



Кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры

С.В. Татаринов, А.С.Шостак

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ И
АНАЛИЗ ИХ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Пособие по курсовому проектированию

ТОМСК 2012

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

С.В. Татаринов, А.С.Шостак

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ И
АНАЛИЗ ИХ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

Пособие по курсовому проектированию

2012

Рецензент: профессор кафедры КИПР,
д.т.н. Татаринов В. Н.

Технический редактор: доцент кафедры КИПР ТУСУР,
к.т.н. Озеркин Д. В.

Татаринов С. В., Шостак А. С.

Радиотехнические цепи и сигналы. Методическое пособие по курсовому проекту “Математическое описание аналоговых сигналов и анализ их прохождения через линейные цепи”

Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 20012. -40с.

Курсовая работа входит в программу курса «Основы радиоэлектроники и связи» (специальность 210201) и курса «Радиотехнические цепи и сигналы» (специальность 160905) и предназначена для закрепления практических навыков студентов в области анализа структуры сигнала и работы линейных радиотехнических цепей

Пособие по курсовому проектированию написано для студентов специальностей 210201 и 160905, но может быть использовано и студентами других специальностей радиотехнического профиля.

© Татаринов С. В., Шостак А. С., 2012

© Кафедра КИПР Томского
государственного университета систем
управления и радиоэлектроники, 2012

ВВЕДЕНИЕ	4	Удалено: 1
1 НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И СИГНАЛОВ	5	Удалено: 2
1.1 Прямое преобразование Лапласа	5	Удалено: 2
1.2 Обратное преобразование Лапласа. Разложение Хевисайда	5	Удалено: 2
1.3 Системная функция цепи. Образ по Лапласу на выходе цепи...	7	Удалено: 2
1.4 Определение временной зависимости $U(t)$ с использованием интеграла свертки	8	Удалено: 2
1.5 Спектральный анализ периодических сигналов. Ряд Фурье.....	9	Удалено: 2
1.6 Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье; теорема Фурье.....	10	Удалено: 2
1.7 Графическое представление спектра сигнала	11	Удалено: 2
2 ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	12	Удалено: 3
2.1 Определение системной функции радиотехнической цепи	12	Удалено: 3
2.2 Преобразование Лапласа сигнала заданной формы	13	Удалено: 3
2.3 Образ по Лапласу сигнала на выходе цепи	14	Удалено: 3
2.4 Восстановление временной зависимости $U(t)$ с использованием обратного преобразования Лапласа	15	Удалено: 3
2.5 Определение временной зависимости $U(t)$ с использованием интеграла свертки	16	Удалено: 3
2.6 Спектральный анализ периодических сигналов	18	Удалено: 3
2.7 Спектральный анализ непериодических сигналов. Интеграл Фурье	20	Удалено: 4
2.8 Графическое представление периодических и непериодических сигналов.....	20	Отформатировано: Шрифт: Arial, полужирный
2.8.1 Графическое представление амплитудного и фазового спектра для периодического сигнала.	20	Отформатировано: Обычный
2.8.2 Графическое представление амплитудного и фазового спектра для непериодического сигнала	22	Отформатировано: Шрифт: Arial, полужирный
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	24	Отформатировано: Шрифт: (по умолчанию) Arial, полужирный, Проверка правописания
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	25	Удалено: 5
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	27	ПРИЛОЖЕНИЯ..... ...25¶
		Удалено: ¶

ВВЕДЕНИЕ

Удалено: введение

Настоящее пособие предназначено для методического руководства работой студентов при выполнении ими курсовой работы «Математическое описание аналоговых сигналов и анализ их прохождения через линейные цепи».

Данная курсовая работа входит в программу курса «Основы радиоэлектроники и связи» (специальность 2008.00) и курса «Радиотехнические цепи и сигналы» (специальность 2013.00) и предназначена для закрепления практических навыков студентов в области анализа структуры сигнала и работы линейных радиотехнических цепей.

В рамках работы студенту предлагается определить системную функцию двухэлементной линейной радиотехнической цепи (интегрирующей или дифференцирующей) и проанализировать её реакцию на воздействие сигнала заданной формы.

Предлагаемое пособие содержит основные теоретические сведения и пошаговые инструкции по выполнению курсовой работы а также разбор отдельных примеров.

Кроме того, в руководстве представлены возможные виды сигналов и схемы радиотехнических цепей (Приложение 1) и типовая форма технического задания (Приложение 2).

Для успешного выполнения работы и углубленного изучения вопросов, связанных с анализом работы радиотехнических цепей студентам рекомендуется изучить специальную литературу. Список рекомендуемых источников приведен в соответствующем разделе пособия.

1 НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И СИГНАЛОВ

1.1 Прямое преобразование Лапласа

При изучении дисциплин радиотехнического блока студенту необходимо освоить методы функционального описания радиотехнических цепей.

Для так называемого частотного представления функционального описания линейной цепи может быть использован метод преобразований Лапласа¹.

Одностороннее преобразование Лапласа представляет собой оператор, отображающий функцию времени в функцию комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$ в соответствии с формулой

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \exp\{-st\} dt. \quad (1.1)$$

Данный интеграл отображает временную зависимость $x(t)$ в функцию переменной s .

1.2 Обратное преобразование Лапласа. Разложение Хевисайда

Для решения задач анализа радиотехнических цепей зачастую требуется возможность определения временной зависимости $x(t)$ по заданной функции $X(s)$. Эта задача решается с помощью *обратного преобразования Лапласа*

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_c X(s) \exp\{st\} ds, \quad (1.2)$$

где интегрирование осуществляется по контуру c комплексной плоскости.

Обратное преобразование Лапласа может быть реализовано путем разложения $X(s)$ на сумму членов, каждый из которых является прямым преобразованием простой функции времени. Данный метод применим в случае, если $X(s)$ является *рациональной* функцией, поскольку любая рациональная функция может быть разложена на элементарные дроби.

В случае, если рациональная функция является *правильной* (степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя) и если корни по-

¹ Преобразование Лапласа – один из вкладов в математику и физику маркиза Пьера Симона де Лапласа (1749 – 1827), который указал на взаимно однозначное соответствие между двумя функциями и применил свои результаты для решения дифференциальных уравнений (1779). Радиотехническое применение преобразования Лапласа предложено Оливером Хевисайдом (1850 – 1925).

линома знаменателя (полюса $X(s)$) являются простыми или различными всегда возможно записать

$$X(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pm})} = \frac{k_1}{(s - s_{p1})} + \frac{k_2}{(s - s_{p2})} + \dots + \frac{k_m}{(s - s_{pm})}, \quad (1.3)$$

где s_{pi} - полюса $X(s)$, а k_i - константы, называемые вычетами.

Как только вычеты k_i будут найдены, зависимость $x(t)$ можно записать в виде

$$x(t) = k_1 \exp\{s_{p1}t\} + k_2 \exp\{s_{p2}t\} + \dots + k_m \exp\{s_{pm}t\}. \quad (1.4)$$

Это выражение носит название *теорема разложения Хевисайда*.

Из выражения (2.3) следует, что для $X(s)$ с простыми полюсами вычеты k_i находятся по формуле:

$$k_i = [X(s)(s - s_{pi})]_{s=s_{pi}}. \quad (1.5)$$

Процедура разложения на элементарные дроби несколько усложняется, если полином знаменателя содержит повторяющиеся или кратные корни. Тогда к результату разложения должны быть добавлены дополнительные члены, соответствующие степеням повторяющегося члена вплоть до порядка самого полюса. Данное положение можно пояснить следующим примером:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3 + (s+2)} = \frac{k_1''}{(s+1)^3} + \frac{k_1'}{(s+1)^2} + \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}.$$

Вычет k_2 и коэффициент k_1'' могут быть найдены, с помощью разложения (2.5):

$$k_2 = [X(s)(s+2)]_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)^3} \Big|_{s=-2} = -1;$$

$$k_1'' = [X(s)(s+1)^3]_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1.$$

Для нахождения k_1 и k_1' можно воспользоваться следующим методом: вычтем из $X(s)$ член $\frac{k_1''}{(s+1)^3}$. При этом функция будет содержать лишь полюс второго порядка. Повторение такой процедуры устраняет кратные полюсы и такая функция может быть разложена обычным способом:

$$\begin{aligned}
 X(s) - \frac{k_1''}{(s+1)^3} &= \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} - \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1-(s+2)}{(s+1)^3(s+2)} = \\
 &= \frac{-1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k_1'}{(s+1)^2} + \frac{k_1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$k_1' = \left[\frac{-1}{(s+1)^2(s+2)} (s+1)^2 \right]_{s=-1} = -1.$$

1.3 Системная функция цепи. Образ по Лапласу на выходе цепи

Использование преобразования Лапласа дает возможность судить об изменениях сигнала при его прохождении через некоторую радиотехническую цепь. Однако для решения данной задачи необходимо учитывать и свойства рассматриваемой цепи. Поэтому необходимо ввести параметр, характеризующий цепь с учетом свойств составляющих её компонентов. Таким параметром является *системная функция* радиотехнической цепи.

В общем случае системная функция представляет собой отношение изображения реакции системы на воздействие к изображению источника воздействия. В рассматриваемой задаче источником воздействия является сигнал заданной формы, подаваемый на вход цепи, а реакция системы представлена сигналом на её выходе.

Таким образом, для нахождения системной функции цепи необходимо вычислить отношение

$$H(s) = \frac{U_{ВЫХ}(s)}{U_{ВХ}(s)}, \quad (1.6)$$

где $U_{ВХ}(s)$ и $U_{ВЫХ}(s)$ есть амплитуды входного и выходного сигналов соответственно. В соответствии с законом Ома амплитуды сигналов на входе и выходе цепи могут быть представлены как

$$U_{ВХ}(s) = I(s) \dot{Z}_{ВХ}(s) \quad \text{и} \quad (1.7)$$

$$U_{ВЫХ}(s) = I(s) \dot{Z}_{ВЫХ}(s), \quad (1.8)$$

где $I(s)$ - сила тока, а $\dot{Z}_{ВХ}(s)$ и $\dot{Z}_{ВЫХ}(s)$ - входное и выходное комплексное сопротивление цепи.

Напомним, что в данном случае сила тока в цепи является константой, а сопротивления составляющих цепь элементов определяются как:

$$\dot{Z}_R(s) = R; \quad (1.9)$$

$$\dot{Z}_C(s) = \frac{1}{sC}; \quad (1.10)$$

$$\dot{Z}_L(s) = sL. \quad (1.11)$$

Таким образом, мы располагаем всеми необходимыми приемами для описания вида сигнала на выходе исследуемой цепи. Окончательно мы представляем его в виде *образа по Лапласу*.

Для нахождения образа по Лапласу сигнала на выходе цепи воспользуемся соотношением

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (1.12)$$

1.4 Определение временной зависимости $U(t)$ с использованием интеграла свертки

Необходимо отметить, что предложенный выше (см. 2.2) метод определения временной зависимости $x(t)$ с использованием обратного преобразования Лапласа и разложения Хевисайда не является единственным.

Зная системную функцию цепи, мы можем произвести операцию определения временной зависимости с использованием так называемого *интеграла свертки*.

Интеграл свертки является во временной области эквивалентом обратного преобразования Лапласа формулы (2.12).

Интеграл свертки имеет вид:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (1.13)$$

где $h(t)$ - импульсная реакция цепи, т.е. реакция цепи при воздействии на неё *единичного импульса*.

Импульсная реакция радиотехнической цепи определяется как обратное преобразование Лапласа системной функции $H(s)$.

Функцию $h(t)$ можно определить как

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau_0} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\}, \quad (1.14)$$

где $\delta(t)$ - так называемая *δ -функция* или *функция Дирака*.

Описанные методы определения временной зависимости могут использоваться независимо. При выполнении курсовой работы студенту будет предложено использовать их для контроля правильности анализа. В случае совпадения результатов можно полагать итог расчётов верным.

1.5 Спектральный анализ периодических сигналов. Ряд Фурье

Описанная выше методика позволяет оценить влияние параметров радиотехнической цепи на характеристики сигнала. Не следует, однако, забывать, что собственно сигнал представляет собой весьма интересный объект исследования. В ходе выполнения курсовой работы студенту необходимо продемонстрировать навыки анализа структуры сигнала. Для этого в техническое задание включается раздел, касающийся исследования формы спектра периодического и непериодического сигнала с использованием математического аппарата рядов и интегралов Фурье².

При выполнении работы предполагается, что периодический сигнал представляет собой бесконечную последовательность импульсов заданной формы. Для анализа такого сигнала используется разложение в *ряд Фурье*, т.е. представление функции $x(t)$ в виде взвешенной суммы гармонических колебаний:

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}, \quad (1.15)$$

где T – период сигнала, a_0 , a_n , b_n – коэффициенты ряда Фурье, определяемые следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad (1.16)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt; \quad (1.17)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad (1.18)$$

Множество коэффициентов ряда Фурье образует *спектр функции* $x(t)$, а процесс их определения носит название *спектрального анализа*³. Периодический сигнал имеет *дискретный* спектр, поскольку только дискретное множество частот требуется при спектральном синтезе таких колебаний. Дискретный спектр также называют *линейчатым*, поскольку весьма удобным спосо-

² В 1807 г. Ж. Б. Ж. Фурье высказал предположение, что любую произвольную периодическую функцию можно представить в виде бесконечного математического ряда, коэффициенты которого подчинены определенному закону и могут быть вычислены. Строгое доказательство этого утверждения было дано Дирихле в 1829 г.

³ Понятие «спектр» было введено в физику Ньютоном (1664) при описании анализа разложения призмой света на его цветные компоненты или частоты.

бом графического представления дискретной спектральной информации является линейчатый график⁴.

1.6 Спектральный анализ непериодических сигналов. Преобразование Фурье; теорема Фурье

Известно, что существует весьма обширный класс сигналов, не являющихся периодическими. Для анализа таких сигналов метод рядов Фурье неприменим и, следовательно, необходимо рассмотреть возможность расширения возможностей данного метода⁵.

Исследуя структуру ряда Фурье для периодической функции в предельном случае очень большого периода мы можем, устремив период к бесконечности, перейти к так называемому *преобразованию Фурье*:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \exp\{-j\omega t\} dt. \quad (1.19)$$

По аналогии с преобразованием Лапласа, существует также *обратное преобразование Фурье*, (или *интеграл Фурье*) позволяющее восстановить временную зависимость $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^{\infty} X(\omega) \exp\{j\omega t\} d\omega. \quad (1.20)$$

Величина $X(\omega)d\omega$ представляет собой «вклад» комплексной экспоненты $\exp\{j\omega t\}$, «содержащейся в $x(t)$ » (поэтому величина $X(\omega)$ носит название *спектральной плотности $x(t)$*).

Иначе говоря, выражение (2.20) *анализирует* функцию $x(t)$ на основе использования её спектральных составляющих, а выражение (2.19) *восстанавливает*, или *синтезирует* $x(t)$ из этих составляющих.

Таким образом пара выражений (2.19) и (2.20) составляют *теорему Фурье*, которая утверждает, что процесс *анализа-синтеза* может выполняться без каких-либо потерь. Восстановленный сигнал по своей форме идентичен исходному сигналу.

Отметим, что в отличие от случая периодического сигнала, спектр непериодического сигнал является непрерывным. Однако в случае, если периодический сигнал представляет собой бесконечную последовательность импульсов, аналогичных некоторому непериодическому сигналу, спектры данных сигналов будут иметь аналогичную форму огибающей.

⁴ Исторически название «линейчатый спектр» связано с тем обстоятельством, что обычно на выходе оптического спектрометра отдельные частотные составляющие имеют вид ярких линий.

⁵ Обобщение ряда Фурье на случай непериодических функций было предложено самим Фурье.

1.7 Графическое представление спектра сигнала

Как отмечалось выше, спектр сигнала, для наглядности, может быть представлен в графическом виде.

Для построения графической картины спектра воспользуемся выражениями (2.15 – 2.18) для случая периодического сигнала и выражением (2.20) для случая непериодического сигнала.

Построим амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала.

Амплитуды спектральных составляющих дискретного спектра определим из выражения

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (1.21)$$

Фазы гармонических составляющих определяются выражением

$$\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}. \quad (1.22)$$

При построении спектра непериодического сигнала следует помнить, что данный спектр является непрерывным. Таким образом, задача построения данного спектра сводится к построению его огибающей.

Координаты точек огибающей определим из соотношений:

для амплитудного спектра $|\dot{X}(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \dot{X}(\omega) + \operatorname{Im}^2 \dot{X}(\omega)}, \quad (1.23)$

для фазового спектра $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} \dot{X}(\omega)}{\operatorname{Re} \dot{X}(\omega)}, \quad (1.24)$

где $X(\omega)$ - спектральная плотность непериодического сигнала (2.20).

2 ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

2.1 Определение системной функции радиотехнической цепи

Рассмотрим простую двухэлементную радиотехническую цепь (см. рис.3.1)

Данная цепь является интегрирующей.

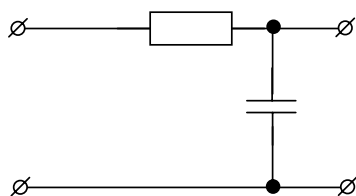


Рисунок 2.1

Определим системную функцию, используя выражение (2.6):

$$H(s) = \frac{U_{ВЫХ}(s)}{U_{ВХ}(s)}.$$

В соответствии с (2.7.) и (2.8) можем записать

$$U_{ВХ}(s) = I(s) \dot{Z}_{ВХ}(s);$$

$$U_{ВЫХ}(s) = I(s) \dot{Z}_{ВЫХ}(s).$$

Определим входное и выходное комплексные сопротивления данной цепи:

$$\dot{Z}_{ВХ}(s) = R + \frac{1}{sC}; \quad (2.1)$$

$$\dot{Z}_{ВЫХ}(s) = \frac{1}{sC}, \quad (2.2)$$

где $s = \sigma + j\omega$ - комплексная частота.

Полагая силу тока $I(s)$ постоянной, перепишем (2.6) с учетом (3.1) и (3.2):

$$H(s) = \frac{U_{ВЫХ}(s)}{U_{ВХ}(s)} = \frac{I(s) \frac{1}{sC}}{I(s) \left[R + \frac{1}{sC} \right]} = \frac{\frac{1}{sC}}{\left[R + \frac{1}{sC} \right]} = \frac{sC}{sC[sRC + 1]} = \frac{1}{\tau_0 s + 1}, \quad (2.3)$$

где $\tau_0 = RC$ - постоянная времени.

2.2 Преобразование Лапласа сигнала заданной формы

Найдем преобразование Лапласа для сигнала, изображенного на рис. 3.2.

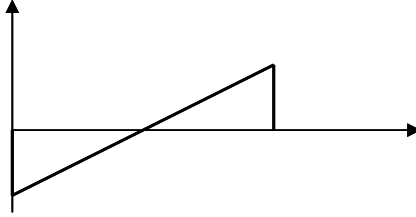


Рисунок 2.2

Воспользуемся выражением (2.1):

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \exp\{-st\} dt.$$

Для нахождения преобразования Лапласа определим, прежде всего, запишем функцию времени $x(t)$ для данного сигнала (рис. 3.2):

$$x(t) = \frac{E}{T}t - E. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) получим:

$$X(s) = \int_0^{2T} \left(\frac{E}{T}t - E \right) \exp\{-st\} dt. \quad (2.5)$$

При выполнении интегрирования выражение (3.5) распадается на два интеграла:

$$X(s) = \frac{E}{T} \int_0^{2T} t \exp\{-st\} dt - E \int_0^{2T} \exp\{-st\} dt. \quad (2.6)$$

Взятие интеграла $\int_0^{2T} \exp\{-st\} dt$ не представляет сложности:

$$\int_0^{2T} \exp\{-st\} dt = -\frac{1}{s} \exp\{-st\} \Big|_0^{2T} = -\frac{\exp\{-2sT\}}{s} + \frac{1}{s}. \quad (2.7)$$

Интеграл $\int_0^{2T} t \exp\{-st\} dt$ находим, используя метод интегрирования по частям.

известно, что

известно, что $\int U dV = UV - \int V dU$. Для данного интеграла определим,

что

$$\begin{aligned} U &= t; & dV &= \exp\{-st\}dt; \\ dU &= dt; & V &= -\frac{1}{s}\exp\{-st\}. \end{aligned}$$

Таким образом, можем записать:

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} t \exp\{-st\}dt &= -\frac{\exp\{-st\}t}{s} + \int_0^{2T} \frac{1}{s} \exp\{-st\}dt = \\ &= -\frac{\exp\{-st\}t}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{2T} \exp\{-st\}dt = \\ &= \left[-\frac{\exp\{-st\}t}{s} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} \exp\{-st\} \right) \right]_0^{2T} = \\ &= -\frac{2T \exp\{-2Ts\}}{s} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} \exp\{-2Ts\} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= -\frac{2T \exp\{-2Ts\}}{s} - \frac{1}{s^2} \exp\{-2Ts\} + \frac{1}{s^2} = \\ &= \frac{-2Ts \exp\{-2Ts\} - \exp\{-2Ts\} + 1}{s^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом (3.6) и (3.7) запишем частотную зависимость $X(s)$ в окончательном виде:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{E}{T} \left(\frac{-2Ts \exp\{-2sT\} - \exp\{-2sT\} + 1}{s^2} \right) - \\ &- E \left(-\frac{\exp\{-2sT\}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{E(1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT)}{s^2 T}. \end{aligned}$$

2.3 Образ по Лапласу сигнала на выходе цепи

Для нахождения образа по Лапласу сигнала на выходе рассматриваемой нами цепи используем выражение (2.12):

$$Y(s) = H(s)X(s).$$

Необходимые для этого параметры – системная функция цепи $H(s)$ и преобразование Лапласа $X(s)$ были нами найдены ранее (см. выражения (3.3) и (3.8) соответственно):

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\tau_0 s + 1}; \\ X(s) &= \frac{E(1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT)}{s^2 T}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(s) = H(s)X(s) &= \frac{1}{\tau_0 s + 1} \frac{E(1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT)}{s^2 T} = \\
 &= \frac{1/\tau_0 * E((1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT))}{\left(s + 1/\tau_0\right)(s^2 T)}. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

2.4 Определение временной зависимости $U(t)$ с использованием обратного преобразования Лапласа

Как было отмечено ранее, задача определения временной зависимости $U(t)$ по заданной функции комплексной частоты может быть разрешена с помощью обратного преобразования Лапласа (2.2) сигнала на выходе цепи:

$$x(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_C Y(s) \exp\{st\} ds.$$

Обратное преобразование Лапласа может быть найдено с использованием теоремы разложения Хевисайда (2.4):

$$x(t) = k_1 \exp\{s_{p1}t\} + k_2 \exp\{s_{p2}t\} + \dots + k_m \exp\{s_{pm}t\}.$$

Чтобы применить разложение Хевисайда мы, прежде всего, должны определить полюса (корни полинома знаменателя функции, описывающей исследуемый сигнал) и вычеты (постоянные коэффициенты разложения).

Сигнал на выходе цепи, найденный нами в предыдущем разделе работы, описывается выражением (3.9):

$$Y(s) = \frac{1/\tau_0 \cdot E(1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT)}{\left(s + 1/\tau_0\right)(s^2 T)}.$$

Определим полюса и вычеты для данной функции.

Очевидно, что полином знаменателя имеет два корня:

$$s_{p1} = -\frac{1}{\tau_0}; \quad (2.10)$$

$$s_{p2} = 0. \quad (2.11)$$

Для определения вычета k_1 можно воспользоваться выражением:

$$k_i = \left[X(s)(s - s_{pi}) \right]_{s=s_{pi}},$$

где $X(s)$ - образ по Лапласу входного сигнала.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{E}{T} (1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT) \left(s + \frac{1}{\tau_0} \right)}{\left(s + \frac{1}{\tau_0} \right) s^2} \Bigg|_{s=-\frac{1}{\tau_0}} = \\
&= \frac{\frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{E}{T} \left(1 - \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \right)}{\frac{1}{\tau_0^2}} = \\
&= \frac{E\tau_0 \left(1 - \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \right)}{T}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Найдем вычет k_2 :

$$\begin{aligned}
k_2 &= \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\frac{1}{\tau_0} \cdot E (1 - \exp\{-2sT\} - Ts \exp\{-2sT\} - sT)}{s^2 T} \right) \right] = \\
&= \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{E}{T} - \frac{E}{T} \exp\{-2sT\} - Es \exp\{-2sT\} - Es \right) \right] = \\
&= [2E \exp\{-2sT\} - E \exp\{-2sT\} + 2EsT \exp\{-2sT\} - E] = \\
&= 2E - E - E = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

С учетом (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) запишем временную зависимость $U(t)$:

$$U(t) = \frac{E\tau_0 \left(1 - \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \exp\left\{ \frac{2T}{\tau_0} \right\} + \frac{T}{\tau_0} \right)}{T} \exp\left\{ -\frac{t}{\tau_0} \right\}. \tag{2.14}$$

2.5 Определение временной зависимости $U(t)$ с использованием интеграла свертки

Как было указано в разделе 2, метод определения временной зависимости путем обратного преобразования Лапласа сигнала на выходе цепи не является единственным. Того же результата можно достичь, используя интеграл свертки.

Интеграл свертки имеет вид (2.13)

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где $h(t)$ - импульсная реакция цепи, т.е. реакция цепи при воздействии на неё единичного импульса.

Импульсная реакция радиотехнической цепи определяется как обратное преобразование Лапласа системной функции $H(s)$ (2.6).

Системная функция данной (**интегрирующей**) цепи имеет вид (3.3)

$$H(s) = \frac{1}{\tau_0 s + 1}.$$

При определении импульсной реакции цепи необходимо проверить, удовлетворяет ли системная функция требованиям, предъявляемым к изображениям по Лапласу $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$.

Это условие может не выполняться (например, для фильтров верхних частот). В этом случае из системной функции следует выделить целую часть. Для дифференцирующей цепи, состоящей из R и C , системная функция

$H_{DIF}(s) = \frac{\tau_0 s}{\tau_0 s + 1}$ преобразуется следующим образом:

$$H_{DIF}(s) = \frac{\tau_0 s + 1 - 1}{\tau_0 s + 1} = 1 - \frac{1}{\tau_0 s + 1}.$$

Для определения импульсной реакции найдем обратное преобразование Лапласа от функции (3.3).

Найдем полюсы и вычеты системной функции.

$$s_{p1} = -\frac{1}{\tau_0}; \quad (2.15)$$

$$k_1 = \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_0}\right)}{\tau_0 \left(s + \frac{1}{\tau_0}\right)} = \frac{1}{\tau_0}. \quad (2.16)$$

С учетом (3.15) и (3.16) запишем импульсную реакцию:

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\}. \quad (2.17)$$

Используя выражения (2.13) и (3.17) вычислим временную зависимость $U(t)$.

2.6 Спектральный анализ периодических сигналов

Для сигнала, изображенного на рис. 3.3, временная функция $x(t)$ записывается следующим образом.

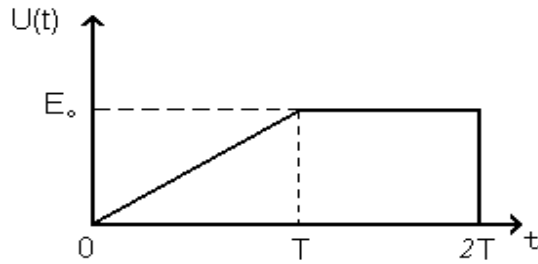


Рисунок 2.3

$$\text{На интервале } [0;T] \quad X_1(t) = \frac{E}{T}t \quad . \quad (2.18)$$

$$\text{На интервале } [T;2T] \quad X_2(t) = E. \quad (2.19)$$

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) = \frac{E}{T}t + E \quad (2.20)$$

При выполнении пункта расчетов предполагается, что сигнал представляет собой периодическую последовательность импульсов заданной формы (см. рис. 3.3) со скважностью 1. В наших обозначениях период сигнала равен $2T$.

Для анализа периодических сигналов используется разложение в ряд Фурье, т.е. представление функции $X(t)$ в виде взвешенной суммы гармонических колебаний:

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{2\pi nt}{T}, \quad (2.21)$$

где a_0, a_n, b_n , - коэффициенты ряда Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_{II}} \int_0^{T_{II}} x(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T_{II}} \int_0^{T_{II}} x(t) \cos \frac{2\pi nt}{T_{II}} dt; \\ b_n &= \frac{2}{T_{II}} \int_0^{T_{II}} x(t) \sin \frac{2\pi nt}{T_{II}} dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Находим эти коэффициенты, учитывая сигнал (рис. 3.3). Используя метод интегрирования по частям, находим коэффициенты a_n, b_n :

$$a_n = \frac{2}{2T} \int_0^T \frac{E}{T} t \cos \frac{2\pi nt}{2T} dt + \frac{2}{2T} \int_T^{2T} E \cos \frac{2\pi nt}{2T} dt = \left\{ \begin{array}{l} U = t; \cos \frac{\pi nt}{T} dt = dV; \\ T \sin \frac{\pi nt}{T} \\ dU = dt; V = \frac{T}{\pi n} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{E}{T^2} \int_0^T t \cos \frac{\pi nt}{T} dt + \frac{E}{T} \int_T^{2T} \cos \frac{\pi nt}{T} dt = \frac{E}{T^2} \left(\frac{tT \sin \frac{\pi nt}{T}}{\pi n} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T \sin \frac{\pi nt}{T}}{\pi n} dt \right) +$$

$$+ \frac{E}{T} \int_T^{2T} \cos \frac{\pi nt}{T} dt = \frac{E}{T^2} \left(-\frac{T^2}{\pi^2 n^2} - \frac{T^2}{\pi^2 n^2} \right) + 0 = -\frac{2E}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2T} \int_0^T \frac{E}{T} t \sin \frac{2\pi nt}{2T} dt + \frac{2}{2T} \int_T^{2T} E \sin \frac{2\pi nt}{2T} dt = \left\{ \begin{array}{l} U = t; \sin \frac{\pi nt}{T} dt = dV; \\ T \cos \frac{\pi nt}{T} \\ dU = dt; V = -\frac{T}{\pi n} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{E}{T^2} \int_0^T t \sin \frac{\pi nt}{T} dt + \frac{E}{T} \int_T^{2T} \sin \frac{\pi nt}{T} dt = \frac{E}{T^2} \left(-\frac{tT \cos \frac{\pi nt}{T}}{\pi n} \Big|_0^T + \int_0^T \frac{T \cos \frac{\pi nt}{T}}{\pi n} dt \right) -$$

$$- \frac{E}{\pi n} \cos \frac{\pi nt}{T} \Big|_T^{2T} = \frac{E}{T^2} \frac{T^2}{\pi n} - \frac{2E}{\pi n} = -\frac{E}{\pi n}$$

Находим a_0 : $a_0 = \frac{1}{2T} \left(\int_0^T \frac{Et}{T} dt + \int_T^{2T} E dt \right) = \frac{E}{2T} \left(\frac{T^2}{2T} + 2ET - ET \right) = \frac{3E}{4}$ (2.23)

Таким образом, функция $X(t)$ при разложении в ряд Фурье принимает вид:

$$X(t) = \frac{3E}{4} - \sum_{n=1}^N \frac{2E}{\pi^2 n} \cos \frac{\pi nt}{T} - \sum_{n=1}^N \frac{E}{\pi n} \sin \frac{\pi nt}{T}. \quad (2.24)$$

2.7 Спектральный анализ непериодических сигналов. Интеграл Фурье

Интеграл Фурье находим по формуле:

$$X(\omega) = \int_0^T X(t) \exp\{-j\omega t\} dt. \quad (2.25)$$

Применяя метод интегрирования по частям, в ходе несложных математических вычислений получаем:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^T \frac{Et}{T} \exp\{-j\omega t\} dt + \int_T^{2T} E \exp\{-j\omega t\} dt = \left\{ \begin{array}{l} t = U; \quad dV = \exp\{-j\omega t\} dt \\ dt = dU; \quad V = \frac{\exp\{-j\omega t\}}{-j\omega} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{E}{T} \left(-\frac{t \exp\{-j\omega t\}}{j\omega} \Big|_0^T + \frac{1}{j\omega} \int_0^T \exp\{-j\omega t\} dt \right) + \int_T^{2T} E \exp\{-j\omega t\} dt = \\ &= \frac{E}{T} \left(-\frac{T \exp\{-j\omega T\}}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{\exp\{-j\omega t\}}{-j\omega} \right) \Big|_0^T \right) - \frac{E}{j\omega} \exp\{-j\omega t\} \Big|_T^{2T} = \\ &= \frac{E}{T\omega^2} (\exp\{-j\omega T\} + j\omega T \exp\{-j2\omega T\} - 1) \end{aligned}$$

2.8 Графическое представление периодических и непериодических сигналов

Спектр сигнала для наглядности может быть представлен в графическом виде. Для построения графической картины спектра воспользуемся выражениями, полученными в подразделах 3.6 и 3.7.

2.8.1 Графическое представление амплитудного и фазового спектра для периодического сигнала.

Амплитуды спектральных составляющих дискретного спектра определим из выражения:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.26)$$

Фазы гармонических составляющих определяются выражением:

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (2.27)$$

Используя эти формулы для нашего сигнала, получаем:

$$A_n = \sqrt{\frac{4E^2}{\pi^4 n^4} + \frac{E^2}{\pi^2 n^2}} = \frac{E\sqrt{4 + \pi^2 n^2}}{\pi^2 n^2} \quad (2.28)$$

$$\varphi_n = \arctg \left(\frac{-\frac{E}{\pi n}}{-\frac{2E}{\pi^2 n}} \right) = \arctg \frac{\pi n}{2} \quad (2.29)$$

Построим спектральную диаграмму данного периодического сигнала

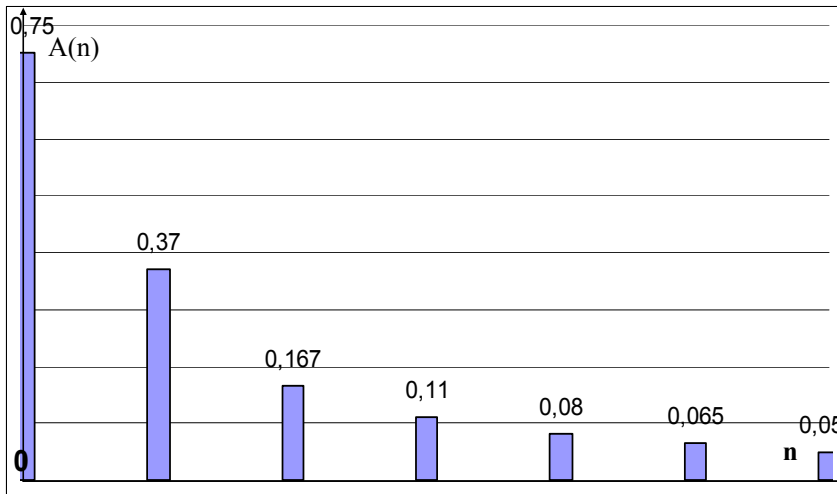


Рисунок 2.4. Амплитудный спектр периодического сигнала

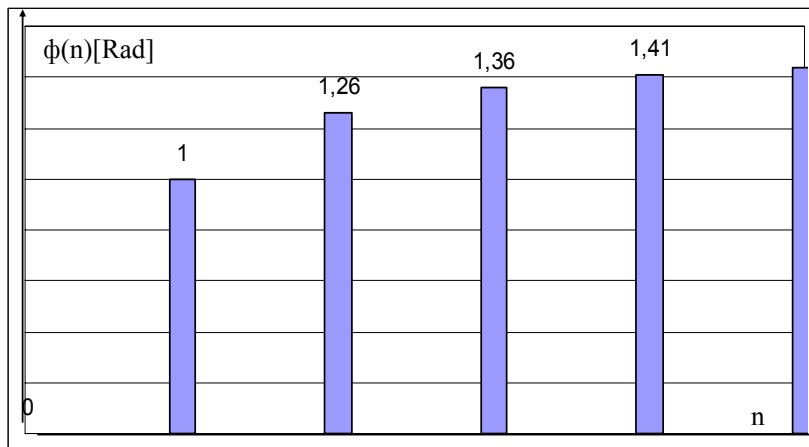


Рисунок 2.5. Фазовый спектр периодического сигнала

2.8.2 Графическое представление амплитудного и фазового спектра для непериодического сигнала

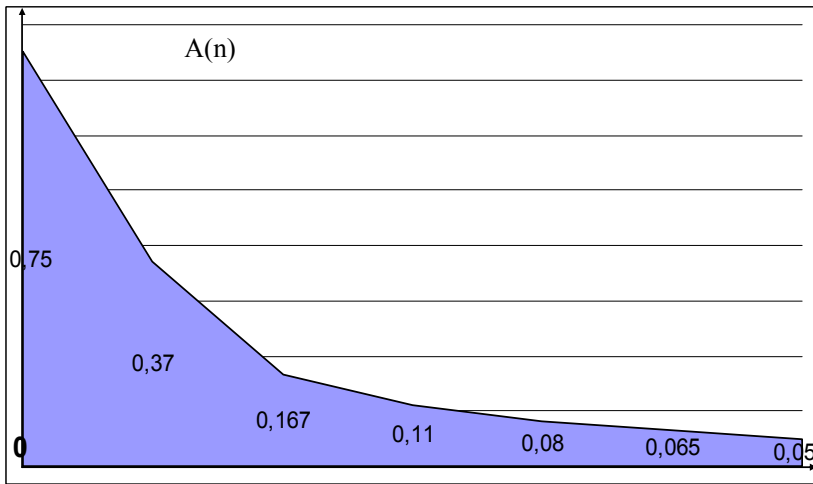
При построении спектра непериодического сигнала следует помнить, что данный спектр является непрерывным. Таким образом, задача построения данного спектра сводится к построению его огибающей.

Координаты точек огибающей определим из соотношений: для амплитудного спектра $|\dot{X}(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \dot{X}(\omega) + \operatorname{Im}^2 \dot{X}(\omega)}$, (2.30)

для фазового спектра $\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} \dot{X}(\omega)}{\operatorname{Re} \dot{X}(\omega)}$, (2.31)

где $X(\omega)$ - спектральная плотность непериодического сигнала (3.25)

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{E(\exp\{-j\omega T\} + j\omega T \exp\{-j2\omega T\} - 1)}{T\omega^2} = \\
 &= \frac{E(\exp\{-j\omega T\} - 1)}{T\omega^2} + j \frac{E \exp\{-j2\omega T\}}{\omega} \\
 |X(\omega)| &= \sqrt{\frac{E^2(\exp\{-j\omega T\} - 1)^2}{T^2\omega^4} + \frac{E^2 \exp\{-j4\omega T\}}{\omega^2}} = \\
 &= \frac{E}{\omega} \sqrt{\frac{(\exp\{-j\omega T\} - 1)^2}{\omega^2 T^2} + \exp\{-j4\omega T\}} = \\
 &= \frac{E}{2\pi f n} \sqrt{\frac{(\exp\{-j2\pi n\} - 1)^2}{4\pi^2 n} + \exp\{-j8\pi n\}} = \quad (2.32) \\
 &= \frac{E}{2\pi f n} \sqrt{\frac{(\cos 2\pi n - j \sin 2\pi n - 1)^2}{4\pi^2 n} + \cos 8\pi n - j \sin 8\pi n} = \\
 &= \frac{E}{2\pi f n} \sqrt{\frac{(1 - 0 - 1)^2}{4\pi^2 n} + 1} = \frac{E}{2\pi f n}
 \end{aligned}$$



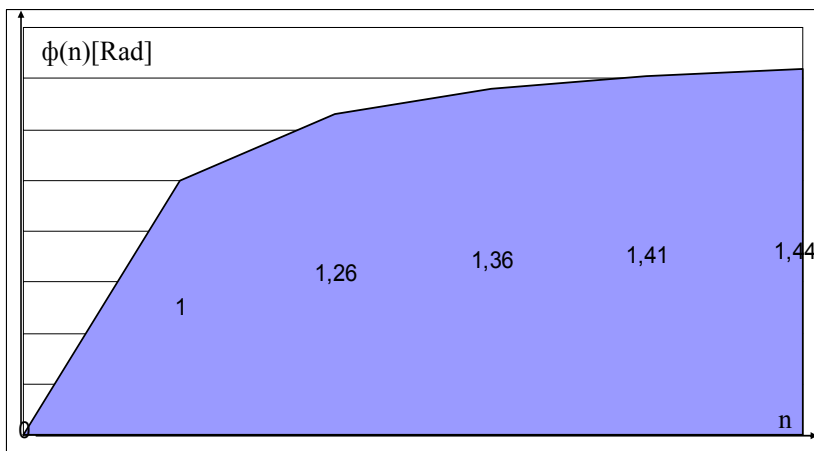
1

Удалено: 3

Рисунок 2.6 Амплитудный спектр неперидического сигнала

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{E \exp\{-j2\pi n\}}{\omega}}{\frac{E(\exp\{-j2\pi n\} - 1)}{T\omega^2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{T\omega \exp\{-j2\pi\}}{\exp\{-j2\pi\} - 1} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{T\omega(1-0)}{(1-0-1)} \right) = \quad (2.33)$$

$$\operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

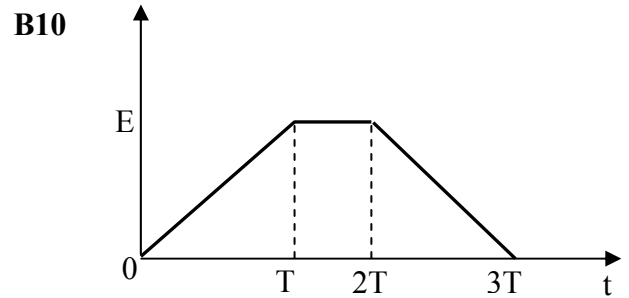
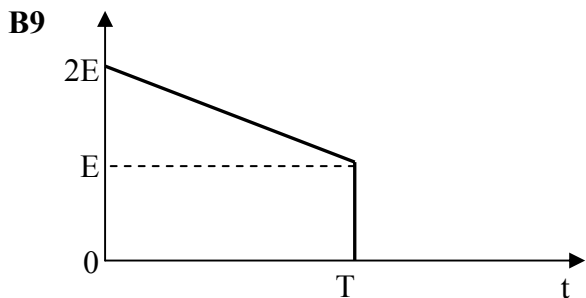
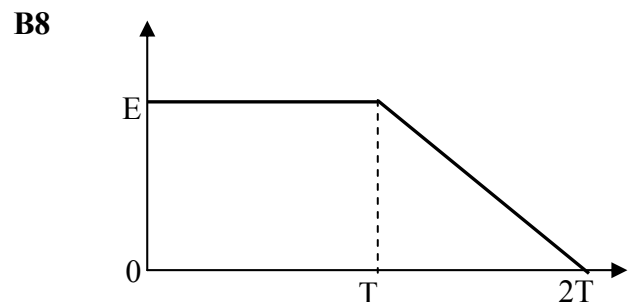
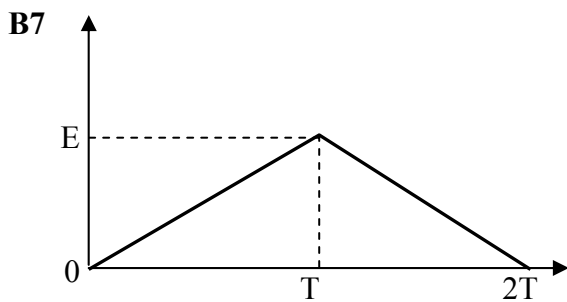
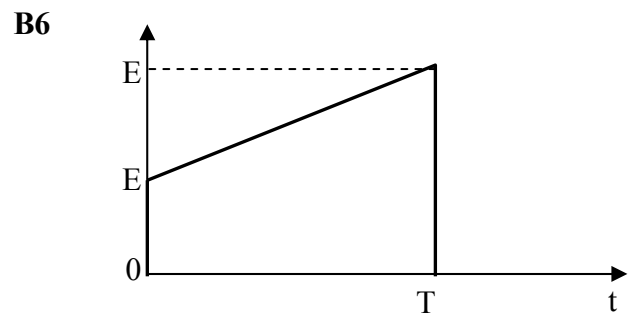
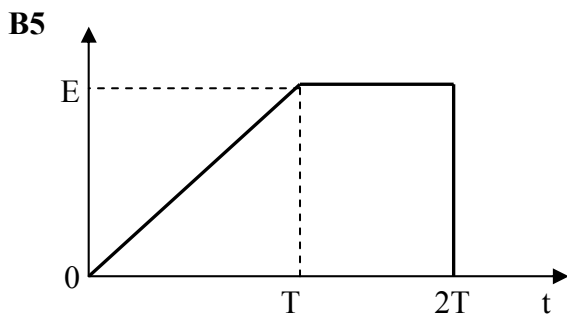
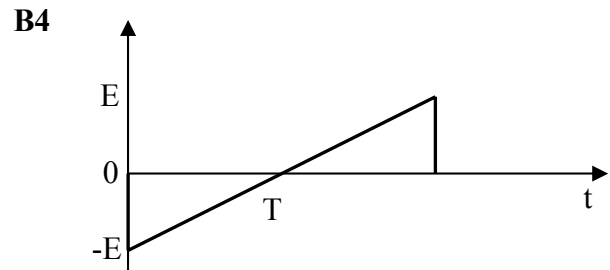
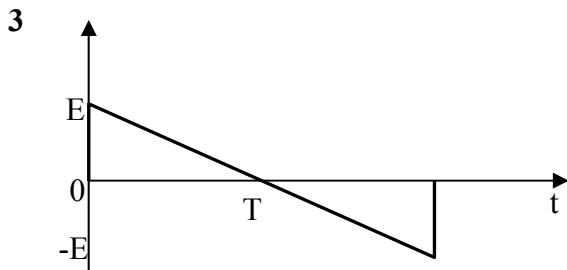
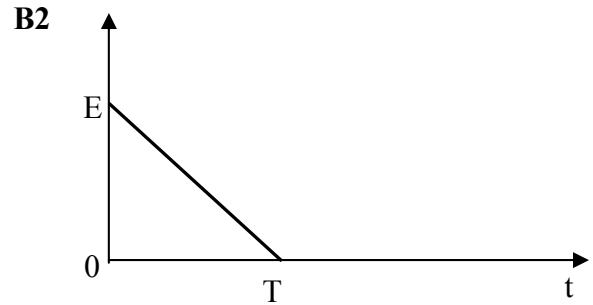
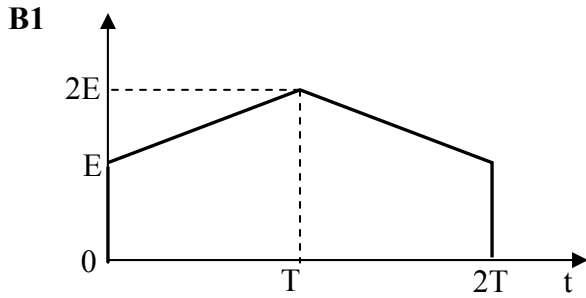


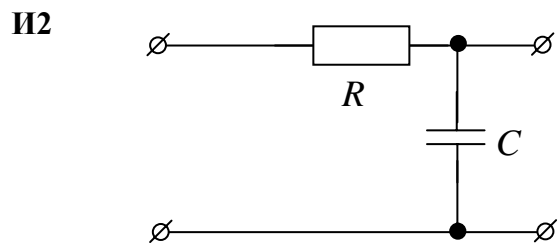
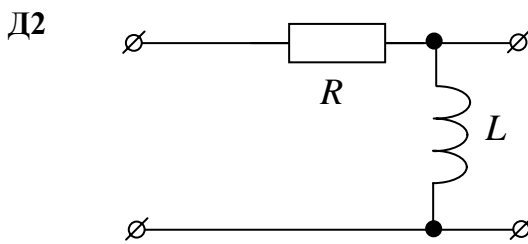
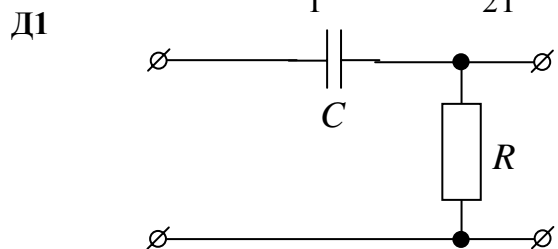
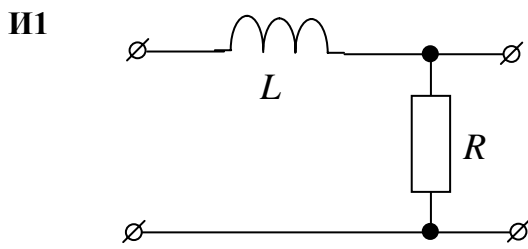
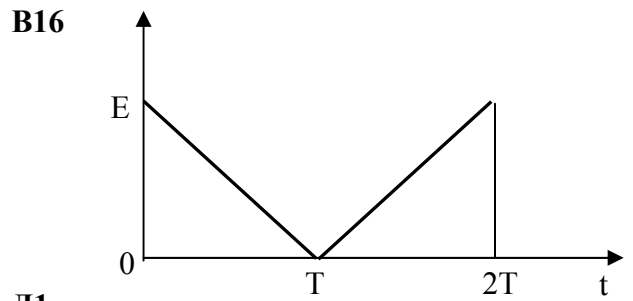
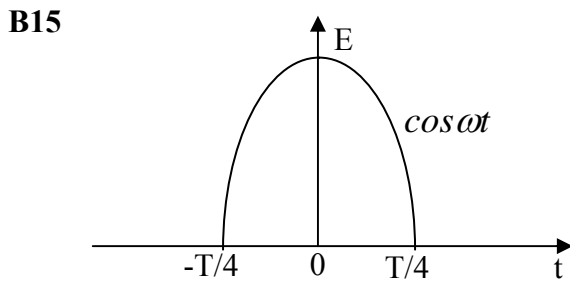
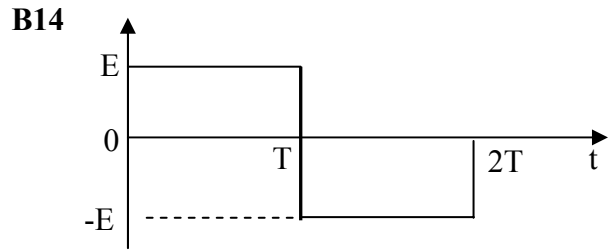
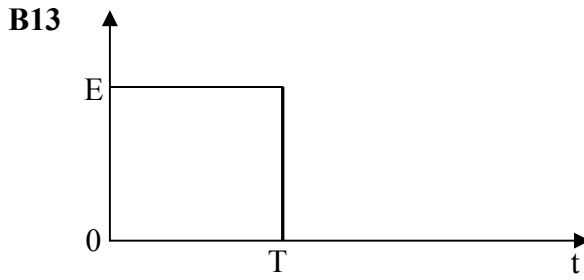
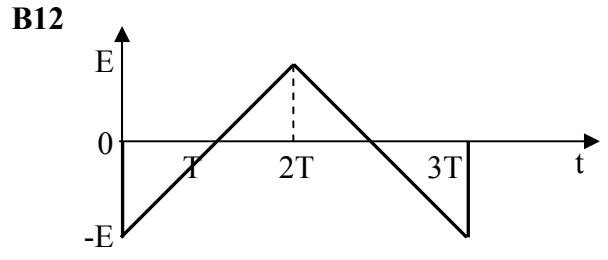
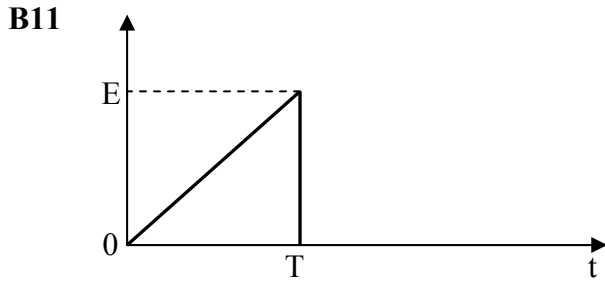
Удалено: 3

Рисунок 2.7 Фазовый спектр неперидического сигнала

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 2003. - 462 с.
2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986. - 512 с.
3. Сиберт У. М. Цепи. Сигналы. Системы. (в двух частях) – М.: Мир, 1988. – 342 с., 359 с.
4. Каратаева Н.А. Радиотехнические цепи и сигналы. Теория сигналов и линейные цепи: Учебное пособие. - Томск.: ТУСУР, ТМЦДО, 2001. - 260 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1**Возможные виды сигналов и варианты построения простейших
двухэлементных цепей**



Томский государственный университет автоматизированных систем управления и радио-
электроники (ТУСУР).

РАДИОКОНСТРУКТОРСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой КИПР, проф.
_____ В.Н.Татаринов

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

на курсовую работу _____
на курсовой проект _____ (тема)

Математическое описание аналоговых сигналов и анализ

их прохождения через линейные цепи.

по дисциплине *Основы радиоэлектроники и связи*

Исполнитель: студент гр. _____

_____ (фамилия) _____ (имя) _____ (отчество)
обучающийся в университете по специальности 200800

Дата выдачи технического задания _____

Срок сдачи законченного проекта (работы) на кафедру _____

Руководитель курсового проекта (работы): _____

_____ (должность, место работы)

_____ (фамилия, имя, отчество)

ЦЕЛЬ И НАЗНАЧЕНИЕ РАБОТЫ. Целью настоящей курсовой работы является закрепление теоретических знаний и приобретение навыка самостоятельной работы по анализу простых радиотехнических цепей при воздействии на них сигналов заданной формы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Найти системную функцию для варианта линейной электрической цепи (см. рис. 1).
2. Найти преобразование Лапласа для сигнала заданной формы (см. рис.2).
3. Определить образ по Лапласу сигнала на выходе цепи.
4. Выполнить обратное преобразование Лапласа и найти временную зависимость $U(t)$.
5. Найти временную зависимость $U(t)$ используя интеграл свертки.
6. Сравнить результаты полученные при выполнении заданий 4 и 5.
7. Считая сигнал периодическим выполнить разложение в ряд Фурье.
8. Считая сигнал непериодическим найти интеграл Фурье.
9. Построить спектры периодического и непериодического сигналов, сравнить их форму.

Рис.1

Рис. 2

Результаты работы представляются руководителю не позднее указанной даты в виде “Пояснительной записки” оформленной в соответствии с требованиями ОС ТУСУР 6.1 – 97*

Задание принял(а) к исполнению студент(ка) _____ / _____ /
подпись фамилия, инициалы

Руководитель курсового проекта (работы)

_____ / _____ /