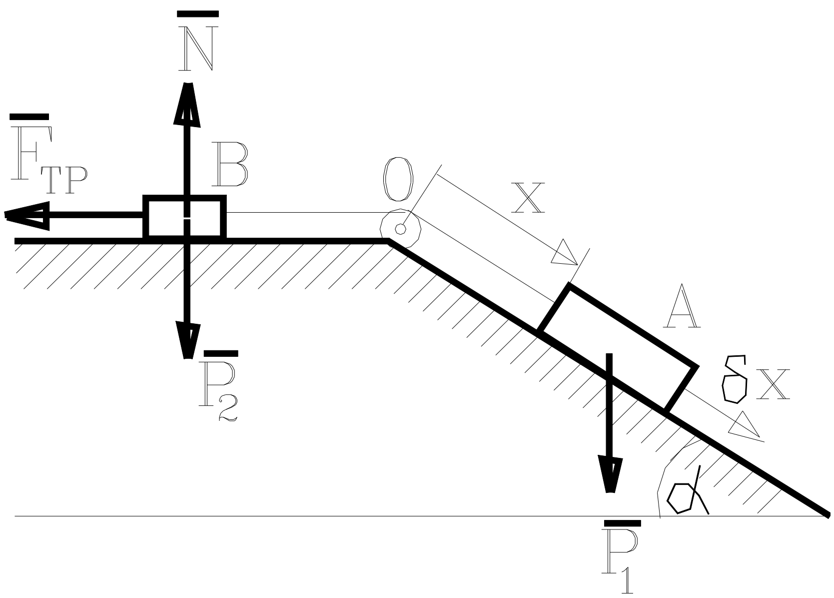
$$[Q] = [A]/[q].$$

Таким образом, обобщенная сила совпадает по размерности с обычной лишь в случае, когда обобщенная координата имеет смысл линейной величины (расстояния).

Вычисление обобщенных сил проводим в соответствии с полученными выше выражениями через возможную элементарную работу. При этом сначала устанавливается число степеней свободы системы, выбираются обобщенные координаты, а на чертеже изображаются все приложенные к системе активные силы и силы трения (если они совершают работу). Для определения первой обобщенной силы Q_1 нужно сообщить системе такое перемещение, при котором координата q_1 получает положительное приращение δq_1, и вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех сил. Коэффициент при δq_1 в выражении (*) и даст искомое значение обобщенной силы Q_1. Аналогично можно вычислить все остальные обобщенные силы.

Пример 1

Груз P_1 перемещается по гладкой наклонной плоскости, а груз P_2 – по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения f (рис. 4.18). Грузы связаны нитью, трением в блоке и



массой нити пренебречь. Определить обобщенную силу для этой системы.

Рис. 4.18

Эта система имеет одну степень свободы. Положение системы полностью определяется координатой $q_1 = x$, положительное направление которой показано на рисунке. Сообщаем системе возможное перемещение δx, при котором оно тоже положительно, и вычисляем элементарную работу сил $\overline{P}_1$ и трения $\overline{F}_{TP}$. Остальные силы работу не совершают. Так как $F_{TP} = fN = fP_2$, то

$$\delta A = (P_1 \cdot \sin\alpha - f \cdot P_2) \cdot \delta x.$$

Отсюда обобщенная сила, как было сказано ранее, - это

множитель перед δx, т.е.

$$Q_1 = P_1 \cdot \sin\alpha - f \cdot P.$$

Пример 2

Однородный стержень длиной l и весом p может вращаться в вертикальной плоскости (в плоскости чертежа) вокруг оси А (рис. 4.19). На стержне нанизан шарик весом P, который удерживается в равновесии пружиной. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна b_0, а ее жесткость определяется величиной c. Найти для этой системы обобщенные силы.

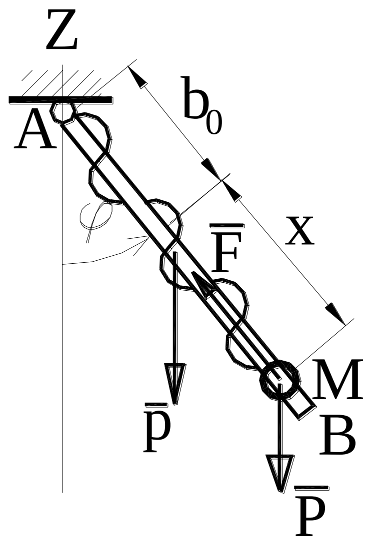


Рис. 4.19

Система имеет две степени свободы: ее положение полностью определено, если известны угол φ поворота стержня вокруг оси и положение шарика на стержне. Принимаем в качестве обобщенных координат угол φ и расстояние x шарика от конца ненапряженной пружины ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$).

Сообщим системе сначала возможное перемещение, когда меняется только первая обобщенная координата, угол φ, на величину $\delta\varphi > 0$. При этом x = const. На этом перемещении работу совершают силы $\bar{p}$ *и* $\bar{P}$. Находим соответствующую работу с учетом того, что направление момента противоположно направлению вращения:

$$\delta A_1 = [-(Pl/2)\cdot\sin\varphi - p(b_0 + x)\cdot\sin\varphi]\cdot\delta\varphi,$$

следовательно:

$$Q_1 = -\,[Pl/2 + p(b_0 + x)]\cdot\sin\varphi.$$

Теперь сообщаем системе возможное перемещение, при котором меняется только вторая координата x на величину $\delta x > 0$ при условии φ = const. На этом возможном перемещении работу совершают сила тяжести $\bar{p}$ и сила упругости $\bar{F}$, модуль которой $F = cx$. Тогда

$$\delta A_2 = (p\cdot\cos\varphi - cx)\cdot\delta x,$$

и

$$Q_2 = p\cdot\cos\varphi - cx.$$

Первая обобщенная сила имеет размерность момента (так как первая обобщенная координата имеет размерность угла), а вторая – размерность обычной силы.

Случай потенциальных сил

Если все силы, действующие на систему, являются потенциальными, то для системы существует силовая функция U, в общем случае зависящая от координат, такая, что сумма элементарных работ действующих сил равна полному дифференциалу этой функции, т.е. $\Sigma\delta A_k = \delta U$. Но при переходе к обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_s$ все величины x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты. Тогда

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_s).$$

Следовательно, вычисляя δU как полный дифференциал от U, получим

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Сравнивая это с выражением (4.17), заключаем

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

или, поскольку потенциальная энергия П = – U,

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \ldots, Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

Таким образом, **если все действующие на систему силы являются потенциальными, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы) по соответствующим обобщенным координатам.**

Пример 3

Рассмотрим еще раз систему, представленную на рисунке 4.19. Все силы в этой системе потенциальны. Если ввести ось Oz, направленную вертикально вверх, то потенциальная энергия всей системы получается в виде выражения:

$$\Pi = -(Pl/2)\cdot\cos\varphi - p(b_0 + x)\cdot\cos\varphi + cx^2/2,$$

где обобщенными координатами по-прежнему служат $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$. Тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -[Pl/2 + p(b_0 + x)]\cdot\sin\varphi, Q_2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} = p\cdot\cos\varphi - cx,$$

что совпадает с результатами, полученными в примере 2.

4.8.3 Условия равновесия системы в обобщенных координатах

В соответствии с принципом возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил (и сил трения, если они совершают работу) на любом возможном перемещении системы, т.е.

$$\Sigma\delta A_k = 0.$$

В обобщенных координатах это записывается в виде

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s = 0.$$

В этом соотношении δq_1, δq_2 ,…,δq_s между собой независимы, и равенство левой части нулю возможно лишь тогда, когда

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_s = 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, **для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.** Число условий равновесия равно числу обобщенных координат или числу степеней свободы системы.

По существу, при решении задач в рассмотренных выше примерах (см., например, задачи с рис. 4.14, 4.15) мы с помощью принципа возможных перемещений вычисляли соответствующие обобщенные силы, а затем приравнивали их нулю.

В случае потенциальных сил условия равновесия (4.18) можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

Но это означает, что полный дифференциал U или Π равен нулю:

$$dU(q_1, q_2,...,q_s) = 0, \qquad d\Pi(q_1, q_2,...,q_s) = 0.$$

Эти равенства представляют собой условия экстремума функции нескольких переменных. Следовательно, система находится в равновесии только тогда, когда ее потенциальная энергия имеет экстремум.

4.8.4 Уравнения Лагранжа

Общее уравнение динамики можно записать в обобщенных координатах как уравнение статики, присоединив к активным силам еще и силы инерции:

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^u = 0. \tag{4.19}$$

В первую сумму здесь могут входить как работа активных сил, так и работа сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы. Тогда с использованием обобщенных координат

$$\Sigma \delta A_k = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + ... + Q_s \cdot \delta q_s.$$

Преобразуем к обобщенным координатам и элементарную работу сил инерции. Делаем это по аналогии с выражением для работы активных сил. Тогда получим

$$\sum \delta A_k^u = Q_1^u \delta q_1 + Q_2^u \delta q_2 + ... + Q_s^u \delta q_s,$$

где введены так называемые обобщенные силы инерции, которые можно представить по аналогии с активными силами в виде

$$Q_1^u = \sum \bar{F}_k^u \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}, \ldots, Q_s^u = \sum \bar{F}_k^u \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}. \tag{4.20}$$

Подставляя эти значения в выражение (4.19), получим

$$(Q_1 + Q_1^u)\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^u)\delta q_2 + \ldots + (Q_s + Q_s^u)\delta q_s = 0.$$

В силу независимости между собой $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$Q_1 + Q_1^u = 0, \quad Q_2 + Q_2^u = 0, \quad \ldots, \quad Q_s + Q_s^u = 0.$$

Полученными выражениями можно пользоваться для решения задач динамики. Однако получение уравнений движения упрощается, если выразить обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы.

Поскольку сила инерции любой точки системы определяется как

$$\bar{F}_k^u = -m_k \bar{a}_k = -m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt},$$

то в первом из выражений (4.20) будет

$$-Q_1^u = \sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}. \tag{4.21}$$

Преобразуем правую часть этого выражения так, чтобы она содержала только скорости точек системы. Заметим, что

$$\frac{d\bar{v}_k}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) - \bar{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right). \qquad (4.22)$$

Справедливость этого преобразования проверяется непосредственным дифференцированием произведения, находящегося справа в скобках. Далее используем еще два соотношения:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1} \qquad и \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}.$$

Для доказательства справедливости первого из этих равенств заметим, что

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s),$$

и

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s,$$

откуда и следует первое равенство $\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\cdot$. Второе равенство основано на том, что операции полного дифференцирования по времени и частного по обобщенной координате перестановочны, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}.$$

Подставляя теперь полученные величины в (4.22), находим

$$\frac{d\bar{v}_k}{dt}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Имея ввиду, что $\bar{v}_k^2 = v_k^2$, окончательно обобщенную силу инерции (4.21) запишем в виде

$$-Q_1^u = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где буквой T обозначена кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получаются и для других обобщенных сил инерции. Тогда окончательно

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s.
\end{aligned} \qquad (4.23)$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, или уравнения Лагранжа. **Число этих уравнений равно числу степеней свободы.** Важное достоинство уравнений Лагранжа: они дают простой единый метод решения задач динамики. Вид этих уравнений и их число не зависят от количества точек или тел, входящих в систему, или от вида их движения. Число уравнений Лагранжа всегда определяется только числом степеней свободы системы. При идеальных связях правые части уравнений (4.23) содержат только обобщенные активные силы, таким образом, уравнения Лагранжа сразу исключают из рассмотрения неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы по известным обобщенным силам и начальным условиям найти закон движения системы, т.е. зависимости обобщенных координат от времени.

Так как кинетическая энергия системы зависит от обобщенных скоростей, то при дифференцировании первых слагаемых слева в (4.23) появятся вторые производные по времени от искомых обобщенных координат. Таким образом, уравнения Лагранжа представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат.

Рассмотрим случай потенциальных сил.

Тогда, например, первое из уравнений (4.23) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \qquad \textit{или} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial (t-\Pi)}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_1} = 0.$$

Это можно сделать потому, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, а является функций только обобщенных координат, и $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} = 0.$. Введем функцию

$$L = T - \Pi,$$

равную разности между кинетической и потенциальной

энергиями системы. Она носит название функции Лагранжа или

кинетического потенциала. Тогда уравнения Лагранжа

принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0,\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0.
\end{aligned} \qquad (4.24)$$

Таким образом, состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется единственной функцией – функцией Лагранжа, так как для составления дифференциальных уравнений движения достаточно знать лишь эту функцию.

Функции, аналогичные введенной выше функции Лагранжа, описывают состояние других физических систем – непрерывной среды, электромагнитного поля и т.д., поэтому они играют важную роль в ряде разделов физики.

4.8.5 Примеры решения задач

Уравнениями Лагранжа можно пользоваться для изучения движения любой механической системы с геометрическими (или сводящимися к геометрическим) связями, независимо от числа тел и от того, какое движение (абсолютное или относительное) рассматривается.

Порядок составления уравнений Лагранжа:

1. Устанавливается число степеней свободы системы и выбираются обобщенные координаты.
2. Изображается система в произвольном положении, и на рисунке показываются все действующие на систему силы; для систем с идеальными связями показываются только активные силы.
3. Вычисляются обобщенные силы. Чтобы не ошибиться в знаках, каждое возможное перемещение системы направляется так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным.
4. Определяется кинетическая энергия системы в ее абсолютном движении и выражается через обобщенные координаты и обобщенные скорости.
5. Определяются частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам и подставляются в уравнения (4.23).

Таким путем уравнения Лагранжа составляются независимо от того, рассматривается абсолютное или относительное движение. Но в последнем случае можно использовать и другой путь: кинетическую энергию системы рассматривать в ее относительном движении, но при нахождении обобщенных сил к силам, действующим на систему, присоединить переносные силы инерции.

Далее, если заданы силы, определяется закон движения системы. Если же задан закон движения, определяются силы.

Пример 1

Составить уравнение колебаний физического маятника с использованием метода Лагранжа (рис. 4.20).

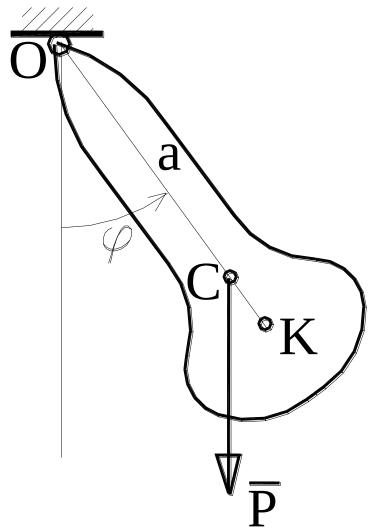


Рис. 4.20

Маятник имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты примем угол φ. На возможном перемещении $\delta\varphi > 0$ работу совершает только сила тяжести:

$$\delta A_1 = (-Pa \cdot \sin\varphi) \cdot \delta\varphi,$$

где a = OC, в точке C находится центр масс маятника.

Таким образом,

$$Q_1 = -Pa \cdot \sin\varphi.$$

Кинетическая энергия маятника определяется как

$$T = J_0\omega^2 / 2 = J_0\dot{\varphi}^2 / 2.$$

Уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_1. \tag{4.25}$$

Поскольку кинетическая энергия от угла φ не зависит, то $\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$, и тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_0\dot{\varphi},\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=J_0\ddot{\varphi}.$$

Подставляя полученные значения в уравнение (4.25), получим

$$J_0\ddot{\varphi}=-Pa\cdot\sin\varphi.$$

Если использовать то обстоятельство, что сила тяжести потенциальна, то уравнение Лагранжа можно составить в виде (4.24). Считаем ось Oz направленной вертикально вниз. Тогда

$$\Pi=-Pz=-Pa\cdot\cos\varphi.$$

Следовательно

$$L=J_0\dot{\varphi}^2/2+Pa\cdot\cos\varphi; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=J_0\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi}=-Pa\cdot\sin\varphi,$$

и в результате решение уравнения в виде (4.24) дает такой же результат $J_0\ddot{\varphi}=-Pa\cdot\sin\varphi$, что и в предыдущем случае.

Пример 2

Трубка OA вращается в горизонтальной плоскости (совпадающей на рис. 4.21 с плоскостью чертежа) с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль трубки движется шарик с массой *m*. В начальный момент времени он находится на расстоянии x_0 от оси вращения, и скорость его равна нулю.

Найти закон движения шарика и величину момента, приложенного к трубке.

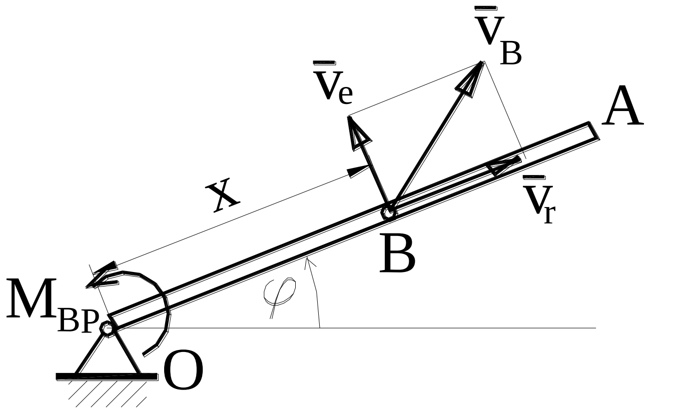


Рис. 4.21

Система имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат принимаем координату x, определяющую относительное движение шарика, и угол поворота трубки φ. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2. \qquad \text{(a)}$$

Сначала определим обобщенные силы. На перемещении δx действующие силы работу не совершают, т.к. трубка вращается в горизонтальной плоскости. Следовательно, $\delta A_1 = 0$. На перемещении δφ момент M совершает работу $\delta A_2 = M \cdot \delta\varphi$. Таким образом

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = M.$$

Кинетическая энергия слагается из энергии T_1 шарика и энергии T_2 трубки. Энергию T_1 определим для абсолютного движения шарика. Для этого в выражении кинетической энергии используем скорость шарика при его абсолютном движении. Она складывается из скорости вдоль трубки (относительной) и скорости вращения вместе с трубкой (переносной). Так как направления этих скоростей взаимно перпендикулярны, то

$$T_1 = m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)/2.$$

Если обозначим момент инерции трубки относительно оси вращения как J_0, то

$$T_2 = J_0\omega^2/2 = J_0\dot{\varphi}^2/2.$$

Окончательно выражение полной энергии будет

$$T = T_1 + T_2 = m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2)/2 + J_0\dot{\varphi}^2/2.$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mx^2\dot{\varphi} + J_0\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Подставляя теперь эти значения и выражения для обобщенных сил в уравнения (а) и учитывая, что по условию угловая скорость постоянна, получим

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0, \qquad 2m\omega x\dot{x} = M. \tag{4.26}$$

Интегрируя первое из этих уравнений с учетом того, что при $t = 0$ $x = x_0$ и скорость равна нулю, получаем закон движения шарика вдоль трубки:

$$x = x_0(e^{\omega t} + e^{-\omega t})/2, \qquad или \qquad x = x_0 * ch\omega t. \tag{4.27}$$

Второе из равенств (4.26) определяет величину момента, действующего на трубку. Она равна моменту кориолисовой силы инерции. Если с помощью (4.27) выразить скорость через координату x, то получим зависимость момента от координаты шарика:

$$M = 2m\omega^2 x\sqrt{x^2 - x_0^2}.$$

Рассмотренный пример интересен тем, что в рамках одной задачи мы определяем закон движения шарика по заданным силам (решается основная задача динамики), и по заданному закону движения трубки определяем приложенный к ней момент.

Пример 3

Тележка массой m_1 под действием силы $\boldsymbol{F}$ движется горизонтально (рис. 4.22). На тележке находится сплошной цилиндрический каток массой m_2. Каток может катиться по тележке без скольжения.

Определить ускорение тележки.

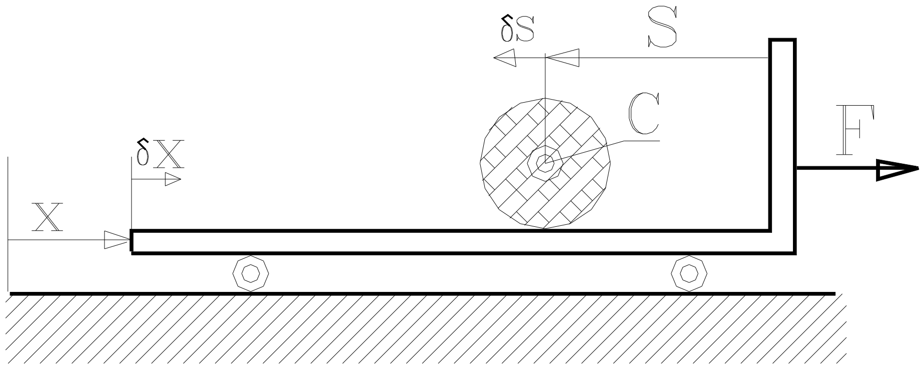


Рис. 4.22

Система имеет две степени свободы, так как ее состояние описывается положением тележки и положением катка на ней. В качестве обобщенных координат соответственно принимаем координату x тележки и координату s центра катка C относительно тележки. Тогда уравнения Лагранжа для системы будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2. \qquad (4.28)$$

Кинетическая энергия тележки и катка соответственно

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2 v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2},$$

где v_C – абсолютная скорость катка, причем численно

$$v_C = \dot{x} - \dot{s}.$$

Для сплошного цилиндра момент инерции определяется как J_C = $=m_2r^2/2$, а при качении без скольжения $\omega = \dot{s}/r$, где в числителе – скорость центра С относительно тележки (а не абсолютная скорость). Итак:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}-\dot{s})^2}{2} + \frac{m_2\dot{s}^2}{4},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x}-\dot{s}), \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_2(\dot{s}-\dot{x}) + \frac{m_2\dot{s}}{2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Для определения обобщенных сил придадим системе возможное перемещение, при котором координата x получит положительное приращение δx. На этом перемещении работу совершает сила F, и величина этой работы определится равенством $\delta A_1 = F\cdot\delta x$. На перемещении δs активные силы работу не совершают, т.е. $\delta A_2 = 0$. Из этих равенств следует, что

$$Q_1 = F, \quad Q_2 = 0.$$

Подставляем теперь полученные значения в (4.28) и находим дифференциальные уравнения движения системы

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ddot{s} = F, \quad 3\ddot{s} - 2\ddot{x} = 0.$$

Выражаем из второго уравнения $\ddot{s} = 2\ddot{x}/3$ и, подставляя в первое уравнение, получаем искомое значение ускорения тележки

$$a_1 = \ddot{x} = 3F/(3m_1 + m_2).$$

Отметим, что если бы каток был закреплен неподвижно на тележке и не мог катиться, то, очевидно, ускорение вычислялось бы по формуле

$$a_1 = F/(m_1 + m_2).$$

Если же каток без трения может проскальзывать по тележке, то он будет перемещаться по тележке без вращения, т.е. поступательно. Повторив все сделанные ранее выкладки без учета кинетической энергии вращения катка, получим, что

$$a_1 = F/m_1.$$

Т.е. в этом случае тележка катится так, будто катка на ней вообще нет – он при движении тележки будет проскальзывать и оставаться на месте.

4.9 Элементарная теория удара

4.9.1 Основное уравнение теории удара

Ранее отмечалось, что изменение скорости тела определяется суммарным импульсом приложенных сил. Если время приложения этих сил τ будет стремиться к нулю, то формально и импульс сил тоже стремится к нулю.

Однако если среди приложенных сил будут такие, порядок которых $1/\tau$, то приращение скорости при действии соответствующего импульса сил будет величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за малый (близкий к нулю) промежуток времени меняются на конечную величину, называется ударом. Возникающие при этом силы называем ударными, а временной интервал – временем удара.

В теории удара в качестве меры взаимодействия тел используют не сами ударные силы, так как за время удара они могут меняться очень сильно, а импульсы сил.

Ударный импульс можно определить формулой

$$\bar{S}_y = \int_0^{\tau} \bar{F}_y dt = \bar{F}_y^{cp} \cdot \tau.$$

Это конечная величина. Импульсы обычных сил за такое малое время обычно очень малы, и ими можно пренебречь.

Тогда теорема об изменении количества движения материальной точки может быть записана в виде

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum \bar{S}_k, \tag{4.29}$$

где в скобках стоит разность между конечным и начальным

значениями скорости, а справа – сумма действующих на точку ударных импульсов. В теории удара уравнение (4.29) играет такую же важную роль, как основной закон динамики при изучении движений тел при воздействиях неударных сил, и называется основным уравнением удара.

Перемещение точки за время удара определится как произведение ее средней скорости на время удара, и так как время мало, то перемещением практически можно пренебречь.

Таким образом:

1) действием неударных сил, т.е. сил постоянных (например, сил тяжести) или слабо меняющихся во времени, за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменение скоростей точек тела за время удара определяется основным уравнением удара.

4.9.2 Общие теоремы теории удара

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Ранее мы рассматривали закон изменения количества движения системы. Это изменение определялось суммой импульсов внешних сил, действующих на систему. Он сохраняет свою силу и при наличии ударных сил, но импульсами обычных сил можно пренебречь, и в правой части останутся только ударные импульсы:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e, \tag{4.30}$$

т.е. **изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.** Если эта сумма равна нулю, то количество движения системы не меняется. Внутренние ударные импульсы не могут изменить количество движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количеств движения (теорема моментов) при ударе

Поскольку принимается, что точки системы за время удара не перемещаются, формулировка теоремы моментов меняется по сравнению с полученной ранее.

Рассмотрим систему *n* материальных точек. Вводя равнодействующие внешних и внутренних ударных импульсов, действующих на точку m_k, для этой точки на основании уравнения (4.29) можем записать

$$m_k \bar{u}_k = m\bar{v}_k + \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i.$$

Возьмем моменты всех этих векторных величин относительно некоторого центра О и просуммируем по всем точкам системы. Получим

$$\sum \overline{m}_O(m_k \bar{u}_k) - \sum \overline{m}_O(m_k \bar{v}_k) = \sum \overline{m}_O(\bar{S}_k^e) + \sum \overline{m}_O(\bar{S}_k^i).$$

Слева стоят суммы, представляющие собой главные моменты количеств движения системы в конце и начале удара. Второе слагаемое справа равно нулю по свойству внутренних сил. Окончательно получаем

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum \overline{m}_O(\overline{S}_k^e).$$

Изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-либо центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему ударных импульсов.

Если правая часть равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно центра не меняется за время удара. Что касается внутренних сил, то их ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

4.9.3 Коэффициент восстановления при ударе

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел.

Рассмотрим в качестве примера вертикальное падение шара на жесткую горизонтальную плиту. Для прямого удара, который происходит в данном случае, можно выделить две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара убывают до нуля. Шар деформируется, а его кинетическая энергия переходит в энергию упругого деформирования, т.е. в потенциальную энергию. На второй стадии эта энергия переходит в работу по восстановлению формы шара и кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара, когда шар отскочит от плиты, он приобретает некоторую скорость, причем меньшую, чем скорость падения.

Величина, равная отношению скорости отскока к скорости падения тела при прямом ударе о жесткую преграду, называется коэффициентом восстановления при ударе.

Значение коэффициента восстановления k зависит в основном от материала соударяющихся тел и определяется опытным путем. При этом $k = 1$ отвечает абсолютно упругому удару, а $k = 0$ – абсолютно неупругому удару. Значение k дается в справочниках о свойствах материалов. Например, для скорости удара около 3 м/с такие значения даются для пар

дерево-дерево	0.5,
сталь-сталь	0.56,
стекло-стекло	0.94.

4.9.4 Удар тела о неподвижную преграду

Если нормаль к поверхности тела в точке его касания с плоской преградой проходит через его центр масс, то такой удар называется центральным. Для шара, например, удар всегда центральный. Если скорость тела при ударе совпадает с нормалью к преграде – удар прямой, иначе – косой.

1. Случай прямого удара

Проектируем уравнение (4.29) на нормаль n к преграде. При прямом ударе это означает, что проекции скоростей по величине равны модулям соответствующих скоростей и могут отличаться только знаками для подхода к преграде и отскока. Это можно записать в виде

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Учтем далее, что при прямом ударе

$$u_n = u,\ v_n = -v,\ S_n = S.$$

Тогда

$$M(u + v) = S.$$

Второе уравнение для решения задачи принимаем в виде $u = k \cdot v$. Зная величины M, v, k, определим теперь u, S. В частности, получим

$$S = M \cdot (1+k) \cdot v.$$

Отсюда следует, что ударный импульс тем больше, чем больше коэффициент восстановления.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), следует знать время удара. Оно обычно определяется экспериментально.

Пример

Пусть с высоты H = 3 м падает на стальную плиту стальной шар массой 1 кг. Определить ударный импульс и среднее значение силы, если время удара $\tau = 0.0005$ с.

В этом примере k = 0.56. Скорость в начале удара составит $v = \sqrt{2gH} \approx 7.7$ м/с, а скорость отскока $u = kv$ = 4.3 м/с. Ударный импульс составит $S = mv(1 + k)$ = 12 Н·с. Средняя величина ударной силы будет S/τ = 24 000 Н.

2. Случай косого удара

Пусть вектор скорости $\boldsymbol{v}$ при падении тела на преграду составляет с нормалью к ней угол α, а после отскока вектор скорости $\boldsymbol{u}$ – угол β (рис. 4.23). Проектируем уравнение (4.29) на нормаль к преграде и на касательную к ней. Получим

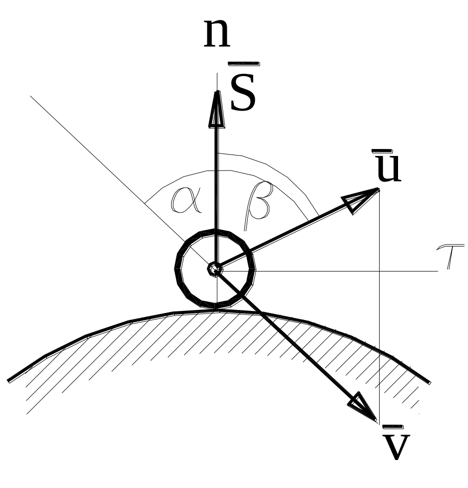


Рис. 4.23

$$M\cdot(u_n - v_n) = S, \qquad M\cdot(u_\tau - v_\tau) = 0. \tag{4.31}$$

Поскольку удар происходит только по направлению нормали к поверхности (если мы пренебрегаем трением), коэффициент восстановления относится лишь к нормальным составляющим скоростей падения и отскока, т.е. $k = -u_n / v_n$. Из (4.31) получаем тогда

$$u_\tau = v_\tau, \quad u_n = -k\cdot v_n, \; S = M|v_n|(1 + k).$$

Из этих соотношений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс при известных M, v, k, α. В частности, из первого равенства с учетом того, что

$$|u_n|\,\mathrm{tg}\beta = |v_n|\,\mathrm{tg}\alpha,$$

получим

$$\mathrm{tg}\alpha \,/\, \mathrm{tg}\beta = k < 1.$$

Это означает, что при косом ударе угол падения (он отсчитывается от нормали к преграде) всегда меньше угла отражения.

4.9.5 Прямой центральный удар двух тел (шаров)

Удар двух тел называется прямым и центральным, если общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и скорости тел в начале удара направлены вдоль этой нормали. Примером такого удара является удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой (рис. 4.24).

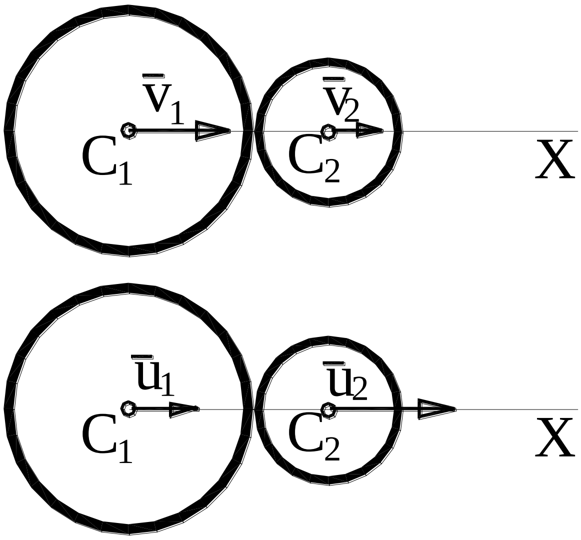


Рис. 4.24

Пусть имеем два тела с массами M_1 и M_2, скорости центров масс в начале удара v_1, v_2, в конце удара u_1, u_2 . Направим ось C_1x от центра первого шара через центр второго. Для удара необходимо, чтобы первое тело догнало второе, или $v_{1x} > v_{2x}$. Кроме того, после удара первое тело не может обогнать второе, и необходимо $u_{1x} < u_{2x}$.

Пусть при заданных массах, начальных скоростях и коэффициенте восстановления k происходит удар. Найдем скорости тел после удара.

Применим к системе двух тел – соударяющихся шаров – теорему об изменении количества движения. Для этой системы силы удара – внутренние, и они не могут изменить суммарное количество движения. Тогда это количество до удара и после – одно и то же:

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M v_{2x}. \tag{4.32}$$

Второе уравнение получим из выражения для коэффициента восстановления. При этом нужно иметь в виду, что этот коэффициент имеет смысл только для относительных скоростей, и

$$k = \left|\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}\right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}, \tag{4.33}$$

где учтено соотношение между величинами скоростей тел до и после удара.

Из системы уравнений (4.32), (4.33) можно найти скорости. Величина ударного импульса, например, для первого тела будет $S_{1x} = M_1(u_{1x} - v_{1x})$, а для второго $S_{2x} = - S_{1x}$.

Рассмотрим предельные случаи.

1. Абсолютно неупругий удар

В этом случае $k = 0$. Из (4.32), (4.33) находим

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2}. \tag{4.34}$$

После удара оба тела имеют одинаковые скорости. Действующий на тела ударный импульс определяется как

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

2. Абсолютно упругий удар

В этом случае $k = 1$, и из (4.32), (4.33) получим

$$u_{1x} = v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}),$$

$$u_{2x} = v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

Ударный импульс

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

Таким образом, при абсолютно упругом ударе ударный импульс ровно вдвое больше, чем при абсолютно неупругом ударе.

В частном случае при равных массах $M_1 = M_2$ из полученных соотношений следует, что

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x} .$$

Отсюда видно, что при абсолютно упругом ударе два тела одинаковой массы обмениваются скоростями. Так, при прямом центральном ударе ударяющий бильярдный шар останавливается, а ударяемый неподвижный шар начинает двигаться со скоростью ударяющего.

4.9.6 Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел.

Теорема Карно

При неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшая потеря будет при абсолютно неупругом ударе. Получим ее оценку для такого случая.

Запишем кинетическую энергию в начале и конце удара:

$$2T_0 = M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2, \quad 2T_1 = (M_1 + M_2) \cdot u_x^2. \qquad (4.35)$$

Представим разность значений кинетической энергии в виде

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \qquad (4.36)$$

Из уравнения (4.34) следует, что

$$(M_1 + M_2)u_x = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

и тогда

$$2T_1 = (M_1 + M_2)u_x^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x})u_x,$$

и из уравнения (4.36) с учетом уравнения (4.35) получим

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}\left(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2\right),$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2 .$$

Разности в скобках – это не что иное, как изменение скорости каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать потерянными при ударе скоростями. Из полученного выражения следует **теорема Карно:**

кинетическая энергия, потерянная системой при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.

Проделав схожие выкладки при $k \neq 0$, получим

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_{2x} - u_x)^2\right].$$

Отсюда, в частности, видно, что потеря энергии при частично упругом ударе будет меньше, чем при абсолютно неупругом.

Рассмотрим частные случаи неупругого удара по неподвижному телу. В этом случае $v_2 = 0$, и

$$T_0 = \frac{1}{2}M_1 v_1^2, \quad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}T_0.$$

Последнее выражение показывает, какая часть кинетической энергии остается у системы после удара.

Так, если масса ударяющего тела M_1 много больше, чем ударяемого M_2, то энергия практически сохраняется. При таком неупругом ударе почти не происходит потеря энергии, т.е. система после удара движется с той же скоростью, что и скорость ударяющего тела. Таким образом, при забивании гвоздей, свай и т.п. нужно иметь большую массу молота, копра и т.д.

В другом крайнем обратном случае кинетическая энергия становится чрезвычайно малой – система остается практически неподвижной. Это значит, что в этом случае вся кинетическая энергия ударника переходит в потенциальную энергию деформирования. На практике это можно использовать, когда речь идет о ковке, клепке и т.п. Для этого и нужна массивная наковальня или массивный упор, чтобы масса его была много больше массы молотка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебное пособие для втузов. – 11-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1995. – 416 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. / Под ред. Г.Ю. Джанелидзе. – М., 1966. – Т.1, 2.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Изд. 35 (36). – М., 1981.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Учебное пособие для ВУЗов, в 2-х т. – М.: Наука, 1983.
5. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. Курс лекций в 2 ч. – Томск: Изд-во унив-та, 1966. – Ч.1 – 302 с.; Ч.2. – 1970. – 317 с.