

В.Н. Татаринов, С.В. Татаринов

СПЕКТРЫ И АНАЛИЗ

*Учебное пособие для студентов специальностей
«Техническая эксплуатация транспортного
радиооборудования»*

и

«Проектирование и технология радиоэлектронных средств».

Рекомендовано для межвузовского использования
учебно-методическим объединением ВУЗов РФ по образованию
в области эксплуатации авиационной и космической техники

Издание второе, стереотипное

Томск 2012

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор Е.В. Масалов

доктор техн. наук, профессор В.С. Корогодов

Технический редактор:

Татаринов В. Н., Татаринов С. В.

Спектры и анализ. Учебное пособие для студентов специальностей
«Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» и
«Проектирование и технология радиоэлектронных средств».

Томск: Томский государственный университет систем управления и
радиоэлектроники, 2012, 324 стр. Издание второе, стереотипное

Книга посвящена вопросам спектрального анализа аналоговых и дискретных радиосигналов, а также их преобразований линейными и нелинейными цепями. Отличительной особенностью книги является детальность изложения рассматриваемых вопросов, что практически исключает необходимость использования дополнительной математической и технической литературы при изучении курса.

Книга рекомендована для межвузовского использования Учебно-методическим объединением ВУЗов Российской Федерации по образованию в области эксплуатации авиационной и космической техники.

© Татаринов В. Н., Татаринов С. В.

© Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

«...Приступая к решению проблем, мы не ищем и не избегаем математических выкладок, а смотрим на них только с точки зрения их пользы для естественных наук...»

«...Теорема Фурье не только представляет собой один из самых красивых результатов современного анализа, но дает необходимейшее орудие при изучении почти всех ведущих вопросов современной физики...»

*Лорд Кельвин и П. Тэт
«Введение в натуральную философию»*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	9
1. РЯДЫ ФУРЬЕ	11
1.1. Периодические функции и их основные свойства.....	11
1.2. Ряды Фурье.....	13
1.2.1. Суперпозиция гармоник с кратными частотами. Амплитудно – фазовая форма ряда Фурье	14
1.2.2. Разложение периодической функции в тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье.....	15
1.3. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.....	21
1.4. Ряд Фурье в комплексной форме. Спектр периодической функции.....	23
1.5. Примеры разложения периодических функций в ряд Фурье. Некоторые свойства спектра периодических функций.....	27
1.5.1. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов.....	27
1.5.2. Теорема смещения для разложения в ряд Фурье.....	31
1.5.3. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности треугольных импульсов.....	33
1.5.4. Разложение в ряд Фурье гармонического сигнала, ограниченного на заданном уровне.....	35
1.6. Средние значения периодических функций. Теорема Парсеваля.....	39
1.6.1. Усреднение в задаче определения коэффициентов Фурье.....	40
1.6.2. Средняя мощность периодической функции.....	41
1.6.3. Теорема Парсеваля.....	42
2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ	44
2.1. Вещественная форма интеграла Фурье.....	44
2.2. Комплексная форма интеграла Фурье.....	47
2.3. Примеры спектральных разложений.....	51
2.3.1. Спектральное разложение прямоугольного импульса.....	51
2.3.2. Спектральное разложение экспоненциального импульса.....	54
2.3.3. Спектральное разложение функции Гаусса (гауссов импульс)... ..	59
2.4. Энергетические характеристики сигнала и эффективная ширина его спектра.....	61
2.4.1. Эффективная ширина спектра прямоугольного импульса.....	62
2.4.2. Эффективная ширина спектра экспоненциального импульса....	65
2.4.3. Эффективная ширина спектра гауссова импульса.....	66
2.5. Основные свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах).....	68
2.5.1. Теорема сложения (теорема линейности).....	68
2.5.2. Теорема смещения (теорема задержки).....	69
2.5.3. Теорема о переносе спектра.....	73
2.5.4. Теорема о преобразовании Фурье свертки.....	74
2.5.5. Преобразование Фурье произведения двух функций времени....	75
2.6. Преобразование Фурье производной и неопределенного интеграла.....	76
2.7. Текущий спектр.....	77
2.8. Преобразование Фурье δ – функции.....	83
2.8.1. Краткая история импульсной функции.....	84

2.8.2.	Фильтрующее свойство δ – функции. Функции, аппроксимирующие δ – функцию. Преобразование Фурье δ – функции...	85
3.	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА	92
3.1.	Одностороннее преобразование Лапласа.....	92
3.2.	Основные свойства преобразования Лапласа.....	96
3.2.1.	Область сходимости.....	96
3.2.2.	Теорема задержки (смещения), теорема линейности и их использование.....	101
3.2.3.	Теорема умножения на t	104
3.2.4.	Теоремы о преобразовании Лапласа производной и интеграла...	106
3.3.	Обратное преобразование Лапласа.....	107
3.4.	Использование преобразования Лапласа для анализа радиотехнических цепей.....	112
3.4.1.	Основные соотношения для элементов линейных радиотехнических цепей в частотной области.....	112
3.4.2.	Передаточные функции простейших цепей.....	114
3.5.	Анализ искажений формы сигналов при прохождении фильтров нижних и высоких частот.....	117
3.5.1.	Прохождение функции единичного скачка через фильтр нижних частот.....	118
3.5.2.	Прохождение прямоугольного импульса через фильтр нижних частот.....	120
3.5.3.	Прохождение функции единичного скачка через фильтр высоких частот.....	122
3.5.4.	Прохождение прямоугольного импульса через фильтр высоких частот.....	124
3.6.	Применение интеграла свертки для анализа линейных систем.....	126
3.6.1.	Преобразование Лапласа свертки.....	126
3.6.2.	Импульсная реакция линейной цепи.....	128
3.6.3.	Импульсная реакция НЧ и ВЧ фильтров.....	130
3.6.4.	Сопоставление спектрального метода и метода свертки при анализе линейных систем.....	131
4.	КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ. СПЕКТР МОЩНОСТИ	134
4.1.	Вероятностное описание случайных величин.....	134
4.1.1.	Случайные события и понятие вероятности.....	134
4.1.2.	Основные теоремы теории вероятности. Условная вероятность.....	136
4.1.3.	Случайные величины и законы распределения.....	138
4.1.4.	Совместное распределение вероятностей двух случайных величин. Условное распределение.....	143
4.1.5.	Числовые характеристики случайных величин. Моменты распределения. Коэффициент корреляции.....	148
4.1.5.1.	Моменты распределения.....	148
4.1.5.2.	Коэффициент корреляции.....	150
4.2.	Примеры законов распределения случайных величин.....	151
4.2.1.	Закон равномерной плотности.....	152
4.2.2.	Нормальный закон распределения.....	153
4.2.3.	Нормальный закон распределения системы двух случайных	

	величин.....	155
4.3.	Случайные процессы и одномерное распределение вероятностей случайных процессов. Моменты распределения.....	157
4.4.	Полное статическое описание случайного процесса. Стационарные случайные процессы. Автокорреляционная функция.....	158
4.5.	Эргодические случайные процессы.....	163
4.6.	Энергетический спектр стационарного случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина.....	165
4.7.	Энергетический спектр как плотность вероятности. Спектральные моменты.....	169
4.7.1.	Числовые характеристики функций случайных величин.....	170
4.7.2.	Характеристическая функция и её свойства.....	175
4.7.3.	Использование характеристической функции для вычисления моментов распределения.....	178
4.7.4.	Энергетический спектр как плотность вероятности.....	179
4.7.5.	Спектральные моменты.....	181
4.8.	Автокорреляционные функции и энергетические спектры некоторых случайных радиотехнических сигналов.....	185
4.9.	Автокорреляционная функция и энергетический спектр детерминированного процесса.....	192
5.	ФУНКЦИИ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ, ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ.....	199
5.1.	Понятие финитной функции.....	199
5.2.	Простейшие сигналы с финитным (ограниченным) спектром.....	200
5.3.	Ортогональные сигналы с ограниченным спектром.....	205
5.4.	Теорема отсчетов во временном представлении.....	206
5.5.	Теорема отсчетов в частотном представлении.....	215
5.6.	Комплексный аналитический сигнал. Преобразования Гильберта.....	218
5.7.	Узкополосные сигналы как частный случай сигналов с ограниченным спектром.....	226
5.8.	Теорема отсчетов для полосового сигнала.....	229
5.9.	Случайные процессы с финитным спектром. Теорема отсчетов для случайных процессов.....	234
6.	СПЕКТРЫ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ. СЛОЖНЫЕ СИГНАЛЫ И ЭФФЕКТЫ СЖАТИЯ.....	239
6.1.	Амплитудная модуляция радиосигналов.....	240
6.2.	Энергетические характеристики АМ – колебания. Балансная и однополосная модуляция радиосигналов.....	244
6.2.1.	Баланс мощности АМ – колебания.....	244
6.2.2.	Балансная модуляция. Однополосная модуляция.....	246
6.3.	Угловая модуляция радиосигналов и её виды.....	253
6.3.1.	Виды угловой модуляции.....	253
6.3.2.	Однотональная угловая модуляция.....	255
6.3.3.	Некоторые особенности спектрального анализа колебаний с угловой модуляцией.....	256
6.3.4.	Спектральное разложение ЧМ сигнала для малых значений индекса модуляции.....	258
6.3.5.	Спектральное разложение ЧМ сигнала при произвольном значе-	

нии индекса модуляции.....	261
6.3.6. Спектр фазо - манипулированного сигнала.....	263
6.4. Импульсные радиосигналы с внутриимпульсной модуляцией. Сжатие сигналов по оси времени.....	268
6.4.1. Спектр радиосигнала с внутриимпульсной частотной модуляцией.....	269
6.4.2. Согласованная фильтрация ЛЧМ сигналов. Автокорреляционная функция ЛЧМ сигнала.....	278
6.5. Эффект сжатия спектра сигнала по оси частот.....	283
6.5.1. Свойства симметрии преобразований Фурье.....	284
6.5.2. Корреляционная обработка и сжатие спектра частотно-модулированного сигнала по оси частот.....	286
6.5.3. Реализация операции сжатия спектра ЛЧМ сигнала по оси частот в радиолокаторе с непрерывным излучением.....	288
6.5.4. Разрешающая способность при спектральном анализе.....	293
7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ. ПРИНЦИПЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.....	296
7.1. Дискретизация непрерывных сигналов.....	296
7.2. Спектральное разложение дискретизированного сигнала.....	298
7.3. Дискретное преобразование Фурье и его свойства.....	302
7.4. Дискретная свертка.....	307
7.5. Дискретное преобразование Лапласа и z – преобразование.....	309
7.5.1. Дискретное преобразование Лапласа.....	309
7.5.2. Z – преобразование и его основные свойства.....	311
7.5.3. Обратное z – преобразование.....	316
7.6. Принципы цифровой фильтрации.....	317
ЛИТЕРАТУРА.....	322

ВВЕДЕНИЕ

Книга представляет собой первую часть курса «Радиотехнические цепи и сигналы» и посвящена вопросам спектрального анализа аналоговых и дискретных радиосигналов. Авторы читали данный курс студентам, обучающимся по специальности «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования», в течение 10 лет. Отличительной особенностью книги является детальность изложения рассматриваемых вопросов, что практически исключает необходимость использования дополнительной математической и технической литературы при изучении курса.

Основная цель книги заключается в том, чтобы подготовить студента к математическому исследованию радиосигналов и их преобразований радиотехническими цепями. Это очевидно, что современный инженер все более и более нуждается в математике, но, тем не менее, хорошо известно, что большинство студентов (да и инженеров) используют только малую часть знаний математических курсов, прослушанных ими в процессе обучения. Как отмечали еще более полувека назад Т. Карман и Н. Био – авторы известной книги «Математические методы в инженерном деле», «...создается впечатление, что объем математических сведений, входящих в программы, соответствует в основном необходимости, но что у учащихся не развито в достаточной мере умение самостоятельно формулировать математическое содержание заданной физической или технической задачи...». Таким образом, в нашем случае существует настоятельная потребность не столько в том, чтобы будущим радиоинженерам было дано «больше математики», сколько в том, чтобы пояснить им возможности математики и необходимость её использования для решения задач радиотехники.

Главная задача данной книги – предоставить в доступной форме те математические сведения и математические приемы, которыми должен владеть студент среднего уровня, чтобы зримо представлять себе процессы спектрального анализа радиосигналов и их преобразований. С этой целью авторы в целом ряде случаев намеренно отступили от математической строгости доказательств, но нигде не поступились пояснениями физического смысла производимых математических операций. Студенты, стремящиеся к повышенному уровню знаний, могут обратиться к классическим трудам, на которые приведены ссылки во всех разделах книги.

В. Татаринов
С. Татаринов

1. РЯДЫ ФУРЬЕ

В главе рассмотрено понятие тригонометрических рядов и представление периодических процессов такими рядами.

В физике и технике часто приходится наблюдать и исследовать периодические процессы: колебательное и вращательное движение деталей машин и приборов, периодическое движение элементарных частиц, небесных тел и искусственных космических аппаратов. В задачах оптики, акустики, радиофизики и радиотехники объектами исследования являются акустические и электромагнитные колебания, а также радиосигналы различной формы. Математически все подобные процессы описываются периодическими функциями.

1.1. Периодические функции и их основные свойства

Функция $\xi(t)$ одной переменной t называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, называемое периодом этой функции, что

$$\xi(t+T) = \xi(t) \quad (1.1)$$

для всех значений $t \in (-\infty < t < +\infty)$.

Здесь и далее в основном будет использоваться независимая переменная t , имеющая размерность времени, но в целом ряде задач, связанных с проблемами оптики и электродинамики, независимая переменная может иметь размерность длины (или угла), что и будет указано соответственно.

В акустике, радиофизике и радиотехнике простейшей периодической функцией является гармоническое колебание («гармоника»)

$$y(t) = A \cos(\omega t - \varphi); \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.2)$$

удовлетворяющее условию

$$y(t + 2\pi / \omega) = y(t), \quad (1.3)$$

на интервале $-\infty < t < \infty$. Справедливость равенства (1.3) подтверждается тем, что

$$\cos[\omega(t + 2\pi / \omega) - \varphi] = \cos[(\omega t - \varphi) + 2\pi] = \cos(\omega t - \varphi).$$

Из изложенного следует, что величина $T = 2\pi / \omega$ представляет собой период гармоника (1.2). Величины A и φ называются амплитудой и начальной фазой гармоника. Величина $\omega = 2\pi f$ есть угловая частота гармоника, а величина $f = 1/T$ – частота.

Введем величину $\omega t + \varphi = \psi(t)$, называемую обобщенной (полной) фазой гармонического колебания. Нетрудно видеть, что, при постоянном значении частоты f , величина $\psi(t)$ будет нарастать при изменении времени линейно на величину 2π за каждый период.

Дифференцируя полную фазу по времени, видим, что

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{dt}(2\pi ft - \varphi) \right] = f. \quad (1.4)$$

Таким образом, частота гармонического колебания определяется производной его полной фазы по времени [1,2].

Соответственно, обобщенная фаза гармонического колебания может быть найдена как интеграл от закона изменения частоты от времени:

$$\psi(t) = 2\pi \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

В частности, для постоянного значения частоты f , $\psi(t) = 2\pi f t$.

Чрезвычайно важным свойством периодической функции является независимость величины среднего значения периодической функции от протяженности интервала интегрирования. Для демонстрации этого факта найдем среднее значение некоторой периодической функции $\xi(t)$ на интервале времени

$$a = NT + \delta,$$

где N может стремиться к бесконечности, а величина T есть период функции:

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a \xi(t) dt. \quad (1.6a)$$

Учитывая, что величина $\delta \ll NT$, перепишем выражение (1.6a) в виде

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \xi(t) dt. \quad (1.6b)$$

Тогда, поскольку интеграл от периодической функции равен

$$\int_0^{NT} \xi(t) dt = N \int_0^T \xi(t) dt,$$

то предел выражения (1.6b) для $N \rightarrow \infty$ найдем как

$$\langle \xi(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{NT} \int_0^T \xi(t) dt. \quad (1.7)$$

Раскрывая неопределенность N/N при $N \rightarrow \infty$ по правилу Лопиталю, получим

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_0^T \xi(t) dt. \quad (1.8)$$

Таким образом, среднее значение периодической функции на бесконечно протяженном интервале равно среднему значению этой функции за её период [1].

1.2. Ряды Фурье

В настоящем подразделе рассматриваются основные формы ряда Фурье и вводится понятие спектра периодической функции.

1.2.1. Суперпозиция гармоник с кратными частотами.

Амплитудно – фазовая форма ряда Фурье

Рассмотрим последовательность гармоник

$$A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t - \varphi_k\right) = A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T_k}t - \varphi_k\right); \quad k=1,2,\dots; \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.9)$$

Здесь число $T_k = T/k$ является периодом k – й гармоники. Таким образом, период первой гармоники T определяет период всех гармоник последовательности (1.9), поскольку $T = kT_k$. При этом частотой каждой гармоники является величина $f_k = k/T$, $k=1,2,\dots$ и частоты гармоник последовательности (1.9) являются целочисленными кратными частоты первой (основной) гармоники $f = 1/T$.

Из изложенного следует, что суперпозиция конечного ряда гармоник типа (1.9)

$$\xi_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t - \varphi_k\right) \quad (1.10a)$$

является периодической функцией периода T , поскольку число $T = kT_k$ определяет величину периода всех этих гармоник.

Сумма бесконечного числа таких гармоник (точнее – сумма сходящегося ряда)

$$\xi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t - \varphi_k\right) \quad (1.10б)$$

также является периодической функцией с периодом T .

Выражения (1.10а) и (1.10б) определяют так называемую амплитудно-фазовую форму разложения некоторой периодической функции $\xi(t)$ в ряд Фурье. При этом функция $\xi(t)$ представляет собой суперпозицию конечного (или бесконечного) числа гармоник с частотами $f_k = 1/T_k$, фазами φ_k

и амплитудами A_k плюс некоторая постоянная величина a_0 , называемая постоянной составляющей функции $\xi(t)$.

Однако из записи ряда Фурье в амплитудно-фазовой форме (1.10) не представляется возможным найти величины a_0 , A_k и φ_k . Поэтому целесообразно перейти к тригонометрической форме ряда Фурье, позволяющей исследовать целый ряд важных моментов, связанных с разложением периодических функций в тригонометрические ряды.

1.2.2. Разложение периодической функции в тригонометрический ряд.

Коэффициенты Фурье и ряд Фурье

Преобразуем выражения (1.10), введя обозначение $a_0/2 = A_0$ и учитывая, что

$$A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t - \varphi_k\right) = a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t,$$

где $a_k = A_k \cos\varphi_k$, $b_k = A_k \sin\varphi_k$, получим

$$\xi_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t \right), \quad (1.11a)$$

$$\xi_N(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi k}{T}t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{2\pi k}{T}t. \quad (1.11б)$$

Как правые, так и левые части равенств (1.11) представляют собой периодические функции с периодом T .

Равенства (1.11), если они имеют место, называются разложением функции $\xi(t)$ в тригонометрический ряд. При разложении периодической функции в такой ряд возникают следующие вопросы:

1. Какую периодическую функцию с периодом T можно представить в виде суммы тригонометрического ряда (1.11)?

2. Каким образом могут быть найдены коэффициенты разложения a_0, a_k, b_k ?
3. Каким образом связаны свойства функции $\xi(t)$ со сходимостью ряда (1.11)?

Для рассмотрения этих вопросов укажем прежде всего, что разложение (1.11) есть разложение функции $f(x)$ в ряд по функциям системы

$$1; \quad \cos \frac{2\pi}{T}t; \quad \sin \frac{2\pi}{T}t; \quad \cos \frac{2\pi k}{T}t; \quad \sin \frac{2\pi k}{T}t, \quad (1.12)$$

которая называется основной тригонометрической системой [3].

Основная тригонометрическая система является ортогональной на интервале $(-T/2; T/2)$ в том смысле, что интеграл по данному интервалу от любой функции, а также от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по этому интервалу от квадрата любой функции системы отличен от нуля:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi k}{T}t dt = \frac{T}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{T}t \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} = 0; \quad (1.13a)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T}t dt = -\frac{T}{2\pi k} \cos \frac{2\pi k}{T}t \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} = -\frac{T}{2\pi k} [(-1)^k - (-1)^k] = 0; \quad (1.13б)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi k}{T}t \cos \frac{2\pi n}{T}t dt = 0 \quad (1.13в)$$

при $k \neq n$;

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2\pi k}{T}t dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \left[1 + \cos 2 \left(\frac{2\pi k}{T}t \right) \right] dt = \frac{T}{2}; \quad (1.13г)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T}t \sin \frac{2\pi n}{T}t dt = 0 \quad (1.13д)$$

при $k \neq n$;

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T}t \cos \frac{2\pi n}{T}t dt = 0 \quad (1.13е)$$

при всех k, n ;

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \frac{2\pi k}{T} t dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \left[1 - \cos 2 \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) \right] dt = \frac{T}{2}; \quad (1.13ж)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt = T. \quad (1.13з)$$

Допуская некоторую математическую нестрогость, можно пояснить свойства ортогональных функций, образующих некоторое ортогональное пространство, на примере скалярного произведения.

Так, в 2-мерном пространстве, ортогональность двух векторов определяется равенством нулю их скалярного произведения:

$$\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi} = \psi_X \varphi_X + \psi_Y \varphi_Y = \sum_{L=X,Y} \psi_L \varphi_L = 0.$$

В 3-мерном пространстве это условие примет вид

$$\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi} = \psi_X \varphi_X + \psi_Y \varphi_Y + \psi_Z \varphi_Z = \sum_{L=X,Y,Z} \psi_L \varphi_L = 0,$$

а в N -мерном

$$\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi} = \sum_{L=1}^N \psi_L \varphi_L = 0. \quad (1.14)$$

При этом, из условия $\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi} = |\vec{\psi}| |\vec{\varphi}| \cos \alpha$ (где α - угол между векторами), всегда можно найти величину проекции одного вектора на другой, а косинус угла между векторами можно определить как

$$\cos \alpha = \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{\varphi}}{|\vec{\psi}| |\vec{\varphi}|}$$

для любой размерности пространства. При дальнейшем увеличении размерности пространства, в котором определены векторы $\vec{\psi}$ и $\vec{\varphi}$, до бесконечности, эти векторы можно будет рассматривать как некоторые функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ в некотором бесконечномерном функциональном простран-

ве $Q[a, b]$. Тогда скалярное произведение функций $\psi(t)$ и $\varphi(t)$, представляющих собой элементы пространства $Q[a, b]$, определяется как

$$\psi(t) \cdot \varphi(t) = \int_a^b \psi(t)\varphi(t)dt \quad (1.15)$$

и удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к скалярному произведению.

Две функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ (два «вектора») из пространства $Q[a, b]$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. если

$$\psi(t) \cdot \varphi(t) = \int_a^b \psi(t)\varphi(t)dt = 0. \quad (1.16)$$

Норма («длина») вектора $\vec{\varphi} \in Q[a, b]$ определяется равенством $|\vec{\varphi}| = \sqrt{\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}}$, а косинус угла между «векторами» $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ можно найти как

$$\cos(\psi, \varphi) = \frac{\psi \cdot \varphi}{|\psi||\varphi|}. \quad (1.17)$$

Проекцией «вектора» $\varphi(t)$ на «вектор» $\psi(t)$ называют величину

$$|\varphi| \cos(\varphi, \psi) = \frac{\varphi \cdot \psi}{|\psi|} = \frac{\int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt}{\sqrt{\int_a^b \psi^2(t)dt}}. \quad (1.18)$$

Учитывая изложенное и принимая во внимание соотношения ортогональности (1.13), можно сделать вывод, что основная тригонометрическая система (1.12) есть ортогональное функциональное пространство, ортами которого являются функции этой системы.

Рассмотрим теперь вопрос об определении коэффициентов a_0, a_k, b_k разложения (1.11).

Хорошо известно, что если разложение (1.11) сходится на интервале $[-T/2; T/2]$ к функции $\xi(t)$, то его можно интегрировать почленно [3]. Почленное интегрирование возможно и после умножения равенства (1.11) на любую интегрируемую функцию. Данное обстоятельство в сочетании с ортогональностью основной тригонометрической системы (1.12) позволяет определить коэффициенты a_0 , a_k , b_k разложения (1.11).

Найдем прежде всего коэффициент a_0 , интегрируя равенство (1.11) почленно с учетом выражений (1.13а,б):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi k}{T} t dt + b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T} t dt \right] = a_0 T.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt. \quad (1.19)$$

Таким образом, коэффициент a_0 (или постоянная составляющая) представляет собой среднее значение периодической функции $\xi(t)$.

Для определения коэффициента a_k умножим равенство (1.11) функцию $\cos \frac{2\pi n}{T} t$ и проинтегрируем результат почленно на интервале $[-T/2; T/2]$:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt &= a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} t dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi k}{T} t \cos \frac{2\pi n}{T} t dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T} t \sin \frac{2\pi n}{T} t dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

С учетом соотношений (1.13а,в,г,е) результат интегрирования (1.20) равен нулю за исключением случаев $n = k$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t dt = a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 \frac{2\pi k}{T} t dt = a_k \frac{T}{2},$$

откуда

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t dt. \quad (1.21)$$

Аналогично, для определения коэффициента b_k , умножим равенство (1.11) на функцию $\sin \frac{2\pi k}{T} t$ и проинтегрируем почленно с учетом соотношений (1.13). В результате получим

$$\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt = b_k \frac{T}{2},$$

откуда

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt. \quad (1.22)$$

Величины a_0 , a_k , b_k , определяемые выражениями (1.19), (1.21), (1.22) называются коэффициентами Фурье разложения функции $\xi(t)$ по основной тригонометрической системе, а ряд

$$\xi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right) \quad (1.24)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции $\xi(t)$.

Припоминая, что элементы основной тригонометрической системы (1.12) представляют собой орты некоторого функционального пространства, можно интерпретировать коэффициенты Фурье a_0 , a_k , b_k как проекции функции $\xi(t)$, определяемые скалярными произведениями функции $\xi(t)$ и ортов функционального пространства (см. выражения (1.19), (1.20), (1.22)). В заключение укажем, что функция $\xi(t)$ вещественной перемен-

ной t , определенная на интервале $[-T/2; T/2]$, должна удовлетворять так называемым условиям Дирихле, а именно [3, 4, 5]:

- должна быть однозначной, конечной и кусочно-непрерывной,
- должна иметь ограниченное число максимумов и минимумов.

1.3. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Функция $\xi(t)$, заданная на интервале $[-T/2, T/2]$ называется четной, если

$$\xi(-t) = \xi(t) \quad (1.23a)$$

при всех $t \in [-T/2, T/2]$.

Функция $\xi(t)$, заданная на интервале $[-T/2, T/2]$ называется нечетной, если

$$\xi(-t) = -\xi(t) \quad (1.23б)$$

при всех $t \in [-T/2, T/2]$.

Из выражений (1.23а, б) следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции антисимметричен относительно этой оси.

В общем случае функция не обязательно является четной или нечетной, т. е. может быть произвольной. Произвольная функция $\xi(t)$, заданная на интервале $[-T/2; T/2]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций [6]

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t),$$

где слагаемое $\xi_1(t) = 0,5[\xi(t) + \xi(-t)]$ является четной функцией, а слагаемое $\xi_2(t) = 0,5[\xi(t) - \xi(-t)]$ представляет собой нечетную функцию.

Для функции $\xi(t)$, интегрируемой на отрезке $[-T/2; T/2]$, можно записать

$$\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = \int_{-T/2}^0 \xi(t) dt + \int_0^{T/2} \xi(t) dt = \int_0^{T/2} [\xi(t) + \xi(-t)] dt, \quad (1.24)$$

поскольку при замене переменной t на $-t$ выполняются условия

$$\int_{-T/2}^0 \xi(t) dt = - \int_{+T/2}^0 \xi(-t) dt = \int_0^{T/2} \xi(t) dt.$$

Из выражения (1.24) следует, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^{T/2} \xi(t) dt, & \text{если функция } \xi(t) \text{ четная;} \\ 0, & \text{если функция } \xi(t) \text{ нечетная.} \end{cases} \quad (1.25)$$

В состав основной тригонометрической системы входят как четные функции $(1, \cos \frac{2\pi k}{T} t, \dots)$, так и нечетные функции $(\sin \frac{2\pi}{T} t, \dots, \sin \frac{2\pi k}{T} t)$.

Если функция $\xi(t)$, заданная на интервале $[-T/2; T/2]$, четная, то ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\xi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t, \quad (1.26)$$

т.к. если функция $\xi(t)$ четная, то произведение $\xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t$ есть четная

функция, а произведение $\xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t$ – нечетная функция. В этой связи

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \xi(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt = 0. \end{aligned}$$

Если функция $\xi(t)$ нечетная, то $\xi(t)\cos\frac{2\pi k}{T}t$ и $\xi(t)\sin\frac{2\pi k}{T}t$ есть нечетная и четная функции соответственно. Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi k}{T} t dt = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi k}{T} t dt$$

и ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t. \quad (1.27)$$

1.4. Ряд Фурье в комплексной форме. Спектр периодической функции

Перепишем для удобства выражение (1.11) для тригонометрического ряда Фурье

$$\xi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t$$

и, подставив в него известные соотношения

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} [\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)], \quad \sin \alpha = \frac{1}{2j} [\exp(j\alpha) - \exp(-j\alpha)],$$

получим

$$\begin{aligned} \xi(t) = & a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right) + \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) \right] - \\ & - j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2} \left[\exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right) - \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) \right] = \end{aligned}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_k - jb_k) \exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right) + \frac{1}{2} (a_k + jb_k) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) \right]. \quad (1.28)$$

Из выражений (1.21) и (1.22) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{a_k - jb_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \left[\cos \frac{2\pi k}{T} t - j \sin \frac{2\pi k}{T} t \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt; \end{aligned} \quad (1.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_k + jb_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \left[\cos \frac{2\pi k}{T} t + j \sin \frac{2\pi k}{T} t \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt. \end{aligned} \quad (1.29б)$$

Рассматривая соотношения (1.29а, б) можно сделать следующие выводы:

1. Выражение $0,5(a_k + jb_k)$ может быть получено из выражения $0,5(a_k - jb_k)$ при изменении знака индекса k : $k \rightarrow -k$. Тогда, если ввести обозначение

$$0,5(a_k - jb_k) = \dot{C}_k,$$

то можно записать

$$0,5(a_k + jb_k) = \dot{C}_{(-k)}.$$

2. Коэффициент a_0 можно записать в виде

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp(j0) dt.$$

Этот коэффициент есть частный случай выражения для значений $\dot{C}_{(\pm k)}$

$$\dot{C}_{(\pm k)} \equiv \dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad (1.30)$$

в случае $k = 0$. Следовательно, выражение (1.28) можно переписать в виде

$$\xi(t) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right). \quad (1.31)$$

Соотношение (1.31) есть разложение периодической функции $\xi(t)$ в ряд Фурье, обладающий комплексными коэффициентами \dot{C}_k , которые определяются выражением (1.30), или, иначе, рядом Фурье в комплексной форме. Этот ряд является более простым по структуре и имеет то преимущество, что все коэффициенты разложения определяются единственной формулой (1.30). Рассматривая физический смысл ряда (1.31), нетрудно видеть, что в разложении присутствуют как положительные гармоники с индексом k , так и отрицательные с индексом $-k$. Хотя отрицательные частоты физически не существуют, их использование создает определенные удобства для анализа, поскольку операции с комплексными числами значительно проще. Нетрудно видеть также, что ряд Фурье в действительной форме может быть получен путем отбрасывания гармоник с отрицательными частотами и удвоения амплитуд гармоник с положительными частотами (для значений $k \geq 1$).

Относительно определения значений коэффициентов \dot{C}_k для случая $k < 0$ (т.е. для отрицательных частот) нетрудно показать, что для действительных функций $\xi(t)$ справедливо следующее: поскольку для положительных значений k

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt,$$

то для отрицательных величин ($-k$)

$$\dot{C}_{(-k)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt \right]^* = \dot{C}_k^*. \quad (1.32)$$

Таким образом, для действительных функций времени комплексные коэффициенты Фурье (комплексные амплитуды) гармоник с отрицательной

частотой определяются комплексно-сопряженными коэффициентами Фурье соответствующих гармоник с положительной частотой.

Сопоставляя амплитудно-фазовую форму ряда Фурье (1.10б), его тригонометрическую (1.11) и комплексную (1.31) формы, нетрудно видеть, что амплитуды A_k и фазы φ_k формы (1.10б), коэффициенты a_k и b_k тригонометрической формы (1.11) и комплексные коэффициенты \dot{C}_k формы (1.31) связаны соотношениями

$$\dot{C}_k = \operatorname{Re} \dot{C}_k + j \operatorname{Im} \dot{C}_k = 0,5[a_k - j b_k],$$

откуда

$$\operatorname{Re} \dot{C}_k = 0,5 a_k, \quad \operatorname{Im} \dot{C}_k = 0,5 b_k; \quad (1.33a)$$

$$|\dot{C}_k| = 0,5 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,5 A_k; \quad (1.33б)$$

$$\arg \dot{C}_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} = -\operatorname{arctg} \left[\frac{A_k \sin \varphi_k}{A_k \cos \varphi_k} \right] = \varphi_k \dots \quad (1.33в)$$

Набор комплексных коэффициентов $\dot{C}_k = |\dot{C}_k| \exp(-j\varphi_k)$, характеризующих комплексные амплитуды гармонических составляющих $\exp\left(-j\frac{2\pi k}{T}t\right)$ периодической функции (сигнала) $\xi(t)$, называется комплексным спектром этой функции [1, 7]. Набор модулей комплексных амплитуд $|\dot{C}_k|$, характеризующий частотную зависимость амплитуд гармоник называется амплитудным спектром функции $\xi(t)$. Набор величин φ_k , характеризующий зависимость начальной фазы гармоник от частоты, называется фазовым спектром, а набор величин $P_k = \dot{C}_k \dot{C}_k^* = |\dot{C}_k|^2$, характеризующий частотное распределение мощности гармоник называется спектром мощности.

Комплексный спектр функции можно наглядно представить графически. Если расположить векторные амплитуды \dot{C}_k гармонических состав-

ляющих разложения в трехмерном пространстве, совместив действительную часть $\text{Re}\dot{C}_k$ с осью OX (при этом мнимая часть $\text{Im}\dot{C}_k$ будет автоматически совмещена с осью OY), а номера гармоник расположить вдоль оси OZ , то будет получено трехмерное разложение действительной функции $\xi(t)$ в комплексный ряд Фурье (см. рис. 1.1).

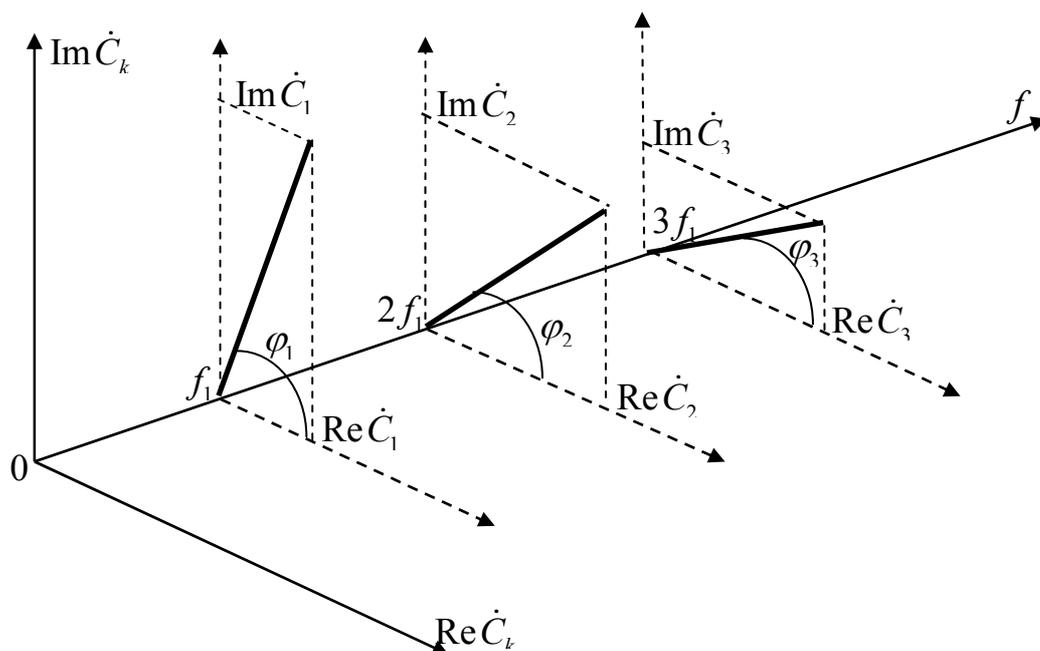


Рис. 1.1. Графическое представление комплексного спектра

1.5. Примеры разложения периодических функций в ряд Фурье. Некоторые свойства спектра периодических функций

Рассмотрим ряд примеров разложения периодических функций в ряд Фурье и продемонстрируем на этих примерах некоторые свойства спектра.

1.5.1. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов

Зададим периодическую последовательность прямоугольных импульсов, следующих с периодом T и имеющих длительность τ (рис. 1.2). Для упрощения расчетов амплитуду импульсов примем за единицу. Считая, что

один из импульсов последовательности расположен симметрично относительно начала координат (см. рис. 1.2.), представим данную последовательность комплексным рядом Фурье (1.31) и определим коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp\left(-j \frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \\ &= \frac{1}{q} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{T} \tau/2\right)}{\frac{2\pi k}{T} \tau/2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

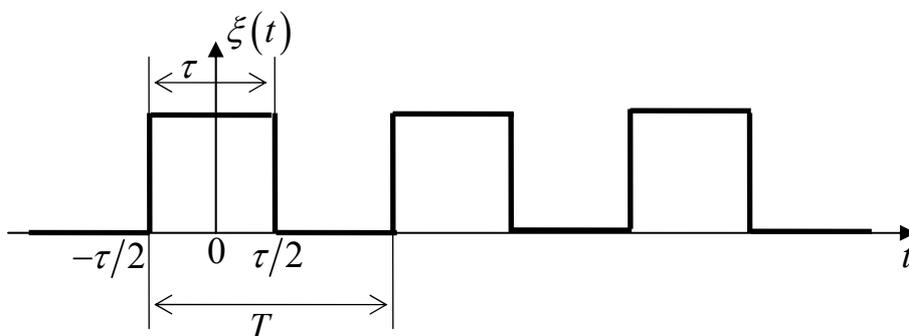


Рис. 1.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Величина $q = T/\tau$ называется скважностью. Набор коэффициентов \dot{C}_k представляет собой комплексный спектр импульсной последовательности, изображенный на рис. 1.3. Опуская общий множитель $1/q$, видим, что функция

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{T} \tau/2\right)}{\frac{2\pi k}{T} \tau/2} = \frac{\sin x}{x} \quad (1.35)$$

характеризует распределение амплитуд и фаз частотного (спектрального) представления анализируемого сигнала. Амплитуды спектральных (гармонических) составляющих могут быть изображены в виде так называемых «спектральных линий», расположенных вдоль оси частот, а изменение

огибающей комплексной амплитуды спектральных коэффициентов определяется функцией (1.35), известной в математике как первый замечательный предел. Значение этого предела в точке $k = 0$ есть единица. Таким образом, спектр периодической функции является дискретной функцией частоты.

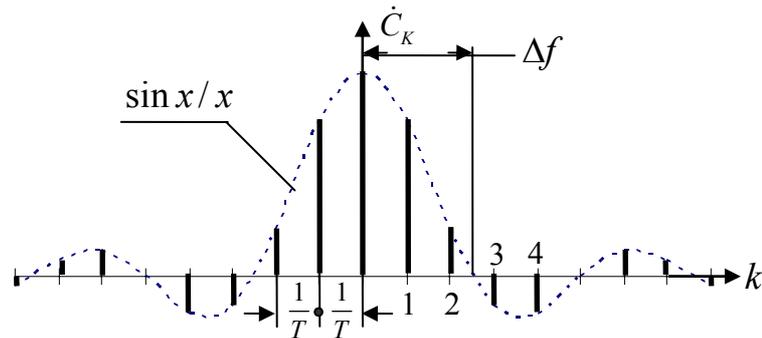


Рис. 1.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Для определения спектра последовательности, изображенной на рис. 1.2. была использована комплексная форма ряда Фурье, но нетрудно показать, что, с учетом четности анализируемой функции, коэффициенты представления этой функции тригонометрическим рядом Фурье имеют вид

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = 1/q; \quad b_k = 0; \quad (1.36a)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{1}{q} \sin\left(\frac{2\pi k\tau/2}{T}\right) / \frac{2\pi k\tau/2}{T}. \quad (1.36b)$$

Таким образом, использование комплексной формы ряда Фурье предпочтительнее, поскольку сокращает объем вычислений.

Отметим, также, что функция (1.36) является знакопеременной и не может быть спектром амплитуд, который представляет собой набор модулей коэффициентов $|\dot{C}_k| \geq 0$. Поскольку отрицательные лепестки спектра ха-

рактически характеризуются отрицательными величинами \dot{C}_k , эти величины можно записать в виде $(-1)|\dot{C}_k| = |\dot{C}_k| \exp\{j\pi\}$. Таким образом при переходе функции $\sin x/x$ в отрицательную область фазы спектральных линий, входящих в состав отрицательного лепестка спектра, претерпевают скачок на 180° относительно фаз спектральных линий положительных лепестков. На рис. 1.4 изображены спектры амплитуд и фаз периодической последовательности прямоугольных импульсов.

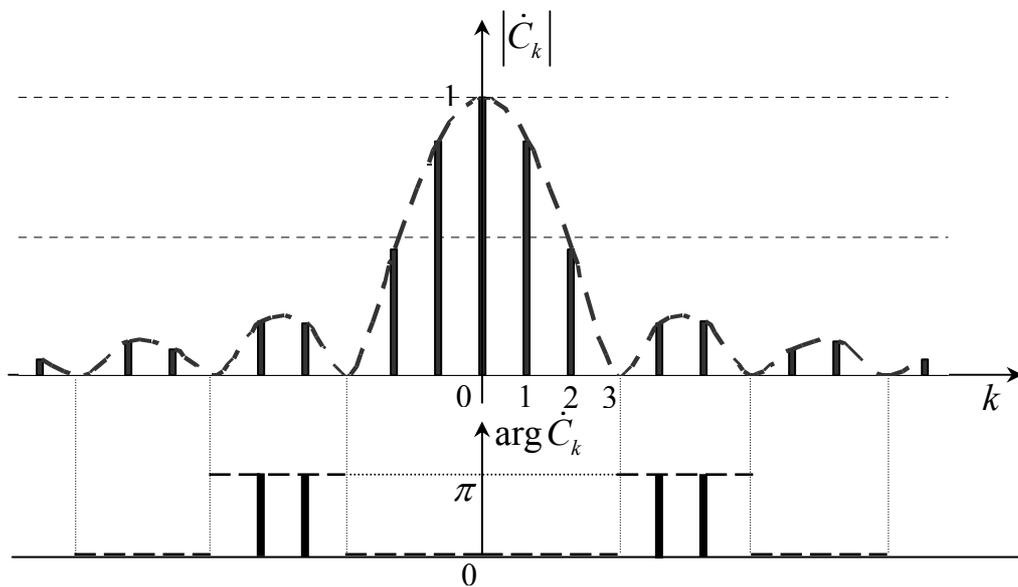


Рис.1.4. Амплитудный и фазовый спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов

Продолжим анализ спектрального разложения (1.34) с целью установления связи между шириной основного лепестка спектральной функции и длительностью одиночного импульса последовательности. За основной лепесток примем часть графика функции шириной Δf , заключенную между первыми нулями функции $\sin x/x$ (рис. 1.3).

Поскольку первый нуль функции $\sin x/x$ расположен в точке $x = \pi$, то полуширина основного лепестка (т.е. расстояние от начала координат до первого нуля) определяется из условия

$$2\pi \frac{k}{T} \frac{\tau}{2} = \pi,$$

откуда следует, что

$$\frac{k}{T} \tau = 1. \quad (1.37)$$

Величину k/T можно обозначить как Δf , т.к. эта величина определяет верхнюю частоту спектрального разложения, отвечающую первому нулю спектра (основному лепестку). Назовем величину Δf шириной основного лепестка спектра импульсной последовательности.

Тогда выражение (1.37) может быть записано в форме

$$\Delta f \tau = 1, \quad (1.38)$$

из которой следует, что произведение длительности импульса на ширину главного лепестка его спектра есть постоянная величина.

Выражение (1.38) есть одна из форм принципа неопределенности, из которого следует, что ширина спектра и длительность импульса обратно пропорциональны.

В дальнейшем будет показано, что в основном лепестке спектра сосредоточено более 90% энергии сигнала и поэтому в большинстве случаев ширину основного лепестка называют шириной спектра сигнала.

1.5.2. Теорема смещения для разложения в ряд Фурье

Рассмотрим разложение в ряд Фурье последовательности прямоугольных импульсов с единичной амплитудой, длительностью τ и периодом T (рис. 1.5). Начало первого импульса последовательности в данном случае совпадает с началом координат, т.е. данная последовательность смещена во времени на величину $\tau/2$ относительно последовательности $\xi(t)$, изо-

браженной на рис. 1.2. Смещенную последовательность можно записать в виде $\xi(t - \tau/2)$.

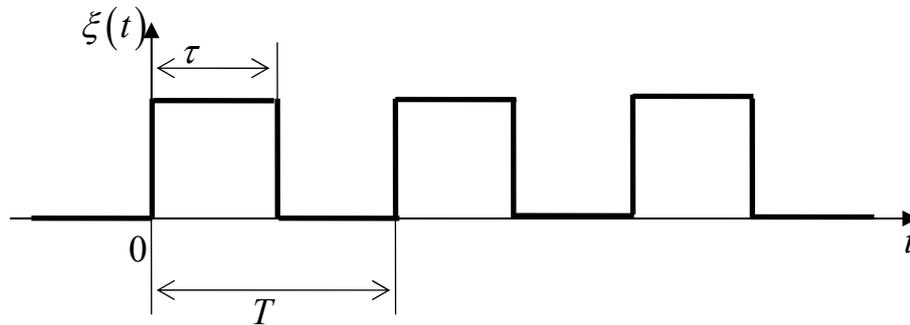


Рис. 1.5. Смещенная последовательность прямоугольных импульсов

Определим коэффициенты комплексного ряда Фурье смещенной последовательности:

$$\begin{aligned} \dot{C}'_k &= \frac{1}{T} \int_0^\tau \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \\ &= \frac{1}{j2\pi k} \left(1 - \cos \frac{2\pi k\tau}{T} + j \sin \frac{2\pi k\tau}{T}\right). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Используя выражения

$$\sin^2 \alpha = 0,5(1 - \cos 2\alpha); \quad \sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha,$$

после несложных преобразований приведем выражение (1.39) к виду

$$\dot{C}'_k = \frac{1}{q} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau/2}{T}\right)}{\frac{2\pi k\tau/2}{T}} \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau/2}{T}\right). \quad (1.40)$$

Сравнение выражений (1.34) и (1.40) позволяет сформулировать теорему смещения (задержки) для разложения в ряд Фурье.

Теорема смещения: Коэффициенты ряда Фурье смещенной периодической функции определяются произведением коэффициентов ряда Фурье несме-

щенной функцией и фазового множителя $\exp\left\{-j\frac{2\pi k\tau/2}{T}\right\}$, где $\tau/2$ - величина смещения.

Нетрудно убедиться, что данная формулировка справедлива для произвольной величины смещения Δt . Таким образом, задержка функции во времени отображается в появлении прогрессивного линейного сдвига фазы спектральных составляющих функции.

Верно и обратное: если искусственно ввести в спектральные составляющие некоторой периодической функции $\xi(t)$ фазовый сдвиг путем использования линейного фильтра с равномерной амплитудной передаточной функцией и фазовой характеристикой $\exp\left(-j\frac{2\pi k}{T}\Delta t\right)$, линейно зависящей от частоты, то сигнал на выходе фильтра будет задержан относительно основного сигнала на величину Δt : $U_{\text{ВЫХ}}(t) = \xi(t - \Delta t)$. Данное устройство представляет собой линию задержки.

1.5.3. Разложение в ряд Фурье периодической последовательности треугольных импульсов

Рассмотрим периодическую последовательность импульсов, имеющих форму равнобедренного треугольника, длительность 2τ , единичную амплитуду и период следования T (рис. 1.6).

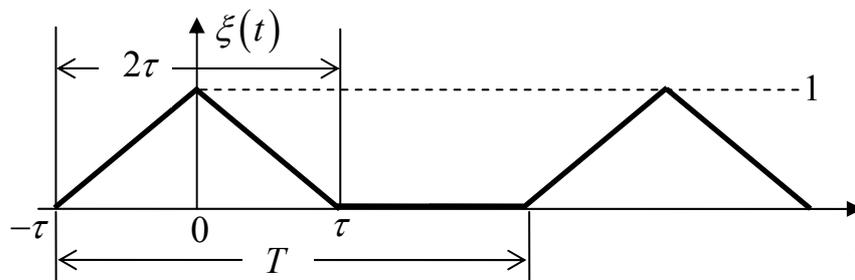


Рис. 1.6. Периодическая последовательность треугольных импульсов

Функцию $\xi(t)$ зададим соотношениями

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 + t/\tau & \text{для } -\tau < t < 0; \\ 1 - t/\tau & \text{для } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{для прочих значений } t \in T. \end{cases}$$

Определим коэффициенты разложения данной функции в комплексный ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \left[\int_{-\tau}^0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt + \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} (I_1 + I_2 + I_3 - I_4). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Вычислив интегралы

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\tau}^0 \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt = -\frac{T}{j2\pi k} + \frac{T}{j2\pi k} \exp\left(j \frac{2\pi k\tau}{T}\right); \\ I_2 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 t \exp\left(j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{T^2}{(2\pi k)^2} - \frac{T\tau}{j2\pi k} \exp\left(j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) - \frac{T^2}{(2\pi k)^2} \exp\left(j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) \right]; \\ I_3 &= \int_0^{\tau} \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) dt = \frac{T}{j2\pi k} - \frac{T}{j2\pi k} \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau}{T}\right); \\ I_4 &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} t \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) dt = \\ &= \frac{1}{\tau} \left[-\frac{T^2}{(2\pi k)^2} - \frac{T\tau}{j2\pi k} \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) + \frac{T^2}{(2\pi k)^2} \exp\left(-j \frac{2\pi k\tau}{T}\right) \right] \end{aligned}$$

и подставляя результат в выражение (1.41), получим

$$C_k = \frac{2T}{\tau(2\pi k)^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k\tau}{T}\right),$$

откуда следует окончательно

$$C_k = \frac{1}{q} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau/2}{T}\right)}{\frac{2\pi k\tau/2}{T}} \right]^2. \quad (1.42)$$

Сравнивая выражение (1.34) для коэффициентов Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов, имеющих длительность τ и период повторения T , с выражением (1.42), видим, что спектральные коэффициенты разложения последовательности треугольных импульсов (рис. 1.6) тесно связаны с коэффициентами (1.34). Данный факт будет проанализирован позже, после изучения еще не рассмотренных свойств спектральных разложений.

1.5.4. Разложение в ряд Фурье гармонического сигнала, ограниченного на заданном уровне

В мощных усилителях (прежде всего в оконечных усилителях радиопередающих устройств) часто используется эффект отсечки или насыщения сигнала на некотором уровне. Это явление представлено на рис. 1.7.

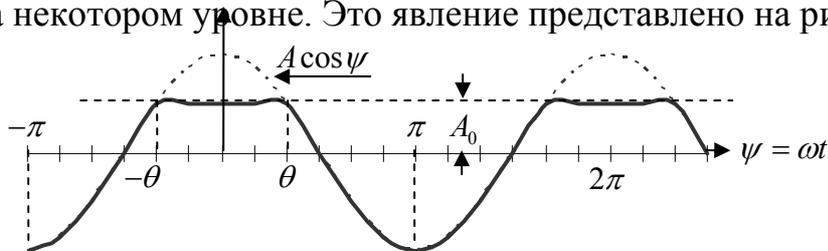


Рис. 1.7. Гармонический сигнал, ограниченный на заданном уровне

Искажения такого типа относятся к классу нелинейных искажений и приводят к появлению новых гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте сигнала. При этом мощность сигнала на основной (первой) гармонике уменьшается за счет перераспределения энергии меж-

ду сигналом основной частоты и возникшими гармоническими составляющими.

Рассмотрим гармонический сигнал вида $A \cos \psi$, где ψ – обобщенная фаза, и ограничим этот сигнал на уровне $|A_0| < A$. Введем специальный параметр – угол отсечки θ , который определяется из соотношения $A \cos \theta = A_0$ как $\theta = \arccos(A_0 / A)$ и найдем коэффициенты ряда Фурье ограниченного гармонического сигнала.

Учитывая переход от переменной t к переменной ψ , а также четность анализируемой функции, нетрудно видеть, что коэффициенты ряда Фурье имеют вид

$$a_0 = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi d\psi; \quad a_k = \frac{A}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi \cos(k\psi) d\psi; \quad b_k = 0$$

и окончательно определяются как

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi d\psi = \frac{A}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\theta} \cos \psi d\psi + \int_{-\theta}^{\theta} \cos \theta d\psi + \int_{\theta}^{\pi} \cos \theta d\psi \right] = \\ &= \frac{A}{2\pi} \left\{ [\sin]_{-\pi}^{-\theta} + \cos \theta [\psi]_{-\theta}^{\theta} + [\sin]_{\theta}^{\pi} \right\} = \frac{A}{\pi} [\theta \cos \theta - \sin \theta]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

К сожалению, общее выражение для коэффициентов a_k получить не удастся из-за возникновения неопределенности в итоговом результате при $k=1$. В связи с этим определим отдельно коэффициент a_1 , а затем общее выражение для коэффициентов a_k при $k > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\theta} \cos^2 \psi d\psi + \cos \theta \int_{-\theta}^{\theta} \cos \psi d\psi + \int_{\theta}^{\pi} \cos^2 \psi d\psi \right] = \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} d\psi + \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} \cos 2\psi d\psi + \cos \theta \frac{A}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \psi d\psi + \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} d\psi + \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} \cos 2\psi d\psi = \frac{A}{\pi} [\pi - \theta + \cos \theta \sin \theta]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Найдем теперь общее выражение для коэффициентов разложения a_k при $k > 1$.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{A}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\theta} \cos \psi \cos(k\psi) d\psi + \cos \theta \int_{-\theta}^{\theta} \cos(k\psi) d\psi + \int_{\theta}^{\pi} \cos \psi \cos(k\psi) d\psi \right] = \\
&= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} \cos[(k+1)\psi] d\psi + \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta} \cos[(k-1)\psi] d\psi + \cos \theta \frac{A}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \cos(k\psi) d\psi + \\
&\quad + \frac{A}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi} \cos[(k+1)\psi] d\psi + \frac{A}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi} \cos[(k-1)\psi] d\psi = \\
&= \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[(k+1)\psi]}{(k+1)} \Big|_{-\pi}^{-\theta} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[(k-1)\psi]}{(k-1)} \Big|_{-\pi}^{-\theta} + \\
&\quad + \frac{A \cos \theta \sin(k\psi)}{\pi k} \Big|_{-\theta}^{\theta} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[(k+1)\psi]}{(k+1)} \Big|_{\theta}^{\pi} + \frac{A}{2\pi} \frac{\sin[(k-1)\psi]}{(k-1)} \Big|_{\theta}^{\pi} = \\
&= \frac{A}{\pi} \left[\frac{2 \cos \theta \sin(k\theta)}{k} - \frac{\sin[(k+1)\theta]}{k+1} - \frac{\sin[(k-1)\theta]}{k-1} \right]. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Выполняя простейшие преобразования выражения (1.45) и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\sin[(k+1)\theta] + \sin[(k-1)\theta] &= 2 \sin(k\theta) \cos \theta, \\
\sin[(k+1)\theta] - \sin[(k-1)\theta] &= 2 \cos(k\theta) \sin \theta,
\end{aligned}$$

запишем окончательный результат интегрирования в виде

$$a_k = \frac{2A}{\pi} \left[\frac{k \cos(k\theta) \sin \theta - \cos \theta \sin(k\theta)}{k(k^2 - 1)} \right]. \tag{1.46}$$

Результат вычисления величин a_0, a_1, \dots, a_k ($k > 1$) обычно записывают в виде $a_0 = A\gamma_0(\theta)$, $a_1 = A\gamma_1(\theta)$, ..., $a_k = A\gamma_k(\theta)$, где величины $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ представляют собой так называемые коэффициенты Берга, известного советского специалиста в области радиотехники, который впервые определил эти величины и составил их таблицы. Используя выражения (1.43), (1.44) и (1.46), запишем коэффициенты Берга в общем виде как

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi}(\theta \cos \theta - \sin \theta), \quad (1.47a)$$

$$\gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi}(\pi - \theta + \cos \theta \sin \theta), \quad (1.47б)$$

$$\gamma_k(\theta) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{k \cos(k\theta) \sin \theta - \cos \theta \sin(k\theta)}{k(k^2 - 1)} \right]. \quad (1.47в)$$

Зависимость первых трех коэффициентов Берга от величины угла отсечки приведена на рис. 1.8 [1].

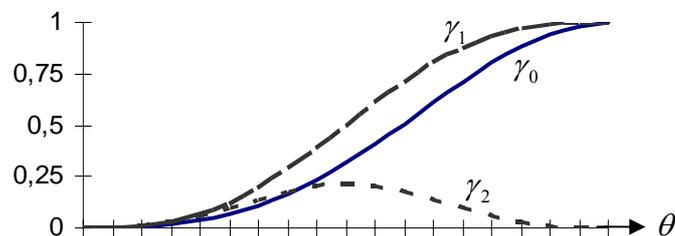


Рис. 1.8. Значения коэффициентов Берга в зависимости от угла отсечки

Следует указать, что знаки перед коэффициентами (1.47) для различных спектральных составляющих не имеют особого значения, т.к. они определяются фазой колебания, которая изменяется при изменении начала отсчета времени. Таблицы, составленные академиком Бергом, использовались в течение многих десятилетий и используются до сих пор для расчета содержания основной и высших гармонических составляющих в выходном сигнале при явлениях ограничения, насыщения, умножения частоты, а также для расчета постоянной составляющей и величины пульсаций выходного напряжения выпрямителей (т.е. вторичных источников питания).

Рассмотрим простейший пример использования коэффициентов Берга для анализа однополупериодного выпрямителя. В данном случае угол отсечки $\theta = \pi/2$ и графическое изображение выходного напряжения приведено на рис. 1.9. Для этого случая амплитуда постоянной составляющей (полезный результат) определяется как $a_0 = 0,32$, а амплитуды пульсаций,

обусловленные присутствием основной и второй гармоник входного напряжения, определяются как $a_1 = 0,5A$ и $a_2 = 0,21A$. Пульсации в выходном напряжении должны быть подавлены соответствующим фильтром нижних частот. Анализ таких фильтров будет проведен в третьей главе книги.

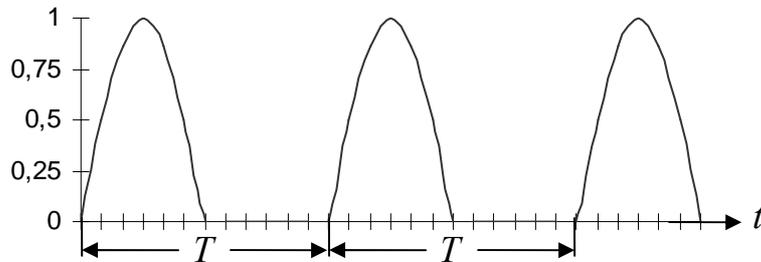


Рис. 1.9. Форма напряжения при значении угла отсечки $\theta = 90^\circ$

В заключение отметим, что для случая двухполупериодного выпрямления амплитуда постоянной составляющей увеличивается в два раза, поскольку в этом случае $a_0 = 2A/\pi = 0,64A$.

1.6. Средние значения периодических функций.

Теорема Парсеваля

Поскольку периодические функции обладают неизменной формой и амплитудой на интервале времени $-\infty < t < \infty$, то в ряде случаев интегралы от некоторых функций на этом интервале могут расходиться.

Однако средние значения периодических функций на бесконечном интервале существуют. Так, в подразделе 1.1 было доказано, что среднее значение периодической функции на бесконечном интервале существует и равно среднему значению этой функции за её период (см. выражение (1.8))

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt,$$

где T – период функции. Как указывалось выше, это значение представляет собой коэффициент Фурье для нулевой частоты, или постоянную составляющую.

1.6.1. Усреднение в задаче определения коэффициентов Фурье

Идея усреднения может быть распространена и на другие коэффициенты ряда Фурье. В подразделе 1.2.2 было указано, что коэффициенты Фурье могут быть интерпретированы как скалярное произведение разлагаемой в ряд Фурье функции и единичных ортов функционального пространства

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt.$$

Эти интегралы можно также рассматривать как средние значения произведений функции $\xi(t)$ и функций $\cos(2\pi kt/T)$, $\sin(2\pi kt/T)$:

$$a_k = \langle \xi(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} \rangle, \quad b_k = \langle \xi(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} \rangle. \quad (1.48)$$

Использование этих выражений позволяет построить способ определения коэффициентов Фурье периодической функции произвольной формы, который заключается в следующем. Периодическая функция $\xi(t)$ поступает на вход системы, содержащей два идентичных канала, включающих в себя перемножители и интеграторы (см. рис. 1.10.).

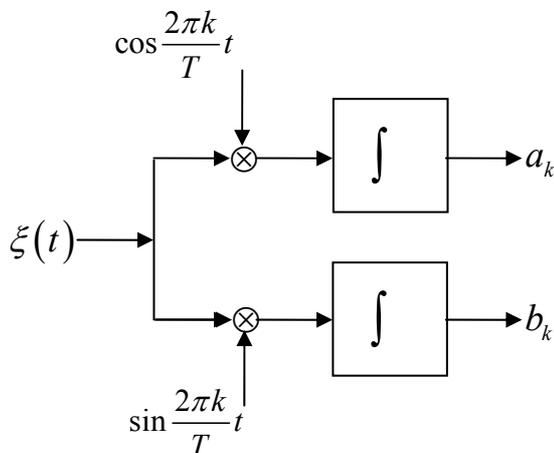


Рис. 1.10. Блок – схема спектроанализатора

На вторые входы перемножителей поступают ортогональные сигналы вида $\cos(2\pi kt/T)$, $\sin(2\pi kt/T)$. Результаты перемножения интегрируются и на выходе интеграторов имеют место значения (1.48) коэффициентов a_k , b_k . Естественно, сетка частот k/T , генерируемая некоторым генератором, входящим в состав спектроанализатора, должна быть согласована с периодом анализируемой функции.

1.6.2. Средняя мощность периодической функции

Ещё одним важным средним значением периодической функции $\xi(t)$ является средняя мощность

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t) dt. \quad (1.49)$$

Корень квадратный из средней мощности, называемый действующим значением функции, представляет собой меру амплитуды колебаний сложной формы. Рассмотрим два простых примера.

1. Средняя мощность гармонического колебания.

Зададим периодическую функцию $\xi(t) = A \cos \omega_0 t$ с периодом $T = 2\pi / \omega_0$ и найдем её среднюю мощность

$$\begin{aligned} \langle \xi^2(t) \rangle &= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \cos^2 \omega_0 t dt = \\ &= \frac{A^2 \omega_0}{4\pi} \left(\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} dt + \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \cos 2\omega_0 t dt \right) = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, действующее значение гармонического колебания определяется величиной $A/\sqrt{2} = 0,707A$ его максимальной амплитуды.

2. Средняя мощность периодической последовательности типа «меандр».

Пусть $\xi(t)$ представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду A и длительность, равную половине периода данной последовательности (последовательность типа «меандр»). Данная последовательность изображена на рис. 1.11.

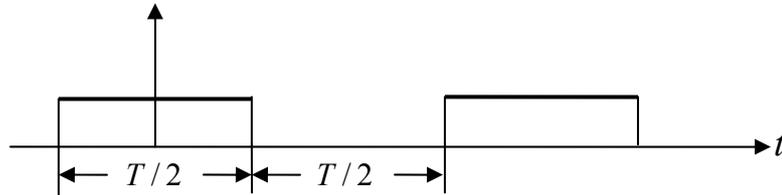


Рис. 1.11. Периодическая последовательность типа «меандр»

Средняя мощность этой последовательности определяется как

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \frac{A^2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} dt = \frac{A^2}{2}.$$

Таким образом, действующее значение последовательности типа «меандр» также составляет величину 0,707 от максимальной амплитуды.

1.6.3. Теорема Парсеваля

Рассмотрим теперь теорему Парсеваля для периодических функций, позволяющую связать среднюю мощность функции, найденную интегрированием во временной области, со средней мощностью, найденной суммированием мощностей гармонических составляющих ряда Фурье этой функции.

Запишем среднюю мощность произвольной периодической функции $\xi(t)$ в виде

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \xi(t) dt. \quad (1.50)$$

Заменим одну из функций $\xi(t)$ в выражении (1.50) её представлением в виде комплексного ряда Фурье

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp\left(j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt.$$

Изменяя порядок выполнения операций интегрирования и суммирования, перепишем последнее выражение в виде

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right].$$

Для того, чтобы выражение в квадратных скобках представляло собой коэффициент комплексного ряда Фурье, используем следующий прием

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \exp\left(-j \frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right]^*,$$

где символ (*) означает комплексное сопряжение. Тогда

$$\langle \xi^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \dot{C}_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2. \quad (1.51)$$

Зависимость квадратов модулей коэффициентов комплексного ряда Фурье от частоты представляет собой спектр мощности периодической последовательности. Таким образом, выражение (1.51) свидетельствует, что средняя мощность функции $\xi(t)$, найденная интегрированием её квадрата во времени, равна сумме мощностей гармонических составляющих этой функции. Данный факт составляет содержание так называемой теоремы Парсеваля, которая демонстрирует закон сохранения энергии при переходе от представления периодической функции во времени к её представлению в частотной области.

2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Разложение в ряд Фурье представляет собой мощный аналитический инструмент исследования периодических функций. Однако в природе не все процессы являются периодическими, и в связи с этим возникает необходимость обобщения аппарата спектрального анализа на непериодические функции. Результатом обобщения является интеграл Фурье и пара преобразований Фурье.

2.1. Вещественная форма интеграла Фурье

В первой главе было показано, что если на оси времени задана некоторая периодическая функция $\xi(t)$, то на интервале $[-T/2, T/2]$ эту можно разложить в ряд Фурье. Обобщение ряда Фурье для случая непериодических функций можно получить на основе исследования структуры этого ряда для периодической функции в случае безграничного увеличения ее периода (в пределе до бесконечности). Данная ситуация изображена на рис. 2.1а.

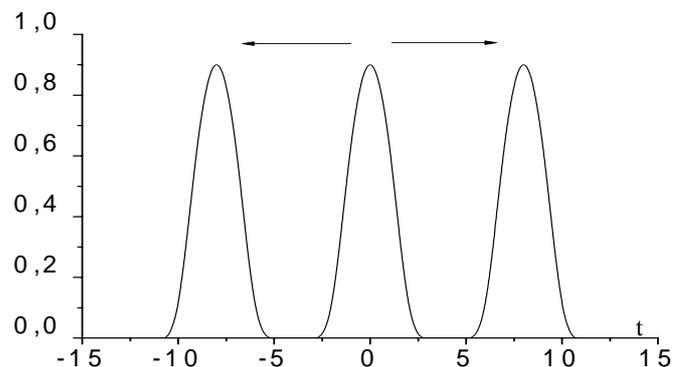


Рис. 2.1а. Процесс увеличения периода периодической функции

Удерживая один из элементов периодической функции $x(t)$ в начале координат и предполагая, что период T безгранично увеличивается, то в пределе при $T \rightarrow \infty$ можно получить представление одиночного (непериодического) импульса, изображенное на рис. 2.1б.

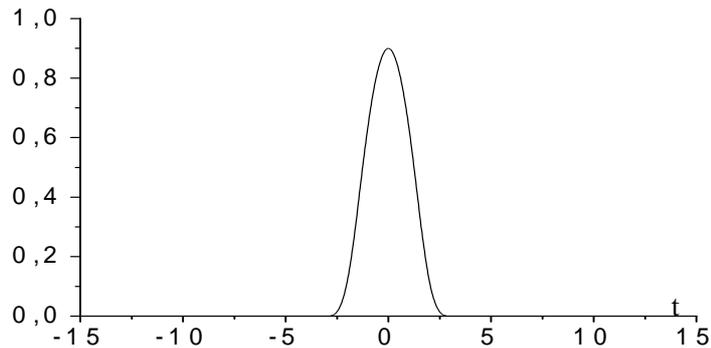


Рис. 2.1б. Пример непериодической функции

Рассмотрим данную ситуацию аналитически [3, 8]. Для этого прежде всего представим функцию $x(t)$ разложением

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\Omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\Omega t, \quad (2.1)$$

где $\Omega = 2\pi/T$, а коэффициенты a_k, b_k, a_0 определяются выражениями (1.19), (1.21) и (1.22), которые перепишем здесь для удобства:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\lambda t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\lambda t dt.$$

Рассмотрим, как будет трансформироваться разложение (2.1), если устремить период T к бесконечности. С этой целью перепишем выражение (2.1) в виде

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=\Omega}^{\infty} \Omega (a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t) =$$

$$= a_0 + \frac{T}{2\pi} \sum_{\omega=\Omega}^{\infty} \Omega (a_k \cos \omega t + b_k \sin \omega t), \quad (2.2)$$

Здесь введено обозначение $\omega = k\Omega$, а при суммировании учитывается, что величина Ω представляет собой разность между двумя последовательными значениями частоты $\omega_{k+1} = (k+1)\Omega$ и $\omega_k = k\Omega$:

$$\omega_{k+1} - \omega_k = (k+1)\Omega - k\Omega = \Delta\omega = \Omega.$$

Следовательно, величину Ω можно рассматривать как приращение $\Delta\omega$ частоты ω . Подставляя в (2.2) выражение для коэффициентов a_k, b_k, a_0 , найдем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{\omega=\lambda}^{\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) [\cos \omega\tau \cos \omega t + \sin \omega\tau \sin \omega t] d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{\omega=\lambda}^{\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь устремим период T к бесконечности. В этом случае величина $\Delta\omega$ превратится в $d\omega$, а сумма $\sum_{\omega=\Omega}^{\infty}$ в интеграл, взятый на интервале $(0, \infty)$. Будем полагать, что интеграл от функции $f(\tau)$, взятый на бесконечном интервале, сходится. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) d\tau = 0$$

и выражение (2.3) можно представить в виде

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) называется представлением функции $f(t)$ в форме интеграла Фурье [3, 9].

Для того, чтобы преобразовать выражение (2.4), раскроем функцию $\cos \omega(t - \tau)$ и воспользуемся известным соотношением

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \varphi),$$

в котором $\varphi = \text{arctg}(b/a)$.

Тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left[\cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t - \phi(\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из выражения (2.5) следует, что функцию $f(t)$ можно рассматривать как сумму бесконечного числа синусоидальных колебаний, обладающих амплитудами

$$A(\omega) = \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2 \right\}^{0,5},$$

и фазами

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin \omega \tau d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right].$$

Таким образом, функция $A(\omega)$ представляет собой непрерывный амплитудный спектр функции $f(t)$, а функция $\varphi(\omega)$ - фазовый спектр.

2.2. Комплексная форма интеграла Фурье

Применим метод предельного перехода $T \rightarrow \infty$ к комплексной форме ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp[jk\Omega t]; \quad \dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp[-jk\Omega t] dt,$$

где, как и ранее, $\Omega = 2\pi/T$.

Используя обозначения $n\Omega = \omega$ и $\Delta\omega = \Omega$, введенные в п. 2.1. перепишем комплексный ряд Фурье как

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{\Omega} \dot{C}_n \exp[jn\Omega t] = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \right] \exp(j\omega t) \Delta\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \right] \exp(j\omega t) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть длина интервала T бесконечно возрастает. Тогда в пределе $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, сумма превращается в интеграл и выражение (2.6) принимает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[j\omega(t-\tau)] d\tau. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) представляет собой комплексную форму интеграла Фурье.

Как вещественная, так и комплексная форма представления действительной функции $x(t)$ в виде интеграла Фурье включают в себя две операции, которые могут быть реализованы отдельно: первая операция описывается внутренним интегралом в (2.7)

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (2.8)$$

и обеспечивает разложения функции $x(t)$ на бесконечное число гармонических колебаний, характеризуемых распределением комплексной амплитуды $\dot{G}(\omega)$ по частоте.

Выражение (2.8) называется прямым преобразованием Фурье, а функция $\dot{G}(\omega)$, представляющая собой результат этого преобразования, по физическому смыслу соответствует распределению коэффициентов \dot{C}_k ком-

плексного ряда Фурье по частотам, но вместо дискретного индекса k , пробегающего целочисленные значения, имеет место непрерывно изменяющаяся переменная ω . Это и объясняет, что для построения функции $\alpha(x)$ необходимо сложение колебаний с бесконечным количеством частот.

В связи с изложенным вторая операция описывает синтез функции $x(t)$ с использованием функции $\dot{G}(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.9)$$

Эта операция называется обратным преобразованием Фурье. Пара соотношений (2.8), (2.9) называется парой преобразований Фурье.

Физический смысл функции $\dot{G}(\omega)$ подлежит отдельному рассмотрению. Эту функцию в отличие от набора спектральных коэффициентов \dot{C}_k уже нельзя понимать как распределение амплитуды и фазы колебаний с заданной частотой. Действительно, отдельное колебание в непрерывном спектре не существует и не обладает конечной амплитудой.

Для выяснения физического смысла функции $\dot{G}(\omega)$ обратимся к так называемым функциям распределения, которые хорошо известны в математике и широко используются, например, в механике и в теории вероятностей.

Воспользуемся вначале примером из механики и представим себе, что вдоль оси ω распределена некоторая масса с плотностью $\dot{G}(\omega)$. Очевидно, что каждой отдельной точке оси ω не может соответствовать конечная масса. Элементу $d\omega$ оси ω можно сопоставить некоторую бесконечно малую массу $\dot{G}(\omega)d\omega$. Конечную массу можно сопоставить только конечному интервалу оси ω . Таким образом, массу, представляющую собой функцию от ω , можно определить только для некоторого конечного ин-

тервала оси ω . Введем понятие массы интервала $(-\infty, \omega)$, как функцию от ω , т.е. положим

$$\int_{-\infty}^{\omega} \dot{G}(\eta) d\eta = F(\omega).$$

В математике функция $F(\omega)$ называется функцией распределения. В частности, в теории вероятностей [8] функция распределения $F(\omega)$ определяет вероятность того, что некоторая величина, распределенная по некоторому закону на оси $(-\infty, \infty)$, будет заключена на интервале $(-\infty, \omega)$.

Из выражения для функции распределения следует, что

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \dot{G}(\omega) \quad \text{или} \quad \dot{G}(\omega) d\omega = dF(\omega)$$

Элемент функции $\dot{G}(\omega)$, отнесенный к интервалу $d\omega$, называется элементом спектральной плотности (в теории вероятности такой элемент называется элементом вероятности).

Таким образом, функция распределения, понимаемая как масса (или вероятность), заключенная в определенном интервале, имеет наглядный смысл. Однако плотность (спектральная плотность, плотность массы, плотность вероятности), необходимо рассматривать как предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

В связи с изложенным функцию $\dot{G}(\omega)$, представляющую собой производную функции спектрального распределения по частоте, будем называть спектральной плотностью функции $x(t)$.

Вернемся теперь к записи функции $x(t)$ в виде интеграла Фурье (2.7) и разделим действительную и мнимую части:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega(t - \tau) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sin \omega(t - \tau) dt \right].$$

Поскольку функция $\sin \omega(t - \tau)$ есть нечетная функция, то мнимая часть полученного выражения равна нулю, что очевидно, поскольку $x(t)$ – вещественная функция. Так как $\cos \omega(t - \tau)$ есть четная функция, то можно удвоить амплитуды положительных частот и задать область интегрирования по частоте интервалом $[0, \infty]$. Таким образом

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau,$$

что соответствует выражению (2.4), полученному в подразделе 2.1.

2.3. Примеры спектральных разложений

2.3.1 Спектральное разложение прямоугольного импульса

Определим спектральное разложение для одного из простейших сигналов – прямоугольного импульса длительностью τ , имеющего единичную амплитуду (рис. 2.2).

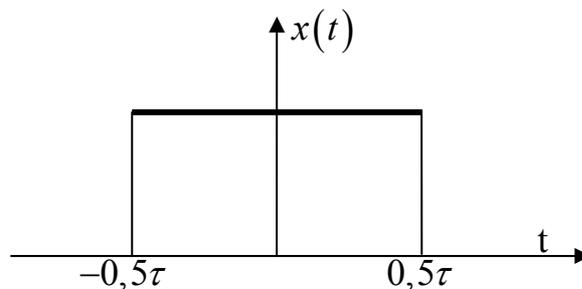


Рис. 2.2. Одиночный прямоугольный импульс

Выполняя прямое преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-j\omega t) dt = \\ &= -\frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \end{aligned} \quad (2.10a)$$

Сравнивая выражение (2.10а) с выражениями (1.34) и (1.35), нетрудно видеть, что, в отличие от дискретного спектра (1.34), последовательность прямоугольных импульсов, расстояние между спектральными линиями которой равно $1/T$, спектр одиночного импульса сплошной, а его форма представляет собой огибающую дискретного спектра (1.34) (см. рис 1.3). Спектр прямоугольного импульса изображен на рис. 2.3.

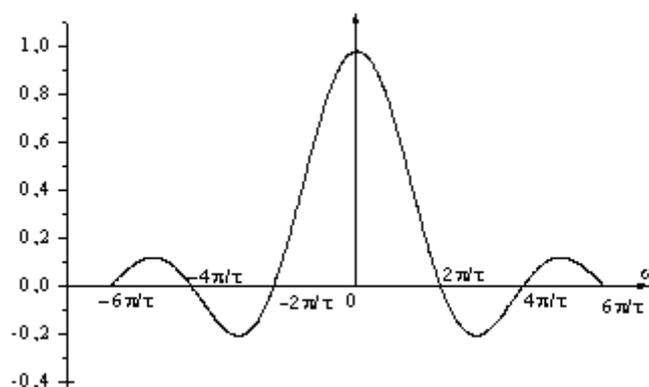


Рис. 2.3. Спектральное разложение прямоугольного импульса

Определим теперь полуширину главного лепестка спектральной плотности (2.10а). Нетрудно видеть, что нули функции $[\sin(\omega\tau/2)]/(\omega\tau/2)$ определяются значениями $\sin \omega\tau/2 = 0$, имеющими место при выполнении условия $\omega\tau/2 = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда положение первого нуля спектральной функции, определяющее полуширину главного лепестка, можно найти из условия

$$2\pi f \frac{\tau}{2} = \pi,$$

откуда следует, что значение частоты, соответствующее первому нулю, определяется величиной $f = 1/\tau$, обратно пропорциональной длительности импульса. Соотношение $f\tau = 1$ (или $\Delta f \Delta \tau = 1$) представляет собой уже упоминавшийся в главе 1 принцип неопределенности. В соответствии с

этим принципом протяженность сигнала по временной оси обратно пропорциональна протяженности спектра этого сигнала по оси частот.

Рассмотрим теперь функцию времени $x(t)$, которой соответствует спектральная плотность $X(\omega)$, равномерно распределенная на интервале $[-\omega_B, \omega_B]$, где ω_B - частота среза спектра. Вне указанного интервала спектральная функция $X(\omega) = 0$ (рис. 2.4).

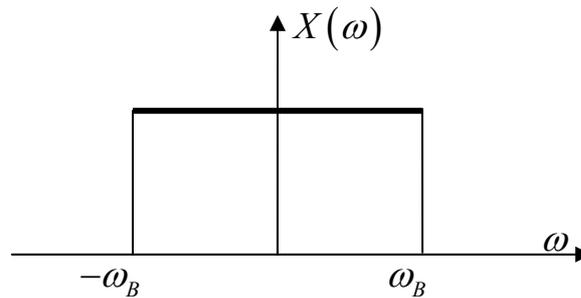


Рис. 2.4. Равномерная спектральная плотность

Временная зависимость $x(t)$, отвечающая заданной спектральной плотности $X(\omega)$, может быть найдена с использованием обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{j2\pi t} \exp(j\omega t) \Big|_{-\omega_B}^{\omega_B} = \frac{2 \sin(2\pi t \Delta f / 2)}{2\pi t},$$

где $0,5\Delta f$ есть половина ширины полосы частоты, ограниченной значениями $-\omega_B, \omega_B$. Умножив и разделив последнее выражение на величину Δf , запишем результирующую форму функции $x(t)$:

$$x(t) = \Delta f \frac{\sin(t2\pi\Delta f / 2)}{t2\pi\Delta f / 2}. \quad (2.10б)$$

Перепишем здесь для удобства выражение (2.10а)

$$X(\omega) = \tau \frac{\sin(2\pi f \tau / 2)}{2\pi f \tau / 2}$$

и сопоставим результаты (2.10а) и (2.10б). Сравнение этих выражений позволяет сформулировать принцип дуальности времени и частоты, заключающийся в следующем:

Если функция $X(\omega)$ является преобразованием Фурье функции $x(t)$, то функция $x(-\omega)$ есть преобразование Фурье функции $X(t)$.

Поскольку, в рассмотренных выше случаях, как функция времени, так и функция частоты являются четными и действительными функциями, то функция $x(-\omega) = x(\omega)$ есть преобразование Фурье функции $X(t)$. Это есть так называемый случай четной симметрии.

2.3.2. Спектральное разложение экспоненциального импульса

Зададим функцию $x(t) = \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$, как это показано на рис. 2.5. Здесь использовано обозначение $\alpha = 1/\tau$, где τ – длительность экспоненциального импульса на уровне $1/e \approx 0,37$ (e – основание натурального логарифма).

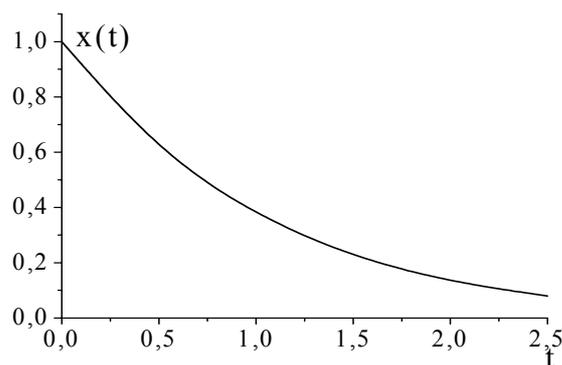


Рис.2.5. Экспоненциальный импульс

Преобразование Фурье функции $\exp(-\alpha t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + j\omega)t] dt = \\ &= -\frac{1}{\alpha + j\omega} \exp[-(\alpha + j\omega)t] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поскольку спектральная плотность (спектральная функция) $\dot{X}(\omega)$ является комплексной, то для ее представления необходимо определить отдельно ее модуль (амплитудный спектр) и фазу (фазовый спектр). Для графического описания спектральной плотности необходимо построить отдельно графики амплитудного и фазового спектра функции, или графики действительной и мнимой частей комплексной спектральной функции.

Определим все эти функции. Выделим действительную и мнимую части спектральной плотности $\dot{X}(\omega)$.

$$\dot{X}(\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \operatorname{Re} \dot{X}(\omega) - j \operatorname{Im} \dot{X}(\omega).$$

Фазовый спектр функции $\dot{X}(\omega)$ определим как

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{Im} \dot{X}(\omega)}{\operatorname{Re} \dot{X}(\omega)} \right] = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha},$$

а амплитудный спектр можно найти в виде

$$A(\omega) = \sqrt{\dot{X}(\omega) \dot{X}^*(\omega)} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \dot{X}(\omega) + \operatorname{Im}^2 \dot{X}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

Изобразим теперь эти четыре функции графически. На рис. 2.6а, б построены графики амплитудного и фазового спектров, а на рис. 2.7а, б графики действительной и мнимой частей спектральной плотности.

Из графика амплитудного спектра видно, что на частотах $\omega = \pm\alpha$ квадрат модуля спектральной функции равен половине значения квадрата модуля спектра на нулевой частоте: $|x(\omega)|^2 = 0,5|x(0)|^2$. Эта частота называ-

ется частотой половинной мощности. На частотах $\omega = \pm\alpha$ фазовый сдвиг составляет $\pm 45^\circ$.

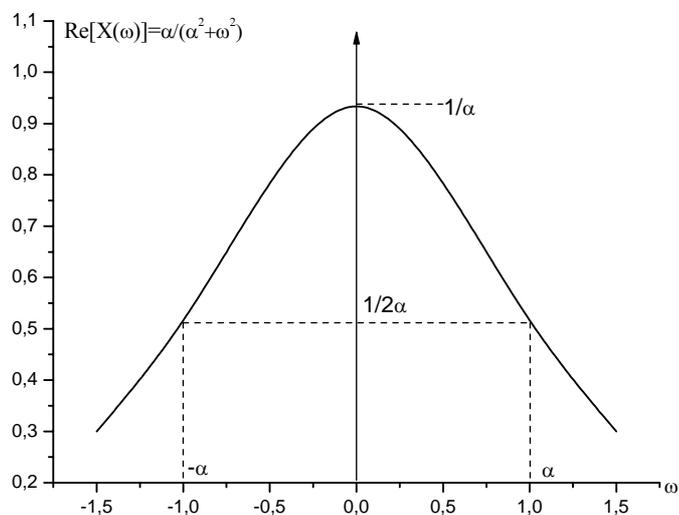


Рис. 2.6а. Действительная часть спектральной плотности

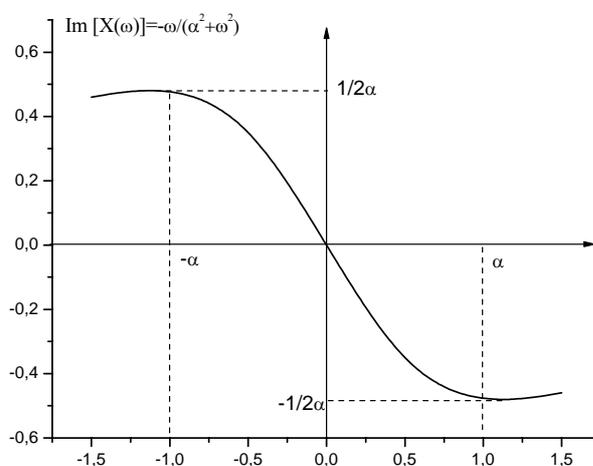


Рис. 2.6б. Мнимая часть спектральной плотности

Графики рис. 2.6, 2.7 иллюстрируют свойство симметрии, которое характерно для преобразований Фурье действительных функций времени $x(t)$. Данное свойство заключается в том, что функции $\text{Re } \dot{X}(\omega)$ и $|\dot{X}(\omega)|$ являются четными, а функции $\text{Im } \dot{X}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ - нечетными.

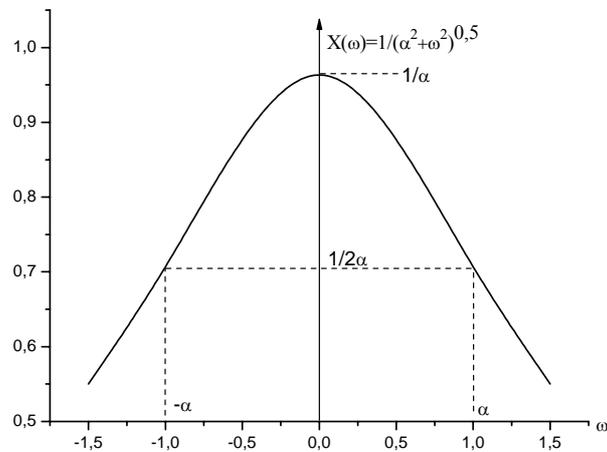


Рис. 2.7а. Модуль спектральной плотности

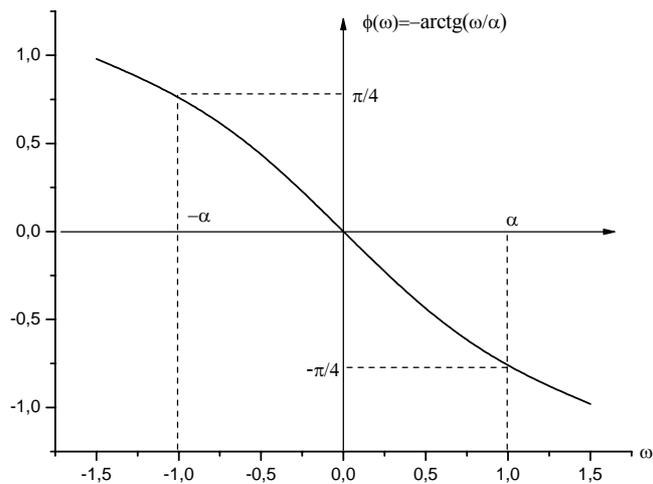


Рис. 2.7б. Фаза спектральной плотности

Для действительных функций $x(t)$ является справедливым принцип сопряженной симметрии, который формулируется следующим образом.

Если $\text{Im}[x(t)] = 0$ (т.е. если $x(t)$ действительная функция), то тогда

$$\dot{X}(\omega) = \dot{X}^*(-\omega).$$

Это означает, что спектральная функция в области отрицательных значений ω комплексно сопряжена спектральной функции в области положительных значений частоты. Этот факт уже отмечался в гл. 1 при анализе представления действительных периодических функций времени комплексным рядом Фурье.

Рассмотрим теперь обратное преобразование Фурье спектральной функции

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

для того, чтобы убедиться во взаимной однозначности прямого и обратного преобразований Фурье.

Выполним обратное преобразование Фурье над спектральной функцией $\dot{X}(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(j\omega t)}{j\omega + \alpha} d\omega \quad (2.12)$$

и введем замену переменных $j\omega = s$. Тогда $d\omega = ds/j$, а выражение (2.12) можно переписать в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\exp(st)}{s + \alpha} ds, \quad (2.12a)$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру $-j\omega \rightarrow j\omega$. Выражение (2.12) представляет собой интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Для случая $f(z) = \exp(st)$, $z_0 = -\alpha$ и искомая функция определяется в виде

$$x(t) = \exp(-\alpha t), \quad (2.12)$$

что и требовалось доказать. Рассмотренный пример иллюстрирует следующее общее положение: если одно из двух преобразований Фурье (пря-

мое или обратное) выполняется достаточно просто, то другое преобразование не является столь простым.

2.3.3 Спектральное разложение функции Гаусса (гауссов импульс)

Найдем преобразование Фурье функции Гаусса $x(t) = \exp(-t^2/2\tau^2)$, изображенной на рис. 2.8. Здесь величина τ есть половина протяженности этой функции на уровне $1/\sqrt{e} \approx 0.606$.

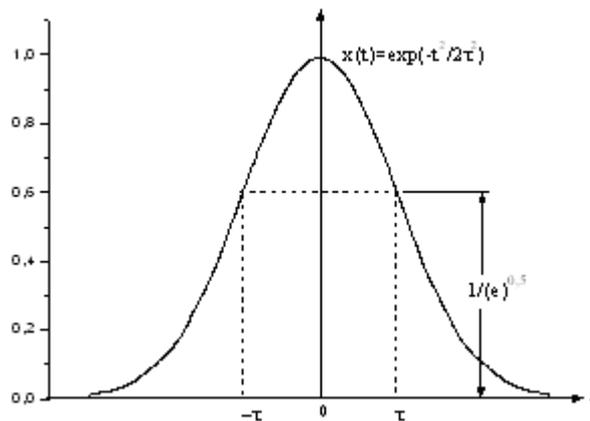


Рис 2.8. Функция Гаусса

Полагая амплитуду импульса единичной, запишем прямое преобразование Фурье функции $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t^2}{2\tau^2} + j\omega t\right)\right] dt. \quad (2.13a)$$

Для вычисления интеграла дополним показатель степени в подынтегральном выражении до полного квадрата $(t^2/2\tau^2) + j\omega t + c^2 - c^2$, определив величину c

из условия $j\omega t = 2\frac{t}{\sqrt{2}\tau}c$. Тогда $c = j\omega t / \sqrt{2}$,

$c^2 = -(\omega^2\tau^2/2)$ и показатель степени принимает вид

$$\frac{t^2}{2\tau^2} + j\omega t - \frac{\omega^2\tau^2}{2} + \frac{\omega^2\tau^2}{2} = \left(\frac{t}{\sqrt{2\tau}} + \frac{i\omega\tau}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\omega^2\tau^2}{2}.$$

Подставляя полученный показатель степени в выражение (2.13а), запишем

$$X(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t}{\sqrt{2\tau}} + i\frac{\omega\tau}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dt. \quad (2.13б)$$

Используя замену переменных $x = \frac{t}{\sqrt{2\tau}} + \frac{i\omega\tau}{\sqrt{2}}$, $dt = \sqrt{2\tau}dx$, преобразуем интеграл (2.13б) к виду

$$X(\omega) = \sqrt{2\tau} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx,$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ есть известный интеграл Эйлера – Пуассона [10].

Тогда спектральную плотность гауссова импульса можно записать как

$$X(\omega) = \sqrt{2\pi\tau} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right). \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что спектральная плотность (2.14) функции Гаусса $x(t) = \exp(-t^2/2\tau^2)$ также имеет гауссову форму.

Поскольку функция $x(t)$ и $X(\omega)$ имеют одинаковый вид, обратное преобразование Фурье можно вычислить, используя метод, аналогичный методу прямого преобразования Фурье.

Из выражения (2.20) следует также, что с уменьшением полуширины импульса τ ширина спектра импульса увеличивается, а с увеличением – уменьшается. Это правило справедливо и для больших значений τ (даже при $\tau \rightarrow \infty$), поскольку функция типа $\exp(-\alpha\tau^2)$ убывает гораздо быстрее, нежели возрастает функция в $b\tau$ (или даже любая степень функции $b\tau$).

2.4. Энергетические характеристики сигнала и эффективная ширина его спектра

При рассмотрении теорем о средних значениях периодических функций (см. гл. 1) была проанализирована теорема о средней мощности периодической функции, а также теорема Парсеваля, доказывающая, что мощность периодической функции, найденная интегрированием ее квадрата за период, равна сумме квадратов модулей коэффициентов разложения этой функции в комплексный ряд Фурье.

Аналогично, мощность непериодического сигнала можно определить с использованием как временного, так и спектрального представлений:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt \right]^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \dot{X}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{X}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.15a)$$

Выражение (2.15) свидетельствует о конечности мощности сигнала (т.е. об его интегрируемости в квадрате), а соотношение (2.15a), впервые полученное Рэлеем (Дж.Стрэтт), эквивалентно теореме Парсеваля, рассмотренной в гл. 1. Квадрат модуля спектральной плотности есть энергетический спектр непериодической функции

$$|\dot{X}(\omega)|^2 = \dot{X}(\omega) \dot{X}^*(\omega).$$

Необходимо отметить, что реальные непериодические сигналы, обладающие конечной мощностью, обычно имеют ограниченную протяженность по оси времени (ограниченную длительность). В то же время преобразование Фурье функции времени, заданной на конечном интервале, имеет бесконечную протяженность по оси частот, т.е. – бесконечный спектр. В

связи с этим, при решении практических задач необходимо оценить полосу частот исследуемого сигнала, в которой сосредоточена основная часть энергии сигнала. Под основной частью энергии понимают обычно величину не менее чем 0.9 полной мощности сигнала, а полосу частот, в которой сосредоточено 90% мощности сигнала, называют эффективной шириной спектра сигнала.

Определим эффективную ширину спектра для трех типов сигнала, рассмотренных в п. 2.3, а именно: прямоугольный импульс, экспоненциальный импульс и функция Гаусса [11, 12].

2.4.1. Эффективная ширина спектра прямоугольного импульса

Напомним прежде всего, что при анализе спектральной плотности прямоугольного импульса, определенной выражением (2.10а)

$$x(\omega) = \tau \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}$$

было рассмотрено соотношение между длительностью импульса τ и полушириной главного лепестка его спектральной плотности. При этом полушириной главного лепестка был назван интервал угловых частот $0 < \omega \leq 2\pi/\tau$. Представляется чрезвычайно интересным определить часть энергии прямоугольного импульса, содержащейся в данной полосе частот, поскольку именно для этой полосы частот был установлен принцип неопределенности, характеризуемый выражением $\Delta f \Delta \tau = 1$. Учитывая, что амплитуда импульса была принята единичной, нетрудно установить, что полная энергия P прямоугольного импульса длительностью τ определяется площадью импульса, т.к.

$$P = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \tau.$$

Поскольку, в соответствии с теоремой Парсеваля, полная энергия определяется как

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}(\omega)|^2 d\omega,$$

а для симметричного энергетического спектра это выражение может быть записано в виде

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{X}(\omega)|^2 d\omega,$$

то энергию, заключенную в полосе частот $\Delta\omega [0, \omega_B]$, где ω_B – верхняя частота, можно вычислить, используя соотношение

$$P_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} |\dot{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда, используя спектральную функцию (2.10а), запишем

$$P_{\Delta\omega} = \frac{\tau^2}{\pi} \int_0^{\omega_B} \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} d\omega. \quad (2.16a)$$

Используя замену переменных $\omega\tau/2 = x$ ($d\omega = 2x/\tau$), перепишем выражение (2.16а) в виде

$$P_{\Delta\omega} = \tau \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_B\tau/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \tau\eta(\omega_B\tau/2), \quad (2.16b)$$

где τ – полная энергия импульса, а функция

$$\eta(\omega_B\tau/2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_B\tau/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (2.17)$$

определяет часть энергии сигнала заключенную в полосе частот $\Delta\omega [0, \omega_B]$.

Интеграл, входящий в выражение (2.17), после интегрирования по частям $\left[u = \sin^2 x / x^2, du = (2x^2 \sin x \cos x - 2x \sin^2 x) / x^4, dv = dx, v = x \right]$ приводится к виду

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{\omega_B \tau / 2} - \int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx + 2 \int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \right],$$

откуда

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{\sin 2x}{x} dx - \frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{\omega_B \tau / 2} \right]. \quad (2.18)$$

Интеграл в правой части выражения (2.18) после замены переменных $2x = t$ ($x = t/2, dx = dt/2$) может быть записан как

$$\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(z), \quad (2.19)$$

где $z = \omega_B \tau$. Функция (2.19) представляет собой одну из форм интегрального синуса и подробно табулирована (см. например таблицы А. Анго [3]). Используя (2.19), перепишем выражение (2.18), определяющее часть энергии, заключенную в полосе $[0, \omega_B]$, в окончательном виде

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_B \tau / 2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\omega_B \tau) - \frac{\sin^2(\omega_B \tau / 2)}{\omega_B \tau / 2} \right]. \quad (2.20)$$

Численный расчет, выполненный с интервалом $0,1\pi$ для переменной $\omega_B \tau / 2$, дает результат, представленный на рис 2.9. Из этого рисунка видно, что в точке $\omega_B \tau / 2 = \pi$ ($\Delta f \Delta \tau = 1$), т.е. в полосе частот от 0 до $f_B = 1/\tau$ сосредоточено 90% всей энергии импульса. В связи с этим формула $\Delta f = 1/\tau$ дает простейшее выражение для выбора полосы пропускания фильтра при достаточно эффективном использовании энергии импульса. Однако в случае, если требуется получить на выходе фильтра форму им-

пульса, близкую к прямоугольной, полоса пропускания фильтра должна быть значительно шире.

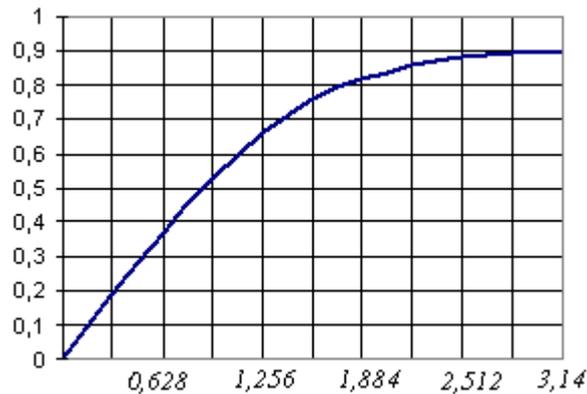


Рис. 2.9. К определению эффективной ширины спектра

2.4.2. Эффективная ширина спектра экспоненциального импульса

Спектральное разложение экспоненциального импульса вида $\alpha = \exp(-\alpha t)$, где $\alpha = 1/\tau$, $t \geq 0$ было найдено в п. 2.3.2 в виде

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Соответственно, энергетический спектр экспоненциального импульса определяется как

$$|\dot{X}(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (2.21)$$

Определим теперь эффективную ширину спектра (2.21), т.е. полосу частот $[\omega, \omega_B]$, в которой сосредоточено 90% энергии импульса. Для определения эффективной ширины спектра воспользуемся соотношением

$$\frac{0.9}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (2.22)$$

Тогда

$$\frac{0,9}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_0^{\omega_B}$$

Подставляя пределы интегрирования, получим

$$\operatorname{arctg} \frac{\omega_B}{\alpha} = 0,45\pi,$$

откуда верхняя частота эффективной ширины спектра определяется, как

$$\omega_B = \operatorname{tg}(0,45\pi)\alpha = 6,28/\tau.$$

Учитывая, что $\omega_B = 2\pi f_B$, нетрудно увидеть, что верхняя частота эффективной ширины спектра экспоненциального есть

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{1}{\tau}$$

Таким образом, 90% энергии экспоненциального импульса сосредоточено в полосе частот от 0 до $f_B = 1/\tau$. Данный результат совпадает с определением эффективной полосы частот прямоугольного импульса (см. подраздел 2.4.1).

2.4.3. Эффективная ширина спектра гауссова импульса

Спектральная плотность гауссова импульса $x(t) = \exp(-t^2/2\tau^2)$ определена выражением (2.14)

$$X(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right).$$

Полная энергия гауссова импульса может быть найдена в виде

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/\tau^2) dt \quad (2.24)$$

Используя замену переменных $t/\tau = x$, $dt = dx\tau$, преобразующую выражение (2.24) в интеграл Эйлера – Пуассона, определим полную энергию импульса как

$$P = \tau\sqrt{\pi}. \quad (2.25)$$

Найдем теперь эффективную ширину спектра гауссова импульса, в пределах которой сосредоточено 90% энергии импульса. Для этого проинтегрируем энергетический спектр гауссова импульса

$$|\dot{X}(\omega)|^2 = 2\pi\tau^2 \exp(-\omega^2\tau^2)$$

от нуля до некоторой частоты ω_B , и найдем эту частоту, исходя из условия 90 – процентного содержания энергии импульса в полосе $[0, \omega_B]$

Определим энергию гауссова импульса в полосе $[0, \omega_B]$ как

$$P_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_B} 2\pi\tau^2 \exp(-\omega^2\tau^2) d\omega = 2\tau^2 \int_0^{\omega_B} \exp(-\omega^2\tau^2) d\omega. \quad (2.26)$$

Преобразуем соотношение (2.26), используя интеграл вероятностей [9]

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx, \quad (2.27)$$

который табулирован во многих справочниках, например [13].

Для преобразования выражения (2.26) используем замену переменных $\omega\tau = r$, $d\omega = dr/d\tau$ и перепишем это выражение как

$$\begin{aligned} P_{\Delta\omega} &= 2\tau \int_0^{\omega_B\tau} \exp(-x^2) dr = \tau\sqrt{\pi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z=\omega_B\tau} \exp(-x^2) dr = \\ &= \tau\sqrt{\pi}\Phi(z) = P\Phi(z). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из выражения (2.28) следует, что отношение энергии $P_{\Delta\omega}$, заключенной в полосе частот $[0, \omega_B]$, к полной энергии гауссова импульса P равно

$$P_{\Delta\omega}/P = \Phi(z = \omega_B\tau). \quad (2.29)$$

Для 90 – процентного содержания энергии импульса в полосе $[0, \omega_B]$ левая часть выражения (2.29) равна 0.9, что и позволяет, используя таблицы интеграла вероятностей, определить величину аргумента $Z = \omega_B\tau \approx 1,16$.

Учитывая, что τ представляет собой половину длительности гауссова импульса на уровне, $1/\sqrt{e} \approx 0,606$ т.е. $\tau = 0,5\Delta t$, видим, что $\pi f_B \Delta t = 1,16$ откуда верхняя частота эффективной полосы спектра может быть получена в виде $f_g \approx 037/\Delta t$.

2.5. Основные свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах)

Рассмотрим несколько общих теорем о спектрах, основанных на свойствах преобразования Фурье [1, 3, 7, 8, 11].

2.5.1. Теорема сложения (теорема линейности)

Отметим прежде всего, что преобразование Фурье линейно. Отсюда следует, что к нему применим принцип суперпозиции и это обстоятельство можно сформулировать следующим образом:

Преобразование Фурье взвешенной суммы (разности) сигналов равно взвешенной сумме (разности) спектров этих сигналов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N a_i f_i(t) \right] \exp(-j\omega t) dt = \sum_{i=1}^N a_i S_i(\omega). \quad (2.30)$$

Здесь $f_i(t)$ и $S_i(\omega)$ есть функции времени и отвечающие им спектры, а a_i есть некоторые весовые коэффициенты.

Сложение комплексных спектральных плотностей производится по правилам сложения комплексных чисел

$$\left| \sum_{i=1}^N a_i \dot{S}_i(\omega) \right| = \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Re} \dot{S}_i(\omega) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Im} \dot{S}_i(\omega) \right)^2 \right]^{0,5}.$$

Спектр амплитуд и спектр фаз суммы спектров определяется как

$$\sum_{i=1}^N a_i \dot{S}_i(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Re} \dot{S}_i(\omega) + j \sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Im} \dot{S}_i(\omega),$$

$$\arg \sum_{i=1}^N a_i \dot{S}_i(\omega) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Im} \dot{S}_i(\omega)}{\sum_{i=1}^N a_i \operatorname{Re} \dot{S}_i(\omega)} \right].$$

2.5.2. Теорема смещения (теорема задержки)

Рассмотрим влияние временного смещения (задержки) сигнала на его спектр. Анализ проведем с использованием конкретного примера.

Пусть имеют место два сигнала в виде прямоугольных импульсов длительностью τ , обладающих единичной амплитудой. Однако их расположение на оси времени различаются: один из сигналов расположен симметрично относительно начала координат, а второй смещен относительно первого на величину $\tau/2$ (см. рис 2.10, а, б).

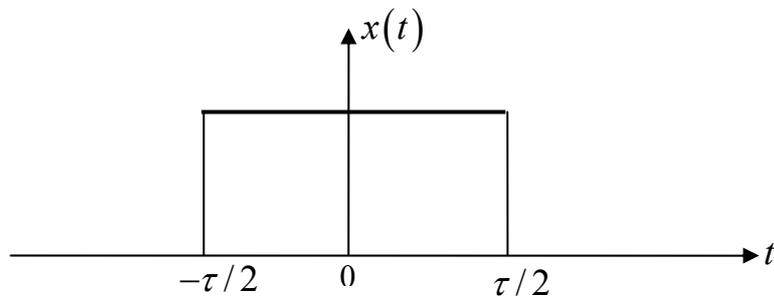


Рис. 2.10а. Прямоугольный импульс

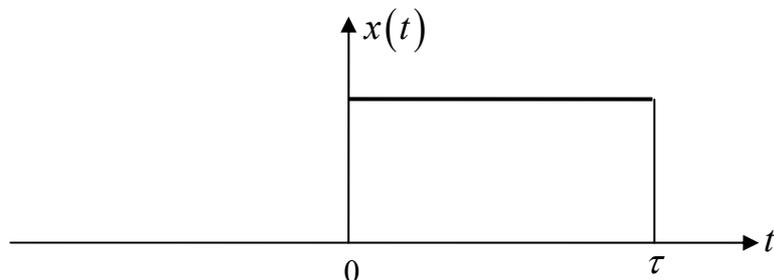


Рис. 2.10б. Смещенный прямоугольный импульс

Спектр несмещенного сигнала определяется выражением (2.10а)

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.$$

Модуль $|\dot{X}(\omega)|$ и фаза $\varphi(\omega)$ этого спектра изображены на рис 2.11, а, б.

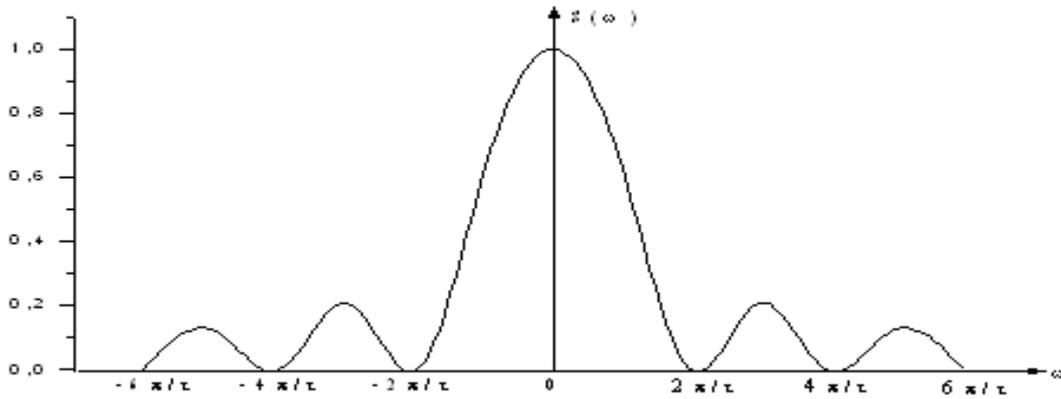


Рис. 2.11а

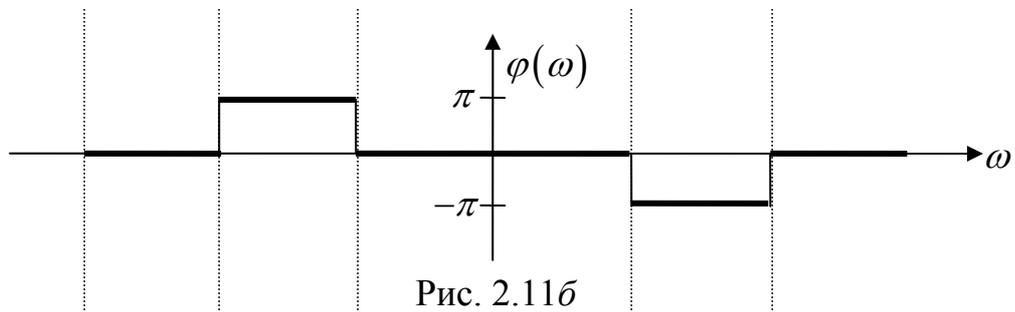


Рис. 2.11б

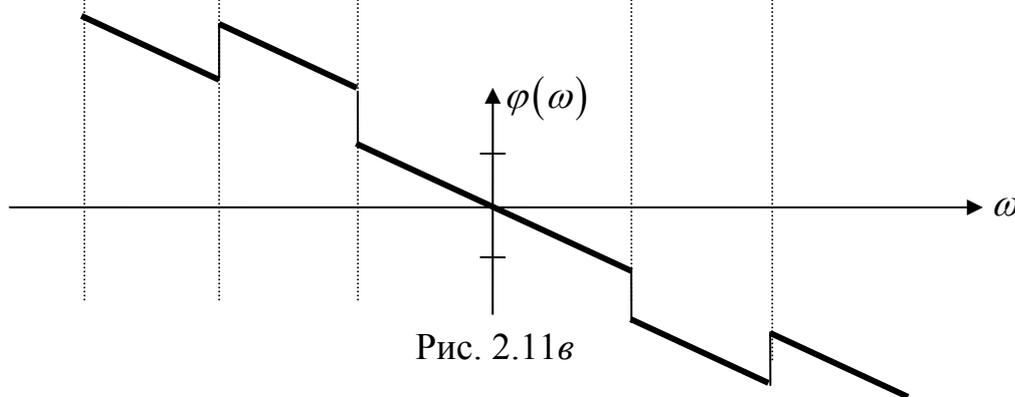


Рис. 2.11в

Рис. 2.11. Амплитудный и фазовый спектры смещенной функции

Рассмотрим теперь выражение для комплексного спектра сигнала, отличающегося от первоначального сигнала произвольным смещением (запаздыванием) на время Δt

$$\dot{X}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Delta t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.31)$$

Используя замену переменных $t - \Delta t = t_1$, $t = t_1 + \Delta t$, $dt = dt_1$, перепишем (2.31) в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \exp[-j\omega(t_1 + \Delta t)] dt_1 = \\ &= \exp(-j\omega\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) \exp(-j\omega t_1) dt = \dot{X}(\omega) \exp(-j\omega\Delta t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\dot{X}(\omega)$ есть спектр несмещенной функции. Таким образом, теорема о спектре смещенной функции может быть сформулирована следующим образом:

Если функция $x(t)$, обладающая спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$, смещена на время Δt , то спектр смещенной функции определяется произведением спектра несмещенной функции $\dot{X}(\omega)$ и фазового множителя $\exp(-j\omega\Delta t)$:

$$\dot{X}_1(\omega) = \dot{X}(\omega) \exp(-j\omega\Delta t). \quad (2.33)$$

Для конкретного примера смещенного прямоугольного импульса (см. рис. 2.10, б), получим:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(\omega) &= \int_0^{\tau} \exp(-j\omega t) dt = -\frac{1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_0^{\tau} = \\ &= -\frac{1}{j\omega} [\exp(-j\omega\tau) - 1] = \frac{1}{j\omega} [1 - \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau]. \end{aligned}$$

Используя выражения $\sin^2 \alpha/2 = 0,5(1 - \cos \alpha)$, $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$ преобразуем последнее соотношение к виду

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(\omega) &= \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{j\omega} [\sin(\omega\tau/2) + j\cos(\omega\tau/2)] = \\ &= \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{j\omega} \exp(-j\omega\tau/2) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \exp(-j\omega\tau/2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Сравнивая выражения (2.10а) для спектра несмещенного импульса и (2.33) для спектра смещенного импульса, нетрудно видеть, что спектр смещенного импульса определен в полном соответствии с теоремой смещения. При этом модуль спектра (спектр амплитуд) остается неизменным, а фазовой спектр получает приращение фазы $\exp(-j\omega\Delta t)$, линейно зависящее от частоты (см. рис. 2.11, в).

Теорема смещения позволяет обосновать функционирование ряда чрезвычайно важных для радиоэлектроники функциональных элементов и, прежде всего, линий задержки, реализующих задержку сигнала на заданный интервал времени. Представим себе, что некоторое функциональное устройство обладает достаточно широкой полосой пропускания. При этом модуль комплексной частотной характеристики (т.е. амплитудно-частотная характеристика) является равномерным по всей полосе пропускания, а фазочастотная характеристика линейно зависит от частоты. Тогда спектр некоторого сигнала, поданного на вход устройства (например – прямоугольного импульса), на выходе приобретает линейно изменяющийся с частотой спектр фаз, что и будет соответствовать сигналу, задержанному на время Δt (см. выражение (2.34)). При этом величина задержки будет определяться углом наклона фазовой характеристики устройства. Основой для создания таких устройств являются среды с дисперсией, т.е. среды, скорость распространения радиосигналов в которых зависит от частоты. Простейшим примером такой искусственной среды является коаксиальный кабель, который и был использован в радиолокации для создания первых образцов линии задержки.

2.5.3. Теорема о переносе спектра

Использование принципа дуальности времени и частоты, рассмотренного выше, позволяет провести рассуждение о переносе спектра, аналогичные теореме задержки. При этом вопрос ставится следующим образом: какой функции времени соответствует спектр, смещенный по оси частот на величину ω_0 ?

Поскольку

$$\dot{X}(\omega + \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt, \quad (2.35)$$

то, следовательно, комплексный спектр искомого вида принадлежит функции

$$X_1(t) = \exp(-j\omega_0 t) x(t). \quad (2.36)$$

Если дополнительно рассмотреть соотношение вида

$$\dot{X}(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt, \quad (2.37)$$

свидетельствующее, что спектр в виде $\dot{X}(\omega - \omega_0)$ принадлежит функции

$$X_2(t) = \exp(j\omega_0 t) x(t), \quad (2.38)$$

а затем сложить выражения (2.36) и (2.38), то можно записать, что

$$X_1(t) + X_2(t) = 2X(t) \cos \omega_0 t. \quad (2.39a)$$

Определив прямое преобразование Фурье левой и правой частей выражения (2.39), получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [X(t) \cos \omega_0 t] \exp(-j\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(t) + X_2(t)] \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{X}(\omega + \omega_0) + \dot{X}(\omega - \omega_0)]. \end{aligned} \quad (2.39b)$$

Таким образом, перемножение сигнала $X(t)$, обладающего спектром $\dot{X}(\omega)$, и гармонической функции $\cos \omega_0 t$ приводит к расщеплению спектральной плотности $\dot{X}(\omega)$ на две составляющие, симметричные относительно начала координат оси частот ($\omega = 0$). Данный результат будет использован в дальнейшем при анализе спектра модулированных сигналов.

2.5.4. Теорема о преобразовании Фурье свертки

Запишем интегральное выражение

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tau) X_2(t - \tau) d\tau, \quad (2.40)$$

которое называется сверткой функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$. При вычислении свертки для каждого значения переменной τ функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ сдвинуты друг относительно друга на величину τ .

Вычислим спектр функции $X(t)$

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tau) X_2(t - \tau) d\tau \right] dt.$$

Изменив порядок интегрирования, перепишем данное выражение в виде

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_2(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt \right] d\tau. \quad (2.41)$$

Используя теорему задержки, вычислим внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_2(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt = \dot{X}_2(\omega) \exp(-j\omega \tau)$$

и подставим результат в (2.41):

$$\dot{X}(\omega) = \dot{X}_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = \dot{X}_1(\omega) \dot{X}_2(\omega). \quad (2.42)$$

Таким образом, преобразование Фурье свертки двух функций времени представляет собой произведение преобразований Фурье этих функций.

2.5.5. Преобразование Фурье произведения двух функций времени

Рассмотрим функцию времени

$$X(t) = X_1(t)X_2(t),$$

представляющую собой произведение функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$, считая, что этим функциям соответствуют их преобразования Фурье $\dot{X}_1(\omega)$ и $\dot{X}_2(\omega)$.

Запишем преобразование Фурье функции $X(t)$:

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t)X_2(t)\exp(-j\omega t)dt \quad (2.43)$$

и подставим в него выражение для функции $X_1(t)$ в виде обратного преобразования Фурье:

$$X_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_1(\xi)\exp(j\xi t)d\xi.$$

Тогда выражение (2.43) примет вид

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_1(\xi)\exp(j\xi t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_2(t)\exp(-j\omega t)dt \right] d\xi.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_1(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_2(t)\exp[-j(\omega - \xi)t]dt \right] d\xi,$$

откуда, используя теорему задержки для вычисления внутреннего интеграла, найдем

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_1(\xi)\dot{X}_2(\omega - \xi)d\xi. \quad (2.44)$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух функций времени определяется сверткой спектральных плотностей этих функций.

2.6. Преобразование Фурье производной и неопределенного интеграла

Предположим, что имеется некоторый сигнал $x(t)$, обладающий спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$. Рассмотрим второй сигнал $x_1(t)$, который представляет собой производную сигнала $x(t)$ и найдем его преобразование Фурье [1]. Поскольку, по определению, производная некоторой функции есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента

$$x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \delta t)}{\delta t},$$

то, учитывая линейность операций дифференцирования и интегрирования, запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp(-j\omega t) dt = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t) - x(t - \delta t)}{\delta t} \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.45)$$

Используя теорему сдвига, преобразуем выражение (2.45) к виду

$$\dot{X}_1(\omega) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega \delta t)}{\delta t} \dot{X}(\omega). \quad (2.46)$$

Поскольку в случае $\delta t \rightarrow 0$ имеет место неопределенность типа 0/0 то, раскрывая её с использованием правила Лопиталья, получим

$$\dot{X}_1(\omega) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} [j\omega \exp(-j\omega t)] \dot{X}(\omega) = j\omega \dot{X}(\omega).$$

Последнее выражение может быть обобщено и для случая производной n – го порядка. Нетрудно показать, что если

$$x_n = \frac{d^n x(t)}{dt^n}, \quad \text{то} \quad \dot{X}_n(\omega) = (j\omega)^n \dot{X}(\omega),$$

где $\dot{X}(\omega)$ есть спектральная плотность функции $x(t)$. Таким образом, модуль спектральной плотности производной некоторого сигнала нарастает с частотой значительно быстрее, нежели модуль спектра исходной функции, поскольку дифференцирование сигнала эквивалентно алгебраической операции умножения спектральной плотности исходной функции на множитель $j\omega$. Таким образом, величина $j\omega$ представляет собой оператор дифференцирования в частотной области. Физически возрастание модуля спектральной плотности производной некоторого сигнала с частотой обусловлено возрастанием скорости изменения сигнала при его дифференцировании.

Отметим, что рассмотренная функция $x(t)$ представляет собой первообразную (неопределенный интеграл) по отношению к функции $x_1(t)$, поскольку $x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Тогда из выражения (2.46в) формально следует, что спектр первообразной может быть определен в виде

$$\dot{X}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{X}_1(\omega), \quad (2.47)$$

где множитель $1/j\omega$ имеет смысл оператора интегрирования в частотной области.

2.7. Текущий спектр

Как было указано выше, спектральная плотность некоторой функции времени $x(t)$ определяется как

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Это выражение определяет спектральную плотность как функцию частоты, поскольку зависимость от времени исчезает и спектр $\dot{X}(\omega)$ отображает

процесс $x(t)$ в целом. Данное определение является справедливым при наличии возможности интегрирования во времени в бесконечных пределах и, соответственно, при сходимости этого интеграла. В принципе это возможно, если функция $x(t)$ известна на всем бесконечном интервале и интегрируема на нем.

Однако, если функция $x(t)$ представляет собой реальный физический процесс, а сведения об этом процессе могут быть получены на некотором реальном интервале наблюдения, который начинается в момент времени $t = 0$ и возрастает в соответствии с реальным текущим временем τ , то выражение для спектральной плотности принимает вид

$$\dot{X}_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\tau} x(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.48)$$

Функция $\dot{X}_\tau(\omega)$, представляющая собой функцию как частоты так и протяженности интервала наблюдения, называется текущим спектром.

Напомним теперь, что изложение теории спектра радиосигналов было начато с определения спектра периодических функций, удовлетворяющих условию $x(t) = x(t + nT)$. На протяжении достаточно длительного интервала времени (т.е при числе периодов $n \rightarrow \infty$) эти функции подчиняются теореме о среднем значении периодической функции. Однако если при наблюдении процесса используется короткий интервал времени, меньший одного периода, то процесс не будет иметь периодического характера. Периодичность процесса проявится не сразу и его характерные черты сформируются в течение некоторого интервала времени. Развитие и формирование процесса с увеличением длительности интервала его существования будет отображаться в трансформировании формы его текущего спектра, зависящего как от частоты, так и от продолжительности интервала времени, на котором наблюдается этот процесс [7].

Рассмотрим рис. 2.12, на котором изображен процесс развития синусоидального сигнала. Величина интервала наблюдения изменяется дискретно с периодичностью $\tau = nT/2$, где T есть период синусоидального сигнала.

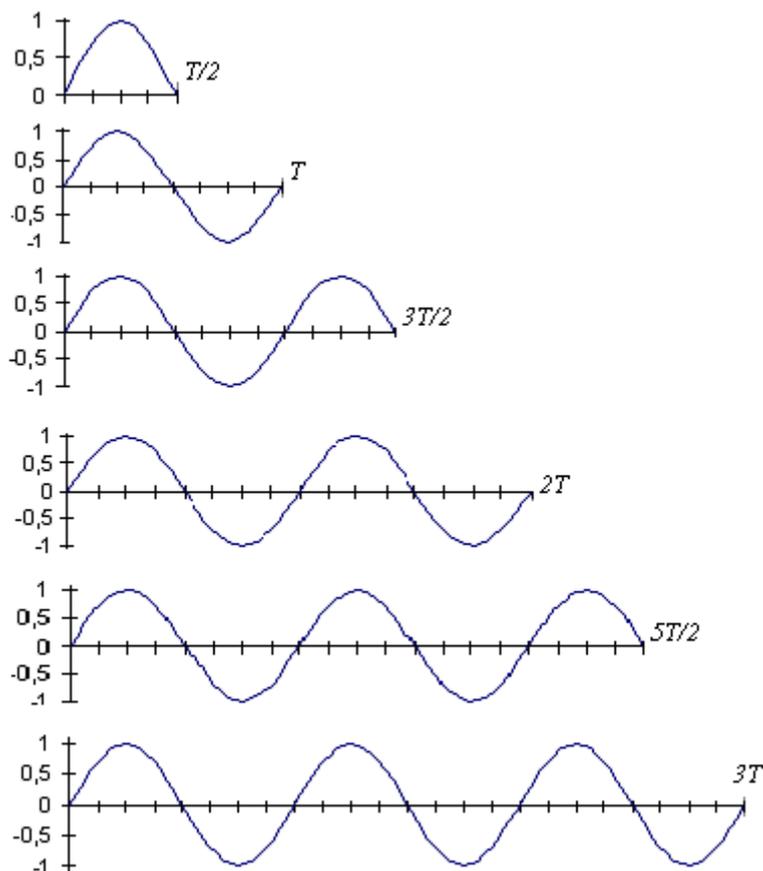


Рис. 2.12. Процесс развития синусоидального сигнала во времени

Отметим прежде всего, что спектр короткого импульса длительностью $T/2$ будет практически равномерным. Однако, поскольку с течением времени будет происходить формирование синусоидального периодического сигнала с увеличением числа его периодов, то спектральная плотность этого процесса будет трансформироваться. При этом должны формироваться максимумы спектральной плотности как на основной частоте, так и на её гармониках. Эти максимумы будут становиться более острыми и будут сжиматься вдоль оси частоты, а в пределе при $t \rightarrow \infty$ текущий

спектр синусоидального сигнала должен будет превратиться в одну спектральную линию на частоте сигнала Ω .

С целью подтверждения изложенных физических соображений проведем анализ текущего спектра процесса $\sin \Omega t$ как функции длительности интервала наблюдения. Подставляя эту функцию в выражение (2.48), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_\tau(\omega) &= \int_0^\tau \sin \Omega t \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^\tau \exp[-j(\omega - \Omega)t] dt - \int_0^\tau \exp[-j(\omega + \Omega)t] dt \right\} = \\
 &= \frac{1}{2j} \left\{ -\frac{1}{j(\omega - \Omega)} \exp[-j(\omega - \Omega)t] \Big|_0^\tau + \frac{1}{j(\omega + \Omega)} \exp[-j(\omega + \Omega)t] \Big|_0^\tau \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega - \Omega} \exp[-j(\omega - \Omega)\tau] - \frac{1}{\omega - \Omega} - \frac{1}{\omega + \Omega} \exp[-j(\omega + \Omega)\tau] + \frac{1}{\omega + \Omega} \right\} = \\
 &= \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left\{ 1 - \exp(-j\omega\tau) \left[\frac{\omega}{2\Omega} (e^{j\Omega\tau} - e^{-j\Omega\tau}) + \frac{1}{2} (e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau}) \right] \right\} = \\
 &= \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left\{ 1 - \exp(-j\omega\tau) \left[\cos \Omega\tau + j \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega\tau \right] \right\} = \\
 &= \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left\{ 1 - \exp(-j\omega\tau) \left[\cos \Omega\tau + j \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega\tau \right] \right\}. \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение (2.49) в дискретные моменты времени

$$\tau = \tau_n = nT/2 = n\pi/\Omega,$$

как это изображено на рис. 2.12. Подставляя значения τ в соотношение (2.49), получим текущий комплексный спектр $\dot{X}_\tau(\omega)$ в виде

$$\dot{X}_\tau\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = \left\{ \Omega \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \right] \right\}^{-1} \left[1 - (-1)^n \exp\left(-jn\pi \frac{\omega}{\Omega}\right) \right]. \quad (2.50)$$

Амплитудный спектр $|\dot{X}_\tau(\omega/\Omega)|$ определим как

$$\begin{aligned} \left| \dot{X}_\tau\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \right| &= \left\{ \frac{1}{\Omega^2 \left[1 - (\omega/\Omega)^2\right]} \left[1 - (-1)^n \exp\left(-jn\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right] \left[1 - (-1)^n \exp\left(jn\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right] \right\}^{0,5} = \\ &= \left\{ \frac{2}{\Omega^2 \left[1 - (\omega/\Omega)^2\right]} \left[1 - (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right] \right\}^{0,5}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Учитывая, что, в соответствии с формулами удвоения, сомножитель

$$\left[1 - (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right]$$

принимает вид

$$\left[1 - (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right] = 2 \cos^2\left(n \frac{\pi \omega}{2 \Omega}\right)$$

для нечетных значений n и вид

$$\left[1 - (-1)^n \cos\left(n\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right] = 2 \sin^2\left(n \frac{\pi \omega}{2 \Omega}\right)$$

для четных значений n , перепишем выражение (2.51) для амплитудного спектра в окончательном виде

$$\left| \dot{X}_\tau\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \right| = \frac{2}{\Omega} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right] \frac{\sin\left(n \frac{\pi \omega}{2 \Omega}\right)}{\cos\left(n \frac{\pi \omega}{2 \Omega}\right)}. \quad (2.51a)$$

При этом функция $\sin(\dots)$ используется при четных значениях n , а функция $\cos(\dots)$ – для нечетных значений n . Как было указано выше, величина n есть число полупериодов синусоиды с момента включения. Неопределенность в точке $\omega = \Omega$ легко раскрывается: $\left| \dot{X}_\tau \right|_{\omega=\Omega} = n\pi/2 = nT/4$, т.е. спектральная плотность на данной частоте нарастает линейно.

Текущий спектр синусоиды, изменяющийся в процессе её формирования и рассчитанный с использованием выражения (2.51a), представлен на

рис. 2.13 в виде последовательной серии функций спектральной плотности, отвечающих моментам времени $nT/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). По горизонтальной оси для каждой из реализаций спектральной плотности отложено отношение частот ω/Ω , а по оси ординат – спектральная плотность.

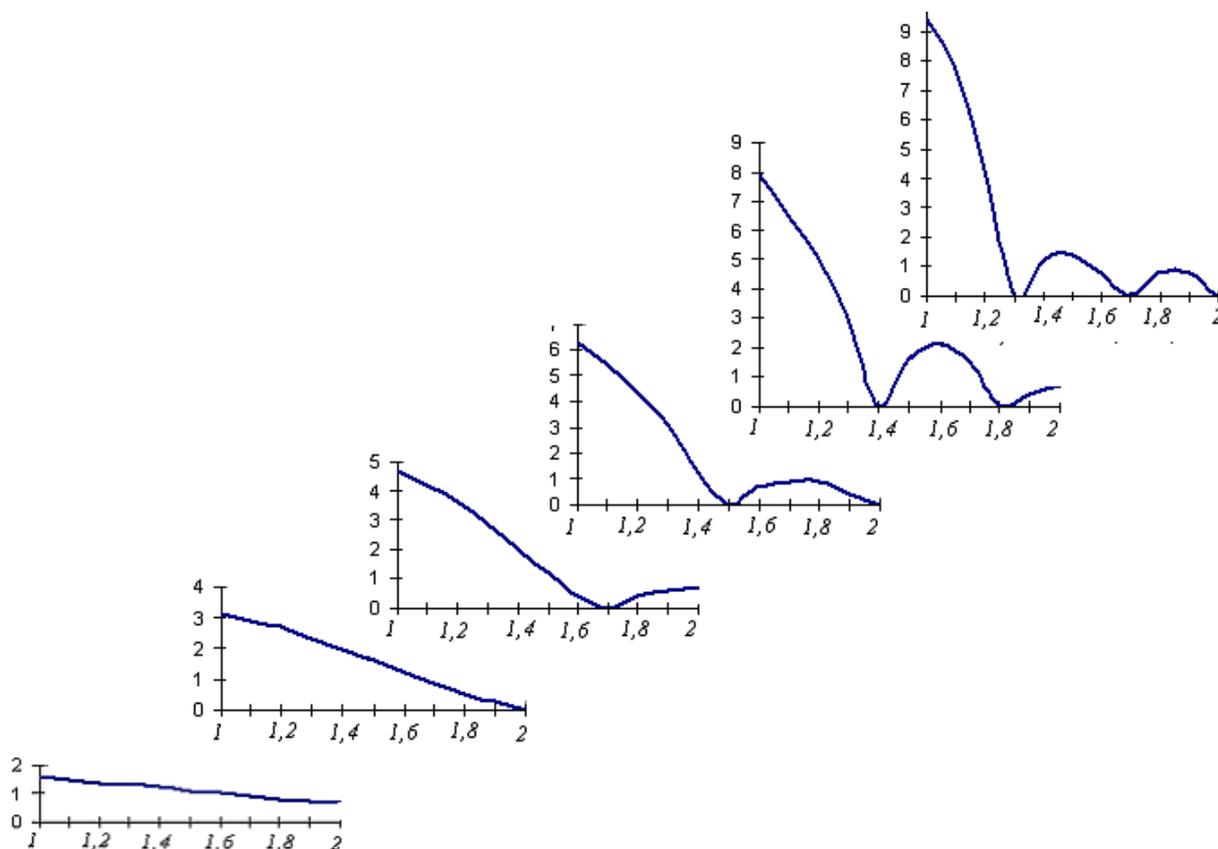


Рис. 2.13. Формирование текущего спектра синусоиды

Детали левого крыла спектральной плотности ($\omega/\Omega < 1$) опущены, чтобы не усложнять рисунок. Из рис. 2.13 следует, что в начальной стадии формирования спектр является практически равномерным. Далее формируется максимум на частоте Ω . Затем начинается формирование боковых лепестков спектра, а максимум становится все более и более острым. Однако лишь в пределе при $t \rightarrow \infty$ спектральная плотность превратится в единственную спектральную линию, отвечающую бесконечно протяженному синусоидальному колебанию. При этом спектральная плотность на

частоте $\omega = \Omega$ будет бесконечно велика и представляет собой так называемую δ – функцию, определенную в частотной области. В связи с этим необходимо проанализировать как процесс Фурье – преобразования сигналов, спектр которых в пределе превращается в δ – функцию, так и Фурье – преобразование сигналов, которые в пределе превращаются в δ – функции во временной области.

2.8. Преобразование Фурье δ – функции

Отметим прежде всего еще раз, что спектральное разложение функции времени $x(t)$, определяемое прямым преобразованием Фурье, существует только для функций, интегрируемых на интервале $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

и удовлетворяющим условиям Дирихле, т.е. имеющим конечное число экстремумов на заданном интервале времени и конечное число разрывов первого рода на этом интервале.

Однако некоторые широко используемые в радиоэлектронике и связи сигналы не удовлетворяют условиям абсолютной интегрируемости и их прямое преобразование Фурье (спектральное разложение) определить трудно. В связи с этим в учебные пособия по теории сигналов обычно включают разделы, посвященные вопросам преобразования Фурье неинтегрируемых функций и включающие в себя изложение искусственно вводимых предельных переходов, которые обеспечивают существование преобразований Фурье некоторых неинтегрируемых функций. Но, поскольку в следующей главе настоящей книги будут рассмотрены методы спектрального представления неинтегрируемых функций с использованием преобразования Лапласа, то изложение искусственно построенных методов спек-

трального анализа неинтегрируемых функций не является необходимым. В связи с этим в заключение настоящей главы будет рассмотрен только вопрос о преобразовании Фурье δ – функции Дирака [14].

2.8.1. Краткая история импульсной функции

Рассмотрим математическую модель бесконечно короткого импульса с бесконечно большой амплитудой, расположенного в произвольной точке t_0 оси времени t

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{для } t = t_0, \\ 0 & \text{для } t \neq t_0. \end{cases} \quad (2.52)$$

При этом площадь импульса равна единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Функцию $\delta(t)$ называют дельта – функцией, единичным импульсом, а также функцией Дирака, поскольку она впервые была предложена П.Дираком. Эта функция представляет собой мощное орудие современной математической физики. Однако, как отмечают исследователи, в теоретической математике эта функция встречалась и до того, как Дирак «официально» ввел её в использование [14].

Так, Эрмит, в своем известном труде «Курс анализа» писал о сингулярном интеграле, все элементы которого равны нулю за исключением единственного бесконечно большого элемента, соответствующего некоторому значению аргумента.

Способ, при помощи которого Коши независимо от Фурье нашел теорему об интеграле Фурье, был основан на использовании того же типа импульсной функции, что была указана Эрмитом.

Пуассон также самостоятельно доказал теорему Фурье, используя путь, аналогичный пути Коши. Кроме того, Пуассон предложил идею «фильтрующего свойства» дельта – функции, которое будет рассмотрено ниже.

Кроме Коши, Пуассона и Эрмита с импульсной функцией был знаком Кирхгоф, когда он модифицировал принцип Гюйгенса для волновой теории света. Позже сам Гельмгольц также использовал идею импульсной функции.

Еще позже импульсная функция сыграла свою роль в работах Оливера Хевисайда по его «символическому исчислению» (то, что ныне мы связываем, прежде всего, с преобразованием Лапласа). В одной из своих работ, связанной с фильтрующим свойством дельта – функции, Хевисайд писал: «...эта функция выделяет одно значение произвольной функции в силу своей импульсивности...».

Однако с тех пор, как Дирак в 1930 году ввел импульсную функцию в квантовую механику, она известна под названием «дельта – функция» Дирака и обозначается $\delta(t)$.

2.8.2. Фильтрующее свойство δ – функции. Функции, аппроксимирующие δ – функцию. Преобразование Фурье δ – функции

Дельта – функция обладает весьма важным свойством, широко используемым в математике, физике и радиотехнике. Это свойство заключается в следующем: если имеется некоторая непрерывная функция времени $x(t)$, то справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0). \quad (2.53)$$

Выражение (2.53) понятно, если учесть, что, по определению, функция $\delta(t-t_0)$ равна нулю на всей оси времени, за исключением точки $t=t_0$. Это обстоятельство превращает интервал интегрирования в бесконечно малый, включающий в себя точку $t=t_0$. На этом интервале функция $x(t)$ прини-

мает единственное постоянное значение $x(t) = x(t_0)$, которое может быть вынесено за знак интеграла.

Выражение (2.53) характеризует так называемое «фильтрующее» значение δ – функции, заключающееся в способности выделять значение произвольной функции времени в конкретный момент времени, соответствующий положению δ – функции на оси времени.

Преобразование Фурье δ – функции формально можно определить как

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt, \quad (2.54)$$

откуда, используя фильтрующее свойство δ – функции, получим

$$\dot{X}(\omega) = \exp(-j\omega t_0). \quad (2.55)$$

Для случая $t_0 = 0$ соотношение (2.55) дает спектральную плотность δ – функции в виде $\dot{X}(\omega) = 1$. Таким образом спектральная плотность δ – функции является равномерно распределенной по оси частот в интервале $(-\infty, \infty)$ в случае, если эта функция расположена в точке $t_0 = 0$. Если же δ – функция расположена в произвольной точке оси времени (т.е. является смещенной относительно начала координат), то из выражений (2.54) и (2.55) следует, что спектр этой функции определяется теоремой смещения для преобразования Фурье.

Дельта – функция во временной области может быть представлена обратным преобразованием от её спектральной плотности $\dot{X}(\omega) \equiv \delta(\omega) = 1$:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.56)$$

Учитывая свойство дуальности преобразований Фурье (т.е. условие взаимозаменяемости частоты ω и времени t), можно записать

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.57)$$

Выражение (2.57) позволяет определить спектральную плотность гармонического колебания (например $\cos \omega_0 t$), заданного на бесконечном интервале времени. Подставляя этот сигнал в прямое преобразование Фурье и используя формулу $\cos \omega_0 t = 0,5 [\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)]$, получим

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) \exp[-j\omega t] dt = \\ &= 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega - \omega_0)t] dt + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega + \omega_0)t] dt. \end{aligned}$$

Используя соотношение (2.57), последнее выражение можно записать в виде

$$\dot{X}(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.58)$$

Таким образом, гармоническому сигналу с конечной (единичной) амплитудой соответствует дискретный спектр, содержащий две спектральные линии, которые представляют собой δ - функции, расположенные симметрично относительно начала координат на частотах $\pm\omega_0$ (см. рис. 2.14).

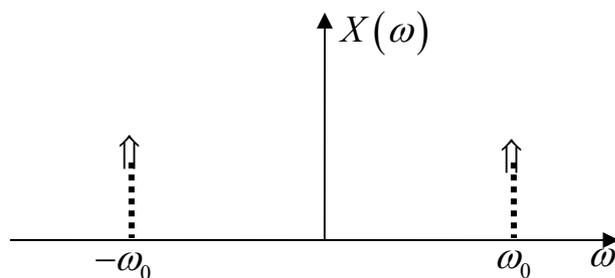


Рис. 2.14. Спектральная плотность бесконечно протяженного гармонического колебания

Как на этом рисунке, так и в дальнейшем, символ \uparrow означает δ - функцию. Продемонстрируем теперь, что δ - функция может быть представлена как предел некоторой реальной функции, зависящей от параметра, при стремлении этого параметра к бесконечности. Рассмотрение проведем с использованием нескольких примеров.

Пример 1. Зададим функцию $x(t)$ в виде двусторонней экспоненты

$$x(t) = 0,5\alpha_n \exp(-\alpha_n |t|),$$

где α_n – параметр.

Спектральная плотность $x(t)$ является функцией параметра α_n :

$$\begin{aligned} \dot{X}_n(\omega) &= 0,5\alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha_n t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= 0,5\alpha_n \int_{-\infty}^0 \exp[(\alpha_n - j\omega)t] dt + 0,5\alpha_n \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha_n + j\omega)t] dt = \\ &= 0,5\alpha_n \left\{ \frac{1}{\alpha_n - j\omega} \exp[(\alpha_n - j\omega)t] \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha_n + j\omega} \exp[-(\alpha_n + j\omega)t] \Big|_0^{\infty} \right\} = \\ &= 0,5\alpha_n \left[\frac{1}{\alpha_n - j\omega} + \frac{1}{\alpha_n + j\omega} \right] = \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

На рис. 2.15а и 2.15б изображены процессы изменения как функции

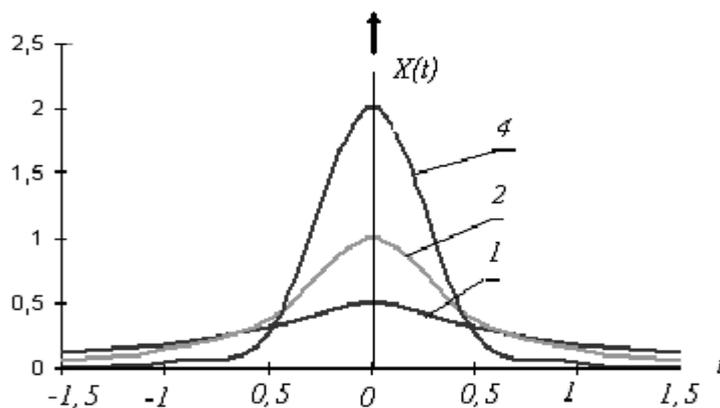


Рис. 2.15а. Процесс изменения функции $x(t)$ в зависимости от величины параметра α_n

$x(t)$ так и её спектральной плотности $\dot{X}_n(\omega)$ в зависимости от величины параметра α_n . Нетрудно видеть, что с ростом этого параметра двусторон-

няя экспонента сужается, а её спектр расширяется и стремится к равномерному. В пределе при $\alpha_n \rightarrow \infty$ двусторонняя экспонента превращается в δ -функцию, обладающую равномерным бесконечным спектром.

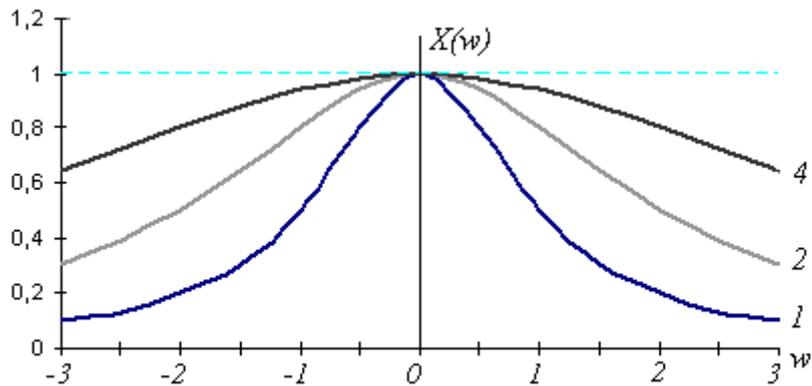


Рис. 2.15б. Процессы изменения спектральной плотности $\dot{X}_n(\omega)$ функции $x(t)$ в зависимости от величины параметра α_n

Пример 2. Зададим $x(t)$ в виде функции Гаусса (гауссоида)

$$x(t) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha_n^2 t^2)$$

и определим её спектральную плотность

$$\dot{X}_n(\omega) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha_n^2 t^2) \exp(-j\omega t) dt = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\alpha_n^2 t^2 + j\omega t)] dt.$$

Для вычисления интеграла дополним показатель подынтегрального выражения до полного квадрата и получим

$$\dot{X}_n(\omega) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha_n^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\alpha_n t + j\omega/2\alpha_n)^2] dt.$$

Далее, используя замену переменных $\alpha_n t + j\omega/2\alpha_n$, $dt = dx/\alpha_n$ и учитывая, что значение интеграла Эйлера – Пуассона определяется как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi},$$

получим

$$\dot{X}(\omega) = \exp(-\omega^2 / 4\alpha_n^2).$$

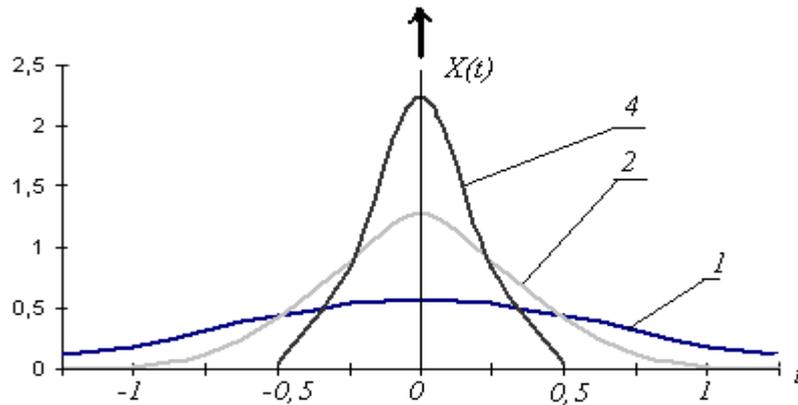


Рис. 2.16а. Процессы изменения гауссоиды в зависимости от величины параметра α_n

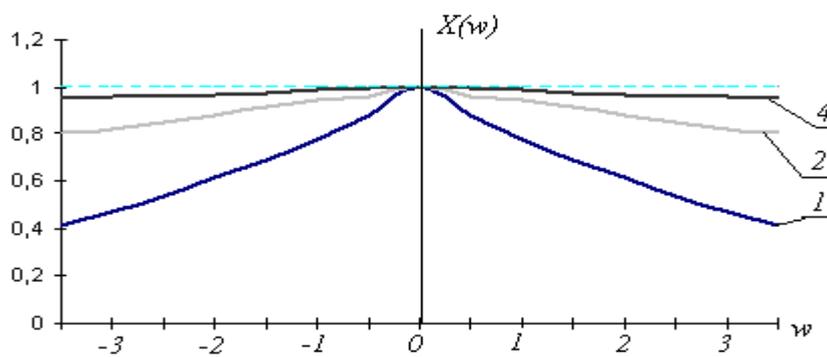


Рис. 2.16б. Процесс изменения спектральной плотности гауссоиды в зависимости от величины параметра α_n

На рис. 2.16,а и 2.16,б изображены процессы изменения гауссоиды и её спектральной плотности в зависимости от величины параметра α_n . Не-

трудно видеть, что с ростом этого параметра гауссоида сужается, а её спектр расширяется и стремится к равномерному, как и для двусторонней экспоненты. В пределе при $\alpha_n \rightarrow \infty$ гауссоида превращается в δ – функцию, обладающую равномерным бесконечным спектром.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

В главе рассматривается преобразование Лапласа с точки зрения спектрального представления функций времени. Это преобразование значительно расширяет область спектральных представлений. Как заметил известный математик Густав Дёч [15] «... подлинное значение преобразования Лапласа заключается в том, что оно преобразует функцию времени в аналитическую функцию, которую можно рассматривать как распространение спектральной плотности на комплексную плоскость. Кроме того, эта аналитическая функция передает свойства функции времени значительно более совершенным образом, чем спектральная плотность...».

3.1. Одностороннее преобразование Лапласа

В предыдущей главе предполагалось, что функция $x(t)$ задана на интервале $t \in (-\infty, \infty)$, в то время как реальные процессы вряд ли могут существовать на этом интервале. Обычно анализируемый сигнал начинается в некоторый конкретный момент времени, который можно принять за начало отсчета (начало координат, нулевые точки), а затем продолжается в течение достаточно длительного промежутка времени (теоретически до $t = +\infty$). Таким образом, в реальных условиях имеет место односторонний интервал времени $0 \leq t < \infty$, а нижним пределом в прямом преобразовании Фурье необходимо взять нуль

$$\dot{X}(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (3.1)$$

В этом случае обратное преобразование Фурье будет иметь вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \begin{cases} x(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь способ обойти проблему, возникающую в случае, если интеграл (3.1) расходится. Введем для этого вместо функции $x(t)$ затухающую функцию $x(t)\exp(-\sigma t)$ с параметром $\sigma > 0$ и найдем ее спектральную плотность, которая будет зависеть от параметра σ [15]:

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)\exp(-\sigma t)\exp(-j\omega t)dt. \quad (3.3)$$

Вследствие быстрого убывания множителя $\exp(-\sigma t)$ при $t \rightarrow \infty$ интеграл (3.3) сходится даже для таких функций как t^n , а также для показательной функции $\exp(\alpha t)$ ($\alpha > 0$), если выбрать параметр $\sigma > \alpha$. Таким образом, использование функции $x(t)\exp(-\sigma t)$ вместо функции $x(t)$ позволяет устранить расходимость интеграла (3.1) практически для всех анализируемых функций. Выражение (3.2) может быть переписано в виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_\sigma(\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \begin{cases} f(t)\exp(-\sigma t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Перепишем теперь выражения (3.3) и (3.4) как

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)\exp[-(\sigma + j\omega)]dt, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_\sigma(\omega)\exp(\sigma + j\omega)d\omega = \begin{cases} f(t)\exp(-\sigma t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

(Последнее выражение получено путем умножения обеих частей равенства (3.4) на $\exp(-\sigma t)$).

Из выражений (3.5) и (3.6) видно, что параметр σ и частота ω входят в эти выражения в виде комбинации $\sigma + j\omega$. Таким образом, появилась комплексная переменная, которую можно обозначить одной буквой:

$s = \sigma + j\omega$. Поскольку функция $\dot{X}_\sigma(\omega)$ зависит от этой новой переменной, введем обозначение $\dot{X}_\sigma(\omega) = \dot{X}(\sigma + j\omega) = X(s)$. Необходимо отметить, что в литературе по преобразованию Лапласа часто вместо s используют обозначение p , заимствованное из работ Оливера Хевисайда. Однако у Хевисайда буква p означает не переменную, а некоторый дифференциальный оператор. Кроме того, в математике при одновременном рассмотрении двух переменных принято применять для их обозначения две соседние буквы алфавита (например, x и y , u и v и т.д.).

Тогда, поскольку аргументом функции $x(t)$ является время t , то для обозначения нового аргумента функции $x(\sigma + j\omega)$ целесообразно выбрать букву s . Иногда переменную s называют комплексной частотой [8, 16, 17], однако с физической точки зрения это не имеет смысла, так как во всех случаях речь может идти только о вещественных частотах, определяемых значениями $\text{Im } s = \omega$, а величина $\text{Re } s = \sigma$ есть параметр, определяющий скорость затухания функции $x(t)$, определяемую экспонентой $\exp\{-\sigma t\}$.

Теперь введем переменную s вместо частоты ω в выражение (3.6) как переменную, по которой производится интегрирование. Поскольку в этом выражении частота ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, в то время как величина σ остается постоянной, то переменная $s = \sigma + j\omega$ будет изменяться в пределах от $\sigma - j\omega$ до $\sigma + j\omega$. Этому изменению переменной s на комплексной плоскости соответствует перемещение вдоль прямой, параллельной оси ординат $\text{Im } s = \omega$. Абсцисса этой прямой определяется отрезком σ действительной оси $\text{Re } s = \sigma$ (см. рис. 3.1)

Поскольку в выражении (3.6) проведена замена переменных $\omega \rightarrow s$, то $ds = j d\omega$, $d\omega = \frac{1}{j} ds$ и формулы (3.5) и (3.6) могут быть записаны в окончательном виде как

$$\int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt = X(s), \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \exp(st) ds = \begin{cases} x(t) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

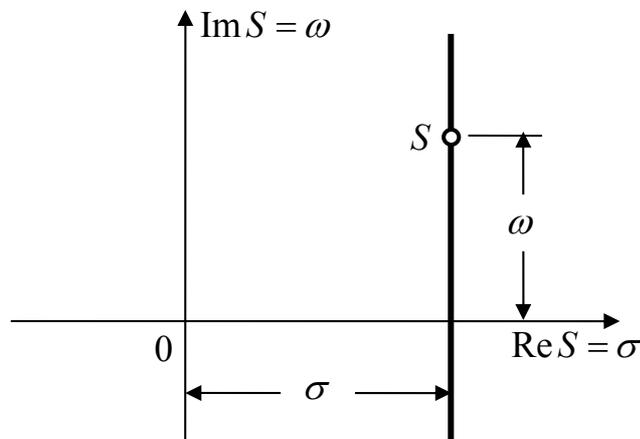


Рис 3.1. Контур интегрирования на комплексной плоскости

Выражение (3.7) называется прямым преобразованием Лапласа, а выражение (3.8) представляет собой обратное преобразование Лапласа. Физический смысл преобразования Лапласа можно изложить следующим образом:

Если в функции $X(s)$, определяемой прямым преобразованием Лапласа (3.7), рассматривать аргумент s как комплексную переменную $s = \sigma + j\omega$, то функция $X(\sigma + j\omega)$ при постоянном значении σ будет представлять собой спектральную плотность затухающей функции времени

$\exp\{-\sigma t\}x(t)$. Функция времени $x(t)$ может быть построена по спектральной плотности $X(s)$ с использованием выражения (3.8).

Рассматриваемое преобразование было найдено французским математиком Пьером Симоном де Лапласом, который указал на взаимно однозначное соответствие функций $x(t) \Leftrightarrow X(s)$, и применил результаты для решения дифференциальных уравнений. При использовании этого преобразования дифференциальные уравнения переходят в алгебраические, что значительно упрощает решение. Однако ценность этого преобразования для решения прикладных задач оставалась неизвестной более ста лет, пока в конце 19 века его, по существу, вновь не открыл Оливер Хевисайд. Исследования Хевисайда оказали значительное влияние на современную электротехнику, а затем и на радиотехнику.

3.2 Основные свойства преобразования Лапласа

В настоящем параграфе рассматриваются основные свойства преобразования Лапласа [14 - 17] с использованием простых примеров и будет показано, что основные свойства преобразования Лапласа по своему смыслу идентичны свойствам преобразования Фурье, что согласуется с результатами, изложенными в предыдущем параграфе.

3.2.1 Область сходимости

Если при каком – либо значении σ_0 параметра σ спектральная плотность затухающей функции $\exp(-\sigma_0 t)x(t)$ существует, то очевидно, что она существует и при значении параметра $\sigma > \sigma_0$. Математически это означает, что если интеграл (3.7) сходится при значении $s = \sigma_0 + j\omega$, то он сходится

также при $s = \sigma + j\omega$, где $\sigma > \sigma_0$. Очевидно, что если функция $x(t)$ не имеет особенностей, то областью сходимости интеграла (3.7) является полуплоскость $\text{Re}[s] > \sigma_0$. Минимальное действительное число σ_0 , при котором интеграл сходится, называется абсциссой абсолютной сходимости. Область абсолютной сходимости может занимать всю s – плоскость, так что $\sigma_0 = -\infty$. Это справедливо, например, для короткого импульса $x(t)$, неравного нулю лишь на конечном интервале времени.

Отметим, что большинство функций спектральной плотности $X(s)$, представляющих для нас интерес, являются рациональными функциями, то есть отношениями полиномов переменной s различной степени. Особый интерес представляют правильные рациональные функции, для которых степень полинома числителя меньше или равна степени полинома знаменателя. Корни полинома числителя, обращающие функцию $X(s)$ в нуль, называются нулями рациональной функции, а корни полинома знаменателя, обращающие функцию $X(s)$ в бесконечность, называются полюсами функции. По определению, в области сходимости не может быть полюсов и поэтому для рациональной функции $X(s)$ областью сходимости является область, лежащая правее самого правого полюса.

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пример 1. Зададим функцию времени в виде:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Эта функция называется функцией единичного скачка или единичным скачком Хевисайда (рис 3.2). Вопрос об определении функции $x(t)$ в точке разрыва $t = 0$ оставим открытым, так как при вычислении преобразования Лапласа безразлично, какое значение имеет эта функция при $t = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt = \\
&= \int_0^{\infty} \exp(-st) dt = -\frac{\exp(-st)}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

причем только при условии, что $\exp(-st) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. если $\operatorname{Re}[s] = \sigma > 0$. Таким образом, областью сходимости функции $X(s)$ является полуплоскость.

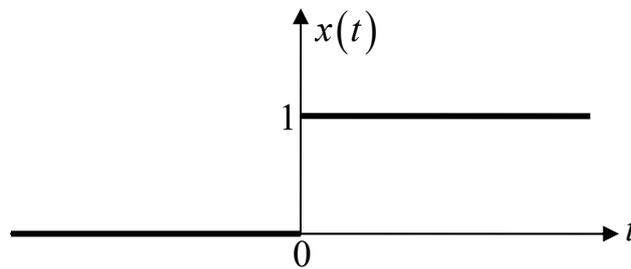


Рис 3.2. Единичный скачок Хевисайда

Пример 2. Пусть функции времени представляет собой экспоненту $\exp(-\alpha t)$, определенную на интервале $t > 0$.

Спектральная плотность этой функции имеет вид

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \exp(-st) dt = \\
&= \int_0^{\infty} \exp[-(s + \alpha)t] dt = -\frac{1}{s + \alpha} \exp[-(s + \alpha)t] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

при условии, что $\operatorname{Re}[s] = \sigma > -\alpha$, так что $\exp[-(s + \alpha)t] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, абсциссой абсолютной сходимости в данном случае является величина $-\alpha$.

Пример 3. Найдем преобразование Лапласа функции $x(t) = \cos \omega t$, заданной на интервале $t > 0$.

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^{\infty} \cos \omega t \exp(-st) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)] \exp(-st) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \exp[-(s - j\omega)t] dt + \int_0^{\infty} \exp[-(s + j\omega)t] dt \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Этот интеграл сходится в случае, если $\operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}(j\omega)$ и одновременно $\operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}(-j\omega)$, т.е. для $\operatorname{Re}[s] > 0$.

Пример 4. Для функции времени $x(t) = \sin \omega t$ найдем аналогично:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^{\infty} \sin \omega t \exp(-st) dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)] \exp(-st) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \exp[-(s - j\omega)t] dt - \int_0^{\infty} \exp[-(s + j\omega)t] dt \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Здесь область сходимости также определяется условием $\operatorname{Re}[s] > 0$.

Пример 5. Рассмотрим преобразование Лапласа функции

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0 & \text{при всех других значениях } t, \end{cases}$$

представляющей собой один полупериод функции $\sin \omega_0 t$. Тогда

$$X(s) = \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \exp(-st) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\pi/\omega} \exp[-(s-j\omega)t] dt - \int_0^{\pi/\omega} \exp[-(s+j\omega)t] dt \right] = \\
&= \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{s-j\omega} \exp[-(s-j\omega)t] \Big|_0^{\pi/\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \exp[-(s+j\omega)t] \Big|_0^{\pi/\omega} \right] = \\
&= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s-j\omega} \exp\left[-(s-j\omega)\frac{\pi}{\omega}\right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s+j\omega} \exp\left[-(s+j\omega)\frac{\pi}{\omega}\right] - \frac{1}{s+j\omega} \right\}. \tag{3.13a}
\end{aligned}$$

После приведения к общему знаменателю, имеющему вид $s^2 + \omega^2$, и представления экспоненциальных множителей в виде

$$\begin{aligned}
\exp[-(s-j\omega)\pi/\omega] &= \exp(-s\pi/\omega) \exp(j\pi) = -\exp(-s\pi/\omega), \\
\exp[-(s+j\omega)\pi/\omega] &= \exp(-s\pi/\omega) \exp(-j\pi) = -\exp(-s\pi/\omega),
\end{aligned}$$

выражение (3.13а) примет вид

$$X(s) = \frac{\omega [1 + \exp(-s\pi/\omega)]}{s^2 + \omega^2}, \tag{3.13б}$$

существующий для всех значений s . Функция (3.13б) не имеет полюсов ни в одной точке s – плоскости, поскольку полюса в точках $s = \pm j\omega$ компенсируются в этих точках нулями этой функции, т.е. значениями $s = \pm j\omega$, которые являются корнями числителя, т.к. $1 + \exp(-s\pi/\omega) \Big|_{s=\pm j\omega} = 0$. Нетрудно видеть, что в точках $s = \pm j\omega$ имеет место неопределенность типа $0/0$, раскрывая которую по правилу Лопиталья, получим после первой же процедуры дифференцирования числителя и знаменателя

$$\lim_{s \rightarrow \pm j\omega} X(s) = \pm \frac{\pi}{2j\omega}.$$

Таким образом, область сходимости в данном случае представляет собой всю комплексную плоскость. Это справедливо в силу того, что функ-

ция $x(t)$ представляет собой импульс синусоидальной формы, определенный на конечном интервале времени.

В дальнейшем, как правило, указание области сходимости будет опускаться, но при этом, естественно, будет подразумеваться, что существуют некоторое значение σ_0 , такое, что для $\text{Re}[s] > \sigma_0$ все интегралы, имеющие место в конкретной задаче, сходятся.

3.2.2. Теорема задержки (смещения), теорема линейности и их использование

Теорема задержки и теорема линейности для преобразования Лапласа идентичны по смыслу соответствующим теоремам для преобразования Фурье. Рассмотрим эти теоремы на конкретных примерах.

Пример 1. Рассмотрим преобразование Лапласа смещенной функции

$$x(t - T) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > T \\ 0 & \text{при } t < T \end{cases}$$

которая изображена на рис 3.3.

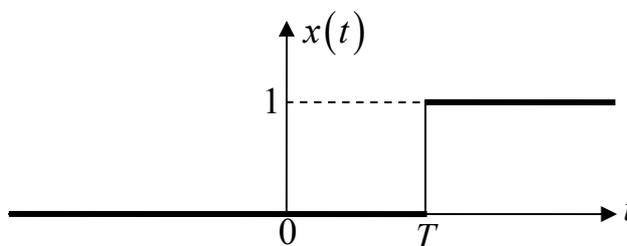


Рис 3.3. Смещенная функция единичного скачка

Найдем преобразование Лапласа этой функции

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt = \int_T^{\infty} \exp(-st) dt = \\ &= -\frac{1}{s} \exp(-st) \Big|_T^{\infty} = \frac{1}{s} \exp(-st) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при условии, что $\text{Re}[s] = \sigma > 0$, так что $\exp(-st) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Сравнивая выражение (3.14) с выражением (3.9) для преобразования Лапласа функции единичного скачка, сформулируем теорему задержки (смещения):

Если функция $x(t)$ обладает преобразованием Лапласа $X(s)$, то преобразование Лапласа задержанной (смещенной функции) $x(t - T)$ определяется как

$$L[x(t - T)] = X(s) \exp(-st), \quad (3.15)$$

где $X(s)$ есть преобразование Лапласа несмещенной функции, а величина T в показателе экспоненты есть смещение.

Символ $L[...]$ в соотношении (3.15) означает оператор Лапласа, т.е.

$$L[...] = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

и это символическое обозначение будет использоваться в дальнейшем.

Пример 2. Найдем преобразование Лапласа суммы (разности) двух функций времени

$$x_3(t) = x_1(t) - x_2(t), \text{ где}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad x_2(t) = x_1(t - T) = \begin{cases} 1 & t > T, \\ 0 & t < T. \end{cases}$$

Функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ изображены на рис. 3.4.

Тогда

$$\begin{aligned} X_3(s) &= \int_0^{\infty} [x_1(t) - x_2(t)] \exp(-st) dt = \int_0^{\infty} x_1(t) \exp(-st) dt - \\ &- \int_0^{\infty} x_1(t - T) \exp(-st) dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \exp(-sT) = \frac{1}{s} [1 - \exp(-st)]. \end{aligned} \quad (3.16a)$$

Соотношение (3.16) может быть найдено и прямым интегрированием:

$$\begin{aligned}
X_3(s) &= \int_0^{\infty} x_3(t) \exp(-st) dt = \\
&= \int_0^T \exp(-st) dt = -\frac{1}{s} \exp(-st) \Big|_0^T = \frac{1}{s} [1 - \exp(-sT)]. \quad (3.166)
\end{aligned}$$

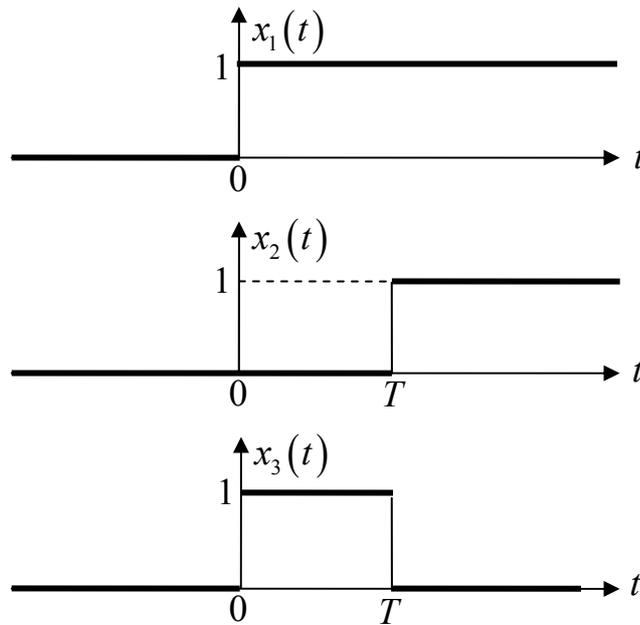


Рис 3.4. Теорема линейности для преобразования Лапласа: вычитание функций единичного скачка

Нетрудно видеть, что выражение $X_3(s)$ есть разность преобразований Лапласа функций $X_1(s)$ и $X_2(s)$. Этот пример позволяет сформировать теорему линейности (сложения).

Если $L[x_1(t)] = X_1(s)$ а $L[x_2(t)] = X_2(s)$, то преобразование Лапласа взвешенной суммы (разности) функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ равно взвешенной сумме (разности) преобразований Лапласа этих функций:

$$L[ax_1(t) \pm bx_2(t)] = aX_1(s) \pm bX_2(s). \quad (3.17)$$

Отметим, что в рассмотренном выше примере были использованы как теорема сложения, так и теорема смещения.

Рассмотрим теперь область сходимости интеграла (3.16б). Спектральная плотность $X_3(s) = \frac{1}{s} [1 - \exp(-st)]$ не имеет особенностей для всех значений s , включая точку полюса $s = 0$, поскольку предел этой функции при $s \rightarrow 0$ равен (после раскрытия неопределенности)

$$\lim_{s \rightarrow 0} X_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \exp(-sT)}{s} \right) = T.$$

Таким образом, область сходимости интеграла (3.16б) представляет собой всю s -плоскость, поскольку, как было указано выше, функция $x_3(t)$ представляет собой импульс, определенный на конечном временном интервале.

3.2.3. Теорема умножения на t

Теорема умножения на t формулируется следующим образом:

Если преобразование Лапласа функции $x(t)$ есть $X(s)$, т.е. $L[x(t)] = X(s)$, то преобразование Лапласа функции $x_1(t) = tx(t)$ определяется как

$$L[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}. \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь примеры, демонстрирующие справедливость равенства (3.18).

Пример 1. Зададим функцию времени $x(t) = \exp(-\alpha t)$, преобразование Лапласа которой определяется выражением (3.10)

$$X(s) = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Найдем теперь преобразование Лапласа функции $x_1(t) = tx(t) = t \exp(-\alpha t)$:

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) \exp(-st) dt = \int_0^{\infty} t \exp[-(s + \alpha)t] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{t}{s+\alpha} \exp[-(s+\alpha)t] \Big|_0^\infty + \frac{1}{s+\alpha} \int_0^\infty \exp[-(s+\alpha)t] dt = \\
&= -\frac{t}{s+\alpha} \exp[-(s+\alpha)t] \Big|_0^\infty - \frac{1}{(s+\alpha)^2} \exp[-(s+\alpha)t] \Big|_0^\infty. \quad (3.19a)
\end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что даже при $t \rightarrow \infty$ любая степень t возрастает медленнее, чем убывает функция $\exp(-\beta t)$, приведем выражение (3.19) к виду

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}. \quad (3.19б)$$

В общем случае

$$L[t^n \exp(-\alpha t)] = \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}. \quad (3.19в)$$

Найдем теперь производную от функции (3.19б)

$$\frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+\alpha} \right) = -\frac{1}{(s+\alpha)^2}. \quad (3.20)$$

Сравнивая выражения (3.19б) и (3.20) нетрудно убедиться, что

$$L[tx(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}.$$

Пример 2. Зададим единичный скачок Хевисайда

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

обладающий преобразованием Лапласа (3.9)

$$L[x(t)] = \int_0^\infty \exp(-st) dt = \frac{1}{s}.$$

Умножим функцию Хевисайда $x(t)$ на t и найдем преобразование Лапласа функции

$$x_1(t) = tx(t) = \begin{cases} t & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \int_0^{\infty} t \exp(-st) dt = -\frac{t}{s} \exp(-st) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \exp(-st) dt = \\ &= -\frac{t}{s} \exp(-st) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{s^2} \exp(-st) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Сравнивая выражения (3.21) и (3.9), видим что

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right).$$

3.2.4. Теоремы о преобразовании Лапласа производной и интеграла

Зададим функцию $x(t)$, обладающую преобразованием Лапласа $X(s)$ и найдем преобразование Лапласа производной $dx(t)/dt$. Поскольку, по определению, производная некоторой функции по времени есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении величины приращения к нулю

$$x_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \delta t)}{\delta t}$$

то, учитывая линейность операции дифференцирования и интегрирования, запишем преобразование Лапласа производной

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} x_1(t) \exp(-st) dt = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{x(t) - x(t - \delta t)}{\delta t} \exp(-st) dt. \quad (3.22)$$

Используя теорему сдвига, преобразуем выражение (3.22) к виду

$$X_1(s) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{[1 - \exp(-s\delta t)]}{\delta t} X(s) \quad (3.23)$$

и раскроем неопределенность типа $0/0$, имеющую место при $\delta t \rightarrow 0$. Тогда

$$X_1(s) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} [s \exp(-s\delta t)] X(s) = sX(s). \quad (3.24a)$$

Преобразование Лапласа производной порядка n имеет вид

$$L\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s), \quad (3.24б)$$

где $X(s)$ есть преобразование Лапласа функции $x(t)$.

Поскольку исходная функция $x(t)$ есть первообразная (неопределенный интеграл)

$$x(t) = \int x_1(t) dt,$$

то из выражения (3.24а) следует, что преобразование Лапласа интеграла может быть определено в виде

$$L\left[\int_0^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s}. \quad (3.25)$$

3.3. Обратное преобразование Лапласа

Рассмотрим теперь возможность перехода от спектральной плотности $X(s)$ к функции времени $x(t)$, определенной на интервале $t \in (0, \infty)$ с использованием обратного преобразования Лапласа (3.8) [8, 16, 17]

$$x(t) = L^{(-1)}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) \exp(st) ds.$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(s) \exp(st) ds, \quad (3.26)$$

поскольку интегрирование ведется по замкнутому контуру C в комплексной плоскости s . Однако возможность использования этого простого на первый взгляд выражения зависит от глубины понимания методов теории функции комплексного переменного и степени владения ими.

Для инженерных целей вполне достаточной будет реализация обратного преобразования Лапласа на основе метода разложения Хевисайда, использующего некоторые свойства правильных рациональных функций. Выше было указано, что большинство функций спектральной плотности $X(s)$ относится именно к этому классу.

Запишем правильную рациональную функцию

$$X(s) = \frac{a_N s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}, \quad (n \leq m) \quad (3.27)$$

и, полагая, что все корни полинома знаменателя различны (так называемый случай простых полюсов), представим функцию $X(s)$ в виде суммы простых дробей:

$$X(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pm})} = \frac{k_1}{s - s_{p1}} + \frac{k_2}{s - s_{p2}} + \dots + \frac{k_m}{s - s_{pm}}. \quad (3.28)$$

В выражении (3.28) величины s_{p_i} ($i = 1, 2, \dots, m$) есть корни полинома знаменателя (т.е. полюсы), а константы k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) называются вычетами. Для случая простых полюсов вычеты определяются в виде

$$k_i = [X(s)(s - s_{p_i})] \Big|_{s=s_{p_i}} \quad (3.29a)$$

или, в некоторых случаях, как

$$k_i = \lim_{s \rightarrow s_{p_i}} [X(s)(s - s_{p_i})]. \quad (3.29б)$$

Отметим, что нормировка функции $x(t)$ (см. выражение (3.27)) выполняется так, чтобы коэффициент при максимальной степени s в полиноме знаменателя был равен единице. Невыполнение этого условия приведет к ошибкам при вычислении вычетов.

Подставим теперь разложение (3.28) функции $x(t)$ в выражение (3.26) для обратного преобразования Лапласа. Тогда

$$x(t) = \frac{k_1}{2\pi j} \oint_C \frac{\exp(st)}{s - s_{p1}} ds + \frac{k_2}{2\pi j} \oint_C \frac{\exp(st)}{s - s_{p2}} ds + \dots + \frac{k_m}{2\pi j} \oint_C \frac{\exp(st)}{s - s_{pm}} ds. \quad (3.30)$$

Каждый из интегралов

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\exp(st)}{s - s_{pi}} ds,$$

входящий в выражение (3.30), может быть вычислен с использованием интегральной формулы Коши [18]

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Таким образом, выражение (3.30) даёт представление функции времени $x(t)$ в виде

$$x(t) = k_1 \exp(s_{p1}t) + k_2 \exp(s_{p2}t) + \dots + k_m \exp(s_{pm}t), \quad t > 0. \quad (3.31)$$

Выражение (3.31), а также его обобщение для случая кратных полюсов, называют теоремой разложения Хевисайда (или просто разложением Хевисайда).

Рассмотрим несколько примеров использования разложения Хевисайда для определения функции $x(t)$ по её спектральной плотности $X(s)$.

Пример 1. Зададим спектральную плотность в виде

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+s} = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1}.$$

Эта функция имеет два полюса $s_{p1} = 0$ и $s_{p2} = -1$. Найдём вычеты:

$$k_1 = [x(s)s] \Big|_{s=0} = \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=0} = 2,$$

$$k_2 = [x(s)(s+1)] \Big|_{s=-1} = \frac{s+2}{s+1} \Big|_{s=-1} = -1.$$

Таким образом

$$x(t) = 2 - \exp(-t) \text{ при } t > 0.$$

Нетрудно убедиться, что прямое преобразование Лапласа этой функции имеет вид

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} [2 - \exp(-t)] \exp(-st) dt = \\ &= -\frac{2}{s} \exp(-st) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s+1} \exp[-(s+1)t] \Big|_0^{\infty} = \frac{s+1}{s(s+1)}, \end{aligned}$$

что подтверждает взаимно-однозначный характер прямого и обратного преобразований Лапласа.

Пример 2. Пусть спектральная плотность $X(s)$ имеет вид

$$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}.$$

Эта функция имеет комплексно-сопряженные полюсы $s_{p1} = -j\omega_0$ и $s_{p2} = j\omega_0$.

Соответствующие вычеты определим как

$$\begin{aligned} k_1 &= [x(s)(s + j\omega)] \Big|_{s=-j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s - j\omega_0} \Big|_{s=-j\omega_0} = -\frac{1}{2j}, \\ k_2 &= [x(s)(s - j\omega)] \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s + j\omega_0} \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{2j}. \end{aligned}$$

Поскольку полиномы числителя и знаменателя правильной рациональной функции $X(s)$ имеют только действительные коэффициенты, то полюсы, равно как и вычеты, имеют вид комплексно-сопряженных пар.

Запишем теперь функцию времени

$$x(t) = \frac{1}{2j} [\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)] = \sin \omega_0 t, \quad t > 0.$$

Прямое преобразование Лапласа этой функции найдено в примере 4 п.

3.2.1 и имеет вид $X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega^2}$.

Пример 3. Рассмотрим теперь спектральные плотности, обладающие кратными полюсами. Пусть спектральная плотность имеет вид

$$X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2},$$

откуда следует, что функция $X(s)$ обладает кратными полюсами с кратностью $K = 2$: $s_{p1} = s_{p2} = 0$.

Для оценки формы функций времени, соответствующих преобразованиям Лапласа с кратными полюсами, необходимо найти функцию, преобразование Лапласа которой имеет вид $x(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^n}$ где n – кратность полюса.

Напомним теорему об умножении на t (см. п. 3.2.3), в соответствии с которой преобразование Лапласа функции вида $t \exp(-\alpha t)$ определяется в виде

$$L[t \exp(-\alpha t)] = \frac{1}{(s + \alpha)^2}.$$

В общем случае преобразование Лапласа произведения $t^n \exp(-\alpha t)$ можно записать как

$$L[t^n \exp(-\alpha t)] = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}.$$

Таким образом, формула обратного преобразования Лапласа функции $x(s)$, обладающей полюсом кратности $n + 1$, может быть записана как

$$x(t) = L^{(-1)} \left[\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}} \right] = t^n \exp(-\alpha t).$$

Тогда для случая $x(s) = 1/(s + \alpha)^2$ функция времени $x(t)$ определяется выражением $x(t) = t \exp(-\alpha t)$.

В случае, когда функция $X(s)$ задана в виде

$$X(s) = 1/s^2$$

и имеет полюсы $s_{p1} = s_{p2} = 0$ кратности 2, нетрудно видеть, что

$$x(t) = L^{(-1)} [1/s^2] = t.$$

3.4. Использование преобразования Лапласа для анализа радиотехнических цепей

В настоящем параграфе рассматриваются методы использования преобразования Лапласа для анализа линейных радиотехнических цепей и для анализа сигналов при прохождении через эти цепи.

3.4.1 Основные соотношения для элементов линейных радиотехнических цепей в частотной области

Запишем прежде всего основные соотношения для элементов линейных цепей с сосредоточенными параметрами (резистор, линейная ёмкость, линейная индуктивность) в частотной области [8, 11, 16].

Линейный резистор R описывается как законом Ома в области времени $U(t) = R\dot{I}(t)$, так и соотношением

$$U(s) = R\dot{I}(s) \tag{3.32}$$

между преобразованиями Лапласа напряжения и тока. По сути дела, выражение (3.32) представляет собой закон Ома в частотной области, из которого следует, что значения спектральной функции $U(s)$ прямо пропорциональны значениям спектральной функции $I(s)$.

Для получения подобных основных соотношений для линейных ёмкости и индуктивности в частотной области воспользуемся теоремой дифференцирования (см. п. 3.2.4)

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s).$$

При этом будем полагать, что в начальный момент времени ёмкость не заряжена ($U_C = 0$ при $t = 0$), а ток через индуктивность в начальный момент времени также равен нулю ($I_L = 0$ при $t = 0$).

Запишем дифференциальное уравнение, связывающее ток, проходящий через ёмкость C , с напряжением на этой емкости

$$i(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$$

и найдём преобразование Лапласа левой и правой частей этого уравнения

$$I(s) = CsU(s). \quad (3.33a)$$

Из выражения (3.33a) следует, что дифференциальное уравнение трансформировалось в алгебраическое. Решение этого алгебраического уравнения даёт спектральную плотность напряжения на емкости в виде

$$U(s) = \frac{1}{Cs} I(s) = \dot{Z}_C I(s). \quad (3.33б)$$

Математически выражение (3.33б) имеет ту же форму, что и закон Ома в частотной области (3.32) с тем отличием, что комплексное сопротивление ёмкости (импеданс) $\dot{Z}_C = 1/Cs$ имеет частотно-зависимый характер.

Учитывая, что $s = \sigma + j\omega$, для случая $\sigma = 0$ (идеальная ёмкость) можно записать $\dot{Z}_C = 1/j\omega C$.

Аналогично, выполняя преобразование Лапласа над уравнением $U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, характеризующее индуктивность L , получим алгебраическое уравнение

$$U(s) = L_s I(s) = \dot{Z}_L I(s), \quad (3.33)$$

где $Z_C = Ls$ – частотно-зависимое сопротивление индуктивности, которое для случая $\sigma = 0$ (идеальная индуктивность) переходит в $Z_L = j\omega L$.

Из изложенного следует, что использование преобразования Лапласа (переход в частотную область) позволяет заменять дифференциальные уравнения (пусть даже простейшие) алгебраическими, что значительно упрощает анализ.

3.4.2. Передаточные функции простейших цепей

Комплексной передаточной функцией линейной радиотехнической цепи называется отношение преобразование Лапласа выходного напряжения $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(s)$ к преобразованию Лапласа входного напряжения $\dot{U}_{\text{ВХ}}(s)$:

$$\dot{H}(s) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(s)}{\dot{U}_{\text{ВХ}}(s)}. \quad (3.34)$$

Рассмотрим простейшие ненагруженные четырёхполюсники, представляющие собой фильтры низких и высоких частот. Эти фильтры могут быть выполнены в виде RC или RL цепей. Так, фильтры низких частот изображены на рисунке 3.5а, а фильтры высоких частот изображены на рисунке 3.5б. Запишем передаточные функции этих фильтров в виде

$$\dot{H}(s) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(s)}{\dot{U}_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(s)\dot{I}(s)}{\dot{Z}_{\text{ВХ}}(s)\dot{I}(s)}. \quad (3.35а)$$

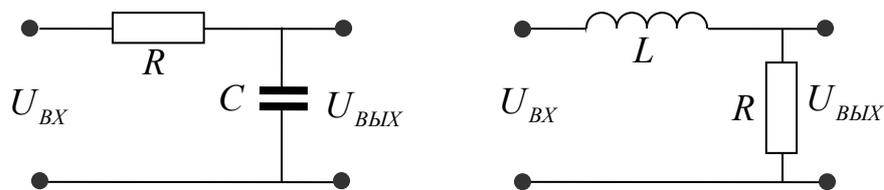


Рис. 3.5а .Простейшие фильтры нижних частот

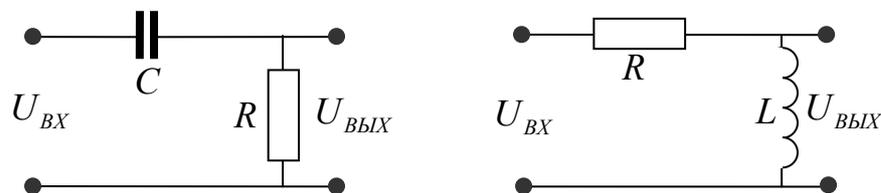


Рис. 3.5б. Простейшие фильтры верхних частот

Поскольку для всех четырёх схем ток, протекающий через входное и выходное сопротивление, одинаков, то соотношение (3.35а) можно переписать как

$$\dot{H}(s) = \frac{\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(s)}{\dot{Z}_{\text{ВХ}}(s)}. \quad (3.35б)$$

Тогда для фильтров низких частот (рис. 3.5а)

$$\dot{H}(s) = \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}, \quad (3.36)$$

где постоянная времени τ_0 для RC фильтра определяется величиной $\tau_0 = RC$, а для RL фильтра $\tau_0 = R/L$.

Рассмотрим теперь передаточную функцию в зависимости от частоты $j\omega$ на мнимой оси комплексной s – плоскости ($\sigma = 0$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_0}. \quad (3.37)$$

Зависимость модуля этой функции от частоты представляет собой амплитудно-частотную характеристику фильтра (АЧХ), а зависимость фазы от частоты – фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Выделяя действительную и мнимую части функции $H(j\omega)$

$$\dot{H}(j\omega) = \operatorname{Re} \dot{H} + j \operatorname{Im} \dot{H} = \dot{H}(j\omega) \frac{1 - j\omega\tau_0}{1 - j\omega\tau_0} = \frac{1}{1 + \omega^2\tau_0^2} - j \frac{\omega\tau_0}{1 + \omega^2\tau_0^2},$$

найдем АЧХ и ФЧХ низкочастотного фильтра в виде

$$|\dot{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2\tau_0^2}}, \quad (3.38a)$$

$$|\arg \dot{H}(j\omega)| = -\operatorname{arctg}(\omega\tau_0). \quad (3.38b)$$

Графически эти зависимости изображены на рисунках 3.6а,б. По оси абсцисс на этих рисунках отложена безразмерная величина $\omega\tau_0$.

Из рисунка 3.6а следует, что модуль передаточной функции на частоте $\omega = 0$ равен единице и убывает с увеличением частоты, а из рисунка 3.6б видно, что аргумент этой функции стремится к значению $-\pi/2$ при $\omega \rightarrow \infty$.

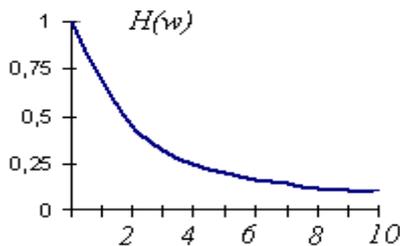


Рис. 3.6а. Модуль АЧХ

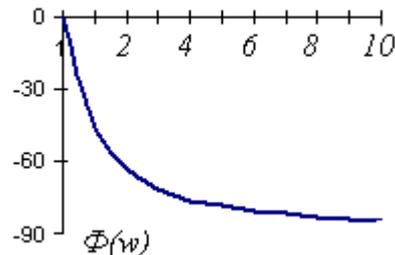


Рис. 3.6б. Фазовая характеристика

Передаточная функция фильтров высоких частот (рис. 3.5б) имеет вид

$$\dot{H}(s) = \frac{\dot{Z}_{\text{ВЫХ}}(s)}{\dot{Z}_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{s\tau_0}{1 + s\tau_0} = \frac{s}{(s + 1/\tau_0)}, \quad (3.39)$$

где постоянная времени τ_0 , как и ранее, определяется в виде $\tau_0 = RC$ для RC -фильтра и $\tau_0 = R/L$ для RL -фильтра. Найдём теперь АЧХ и ФЧХ для передаточной функции (3.39) в зависимости от частоты.

Записывая функцию $H(j\omega) = \frac{j\omega\tau_0}{1 + j\omega\tau_0}$, а затем выделяя её действительную

и мнимую части

$$\dot{H}(j\omega) = \operatorname{Re} \dot{H} + j \operatorname{Im} \dot{H} = H(j\omega) = \frac{j\omega\tau_0}{1 + j\omega\tau_0} \frac{1 - j\omega\tau_0}{1 - j\omega\tau_0} = \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2} + j \frac{\omega\tau_0}{1 + \omega^2\tau_0^2},$$

определим АЧХ и ФЧХ фильтра высоких частот как

$$|\dot{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2}}, \quad (3.40a)$$

$$\arg \dot{H}(j\omega) = \operatorname{arctg}(1/\omega\tau_0). \quad (3.40б)$$

Полученные зависимости изображены на рисунке 3.7а,б. При этом для определения величины $|\dot{H}(j\omega)|$ при $\omega \rightarrow \infty$ необходимо раскрыть неопределённость ∞/∞ , после чего выясняется, что модуль АЧХ фильтра высоких частот асимптотически стремится к значению 1 при $\omega \rightarrow \infty$ (рис.3.7а). Из рис.3.7б следует, что значение ФЧХ для $\omega = 0$ равно $\pi/2$, а в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ значение ФЧХ спадает до нуля.

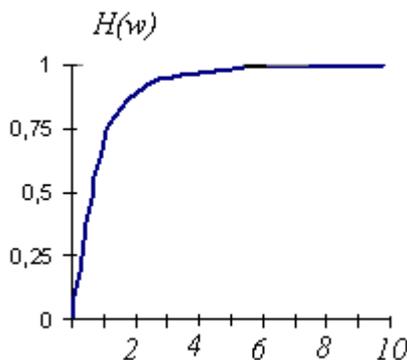


Рис. 3.7а. Модуль АЧХ

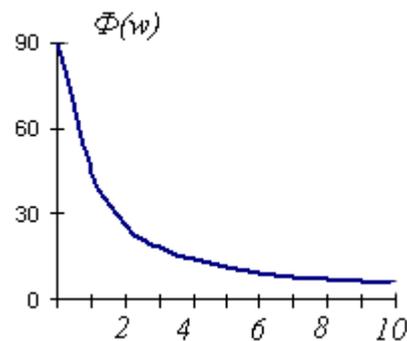


Рис. 3.7б. Фазовая характеристика

3.5. Анализ искажений формы сигналов при прохождении

фильтров нижних и высоких частот

Рассмотрим процессы передачи сигналов простейшей формы при их прохождении через фильтры нижних частот (НЧ) и высоких частот (ВЧ). Из выражения (3.34) для передаточной функции цепи следует, что преобразо-

вание Лапласа выходного сигнала $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}(s) \equiv Y(s)$ равно произведению преобразования Лапласа входного сигнала $\dot{U}_{\text{ВХ}}(s) \equiv X(s)$ на передаточную функцию цепи $\dot{H}(s)$:

$$Y(s) = \dot{H}(s)X(s). \quad (3.41)$$

При этом каждый элемент спектральной плотности входного сигнала умножается на весовой коэффициент, равный величине элемента спектральной плотности передаточной функции. Для выяснения физического смысла искажений формы сигналов через НЧ и ВЧ фильтры рассмотрим процесс прохождения через эти фильтры простейших сигналов.

3.5.1. Прохождение функции единичного скачка через фильтр нижних частот

Рассмотрим процесс передачи функции единичного скачка (функции Хевисайда)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

обладающей преобразованием Лапласа $L[x(t)] = 1/s$, через фильтр нижних частот, характеризуемый передаточной функцией

$$\dot{H}_{\text{НЧ}}(s) = \frac{1}{[\tau_0(s + 1/\tau_0)]}.$$

В соответствии с выражением (3.41) запишем преобразование Лапласа сигнала на выходе НЧ фильтра в виде:

$$Y(s) = \dot{H}_{\text{НЧ}}(s)X(s) = \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)s}. \quad (3.42)$$

Функцию времени $y(t)$ на выходе НЧ фильтра найдём, выполнив обратное преобразование Лапласа над выражением (3.42) с использованием разло-

жения Хевисайда, учитывая, что функция $Y(s)$ имеет два полюса ($s_{p1} = 1/\tau_0, s_{p2} = 0$):

$$y(t) = k_1 \exp(s_{p1}t) + k_2 \exp(s_{p2}t). \quad (3.43)$$

Определив вычеты k_1 и k_2 как

$$k_1 = \left[Y(s) \left(s + \frac{1}{\tau_0} \right) \right]_{s=-1/\tau_0} = -1, \quad k_2 = [Y(s)s]_{s=0} = 1$$

и подставляя их в выражение (3.43), получим временную зависимость сигнала на выходе НЧ фильтра при наличии на входе функции единичного скачка:

$$y_1(t) = 1 - \exp(-t/\tau_0). \quad (3.44a)$$

Графическое изображение функции $y_1(t)$ приведено на рисунке 3.8. Здесь по оси абсцисс отложена безразмерная переменная $at = t/\tau_0$.

Из рис. 3.8 следует, что функция единичного скачка при прохождении через фильтр нижних частот изменила свою форму. Изменение формы заключается в сглаживании входной функции, т.е. в уменьшении скорости нарастания фронта единичного скачка соответственно постоянной времени цепи τ_0 за счёт уменьшения содержания высокочастотных составляющих.

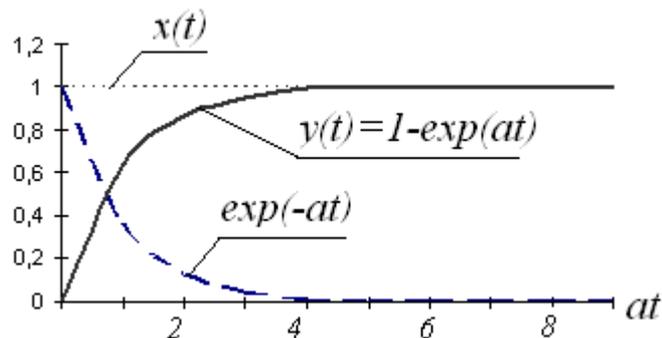


Рис. 3.8. Эффект сглаживания функции единичного скачка при прохождении через фильтр нижних частот

При увеличении величины постоянной времени функция $y_1(t)$ будет нарастать ещё более медленно. Эффект сглаживания сигнала при прохождении НЧ фильтров эквивалентен (и это можно продемонстрировать математически) операции интегрирования (усреднения) сигнала на определённом интервале. Поэтому фильтр нижних частот называется интегрирующей цепью.

3.5.2. Прохождение прямоугольного импульса через фильтр нижних частот

Рассмотрим теперь процесс прохождения прямоугольного импульса с единичной амплитудой

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{при всех других значениях } t \end{cases}$$

через интегрирующую цепь, обладающую передаточной функцией

$$\dot{H}_{\text{НЧ}}(s) = \frac{1}{[\tau_0(s + 1/\tau_0)]}.$$

Преобразование Лапласа заданной функции реализуется с использованием теорем смещения и сложения и имеет вид

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{\exp(-s\tau)}{s}.$$

Тогда преобразование Лапласа выходного сигнала фильтра определяется в виде разности $Y(s) = Y_1(s) - Y_2(s)$, где

$$Y_1(s) = \frac{1}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}, \quad Y_2(s) = \frac{\exp(-s\tau)}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}$$

и, соответственно, функция времени на выходе цепи будет определяться суммой двух слагаемых

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t),$$

где $y_1(t)$ определена на интервале $t > 0$, а $y_2(t)$ определена на интервале $t > \tau$.

Функция $y_1(t)$ определяется выражением (3.44а)

$$y_1(t) = 1 - \exp(-t/\tau_0)$$

при $t > 0$, а функцию $y_2(t)$ найдём, используя разложение Хевисайда, вычеты для которого равны

$$k_1 = Y_2(s)s|_{s=0} = 1, \quad k_2 = Y_2(s)(s + 1/\tau_0)|_{s=1/\tau_0} = -\exp(-\tau/\tau_0).$$

Тогда функция $y_2(t)$ определяется как

$$y_2(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_0}\right)$$

при $t > \tau$ и результат прохождения прямоугольного импульса через НЧ фильтр определяется разностью сигналов $y_1(t) - y_2(t)$, заданных на интервалах $t > 0$ и $t > \tau$ соответственно

$$y(t) = \left[1 - \exp(-t/\tau_0)\right] - \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_0}\right)\right]. \quad (3.44б)$$

При этом функции единичного скачка, содержащиеся в первом и втором слагаемых заданы на интервалах $t > 0$ и $t > \tau$ соответственно. Выходная функция $y(t)$ изображена графически на рис. 3.9, где предположено (без уменьшения общности), что $\tau_0 \ll \tau$. Из рисунка 3.9 следует, что при прохождении прямоугольного импульса через фильтр нижних частот как передний, так и задний фронты сглаживаются. При этом скорость нарастания переднего фронта и скорость спада заднего фронта определяются постоянной времени τ_0 фильтра нижних частот.

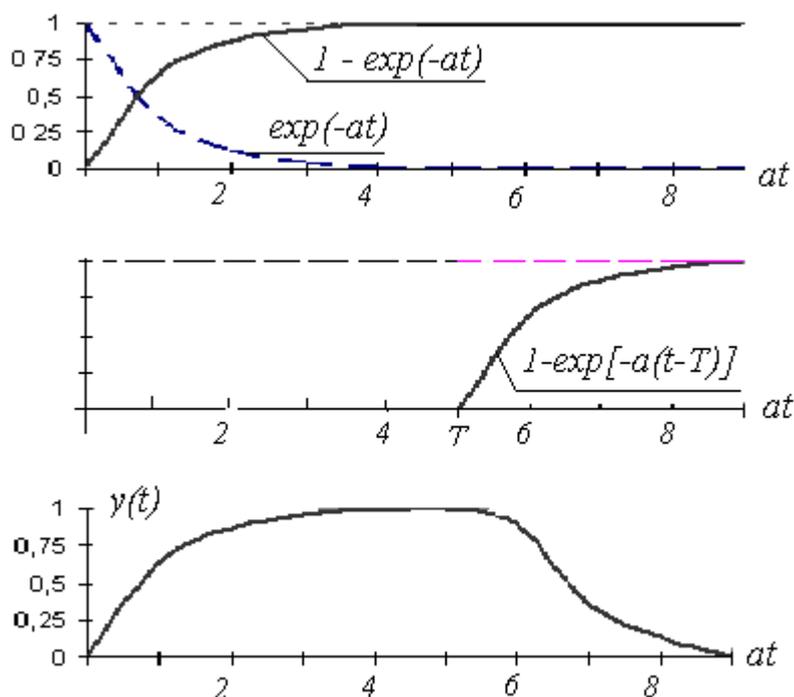


Рис. 3.9. Формирование сигнала на выходе НЧ – фильтра при поступлении на вход фильтра прямоугольного импульса

3.5.3. Прохождение функции единичного скачка через фильтр высоких частот

Рассмотрим процесс передачи функции единичного скачка

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

обладающей преобразованием Лапласа $X(s) = 1/s$, через фильтр высоких частот, характеризуемой передаточной функцией

$$\dot{H}_{\text{ВЧ}}(s) = \frac{s\tau_0}{(1 + s\tau_0)}.$$

Преобразуем, прежде всего, передаточную функцию фильтра высоких частот к виду

$$\dot{H}_{\text{ВЧ}}(s) = \frac{s\tau_0 + 1 - 1}{1 + s\tau_0} = 1 - \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}, \quad (3.45)$$

а затем найдём преобразование Лапласа выходного сигнала ВЧ фильтра в виде:

$$Y(s) = \dot{H}_{\text{ВЧ}}(s)X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)s}. \quad (3.46)$$

Для определения формы зависимости выходного сигнала от времени, произведем обратное преобразование Лапласа над выражением (3.46):

$$L^{(-1)}[Y(s)] = L^{(-1)}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{(-1)}\left[\frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)s}\right]. \quad (4.47)$$

Обратное преобразование Лапласа первого слагаемого в выражении (3.47) есть не что иное, как функция единичного скачка ($y(t)=1$ при $t > 0$, $y(t)=0$ при $t < 0$) поскольку единственный полюс функции $1/s$ равен нулю, а отвечающий ему вычет равен единице. Обратное преобразование Лапласа второго слагаемого найдено в подразделе 3.5.1 и определяется выражением (3.44). Тогда форма временного сигнала на выходе ВЧ – фильтра при подаче на его вход функции единичного скачка определяется как

$$y(t) = 1 - 1 + \exp(-t/\tau_0) = \exp(-t/\tau_0), \quad t > 0. \quad (3.48a)$$

Выходной сигнал (3.48a) изображен на рис. 3.10.

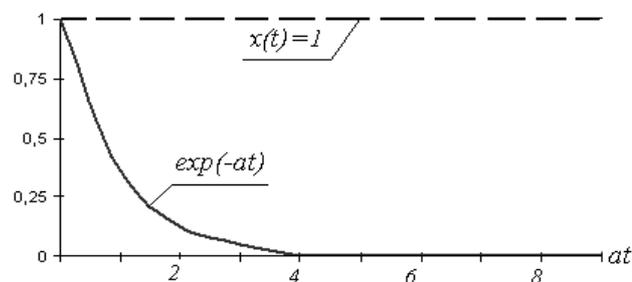


Рис. 3.10. Прохождение функции единичного скачка через фильтр высоких частот

Из данного рисунка следует, что функция единичного скачка после прохождения ВЧ – фильтра превращается в узкий импульс, длительность которого определяется постоянной времени фильтра. Плоская вершина единичного скачка, определяемая составляющими нижних частот, исчезает, поскольку ВЧ – фильтр подавляет нижние частоты входного сигнала. Процесс обострения выходного сигнала фильтра по сравнению со входным сигналом есть не что иное, как процесс дифференцирования входного сигнала и поэтому фильтры высоких частот называются дифференцирующими цепями.

3.5.4. Прохождение прямоугольного импульса через фильтр высоких частот

В заключение подраздела 3.5 рассмотрим процесс прохождения прямоугольного импульса с единичной амплитудой

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{при всех других значениях } t \end{cases}$$

через фильтр высоких частот, передаточная функция $H_2(s)$ которого определяется выражением (3.45)

$$\dot{H}_{\text{ВЧ}}(s) = 1 - \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}.$$

Учитывая, что преобразование Лапласа входного сигнала имеет вид

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{\exp(-s\tau)}{s},$$

запишем преобразование Лапласа $Y(s)$ выходного сигнала ВЧ – фильтра в виде

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \dot{H}_{\text{ФЧ}}(s)X(s) = \left[1 - \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right] \left[\frac{1}{s} - \frac{\exp(-s\tau)}{s}\right] = \\
&= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right] - \left[\frac{\exp(-s\tau)}{s} - \frac{\exp(-s\tau)}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right] = Y_1(s) - Y_2(s).
\end{aligned}$$

Функция времени $y(t)$ на выходе ФЧ – фильтра определяется обратным преобразованием Лапласа

$$L^{(-1)}[Y(s)] = L^{(-1)}[Y_1(s)] - L^{(-1)}[Y_2(s)] = y_1(t) - y_2(t),$$

где функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ определены на интервалах времени $t > 0$ и $t > \tau$ соответственно. Слагаемое $y_1(t)$ определяется выражением (3.48):

$$y_1(t) = \exp(-t/\tau_0), \quad t > 0,$$

а для слагаемого $y_2(t)$ запишем обратное преобразование Лапласа

$$y_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\exp(-s\tau)}{s} - \frac{\exp(-s\tau)}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\exp(-s\tau)}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{\exp(-s\tau)}{s\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right].$$

Первое слагаемое последнего соотношения даёт функцию единичного скачка, смещённую на время τ , а для определения второго слагаемого воспользуемся разложением Хевисайда, вычеты в котором определяются как

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -\exp(-s\tau).$$

Тогда $y_2(t)$ для $t > \tau$ определяется выражением

$$y_2(t) = 1 - 1 + \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_0}\right) = \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_0}\right).$$

Таким образом, выходной эффект будет иметь вид:

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \exp(-t/\tau_0) - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_0}\right), \quad (3.48б)$$

где функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ определены на интервалах $t > 0$ и $t > \tau$ соответственно.

Графически выходной сигнал изображён на рис. 3.11

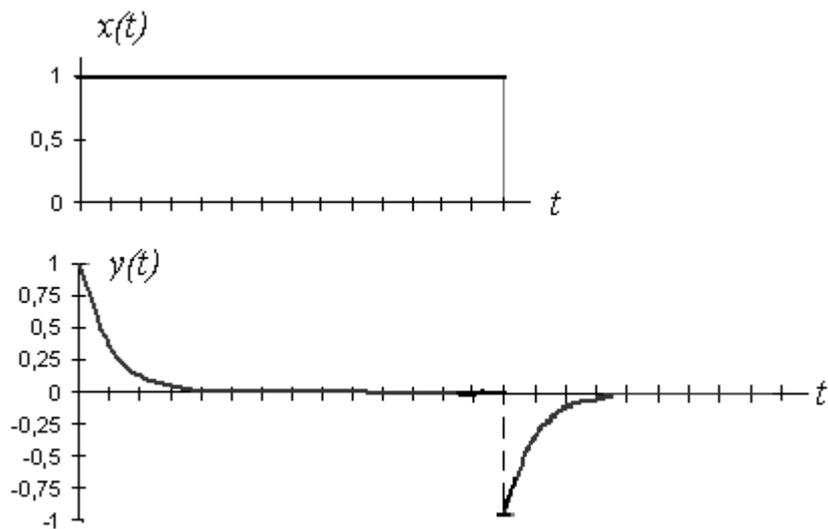


Рис. 3.11. Прохождение прямоугольного импульса через фильтр
высоких частот

Из рис. 3.11 следует, что после прохождения дифференцирующей цепи плоская вершина исчезает, а переднему и заднему фронтам отвечают узкие положительный и отрицательный импульсы, длительность которых определяется постоянной временной цепи.

3.6. Применение интеграла свертки для анализа линейных систем

В настоящем подразделе рассмотрен метод определения выходного сигнала линейной системы с использованием интеграла свертки и его связь с методом анализа систем в частотной области.

3.6.1. Преобразование Лапласа свертки

Как было показано выше, методы спектрального анализа, использующие преобразования Фурье и преобразования Лапласа, тесно связаны. Однако ценность преобразования Лапласа заключается в снятии ограничений,

связанных с проблемой интегрируемости анализируемых функций и об этом не следует забывать даже в случае, когда рассматриваются свойства преобразований Лапласа, идентичные свойствам преобразований Фурье.

Рассмотрим интеграл свертки [1, 2, 8, 16]

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (3.49)$$

в котором функция $x(t)$ представляет собой сигнал на входе линейной системы (цепи), функция $y(t)$ есть сигнал на выходе этой системы, а функция $h(t)$ является характеристикой системы во временной области и называется импульсной реакцией (или реакцией на единичный импульс). Ниже эта функция будет рассмотрена подробно.

Нашей задачей является доказательство того факта, что интеграл свертки (3.49) является во временной области эквивалентом обратного преобразования Лапласа выражения (3.41)

$$Y(s) = \dot{H}(s)X(s)$$

которое использовалось при анализе линейных систем (цепей) в частотной области. Здесь, как и ранее, $Y(s)$ – преобразование Лапласа выходного сигнала. $X(s)$ – преобразование Лапласа входного сигнала, а $H(s)$ – передаточная функция.

Найдем преобразование Лапласа выражения (3.49):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y(t)\exp(-st)dt &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \exp(-st)dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \exp(-st)dt. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Учитывая, что интеграл в левой части равенства (3.50) есть преобразование Лапласа выходного сигнала и меняя порядок интегрирования, получим

$$Y(s) = \int_0^{\infty} x(\tau) \left[\int_0^{\infty} h(t-\tau) \exp(-st) dt \right] d\tau. \quad (3.51)$$

В выражении (3.51) внутренний интеграл представляет собой преобразование Лапласа смещенной функции $h(t)$

$$\int_0^{\infty} h(t-\tau) \exp(-s\tau) dt = \dot{H}(s) \exp(-s\tau).$$

Подставляя этот результат в (3.51), видим что

$$Y(s) = \dot{H}(s) \int_0^{\infty} x(\tau) \exp(-s\tau) d\tau = \dot{H}(s) X(s). \quad (3.52)$$

Таким образом, преобразование Лапласа свертки определяется как произведение преобразований Лапласа свертываемых функций. В силу взаимной однозначности прямого и обратного преобразований Лапласа очевидно, что результат (3.52) после применения к нему обратного преобразования Лапласа приведет к выражению (3.49).

3.6.2. Импульсная реакция линейной цепи

В предыдущем подразделе было показано, что преобразование Лапласа функции $h(t)$, называемой импульсной реакцией цепи, дает передаточную функцию цепи $\dot{H}(s)$, т.е.

$$\dot{H}(s) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-st) dt.$$

Импульсной реакцией линейной цепи называется ее отклик на входное воздействие в виде единичного импульса, т.е. функции $\delta(t)$. Свойства этой функции были рассмотрены в главе 2. В частности, было указано, что эта функция обладает так называемым фильтрующим свойством

$$\int_0^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0).$$

Преобразование Фурье δ – функции также было рассмотрено в главе 2, но в данной главе необходимо использовать ее преобразование Лапласа, которое можно найти, записав преобразование Лапласа смещенной δ – функции:

$$L[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) \exp(-st) dt, \quad (3.53a)$$

которое, в соответствии с фильтрующим свойством δ – функции, дает

$$L[\delta(t - t_0)] = \exp(-st_0). \quad (3.53b)$$

В случае, если δ – функция расположена в начале координат (смещение $t_0 = 0$), то

$$L[\delta(t)] = 1 \quad (3.53b)$$

Таким образом, спектральная плотность δ – функции равномерна на всей S – плоскости.

Предполагая, что сигнал $x(t)$ на входе цепи представляет собой δ – функцию, найдем выходной сигнал

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) h(\tau) d\tau = h(t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

используя фильтрующее свойство δ – функции. Из выражения (3.54) следует, что, действительно, импульсная реакция $h(t)$ представляет собой отклик линейной цепи на δ – функцию. Выполнив преобразование Лапласа выражения (3.54), получим спектральную плотность выходного сигнала для данного случая

$$Y(s) = L[\delta(t)]\dot{H}(s) \equiv \dot{H}(s).$$

Полученное выражение можно интерпретировать следующим образом: поскольку δ – функция обладает равномерным и равным единице спектром на всей S – плоскости, то спектральная плотность выходного сигнала $Y(s)$ тождественно равна передаточной функции системы. В этом случае обратное преобразование Лапласа от передаточной функции дает импульсную реакцию цепи.

Определим теперь импульсную реакцию простейших линейных цепей.

3.6.3. Импульсная реакция НЧ и ВЧ фильтров

В соответствии с вышеизложенным, для определения импульсной реакции НЧ и ВЧ фильтров сделаем обратное преобразование Лапласа над их передаточными функциями. Так, для фильтра нижних частот можно записать

$$h(t) = L^{(-1)}\left[\frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right].$$

Учитывая, что функция $H(s)$ имеет единственный полюс в точке $s_p = -1/\tau_0$ и определяя соответствующий вычет $k = 1/\tau_0$, получим

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0} \exp(-t/\tau). \quad (3.55)$$

Импульсная реакция фильтра высоких частот представляет собой более сложную функцию. Для ее определения воспользуемся записью передаточной функции ВЧ – фильтра в форме (3.45)

$$\dot{H}(s) = \frac{s\tau_0}{1 + s\tau_0} = \frac{s\tau_0 + 1 - 1}{1 + s\tau_0} = 1 - \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}.$$

Тогда импульсная реакция ВЧ – фильтра может быть определена как сумма обратных преобразований Лапласа

$$h(t) = L^{(-1)}[1] - L^{(-1)}\left[\frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)}\right].$$

Учитывая, что первое слагаемое есть обратное преобразование Лапласа равномерно распределенный по S – плоскости спектральной плотности, получим функцию $\delta(t)$. Второе преобразование дает функцию $\exp(-t/\tau_0)$.

Таким образом, импульсная реакция ВЧ – фильтра принимает вид

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau_0} \exp(-t/\tau_0). \quad (3.56)$$

Наличие δ – функции в составе импульсной реакции ВЧ – фильтра объясняет эффект обострения фронтов сигнала (эффект дифференцирования) при прохождении фильтра высоких частот.

3.6.4. Сопоставление спектрального метода и метода свертки при анализе линейных систем

Вышеизложенные результаты свидетельствуют о том, что функция времени на выходе фильтра может быть найдена как обратным преобразованием Лапласа над спектральной плотностью выходного сигнала, так и непосредственно во временной области с использованием интеграла свертки. В качестве примера приведем решение задачи определения формы сигнала на выходе линейной цепи с использованием обоих способов.

Зададим сигнал $x(t) = \exp(-\alpha t)$, обладающий преобразованием Лапласа $X(s) = 1/(s + \alpha)$, на входе фильтра нижних частот. В этом случае преобразование Лапласа выходного сигнала определяется как

$$Y(s) = \frac{1}{\tau_0(s + 1/\tau_0)(s + \alpha)}, \quad (3.57)$$

а функция времени на выходе фильтра может быть найдена с использованием разложения Хевисайда в виде

$$y(t) = k_1 \exp(s_{p1}t) + k_2 \exp(s_{p2}t). \quad (3.58)$$

Полюсы функции (3.57) расположены в точках $s_{p1} = -1/\tau_0$ и $s_{p2} = -\alpha$, а соответствующие вычеты имеют вид

$$k_1 = \frac{1}{\tau_0(\alpha - 1/\tau_0)}, \quad k_2 = -\frac{1}{\tau_0(\alpha - 1/\tau_0)}.$$

Тогда, используя выражение (3.58), запишем функцию $y(t)$ на выходе НЧ – фильтра как

$$y(t) = \frac{1}{\tau_0(1 - 1/\tau_0)} [\exp(-1/\tau_0) - \exp(-\alpha t)], \quad t > 0. \quad (3.59)$$

Теперь, учитывая, что импульсная реакция НЧ – фильтра имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{\tau_0} \exp(-1/\tau_0),$$

найдем сигнал на выходе фильтра для случая входного сигнала $x(t) = \exp(-\alpha t)$, используя интеграл свертки:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \\ &= \frac{\exp(-t/\tau_0)}{\tau_0} \int_0^t \exp[-(\alpha - 1/\tau_0)\tau]d\tau = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \exp(-\alpha\tau) \exp[-(t - \tau)/\tau_0]d\tau = \\ &= \frac{\exp(-t/\tau_0)}{\tau_0} \left[-\frac{1}{(\alpha - 1/\tau_0)} \exp[-(\alpha - 1/\tau_0)\tau] \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{\tau_0(\alpha - 1/\tau_0)} [\exp(-1/\tau_0) - \exp(-\alpha t)], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Сравнивая выражения (3.59) и (3.60) видим, что результаты анализа, проведенного двумя различными способами, совпадают.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ. СПЕКТР МОЩНОСТИ

Один из принципов классификации радиотехнических сигналов основывается на возможности или невозможности предсказания точных значений сигналов в произвольные моменты времени.

В случае если существует математическая модель сигнала, предсказывающая поведение сигнала во времени (или в пространстве), то такой сигнал называется детерминированным. Первые три главы данной книги были посвящены анализу детерминированных сигналов.

Поведение случайного сигнала во времени (в пространстве), в противоположность детерминированному сигналу, не может быть точно предсказана ни одной из возможных математических моделей, а характеристики случайного сигнала могут быть описаны только с вероятностной точки зрения. Поскольку случайные сигналы представляют собой обширный подкласс радиотехнических сигналов, вопросы описания таких сигналов и методы анализа их спектров должны быть обязательно рассмотрены.

4.1. Вероятностное описание случайных величин

Поскольку методы анализа случайных сигналов базируются на математическом аппарате теории вероятностей, в первом подразделе приводятся краткие сведения о вероятностном описании случайных величин [19].

4.1.1. Случайные события и понятие вероятности

Теория вероятностей изучает закономерности в случайных событиях и способы их количественного описания. Особенный интерес представляет

устойчивость, которую проявляют средние значения случайных результатов. Устойчивость средних результатов есть статистическая закономерность, свойственная случайным событиям. Попытаемся дать количественную оценку свойству статистической устойчивости.

Рассмотрим некоторое случайное событие A , связанное с определенным комплексом условий (например – выпадение аверса (реверса) монеты при бросании). Предположим, что проведена серия из конечного числа n экспериментов, в которой интересующее нас событие A появилось m раз. Отношение числа опытов m , в которых интересующее нас событие A появилось, к общему числу опытов n называется частотой события или статистической вероятностью:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (4.1)$$

При небольшом числе опытов частота события носит в значительной мере случайный характер и может изменяться от одной серии опытов к другой. Однако при увеличении числа опытов частота события все более теряет свой случайный характер и проявляет тенденцию к стабилизации по отношению к некоторой постоянной величине. Так, при многократном бросании монеты частоты появления аверса и реверса монеты будут лишь незначительно отличаться от 0,5. Это свойство «устойчивости частот», многократно проведенное и подтвержденное опытом всей практической деятельности человечества, есть одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях. Математическая формулировка закономерности устойчивости частот была впервые дана Бернулли и представляет собой простейшую форму закона больших чисел.

Поскольку Бернулли доказал, что при неограниченном числе однородных опытов частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте, то, при большом числе опытов, выражение (4.1) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (4.2)$$

где $P(A)$ есть математическая вероятность события, определяемая как отношение числа благоприятных случаев к общему числу случаев. Эта вероятность всегда удовлетворяет условию $0 \leq P(A) \leq 1$ в силу того, что $m \leq n$ при любых обстоятельствах. Вероятность $P(A) = 0$ соответствует невозможному событию, а $P(A) = 1$ – достоверному событию. Эти величины занимают крайние положения на шкале вероятностей.

Несколько событий образуют так называемую полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться одно из них. Примеры полной группы событий:

- Выпадение аверса или выпадение реверса при бросании монеты;
- Попадание или промах при выстреле.

Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе. Примеры несовместных событий:

- Появление аверса и реверса при одном бросании монеты;
- Попадание и промах при одном выстреле.

Существуют группы событий, обладающих обоими свойствами одновременно. В этом случае имеется так называемая полная группа несовместных событий.

4.1.2. Основные теоремы теории вероятности. Условная вероятность

Непосредственное определение вероятности по частоте события не всегда удобно и не всегда возможно. Поэтому для определения вероятностей событий применяются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий определить вероятности других событий, с ни-

ми связанных. Вся теория вероятности в основном и представляет собой систему таких косвенных методов.

Определим прежде всего понятие суммы и произведения событий. Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в выполнении события A , или события B , или обоих вместе. Если события A и B образуют несовместную группу событий, то появление обоих событий вместе невозможно.

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном выполнении как события A , так и события B .

Теорема сложения вероятностей формулируется следующим образом: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (4.3)$$

Теорема сложения в виде (4.3) справедлива только для несовместных событий. В случае совместности события A и B вероятность суммы этих событий выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad (4.4)$$

где $P(AB)$ есть вероятность произведения событий A и B .

Перед тем как изложить теорему умножения вероятностей, необходимо ввести понятие независимых и зависимых событий.

Событие A называется независимым от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Если же вероятность события A будет изменяться в зависимости от того, произошло событие B или нет, событие A будет зависимым от события B . Вероятность события A , вычисленная при условии, что имело место другое событие B , называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A/B)$. Таким образом, условие независимости события A от события B

можно записать в виде: $P(A/B) = P(A)$. Теперь сформулируем теорему умножения вероятностей:

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad (4.5)$$

При применении теоремы умножения безразлично, какое из событий является первым или вторым, и теорему умножения можно записать как

$$P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Нетрудно видеть, что для независимых случайных событий теорема умножения принимает вид: $P(AB) = P(A)P(B)$.

4.1.3. Случайные величины и законы распределения

Выше были рассмотрены случайные события, которые имели место в результате некоторого эксперимента. Можно сказать, что случайные события характеризуют результат эксперимента качественно. На практике более полезным является представление результата эксперимента количественно в виде некоторой действительной величины X , которая называется случайной величиной. Точное значение случайной величины предсказать невозможно, но можно установить статистические закономерности, т.е. определить вероятности значений случайной величины. Понятие случайной величины является более общим, чем понятие случайного события.

Для того, чтобы иметь полное статистическое описание результатов эксперимента, необходимо задать закон распределения вероятностей случайной величины. Для дискретных случайных величин этот закон устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Другими словами, закон распределения

указывает, какой вероятностью обладает каждая случайная величина. (Напомним, что для полной группы несовместных событий суммарная вероятность равна единице).

Если случайная величина непрерывно заполняет интервал, то для некоторой области значений этой величины закон распределения ставит в соответствие вероятность того, что величина будет находиться в некоторой области интервала возможных значений.

Аналитическим выражением законов распределения являются функции распределения, которые могут быть функциями целочисленного или непрерывного аргумента. Рассмотрим закон распределения, справедливый как для непрерывных так и для дискретных случайных величин. Предположим, что случайная величина X принадлежит интервалу $(-\infty, \infty)$. Зафиксируем некоторый уровень x , который делит этот интервал на две части: $X \leq x$ и $X > x$.

Законом распределения случайной величины X называется вероятность того, что значение случайной величины X не превышает некоторого значения x :

$$F(x) = P\{X \leq x\}. \quad (4.6)$$

Этот закон называется также интегральной функцией распределения вероятностей (ИФР). ИФР является самой универсальной характеристикой случайной величины (СВ), которая существует как для дискретных так и для непрерывных случайных величин и полностью характеризует эти величины с вероятностной точки зрения. Сформулируем некоторые общие свойства

ИФР:

1. Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т.е. при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \geq F(x_1)$;

2. $F(-\infty) = 0$;

3. $F(+\infty) = 1$.

ИФР дискретной случайной величины изображена на рис. 4.1*а,б*. Видно, что ИФР дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям СВ и равны вероятностям этих величин. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1. По мере увеличения числа возможных значений случайной величины число скачков становится больше, а их величина – меньше; ступенчатая кривая становится более плавной (рис. 4.1*б*). Если случайная величина непрерывна, то ее функция распределения также непрерывна (рис.4.1*в*).

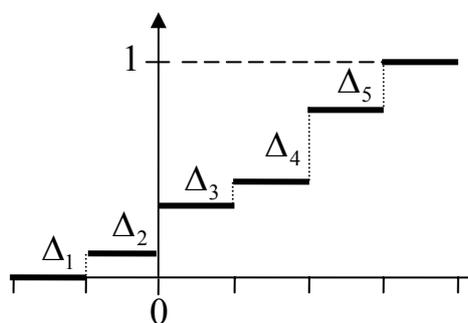


Рис. 4.1*а*

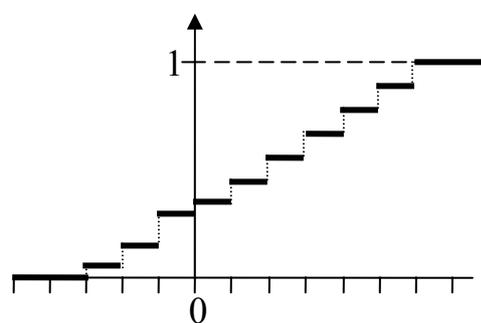


Рис. 4.1*б*

Рис.4.1. Интегральные функции распределения дискретных случайных величин

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что при уменьшении приращения значения случайной величины от скачка к скачку будет уменьшаться значение приращения функции распределения. В итоге при $\Delta X \rightarrow 0$ приращение функции распределения также стремится к нулю $\Delta F \rightarrow 0$. Это обозначает, что вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю. Это обстоятельство будет внимательно рассмотрено ниже.

Выразим теперь вероятность попадания СВ в некоторый интервал a, b (рис. 4.1*в*) через ее функцию распределения. Интересующее нас событие

$a < X < b$ — это сумма трех событий: Событие A : $X < b$; Событие B : $X < a$; Событие C : $a < X < b$.

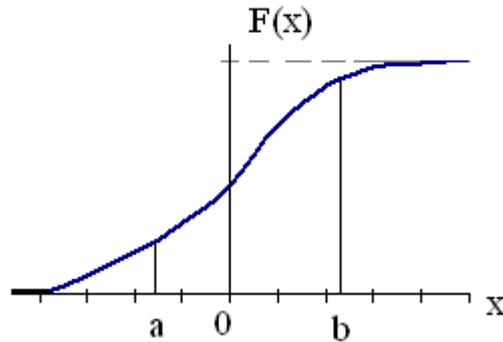


Рис. 4.1в. К определению вероятности попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал

Учитывая, что $A = B + C$, из теоремы сложения имеем

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b),$$

или, учитывая выражение (4.6)

$$P(B) = F(a) + P(a < X < b).$$

Из последнего выражения следует

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

т.е. вероятность попадания случайной величины на заданный интервал равна приращению функции распределения на этом интервале.

Рассмотрим теперь вероятность того, что случайная величина примет отдельно взятое значение a . С этой целью будем неограниченно уменьшать интервал (a, b) полагая что $b \rightarrow a$. В пределе вместо вероятности попадания на интервал будет получена вероятность того, что СВ примет значение a

$$P(X = a) = \lim_{b \rightarrow a} P(a < X < b) = \lim_{b \rightarrow a} [F(b) - F(a)]. \quad (4.8)$$

Значение этого предела зависит от того, непрерывна функция $F(x)$ в точке $x = a$ или имеет разрыв. Если функция $F(x)$ имеет разрыв в точке

$x = a$, то предел (4.8) равен значению скачка функции $F(x)$ в точке $x = a$, т.е. равен вероятности величины a . Если же функция $F(x)$ в точке a непрерывна, то этот предел равен нулю. Это доказывает, что вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю. В дальнейшем «непрерывными» случайными величинами будут называться только те случайные величины, ИФР которых всюду непрерывна.

Предположим теперь, что имеется непрерывная случайная величина X с ИФР $F(x)$. Будем полагать функцию $F(x)$ непрерывной и дифференцируемой. Найдем вероятность попадания случайной величины X на участок $(x, x + \Delta x)$ как $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ и найдем отношение этой вероятности к длине участка Δx , т.е. среднюю вероятность на единицу длины этого участка, а затем найдем предел этого выражения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (4.9)$$

Введем обозначение

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x). \quad (4.10)$$

Функция $f(x)$ (т.е. производная ИФР) характеризует «плотность» с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X . В противоположность ИФР функция $f(x)$ не является универсальной, поскольку она существует только для непрерывных случайных величин (СВ). Из выражения (4.9) следует, что размерность плотности распределения $f(x)$ обратна размерности случайной величины, т.к. числитель этого выражения, представ-

ляющий собой вероятность, является безразмерным, а знаменатель имеет размерность СВ.

Рассмотрим непрерывную СВ с плотностью распределения $f(x)$ и элементарный участок dx прилегающий к точке x . Вероятность попадания СВ X на этот участок есть $f(x)dx$ и эту величину можно назвать элементом вероятности (геометрически это площадь элементарного прямоугольника). Используя понятие элемента вероятности, можно найти вероятность попадания величины X на участок (a, b) . Она равна сумме элементов вероятности на этом интервале, т.е. интегралу

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометрически этот интеграл есть площадь кривой $f(x)$ над участком (a, b) . Используя его, нетрудно найти выражение для ИФР через плотность вероятности:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Основными свойствами плотности вероятности являются следующие:

- 1). Плотность распределения есть неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$;
- 2). Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (4.11)$$

4.1.4. Совместное распределение вероятностей двух случайных величин.

Условное распределение

До сих пор анализировалось распределение вероятностей только одной случайной величины X . Однако можно рассматривать также совмест-

ное распределение вероятностей двух случайных величин X и Y (которые в общем случае могут быть зависимы). Двумерная интегральная функция распределения этих величин (или функция распределения системы двух СВ) имеет вид:

$$F_2(x, y) = P\{X < x; Y < y\}. \quad (4.12)$$

Функция распределения (4.12) геометрически может быть представлена как вероятность попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной в точке x, y (рис. 4.2).

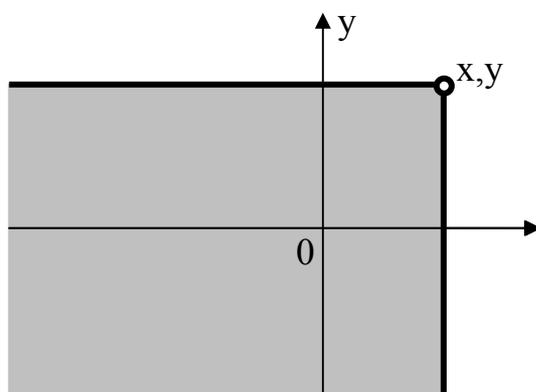


Рис. 4.2. Геометрическое представление совместной функции распределения двух случайных величин

Основными свойствами двумерной функции распределения (4.12) являются следующие:

1. Функция $F_2(x, y)$ есть неубывающая функция своих аргументов:

$$F(x_2, y_2) > F(x_1, y_1); \text{ при } x_2 > x_1; y_2 > y_1;$$

2. Повсюду на $-\infty$ функция распределения равна нулю:

$$F_2(x, y) = 0: F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. Если один из аргументов равен $+\infty$, двумерная функция распределения $F_2(x, y)$ превращается в одномерную функцию распределения случайной величины, отвечающей другому аргументу:

$$F_2(x, \infty) = F_1(x), \quad F_2(\infty, y) = F_1(y),$$

где $F_1(x), F_1(y)$ есть функции распределения случайных величин X, Y .

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, то $F_2(\infty, \infty) = 1$.

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольную область R (рис. 4.3а) может быть определена с использованием четырех бесконечных квадрантов с вершинами в точках $(\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)$ (рис. 4.3б) как

$$P(X, Y \in R) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \sigma) + F(\alpha, \gamma).$$

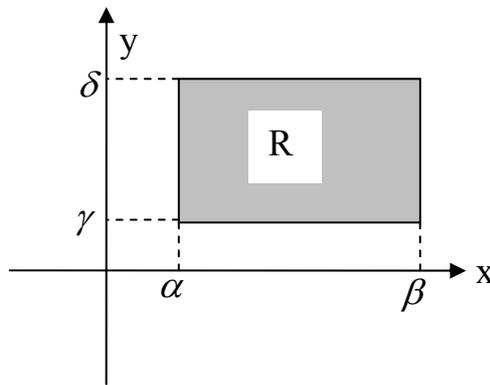


Рис. 4.3а

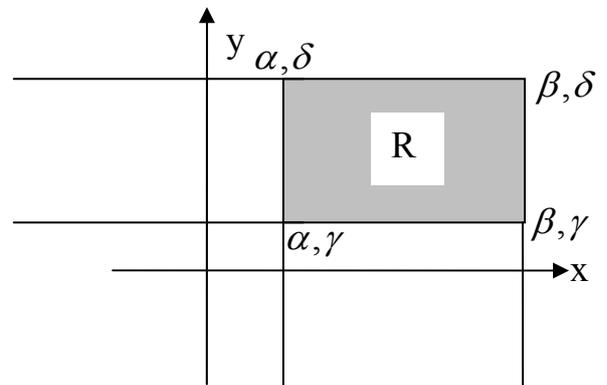


Рис. 4.3б

Рис.4.3. К определению вероятности попадания двумерной случайной величины в заданную область

Для системы двух случайных величин может быть введена двумерная плотность вероятности как предел отношения вероятности попадания в элементарный прямоугольник R_Δ к площади этого прямоугольника.

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P[(X, Y) \in R_\Delta]}{\Delta x \Delta y} = \\ & = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad (4.13)$$

Таким образом, двумерная плотность распределения вероятности представляет собой вторую смешанную частную производную функции $F(x, y)$ по x и y . Свойства двумерной плотности вероятности аналогичны свойствам одномерной плотности вероятности:

1. Плотность распределения системы двух СВ есть величина неотрицательная: $f(x, y) \geq 0$;
2. Двойной интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения системы двух СВ равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (4.14)$$

Двумерная функция распределения $F_2(x, y)$ связана с двумерной плотностью вероятности $f(x, y)$ выражением

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy. \quad (4.15)$$

Учитывая свойства двумерной функции распределения $F_2(x, y)$ и используя выражение (4.15), можно выразить плотность распределения каждой из величин X , Y , входящих в систему, через плотность распределения системы. Используя формулу (4.15), запишем

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

Отсюда, дифференцируя интеграл по верхнему пределу, получим выражение для плотности вероятности величины X :

$$f_1(x) = F'_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy. \quad (4.16a)$$

Аналогично

$$f_1(y) = F'_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (4.166)$$

Выражения (4.16) показывают, что знание двумерного закона распределения системы двух случайных величин позволяет найти законы распределения СВ, входящих в систему. Однако обратное в общем случае неверно, т.е. по законам распределения отдельных величин, входящих в систему, двумерный закон распределения можно найти не всегда.

Для того чтобы полностью характеризовать систему, необходимо знать не только распределение каждой из величин, но и зависимость между величинами, входящими в систему. Эта зависимость может быть охарактеризована с помощью условных законов распределения.

Условным законом распределения величины X , входящей в систему (X, Y) называется закон распределения, вычисленный при условии, что величина Y принимает определенное значение y . Условные законы распределения можно задавать как функциями распределения $F(x/y)$, так и плотностью вероятности $f(x/y)$.

Плотность распределения системы двух случайных величин в общем виде может быть записана с помощью теоремы умножения законов распределения

$$f(x, y) = f(x)f(y/x) = f(y)f(x/y). \quad (4.17)$$

Из выражения (4.17) следует, что плотность распределения системы двух случайных величин равна плотности распределения одной из величин, входящих в систему, умноженной на условную вероятность второй, вычисленную при условии, что первая величина приняла определенное значение. Эта теорема в схеме случайных величин аналогична теореме умножения вероятностей в схеме событий.

Используя выражения (4.16) и (4.17), можно найти условные законы распределения в виде:

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy};$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_1(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}.$$

Если $f(y/x) = f(y)$, что аналогично случаю $f(x/y) = f(x)$, то случайные величины X и Y независимы.

4.1.5. Числовые характеристики случайных величин.

Моменты распределения. Коэффициент корреляции

При решении целого ряда практических задач нет необходимости в полном вероятностном описании случайных величин. В этом случае достаточным является определение отдельных числовых параметров, характеризующих наиболее существенные черты распределения случайной величины в сжатой форме. Числовые характеристики случайных величин тесно связаны с так называемыми моментами распределения этих величин.

4.1.5.1. Моменты распределения

В качестве числовых характеристик случайных величин используется так называемые начальные и центральные моменты распределения.

Начальным моментом порядка S распределения некоторой случайной величины называется математическое ожидание S – й степени этой величины:

$$\alpha_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^S f(x) dx. \quad (4.18)$$

Математическим ожиданием случайной величины называется выражение

$$m[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad (4.18a)$$

представляющее собой среднее значение этой величины. Нетрудно видеть, что определение (4.18) представляет собой обобщенное понятие математического ожидания, а среднее значение (4.18a) случайной величины есть не что иное как первый начальный момент распределения случайной величины X .

Для определения центрального момента распределения введем понятие центрированной случайной величины. Центрированной случайной величиной $\overset{0}{X}$ назовем отклонение случайной величины X от её математического ожидания: $\overset{0}{X} = X - m[X]$. Моменты центрированной случайной величины называются центральными моментами. Таким образом, центральным моментом порядка S распределения случайной величины называется математическое ожидание S – й степени соответствующей центрированной случайной величины

$$\mu_S = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^S f(x)dx. \quad (4.19)$$

Для любой случайной величины её центральный момент первого порядка ($S = 1$) равен нулю:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - m_X \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$$

Второй центральный момент называется дисперсией случайной величины и представляет собой характеристику рассеяния СВ относительно её математического ожидания:

$$\mu_2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx. \quad (4.20)$$

Квадратный корень из дисперсии называется средним квадратическим отклонением случайной величины X :

$$\sigma[X] = \sqrt{D(X)}. \quad (4.21)$$

Нетрудно показать, что дисперсия (второй центральный момент) (4.20) может быть выражена через начальные моменты распределения случайной величины:

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2. \quad (4.22)$$

Третий центральный момент $\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^3 f(x) dx$ является мерой

асимметрии плотности распределения случайной величины, а четвертый

центральный момент $\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^4 f(x) dx$ характеризует плосковер-

шинность или островершинность распределения (эксцесс).

4.1.5.2. Коэффициент корреляции

Для системы двух случайных величин X, Y существуют как первые начальные моменты m_X, m_Y двумерного распределения, определяющие характеристику положения системы, так и вторые центральные моменты D_X, D_Y , характеризующие рассеяние вдоль осей x, y . Особое значение в описании системы двух случайных величин имеет так называемый второй смешанный центральный момент двумерной плотности вероятности

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y) dx dy, \quad (4.23a)$$

который называется корреляционным моментом. Данный момент опреде-

ляет не только меру рассеяния случайных величин X, Y , но и описывает статистическую связь между ними. Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю. Как было указано выше, для независимых случайных величин $f(x, y) = f(x)f(y)$, где $f(x)$ и $f(y)$ – плотности распределения величин X и Y . Тогда, используя выражение (4.23), видим, что

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y) f(y) dy = 0,$$

т.к. первые центральные моменты равны нулю, как это было показано выше. Таким образом, если $K_{XY} \neq 0$, это есть признак зависимости случайных величин X, Y .

Поскольку момент (4.23а) характеризует не только величину статистической взаимосвязи, но и рассеяние случайных величин, то для характеристики статистической взаимосвязи в чистом виде вводится понятие коэффициента корреляции

$$r_{XY} = \frac{R_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (4.23б)$$

где σ_X, σ_Y есть среднеквадратические отклонения случайных величин X, Y . Величина коэффициента корреляции лежит в интервале $0 \leq r_{XY} \leq 1$.

В заключение данного подраздела заметим, что понятие некоррелированности случайных величин ($r_{XY} = 0$) не эквивалентно понятию статистической независимости. Последнее является более жестким условием. Однако для вопросов теории случайных сигналов в радиотехнике достаточно использование понятия некоррелированности.

4.2. Примеры законов распределения случайных величин.

Рассмотрим несколько примеров дифференциальных распределений (плотностей вероятностей), которые будут широко использоваться в дальнейшем.

4.2.1. Закон равномерной плотности.

В некоторых практических задачах встречаются случайные непрерывные величины, о которых известно, что их возможные значения лежат в пределах некоторого определенного интервала, а в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны. Так, например, значения случайной фазы флуктуирующего сигнала равномерно заполняют интервал $\{-\pi; \pi\}$, а значения координаты x рассеивающих центров сложного радарного объекта могут равномерно заполнять интервал $\{x_{\min}, x_{\max}\}$.

Рассмотрим СВ ξ , подчиненную закону равномерной плотности на интервале α, β . (рис. 4.4) и запишем для нее выражение плотности распределения $f(x)$. Плотность $f(x)$ постоянна и равна C на интервале α, β . Вне этого интервала она равна нулю. Из условия нормировки (4.11) следует, что $C(\beta - \alpha) = 1$. Тогда $C = (\beta - \alpha)^{-1}$ и плотность распределения имеет вид

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (\beta - \alpha)^{-1}, & \alpha < x < \beta; \\ f(x) &= 0 & x < \alpha, x > \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

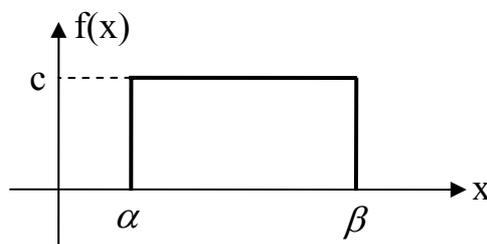


Рис. 4.4. Равномерная плотность распределения случайной величины

Определим числовые характеристики СВ ξ , подчиненной закону (4.24). Математическое ожидание ξ равно

$$m_{\xi} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dx}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (4.25)$$

а дисперсия определяется выражением

$$D_{\xi} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left[x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right]^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}, \quad (4.26)$$

из которого следует, что среднеквадратичное отклонение имеет вид

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}. \quad (4.27)$$

4.2.2. Нормальный закон распределения.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4.28)$$

График нормального распределения изображен на рис. 4.5.

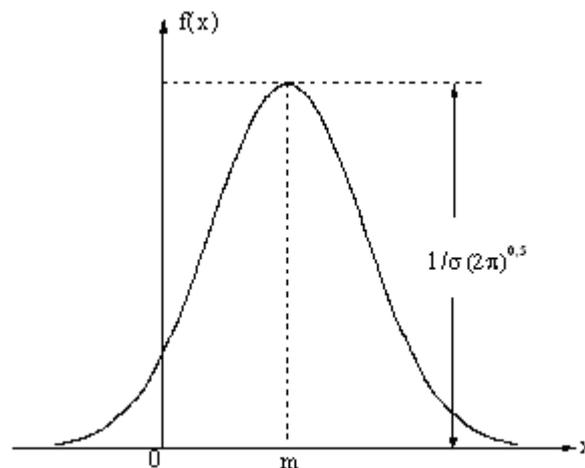


Рис. 4.5. Нормальная плотность распределения случайной величины

Численные параметры m и σ входящие в выражение (4.28) есть не что иное как математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

Покажем это, определив первый начальный и второй центральный моменты распределения (4.28). Так, первый начальный момент запишем в виде

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Используя замену переменной $(x-m)/\sigma\sqrt{2} = t$, получим

$$\begin{aligned} M[\xi] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}t + m) \exp(-t^2) dt = \\ &= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp(-t^2) dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл в выражении (4.29) равен нулю, а второй представляет собой интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = 2 \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом, первый начальный момент $M[\xi] = m$ есть математическое ожидание нормально распределенной случайной величины. Определим теперь второй центральный момент случайной величины, распределенной по нормальному закону:

$$D[\xi] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Используя снова замену переменной $(x-m)/\sigma\sqrt{2} = t$, запишем

$$D[\xi] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-t^2) dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t 2t \exp(-t^2) dt.$$

Для интегрирования по частям полагаем, что

$$t = u, \quad dv = 2t \exp(-t^2) dt, \quad v = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x) dx = -\exp(-t^2),$$

где $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

Отсюда следует, что второй центральный момент (дисперсия) имеет вид

$$D[\xi] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} = \left\{ -t^2 \exp(-t^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right\} = \sigma^2 \quad (4.29a)$$

поскольку первое слагаемое в скобках равно нулю, а второе есть интеграл Эйлера-Пуассона. Таким образом, параметр σ плотности распределения (4.28) представляет собой среднеквадратическое отклонение случайной величины.

4.2.3. Нормальный закон распределения системы двух случайных величин

В общем виде плотность нормального распределения системы двух случайных величин $\{x, y\}$ имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}. \quad (4.30)$$

Этот закон зависит от пяти параметров: $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, r$. Определив одномерные законы распределения величин $\{x, y\}$ с использованием выражений (4.16) и проводя вычисления, аналогичные проделанным выше, можно показать, что параметры m_x, m_y представляют собой математические ожидания величин x, y , а σ_x, σ_y есть их среднеквадратические отклонения. Ключевым моментом анализа выражения (4.30) является демонстрация того факта, что параметр r представляет собой коэффициент корреляции случайных величин x, y . Для этого вычислим корреляционный момент (4.23а). Подставляя в выражение (4.23а) плотность вероятности (4.30), получим:

$$K_{xy} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)(y-m_y) \exp[-A(x, y)] dx dy, \quad (4.31)$$

где

$$A(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} \left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \right].$$

Введем замену переменных в двойном интеграле (4.31):

$$\frac{x-m_X}{\sigma_X\sqrt{2}} = u; \quad \frac{1}{2\sqrt{(1-r^2)}} \left[\frac{(y-m_Y)}{\sigma_Y} - \frac{(x-m_X)}{\sigma_X} \right] = v.$$

Якобиан преобразования в данном случае равен $2\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \left(v + \frac{ru}{\sqrt{1-r^2}} \right) 2\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2} \exp[-(u^2 + v^2)] dudv = \\ &= \frac{2\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp(-u^2) du \int_{-\infty}^{\infty} v \exp(-v^2) dv + \\ &\quad + \frac{2\sigma_X\sigma_Y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2) du \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v^2) dv. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u \exp(-u^2) du &= \int_{-\infty}^{\infty} v \exp(-v^2) dv = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2) du &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v^2) dv = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

получим

$$K_{XY} = r\sigma_X\sigma_Y, \quad \text{или} \quad r = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Таким образом, параметр r в выражении (4.20) представляет собой коэффициент корреляции случайных величин x, y . Предположим теперь, что эти случайные величины некоррелированы. Тогда, принимая $r = 0$ в выражении (4.30), получим

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}. \quad (4.32)$$

4.3. Случайные процессы и одномерное распределение вероятностей случайных процессов. Моменты распределения

Функция какого-либо аргумента, принимающая случайные значения для каждого значения аргумента, называется случайной функцией [20, 21]. Случайная функция времени называется случайным процессом. Отдельное наблюдение над случайным процессом, который протекает при неизменных условиях, называется реализацией случайного процесса $x(t)$. Каждое отдельное наблюдение будет давать новую непредсказуемую реализацию случайного процесса. Таким образом, множество реализаций случайного процесса можно описать только с использованием вероятностных характеристик. Рассмотрим достаточно большое число N реализаций случайного процесса $x(t)$ и выделим из этого числа n реализаций, которые в некоторый момент времени t_1 были меньше некоторого уровня x_1 . Обозначим эти реализации как $n(x_1, t_1)$. При большом n отношение $n(x_1, t_1)/N$ будет представлять собой вероятность того что при $t = t_1$ случайный процесс $x(t)$ находится ниже уровня x_1 , т.е. $P = [x(t_1) \leq x_1]$. Используя соотношение (4.6), нетрудно видеть, что упомянутая вероятность задаёт одномерную функцию распределения случайного процесса

$$F(x_1, t_1) = P = [x(t_1) \leq x_1], \quad (4.33)$$

где время t имеет смысл параметра. Функция (4.33) обладает всеми свойствами функции распределения (см. подраздел 4.1.3). Производная функция распределения (4.33) определяет плотность распределения вероятностей случайного процесса $x(t)$

$$\frac{dF(x_1, t_1)}{dx_1} = f(x_1, t_1), \quad (4.34)$$

обладающую всеми свойствами плотности вероятности. Вероятность того, что случайный процесс $x(t)$ в момент времени t_1 принимает значение, находящееся в интервале $x_1 < x_1(t) < x_1 + dx$ определяется в соответствии с результатами подраздела (4.1.3) как элемент вероятности

$$P[x_1 < x_1(t) < x_1 + dx] = f(x_1, t_1)dx_1.$$

Хотя одномерная функция распределения и одномерная плотность дают полное описание случайного процесса в момент времени t_1 , в практических случаях можно обойтись более простыми числовыми характеристиками, т.е. начальными и центральными моментами распределения, а именно: математическим ожиданием и дисперсией, как наиболее используемыми:

$$m[x(t_1)] = x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)f(x_1, t_1)dx, \quad (4.35)$$

$$D[x(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - x(t_1)]^2 f[x_1, t_1]dx. \quad (4.36)$$

В принципе, как это следует из выражений (4.35) и (4.36), значения математического ожидания и дисперсии могут изменяться в зависимости от положения точки t_1 , в которой они определены. Изменение этих параметров приводит к изменению формы одномерного распределения вероятностей случайного процесса от точки к точке.

4.4. Полное статическое описание случайного процесса. Стационарные случайные процессы. Автокорреляционная функция

Поскольку между значениями случайного процесса может существовать статистическая связь (корреляция) и поскольку моменты случайного про-

цесса могут изменяться в зависимости от положения точки t_1 на оси времени, полное статистическое описание случайного процесса может быть задано только многомерной функцией $f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$, описывающей как изменение моментов процесса во времени, так и статистическую связь (корреляцию) между значениями процесса в несовпадающие моменты времени. Получение таких n -мерных распределений представляет собой весьма трудоемкий процесс. Однако существует такой класс случайных процессов, для которых определение n -мерной плотности распределения не является необходимым. Это так называемые стационарные случайные процессы, составляющие значительную часть случайных процессов в радиотехнике. Случайный процесс называется стационарным, если многомерная плотность распределения вероятностей не зависит от перемещения всех точек наблюдения t_1, t_2, \dots, t_n на одинаковую величину Δt вдоль оси времени

$$f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f_n(x_1, t_1 + \Delta t; x_2, t_2 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t).$$

Таким образом, статистический характер стационарного процесса не изменяется во времени. Эта неизменность (инвариантность во времени) определяется следующими обстоятельствами [20]:

- Одномерная плотность вероятностей случайного процесса $x(t)$ не зависит от времени, т. е. $f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, t_1 + \Delta t) = f_1(x)$;
- Двумерная плотность вероятности случайного процесса $x(t)$ зависит только от разности во времени $t_1 - t_2 = \tau$ точек, в которых она определена и при $\tau = const$ не изменяется для любых значений времени t_1 и t_2 :

$$f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = f_2(x_1, t_1 + \Delta t; x_2, t_2 + \Delta t) = f_2(x_1, x_2, \tau)$$

Указанные обстоятельства обуславливают следующие свойства стационарных случайных процессов [20]:

1. Математическое ожидание стационарного случайного процесс $x(t)$ не зависит от времени (свойство инвариантности к сдвигу по оси времени) и является постоянной величиной:

$$m[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1)dx] = a. \quad (4.37)$$

2. Дисперсия стационарного случайного процесса $x(t)$ не зависит от времени и является постоянной величиной:

$$D[x(t)] = m[x(t) - a]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - a]^2 f_1(x)dx. \quad (4.38)$$

3. Смешанный центральный момент второго порядка двумерной плотности вероятности $f_2(x_1, x_2, \tau)$ (корреляционный момент) зависит только от разности моментов времени τ точек, в которых определена двумерная плотность вероятности:

$$\begin{aligned} m_2(t_1, t_2) &= m_2\{[x(t_1) - a][x(t_2) - a]\} = m_2\{[x(t_1) - a][x(t_1 + \tau) - a]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a)(x_2 - a)f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 - a \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 - \\ &- a \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 + a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 - a \int_{-\infty}^{\infty} x_2f_1(x_2)dx_2 - a \int_{-\infty}^{\infty} x_1f_1(x)dx_1 + a^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2 - a^2 = K(\tau). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь введено обозначение $K(\tau)$ для так называемой автокорреляционной функции (АКФ) стационарного случайного процесса, представляющей собой совокупность корреляционных моментов, найденных для различных

значений временного разноса τ . При исследовании корреляционных свойств случайного процесса интервал изменения величины τ обычно определяется промежутком от $\tau = 0$, где $K(\tau) = \max$ и $\tau = \tau_{\max}$, где $K(\tau) \approx 0$. В точке $\tau = 0$ второй смешанный центральный момент превращается в обычный второй центральный момент и значение автокорреляционной функции в этой точке определяется дисперсией случайного процесса:

$$K(0) = D = G^2. \quad (4.40)$$

Нормирование автокорреляционной функции (4.39) к её значению в нуле приводит к нормированной функции

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{D}, \quad (4.41)$$

имеющей значение единица в точке $\tau = 0$: $K(0) = 1$. Поскольку статистическая зависимость между $[x(t_1)]$ и $x(t + \tau)$ ослабевает при возрастании τ , то в пределе при $\tau \rightarrow \infty$, эти значения будут независимыми. Тогда математическое ожидание (4.39) произведения двух независимых случайных процессов будет равно нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = K(\infty) = 0. \quad (4.42)$$

В силу стационарности рассматриваемых процессов плотность распределения вероятности инвариантна относительно начала отсчета времени, что влечет за собой четность автокорреляционной функции:

$$K(\tau) = K(-\tau). \quad (4.43)$$

Автокорреляционная функция суммы независимых случайных процессов, как это нетрудно показать, равна сумме автокорреляционных функций этих процессов. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой независимые стационарные процессы. Тогда

$$\begin{aligned} K(x + y)(\tau) &= \langle [x(t) + y(t)][x(t + \tau) + y(t + \tau)] \rangle = \\ &= \langle x(t)x(t + \tau) \rangle + \langle y(t)y(t + \tau) \rangle + \langle x(t)y(t + \tau) \rangle + \langle y(t)x(t + \tau) \rangle \end{aligned}$$

$$\langle y(t)y(t+\tau) \rangle = K_x(\tau) + K_y(\tau), \quad (4.44)$$

так как второе и третье слагаемые обращаются в нуль для независимых процессов. Из изложенного следует, что абсолютное значение автокорреляционной функции для любого $|\tau| > 0$ не может превышать её значение в точке $|\tau| > 0$

$$K(0) \geq |K(\tau)| \quad (4.45)$$

Таким образом, типичная автокорреляционная функция стремится к нулю с ростом величины τ (рис. 4.11).

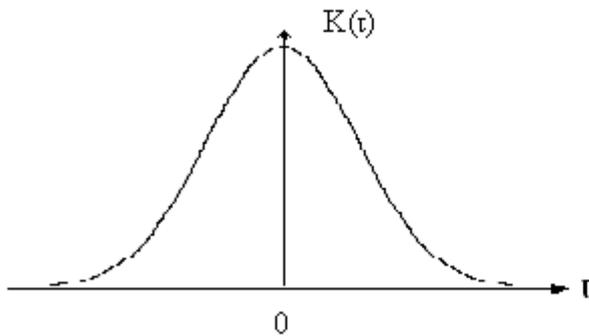


Рис. 4.11. Монотонная АКФ

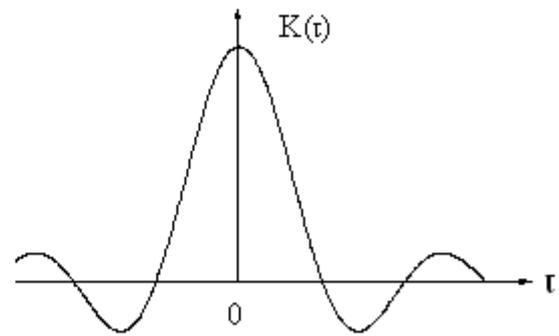


Рис. 4.12. Осциллирующая АКФ

Стремление к нулю не обязательно должно быть монотонным, т.к. автокорреляционная функция может иметь осциллирующий характер (рис. 4.12). Для стационарного случайного процесса всегда существует такая величина разноса моментов времени $t_2 - t_1 = \tau_0$, что при $\tau > \tau_0$ величины $x(t_1)$ и $x(t_2)$ можно считать практически некоррелированными. Это означает, что при $\tau > \tau_0$ абсолютная величина нормированной функции корреляции не превышает некоторую заданную величину $|R| < s$, $s \ll 1$. Величину τ_0 называют интервалом корреляции, а для случайных процессах развивающихся во времени – временем корреляции. Для автокорреляционных функций экспоненциального типа часто используется определение интер-

вала корреляции как величины τ_0 , для которой автокорреляционная функция принимает значение $R = e^{-1}$, где $e = 2,718$ есть основание натурального логарифма. Интервал корреляции может быть также определён как половина ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого определяется интегралом от модуля нормированной автокорреляционной функции (см. рис. 4.13):

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau. \quad (4.46)$$

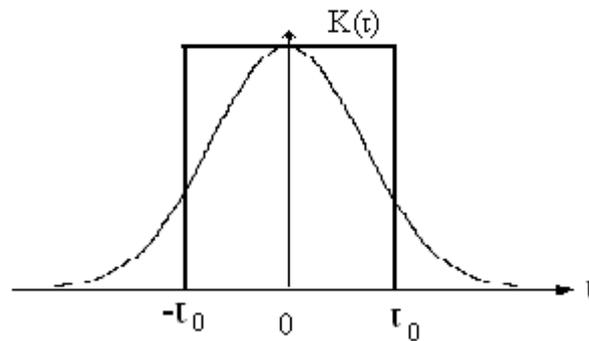


Рис. 4.13. К определению величины интервала корреляции

4.5. Эргодические случайные процессы.

При экспериментальном определении числовых характеристик случайных процессов необходимо производить усреднение с использованием множества реализаций $x^{(K)}(t)$ исследуемого процесса $x(t)$ (рис. 4.14). При этом искомые средние определяются усреднением по ансамблю значений, определённых в совпадающие моменты времени $t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, \dots, t_i^{(K)}$ для каждой из реализации. Однако значительная часть стационарных случайных процессов обладает так называемым свойством эргодичности [20, 21], которое позволяет определить вероятные характеристики этих процессов с использованием всего лишь одной реализации. Случайный процесс называется

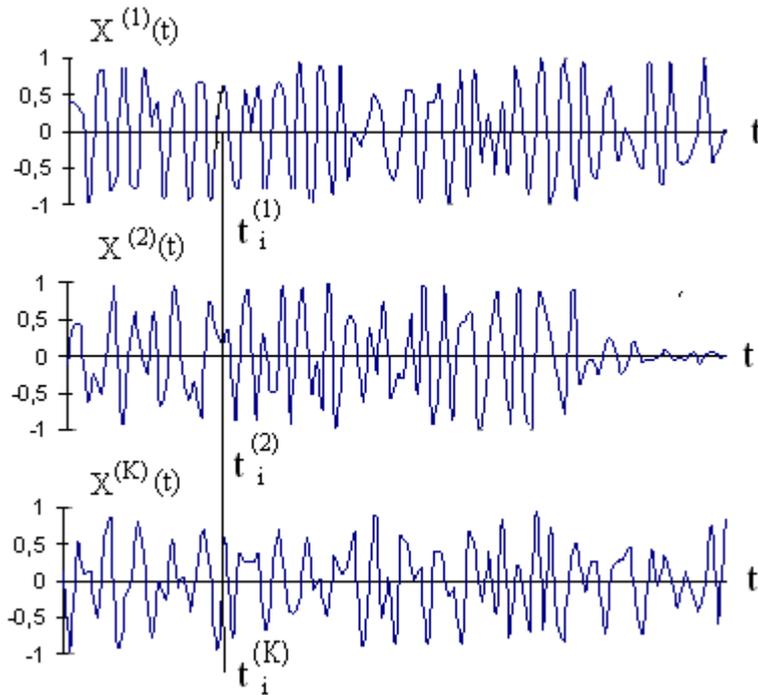


Рис.4.14. Ансамбль реализаций случайного процесса

эргодическим, если любая его вероятностная характеристика, найденная усреднением по множеству реализаций, равна (с вероятностью, близкой к единице) среднему значению, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени единственной реализации случайного процесса. Если вероятностные характеристики, найденные усреднением по множеству реализаций, определяются как

$$\langle x^{(K)}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ (среднее значение),}$$

$$\langle [x^{(K)}(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx \text{ (средняя мощность),}$$

$$\langle x^{(k)}(t) x^{(k)}(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \text{ (АКФ),}$$

а моменты, найденные усреднением во времени одной реализации, имеют вид

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt,$$

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt,$$

то для эргодических процессов справедливы условия

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx, \quad (4.47)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx, \quad (4.48)$$

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (4.49)$$

Итак, если случайный процесс эргодический, то любая его реализация отображает свойства всего множества реализаций, и поэтому результат усреднения во времени, выполненного над одной реализацией, совпадает с соответствующим средним значением, найденным усреднением по совокупности реализаций. При этом длительность используемой реализации должна во много раз превышать интервал корреляции.

4.6. Энергетический спектр стационарного случайного процесса.

Теорема Винера-Хинчина

В двух первых главах данной книги были изложены методы анализа периодических и непериодических детерминированных функций с использованием рядов Фурье и преобразований Фурье. Желательно было бы обладать таким же эффективным математическим аппаратом для анализа случайных процессов. Однако непосредственное приложение классического гармонического анализа к случайным процессам невозможно, но можно обобщить методы гармонического анализа, усредняя результаты спек-

трального разложения отдельных реализаций [20, 21]. Запишем формально случайную комплексную спектральную функцию $\dot{F}_T^{(K)}(\omega)$, соответствующую реализации действительного случайного процесса $x_T^{(K)}(x)$, наблюдаемой на достаточно большом интервале времени T

$$\dot{F}_T^{(K)}(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^{(K)}(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (4.50)$$

Если функция $x_T^{(K)}$ есть ток или напряжение при сопротивлении нагрузки 1 Ом, то мощность на частоте ω , отнесенная к полосе $\Delta f = 1/T$ и выделенная за время существования одной реализации, может быть определена как

$$\begin{aligned} & \left| \dot{F}_T^{(K)}(\omega) \right|^2 / T = \dot{F}_T^{(K)}(\omega) \dot{F}_T^{*(K)}(\omega) = \\ & = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^{(K)}(t) x_T^{(K)}(t_2) \exp(-j\omega t_1) \exp(j\omega t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Случайные реализации $\left| \dot{F}_T^{(K)}(\omega) \right|^2 / T$ образуют ансамбль случайных функций частоты, отвечающий ансамблю $x_T^{(K)}(t)$ случайных функций времени. Усредним левую и правую части выражения (4.51) по ансамблю:

$$G_T(\omega) = \langle \left| \dot{F}_T^{(K)}(\omega) \right|^2 / T \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \langle x_T^{(K)}(t_1) x_T^{(K)}(t_2) \rangle \exp[-j\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2.$$

Учитывая, что среднее по ансамблю $\langle x_T^{(K)}(t_1) x_T^{(K)}(t_2) \rangle$ представляет собой автокорреляционную функцию $K(t_1, t_2)$, а также принимая во внимание, что для стационарных процессов $K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2)$, перепишем последнее выражение следующим образом:

$$G_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} K(t_1 - t_2) \exp[-j\omega(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2. \quad (4.52)$$

Введем в (4.52) замену переменных вида $\tau = t_1 - t_2$, $t_2 = t_2$. При этом связь между старыми и новыми пределами интегрирования имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l}
 1. \ t_1 = T/2, \quad \tau = T \\
 \quad t_2 = -T/2, \quad t_2 = -T/2 \\
 2. \ t_1 = T/2, \quad \tau = 0 \\
 \quad t_2 = T/2, \quad t_2 = T/2
 \end{array} \right\} 0 \leq \tau < T; \ (-T/2) \leq t_2 < -\tau + (T/2);$$

$$\left. \begin{array}{l}
 3. \ t_1 = -T/2, \quad \tau = -T \\
 \quad t_2 = +T/2, \quad t_2 = +T/2 \\
 4. \ t_1 = -T/2, \quad \tau = 0 \\
 \quad t_2 = -T/2, \quad t_2 = -T/2
 \end{array} \right\} -T \leq \tau < 0; \ (-\tau - T/2) \leq t_2 < (T/2)$$

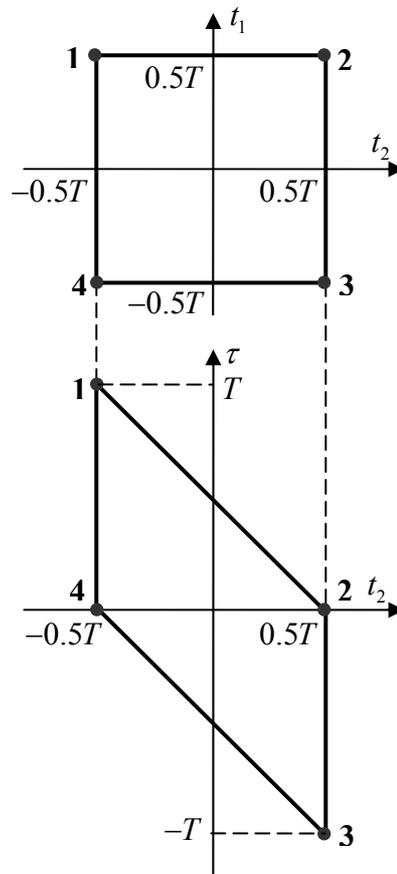


Рис. 4.15. Замена пределов интегрирования

При этом интегрирование по квадрату переходит в интегрирование по параллелограмму (рис. 4.15), а выражение (4.52) в новых пределах принимает вид:

$$G_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau+T/2} \int_{-T/2}^{T/2} K(\tau) \exp[-j\omega\tau] dt_2 d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T-(\tau+T/2)}^0 \int_{-T/2}^{T/2} K(\tau) \exp[-j\omega\tau] dt_2 d\tau +$$

$$G_T(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau+T/2} \int_{-T/2}^{T/2} K(\tau) \exp[-j\omega\tau] dt_2 d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T-(\tau+T/2)}^0 \int_{-T/2}^{T/2} K(\tau) \exp[-j\omega\tau] dt_2 d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T (T-\tau) K(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau + \frac{1}{T} \int_{-T}^0 (T+\tau) K(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau.$$

Сумма двух первых интегралов равна нулю, а третий и четвертый можно объединить. Тогда

$$G_T(\omega) = \int_{-T}^T (1-|\tau|/T) K(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (4.53)$$

При $T \rightarrow \infty$ величина $|\tau|/T \rightarrow 0$ и выражение (4.53) принимает вид

$$G_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (4.54a)$$

Функция $G(\omega)$ называется энергетическим спектром случайного процесса. Энергетический спектр представляет собой усредненную картину распределения энергии случайного процесса по частотам гармонических составляющих процесса, но не учитывает их фаз. Энергетический спектр не является случайной функцией, поскольку определяется как прямое преобразование Фурье неслучайной автокорреляционной функции.

В дополнение к соотношению (4.54a) может быть записано и обратное преобразование Фурье.

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (4.54б)$$

Пара преобразований (4.54) представляет собой известную теорему Винера-Хинчина для стационарных случайных процессов [20, 21].

Поскольку автокорреляционная функция является чётной функцией, то

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.54\text{в})$$

откуда видно, что энергетический спектр также является чётной функцией. Если в выражении (4.54б) принять $\tau = 0$, то окажется, что значение автокорреляционной функции в точке $\tau = 0$ определяется интегралом от энергетического спектра:

$$K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (4.55)$$

Мощность постоянной составляющей случайного процесса (т.е. спектральная плотность мощности на частоте $\omega = 0$), может быть найдена из выражения (4.54а) для значения $\omega = 0$:

$$G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau, \quad (4.56)$$

т.е. определяется площадью под автокорреляционной функцией.

Используя выражения (4.55) и (4.56) можно переписать выражение (4.46) для интервала корреляции как:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = \frac{G(0)}{2K(0)}. \quad (4.57)$$

В заключение отметим, что энергетический спектр является положительно определенной функцией $G(\omega) \geq 0$, поскольку мощность не может принимать отрицательных значений.

4.7. Энергетический спектр как плотность вероятности.

Спектральные моменты

Не следует полагать, что использование преобразований Фурье представляет для теории радиотехнических сигналов только вычислительный интерес или метод наглядного анализа. Значимость методов Фурье – анализа чрезвычайно велика с точки зрения установления новых связей, а

также проведения параллелей между разделами математики, широко используемыми в радиотехнике, которые на первый взгляд не связаны между собой. Для анализа одного из таких интересных примеров необходимо расширить те краткие сведения из теории вероятностей, что были приведены выше.

4.7.1. Числовые характеристики функций случайных величин

В задачах радиотехники, связанных с анализом случайных процессов, очень часто анализируемая случайная величина представляет собой функцию других случайных величин [19]. Так, например, гармонический процесс со случайной фазой $x(t) = \cos[\omega t + \varphi(t)] = x[\varphi(t), t]$ есть функция случайного аргумента φ . Если случайной является не только фаза, но и частота, то случайный процесс $x(t) = \cos[\omega t + \varphi(t)] = x[\omega(t), \varphi(t), t]$ является функцией двух случайных переменных, а если случайна еще и амплитуда, то процесс $x(t) = A(t) \cos[\omega(t) + \varphi(t)] = x[A(t), \omega(t), \varphi(t), t]$ будет представлять собой функцию трёх случайных переменных [20, 21, 22]. Для полного статистического описания процесса $x(t)$ необходимо определить его закон распределения, связанный с законами распределения случайных аргументов (P_A, P_ω, P_φ).

Задача нахождения закона распределения функции нескольких случайных аргументов является достаточно сложной. Однако на практике часто встречаются случаи, когда нет необходимости полного определения законов распределения функций случайных величин, а достаточно только указать их числовые характеристики; чаще всего – только математическое ожидание и дисперсию. В связи с этим возникает задача определения только числовых характеристик функций случайных величин [19, 20, 21, 22].

Рассмотрим прежде всего математическое ожидание (среднее значение) функции случайной величины. Напомним, что определение математического ожидания непрерывной случайной величины (не функции случайной величины!) было дано выражением (4.18a) на основе использования понятия начального момента (4.18), но сейчас будет рассмотрен несколько иной процесс определения математического ожидания случайной величины, который позволит без особых усилий найти среднее значение функции случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины X связано своеобразной зависимостью со средним арифметическим значением случайной величины при большом числе опытов.

Рассмотрим дискретную случайную величину X , которую можно характеризовать рядом распределения

X_i	X_1	X_2	X_n
P_i	P_1	P_2		P_n

где X_i – значения дискретной случайной величины X , а $P_i = P(X = X_i)$ есть отвечающие этим значениям вероятности.

Пусть производится N независимых опытов, в каждом из которых величина X принимает некоторое (случайное) значение. Предположим, что значение X_1 появилось m_1 раз, значение X_2 появилось m_2 раз, а значение X_i появилось m_i раз. Естественно, что выполняется условие $\sum_{i=1}^n m_i = N$.

Найдем теперь среднее арифметическое значение случайной величины X

$$M^*[x] = \frac{X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n}{N} = X_1 \frac{m_1}{N} + X_2 \frac{m_2}{N} + \dots + X_n \frac{m_n}{N} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{m_i}{N}.$$

Отношение m_i / N есть не что иное как частота (или статистическая вероятность) события $X = X_i$

$$P_i^* = \frac{m_i}{N}.$$

Тогда среднее арифметическое значение случайной величины можно записать в виде

$$M^*[X] = \sum_{i=1}^n X_i P_i^*. \quad (4.58a)$$

т.е. как сумму произведений всех возможных значений случайной величины на частоты (вероятность) этих величин. При большом числе опытов величина $M^*[X]$ стремится к математическому ожиданию $M[X]$. Для непрерывной случайной величины математическое ожидание выражается интегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (4.58b)$$

который соответствует выражению (4.18a). Необходимо отметить, что использованный выше ряд распределения является законом распределения случайной величины X и даёт её полное статистическое описание.

Рассмотрим теперь задачу об определении математического ожидания функции случайной величины при заданном законе распределения аргумента. Для простоты рассмотрим одномерный случай.

Пусть имеется случайная величина X с заданным законом распределения, а другая случайная величина Y связана с величиной X взаимнооднозначной функциональной зависимостью $Y = \varphi[X]$. Необходимо определить математическое ожидание величины Y , не определяя её закона распределения,

$$m_Y = M[\varphi(X)]. \quad (4.59)$$

Предположим, что X есть дискретная случайная величина, характеризуемая рядом распределения

X_i	X_1	X_2	X_n
P_i	P_1	P_2		P_n

Случайное событие $Y_i = \varphi(X_i)$ может произойти только с вероятностью P_i , а если событие X_i повторяется m_i раз, то, в силу однозначности связи $Y_i = \varphi(X_i)$, столько же раз повторяется событие Y_i . Выпишем возможные значения величины Y и вероятности этих событий:

$Y_i = \varphi(X_i)$	$Y_1 = \varphi(X_1)$	$Y_2 = \varphi(X_2)$	$Y_n = \varphi(X_n)$
P_i	P_1	P_2		P_n

Рассуждая так же, как и при определении среднего арифметического значения случайной величины X , определим среднее арифметическое значение функции этой случайной величины в серии из N опытов:

$$\begin{aligned}
 M^*[Y] &= M^*[\varphi(X)] = \\
 &= \frac{\varphi(X_1)m_1 + \varphi(X_2)m_2 + \dots + \varphi(X_n)m_n}{N} = \\
 &= \varphi(X_1)\frac{m_1}{N} + \varphi(X_2)\frac{m_2}{N} + \dots + \varphi(X_n)\frac{m_n}{N} = \varphi(X_i)\frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^n \varphi(X_i)P_i^*. \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

При большом количестве опытов частоты превратятся в соответствующие вероятности, а для непрерывной функции случайного аргумента $Y = \varphi(X)$ выражение (4.60) примет вид

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx. \quad (4.61a)$$

Таким образом, для определения математического ожидания функции слу-

чайной величины не требуется знать закон распределения функции, а достаточно знать закон распределения аргумента.

Аналогично может быть определено математическое ожидание функции $\varphi(X, Y)$ от двух случайных величин

$$M[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (4.61б)$$

где $f(x, y)$ – плотность распределения системы случайных величин (X, Y) , а также математическое ожидание функции от произвольного числа случайных аргументов

$$\begin{aligned} M[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.61в)$$

Здесь $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – плотность распределения системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Аналогично изложенному может быть найдена дисперсия функции случайного аргумента (или аргументов). Так, дисперсия функции одного случайного аргумента определяется как

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_\varphi]^2 f(x) dx, \quad (4.62а)$$

где $m_\varphi = M[\varphi(x)]$ – математическое ожидание функции $\varphi(x)$, $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X .

Дисперсия функции двух случайных аргументов и дисперсия функции произвольного числа случайных аргументов определяются в соответственно в виде

$$D[\varphi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) - m_\varphi]^2 f(x, y) dx, dy, \quad (4.62б)$$

$$D[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) - m_\varphi]^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n. \quad (4.62\text{в})$$

4.7.2. Характеристическая функция и её свойства

В приложениях методов теории вероятностей к задачам анализа радиотехнических сигналов большое значение имеет специальная форма функционального преобразования случайной величины X :

$$\eta = \exp(j\nu x), \quad (4.63)$$

где ν есть некоторый вещественный параметр. Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины η , представляющей собой функцию случайной величины X , называется характеристической функцией случайной величины X . Используя выражение (4.61а) для среднего значения функции случайной величины, определим характеристическую функцию в виде

$$S(\nu) = m_1 \{ \exp(j\nu x) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\nu x) f_1(x) dx, \quad (4.64\text{а})$$

или

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\nu x) f_1(x) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\nu x) f_1(x) dx, \quad (4.64\text{б})$$

где $f_1(x)$ есть плотность распределения случайного аргумента X . Из выражения (4.64а) следует, что характеристическая функция $S(\nu)$ и плотность вероятности $f_1(x)$ являются сопряженными по Фурье функциями, т.е.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\nu x) S(\nu) d\nu. \quad (4.64\text{в})$$

Нетрудно видеть, что модуль характеристической функции определяется как

$$|S(v)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(jvx) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x) \exp(jvx)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = 1,$$

поскольку модуль $|\exp(jvx)| = 1$. Отсюда следует, что интеграл (4.64а) сходится. Поэтому характеристическая функция может быть определена для любой случайной величины. При $v \rightarrow \pm\infty$ характеристическая функция стремится к нулю, а в точке $v = 0$ характеристическая функция равна единице

$$S(v=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = 1.$$

При замене величины v на отрицательную величину, характеристическая функция становится комплексно-сопряженной

$$S(-v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(-jvx) dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(jvx) dx \right]^* = S^*(v).$$

Для симметричных (чётных) распределений характеристическая функция представляет собой косинус – преобразование Фурье, что следует из выражения (4.64б).

Рассмотрим несколько примеров определения характеристических функций для различных видов плотности вероятности

Равномерное распределение.

Зададим равномерную плотность вероятности на интервале $-a < x < a$ как $f_1(x) = 1/2a$. Тогда

$$S_1(v) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \exp(jvx) dx = \frac{\sin av}{av}. \quad (4.65)$$

Одностороннее экспоненциальное распределение.

Зададим одностороннее распределение $f_1(x) = \lambda \exp[-\lambda x]$ на интервале $0 < x < \infty$. Соответствующая этому распределению характеристическая функция имеет вид

$$S(v) = \lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) \exp(jvx) dx = \lambda \int_0^{\infty} \exp[-(\lambda - jv)x] dx = \frac{\lambda}{\lambda - jv}. \quad (4.66)$$

Нормальное распределение.

Зададим нормальное распределение

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

характеризуемое параметрами a , σ . Тогда

$$\begin{aligned} S(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ivx) \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 2ivx\right]\right\} dx. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Дополним выражение в показателе экспоненты до полного квадрата; для чего перепишем его в виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 2i\frac{\sigma vx}{\sigma} + 2i\frac{\sigma va}{\sigma} - \sigma^2 v^2 - 2i\frac{\sigma va}{\sigma} + \sigma^2 v^2\right] = \\ &= \left[\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 2i\frac{\sigma v(x-a)}{\sigma} - \sigma^2 v^2\right] - 2iav + \sigma^2 v^2 = \left[\frac{x-a}{\sigma} - i\sigma v\right]^2 - 2iav + \sigma^2 v^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$S(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} - iav\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-a}{\sigma} - i\sigma v\right]^2\right\} dx. \quad (4.68)$$

Введем замену переменных

$$z = \frac{x-a}{\sigma} - i\sigma v, \quad dx = \sigma dz$$

и перепишем выражение (4.68) как

$$S(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} - iav\right)\right] \int_{-\infty - i\sigma v}^{\infty - i\sigma v} \exp(-0,5z^2) dz. \quad (4.69)$$

Поскольку функция $\exp(-0.5z^2)$ является аналитической, то

$$\int_{-\infty-i\sigma v}^{\infty-i\sigma v} \exp(-0.5z^2) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-0.5t^2) dt = \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, характеристическая функция случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид

$$S(v) = \exp\left[-\left(\frac{\sigma^2 v^2}{2} - iav\right)\right].$$

4.7.3. Использование характеристической функции для вычисления моментов распределения

Использование характеристической функции позволяет упростить выполнение целого ряда операций определения вероятностных характеристик, в частности, вычисление моментов распределения [9, 19]. Предполагая, что характеристическая функция (4.64а) обладает производной порядка k , найдем эту производную:

$$\frac{d^k S(v)}{dv^k} = \frac{d^k}{dv^k} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(jvx) dx \right\} = (j)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_1(x) \exp(jvx) dx. \quad (4.71)$$

Из выражения (4.71) следует, что производная порядка k характеристической функции $S(v)$ в точке $v=0$ связана с начальным моментом порядка k распределения случайной величины X соотношением

$$\left. \frac{d^k S(v)}{dv^k} \right|_{v=0} = (j)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_1(x) dx = (j)^k m_k \{x\}.$$

Таким образом, начальные моменты распределения случайной величины могут быть определены в виде

$$m_k \{x\} = \frac{1}{(j)^k} = \frac{1}{(j)^k} \left. \frac{d^k S(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (4.72)$$

Центральные моменты распределения связаны простыми отношениями с производными от логарифма характеристической функции $\psi(v) = \log S(v)$, называемого кумулянтной функцией. Разлагая кумулянтную функцию в степенной ряд

$$\log S(v) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x_m (iv)^m}{m!}, \quad (4.73)$$

можно доказать что величины λ_m , которые называются кумулянтами (или семиинвариантами), связаны с моментами распределения следующим образом

$$\lambda_1 = \bar{x}, \quad \lambda_2 = \mu_2 = \sigma^2, \quad \lambda_3 = \mu_3 \text{ (асимметрия)}, \quad \lambda_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 \text{ (эксцесс)}$$

4.7.4. Энергетический спектр как плотность вероятности

В подразделе 4.6 было отмечено, что энергетический спектр $G(\omega)$ представляет собой положительно определенную функцию $G(\omega) \geq 0$, поскольку мощность не может принимать отрицательных значений, а интеграл от энергетического спектра определяет полную энергию процесса

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = K(0) = \sigma^2 < \infty.$$

Обратим теперь внимание на тот факт, что основными свойствами функции плотности вероятности является её неотрицательность $f(x) \geq 0$ и равенство интеграла от этой функции единице (условие нормировки)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Таким образом, за исключением нормирующего коэффициента $K(0) = \sigma^2$, энергетический спектр обладает свойствами плотности вероятности. Упомянутую нормировку нетрудно ввести:

$$G_N(\omega) = G(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \right]^{-1} = \frac{G(\omega)}{K(0)}. \quad (4.74)$$

Нормированная функция $G_N(\omega)$ может быть рассмотрена как плотность вероятности случайной величины ω [20]. Рассмотрение частоты ω в качестве случайной величины имеет непосредственную физическую интерпретацию: функция $f_1(\omega)d\omega$ представляет вероятность того, что случайный процесс $x(t)$ обладает средней мощностью $G_N(\omega)d\omega$ в полосе частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Из соотношения (4.74) или из теоремы Винера-Хинчина следует, что не всякая симметричная функция может быть автокорреляционной функцией, так как всегда необходимо чтобы преобразование Фурье этой функции приводило к энергетическому спектру, никогда не принимающему отрицательных значений.

Перепишем теперь выражение (4.54б)

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega$$

и разделим его левую и правую части на величину $K(0) = \sigma^2$. Тогда выражение (4.54б) примет вид

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_N(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega, \quad (4.75)$$

где $G_N(\omega)$ – нормированный энергетический спектр, представляющий собой плотность вероятности. Сравнивая выражение (4.75) с соотношением (4.64а), определяющим характеристическую функцию, видим, что нормированная корреляционная функция $R(\tau)$ есть не что иное, как характеристическая функция случайной величины ω .

4.7.5. Спектральные моменты

Поскольку нормированный энергетический спектр $G_N(\omega)$ и нормированная автокорреляционная функция $R(\tau)$ представляют собой плотность вероятности и характеристическую функцию случайной величины ω соответственно, то возникает мысль об использовании функции $R(\tau)$ для определения моментов энергетического спектра $G_N(\omega)$ по аналогии с использованием характеристической функции $S(v)$ для определения моментов плотности вероятностей $f(x)$ [20].

В предыдущем подразделе было показано, что начальные моменты плотности распределения случайной величины X порядка k определяются производными того же порядка от характеристической функции этой случайной величины (см. выражение (4.72)). Однако простая аналогия может не иметь место и поэтому необходимо прежде всего рассмотреть вопрос о дифференцировании случайного процесса $x(t)$ и об определении корреляционной функции его производной.

Случайный процесс $x(t)$ является дифференцируемым в точке t в среднеквадратическом, если существует такая случайная функция $dx(t)/dt$, называемая производной в среднеквадратическом процесса $x(t)$ в точке t , что

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_1 \left\{ \left| \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 \right\} = 0. \quad (4.76)$$

Для определения автокорреляционной функции производной $dx(t)/dt$ случайного процесса $x(t)$ рассмотрим прежде всего простейшие вероятностные характеристики разности двух значений случайного процесса $x(t)$, разнесённых на интервал Δt :

$$x_{\Delta t}(t) = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Среднее значение разности $x_{\Delta t}(t)$ можно найти как

$$m\{x_{\Delta t}(t)\} = m\{x(t + \Delta t)\} - m\{x(t)\}.$$

Для стационарного процесса

$$m\{x_{\Delta t}(t)\} = 0 \quad (4.77)$$

в силу инвариантности статистических характеристик этого процесса.

Средний квадрат разности $x_{\Delta t}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} m\{[x_{\Delta t}(t)]^2\} &= m\{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2\} = \\ &= m\{x^2(t + \Delta t)\} + m\{x^2(t)\} - 2m\{x(t)x(t + \Delta t)\}. \end{aligned}$$

Для стационарного процесса величина среднего квадрата определяется как

$$m\{[x_{\Delta t}(t)]^2\} = 2[\sigma_x^2 - K_x(t, t + \Delta t)]. \quad (4.78)$$

Автокорреляционная функция разности $x_{\Delta t}(t)$ может быть найдена в виде

$$\begin{aligned} K_{\Delta t}(t_1, t_2) &= m\{[x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)][x(t_2 + \Delta t) - x(t_2)]\} = \\ &= m\{x(t_1 + \Delta t)x(t_2 + \Delta t)\} - m\{x(t_1)x(t_2 + \Delta t)\} - \\ &\quad - \{x(t_1 + \Delta t)x(t_2)\} + m\{x(t_1)x(t_2)\}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} K_{\Delta t}(t_1, t_2) &= K_{\Delta t}(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) + K_{\Delta t}(t_1, t_2) - \\ &\quad - K_{\Delta t}(t_1, t_2 + \Delta t) - K_{\Delta t}(t_1 + \Delta t, t_2). \end{aligned}$$

Для стационарного процесса последнее выражение принимает вид

$$K_{\Delta t}(\tau) = 2K_{\Delta t}(\tau) - K_{\Delta t}(\tau + \Delta t) - K_{\Delta t}(\tau - t), \quad (4.79)$$

где $\tau = t_1 - t_2$.

Вероятностные характеристики (среднее значение, автокорреляционная функция и т.д.) производной $dx(t)/dt$ случайного процесса могут быть получены из вероятностных характеристик отношения

$$\frac{x_{\Delta t}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

предельным переходом при $\Delta t \rightarrow 0$.

Тогда для среднего значения производной стационарного процесса получим (учитывая линейность операций дифференцирования и математического ожидания)

$$\begin{aligned} m\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m\left\{\frac{x_{\Delta t}(t)}{\Delta t}\right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\{x(t + \Delta t) - m\{x(t)\}\}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m\{x(t + \Delta t)\}}{\Delta t}\right] - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m\{x(t)\}}{\Delta t}\right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее значение производной стационарного случайного процесса всегда равно нулю.

Найдем теперь автокорреляционную функцию производной случайного процесса

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m\left\{\frac{x_{\Delta t}(t_1)}{\Delta t} \frac{x_{\Delta t}(t_2)}{\Delta t}\right\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} K_{\Delta t}(t_1, t_2).$$

Для стационарного случайного процесса функция $K_{\Delta t}(t_1, t_2)$ определяется выражением (4.79). Тогда

$$K_{x'}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \{2K_{\Delta t}(\tau) - K_{\Delta t}(\tau + \Delta t) - K_{\Delta t}(\tau - \Delta t)\}.$$

Разлагая правую часть последнего выражения в ряд Тейлора, найдем автокорреляционную функцию $K_{x'}(\tau)$ производной $dx(t)/dt$ случайного процесса $x(t)$:

$$K_{x'}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} K_{\Delta t}(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}. \quad (4.80)$$

Таким образом, автокорреляционная функция производной стационарного случайного процесса $x(t)$ равна второй производной от автокорреляционной функции процесса $x(t)$, взятой с обратным знаком [19].

В соответствии с теоремой Винера-Хинчина, автокорреляционная функция производной $dx(t)/dt$ стационарного случайного процесса должна быть связана с энергетическим спектром производной случайного процесса. Используя выражение (4.54б), которое в силу четности автокорреляционной функции $K(\tau)$ можно записать как

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

и выражение (4.80), запишем:

$$K_{X'}(\tau) = -\frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 G_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.81)$$

Из выражения (4.81) следует, что энергетический спектр производной случайного процесса $x(t)$ определяется в виде

$$G_{X'}(\omega) = \omega^2 G_X(\omega). \quad (4.82)$$

Нетрудно показать, что автокорреляционная функция производной порядка k случайного процесса $x(t)$ может быть определена как

$$K_{X^{(k)}}(\tau) = (-1)^k \frac{d^{(2k)}}{d\tau^{(2k)}} K_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{2k} G_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.83)$$

Определим теперь величины

$$b_k \equiv (-j)^k \left. \frac{d^{(k)}}{d\tau^{(k)}} K_X(\tau) \right|_{\tau=0} = \frac{(-j)^k}{2\pi} \left. \frac{d^{(k)}}{d\tau^{(k)}} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \right|_{\tau=0},$$

представляющие собой производные порядка k от исходной автокорреляционной функции случайного процесса $x(t)$. Нетрудно показать после простых вычислений, что эти величины существуют только для четных значений k и имеют вид

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k G_X(\omega) d\omega \begin{cases} = 0 & \text{при } k=1, 3, 5\dots \\ \neq 0 & \text{при } k=0, 2, 4, 6\dots \end{cases} \quad (4.84)$$

Таким образом, аналогично тому, как моменты функции плотности веро-

ятностей случайной величины x могут быть определены путем дифференцирования характеристической функции $S(\nu)$, дифференцирование автокорреляционной функции случайного процесса (которая по своим свойствам аналогична характеристической функции) приводит к величинам, которые могут быть интерпретированы как моменты энергетического спектра, обладающего свойствами плотности вероятности.

Величины b_{2k} называются спектральными моментами порядка $2k$ действительного случайного процесса $x(t)$.

4.8. Автокорреляционные функции и энергетические спектры некоторых случайных радиотехнических сигналов

Рассмотрим примеры, показывающие последовательность вычислений при определении автокорреляционных функций некоторых случайных радиотехнических сигналов, а также их энергетических спектров [22].

Найдем прежде всего автокорреляционную функцию $K_x(\tau)$ и энергетический спектр стационарного случайного сигнала вида

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.85)$$

где A и ω – постоянные амплитуда и частота, а φ – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

В соответствии с определением автокорреляционной функции запишем

$$K_x(\tau) = m\{x(t)x(t+\tau)\} - m_x^2,$$

где $m\{\dots\}$ – оператор математического ожидания (усреднения). Найдем прежде всего среднее значение случайного процесса (4.85), представляющего собой функцию случайной величины φ . Учитывая, что среднее значение функции случайной величины определяется как

$$m\{y(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)f_1(x)dx,$$

запишем

$$m\{x(t, \varphi)\} = A \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) f_1(\varphi) d\varphi, \quad (4.86)$$

где $f_1(\varphi) = 1/2\pi$ – плотность вероятности случайной фазы φ , которая, как это уже было указано, равномерно распределена на интервале $(-\pi, \pi)$.

Вычислим математическое ожидание (4.86)

$$m\{x(t, \varphi)\} = \frac{A \sin \omega_0 t}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{A \cos \omega_0 t}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 0,$$

а затем найдем автокорреляционную функцию процесса (4.85) в виде

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= m\{x(t)x(t+\tau)\} = \\ &= A^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) f_1(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.87a).$$

С учетом того, что $\sin \alpha \sin \beta = 0,5[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, перепишем (4.87a) как

$$K_x(\tau) = \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 \tau) d\varphi - \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi] d\varphi. \quad (4.87b)$$

Нетрудно видеть, что второе слагаемое выражения (4.87) равно нулю

$$\frac{A^2}{4\pi} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi - \frac{A^2}{4\pi} \sin(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0$$

и тогда автокорреляционная функция процесса (4.85) принимает вид:

$$K_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (4.88a)$$

Вычисляя автокорреляционную функцию косинусоиды со случайной фазой

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где величины A и ω_0 постоянны, а фаза φ распределена равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \cos \omega_0 \tau \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{A^2}{4\pi} \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (4.88\text{б})$$

Сравнивая выражения (4.88а) и (4.88б), видим, что автокорреляционная функция нечувствительна к величине постоянного фазового сдвига (имеется в виду, что $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$).

Используя теорему Винера-Хинчина, найдем энергетический спектр случайных процессов $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \exp[-j(\omega - \omega_0)t] + \exp[-j(\omega + \omega_0)t] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\omega \pm \omega_0)\tau] d\tau = \delta(\omega \pm \omega_0),$$

получим

$$G(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (4.89)$$

Таким образом, энергетический спектр гармонического колебания со случайной фазой включает в себя две δ – функции расположенные на расстоянии $\pm\omega_0$ от начала координат.

Рассмотрим теперь более сложный пример, связанный с определением спектра мощности стационарного случайного процесса как плотности вероятности. Для этого найдем автокорреляционную функцию $K_X(\tau)$ и энергетический спектр $G(\omega)$ стационарного случайного процесса

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.90)$$

где амплитуда A , частота ω и начальная фаза φ представляют собой независимые случайные величины. При этом случайные величины A и ω заданы одномерными плотностями вероятностей $f_1(A)$ и $f_1(\omega)$, а начальная фаза φ распределена равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, так что $f_1(\varphi) = 1/2\pi$, $-\pi < \varphi < \pi$. Нетрудно показать, что математическое ожидание случайного процесса (4.90) $m\{x(t)\} = 0$. Тогда автокорреляционная функция этого может быть определена как среднее значение функции трех случайных аргументов в виде:

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)f_3(A, \omega, \varphi)dAd\omega d\varphi.$$

Учитывая независимость случайных величин A , ω , φ , положительную определенность величины A и стационарность процесса $x(t)$, перепишем последнее выражение как

$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega\tau + \varphi) f_1(A) f_1(\omega) dA d\omega d\varphi = \\ &= \int_0^{\infty} A^2 f_1(A) dA \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega\tau + \varphi) f_1(\omega) d\omega d\varphi. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Внешний интеграл в выражении (4.91) представляет собой средний квадрат амплитуды случайного процесса (4.90), т.е. величину $m\{A^2\} = \overline{A^2}$. Рассматривая двойной внутренний интеграл в выражении (4.91), перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi) f_1(\omega) d\omega d\varphi = \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)] f_1(\omega) d\omega d\varphi = \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \omega \tau f_1(\omega) d\omega d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi) f_1(\omega) d\omega d\varphi = \\
& = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cos \omega \tau d\omega \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\omega t + \omega \tau) f_1(\omega) d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\omega t + \omega \tau) f_1(\omega) d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi. \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi = -0,5 \sin 2\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi = -0,5 \cos 2\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

то выражение (4.92) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi) f_1(\omega) d\omega d\varphi = \\
& = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Учитывая соотношение (4.93) и тот факт, что значение внешнего интеграла в выражении (4.91) есть $\overline{A^2}$, получим автокорреляционную функцию процесса (4.90) в виде:

$$K_X(\tau) = 0,5 \overline{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) \cos \omega \tau d\omega \tag{4.94}$$

Дисперсия случайного процесса (4.90) определяется значением автокорреляционную функцию $K_X(\tau)$ в точке $\tau = 0$:

$$D_\alpha = K_X(0) = 0,5 \overline{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) d\omega. \quad (4.95)$$

Для определения спектра мощности стационарного процесса (4.90) напомним, что, в соответствии с теоремой Винера-Хинчина, автокорреляционная функция может быть записана как

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.96)$$

Приравнивая правые части выражений (4.96) и (4.94) видим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} 0,5 \overline{A^2} f_1(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

откуда

$$(2\pi)^{-1} G(\omega) = 0,5 \overline{A^2} f_1(\omega),$$

или

$$G(\omega) = \pi \overline{A^2} f_1(\omega). \quad (4.97)$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя спектр мощности стационарного случайного процесса (4.90) совпадает с одномерной плотностью вероятностей случайной частоты этого колебания, что и подтверждает рассмотренную выше гипотезу об эквивалентности энергетического спектра случайного процесса и плотности вероятностей случайной частоты ω .

В заключении подраздела рассмотрим задачу определения энергетического спектра случайного сигнала, имеющего нулевое среднее значение и характеризуемого автокорреляционной функцией вида

$$R_1(\tau) = G^2 \exp[-\alpha |\tau| \cos \omega_0 t]. \quad (4.98)$$

В соответствии с теоремой Винера-Хинчина запишем:

$$\begin{aligned}
G_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau = \\
&= G^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha|\tau|] \cos \omega_0\tau \exp[-j\omega\tau] d\tau = \\
&= G^2 \int_{-\infty}^0 \cos \omega_0\tau \exp[\alpha\tau - j\omega\tau] d\tau + G^2 \int_0^{\infty} \cos \omega_0\tau \exp[-(\alpha\tau + j\omega\tau)] d\tau. \quad (4.99a)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\cos \omega_0\tau = 0,5[\exp(j\omega_0\tau) + \exp(-j\omega_0\tau)],$$

перепишем выражение (4.99a) в виде

$$G_1(\omega) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (4.99б)$$

и вычислим интегралы

$$\begin{aligned}
I_1 &= 0,5G^2 \int_{-\infty}^0 \exp(j\omega_0\tau) \exp[\alpha\tau - j\omega\tau] d\tau = \\
&= 0,5G^2 \int_{-\infty}^0 \exp\{[\alpha - j(\omega - \omega_0)]\tau\} d\tau = \\
&= 0,5G^2 \frac{\exp[\alpha - j(\omega - \omega_0)]\tau}{\alpha - j(\omega - \omega_0)} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{0,5G^2}{\alpha - j(\omega - \omega_0)}. \quad (4.100a)
\end{aligned}$$

Аналогично

$$I_2 = 0,5G^2 \int_{-\infty}^0 \exp\{[\alpha - j(\omega + \omega_0)]\tau\} d\tau = \frac{0,5G^2}{\alpha - j(\omega + \omega_0)}, \quad (4.100б)$$

$$I_3 = 0,5G^2 \int_0^{\infty} \exp\{-[\alpha + j(\omega - \omega_0)]\tau\} d\tau = \frac{0,5G^2}{\alpha + j(\omega - \omega_0)}, \quad (4.100в)$$

$$I_4 = 0,5G^2 \int_0^{\infty} \exp\{-[\alpha + j(\omega + \omega_0)]\tau\} d\tau = \frac{0,5G^2}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}. \quad (4.100г)$$

Подставляя результаты интегрирования (4.100) в (4.99б), получаем

$$G_1(\omega) = \alpha G^2 \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (4.101)$$

Автокорреляционная функция и отвечающий ей энергетический спектр изображены на рис. 4.16а,б.

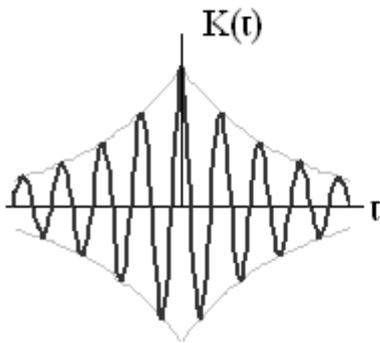


Рис. 4.16а. Автокорреляционная функция узкополосного процесса

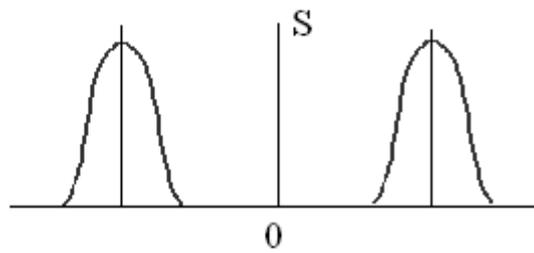


Рис. 4.16.б. Энергетический спектр узкополосного процесса

Если предположить, что частота гармонической составляющей автокорреляционной функции (4.98) равна нулю $\omega = 0$, то экспоненциально-косинусная автокорреляционная функция (4.98) превратиться в двустороннюю экспоненциальную функцию:

$$R_2(\tau) = G^2 \exp[-|\alpha\tau|],$$

а её энергетический спектр будет сосредоточен в области низких частот в окрестности нулевой частоты и определяется выражением

$$G_2(\omega) = \frac{2\alpha G^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Графическое изображение двусторонней экспоненциальной АКФ и отвечающему ей энергетического спектра приведено на рис. 4.17.

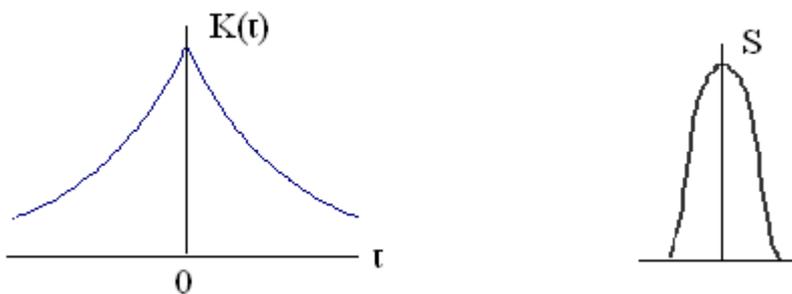


Рис 4.17. АКФ и энергетический спектр низкочастотного процесса

4.9 Автокорреляционная функция и энергетический спектр детерминированного процесса.

Автокорреляционная функция случайного процесса, найденная как среднее значение

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t-\tau) \rangle,$$

представляет собой, по определению свертку процесса $x(t)$ с самим собой:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau) dt. \quad (4.102)$$

Однако тот факт, что понятие автокорреляционной функции было введено при анализе случайных процессов, не означает, что это понятие не следует использовать для анализа детерминированных процессов. Как было показано в предыдущем подразделе, автокорреляционная функция и энергетический спектр уже не являются случайными функциями и связаны парой преобразований Фурье. Понятие энергетического спектра как распределение энергии по спектральным составляющим было введено при спектральном анализе детерминированных процессов.

Рассмотрим несколько примеров, демонстрирующих возможность использования корреляционного анализа детерминированных процессов. В одном из примеров, рассмотренных в главе 2, было показано, что спектральная плотность прямоугольного импульса, имеющего единичную амплитуду и длительность Δt , имеет вид

$$S_1(\omega) = \frac{\Delta t \sin \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \quad (4.103)$$

Этот импульс и соответствующая ему спектральная плотность изображены на рис.4.18а.

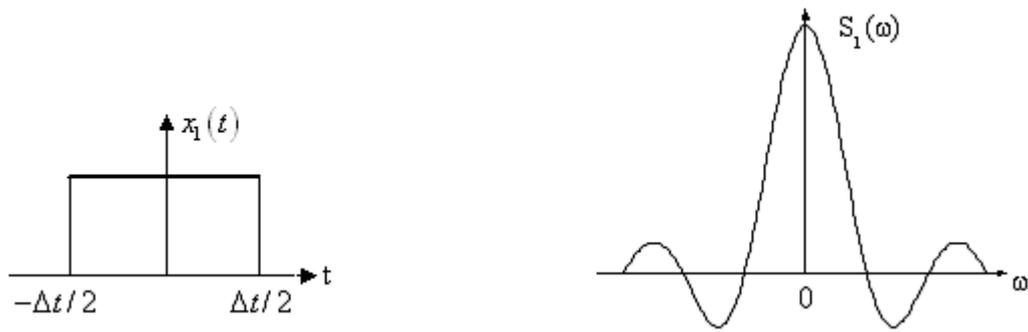


Рис.4.18а. Прямоугольный импульс и его спектральная плотность

Нетрудно также определить спектральную плотность треугольного импульса, имеющего единичную амплитуду и длительность $2\Delta t$.

Для определения спектральной плотности треугольного импульса запишем математическую модель этого сигнала как

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 + t/\Delta t, & -\Delta t < t < 0 \\ 1 - t/\Delta t, & 0 < t < \Delta t \end{cases} \quad (4.103a)$$

или в более компактном виде

$$x_2(t) = 1 - |t|/\Delta t. \quad (4.104)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \int_{-\Delta t}^{\Delta t} x_2(t) \exp[-j\omega t] dt = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} (1 - |t|/\Delta t) \exp[-j\omega t] dt = \\ &= \int_{-\Delta t}^0 (1 + t/\Delta t) \exp[-j\omega t] dt + \int_0^{\Delta t} (1 - t/\Delta t) \exp[-j\omega t] dt = \\ &= \int_{-\Delta t}^{\Delta t} \exp[-j\omega t] dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t}^0 t \exp[-j\omega t] dt - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} t \exp[-j\omega t] dt = \\ &= I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Вычисление интегралов I_1, I_2, I_3 дает:

$$I_1 = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} \exp[-j\omega t] dt = \frac{2 \sin \omega \Delta t}{\omega};$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t}^0 t \exp[-j\omega t] dt = \frac{1}{\Delta t} \left[-\frac{t}{j\omega} \exp(-j\omega t) \Big|_{-\Delta t}^0 + \frac{1}{j\omega} \int_{-\Delta t}^0 \exp(-j\omega t) dt \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[-\frac{\Delta t}{j\omega} \exp(j\omega\Delta t) + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \exp(j\omega\Delta t) \right]; \\
I_3 &= \frac{1}{\Delta t} \left[-\frac{\Delta t}{j\omega} \exp(-j\omega t) - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \exp(-j\omega t) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя результаты интегрирования в выражение (4.105), получим:

$$S_2(\omega) = \frac{2}{\Delta t + \omega} [1 - \cos \omega\Delta t]. \quad (4.105)$$

Используя формулу удвоения $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0,5(1 - \cos \alpha)$, последнее соотношение можно преобразовать к виду

$$S_2(\omega) = \Delta t \frac{\sin^2(\omega\Delta t/2)}{(\omega\Delta t/2)^2}. \quad (4.106)$$

Графическое изображение этого импульса и отвечающей ему спектральной плотности приведено на рис.4.18б

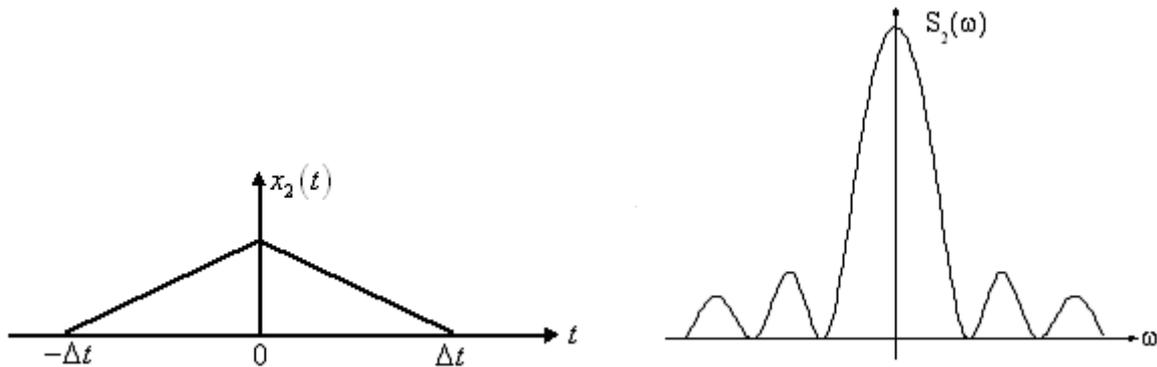


Рис. 4.18б. Треугольный импульс и его спектральная плотность

Сравнивая выражения (4.103) и (4.106), нетрудно видеть, что выражение для спектральной плотности треугольной функции (4.104) представляет собой квадрат функции, описывающей спектральную плотность прямоугольного импульса длительностью Δt .

Однако, квадрат спектральной плотности есть не что иное, как энергетический спектр. Тогда, учитывая, что теорема Винера-Хинчина связывает энергетический спектр некоторого процесса преобразованием Фурье с автокорреляционной функцией этого процесса, из выражения (4.105), часть которого переписана здесь как

$$S_2(\omega) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} (1 - |t|/\Delta t) \exp(-j\omega t) dt,$$

нетрудно видеть, что функция $(1 - |t|/\Delta t)$ есть не что иное, как автокорреляционная функция прямоугольного импульса длительностью Δt . Данный факт можно пояснить с использованием интеграла свертки (4.102) и графического построения, приведенного на рис.4.19а,б,в.

Интеграл свертки (4.102) может быть вычислен с использованием графического построения, поскольку этот интеграл представляет собой относительную площадь перекрытия сдвинутых импульсов, величина которой линейно нарастает от нуля (при сдвиге $\tau = -\Delta t$) до 1 (сдвиг $\tau = 0$), а затем уменьшается до нуля при сдвиге $\tau = \Delta t$.

Из рис.4.19 следует, что свертка (4.102) отлична от нуля лишь в пределах $t \in (-\Delta t, \Delta t)$, т.е. когда имеет место наложения сигналов. Этот интервал определяется величиной $t - |t|$. Таким образом, автокорреляционная функция прямоугольного импульса с единичной амплитудой имеет вид

$$R(\tau) = \tau_n (1 - |\tau|/\tau_u), \quad (\tau_u = \Delta t).$$

Таким образом, нормированная автокорреляционная функция прямоугольного импульса представляет собой равнобедренный треугольник с основанием, равным удвоенной длительности импульса (рис.4.20)

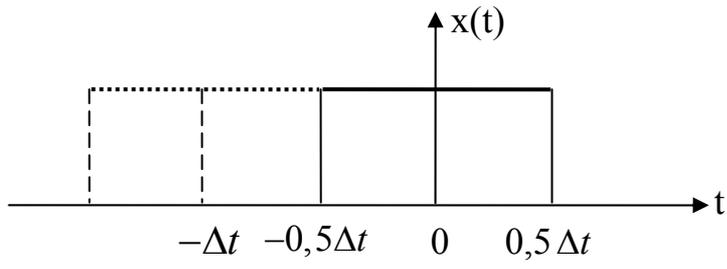


Рис. 4.19а ($\tau = -\Delta t, K(\tau) = 0$)

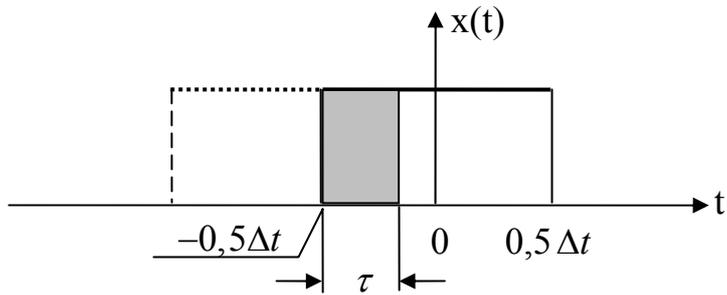


Рис. 4.19б [$|\tau| < \Delta t, K(\tau) = \tau(1 - |\tau|/T)$]

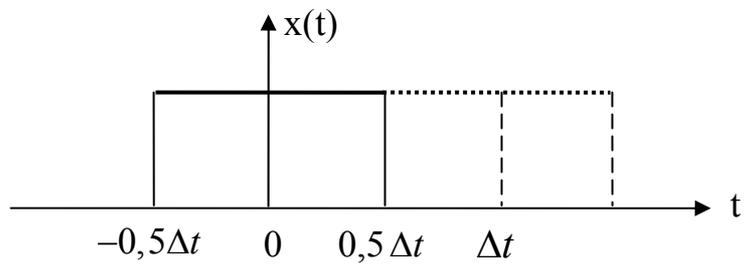


Рис. 4.19в ($\tau = \Delta t, K(\tau) = 0$)

Рис. 4.19. Свертка двух идентичных прямоугольных импульсов

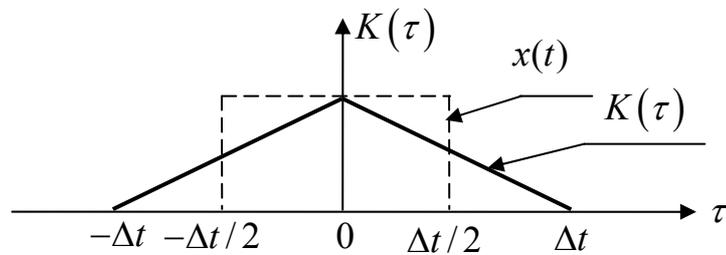


Рис. 4.20. АКФ прямоугольного импульса

Аналогично могут быть найдены автокорреляционные функции детерминированных сигналов любой формулы. Так, в частности, для гармонических колебаний $A \sin \omega_0 t$ и $A \cos \omega_0 t$ можно получить:

$$\begin{aligned}
 R_S(\tau) &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t \sin \omega_0 (t - \tau) dt = \\
 &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t - \tau)] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (4.107a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_C(\tau) &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau) dt = \\
 &= \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t - \tau)] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad (4.107б)
 \end{aligned}$$

Из выражений (4.107) следует, что автокорреляционные функции синусоидального и косинусоидального колебаний идентичны, что не вызывает удивления, поскольку было уже указано, что автокорреляционная функция не отображает фазового сдвига, а функции $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ отличаются только фазовым сдвигом $\varphi = \pi/2$.

5. ФУНКЦИИ С ФИНИТНЫМ СПЕКТРОМ, ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ

В пятой главе рассмотрены свойства класса функций, включающего в себя большинство сигналов, используемых в радиотехнике. Это так называемые функции с финитным спектром, т.е. функции, имеющие спектральную плотность, которая не равна нулю только на конечном частотном интервале. Рассмотрены также функции, имеющие конечную (финитную) протяженность во времени и, соответственно, бесконечно протяженный спектр. Показана возможность использования новых систем ортогональных функций для разложения радиосигналов и введены теоремы отсчетов как во временной, так и в частотной области. Рассмотрены свойства узкополосных сигналов и связанные с ними полезные математические преобразования.

5.1 Понятие финитной функции

Когда говорят о финитных функциях, то речь идет о классе функций, преобразования Фурье которых сосредоточены на конечном интервале. Функции тождественно равные нулю вне некоторого конечного интервала $[a, b]$ называются финитными на этом интервале [23, 24]. В силу симметрии преобразований Фурье в одних случаях целесообразно при построении математической модели сигнала считать финитным спектр функции, а в других – считать функцию финитной на заданном интервале времени. Тогда, в случае финитного (или ограниченного) спектра, отвечающие этому спектру функции должны иметь бесконечную протяженность. Если полагать исходную функцию финитной (ограниченной) во времени, то бесконечную протяженность будет иметь спектр этой функции. Исследователи указывают, что эти два класса функций, рассматриваемые как исходные,

различны по своим свойствам и результаты, полученные для одного класса, могут быть неприменимы для другого.

Здесь следует отметить, что, на первый взгляд, сигналы с ограниченным (финитным) спектром более естественны для задач радиотехники, т.к. подавляющее большинство используемых в настоящее время радиоэлектронных устройств обладает конечной полосой пропускания радиочастот. Однако нельзя не принять во внимание те факты, что, во-первых, в значительном количестве случаев радиосигналы заданы на финитном отрезке времени, а, во-вторых, все больше и больше расширяется область применения сверхширокополосных (СШП) сигналов. Поэтому в настоящее время невозможно (даже в учебном пособии) отдать предпочтение только одному виду финитных сигналов: либо сигналам с ограниченным спектром, либо сигналам, обладающим ограниченной протяженностью во времени. В связи с этим, в материалах данной главы рассматриваются оба класса сигналов.

5.2. Простейшие сигналы с финитным (ограниченным) спектром

Как было сказано выше, к классу сигналов с ограниченным спектром относятся сигналы, спектральная плотность которых существует только на ограниченном отрезке $\delta\omega$ оси частот. Вне этого отрезка спектральная плотность сигнала равна нулю (рис. 5.1).

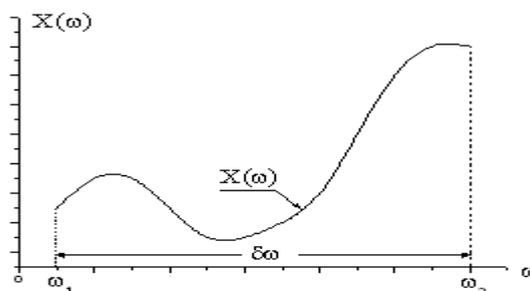


Рис. 5.1. Спектральная плотность, заданная на ограниченном интервале

Функция времени $x(t)$, отвечающая заданному ограниченному спектру, может быть найдена с использованием обратного преобразования Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega, \quad (5.1)$$

а её вид будет определяться как формой спектральной плотности $X(\omega)$, так и местоположением частотного интервала $\Delta\omega$ на оси частот.

Рассмотрим примеры простейших функций с ограниченным количеством спектров, которые, несмотря на свою простую природу, имеют большое значение в теории сигналов.

Пример 1. Функция отсчетов (идеальный низкочастотный сигнал).

Предположим, что сигнал $x(t)$ обладает вещественной спектральной плотностью, величина которой постоянна и равна x_0 в пределах отрезка оси частот, ограниченного значениями $\pm\omega_B$. Здесь ω_B означает верхнюю частоту функции спектральной плотности. Вне отрезка $\pm\omega_B$ спектральная плотность равна нулю (рис.5.2)

$$x(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ x_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases} \quad (5.2)$$

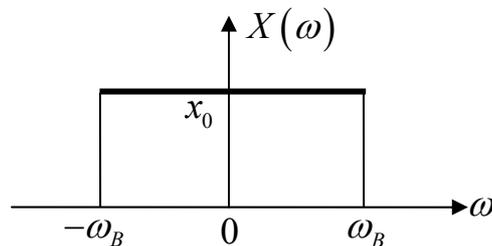


Рис. 5.2. Равномерная спектральная плотность на ограниченном интервале

Функция времени $x(t)$, отвечающая данной спектральной плотности, имеет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp[j\omega t] d\omega = \frac{x_0}{2j\pi t} \exp[j\omega t] \Big|_{-\omega_B}^{\omega_B} = \frac{x_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} \quad (5.3)$$

и называется функцией отсчетов [25]. Происхождение этого термина и смысл функции отсчетов будет рассмотрен ниже. Иногда функцию (5.3) называют идеальным низкочастотным сигналом, поскольку эту функцию можно рассматривать как выходную реакцию фильтра нижних частот, обладающего прямоугольной амплитудно – частотной характеристикой, на входной сигнал в виде δ – функции, имеющей равномерную, бесконечно протяженную спектральную плотность.

График функции отсчетов приведен на рис. 5.3.

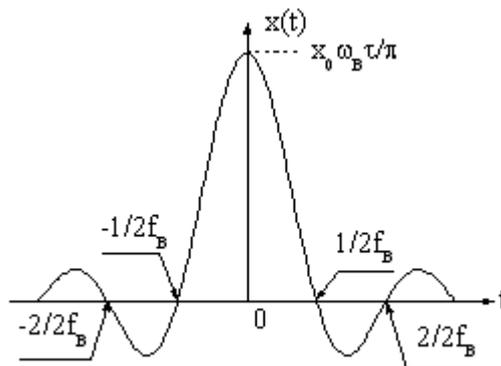


Рис 5.3. Идеальный низкочастотный сигнал (функция отсчетов)

Функция отсчетов принимает нулевые значения при пересечении оси времени в точках $t = n/2f_B$ ($n=1, 2, \dots, N$), где f_B - верхняя частота спектра $X(\omega)$

Функция отсчета более общего вида может быть получена, если в спектральную плотность (5.2) ввести фазовый сдвиг, линейно зависящий от частоты:

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ x_0 \exp\{-j\omega t_0\}, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B \end{cases} \quad (5.4)$$

Функция отсчетов, отвечающая спектральной плотности (5.4) определяется как:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp[-j\omega t_0] \exp[j\omega t] d\omega = \frac{x_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp[j(t-t_0)\omega] d\omega = \\ &= \frac{x_0}{2j\pi(t-t_0)} \exp[j(t-t_0)\omega] \Big|_{-\omega_B}^{\omega_B} = \frac{x_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B(t-t_0)}{\omega_B(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

т.е. представляет собой функцию $x(t)$, смещенную по оси времени на величину t_0 , что соответствует теореме задержки для преобразования Фурье.

Пример 2. Высокочастотная функция отсчетов (идеальный полосовой сигнал).

Рассмотрим сигнал, спектральная плотность, которого ограничена двумя частотными интервалами шириной $2\omega_B$, каждая с центрами на частотах $\pm\omega_0$ (см. рис. 5.4a)

$$X_2(\omega) = \begin{cases} x_0, & -\omega_0 - \omega_B \leq \omega \leq -\omega_0 + \omega_B, \\ x_0, & \omega_0 - \omega_B \leq \omega \leq \omega_0 + \omega_B, \\ 0 & \text{для всех других значений } \omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

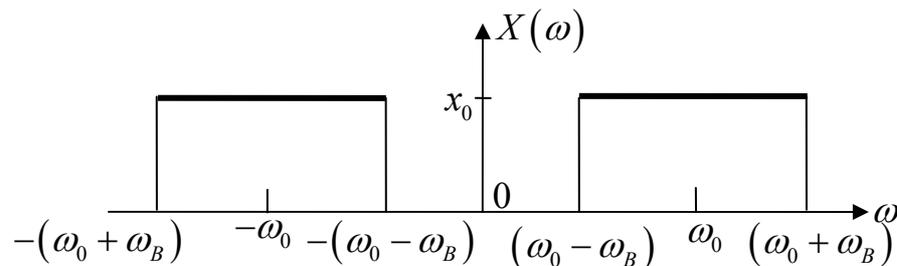


Рис. 5.4a. Спектральная плотность идеального полосового сигнала

Функцию времени $x_2(t)$, отвечающую спектральной плотности (5.6), найдем, используя обратное преобразование Фурье и учитывая при этом четность функции $X(\omega)$:

$$x_2(t) = \frac{x_0}{\pi} \int_{(\omega_0 - \omega_B)}^{(\omega_0 + \omega_B)} \cos \omega t d\omega = \frac{x_0}{\pi t} \sin \omega t \Big|_{\omega_0 - \omega_B}^{\omega_0 + \omega_B} =$$

$$= \frac{x_0}{\pi t} \left[\sin(\omega_0 + \omega_B)t - \sin(\omega_0 - \omega_B)t \right] = \frac{2x_0\omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} \cos \omega_0 t. \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) представляет собой гармоническое колебание $\cos \omega_0 t$, умноженное на функцию отсчетов $\sin \omega_B t / \omega_B t$. С точки зрения теории сигналов функция $x_2(t)$ представляет собой балансно – модулированный сигнал, где несущим является сигнал $\cos \omega_0 t$, а модулирующим – функция отсчетов, которая осциллирует значительно медленнее модулирующего сигнала. Особенности балансной модуляции будут подробно рассмотрены в главе 6, посвященной анализу спектров модулированных сигналов. Функцию $x_2(t)$ будем называть высокочастотной функцией отсчетов. Возможный способ получения такого сигнала заключается в подаче δ – функции, обладающей равномерным, бесконечно протяженным спектром на вход идеального полосового фильтра с прямоугольной амплитудно – частотной характеристикой в интервале $(\omega_0 - \omega_B, \omega_0 + \omega_B)$. Высокочастотная функция отсчетов изображена на рис. 5.4б.

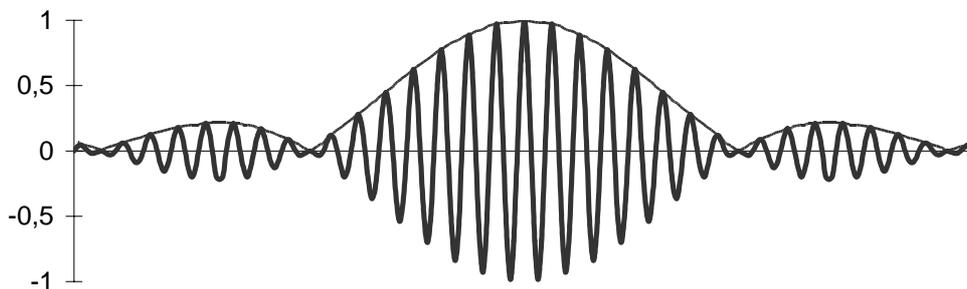


Рис. 5.4б. Высокочастотная функция отсчетов

На рисунке ясно видны характерные скачки фазы на 180° в точках, где огибающая $\sin \omega_B t / \omega_B t$ принимает нулевое значение.

5.3 Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Рассмотренные выше способы разложения периодических и непериодических сигналов в ряд и интеграл Фурье по ортогональным тригонометрическим функциям не являются единственными. Существуют также другие классы ортогональных функций и полиномов, которые могут быть использованы для разложения функций времени. Один из таких возможных классов ортогональных функций может быть построен на основе использования функций с ограниченным спектром [1, 7]. Для этого необходимо рассмотреть метод ортогонализации этих функций. Для решения задачи зададим две функции:

$$x(t) = \frac{x_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}, \quad x_1(t) = x(t - t_0) = \frac{x_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)}$$

и, следуя изложенному в главе 1, запишем условие ортогональности этих функций в виде равенства нулю их скалярного произведения

$$\left[x(t) \cdot x(t - t_0) \right] = \frac{x_0^2 \omega_B^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)} dt = 0. \quad (5.8)$$

Для вычисления интеграла (5.8), который представляет собой свертку двух функций времени, произведем преобразование Фурье над правой и левой частями выражения (5.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) \cdot x(t - t_0) \right] \exp[-j\omega t] dt = x_0^2 \exp[-j\omega t_0], \quad (5.9)$$

поскольку преобразование Фурье свертки есть произведение преобразований Фурье свертываемых функций, а спектральные плотности свертываемых функций определяются соотношениями (5.2) и (5.4).

Применяя теперь к выражению (5.9) обратное преобразование Фурье, найдем скалярное произведение функций $x(t)$ и $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp\{-j\omega t_0\} \exp\{j\omega t\} d\omega = \\ & = \frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp\{j\omega(t-t_0)\} d\omega = \frac{x_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B \Delta t}{\omega_B \Delta t}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $\Delta t = t - t_0$ означает временной сдвиг между функциями отсчета $x_1(t)$ и $x(t)$. Из выражения (5.10) следует, что скалярное произведение обращается в нуль и, соответственно, две функции отсчета будут ортогональны, если взаимный сдвиг этих функций во времени удовлетворяет условию

$$\omega_B \Delta t = n\pi, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда

$$\Delta t = \frac{n\pi}{\omega_B} = \frac{n}{2f_B} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5.11)$$

Минимально возможный сдвиг Δt , при котором функции отсчета ортогональны, имеет место для $n = \pm 1$

$$\Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

Таким образом, используя бесконечную последовательность функций отсчета, в которой каждая последующая функция сдвинута относительно предыдущей на величину $\Delta t = 1/2f_B$, можно построить ортогональную систему функций, которая будет служить в качестве базиса для разложения произвольной функции времени с ограниченным спектром, верхняя частота которого есть ω_B . Взаимное расположение функций отсчета, образующих ортогональную систему, показано на рис. 5.5.

5.4 Теорема отсчетов во временном представлении

В настоящем пособии, предназначенном для студентов радиотехнических специальностей, не рассматриваются вопросы, связанные с математи-

ческими свойствами функций с ограниченным спектром, которые принадлежат к классу так называемых целых функций. В связи с этим вопросы, относящиеся к теории интерполяции функций с ограниченным спектром, будут проанализированы с использованием некоторых упрощенных приемов с последующим комментарием о связи полученных результатов с более строгой теорией, а также будет дана краткая справка об истории вопроса.

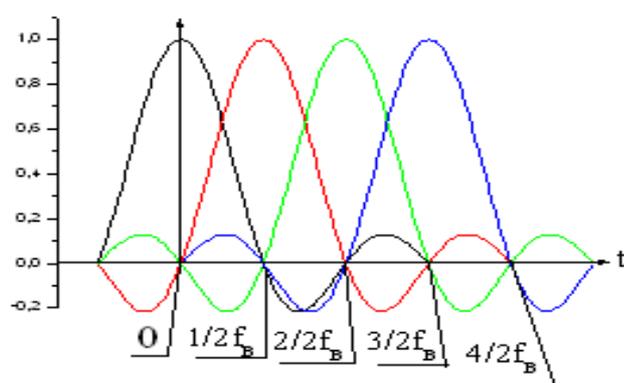


Рис. 5.5.

Как в задачах математического анализа и его приложений, так и в задачах радиоэлектроники и радиофизики возникает проблема интерполирования функции, т.е. задача определения искомой функции $x(t)$ для всех значений t , заключенных в некотором интервале $a \leq t \leq b$, если известны значения $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ в ряде точек t_1, t_2, \dots, t_n [19]. Задача, поставленная таким образом, может иметь большое (вплоть до бесконечности) количество решений. Однако ограничение класса функций $x(t)$ может привести к существованию только единственного решения. Кроме того, при ограничении свойств класса функций, из которых выбирается интерполирующая функция, задача становится более определенной.

Рассмотрим непрерывный сигнал $x(t)$, стремящийся к нулю при $t \rightarrow \infty$ (что обеспечивает его интегрируемость) и будем полагать, что этот сигнал имеет ограниченный спектр. Для сигналов этого типа докажем следующую теорему [7, 25].

Теорема. Если функция $x(t)$ не содержит составляющих с частотой выше f_B герц, то она полностью определяется последовательностью её значений в точках, отстоящих на расстояние $1/2f_B$ секунд друг от друга.

Данная формулировка представляет собой теорему отсчетов во временном представлении.

Приступая к доказательству теоремы, запишем прежде представление функции $x(t)$ через её спектральную плотность, учитывая, что спектр функции заключен в интервале $(-\omega_B, \omega_B)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} X(\omega) \exp[j\omega t] d\omega. \quad (5.11)$$

Будем рассматривать значения t , удовлетворяющие условию:

$$\Delta t = \frac{n}{2f_B}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.12)$$

где n – целые числа. Для этих моментов времени выражение (5.11) принимает вид:

$$x\left(\frac{n}{2f_B}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} X(\omega) \exp[j(n/2f_B)\omega] d\omega. \quad (5.13)$$

Из выражения (5.13) следует, что совокупность значений $x(n/2f_B)$ полностью определяет спектральную плотность $X(\omega)$, которая, в свою очередь, однозначно определяет функцию

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} X(\omega) \exp[j(n/2f_B)\omega] d\omega.$$

Проведенные рассуждения формально доказывают теорему, поскольку из них следует, что существует одна и только одна функция $x(t)$, обладающая ограниченным спектром $X(\omega)$ с верхней частотой f_B , которая в точках отсчета $t = n/2f_B$ принимает заданные значения $x(n/2f_B)$.

Теперь необходимо найти аналитическое выражение для функции, заданной ее значениями в точках отсчета.

Используя периодическое продолжение спектральной плотности $X(\omega)$, заданной на частотном интервале $-2\pi f_B \leq \omega \leq 2\pi f_B$ (рис.5.6),

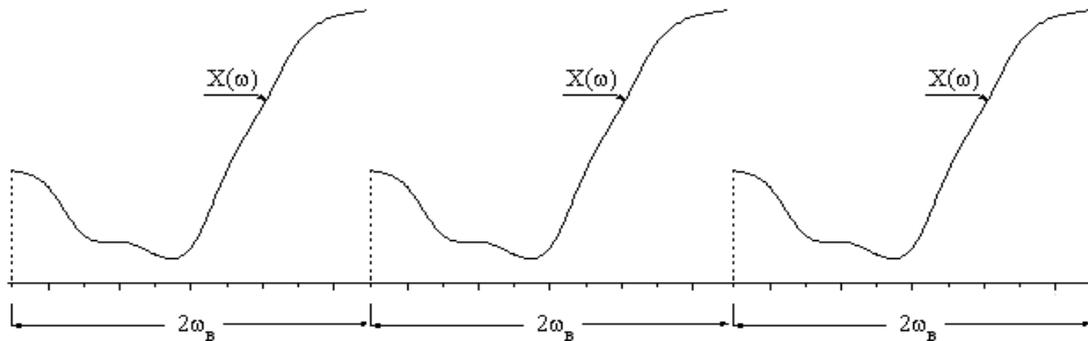


Рис. 5.6. Периодическое продолжение ограниченной спектральной плотности

разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp\left\{-j\left[\frac{2\pi n}{4\pi f_B}\right]\omega\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp\left\{-j\left[\frac{n}{2\pi f_B}\right]\omega\right\}, \quad (5.14)$$

где комплексные коэффициенты Фурье определяется выражением

$$\dot{C}_n = \frac{1}{4\pi f_B} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} x(\omega) \exp\left\{j\left[\frac{n}{2f_B}\right]\omega\right\} d\omega, \quad (5.15)$$

а величина $4\pi f_B$ есть период периодически продолженной спектральной плотности. Сравнивая выражения (5.13) и (5.15), можно записать

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2f_B} x(n/2f_B), \quad (5.16)$$

откуда следует, что коэффициенты \dot{C}_n разложения периодически продолженной спектральной плотности $x(\omega)$ в ряд Фурье есть ни что иное, как отсчеты функции $x(t)$, взятые в моменты времени $t = n/2f_B$ и взвешенные с весом $1/2f_B$. Тогда ряд Фурье (5.14) можно записать в виде

$$X(\omega) = \frac{1}{2f_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_B}\right) \exp\left\{-j\left[\frac{n}{2f_B}\right]\omega\right\}. \quad (5.17)$$

Из выражений (5.11) и (5.17) следует, что

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} x(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} \left[\frac{1}{2f_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_B}\right) \exp\left\{-j\omega \frac{n}{2f_B}\right\} \right] \exp\{j\omega t\} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi f_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_B}\right) \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} \exp\left\{j\omega \left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right\} d\omega. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Вычислив интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} \exp[j\omega(t - n/2f_B)] d\omega &= \frac{\exp[j\omega(t - n/2f_B)]}{j(t - n/2f_B)} \Big|_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} = \\ &= \frac{\exp[j2\pi f_B(t - n/2f_B)] - \exp[-j2\pi f_B(t - n/2f_B)]}{j(t - n/2f_B)} = \\ &= \frac{2 \sin[2\pi f_b(t - n/2f_B)]}{t - n/2f_B} \end{aligned}$$

и, подставляя результат в выражение (5.18), получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_B}\right) \frac{2 \sin[2\pi f_b(t - n/2f_B)]}{(t - n/2f_B)}. \quad (5.19)$$

Соотношение (5.19) решает проблему интерполирования функции $x(t)$, т.е. задачу определения этой функции всюду по её значениям в точках отсчета $n/2f_B$.

Разложение (5.19) для класса целых функций конечной степени было известно математикам как разложение по формуле Лагранжа очень давно, и работы Уиттекера и Гельфонда в этой области выполнены в 1915, 1935 и 1937 годах [8, 16, 25]. В этих, чисто математических исследованиях, были установлены причины, порождающие замечательное свойство функций с ограниченным спектром – свойство однозначности восстановления значений функций на всей оси времени по её значениям в некоторой периодической последовательности временных отсчетов. Прием, использованный выше для доказательства теоремы отсчетов, не использовал теорию интерполяции целых функций, поэтому его использование для получения более общих результатов невозможно. Однако для решения технических задач полученный результат вполне достаточен. Идея использования теоремы отсчетов в задачах связи была развита Найквистом и Хартли в 1924 – 1928 годах. В связи с этим величину $1/2f_B$ в западной литературе называют интервалом Найквиста. В дальнейшем теорема отсчетов была независимо доказана Котельниковым в 1933 году, а также исследована Шенноном в 1949 году [7, 8, 16, 25].

Вернемся теперь к выводам, следующим из теоремы отсчетов. Было установлено, что для неискаженной передачи функции с ограниченным спектром достаточно передавать ее значения в моменты времени, следующие с интервалом $\Delta t = 1/2f_B$. Выборочные значения могут быть получены методом стробирования с использованием схемы электронного ключа, открывающегося на короткое время под воздействием импульсов стробирования, следующих с интервалом $1/2f_b$ (см. рис. 5.7)

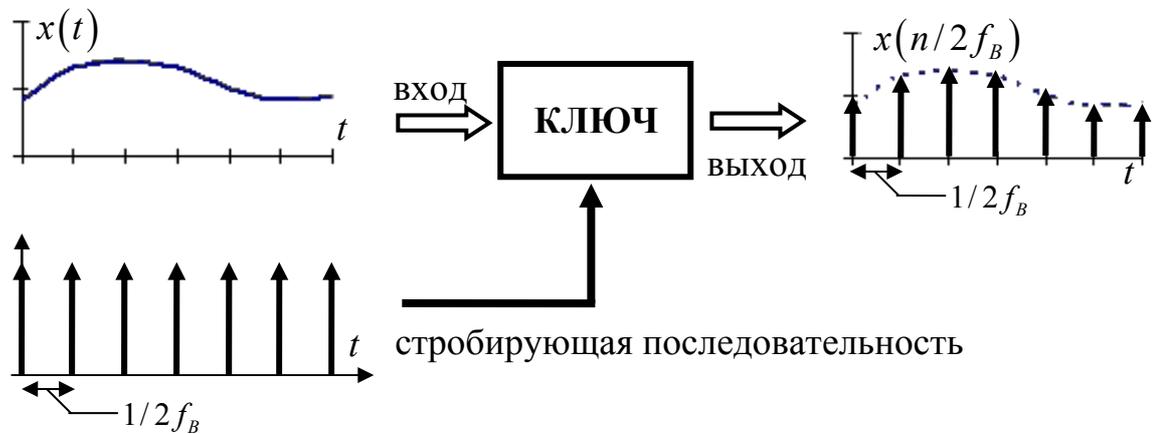


Рис. 5.7. Блок – схема электронного ключа

Полученная серия значений $x(n/2f_B)$ может быть передана по каналу связи, на приемном конце которого должна быть восстановлена функция $x(t)$.

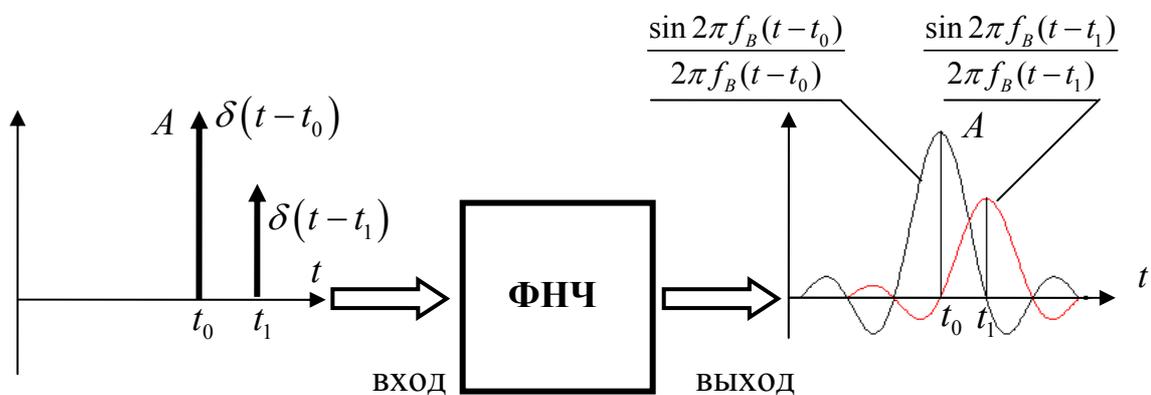


Рис. 5.8a. Блок – схема устройства восстановления функции времени

Для восстановления функции $x(t)$ используется идеальный фильтр нижних частот с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой, ограниченной верхней частотой f_B . При подаче на вход этого фильтра

очень короткого импульса, обладающего амплитудой A , выходная реакция фильтра будет представлять собой функцию отсчетов $\sin[2\pi f_B(t-t_0)]/2\pi f_B(t-t_0)$, где t_0 - временная задержка входного импульса (см. рис. 5.8а). Тогда при поступлении на вход фильтра последовательности отсчетов (импульсов) $x(n/2f_B)$ с соответствующими амплитудами на выходе фильтра будет иметь место суммарный отклик в виде ряда (5.19), который и будет представлять собой восстановленную функцию $x(t)$. Графически эта ситуация изображена на рис. 5.8б

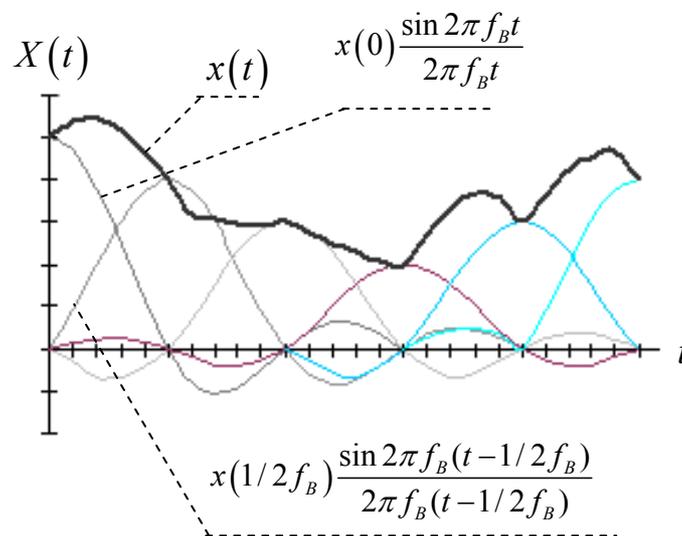


Рис. 5.8б. Восстановление функции времени суммированием ряда функций отсчета

Рассмотрим теперь функцию времени $x(t)$, спектр которой ограничен частотой f_B и определим значения этой функции в точках отсчета, отстоящих на интервале $1/2f_B$, предполагая, что вне некоторого интервала времени $T_1 < T < T_2$ (рис. 5.9) эта функция быстро стремится к нулю.

Длительность указанного интервала составляет $T = T_2 - T_1$. Тогда в области T , где функция заметно отличается от нуля, реально будет иметь место

число точек отсчета, равное $2Tf_B$. Значения функции $x(t)$ в этих точках определяют все коэффициенты ряда (5.19), сумма которого интерполирует функцию $x(t)$. Поясним данную ситуацию на простом примере.

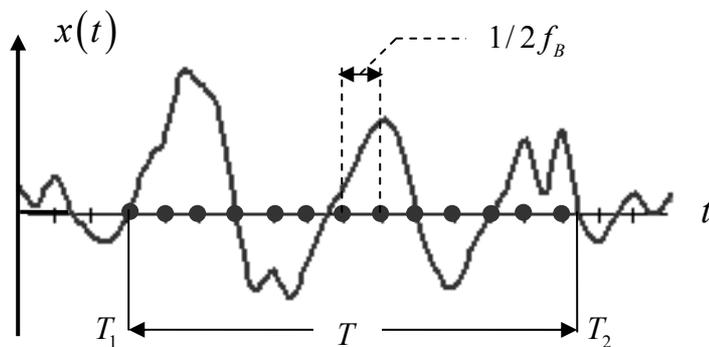


Рис. 5.9. Функция, стремящаяся к нулю вне ограниченного интервала времени

Пример 1. Пусть имеется функция $x(t)$, обладающая ограниченным спектром с верхней частотой $f_B = 10^6$ Гц. Тогда интервал дискретизации определяется как $\Delta t = 1/2f_B = 0,5 \cdot 10^{-6}$ сек. Если функция $x(t)$ значительно отличается от нуля только на интервале времени $T = 10^{-3}$ сек, а вне его быстро спадает до нуля, то количество точек отсчета на интервале составит: $N = T/\Delta t = 10^{-3} \text{ сек} \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1} = 2 \cdot 10^3$. Нетрудно видеть, что величина $N = 2 \cdot 10^3$ отвечает соотношению

$$N = 2Tf_B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ сек} \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1} \quad (5.20)$$

Отметим теперь, что функция отсчетов $\sin[2\pi f_B/2\pi f_B t]$ затухает достаточно быстро, откуда следует, что влияние каждого слагаемого ряда (5.19) ограничивается малым количеством интервалов в окрестности соответствующей точки отсчета. Таким образом, при задании конечного числа отсчетов сумма ряда (5.19) будет быстро убывать за пределами интервала T

и, таким образом, функция $x(t)$ внутри интервала T с достаточной точностью определяется ее значениями в $2Tf_B$ точках отсчета [25].

Из анализа, проведенного в предыдущих главах, известно, что, если функция имеет финитный спектр, то ее представление на оси времени является бесконечно протяженным, хотя за пределами некоторого интервала времени T значения этой функции могут быть весьма малыми.

Строго говоря, не может существовать функций, ограниченных во времени и одновременно обладающих финитным спектром. Однако, возможно существование таких функций, у которых практически вся энергия (мощность) сосредоточена в конечных интервалах времени и полосы частот. Сигналы, используемые в задачах радиоэлектроники и связи, в большинстве случаев представляют собой функции именно этого типа.

Таким образом, из изложенного следует, что, если основная энергия сигнала $x(t)$ сосредоточена на интервале времени T , а его спектр приближенно ограничен частотой f_B и если при этом

$$2Tf_B \gg 1, \quad (5.21)$$

то функция $x(t)$ с достаточно высокой степенью точности определяется ее значениями в $2Tf_B$ точках отсчета, расположенных на расстоянии $1/2f_B$. В приведенном выше примере рассмотрена именно эта ситуация, поскольку в данном случае $N = 2Tf_B = 2 \cdot 10^3 \gg 1$.

5.5. Теорема отсчетов в частотном представлении

Теорема отсчетов, рассмотренная в предыдущем подразделе, справедлива для функций, обладающих финитным спектром. Рассмотрим теперь теорему отсчетов для финитных функций времени, тождественно равных нулю вне интервала их определения на оси времени [25, 26].

Зададим некоторую функцию времени $x(t)$, определенную на интервале $T_1 < t < T_2$ и равную нулю вне этого интервала (рис. 5.10).

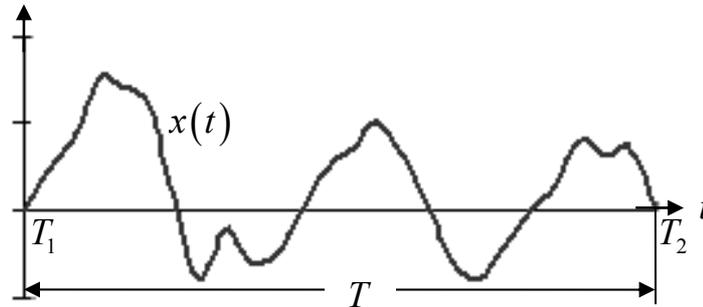


Рис. 5.10. Функция времени, заданная на финитном интервале

Спектральная плотность этой функции определяется преобразованием Фурье

$$X(\omega) = \int_{T_1}^{T_2} x(t) \exp\{-j\omega t\} dt. \quad (5.22)$$

Продолжим функцию $x(t)$ периодически с периодом $T = T_2 - T_1$ и представим ее комплексным рядом Фурье

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp\left\{j \frac{2\pi n}{T} t\right\}, \quad (5.23)$$

где коэффициенты D_n имеют вид

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left\{-j \frac{2\pi n}{T} t\right\} dt. \quad (5.24)$$

Если в выражении (5.22) задать спектральную плотность $X(\omega)$ в точках

$$\omega = n\omega_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right), \quad \text{где } \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

то это выражение примет вид

$$X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left\{-j\frac{2\pi n}{T}t\right\} dt. \quad (5.25)$$

Сравнивая выражения (5.24) и (5.25), запишем

$$D_n = \frac{1}{T} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right). \quad (5.26)$$

Подставляя представление функции $x(t)$ рядом Фурье (5.23) в выражение (5.22), запишем

$$X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp\left(j\frac{2\pi n}{T}t\right) \right] \exp(-j\omega t) dt, \quad (5.27)$$

а затем, используя (5.26), преобразуем (5.27) к виду

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[-j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)t\right] dt, \quad (5.28)$$

Вычисляя интеграл, входящий в выражение (5.28), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[-j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)t\right] dt = \\ & = -\frac{\exp\left[-j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)t\right]}{j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)} \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2} - \pi n\right)}{\frac{\omega t}{2} - \pi n} \end{aligned}$$

и тогда выражение (5.28) можно переписать как

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2} - \pi n\right)}{\frac{\omega t}{2} - \pi n}. \quad (5.29)$$

Таким образом, значения спектральной плотности $X(2\pi n/T)$ определяют спектр финитной функции $x(t)$ на всей оси частот. Проведенный анализ позволяет сформулировать теорему отсчетов в частотном представлении:

Теорема. Если $X(\omega)$ есть спектральная плотность финитной функции

времени $x(t)$, тождественно равной нулю вне интервала $T_1 < t < T_2$, то $X(\omega)$ однозначно определяется последовательностью ее значений, отстоящих друг от друга на расстояние $1/T$ герц. (Если по оси частот откладывается угловая частота, то расстояние между точками отсчета определяется как $2\pi/T$).

Из рассмотрения, проведенного в предыдущем подразделе, следует, что если протяженность сигнала по оси времени приближенно составляет величину T , а его спектральная плотность приближенно ограничена частотой f_B и если $2Tf_B \ll 1$, то спектральная функция финитного сигнала определяется $(2Tf_B + 1)$ значениями в точках отсчета, отстоящих на расстояние T друг от друга. Единица в данном выражении появляется в связи с необходимостью учета значения спектральной плотности при $n = 0$, т.е. на нулевой частоте. Однако, поскольку для всех частот, отличных от нуля, задание спектральной плотности требует задания ее вещественной и мнимой частей, то общее число независимых величин, необходимых для однозначного определения спектральной плотности, составляет

$$2Tf_B + 1 \approx 2Tf_B \ll 1, \quad (5.30)$$

т.е. столько же, сколько и при временном представлении.

5.6. Комплексный аналитический сигнал. Преобразования Гильберта

До настоящего момента все рассматриваемые физические процессы $x(t)$ (в общем случае негармонические и непериодические) представляли собой действительные функции времени. В случае гармонических колебаний для их анализа обычно используются методы комплексного исчисления. Удобство этих методов и компактность получаемых результатов привели к

развитию комплексных способов представления негармонических сигналов и, прежде всего, к введению и использованию понятия комплексного аналитического сигнала. Считая, что физический процесс, представленный действительной функцией $x(t)$, обладает конечной мощностью (т.е. интегрируется в квадрате)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty, \quad (5.31)$$

введем понятие комплексного аналитического сигнала, отвечающего функции $x(t)$ [20, 21, 25, 27].

Если некоторая действительная функция удовлетворяет условию (5.31) то, с использованием интегрального преобразования Гильберта [9, 25, 27], может быть найдена некоторая функция $\sigma(t)$, называемая сопряженной к функции $x(t)$:

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt'. \quad (5.32a)$$

При этом имеет место и обратное преобразование Гильберта

$$x(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(t')}{t-t'} dt'. \quad (5.32b)$$

В выражениях (5.32) символ P означает главное значение интеграла в смысле Коши в точке разрыва $t = t'$, определяемое как предел

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(t')}{t-t'} dt' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{\sigma(t')}{t-t'} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{t+\delta}^{\infty} \frac{\sigma(t')}{t-t'} dt' \right]. \quad (5.33)$$

Образую теперь на действительной оси времени комплексную функцию

$$\psi(t) = x(t) - j\sigma(t). \quad (5.34)$$

Действительная часть этой функции представляет собой физический процесс $x(t)$, а мнимая часть $\sigma(t)$ есть сопряженная функция.

Е. Титчмарш в своей классической работе по теории интегралов Фурье [9] доказал следующее: для того, чтобы комплексная функция $\dot{\psi}(t)$ была пределом аналитической функции комплексной переменной $z(t + ju)$ при $u \rightarrow 0$, необходимо и достаточно выполнения любого из условий:

1. Функции $x(t)$ и $\sigma(t)$, образующие функцию $\dot{\psi}(t)$, должны быть сопряженными;
2. Преобразование Фурье $\dot{\psi}(\omega)$ над функцией $\dot{\psi}(t)$ должно быть тождественно равно нулю при $\omega < 0$, т.е. в области отрицательных частот.

(Здесь необходимо отметить, что выполнение одного из этих условий автоматически влечет за собой выполнение другого).

Учитывая изложенное, видим, что комплексная функция (5.34) удовлетворяет одному из заданных условий и будем называть эту функцию комплексным аналитическим сигналом (или просто аналитическим сигналом). Рассматривая спектральные свойства аналитического сигнала $\dot{\psi}(t)$, можно показать, что данный сигнал можно получить, минуя вычисление сопряженной функции $\sigma(t)$, если известна действительная функция $x(t)$ и ее спектральная плотность (в общем случае – комплексная). С этой целью определим спектральную плотность $\dot{X}_\sigma(\omega)$ мнимой части аналитического сигнала, используя соотношение (5.32а):

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) \exp(-j\omega t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt'. \quad (5.35)$$

Переменные интегрирования в выражении (5.35) разделяются с использованием замены $t - t' = u$, $dt = du$, $t = u + t'$.

Тогда $\exp[-j\omega t] = \exp[-j\omega t'] \exp[-j\omega u]$ и выражение (5.35) может быть преобразовано к виду

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \exp(-j\omega t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega u - j \sin \omega u}{u} du. \quad (5.36)$$

Первый интеграл в соотношении (5.36) представляет собой спектральную плотность $\dot{X}_\sigma(\omega)$ функции $x(t)$. Для вычисления второго интеграла перепишем его как

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega u}{u} du + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du.$$

Первое слагаемое после замены переменных $\omega u = z$, $du = dz/\omega$, $u = z/\omega$ приводится к известному интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz = 0,$$

а второе слагаемое, которое можно переписать в виде

$$\frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = \frac{2j}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du,$$

представляет собой формулу обращения для функции знака $sign(\omega)$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{u} du = sign(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{при } \omega < 0 \\ 0 & \text{при } \omega = 0 \\ 1 & \text{при } \omega > 0 \end{cases}. \quad (5.37)$$

Таким образом, из выражений (5.36) и (5.37) следует, что спектральная плотность мнимой части $\sigma(t)$ аналитического сигнала $\psi(t)$ может быть определена в виде

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = j\dot{X}_X(\omega) sign(\omega). \quad (5.38)$$

С учетом результата (5.38) и в соответствии с теоремой линейности (сложения) для преобразования Фурье, запишем спектральную плотность аналитического сигнала (5.34)

$$\dot{\psi}(\omega) = \dot{X}_X(\omega) - j\dot{X}_\sigma(\omega). \quad (5.39)$$

Далее, используя соотношения (5.38) и (5.39) выпишем отдельно спектральную плотность аналитического сигнала для областей отрицательных и положительных частот:

$$\dot{\psi}(\omega)|_{\omega < 0} = \dot{X}_x(\omega) - j[-j\dot{X}_x(\omega)] = 0, \quad (5.40a)$$

$$\dot{\psi}(\omega)|_{\omega > 0} = \dot{X}_x(\omega) - j[j\dot{X}_x(\omega)] = 2\dot{X}_x(\omega). \quad (5.40b)$$

Из выражений (5.40) следует, что преобразование Фурье аналитического сигнала тождественно равно нулю в области отрицательных частот ($\omega < 0$), а в области положительных частот ($\omega > 0$) амплитудные значения спектральной плотности удваиваются. Полученный результат подтверждает, что выполнение одного из условий Титчмарша (функции $x(t)$ и $\sigma(t)$ являются сопряженными) повлекло за собой выполнение второго условия. По известной спектральной плотности $\dot{\psi}(t)$ аналитического сигнала, его зависимость во времени может быть найдена с использованием обратного преобразования Фурье

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dot{\psi}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{X}_x(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (5.41)$$

В порядке обсуждения результата (5.40) можно отметить, что его использование дает простой способ построения функции $\sigma(t)$, сопряженной к физически существующему сигналу $x(t)$. Исходная функция $x(t)$ должна быть подана на вход некоторого фильтра, обладающего равномерной амплитудно-частотной характеристикой, но вводящего фазовый сдвиг $-\pi/2$ в области частот $\omega < 0$ и $+\pi/2$ в области частот $\omega > 0$. Такой фильтр называют квадратурным.

Рассмотрим теперь несколько примеров определения формы аналитического сигнала $\dot{\psi}(t)$.

Пример 1. Определим аналитический сигнал $\dot{\psi}_1(t)$, отвечающий функции отсчетов

$$x_1(t) = \frac{X_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}.$$

Данная функция была найдена обратным преобразованием Фурье от действительной равномерной спектральной плотности $X(\omega)$, финитной на интервале $(-\omega_B, \omega_B)$. Для нахождения аналитического сигнала как функции времени воспользуемся выражением (5.41), т.е. обратным преобразованием Фурье над односторонней спектральной плотностью $\psi_1(\omega)$ (см. рис. 5.11).

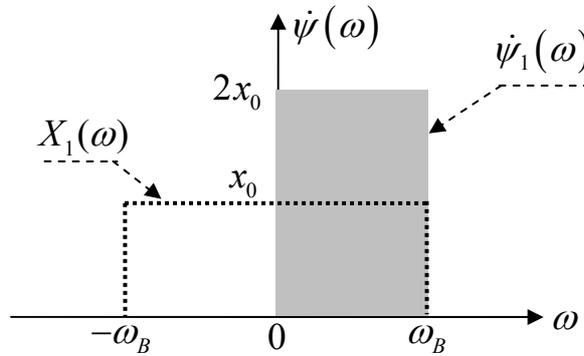


Рис. 5.11. Спектральная плотность аналитического сигнала $\psi_1(\omega)$ и функции отсчетов $x_1(t)$

Пунктиром на этом рисунке обозначена спектральная плотность функции отсчетов $x_1(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{X_0}{\pi} \int_0^{\omega_B} \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{X_0}{jt\pi} [\exp(j\omega_B t) - 1] = \frac{X_0 \omega_B}{\pi} \left[\frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} + j \frac{\sin^2(\omega_B t/2)}{\omega_B t/2} \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Таким образом, зависимость

$$\sigma_1(t) = \frac{X_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin^2(\omega_B t/2)}{\omega_B t/2}$$

представляет собой функцию, сопряженную к функции отсчетов $x_1(t)$. Следует отметить, что вычисление функции $\sigma_1(t)$ путем применения преобразования Гильберта к функции $x_1(t)$ представляет собой весьма трудоемкий процесс. На рисунке 5.12 изображены исходная функция $x(t)$ и сопряженная к ней функция $\sigma(t)$

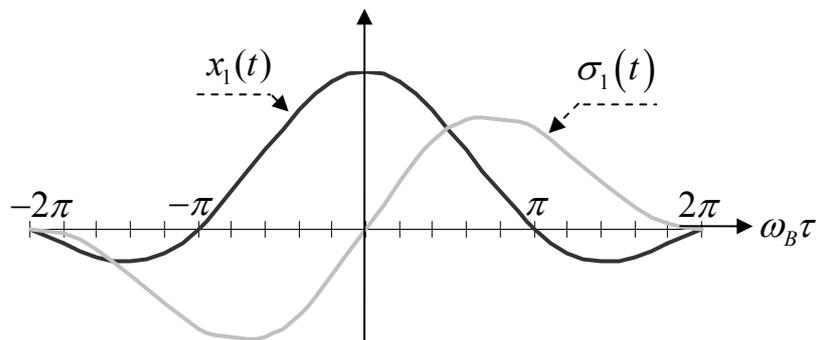


Рис. 5.12. Исходная функция $x(t)$ и сопряженная к ней функция $\sigma(t)$

Пример 2. Найдем аналитический сигнал $\dot{\psi}_2(t)$, отвечающий высокочастотной функции отсчетов

$$x_2(t) = \frac{2x_0\omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} \cos \omega_0 t,$$

используя вышеописанный метод. Спектральные плотности аналитического сигнала $\dot{\psi}_2(t)$ и физической функции $x_2(t)$ (пунктир) изображены на рисунке 5.13.

Теперь аналитический сигнал $\dot{\psi}_2(t)$ можно найти как

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{x_0}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(j\omega t) d\omega = \frac{x_0}{j\pi t} [\exp(j\omega_2 t) - \exp(j\omega_1 t)]. \quad (5.43)$$

Используя формулу Эйлера и известные тригонометрические соотношения

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

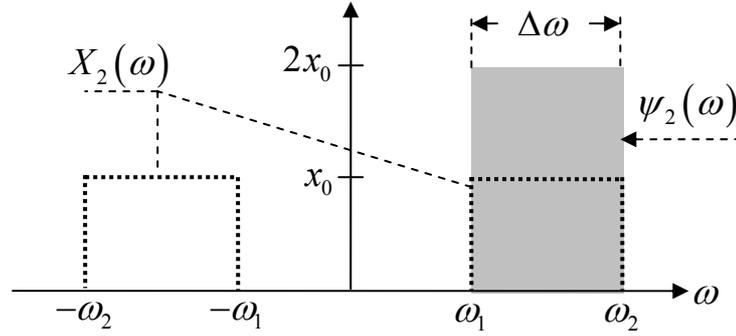


Рис. 5.13. Спектральная плотность аналитического сигнала $\psi_2(t)$ и физической функции $x_2(t)$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

преобразуем выражение (5.43) к виду

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= \frac{x_0}{\pi t} [(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) - j(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t)] = \\ &= \frac{2x_0}{\pi t} \left[\cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \cdot \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t + j \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] = \\ &= \frac{2x_0 \Delta \omega}{\pi t} \frac{\sin \Delta \omega t / 2}{\Delta \omega t / 2} \left[\cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t + j \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь функция

$$x_2(t) = \frac{x_0 \Delta \omega}{\pi} \frac{\sin \Delta \omega t / 2}{\Delta \omega t / 2} \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t$$

представляет собой идеальный полосовой сигнал (т.е. высокочастотную функцию отсчетов), а функция

$$\sigma_2(t) = \frac{x_0 \Delta \omega}{\pi} \frac{\sin \Delta \omega t / 2}{\Delta \omega t / 2} \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t$$

является сопряженной к $x_2(t)$. Если $\omega_1 = \omega_0 - \omega_B$, $\omega_2 = \omega_0 + \omega_B$, то функция $x_2(t)$ принимает известный (см. выражение (5.7)) вид

$$x_2(t) = \frac{2x_0\omega_B}{\pi} \frac{\sin 2\pi f_B t}{2\pi f_B t} \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ – средняя частота.

5.7. Узкополосные сигналы как частный случай сигналов с ограниченным спектром

В настоящем подразделе рассматривается семейство так называемых узкополосных сигналов, имеющих место на выходе частотно-избирательных цепей, полоса пропускания (полоса прозрачности) Δf которых, определяющая ширину спектра выходного сигнала, много меньше центральной частоты ω_0 полосы пропускания частотно-избирательной цепи

$$\Delta f / \omega_0 \ll 1. \quad (5.45)$$

Условие (5.45) определяет принадлежность сигнала к семейству узкополосных. Если некоторая действительная функция $x(t)$ обладает спектральной плотностью, сосредоточенной в окрестности нулевой частоты, то функция $y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ при достаточно большом значении частоты ω_0 будет обладать необходимыми признаками узкополосного сигнала, так как спектральная плотность этой функции будет сконцентрирована в малой окрестности точек $\pm\omega_0$.

Необходимо отметить, что в общем случае начальная фаза φ_0 является функцией времени. Тогда сигнал $y(t)$ можно записать как

$$y(t) = x(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]. \quad (5.46a)$$

Выражение (5.46a) представляет собой наиболее общую модель действительного узкополосного сигнала

$$y(t) = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.46б)$$

где функции времени $A(t) = x(t)\cos\varphi(t)$, $B(t) = x(t)\sin\varphi(t)$ есть низкочастотные функции, поскольку их относительные изменения за время, равное периоду высокочастотного колебания $T = 2\pi/\omega_0$ достаточно малы. Функция $A(t)$ называется синфазной составляющей узкополосного сигнала, а функция $B(t)$ называется квадратурной составляющей. В литературе также можно встретить определения, в соответствии с которыми обе функции $A(t)$ и $B(t)$ называются “квадратурными” составляющими (или компонентами) узкополосного сигнала, или его “косинусной” и “синусной” составляющими [20, 21, 27].

Отметим, что величина $\sigma(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ есть полная фаза сигнала $y(t)$ и поэтому мгновенная частота этого сигнала определяется производной по времени от полной фазы

$$f_{МГН}(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right]. \quad (5.47)$$

Из выражения (5.46а) следует также, что узкополосный сигнал представляет собой сложное колебание, обладающее одновременно как амплитудной, так и фазовой модуляцией несущего гармонического колебания, имеющего частоту ω_0 .

Для определения формы аналитического сигнала $\dot{\psi}_Y$, отвечающего действительной узкополосной функции $y(t)$, найдем сопряженную функцию:

$$\sigma_Y(t) = -\frac{A(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 t'}{t-t'} dt' - \frac{B(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 t'}{t-t'} dt'. \quad (5.48)$$

Здесь медленно меняющиеся функции $A(t)$ и $B(t)$ вынесены за знак интеграла. Для вычисления преобразования Гильберта (5.48) дополним аргументы тригонометрических функций величиной $\omega_0 t - \omega_0 t'$ (т.е. величиной, равной нулю) и получим

$$\begin{aligned}
\sigma_Y(t) &= -\frac{A(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\omega_0(t-t') - \omega_0 t]}{t-t'} dt' - \frac{B(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[\omega_0(t-t') - \omega_0 t]}{t-t'} dt' = \\
&= -\frac{A(t)\cos\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0(t-t')}{t-t'} dt' - \frac{A(t)\sin\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0(t-t')}{t-t'} dt' - \\
&\quad - \frac{B(t)\cos\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0(t-t')}{t-t'} dt' + \frac{B(t)\sin\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0(t-t')}{t-t'} dt'. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Используя замену переменных $t-t' = v$, $dt' = -dv$, перепишем (5.49) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_Y(t) &= \frac{A(t)\cos\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 v}{v} dv + \frac{A(t)\sin\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0 v}{v} dv + \\
&\quad + \frac{B(t)\cos\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega_0 v}{v} dv - \frac{B(t)\sin\omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega_0 v}{v} dv. \quad (5.50)
\end{aligned}$$

Интегралы в выражении (5.50) преобразуются к известным формам

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

с использованием подстановки $\omega_0 v = x$, $dv = dx/\omega_0$, $v = x/\omega_0$.

Тогда функция $\sigma_Y(t)$, сопряженная к действительной функции $y(t)$, примет вид

$$\sigma_Y(t) = A(t)\sin\omega_0 t - B(t)\cos\omega_0 t, \quad (5.51)$$

а аналитический сигнал $\psi_Y(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
\psi_Y(t) &= y(t) - j\sigma_Y(t) = \\
&= [A(t) + jB(t)]\cos\omega_0 t + [B(t) - jA(t)]\sin\omega_0 t = \\
&= [A(t) + jB(t)]\cos\omega_0 t - j[A(t) + jB(t)]\sin\omega_0 t = \\
&= [A(t) + jB(t)]\exp(-j\omega_0 t). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Здесь функция $A(t) + jB(t)$ есть комплексная огибающая, связанная с огибающей и фазой физической функции $y(t)$ соотношениями

$$|y(t)| = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} = \sqrt{[A(t) + jB(t)][A(t) - jB(t)]},$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{B(t)}{A(t)}; \quad \arg \dot{\psi}_Y(t) = \operatorname{arctg} \frac{B(t)}{A(t)}.$$

Из выражения (5.50) следуют частные соотношения для преобразования Гильберта гармонических функций:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t'}{t-t'} dt' = \sin \omega t, \quad -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t'}{t-t'} dt' = -\cos \omega t.$$

5.8. Теорема отсчетов для полосового сигнала.

Рассмотрим теорему отсчетов во временном представлении применительно к функции $x_1(t)$, обладающей комплексной спектральной плотностью $\dot{X}(\omega) = a(\omega) - jb(\omega)$ и представляющей собой полосовой сигнал [25]. Спектральная плотность полосового сигнала ограничена двумя интервалами частот $(-\omega_1, -\omega_2)$, (ω_1, ω_2) и её графическое изображение приведено на рис. 5.14.

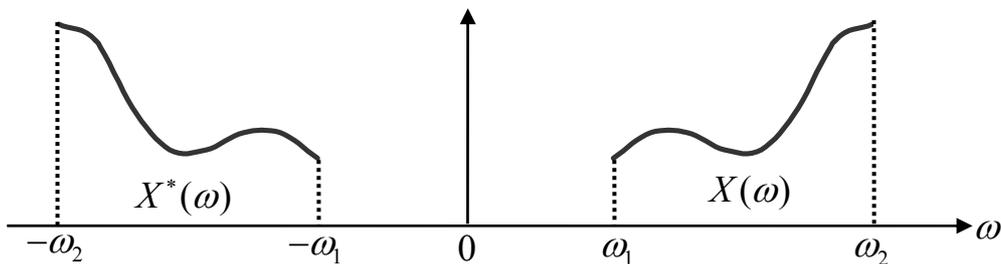


Рис. 5.14. Спектральная плотность полосового сигнала

Сопоставим функции $x_1(t)$ аналитический сигнал в соответствии с правилом (5.41):

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \dot{X}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} [a(\omega) - jb(\omega)] [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} b(\omega) \sin \omega t d\omega - \\
&-j \left[\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} b(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} a(\omega) \sin \omega t d\omega \right] = x_1(t) - jx_2(t). \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Здесь

$$x_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} b(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (5.54a)$$

есть физически существующая функция, а

$$x_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} b(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} a(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (5.54b)$$

есть функция, сопряженная к $x_1(t)$.

Используя прием периодического продолжения, разложим спектральную плотность $\dot{X}(\omega)$ в комплексный ряд Фурье

$$\dot{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp \left[-j \frac{2\pi n}{\omega_2 - \omega_1} \omega \right], \quad (5.55)$$

где величина $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ (ширина спектральной полосы) принята за период, а коэффициенты ряда определяются как

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \dot{X}(\omega) \exp \left(j \frac{2\pi n}{\Delta\omega} \omega \right) d\omega. \quad (5.56)$$

Учитывая, что аналитический сигнал $\dot{\psi}(t)$ связан со спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$ соотношением

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \dot{X}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (5.57)$$

определим этот сигнал в моменты времени $t = 2\pi n / \Delta\omega$:

$$\dot{\psi}(2\pi n / \Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \dot{X}(\omega) \exp\left(j \frac{2\pi n}{\Delta\omega} \omega\right) d\omega. \quad (5.58)$$

Сравнивая выражения (5.56) и (5.58), запишем

$$\dot{C}_n = \frac{\pi}{\Delta\omega} \dot{\psi}(2\pi n / \Delta\omega). \quad (5.59)$$

Тогда, подставляя ряд Фурье (5.55) в соотношение (5.57), получим

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Delta\omega} \omega\right) \right] \exp(j\omega t) d\omega$$

и, учитывая (5.59), видим, что

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\psi}(2\pi n / \Delta\omega) \int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(j(t - 2\pi n / \Delta\omega)\omega) d\omega. \quad (5.60)$$

Выполнив интегрирование, перепишем выражение (5.60) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\psi}(2\pi n / \Delta\omega) \times \\ & \times \left[\frac{\exp[j\omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega)] - \exp[j\omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)]}{j(t - 2\pi n / \Delta\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Рассмотрим теперь физическую функцию $x_1(t)$, представляющую собой действительную часть аналитического сигнала $\dot{\psi}(t)$. Для простоты рассмотрим только действительную часть одного из слагаемых ряда (5.61):

$$\operatorname{Re} \left\{ \dot{\psi}(2\pi n / \Delta\omega) \left[\frac{\exp[j\omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega)] - \exp[j\omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)]}{j(t - 2\pi n / \Delta\omega)} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ \left[x_1(2\pi n / \Delta\omega) - jx_2(2\pi n / \Delta\omega) \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{\sin \omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega) - \sin \omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{t - 2\pi n / \Delta\omega} \right] - \\
&\quad \left. - j \left[\frac{\cos \omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega) - \cos \omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{t - 2\pi n / \Delta\omega} \right] \right\} = \\
&= x_1(2\pi n / \Delta\omega) \frac{\sin \omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega) - \sin \omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{t - 2\pi n / \Delta\omega} - \\
&\quad - x_2(2\pi n / \Delta\omega) \frac{\cos \omega_2(t - 2\pi n / \Delta\omega) - \cos \omega_1(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{t - 2\pi n / \Delta\omega}. \quad (5.62a)
\end{aligned}$$

Используя известные тригонометрические преобразования

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

приведем выражение (5.62a) к виду

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \{ \dots \} &= 2 \frac{\sin(\Delta\omega/2)(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{t - 2\pi n / \Delta\omega} \times \\
&\quad \times \left\{ x_1(2\pi n / \Delta\omega) \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n / \Delta\omega) \right] + \right. \\
&\quad \left. + x_2(2\pi n / \Delta\omega) \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n / \Delta\omega) \right] \right\}. \quad (5.62б)
\end{aligned}$$

Поскольку (5.62б) представляет собой действительную часть одного члена ряда (5.61), то действительную часть аналитического сигнала (5.61) можно записать как

$$\begin{aligned}
x_1(t) = \operatorname{Re} \psi(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 0,5\Delta\omega(t - 2\pi n / \Delta\omega)}{0,5\Delta\omega(t - 2\pi n / \Delta\omega)} \times \\
&\quad \times \left\{ x_1(2\pi n / \Delta\omega) \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n / \Delta\omega) \right] + \right. \\
&\quad \left. + x_2(2\pi n / \Delta\omega) \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n / \Delta\omega) \right] \right\}
\end{aligned}$$

и, используя соотношение $a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos[\alpha - \eta]$, где $\eta = \arctg(b/a)$, получить окончательное выражение в виде

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{x_1^2(2\pi n/\Delta\omega) + x_2^2(2\pi n/\Delta\omega)} \times \\ \times \frac{\sin 0,5\Delta\omega(t - 2\pi n/\Delta\omega)}{0,5\Delta\omega(t - 2\pi n/\Delta\omega)} \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n/\Delta\omega) - \eta_n \right], \quad (5.63)$$

где $\eta_n = \arctg \frac{x_1(2\pi n/\Delta\omega)}{x_2(2\pi n/\Delta\omega)}$.

Нетрудно видеть, что выражение

$$A_n = \frac{\sin 0,5\Delta\omega(t - 2\pi n/\Delta\omega)}{0,5\Delta\omega(t - 2\pi n/\Delta\omega)} \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) (t - 2\pi n/\Delta\omega) - \eta_n \right]$$

представляет собой высокочастотную функцию отсчетов, огибающая которой есть смещенная функция отсчетов, а несущая частота определена средней частотой интервала $\Delta\omega$, т.е. $\omega_s = 0,5(\omega_1 + \omega_2)$. Каждая из этих высокочастотных функций отсчета относится к соответствующей точке отсчета n на оси времени и характеризуется амплитудой

$$A_n = \sqrt{x_1^2(2\pi n/\Delta\omega) + x_2^2(2\pi n/\Delta\omega)}$$

и фазой

$$\eta_n = \arctg \frac{x_2(2\pi n/\Delta\omega)}{x_1(2\pi n/\Delta\omega)}.$$

Амплитуда и фаза каждой из высокочастотных функций отсчета определяют значения квадратур x_{1n} и x_{2n} в соответствующей точке отсчета, совокупность которых, в свою очередь, определяет физическую функцию $x_1(t)$. Таким образом, выражение (5.63) представляет собой интерполяционную формулу для полосового сигнала.

Из этого выражения следует, что значения квадратур $x_1(t)$ и $x_2(t)$ во всех точках отсчета

$$t = 2\pi n / \Delta\omega = n / \Delta f \quad (5.64)$$

полностью определяют функцию $x_1(t)$ для любых значений t . Нетрудно видеть, что точки отсчета, определяемые выражением (5.64), отстоят друг от друга вдвое дальше, чем это следует из условия $\Delta t = 1/2f_B$, где величина f_B определяет ширину полосы частот низкочастотного аналитического сигнала, спектр которого сосредоточен в полосе частот $0 \div f_B$.

Однако здесь в точках отсчета должны быть определены две функции – $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Следовательно, функция, заданная на интервале T и обладающая спектром с шириной Δf , определяется как и ранее $2T\Delta f$ независимыми значениями при условии $2T\Delta f \leq 1$ [25].

5.9. Случайные процессы с финитным спектром.

Теорема отсчетов для случайных процессов

Прежде всего рассмотрим в качестве примера интерполяционную формулу (т.е. теорему отсчетов для автокорреляционной функции стационарного случайного процесса $x(t)$, спектр которого ограничен интервалом $(-\omega_B, \omega_B)$) [25, 26]. В соответствии с теоремой Винера – Хинчина автокорреляционная функция $B(\tau)$ этого процесса связана с его непрерывным энергетическим спектром $G(\omega)$ обратным преобразованием Фурье

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (5.65)$$

В рассматриваемом случае $G(\omega)$ (энергетический спектр случайного процесса $x(t)$) тождественно равен нулю вне интервала $(-\omega_B, \omega_B)$. Тогда для АКФ $B(\tau)$ можно записать теорему отсчетов

$$B(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n/2f_B) \frac{\sin[2\pi f_B(\tau - n/2f_B)]}{2\pi f_B(\tau - n/2f_B)}, \quad (5.66)$$

где $1/2f_B = \Delta t$ – интервал квантования, как и ранее.

Энергетический спектр процесса $x(t)$ в данном случае определяется как

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n/2f_B) \frac{\sin[2\pi f_B(\tau - n/2f_B)]}{2\pi f_B(\tau - n/2f_B)} \exp(-j\omega\tau) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n/2f_B) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[2\pi f_B(\tau - n/2f_B)]}{2\pi f_B(\tau - n/2f_B)} \exp(-j\omega\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.67)$$

Входящая в данное выражение смещенная функция отсчетов

$$\frac{\sin[2\pi f_B(\tau - n/2f_B)]}{2\pi f_B(\tau - n/2f_B)} \quad (5.68)$$

представляет собой обратное преобразование Фурье от равномерной спектральной плотности, определенной на интервале $(-\omega_B, \omega_B)$ и обладающей фазовым сдвигом, линейно зависящем от частоты

$$S(\omega) = \frac{1}{2f_B} \exp\left(-j\frac{n}{2f_B}\omega\right). \quad (5.69)$$

Это преобразование имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{1}{2f_B} \exp(-jn/2f_B) \exp(j\omega\tau) = \frac{\sin[2\pi f_B(\tau - n/2f_B)]}{2\pi f_B(\tau - n/2f_B)}. \quad (5.70)$$

Таким образом, функции (5.68) и (5.69) есть пара преобразований Фурье, что и позволяет записать выражение (5.67) в виде

$$G(\omega) = \frac{1}{2f_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n/2f_B) \exp\left(-j\frac{n}{2f_B}\omega\right). \quad (5.71a)$$

Соотношение (5.71а) связывает энергетический спектр $G(\omega)$, который равен нулю вне полосы $(-\omega_B, \omega_B)$, с отсчетными значениями автокорреляционной функции $B(\tau)$, взятыми в моменты времени $\tau = n/2f_B$. Учитывая чётность автокорреляционной функции, соотношение (5.71а) можно переписать как

$$G(\omega) = \frac{1}{2f_B} \left[B(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B(n/2f_B) \cos \frac{n}{2f_B} \omega \right]. \quad (5.71б)$$

Рассмотрим теперь вопрос непосредственного использования теоремы отсчетов при интерполяции случайных процессов [26].

Пусть $x(t)$ – непрерывный (в среднеквадратичном) стационарный случайный процесс, обладающий непрерывным энергетическим спектром $G(\omega)$, который тождественно равен нулю вне полосы $(-\omega_B, \omega_B)$. Считая, что процесс $x(t)$ обладает непрерывной автокорреляционной функцией $B(\tau)$, покажем, что для этого процесса выполняется (в среднеквадратичном) равенство

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n/2f_B) \frac{\sin[2\pi f_B(t - n/2f_B)]}{2\pi f_B(t - n/2f_B)}. \quad (5.72)$$

Выражение (5.72) обобщает теорему отсчетов на случайные процессы и означает, что стационарный случайный процесс, обладающий ограниченным энергетическим спектром, полностью определяется некоторым множеством случайных величин

$$x_n = x(n/2f_B) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

и представляет собой сумму функций отсчета

$$x_n = \frac{\sin[2\pi f_B(t - n/2f_B)]}{2\pi f_B(t - n/2f_B)},$$

имеющих случайные амплитуды.

Чтобы установить справедливость равенства (5.72), необходимо доказать равенство автокорреляционных функций случайных процессов, отвечающих левой и правой частям равенства (5.72). Найдем прежде всего автокорреляционную функцию правой части равенства в виде

$$\begin{aligned}
m_1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f_B}\right) \frac{\sin\left[2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right]}{2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2f_B}\right) \frac{\sin\left[2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)\right]}{2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)} \right\} = \\
= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} m \left\{ x\left(\frac{n}{2f_B}\right) x\left(\frac{k}{2f_B}\right) \right\} \times \\
\times \frac{\sin\left[2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right] \sin\left[2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)\right]}{\left[2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right] \left[2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)\right]}. \quad (5.73)
\end{aligned}$$

В силу стационарности процесса $x(t)$

$$m \left\{ x\left(\frac{n}{2f_B}\right) x\left(\frac{k}{2f_B}\right) \right\} = B_X \left[\frac{n-k}{2f_B} \right] = B_X \left[\frac{n-k}{2f_B} \right] = B_X \left[\frac{r}{2f_B} \right],$$

где $r = n - k$. Двойная сумма в выражении (5.73) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_X \left(\frac{r}{2f_B} \right) \frac{\sin\left[2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right] \sin\left[2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)\right]}{\left[2\pi f_B\left(t - \frac{n}{2f_B}\right)\right] \left[2\pi f_B\left(t + \tau - \frac{k}{2f_B}\right)\right]} = \\
= \sum_{r=-\infty}^{\infty} B_X \left(\frac{r}{2f_B} \right) \frac{\sin\left[2\pi f_B\left(\tau - \frac{r}{2f_B}\right)\right]}{2\pi f_B\left(\tau - \frac{r}{2f_B}\right)}. \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Сравнивая выражения (5.74) и (5.66), нетрудно видеть, что сумма в правой части выражения (5.74) есть не что иное, как автокорреляционная функция $B_x(\tau)$, которая соответствует процессу $x(t)$, т. е. левой части выражения (5.72)

Таким образом автокорреляционные функции левой и правой частей (5.72) идентичны, что и свидетельствует о справедливости этого равенства.

6. СПЕКТРЫ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ. СЛОЖНЫЕ СИГНАЛЫ И ЭФФЕКТЫ СЖАТИЯ.

Сигналы, поступающие от датчиков информации (микрофон, телекамера, датчики систем телеметрии и т.п.), являются относительно низкочастотными, что не позволяет осуществить их эффективную передачу по радиоканалу. Для передачи сигналов необходимо перенести спектр этих сигналов из области низких частот в область высоких частот. Операция переноса спектра сигнала, содержащего некоторую информацию, из области низких частот в область верхних частот называется модуляцией.

Радиосигнал, несущий информацию, в общем виде можно записать как

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) \cos \psi(t), \quad (6.1)$$

где $\psi(t)$ – обобщенная (полная) фаза.

Как амплитуда A , так и обобщенная фаза $\psi(t)$ могут изменяться в соответствии с передаваемым сообщением [1, 7, 11]. В случае, если амплитуда A постоянна, а полная фаза $\psi(t)$ нарастает по линейному закону с постоянной скоростью, то выражение (6.1) представляет собой простое гармоническое колебание, иначе называемое “несущим” колебанием. Постоянная частота ω_0 этого колебания называется “несущей” частотой.

Если амплитуда A или обобщенная фаза $\psi(t)$ подвергаются изменению в соответствии с передаваемым сообщением, то радиосигнал $x(t)$ становится модулированным. В зависимости от того, какой из двух параметров A или ψ подвергается изменению, различают два основных вида модуляции – амплитудную и угловую. Поскольку полная фаза определяется как $\psi = \omega_0 t + \varphi$, где ω_0 – частота колебания, а φ – его начальная фаза, то угловая модуляция, в свою очередь, разделяется на два подвида: частотная мо-

дуляция и фазовая модуляция, которые тесно связаны. Рассмотрим отдельные виды и подвиды модуляции.

6.1. Амплитудная модуляция радиосигналов

Амплитудная модуляция представляет собой наиболее простой способ переноса информации высокочастотными колебаниями. В данном случае в соответствии с передаваемым сигналом изменяется только амплитуда несущего колебания, а параметры ω_0 и φ неизменны. Тогда амплитудно – модулированный (АМ) сигнал можно записать как

$$x_{AM}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6.2)$$

В соответствии с выражением (6.2) АМ – сигнал представляет собой произведение огибающей $A(t)$ и гармонического сигнала $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Связь между огибающей $A(t)$ и передаваемым сигналом $S(t)$ имеет вид

$$A(t) = A_0 [1 + mS(t)], \quad (6.3)$$

где A_0 – амплитуда несущего колебания в отсутствии модуляции, m – коэффициент модуляции (или глубина модуляции).

Определение понятия коэффициента модуляции может быть наглядно введено для случая модуляции чистым тоном (однотональной модуляции), когда модулирующая функция $S(t)$ представляет собой гармоническое колебание

$$S(t) = S_0 \cos(\Omega t + \gamma),$$

где Ω – частота модулирующего сигнала, а γ – его начальная фаза.

Огибающая модулирующего сигнала в данном случае может быть записана в виде

$$A(t) = A_0 + kS(t) = A_0 + \Delta A \cos(\Omega t + \gamma), \quad (6.4)$$

где k – коэффициент пропорциональности, $\Delta A = kS_0$ – величина изменения огибающей (рис 6.1). Отношение $M = \Delta A / A_0$ называется коэффициентом глубины модуляции или просто коэффициентом модуляции.

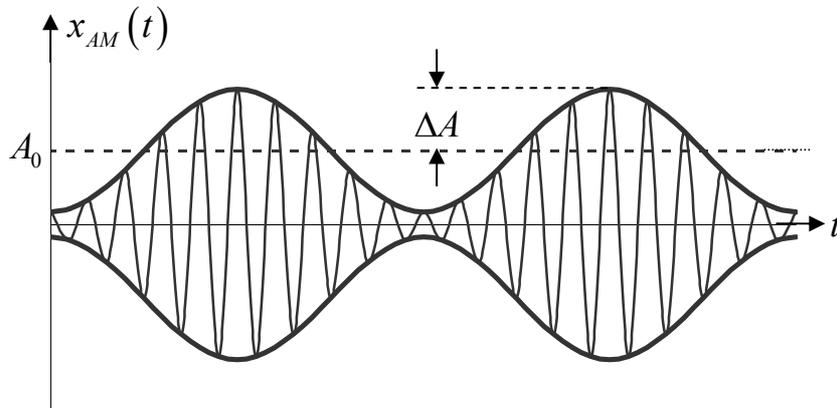


Рис. 6.1. Амплитудно – модулированный сигнал для случая модуляции
ЧИСТЫМ ТОНОМ

Таким образом, амплитудно – модулированное колебание для случая модуляции чистым тоном можно записать в виде

$$x_{AM}(t) = A_0 [1 + m \cos(\Omega t + \gamma)] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (6.6)$$

Необходимо отметить, что для неискаженной передачи информации, максимальное изменение огибающей не должно превышать абсолютной величины амплитуды несущего сигнала A_0 , т.е. $\Delta A \leq A_0$. Это означает, что коэффициент модуляции m не должен быть больше единицы.

Спектральный анализ для случая амплитудной модуляции чистым тоном тривиален. Производя простейшие преобразования выражения (6.6) с использованием известного соотношения

$$\cos \alpha \cos \beta = 0,5 [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

получим

$$x_{AM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) +$$

$$+ \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \gamma] + \frac{A_0 m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \gamma]. \quad (6.7)$$

Таким образом, при модуляции несущего сигнала чистым тоном в спектральный состав АМ – колебания входят три спектральных составляющих (см. рис. 6.2):

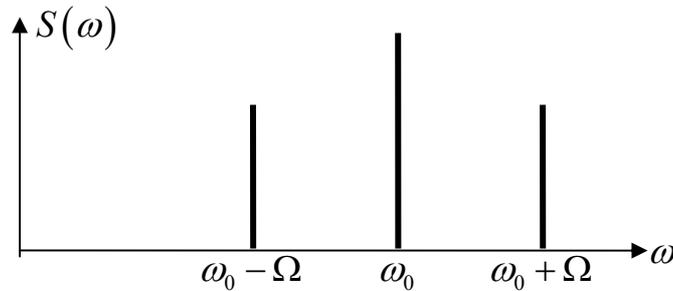


Рис.6.2. Спектральный состав АМ – колебания для случая модуляции чистым тоном

несущая частота ω_0 , верхняя боковая частота $\omega_0 + \Omega$ и нижняя боковая частота $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды сигналов отвечающих верхней и нижней боковым частотам, равны, а эти частоты расположены симметрично относительно несущего колебания.

Рассмотренный случай модуляции чистым тоном на практике встречается довольно редко, поскольку модулирующий низкочастотный сигнал обычно имеет сложный спектральный состав. Моделью такого сигнала может быть совокупность гармонических колебаний, имеющих различные амплитуды и фазы:

$$S(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n). \quad (6.8)$$

Следует отметить, однако, что ряд (6.8) не обязательно является рядом Фурье, поскольку условие целочисленной кратности частот Ω_n в данном случае не оговорено. Используя выражения (6.2), (6.3) и (6.8), запишем

аналитическое выражение амплитудно – модулированного сигнала для случая многочастотной модулирующей функции:

$$x_{AM}(t) = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N M_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (6.9)$$

Здесь коэффициенты $M_n = mA_n$ представляют собой частные коэффициенты модуляции для каждого из гармонических сигналов $A_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n)$ модулирующего колебания $S(t)$. Спектральное разложение амплитудно – модулированного сигнала при многочастотной модуляции проводится аналогично случаю модуляции чистым тоном:

$$x_{AM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{n=1}^N \frac{A_0 M_n}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_0 + \varphi_n] + \sum_{n=1}^N \frac{A_0 M_n}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_n)t + \varphi_0 - \varphi_n]. \quad (6.10)$$

На рис.6.3 изображены спектр модулирующего сигнала и спектральный состав амплитудно- модулированного сигнала для случая модуляции многочастотным сигналом.

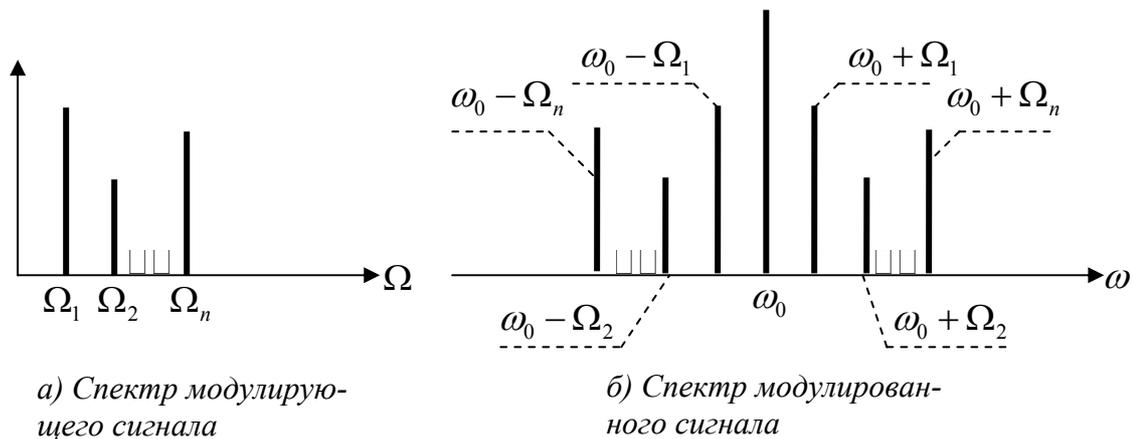


Рис. 6.3. Спектральный состав АМ – колебания для случая модуляции многочастотным сигналом

Нетрудно видеть, что в спектре этого сигнала, кроме несущего колебания содержатся группы верхних и нижних боковых колебаний. Спектр верхних боковых колебаний является копией спектра модулирующего сигнала, смещенной на величину ω_0 , а спектр нижних боковых колебаний представляет собой зеркальную (относительно несущей частоты) копию спектра верхних боковых колебаний. Общая ширина спектра амплитудно-модулированного сигнала определяется удвоенным значением высшей частоты в спектре модулирующего сигнала.

6.2. Энергетические характеристики АМ – колебания.

Балансная и однополосная модуляция радиосигналов

Как было указано выше, АМ – колебание обладает спектром, ширина которого определяется удвоенным значением высшей частоты спектра, модулирующего сигнала, что влечет за собой удвоение полосы частот, занимаемой в эфире АМ – сигналом. Кроме того, весьма важным являются энергетические показатели АМ – сигналов.

6.2.1. Баланс мощности АМ – колебания

Рассмотрим энергетические характеристики амплитудно – модулированного сигнала с целью определения соотношения мощностей сигналов несущей и боковых частот [1]. При этом источник колебания, модулированного чистым тоном, представим тремя последовательно включенными источниками гармонических колебаний, имеющих общую нагрузку, величину которой примем равной 1 Ом (рис. 6.4). Напряжения, генерируемые этими источниками, запишем в виде

$$A_H = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad A_{НБ} = 0,5 A_0 m \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \gamma],$$

$$A_{BB} = 0,5 A_0 m \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \gamma].$$

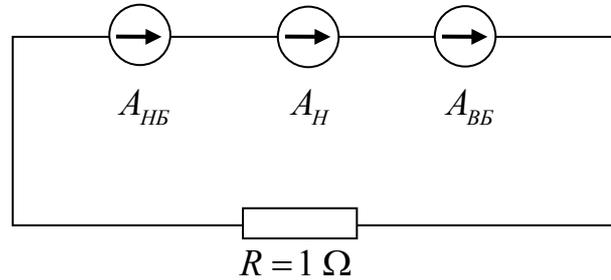


Рис. 6.4. К определению энергетических характеристик АМ – колебания

Мгновенная мощность амплитудно – модулированного сигнала (для случая сопротивления нагрузки равного 1 Ом) определяется как квадрат выражения (6.7):

$$P_{AM}(t) = x_{AM}^2(t) = \left\{ A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) + 0,5 A_0 m \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 - \gamma] + 0,5 A_0 m \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \gamma] \right\}^2.$$

Для определения средней мощности модулированного сигнала необходимо усреднить величину $P_{AM}(t)$ на достаточно протяженном интервале времени T :

$$\langle P_{AM} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_{AM}(t) dt.$$

Учитывая условие ортогональности гармонических колебаний, имеющих различные частоты, нетрудно показать, что средняя мощность амплитудно – модулированного сигнала в данном случае равна сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний

$$\langle P_{AM} \rangle = \frac{A_0^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt + 0,25 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T \cos^2 [(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \gamma] dt +$$

$$\begin{aligned}
& + 0,25 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T \cos^2 [(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \gamma] dt = \\
& = 0,5 \frac{A_0^2}{T} \int_0^T dt + 0,5 \frac{A_0^2}{T} \int_0^T \cos 2(\omega_0 t + \varphi) dt + \\
& + 0,125 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T dt + 0,125 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T \cos 2[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \gamma] dt + \\
& + 0,125 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T dt + 0,125 \frac{A_0^2 m^2}{T} \int_0^T \cos 2[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \gamma] dt. \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Для случая $T \gg \frac{2\pi}{\Omega}$, $\Omega \ll \omega_0$ выражение (6.11) примет вид

$$\langle P_{AM} \rangle = \langle P_H \rangle + \langle P_{HB} \rangle + \langle P_{BB} \rangle = 0,5 A_0^2 + 0,25 A_0^2 m^2. \quad (6.12)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\langle P_{HB} \rangle + \langle P_{BB} \rangle}{\langle P_H \rangle} = \frac{m^2}{2}. \quad (6.13)$$

Таким образом, даже при значении коэффициента модуляции $m = 1$, суммарная мощность обоих боковых колебаний составляет всего лишь половину мощности немодулированного колебания. Поскольку передаваемое сообщение отображается одинаково в обоих боковых колебаниях, то можно отметить, что с энергетической точки зрения амплитудная модуляция неэффективна.

6.2.2. Балансная модуляция. Однополосная модуляция

Как было показано в подразделе 6.2.1, значительная доля мощности амплитудно-модулированного сигнала сосредоточена в несущем колебании, что снижает энергетику боковых полос, несущих полезную информацию. Более эффективное использование мощности передающего устройства может быть достигнуто в случае излучения сигнала, в спектральном соста-

ве которого содержится только боковые колебания, а несущее колебание подавлено. Вид модуляции, обеспечивающей подобный спектральный состав излучения, называется балансной модуляцией (БМ). Аналитическое выражение для балансно – модулированного сигнала можно найти, исключив из выражения (6.7) слагаемое, отвечающее несущей частоте (т.е. считая амплитуду этого слагаемого равной нулю). Тогда, пренебрегая начальными фазами φ_0 и γ , запишем

$$x_{БМ}(t) = 0,5A_0 \{ \cos(\omega_0 - \Omega)t + \cos(\omega_0 + \Omega)t \}. \quad (6.14)$$

Спектральный состав данного сигнала изображен на рис. 6.5.

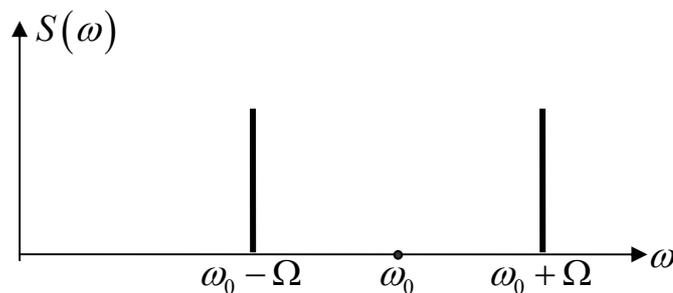


Рис. 6.5. Спектральный состав БМ – сигнала

Обратим внимание на тот факт, что обычно частота модулирующего сигнала много меньше частоты несущего сигнала, т.е. $\Omega \ll \omega_0$. Тогда выражение (6.14) можно рассматривать как сумму колебаний с двумя близкими частотами и равными амплитудами. С точки зрения физики эти выражения представляют собой “биения” двух гармонических сигналов с близкими частотами и равными амплитудами [28]. Рассмотрим этот эффект подробнее.

Пусть имеются два гармонических колебания с частотами ω_1 и $\omega_1 + \Delta\omega$, обладающие амплитудами A_1 и A_2 :

$$U_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t, \quad U_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t. \quad (6.15)$$

Найдем сумму этих сигналов $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$.

$$\begin{aligned}
 U(t) &= U_1(t) + U_2(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t = \\
 &= A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t \cos \Delta\omega t - A_2 \sin \omega_1 t \sin \Delta\omega t.
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Перепишем соотношение (6.16) в виде

$$U(t) = (A_1 + A_2 \cos \Delta\omega t) \cos \omega_1 t - A_2 \sin \Delta\omega t \sin \omega_1 t. \tag{6.17}$$

Затем, используя тождество

$$a \cos \lambda - b \sin \lambda = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\lambda + \eta),$$

где $\eta = \text{arctg}(b/a)$, преобразуем (6.17) и найдем суммарное колебание:

$$U(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\omega t} \cos[\omega_1 t + \eta(t)], \tag{6.18}$$

где начальная фаза $\eta(t)$

$$\eta(t) = \text{arctg} \left[\frac{A_2 \sin \omega t}{A_1 + A_2 \cos \Delta\omega t} \right] \tag{6.19}$$

есть функция времени, зависящая от разности частот складываемых колебаний. Таким образом, эффект “биений” приводит к суммарному колебанию, у которого как амплитуда, так и начальная фаза является функциями времени, т.е. имеет место случай одновременной модуляции как по амплитуде так и по фазе.

Примем теперь $A_1 = A_2 = 0,5A_0$, $\Delta\omega = 2\Omega$, что соответствует случаю балансной модуляции (см. выражение (6.14) и рис. 6.5). Тогда выражение (6.18) примет вид

$$\begin{aligned}
 U_{БМ}(t) &= A_0 \sqrt{0,5(1 + \cos 2\Omega t)} \cos[\omega_1 t + \text{arctg}(\text{tg}\Omega t)] = \\
 &= A_0 |\cos \Omega t| \cos[\omega_1 t + \eta].
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Начальная фаза $\eta = \text{arctg}(\text{tg}\Omega t)$ определяется подстановкой величин $\Delta\omega = 2\Omega$ и $A_1 = A_2 = 0,5A_0$ в соотношение (6.19).

Рассмотрим теперь поведение начальной фазы колебания $\cos[\omega_1 t + \eta]$, т.е. функцию $\eta = \text{arctg}(\text{tg}\Omega t)$. В соответствии с определением арктангенса

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \Omega t, \text{ где } -\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}.$$

Выражение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \Omega t)$ имеет смысл при всех действительных значениях величины Ωt , за исключением $\Omega t = \frac{2k+1}{2}\pi$. Таким образом, областью определения данной функции служит бесконечное множество интервалов

$$\dots \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2} \right); \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right); \dots \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \dots, \quad (6.21)$$

а сама функция является периодической с периодом π [29].

Тогда

$$\begin{aligned} \eta = \Omega t, & \quad \text{если} & \quad -\frac{\pi}{2} < \Omega t < \frac{\pi}{2}; \\ \eta = \Omega t - \pi, & \quad \text{если} & \quad \frac{\pi}{2} < \Omega t < \frac{3}{2}\pi; \\ \eta = \Omega t + \pi, & \quad \text{если} & \quad -\frac{3}{2}\pi < \Omega t < -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

а в общем случае

$$\eta = \Omega t - k\pi, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < \Omega t < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Напомним, что величина Ωt линейно нарастает во времени, а скорость её роста определяется частотой Ω . Для построения графика поведения начальной фазы $\eta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \Omega t)$ достаточно построить отрезок биссектрисы координатного угла $\eta = \Omega t$ на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ не причисляя концы отрезка к графику, а затем продолжить график периодически с периодом π (рис 6.6). Точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва первого рода функции $\eta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \Omega t)$, т.к. в этих точках предела функции не существует, но существуют различающиеся между собой пределы, определяемые при стремлении величины Ωt к точке $\pi/2$ слева (считаем $\Omega t < \pi/2$) предел равен

$$\lim_{\Omega t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\arctg(\operatorname{tg}\Omega t)] = \lim \Omega t = \frac{\pi}{2},$$

а при стремлении величины Ωt к этой же точке справа (считая $\Omega t > \pi/2$) предел принимает значение

$$\lim_{\Omega t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\arctg(\operatorname{tg}\Omega t)] = \lim(\Omega t - \pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

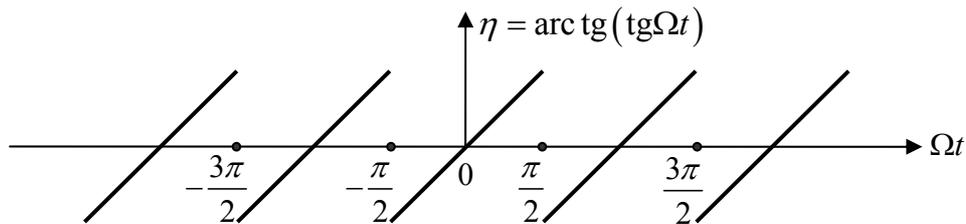


Рис. 6.6. График поведения начальной фазы БМ – колебания

Таким образом, начальная фаза η балансно – модулированного колебания скачкообразно изменяется на π в точках, соответствующих концам интервалов (6.21) области определения функции $\eta = \arctg(\operatorname{tg}\Omega t)$. Интервал периодичности функции η равен половине периода функции $\cos\Omega t$, которая в нашем случае представляет собой модулирующий сигнал и этот интервал четко связан с функцией $\cos\Omega t$ таким образом, что на периоде этой функции ($0 \div 2\pi$) укладывается ровно два периода функции η .

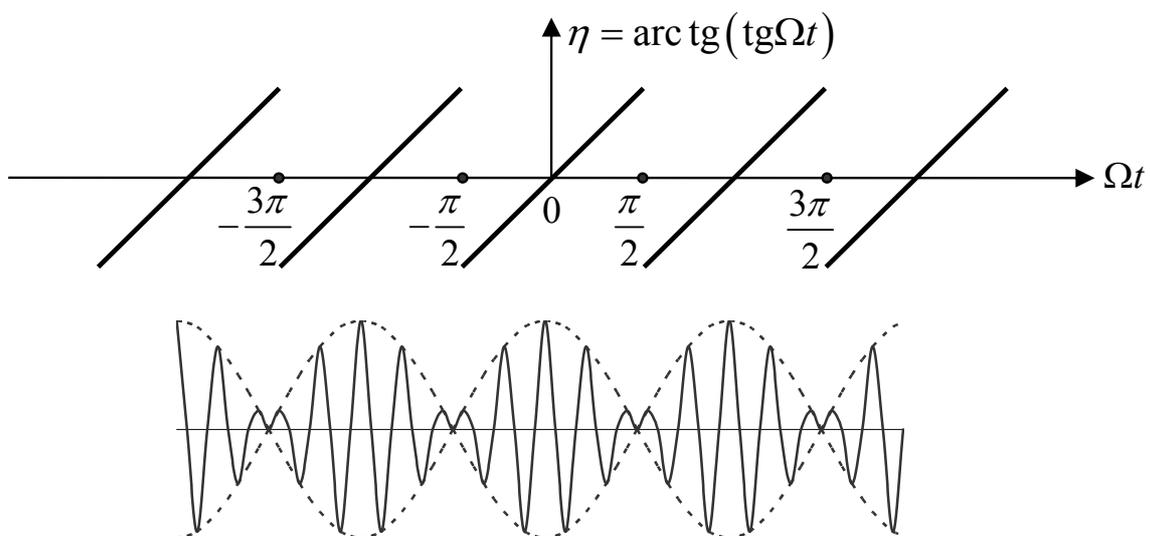


Рис. 6.7. Графическое изображение БМ – колебания

Графическое изображение балансно – модулированного сигнала приведено на рис. 6.7 одновременно с графиком функции $\eta = \arctg(\operatorname{tg}\Omega t)$. Этот рисунок демонстрирует одновременное наличие амплитудной модуляции и скачкообразного изменения фазы БМ – сигнала в точках разрыва функции $\eta = \arctg(\operatorname{tg}\Omega t)$. Таким образом, балансно – модулированное колебание нельзя отнести к типу амплитудно-модулированных колебаний.

Устранение несущего колебания приводит к увеличению мощности, относящийся к информационно-содержащим составляющим модулированного сигнала. Однако ширина полосы частот, занимаемая балансно – модулированным колебанием, по-прежнему в два раза превышает ширину полосы частот передаваемого сообщения (модулирующего сигнала). Но, поскольку верхняя и нижняя боковые частоты (боковые полосы) содержат одну и ту же информацию, дальнейшее улучшение баланса мощности модулированного колебания и одновременное уменьшение занимаемой полосы частот в два раза может быть достигнуто путем использования так называемой однополосной модуляции. При этом виде модуляции в эфир (канал передачи информации) передается только одна боковая полоса (частота) и вся мощность передаваемого сигнала используется только для передачи полезной информации. Передача только одной из боковых полос приводит к изменению в 2 раза полосы частот, занимаемой передаваемым сигналом в канале связи.

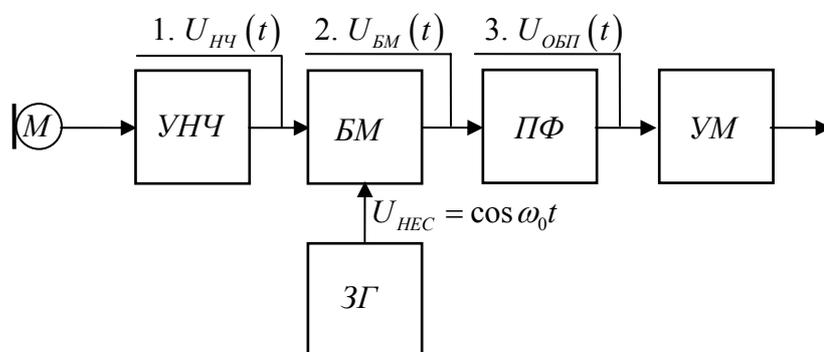


Рис. 6.8. Блок – схема однополосного модулятора

Режим однополосной модуляции может быть реализован несколькими путями: фильтровым, фазовым и комбинированным (фазово – фильтровым) способами. Поскольку подробный анализ технических способов модуляции не входит в задачи настоящей книги, рассмотрим простейший из упомянутых способов – фильтровый. На рис. 6.8 изображена блок – схема однополосного модулятора, реализующего фильтровой метод формирования сигнала.

Здесь сигнал, создаваемый датчиком информации (микрофон) и обладающий полосой частот $\Delta\omega$, после усиления поступает на балансный модулятор БМ одновременно с сигналом несущей частоты ω_0 от задающего генератора ЗГ. Эпюры спектров сигналов с выхода усилителя низкой частоты и задающего генератора показаны на рис. 6.9а. На выходе балансного модулятора имеет место двухполосный сигнал с подавленной несущей (рис.6.9б). Обычно несущее колебание не может быть подавлено идеально, и на выходе БМ имеет место неподавленный остаток этого колебания.

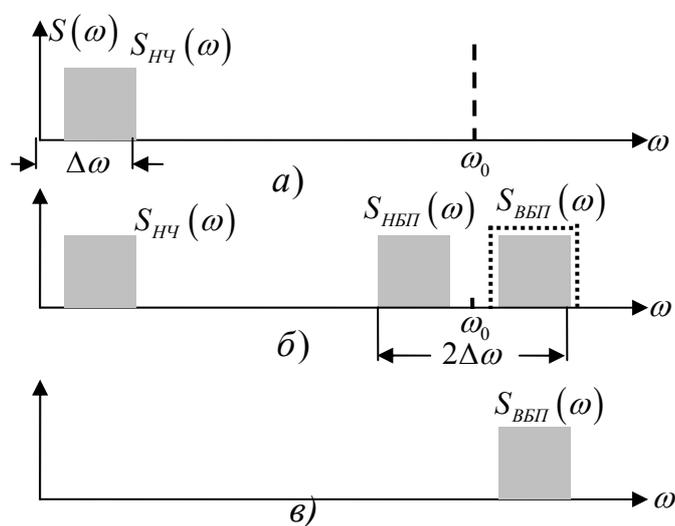


Рис. 6.9. Эпюры спектра сигнала в процессе формирования однополосного сигнала

Полосовой фильтр ПФ с хорошим коэффициентом прямоугольности частотной характеристики (кварцевый, электромеханический, пьезокристаллический) выделяет необходимую полосу частот (верхнюю или ниж-

нюю) и обеспечивает подавление остатка несущего колебания. При этом ширина полосы частот сигнала на выходе ПФ (точка 3, рис 6.9в) идентична ширине полосы частот на выходе датчика информации. В случае, изображенном на рис 6.9в, выделяется верхняя боковая полоса.

Поскольку фильтры с хорошим коэффициентом прямоугольности зачастую не могут быть технически реализованы на частотах выше чем 10÷20 МГц, то перенос спектра однополосного колебания на рабочую частоту должен быть произведен с использованием дополнительной операции балансной модуляции и фильтрации. При этом на вход дополнительного балансного модулятора БМ2 подаются колебания $U_{ОБЛ}(t)$, сформированные на частоте ω_0 и колебания дополнительного гетеродина, частота которого определяется как $\omega_{Г} = \omega_{Р} - \omega_0$, где $\omega_{Р}$ - рабочая частота. На выходе БМ2 формируются две боковые полосы, верхняя из которых, соответствующая рабочей частоте, выделяется обычным полосовым фильтром. Сигнал после выделения подлежит усилению.

В заключение подраздела отметим, что однополосная модуляция, так же как и балансная, представляет собой смешанную амплитудно-фазовую модуляцию.

6.3. Угловая модуляция радиосигналов и её виды

6.3.1. Виды угловой модуляции

Рассмотрим модулированные радиосигналы, в которых передаваемое сообщение $S(t)$ изменяет либо частоту ω_0 , либо начальную фазу φ несущего колебания $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Поскольку аргумент гармонического колебания, называемый полной (обобщенной) фазой, определяет текущее значение фазового угла, такие радиосигналы называются сигналами с уг-

ловой модуляцией. [1, 2, 7, 30] Предположим, что полная фаза $\psi(t)$ связана с передаваемым сообщением $S(t)$ зависимостью

$$\psi(t) = \omega_0 t + kS(t), \quad (6.22)$$

где ω_0 – значение частоты в отсутствие передаваемого сообщения (несущая частота), k – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность Rad/вольт. Тогда сигнал, несущий информацию, может быть записан в виде

$$U_{\text{ФМ}} = A_0 \cos[\omega_0 t + kS(t)] \quad (6.23)$$

и называется фазово-модулированным (ФМ).

При $S(t)=0$ колебание (6.23) представляет собой простой гармонический сигнал. При увеличении значения $S(t)$ полная фаза $\psi(t)$ нарастает во времени быстрее, чем по линейному закону, имеющему место при отсутствии модуляции. При уменьшении $S(t)$ значений скорость нарастания полной фазы $\psi(t)$ во времени спадает. Предельные значения фазового сдвига ФМ – сигнала относительно немодулированного гармонического сигнала называются девиацией. Различают девиацию фазы “вверх” $\Delta\psi_B = kS_{MAX}$ и девиацию фазы “вниз” $\Delta\psi_H = kS_{MIN}$, когда функция $S(t)$ меняет знак. Мгновенная угловая частота $\omega(t)$ сигнала (6.23) определяется производной полной фазы по времени

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}, \quad (6.24 \text{ а})$$

а полная фаза, соответственно, определяется интегралом от закона изменения частоты по времени

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (6.24 \text{ б})$$

В случае частотной модуляции (ЧМ) сигнала $x(t) = \cos[\psi(t)]$ зависимость частоты модулированного сигнала от времени имеет вид

$$\omega(t) = 2\pi [f_0 + k_1 S(t)], \quad (6.25)$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность Герц/вольт. Тогда полная фаза ЧМ колебания может быть найдена с использованием выражения (6.24 б) и частотно-модулированный сигнал записывается как

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos 2\pi \left[f_0 t + k_1 \int_0^t S(\tau) d\tau \right]. \quad (6.26)$$

В соответствии с выражением (6.25) ЧМ сигнал может быть характеризован девиацией угловой частоты “вверх” $\Delta\omega_B = 2\pi k_1 S_{\text{MAX}}$ и девиацией угловой частоты “вниз” $\Delta\omega_H = 2\pi k_1 S_{\text{MIN}}$.

Исходя из изложенного, можно указать на принципиальное различие между ФМ и ЧМ сигналами: если фазовый сдвиг между ФМ и немодулированным колебанием пропорционален передаваемому сообщению $S(t)$, то для ЧМ сигнала этот фазовый сдвиг пропорционален интегралу от передаваемого сообщения.

6.3.2. Однотональная угловая модуляция

Рассмотрим прежде всего простейший случай так называемой однотональной частотной модуляции (ЧМ), когда модулирующим сигналом является гармоническое колебание (чистый тон) $S(t) = S_0 \cos \Omega t$. Для упрощения анализа предположим, что начальные фазы несущего и модулирующего сигналов равны нулю.

При однотональном модулирующем сигнале закон изменения частоты ЧМ сигнала определяется как

$$\omega(t) = 2\pi [f_0 + \Delta f \cos \Omega t],$$

где $\Delta f = k_1 S_0$ – девиация частоты, т.е. максимальное отклонение частоты от значения f_0 . Используя соотношение (6.24б), найдем полную фазу ЧМ сигнала в виде

$$\psi(t) = 2\pi \int_0^t [f_0 + \Delta f \cos \Delta \tau] d\tau = \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t \quad (6.28)$$

и введем обозначение

$$m_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta \omega}{\Omega} . \quad (6.29)$$

Величина $m_{\text{ЧМ}}$ называется индексом частотной модуляции. С учетом выражений (6.28) и (6.29) ЧМ сигнал при модуляции чистым тоном можно записать как

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t] . \quad (6.30)$$

Рассмотрим теперь фазомодулированный (ФМ) сигнал для случая модуляции чистым тоном. Полная фаза ФМ сигнала изменяется по закону

$$\psi(t) = \omega_0 t + k S_0 \cos \Omega t, \quad (6.31)$$

т.е. пропорционально амплитуде модулирующего сигнала. Тогда ФМ – сигнал имеет вид

$$U_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + m_{\text{ФМ}} \cos \Omega t] . \quad (6.32)$$

В выражении (6.32) величина

$$m_{\text{ФМ}} = k S_0 \quad (6.33)$$

характеризует максимальное отклонение фазы несущего колебания и называется индексом фазовой модуляции.

6.3.3. Некоторые особенности спектрального анализа колебаний с угловой модуляцией

Из выражений (6.30) и (6.32) следует, что общая форма колебания с угловой модуляцией имеет вид

$$U_{\text{УМ}}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] . \quad (6.34)$$

В этом колебании передаваемое сообщение $S(t)$ заключено в функцию фазового угла $\varphi(t)$. Для случая фазовой модуляции функции $\varphi(t)$ и $S(t)$ совпадают по форме, отличаясь лишь постоянным коэффициентом k . Поэтому спектр передаваемого сообщения $S(t)$ с точностью до коэффициента k совпадает со спектром функции $\varphi(t)$.

В случае частотной модуляции функция $\varphi(t)$ является интегралом от передаваемого сообщения. Напомним, что преобразование Фурье интеграла

$$f(t) = \int S(t) dt$$

является первообразной по отношению к функции $S(t)$. Поэтому из выражения для преобразования Фурье производной

$$F\left\{S(t) = \frac{df(t)}{dt}\right\} = S(\omega) = j\omega F(\omega)$$

следует, что $F(\omega) = S(\omega) / j\omega$. Таким образом операция интегрирования эквивалентна действию фильтра нижних частот, изменяющего амплитуды и фазы спектральных составляющих передаваемого сообщения $S(t)$. При этом коэффициент передачи по амплитуде уменьшается с ростом частоты.

Рассмотрим теперь некоторые общие соображения по определению спектра колебаний с угловой модуляцией, считая заданным спектр функции $\varphi(t)$. Преобразуем прежде всего выражение (6.34) к виду

$$U_{\text{УМ}}(t) = A_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - A_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.35)$$

Выражение (6.35) представляет собой сумму двух квадратурных составляющих, модулированных по амплитуде

$$U_C(t) = A_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t \quad \text{и} \quad U_S(t) = A_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t.$$

Закон амплитудной модуляции квадратурных составляющих определяется функциями $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$. Выше было показано, что боковые полосы, определяющие спектр АМ сигнала, представляют собой копии спектра мо-

дулирующего сигнала, сдвинутые по частоте. Таким образом, для определения спектра колебания с угловой модуляцией необходимо найти спектры функций $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$, а затем перенести их по частоте как для случая амплитудной модуляции.

Однако спектры функций $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$ могут существенно отличаться от спектра функции $\varphi(t)$ в силу нелинейности преобразований $\cos[\varphi(t)]$ и $\sin[\varphi(t)]$. Таким образом, при угловой модуляции связь между спектром передаваемого сообщения и спектром модулированного колебания будет значительно сложнее, чем при амплитудной модуляции.

6.3.4. Спектральное разложение ЧМ сигнала для малых значений индекса модуляции

Рассмотрим спектральный состав ЧМ сигнала (6.30) для некоторых простейших случаев, когда значение индекса частотной модуляции невелико. Прежде всего, рассмотрим спектр ЧМ сигнала при однотоновой модуляции для случая $m_{\text{ЧМ}} \ll 1$. Для этого преобразуем выражение (6.30) к виду

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 [\cos(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - \sin(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \sin \omega_0 t]. \quad (6.36)$$

Представим функции $\cos(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t)$ и $\sin(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t)$ степенными рядами

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (6.37)$$

и, учитывая условие $m_{\text{ЧМ}} \ll 1$, ограничимся первыми членами разложений (6.37): $\cos(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx 1$; $\sin(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t$. Тогда

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 [\cos \omega_0 t - m_{\text{ЧМ}} \sin \omega_0 t \sin \Omega t]. \quad (6.38a)$$

Поскольку $\sin \alpha \sin \beta = 0,5 [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, то

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos \omega_0 t - 0,5 A_0 m_{\text{ЧМ}} \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0,5 A_0 m_{\text{ЧМ}} \cos(\omega_0 + \Omega)t. \quad (6.38b)$$

Таким образом, при значениях индекса модуляции $m \ll 1$ спектр ЧМ сигнала содержит несущее колебание с частотой ω_0 и две боковые частоты $(\omega_0 - \Omega)$ и $(\omega_0 + \Omega)$. Однако нижняя боковая частота имеет знак минус, что означает наличие фазового сдвига величиной 180° . Сравнивая спектр АМ колебания при модуляции чистым тоном со спектром однотонового ЧМ колебания для случая $m_{\text{ЧМ}} \ll 1$, нетрудно видеть (см. рис. 6.10), что ширина спектров АМ – и ЧМ – модулированных колебаний совпадает и составляет величину 2Ω , однако имеется характерное различие, касающееся сдвига фазы нижней боковой частоты на π .

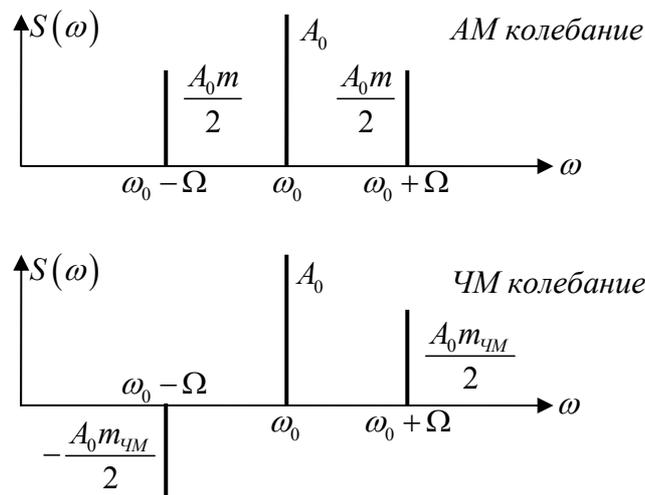


Рис. 6.10. Спектр ЧМ колебания для случая однотоновой модуляции при условии $m_{\text{ЧМ}} \ll 1$

Данный случай называется узкополосной частотной модуляцией или NBFM (Narrow Band Frequency Modulation).

В случае если $m_{\text{ЧМ}} \approx 1$, необходимо использовать по два члена разложения в ряд (6.37) как для функции $\cos(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t)$, так и для функции $\sin(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t)$:

$$\cos(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx 1 - 0,5 m_{\text{ЧМ}}^2 \sin^2 \lambda t, \quad (6.39a)$$

$$\sin(m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t) \approx m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t - \frac{m_{\text{ЧМ}}^3}{3!} \sin^3 \Omega t. \quad (6.39)$$

Подставляя разложения (6.39) в соотношение (6.36) и учитывая, что

$$\sin^2 \omega t = 0,5(1 - \cos 2\Omega t), \quad \sin^3 \Omega t = 0,25(3 \sin \Omega t - \sin 3\Omega t),$$

после простейших тригонометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} U_{\text{ЧМ}}(t) &= A_0 \left(1 - \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{4}\right) \cos \omega_0 t - A_0 m_{\text{ЧМ}} \left(1 - \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{8}\right) \sin \omega_0 t \sin \Omega t + \\ &+ A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{4} \cos \omega_0 t \cos 2\Omega t - A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^3}{24} \sin \omega_0 t \sin 3\Omega t = \\ &= A_0 \left(1 - \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{4}\right) \cos \omega_0 t - A_0 m_{\text{ЧМ}} \left(1 - \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{8}\right) \cos(\omega_0 - \Omega)t + \\ &+ A_0 m_{\text{ЧМ}} \left(1 - \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{8}\right) \cos(\omega_0 + \Omega)t + A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{8} \cos(\omega_0 - 2\Omega)t + A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{8} \cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \\ &- A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^2}{48} \cos(\omega_0 - 3\Omega)t + A_0 \frac{m_{\text{ЧМ}}^3}{48} \cos(\omega_0 + 3\Omega)t. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Из выражения (6.40) следует, что с ростом величины индекса частотной модуляции в спектре ЧМ сигнала появляются новые верхние и нижние боковые колебания, соответствующие гармоникам частоты модуляции. Таким образом, при увеличении индекса модуляции спектр ЧМ сигнала с ростом значительно усложняется и расширяется (см. рис 6.11).

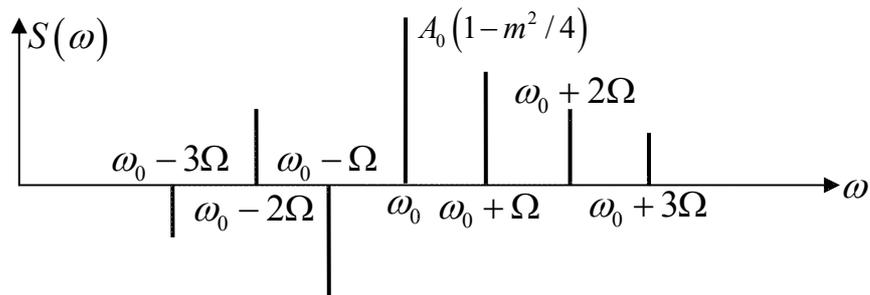


Рис. 6.11. Изменение спектра ЧМ сигнала с ростом индекса модуляции

Поскольку возникают новые составляющие спектра, то происходит перераспределение энергии между спектральными составляющими. Так, из

выражения (6.40) следует, что амплитуда несущего колебания уменьшается с ростом индекса модуляции на величину $(1 - m_{\text{ЧМ}}^2 / 4)$. Уменьшение энергии несущего колебания соответствует энергии, отвечающей появившимся новым боковым частотам. Из (6.40) следует также, что нечетные нижние боковые частоты ЧМ колебания имеют фазовый сдвиг 180° , что также отображено на рис. 6.11

6.3.5 Спектральное разложение ЧМ сигнала при произвольном значении индекса модуляции

Для случая однотоновой частотной модуляции можно найти общее выражение для спектра ЧМ сигнала, справедливое при произвольном значении индекса модуляции $m_{\text{ЧМ}}$.

Нетрудно видеть, что ЧМ сигнал (6.30) и его запись (6.36), использующая квадратурные составляющие, представляет собой действительную часть комплексного аналитического сигнала $A_0 \exp[j(\omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin t)]\Omega$:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \operatorname{Re} \left\{ \exp[j\omega_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin \Omega t] \right\}. \quad (6.41)$$

Из теории функций Бесселя известно [31], что экспоненциальная функция $\exp[jm \sin x]$, периодическая на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$, может быть представлена комплексным рядом Фурье

$$\exp(jm \sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \exp(jkx). \quad (6.42)$$

Здесь m – произвольное вещественное число, $J_k(m)$ – функция Бесселя индекса k от аргумента m [31].

Принимая $x = \Omega t$ и используя разложение (6.42), запишем спектральное представление ЧМ сигнала (6.41) для случая произвольного значения индекса модуляции $m_{\text{ЧМ}}$

$$\begin{aligned}
U_{\text{ЧМ}}(t) &= A_0 \operatorname{Re} \left[\exp(j\omega_0 t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m_{\text{ЧМ}}) \exp(jk\Omega t) \right] = \\
&= A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Набор значений функций Бесселя $J_k(m)$ образует спектр ЧМ сигнала. Не трудно видеть, что спектр ЧМ сигнала с однотоновальным сообщением содержит в общем случае бесконечное число боковых колебаний $\cos(\omega_0 \pm k\Omega)t$. Поскольку функции Бесселя с положительными и отрицательными значениями порядка k связаны соотношением [31]

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m),$$

то начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + k\Omega$ и $\omega_0 - k\Omega$ совпадают для четных k и отличаются на 180° для нечетных k . Факт изменения фазы нечетных номеров нижних боковых колебаний на 180° по сравнению с соответствующими верхними боковыми колебаниями был продемонстрирован выше для значений $m \ll 1$ и $m \approx 1$.

В таблице 6.1 приведены значения функций Бесселя различных порядков в зависимости от индекса модуляции [30]. Из этой таблицы следует, что с ростом индекса функции Бесселя увеличивается протяженность области аргументов, при которых значения функции (т.е. спектральные коэффициенты) очень малы.

Таким образом, хотя с ростом индекса модуляции ширина полосы частот, занимаемая ЧМ сигналом, расширяется, но, начиная с некоторого номера k , значениями спектральных коэффициентов $J_k(m)$ можно пренебречь. Обычно принято пренебрегать спектральными коэффициентами, начиная с величины функции Бесселя $k > m + 1$. Отсюда следует, что реальная ширина спектра ЧМ сигнала может быть оценена как

$$\Delta F = 2(m + 1)\Omega. \tag{6.44a}$$

Таблица 6.1.

k \ m	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,765	0,224	-0,26	-0,397	-0,177	0,15	0,3	0,17
1	0,44	0,576	0,339	-0,066	-0,327	-0,276	-0,004	0,234
2	0,115	0,353	0,486	0,364	0,046	-0,243	-0,3	-0,113
3	0,0195	0,129	0,309	0,43	0,365	0,115	-0,167	-0,291
4	0,0025	0,034	0,132	0,281	0,391	0,357	0,158	-0,105
5		0,07	0,043	0,132	0,261	0,362	0,348	0,186
6		0,001	0,0114	0,049	0,131	0,246	0,34	0,337
7			0,002	0,015	0,053	0,129	0,233	0,32
8				0,004	0,018	0,056	0,128	0,235
9					0,005	0,021	0,058	0,126
10					0,001	0,007	0,023	0,06
11						0,002	0,008	0,025
12							0,002	0,009
13							0,001	0,003
14								0,001
15								0,0003

Как правило, на практике индекс частотной модуляции удовлетворяет условию $m_{\text{ЧМ}} \gg 1$. Тогда (6.44а) можно переписать в виде

$$\Delta F \approx 2m_{\text{ЧМ}}\Omega = 2\Delta\omega, \quad (6.44 \text{ б})$$

поскольку $m_{\text{ЧМ}} = \Delta\omega/\Omega$.

Таким образом, ЧМ сигнал занимает полосу частот, определяемую удвоенной величиной девиации частоты $\Delta\omega$.

6.3.6. Спектр фазо - манипулированного сигнала

Фазовая манипуляция радиосигналов представляет собой один из видов фазовой модуляции, при которой имеют место скачкообразные (мгновенные) изменения фазы радиосигнала в соответствии некоторым заданным правилом [7, 11] (например – передаваемым сообщением).

Рассмотрим закон изменения фазы при ее периодическом изменении, имеющим “прямоугольный” характер (рис 6.12). Внутри этого периода мо-

дуляции (см. рис 6.12а) изменение фазы описывается следующим условием:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_{MAX} & \text{при } 0 < t \leq T/2 \\ -\varphi_{MAX} & \text{при } T/2 < t \leq T \end{cases} \quad (6.45)$$

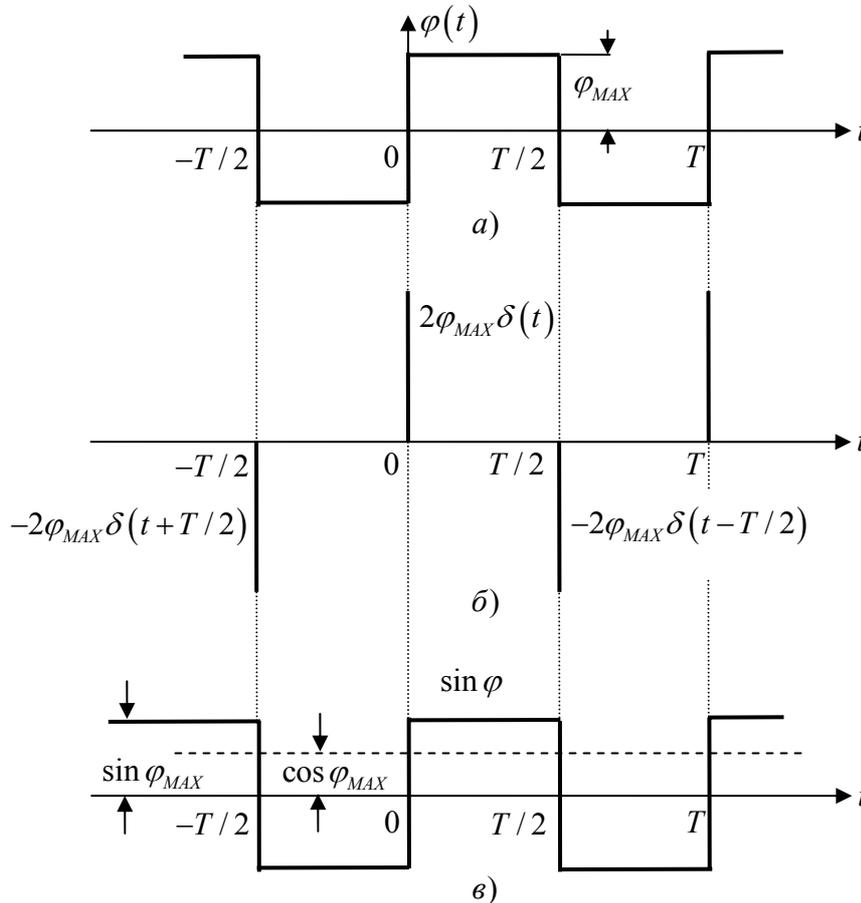


Рис. 6.12. Закон изменения фазы

Изменение частоты колебания $\Delta\omega(t)$, определяемое как $\Delta\omega(t) = d\varphi(t)/dt$, имеет вид, показанный на рис. 6.12б. При этом величина $\Delta\omega(t)$ равна нулю на всей оси времени t , исключая точки $t=0$; $t=\pm T/2$; $t=\pm T$; ... $t=nT/2$, в которых функция $\varphi(t)$ имеет разрыв. В этих точках, как это следует из правил дифференциального исчисления, $\Delta\omega(t)$ обращается в бесконечность, что, с точки зрения теории обобщенных функций, соответствует знакопеременной последовательности дельта-

функций, умноженных на некоторый постоянный коэффициент γ . Коэффициент γ определяется из условия совпадения интеграла от функции $\Delta\omega(t)$ с заданным законом изменения фазы [11].

Так, для момента времени $t = 0$ можно получить следующее условие:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \Delta\omega(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \gamma\delta(t)dt = 2\varphi_{MAX},$$

откуда, с учетом условия нормировки

$$\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)dt = 1$$

следует, что $\gamma = 2\varphi_{MAX}$. Таким образом, в момент времени $t = 0$ изменение частоты должно быть представлено функцией $2\varphi_{MAX}\delta(t)$. В моменты времени $t = \pm T/2$ изменение частоты определяется как $-2\varphi_{MAX}\delta(t \pm T/2)$.

Учитывая выражение (6.35), представляющее колебание с угловой модуляцией (в данном случае – с фазовой манипуляцией) в виде суммы квадратур

$$U_{\phi M}(t) = A_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - A_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t,$$

напомним, что спектр сигнала $U_{\phi M}(t)$ определяется спектрами функций $\cos \varphi(t)$, $\sin \varphi(t)$ и определим эти спектры. Графики функций $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$ изображены на рис. 6.12в.

Поскольку $\varphi(t)$ есть нечетная функция времени, постоянная на интервалах $0 < t < T/2$ и $-T/2 < t < 0$, то $\cos \varphi(t) = \cos[-\varphi(t)] = \cos \varphi_{MAX} = \text{const}$, а функция $\sin \varphi(t)$ имеет вид прямоугольного периодического сигнала с амплитудой $\sin \varphi_{MAX}$.

Для выбранного на рис 6.12в начала отсчета функция $\sin \varphi_{MAX}$ является нечетной и поэтому разложение данной функции в ряд Фурье содержит только коэффициенты b_k (см. главу 1). Найдем эти коэффициенты в виде

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \varphi(t) \sin n\Omega t dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-\sin \varphi_{MAX}) \sin n\Omega t dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin \varphi_{MAX} \sin n\Omega t dt = \\
&= \frac{2 \sin \varphi_{MAX}}{Tn\Omega} \left[\cos n\Omega t \Big|_{-T/2}^0 - \cos n\Omega t \Big|_0^{T/2} \right] = -\frac{4 \sin \varphi_{MAX}}{Tn\Omega} [\cos n\Omega T/2 - 1]. \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Поскольку $n\Omega T/2 = n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} = n\pi$, то коэффициенты b_k существуют только для нечетных значений n , т.к. $\cos n\pi = 0$ при $n = 0, 2, 4, \dots$, а $\cos n\pi = -1$ при $n = 1, 3, 5, \dots$. Тогда

$$b_k = \frac{8 \sin \varphi_{MAX}}{Tn\Omega} = \frac{8 \sin \varphi_{MAX}}{Tn2\pi/T} = \frac{4 \sin \varphi_{MAX}}{\pi n} \quad (6.47)$$

для $n = 1, 3, 5, \dots$ и $b_k = 0$ для $n = 0, 2, 4, \dots$

Таким образом, разложение функции $\sin \varphi(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$\sin \varphi(t) = \frac{4 \sin \varphi_{MAX}}{\pi} \left[\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right]. \quad (6.48)$$

Перенесем теперь спектры функций $\cos \varphi(t)$ и $\sin \varphi(t)$ на соответствующие квадратурные составляющие $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$. Косинусную квадратуру запишем в виде

$$A_0 \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t = A_0 \cos \varphi_{MAX} \cos \omega_0 t, \quad (6.49a)$$

а синусную квадратуру как

$$\begin{aligned}
A_0 \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t &= \frac{4}{\pi} A_0 \sin \varphi_{MAX} \left[\sin \Omega t \sin \omega_0 t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t \sin \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t \sin \omega_0 t + \dots \right] = \\
&= \frac{4}{\pi} A_0 \sin \varphi_{MAX} \left[\frac{1}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t - \frac{1}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{6} \cos(\omega_0 - 3\Omega)t - \frac{1}{6} \cos(\omega_0 + 3\Omega)t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10} \cos(\omega_0 - 5\Omega)t - \frac{1}{10} \cos(\omega_0 + 5\Omega)t + \dots \right]. \quad (6.49b)
\end{aligned}$$

Выражения (6.49) и (6.35) позволяют записать окончательную форму спектрального разложения фазо – манипулированного колебания:

$$\begin{aligned}
 U_{\phi M}(t) = A_0 \left\{ \cos \varphi_{MAX} \cos \omega_0 t + \frac{2}{\pi} \sin \varphi_{MAX} [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \right. \\
 + \frac{2}{3\pi} \sin \varphi_{MAX} [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \\
 \left. + \frac{2}{5\pi} \sin \varphi_{MAX} [\cos(\omega_0 + 5\Omega)t - \cos(\omega_0 - 5\Omega)t] + \dots \right\}. \quad (6.50)
 \end{aligned}$$

Значительный интерес для практики представляет случай $\varphi_{MAX} = 0,5\pi$, когда полный скачок фазы равен π , а фазо – манипулированное колебание принимает вид, показанный на рис. 6.13

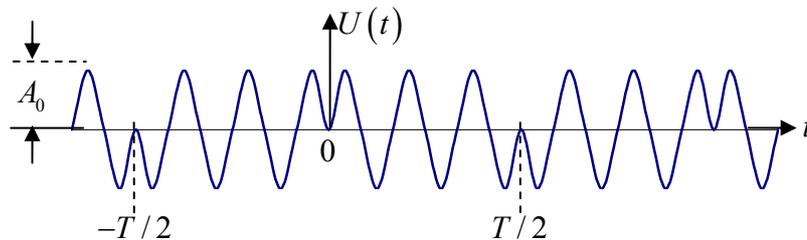


Рис. 6.13. ФМ сигнал в случае полного скачка фазы, равного π

Как следует из этого рисунка, скачок фазы на 180° происходит через каждую половину периода закона модуляции. При этом $\cos \varphi_{MAX} = 0$, $\sin \varphi_{MAX} = 1$ и выражение (6.50) для спектрального представления фазо-манипулированного сигнала принимает вид

$$\begin{aligned}
 U_{\phi M}(t) = \frac{2A_0}{\pi} \left\{ [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \frac{1}{3} [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{5} [\cos(\omega_0 + 5\Omega)t - \cos(\omega_0 - 5\Omega)t] \dots \right\}. \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

Спектр этого колебания (до боковых частот $\omega_0 \pm 3\Omega$) изображен на рис. 6.14. Кроме того, из выражения (6.51) следует, что спектральная амплитуда на частоте $\omega = \omega_0$ равна нулю. Таким образом, при манипуляции фазы с полным скачком $\varphi = \pi$ ($\varphi_{MAX} = 0,5\pi$) несущая частота в спектре фазо – манипулированного колебания отсутствует.

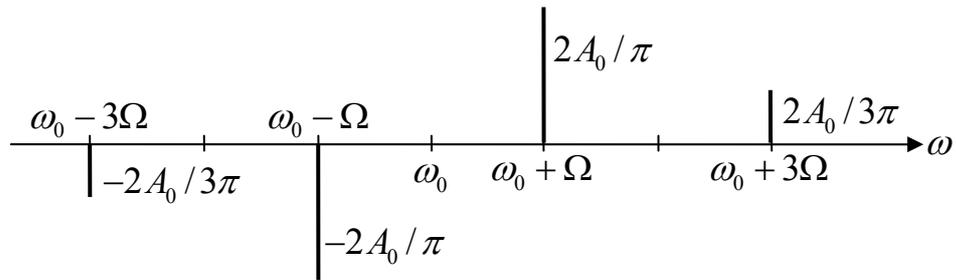


Рис. 6.14. Спектр фазо – манипулированного колебания для случая полного скачка фазы, равного π

6.4. Импульсные радиосигналы с внутриимпульсной модуляцией.

Сжатие сигналов по оси времени

В настоящем подразделе рассмотрены спектральные и корреляционные свойства импульсных радиосигналов, высокочастотное заполнение которых модулировано по частоте. Чаще всего используется внутриимпульсная ЧМ с линейным законом изменения частоты во времени.

Теория таких сигналов и соответствующие технические способы их создания и обработки были созданы вскоре после окончания второй мировой войны одновременно в СССР (Я. Ширман) [32] и в США (Ф. Вудворд и др.) [33]. В качестве основных причин, обусловивших эти разработки, явилась необходимость обеспечения одновременных измерений радиальной составляющей скорости радиолокационного объекта (доплеровский сдвиг частоты) и дистанции до него с высокой разрешающей способностью по обоим параметрам. Однако высокое разрешение по скорости требует использование радиосигнала (импульса), имеющего большую длительность, а высокое разрешение по дальности, напротив, требует минимальной протяженности импульса во времени. В данном случае соотношение неопределенности $\Delta f \Delta \tau = 1$ привело к противоречию интересов при разработке РЛС и к необходимости синтеза нового класса сигналов, способных одновременно обеспечить высокое разрешение как по дальности,

так и по скорости. Проведенные исследования и разработки показали, что длительность радиолокационного сигнала может быть настолько велика, чтобы удовлетворить требования к разрешению по скорости, а высокое разрешение по дальности может быть при этом обеспечено за счет внутриимпульсной широкополосной модуляции (ЧМ или ФМ). Новый класс сигналов получил название «сложные сигналы». Использование данных сигналов позволяет обеспечить оптимальность радиолокационных систем, но эти вопросы не входят в круг интересов данного пособия.

6.4.1. Спектр радиосигнала с внутриимпульсной частотной модуляцией.

Рассмотрим спектральный состав прямоугольного радиоимпульса [1, 32, 33], обладающего значительной длительностью τ_H , полагая при этом, что частота его заполнения линейно нарастает во времени. Будем считать также, что начало координат $t = 0$ соответствует середине импульса (рис. 6.15).

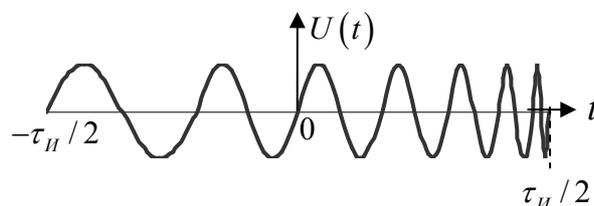


Рис. 6.15

Для определения математической модели радиосигнала $U(t) = \cos[\psi(t)]$ с внутриимпульсной ЧМ необходимо определить закон изменения обобщенной фазы $\psi(t)$ во времени. Для этого запишем закон линейного изменения угловой частоты во времени как

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t, \quad (6.52)$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0 t$ – несущая частота, отвечающая моменту времени $t = -\tau_H/2$, а величина

$$\mu = \Delta\omega / \tau_H \quad (6.53a)$$

представляет собой скорость изменения угловой частоты во времени. Максимальное изменение частоты за длительность импульса составляет

$$\Delta\omega = \mu\tau_H. \quad (6.53б)$$

Найдем обобщенную (полную) фазу ЧМ сигнала $U(t) = \cos[\psi(t)]$

$$\psi(t) = \int_0^t [\omega_0 + \mu t'] dt' = \omega_0 t + \mu t^2 / 2 \quad (6.54)$$

и запишем математическую модель радиосигнала с линейной внутриимпульсной ЧМ в виде

$$U_{ЛЧМ}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\tau_H/2; \\ U_M \cos(\omega_0 t + \mu t^2 / 2) & \text{при } -\tau_H/2 \leq t \leq \tau_H/2; \\ 0 & \text{при } t > \tau_H/2. \end{cases} \quad (6.55)$$

Используя математическую модель (6.55), запишем спектральную плотность одиночного ЛЧМ импульса:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= U_M \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} \cos(\omega_0 t + \mu t^2 / 2) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= 0,5U_M \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} \exp\{j[(\omega_0 - \omega)t + 0,5\mu t^2]\} dt + \\ &+ 0,5U_M \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} \exp\{-j[(\omega_0 + \omega)t + 0,5\mu t^2]\} dt. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Спектральная плотность ЛЧМ импульса в области положительных частот описывается первым интегралом выражения (6.56). Вычислим этот интеграл. Для этого преобразуем показатель подынтегральной экспоненциальной функции и дополним его до полного квадрата:

$$\begin{aligned}
0,5\mu t^2 - (\omega - \omega_0)t &= 0,5\mu \left[t^2 - \frac{2(\omega - \omega_0)t}{\mu} \right] = \\
&= 0,5\mu \left[t^2 - \frac{2(\omega - \omega_0)t}{\mu} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\mu^2} - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\mu^2} \right] = \\
&= -0,5\mu \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\mu} + 0,5\mu \left[t^2 - \frac{2(\omega - \omega_0)t}{\mu} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\mu^2} \right] = \\
&\quad -0,5\mu \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\mu} + 0,5\mu \left[t - \frac{(\omega - \omega_0)}{\mu} \right]^2. \tag{6.57}
\end{aligned}$$

Подставляя (6.57) в первый интеграл выражения (6.56), запишем спектральную плотность ЛЧМ импульса в области положительных частот как

$$\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = 0,5U_M \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} \exp \left[j \frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right)^2 \right] dt. \tag{6.58}$$

Для вычисления интеграла выражении (6.58) воспользуемся заменой переменной в соответствии с выражением

$$\sqrt{\mu} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right) = \sqrt{\pi} x, \tag{6.59}$$

откуда следует, что

$$t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} x, \quad dt = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} dx, \quad 0,5\mu \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right)^2 = 0,5\pi x^2.$$

При использовании данной замены переменных пределы интеграла (6.58) принимают вид

$$\begin{aligned}
-X_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \left[\frac{\tau_H}{2} + \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right] = \\
&= \left[\frac{0,5\tau_H\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\omega - \omega_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}} \right] = \left[\frac{0,5\mu\tau_H + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}} \right], \tag{6.60a} \\
X_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \left[\frac{\tau_H}{2} - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{0,5\tau_{II}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\omega - \omega_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}} \right] = \left[\frac{0,5\mu\tau_{II} - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}} \right]. \quad (6.60б)$$

Тогда спектральная плотность (6.58) может быть записана как

$$\dot{S}_{ЛЧМ}(\omega) = 0,5U_M \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \int_{-X_1}^{X_2} \exp \left[j \frac{\pi}{2} x^2 \right] dx. \quad (6.61)$$

Интеграл от квадратичной экспоненты в выражении (6.61) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{-X_1}^{X_2} \exp \left[j \frac{\pi}{2} x^2 \right] dx &= \int_{-X_1}^{X_2} \cos \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right] dx + j \int_{-X_1}^{X_2} \sin \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right] dx = \\ &= [C(X_2) - C(-X_1)] + j[S(X_2) - S(-X_1)], \end{aligned} \quad (6.62)$$

где функции

$$C(X) = \int_0^X \cos \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right] dx \quad \text{и} \quad S(X) = \int_0^X \sin \left[\frac{\pi}{2} x^2 \right] dx$$

представляют собой интегралы Френеля [10, 13]. В прямоугольной системе координат (C – ось абсцисс, S – ось ординат) интегралы Френеля есть проекции двойной спирали (рис. 6.16), антисимметричной относительно начала координат.

Эта кривая называется спиралью Корню или клотоидой. При этом длина дуги спирали от начала координат до произвольной точки $[C(X), S(X)]$, лежащей на спирали, представляет собой аргумент интегралов Френеля, а абсцисса и ордината этой точки являются значениями интегралов Френеля $C(X)$, $S(X)$ соответственно. Максимальное значение интеграла $C(X)$ не превышает величины 0,8, а максимальное значение интеграла $S(X) \leq 0,72$.

Сжатие витков спирали при возрастании аргумента обуславливает уменьшение осцилляций значений интегралов Френеля $C(X)$, $S(X)$ с ростом значений аргумента, а при $X \rightarrow \infty$ значения интегралов Френеля

стремятся к пределу, равному 0,5. Из рис. 6.16 следует также, что интегралы Френеля удовлетворяют условиям $C(-X) = -C(X)$, $S(-X) = -S(X)$.

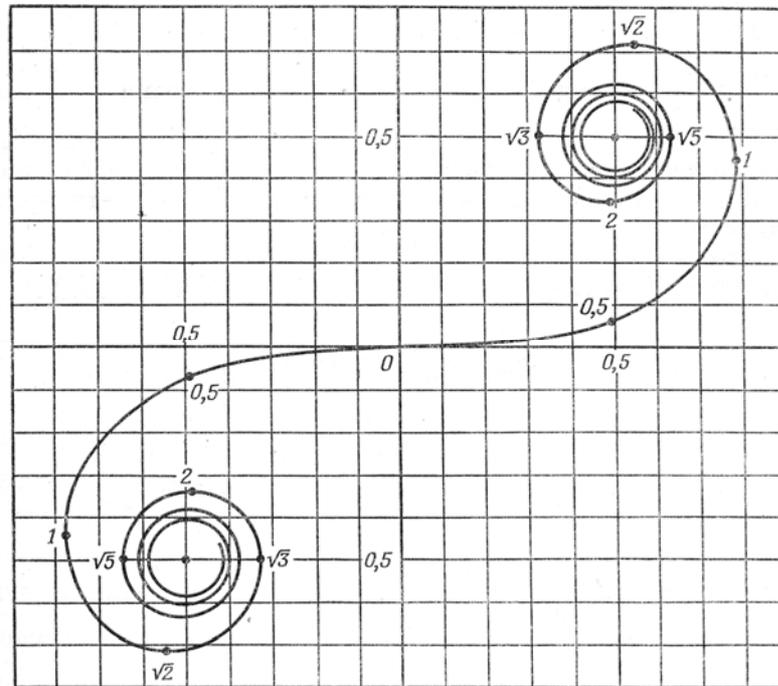


Рис. 6.16. Спираль Корню

Тогда комплексный спектр ЛЧМ сигнала может быть записан в окончательном виде как

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) &= 0,5U_M \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp\left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu}\right] \times \\ &\times \left\{ [C(X_1) + jS(X_1)] + [C(X_2) + jS(X_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Используя выражение (6.63), определим амплитудный спектр ЛЧМ сигнала

$$\begin{aligned} |\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)| &= \sqrt{\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega)} = \\ &= 0,5|U_M| \sqrt{\pi/\mu} \sqrt{[C(X_1) + C(X_2)]^2 + [S(X_1) + S(X_2)]^2}, \end{aligned} \quad (6.64a)$$

квадратичный фазовый спектр ЛЧМ сигнала

$$\Phi_1(\omega) = \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right], \quad (6.64\text{в})$$

а также так называемый остаточный фазовый член

$$\Phi_2(\omega) = -\text{arctg} \left[\frac{S(X_1) + S(X_2)}{C(X_1) + C(X_2)} \right]. \quad (6.64\text{в})$$

С целью анализа связи изменения параметров ЛЧМ сигнала во времени (длительность импульса, изменение частоты заполнения) с формой его спектра введем безразмерный параметр

$$B = \Delta f \tau_H, \quad (6.65\text{а})$$

определяемый произведением девиации частоты на длительность импульса и называемый базой ЛЧМ сигнала. Учитывая, что $\Delta f = \Delta \omega / 2\pi = \mu \tau_H / 2\pi$, где μ есть скорость изменения угловой частоты ЛЧМ сигнала во времени, выражение (6.65а) можно переписать в виде

$$B = \mu \tau_H^2 / 2\pi. \quad (6.65\text{б})$$

Продемонстрируем теперь, что величина базы ЛЧМ сигнала определяет значения аргументов X_1 и X_2 интегралов Френеля. Для этого перепишем выражения (6.60а,б) для аргументов X_1 , X_2 и преобразуем их. Тогда величину X_1 можно записать как

$$X_1 = \frac{0,5\mu\tau_H + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\tau_H^2}{2\pi}} + \frac{(\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{B}{2}} + \frac{(\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}. \quad (6.66\text{а})$$

Аналогично определим величину X_2 :

$$X_2 = \frac{0,5\mu\tau_H - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{B}{2}} - \frac{(\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi\mu}}. \quad (6.66\text{б})$$

Используя выражения (6.66а,б) и таблицы интегралов Френеля, можно численно определить форму амплитудного спектра ЛЧМ сигнала $|\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)|$, фазового спектра $\Phi_1(\omega)$ и остаточного фазового члена $\Phi_2(\omega)$ для различных значений базы ЛЧМ сигнала. Здесь необходимо отметить,

что база ЛЧМ сигнала может изменяться в широких пределах, а в практически важных случаях её значения составляет величину в десятки тысяч и более (т.е. $B \gg 1$).

Результаты расчета модуля спектра ЛЧМ сигнала и остаточного фазового члена для двух значений базы сигнала ($B=50$, $B=500$) приведены на рис. 6.17.

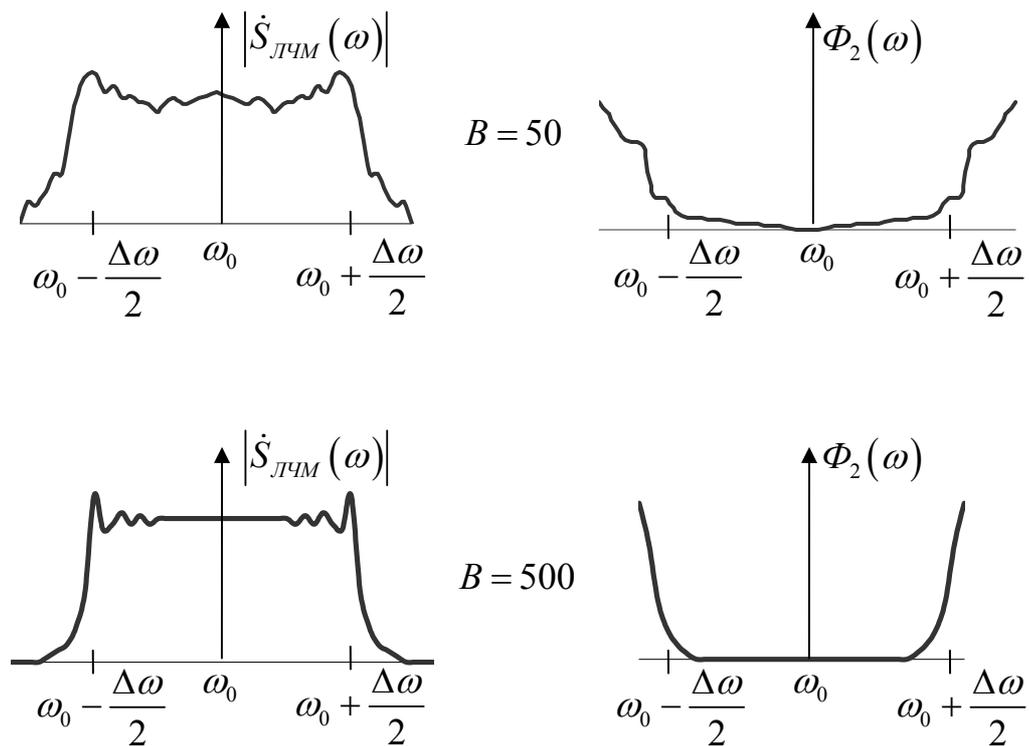


Рис. 6.17. Форма модуля спектра ЛЧМ сигнала и остаточного фазового члена для двух значений базы сигнала

Как видно из этого рисунка, при росте значения величины базы ЛЧМ сигнала имеет место уменьшение осцилляций модуля спектральной плотности ЛЧМ сигнала, обусловленное уменьшением осцилляций значений интегралов Френеля при увеличении их аргументов. Кроме того, с ростом базы ЛЧМ сигнала увеличивается ширина области частот, в которой значение модуля спектральной плотности сигнала остается постоянным. Остаточный фазовый член комплексного спектра ЛЧМ сигнала также стре-

мится к постоянной величине в области частот $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega/2$ с ростом базы сигнала.

Определим форму амплитудного спектра сигнала с внутриимпульсной ЛЧМ для случая $B \gg 1$ (в пределе $B \rightarrow \infty$). Для этого, прежде всего, найдем значение модуля спектральной плотности на центральной частоте спектра $\omega = \omega_0$. Подставляя значение $\omega = \omega_0$ в выражения (6.66а,б), видим, что

$$X_1 = X_2 = X = \sqrt{B/2}.$$

Поскольку для случая $B \gg 1$ (в пределе $B \rightarrow \infty$) аргумент интегралов Френеля будет также стремиться к бесконечности, то значения интегралов Френеля $C(X \rightarrow \infty)$, $S(X \rightarrow \infty)$ в пределе будут иметь вид $C(X) \rightarrow 0,5$; $S(X) \rightarrow 0,5$.

Тогда значение радикала

$$\sqrt{[C(X_1) + C(X_2)]^2 + [S(X_1) + S(X_2)]^2},$$

определяющего амплитуду модуля спектральной плотности в соотношении (6.64), будет равно $\sqrt{2}$. Отсюда следует, что

$$|\dot{S}_{ЛЧМ}(\omega)| = |U_M| \sqrt{\pi/2\mu}. \quad (6.67)$$

Найдем теперь значение модуля спектральной плотности импульсного ЛЧМ сигнала в точках $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$. Используя выражения (6.60а,б), нетрудно видеть, что в этих точках

$$X_1 = X_2 = X = 0,5 \frac{\mu\tau_H + \Delta\omega}{\sqrt{\pi\mu}}.$$

Поскольку $\Delta\omega = \mu\tau_H$, то

$$X_1 = X_2 = X = \frac{\mu\tau_H}{\sqrt{\pi\mu}}.$$

С учетом того, что $B = \mu\tau_H^2 / 2\pi$ [см. соотношение (6.65б)], последнее выражение принимает вид

$$X = \sqrt{2B}. \quad (6.68)$$

Из результатов анализа следует, что в случае $B \gg 1$ ($B \rightarrow \infty$), величина $X \rightarrow \infty$ и интегралы Френеля стремятся к значениям $C(X) \rightarrow 0,5$; $S(X) \rightarrow 0,5$. В этом случае значения модуля спектральной плотности ЛЧМ сигнала в точках $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ определяются как

$$|\dot{S}_{ЛЧМ}(\omega_0 \pm 0,5\Delta\omega)| = |U_M| \sqrt{\pi/2\mu}. \quad (6.69)$$

Таким образом, модуль спектральной плотности ЛЧМ сигнала, характеризуемого базой $B \gg 1$, может быть определен соотношениями

$$|\dot{S}_{ЛЧМ}(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < (\omega_0 - 0,5\Delta\omega); \\ |U_M| \sqrt{\pi/2\mu} & \text{при } (\omega_0 - 0,5\Delta\omega) < \omega < (\omega_0 + 0,5\Delta\omega); \\ 0 & \text{при } \omega > (\omega_0 + 0,5\Delta\omega), \end{cases} \quad (6.70)$$

которые демонстрируют его равномерность в полосе частот

$$(\omega_0 - 0,5\Delta\omega) < \omega < (\omega_0 + 0,5\Delta\omega).$$

Графически данная ситуация изображена на рис. 6.18.

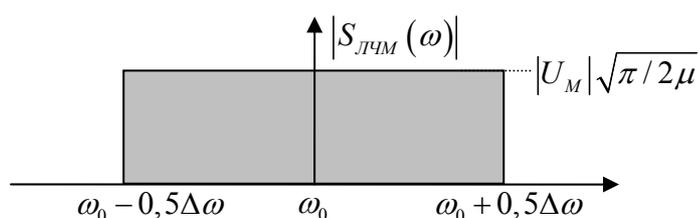


Рис. 6.18. Модуль спектральной плотности ЛЧМ сигнала, имеющего базу $B \gg 1$

Энергетический спектр ЛЧМ сигнала, обладающего базой $B \gg 1$, также равномерен в полосе частот $\Delta\omega$ и равен нулю вне этой полосы:

$$P_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < (\omega_0 - 0,5\Delta\omega); \\ |U_M|^2 \pi / 2\mu & \text{при } (\omega_0 - 0,5\Delta\omega) < \omega < (\omega_0 + 0,5\Delta\omega); \\ 0 & \text{при } \omega > (\omega_0 + 0,5\Delta\omega). \end{cases}$$

Анализируя выражение (6.64в) для остаточного фазового члена $\Phi_2(\omega)$, нетрудно видеть, что при значении базы ЛЧМ сигнала $B \gg 1$ ($B \rightarrow \infty$) величина аргумента арктангенса в этом выражении стремится к единице

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \left[\frac{S(X_1) + S(X_2)}{C(X_1) + C(X_2)} \right] \rightarrow 1.$$

Это означает, что в полосе частот $\omega_0 \pm 0,5\Delta\omega$ остаточный фазовый член имеет постоянное значение $\Phi_2 = -\pi/4$ и может быть опущен. Таким образом, при выполнении условия $B \gg 1$ ($B \rightarrow \infty$) комплексный спектр ЛЧМ сигнала, обладающего длительностью τ_H и девиацией частоты $\Delta\omega$ характеризуется равномерным в полосе частот $\Delta\omega$ модулем (амплитудой) (6.70) и фазовым спектром (6.64), имеющим квадратичный характер в этой же полосе частот.

В заключение отметим, что наличие внутриимпульсной частотной модуляции привело к нарушению условия $\Delta f \Delta \tau_H = 1$, справедливому для простейших сигналов. В связи с этим сигналы, использующие дополнительную внутреннюю модуляцию и характеризующиеся значением базы сигнала $B = \Delta f \Delta \tau_H > 1$, называются сложными сигналами.

6.4.2. Согласованная фильтрация ЛЧМ сигналов.

Автокорреляционная функция ЛЧМ сигнала

Рассмотрим задачу, связанную с прохождением ЛЧМ сигнала через фильтр, обладающий комплексной передаточной функцией специального вида. Как было показано выше, существенной особенностью спектра им-

пульсного ЛЧМ сигнала является квадратичная зависимость фаз спектральных составляющих от частоты. Именно эта зависимость определяет специфику так называемой согласованной фильтрации сложных сигналов.

Наличие ЛЧМ внутри импульсного сигнала, обладающего большой длительностью, привело к тому, что ширина спектра этого сигнала определяется не его длительностью, а величиной девиации частоты заполнения. Спектральная плотность такой ширины соответствует импульсу малой длительности, но наличие квадратичного закона изменения фаз спектральных составляющих по частоте приводит к тому, что при их суперпозиции образуется ЛЧМ импульс большой длительности.

Однако если каким либо физически обоснованным способом устранить из комплексного спектра ЛЧМ сигнала фазовые различия спектральных составляющих, то все эти составляющие будут синфазными [32, 33], и их суперпозиция должна привести к импульсному сигналу малой длительности. При этом длительность полученного импульса будет обратно пропорциональна ширине спектра исходного сигнала в соответствии с правилом

$$\Delta f \Delta \tau_H = 1.$$

Рассмотрим прохождение ЛЧМ сигнала, обладающего комплексной спектральной плотностью (6.70), через некоторый фильтр, характеризуемый комплексной передаточной функцией $\dot{H}(\omega)$. При этом будем полагать, что модуль передаточной функции (амплитудно – частотная характеристика) идентичен амплитудному спектру ЛЧМ сигнала, т.е. имеет вид

$$|\dot{H}(\omega)| = |U_M| \sqrt{\pi/2\mu} = |\dot{S}_{ЛЧМ}(\omega)| \quad (6.71)$$

в полосе частот $\omega_0 \pm 0,5\Delta\omega$ и равен нулю вне этой полосы. Фазо – частотную характеристику фильтра определим в виде функции, комплексно сопряженной к фазовому спектру ЛЧМ сигнала:

$$\Phi_H(\omega) = \Phi_1^*(\omega). \quad (6.72)$$

Тогда спектр сигнала на выходе фильтра, обладающего указанными амплитудно – частотной и фазо – частотной характеристиками, при подаче на его вход ЛЧМ сигнала будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) &= \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \dot{H}(\omega) = \left| \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \right| |H(\omega)| \Phi_1(\omega) \Phi_H(\omega) = \\ &= \left| \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \right| \left| \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \right| \Phi_1(\omega) \Phi_1^*(\omega) = \left| \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \right|^2. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Таким образом, наличие у фильтра фазо – частотной характеристики, согласованной с формой фазового спектра входного сигнала и комплексно – сопряженной к этому спектру, приводит к тому, что все спектральные составляющие выходного сигнала становятся синфазными. Тогда спектральная плотность выходного сигнала принимает вид

$$\begin{aligned} \left| \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \right|^2 &= P_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < (\omega_0 - 0,5\Delta\omega); \\ \left| U_M \right|^2 \pi / 2\mu & \text{при } (\omega_0 - 0,5\Delta\omega) < \omega < (\omega_0 + 0,5\Delta\omega); \\ 0 & \text{при } \omega > (\omega_0 + 0,5\Delta\omega). \end{cases} \end{aligned} \quad (6.74)$$

Нетрудно видеть, что выражение (6.74) представляет собой энергетический спектр сигнала, обладающего внутриимпульсной ЛЧМ.

Фильтр, устраняющий частотную зависимость фазы спектральной плотности входного сигнала путем использования фазо – частотной характеристики, согласованной с формой фазового спектра входного сигнала и комплексно – сопряженной к этому спектру, называется согласованным фильтром.

Зависимость сигнала от времени на выходе согласованного фильтра нетрудно определить, выполняя обратное преобразование Фурье над спектральной плотностью (6.74). Однако здесь необходимо отметить следующее немаловажное обстоятельство: поскольку обратное преобразование Фурье совершается над функцией, которая представляет собой энергетический спектр (спектр мощности), то, в соответствии с теоремой Винера –

Хинчина, результат преобразования будет не чем иным, как автокорреляционной функцией (АКФ) того сигнала, которому соответствует данный энергетический спектр. Таким образом, обратное преобразование Фурье над спектральной плотностью (6.74) будет представлять собой автокорреляционную функцию ЛЧМ сигнала:

$$\begin{aligned}
 B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega = \frac{U_M^2}{4\mu} \int_{\omega_0 - \tau_H/2}^{\omega_0 + \tau_H/2} \cos \omega\tau d\omega = \\
 &= \frac{U_M^2}{4\mu\tau} \sin \omega\tau \Big|_{\omega_0 - \tau_H/2}^{\omega_0 + \tau_H/2} = \frac{U_M^2}{4\mu\tau} \left[\sin\left(\omega_0 + \frac{\mu\tau_H}{2}\right) - \sin\left(\omega_0 - \frac{\mu\tau_H}{2}\right) \right] = \\
 &= \frac{U_M^2 \tau_H}{4} \frac{\sin\left(\mu \frac{\tau_H}{2} \tau\right)}{\mu \frac{\tau_H}{2} \tau} \cos \omega_0 \tau. \tag{6.75}
 \end{aligned}$$

Из выражения (6.75) следует, что АКФ ЛЧМ импульса представляет собой балансно – модулированное гармоническое колебание $\cos \omega_0 \tau$, огибающая которого описывается выражением

$$\sin\left(\mu \frac{\tau_H}{2} \tau\right) / \left(\mu \frac{\tau_H}{2} \tau\right). \tag{6.76}$$

Автокорреляционная функция ЛЧМ импульса изображена на рис. 6.19, а её огибающая приведена на рис. 6.20.

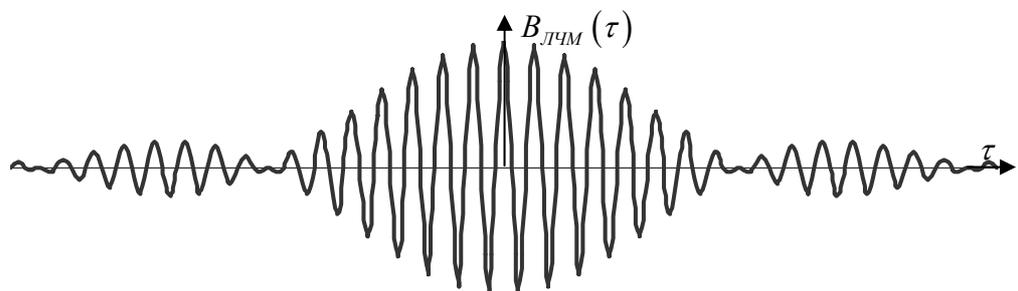


Рис. 6.19. Автокорреляционная функция ЛЧМ импульса

Используя выражение (6.76), найдем значения аргумента τ , при котором огибающая АКФ обращается в нуль. Это будут моменты времени, удовлетворяющие условию $\mu\tau_{И}\tau/2 = n\pi$. Учитывая, что $\mu\tau_{И} = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$, получим $2\pi\Delta f\tau/2 = n\pi$, откуда $\tau = n/\Delta f$. Для случая $n=1$ $\tau = 1/\Delta f$. Таким образом, импульсный сигнал на выходе согласованного фильтра имеет длительность $\tau = 1/\Delta f$, которая значительно меньше длительности входного ЛЧМ импульса.

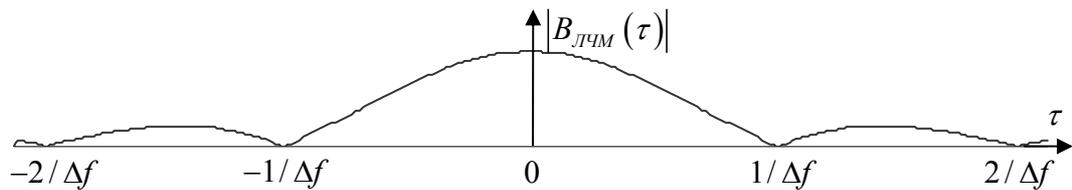


Рис. 6.20. Огибающая АКФ ЛЧМ импульса

Для пояснения проведенного анализа рассмотрим численный пример.

Пример. Зададим длительность ЛЧМ импульса $\tau_{И} = 10^{-3}$ сек., а величину девиации частоты внутри импульса определим равной 10 МГц (10^7 сек $^{-1}$). Тогда величина базы данного сигнала может быть определена как $B = \Delta f\tau_{И} = 10^4$.

После прохождения согласованного фильтра спектр выходного сигнала становится синфазным, а ширина его полосы остается равной 10 МГц. Это означает, что протяженность импульса на выходе согласованного фильтра составит величину $\tau_{ВЫХ} = 1/\Delta f = 10^{-7}$ сек. Таким образом, отношение длительности входного импульса к длительности выходного импульса составит величину $\tau_{И}/\tau_{ВЫХ} = 10^4$, что означает уменьшение протяженности выходного сигнала по отношению к протяженности входного сигнала в 10^4 раз. Этот эффект называется сжатием сложного сигнала по оси времени, а

согласованный фильтр, реализующий данную операцию, называется также фильтром сжатия [32, 33, 34]. Нетрудно видеть, что величина, характеризующая уменьшение длительности входного сигнала по отношению к длительности входного сигнала, называемая также коэффициентом сжатия, равна величине базы сигнала. Таким образом, для рассмотренного примера коэффициент сжатия $K = B = 10^4$.

Поскольку сигнал на выходе согласованного фильтра представляет собой автокорреляционную функцию входного сигнала, то такой метод приема и обработки приема называется корреляционным. Приемное устройство, реализующее корреляционный метод приема, называется корреляционным приемником.

6.5. Эффект сжатия спектра сигнала по оси частот

В подразделе 6.4 был проанализирован эффект сжатия радиоимпульса, обладающего внутриимпульсной линейной частотной модуляцией, по оси времени. Как было показано, физической основой эффекта сжатия по оси времени является устранение параболического изменения фазы по спектру сигнала в результате прохождения через согласованный фильтр. При этом обратное преобразование Фурье над энергетическим спектром сигнала на выходе фильтра приводит к выходному сигналу в виде, представляющему собой автокорреляционную функцию входного сигнала, имеющую малую протяженность по оси времени.

Из свойства симметрии прямого и обратного преобразований Фурье, рассмотренного во второй главе, следует, что возможно сжатие спектра сигнала вдоль оси частот при сохранении протяженности этого сигнала во времени. Этот эффект может иметь место (как и эффект сжатия длительности сигнала по оси времени) только в случае наличия частотной (фазовой) модуляции.

Для анализа этого эффекта рассмотрим подробнее свойство симметрии преобразований Фурье.

6.5.1. Свойства симметрии преобразований Фурье

Во второй главе данной книги было показано, что прямое преобразование Фурье свертки двух функций времени есть произведение спектральных плотностей этих функций (то есть их преобразований Фурье). Для случая корреляционного метода приема это свойство может быть интерпретировано следующим образом:

Поскольку комплексная передаточная функция согласованного фильтра комплексно сопряжена спектру излучаемого сигнала, то спектр мощности выходного сигнала фильтра определяется как

$$P_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega) = \pi U_M^2 / 2\mu,$$

где $\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)$ есть комплексный спектр сигнала на входе фильтра. В соответствии с теоремой Винера-Хинчина обратное преобразование Фурье над спектром мощности дает АКФ входного ЛЧМ сигнала:

$$F^{(-1)}\{\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega)\} = B_{\text{ЛЧМ}}(\tau).$$

Используя данное выражение в качестве исходного, можно перейти к традиционному определению автокорреляционной функции $B_{\text{ЛЧМ}}(\tau)$, используя следующий путь:

$$\begin{aligned} B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) &= F^{(-1)}\{\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)\dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}(t)\exp(-j\omega t)dt \right] \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{ЛЧМ}(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ЛЧМ}^*(\omega) \exp[-j\omega(t-\tau)] d\omega \right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{ЛЧМ}(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ЛЧМ}^*(\omega) \exp[j\omega(t-\tau)] d\omega \right\}^* dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{ЛЧМ}(t) \dot{U}_{ЛЧМ}^*(t-\tau) dt. \tag{6.77}
\end{aligned}$$

Здесь функция

$$\dot{U}_{ЛЧМ}^*(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}^*(\omega) \exp\{j2\pi f(t-\tau)\} d\omega$$

представляет собой импульсную реакцию согласованного фильтра.

Результат (6.77) есть традиционное определение АКФ с использованием интеграла свертки.

Напомним теперь, что, если заданы две функции $\dot{U}_1(t)$ и $\dot{U}_2(t)$, преобразования Фурье которых равны соответственно:

$$\dot{S}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t) \exp[-j\omega t] dt, \quad \dot{S}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_2(t) \exp[-j\omega t] dt,$$

то спектральная плотность произведения этих функций $\dot{U}_3(t) = \dot{U}_1(t)\dot{U}_2^*(t)$ определяется как:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_3(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_3(t) \exp[-j\omega t] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t) \dot{U}_2^*(t) \exp[-j\omega t] dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega') \exp[j\omega' t] d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_2^*(t) \exp[-j\omega t] dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_2^*(t) \exp[j(\omega' - \omega)t] dt \right] d\omega' = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_2(t) \exp[-j(\omega' - \omega)t] dt \right]^* d\omega' =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega') \dot{S}_2^*(\omega' - \omega) d\omega'. \quad (6.78)$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух функций определяется сверткой спектральных плотностей этих функций. Выражения (6.77) и (6.78) демонстрируют симметрию пары преобразований Фурье.

6.5.2. Корреляционная обработка и сжатие спектра частотно-модулированного сигнала по оси частот

Как было показано в подразделе 6.4, выходной сигнал согласованного фильтра представляет собой АКФ входного ЛЧМ сигнала

$$\begin{aligned} B_{\text{ЛЧМ}}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \exp[j\omega\tau] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}(t) \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}^*(t - \tau) dt = \\ &= \frac{U_M^2 \tau_H}{4} \frac{\sin\left(\mu \frac{\tau_H}{2} \tau\right)}{\mu \frac{\tau_H}{2} \tau} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Эпюры ЛЧМ сигнала и его комплексного спектра на входе согласованного фильтра приведены в подразделе 6.4. Там же проанализированы спектр мощности и АКФ выходного сигнала согласованного фильтра. Анализ длительности АКФ показал, что сигнал на выходе согласованного фильтра сжат по оси времени на величину, равную базе входного сигнала.

Свойства симметрии преобразований Фурье позволяют предположить, что возможно существование некоторой системы обработки ЛЧМ сигнала, которая может также устранить параболическую фазовую модуляцию. Однако при этом будет происходить преобразование входного ЛЧМ импульса в отрезок гармонического колебания, имеющего частоту

$$(\omega_0 - 0,5\Delta\omega) \leq \omega_s \leq (\omega_0 + 0,5\Delta\omega)$$

и длительность T , равную длительности периода частотной модуляции.

Спектральная плотность сигнала на выходе данного гипотетического фильтра должна иметь центральную частоту ω_s , а ширина её главного лепестка будет определяться как $\Delta f = T^{-1}$.

Учитывая симметрию преобразований Фурье, можно утверждать, что описанному выше методу сжатия ЛЧМ сигнала по оси времени, определяемому сверткой

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}(t) \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}^*(t - \tau) dt$$

(где $\dot{U}_{\text{ЛЧМ}}^*(t - \tau)$ есть импульсная реакция согласованного фильтра), должен соответствовать метод сжатия по частотной оси, описываемый сверткой в частотной области.

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}(\omega') \dot{S}_{\text{ЛЧМ}}^*(\omega' - \omega) d\omega'. \quad (6.80)$$

Здесь необходимо отметить, что в отличие от метода сжатия по оси времени, сжатие по оси частот может быть реализовано только системой, для которой существенны параметрические явления [34]. Дело в том, что корреляционный приемник, реализующий сжатие ЛЧМ сигнала по оси времени, обладает следующим свойством: если на его вход подается воздействие в виде δ – функции, то импульсная реакция должна быть связана с входным сигналом соотношением $h(t) = \dot{U}_{\text{ЛЧМ}}^*(-t)$.

Для сжатия сигнала по оси частот требуется реализация симметричного свойства: при подаче на вход приемника δ – функции в частотной области (т.е. гармонического колебания) должен иметь место отклик $H(\omega) = S_{\text{ЛЧМ}}^*(-\omega)$.

Очевидно, что преобразование монохроматического колебания в сложный спектр невозможно реализовать в линейных пассивных устройствах. Операция сжатия спектра сигнала по оси частот может быть выполнена,

если модулировать гетеродин приемного устройства по закону, согласованному с законом изменения частоты излучаемого сигнала [34]. Тогда на выходе смесителя – перемножителя может быть получен сигнал с длительностью, равной длительности излученного сигнала, но без частотной модуляции. Рассмотрим теперь техническую реализацию метода корреляционного приема со сжатием спектра ЛЧМ сигнала по оси частот.

6.5.3. Реализация операции сжатия спектра ЛЧМ сигнала по оси частот в радиолокаторе с непрерывным излучением

Классическая схема радиолокатора с непрерывным излучением и пилообразной линейной частотной модуляцией приведена на рисунке 6.21 [35].

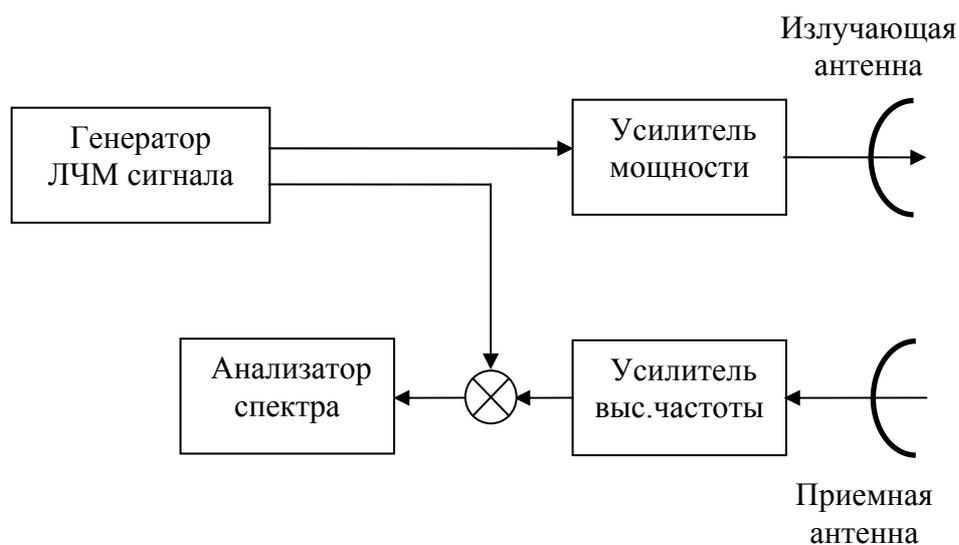


Рис. 6.21. Блок – схема радиолокатора с непрерывным излучением и пилообразной линейной частотной модуляцией

Прежде всего, определим математическую модель непрерывного излучаемого сигнала, обладающего пилообразной линейной частотной модуляцией с периодом T . Для определения математической модели этого сигнала, который можно в общем виде записать как $U(t) = \cos[\psi(t)]$, необ-

ходимо определить закон изменения обобщенной фазы $\psi(t)$ во времени. Для этого запишем закон линейного изменения угловой частоты во времени как

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t,$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0 t$ – несущая частота, отвечающая моменту времени $t = 0$, а величина $\mu = \Delta\omega/T$ представляет собой скорость изменения угловой частоты во времени. Максимальное изменение (девиация) частоты за длительность периода модуляции (который также имеет название «свип») составит $\Delta\omega = \mu\tau_{\Pi}$.

Определяя обобщенную (полную) фазу пилообразного ЧМ сигнала $U(t) = \cos[\psi(t)]$ в виде

$$\psi(t) = \int_0^t [\omega_0 + \mu t'] dt' = \omega_0 t + \mu t^2 / 2,$$

запишем математическую модель непрерывного излучаемого сигнала, обладающего пилообразной линейной частотной модуляцией, как

$$U_R(t) = \cos[\psi(t)] = \cos[\omega_0 + \mu T(t - mT)](t - mT). \quad (6.81)$$

Здесь m – число полных периодов T частотной модуляции.

Если на расстоянии r_0 от радиолокатора находится неподвижный объект, то рассеянный в обратном направлении сигнал $U_S(t)$ будет представлять собой копию излученного сигнала, имеющую задержку во времени $\tau_S = 2r_0/c$. Данная ситуация изображена на рис. 6.22. Излучаемый сигнал здесь обозначен индексом «1», а рассеянный – индексом «2». В этом случае рассеянный сигнал $U_S(t)$ можно записать как

$$U_S(t) = U_R(t - 2r_0/c).$$

Запишем теперь комплексные аналитические сигналы, ассоциированные с действительными сигналами $U_R(t)$ и $U_S(t)$:

$$\dot{U}_R(t) = \exp[j\psi_R(t)], \quad (6.82a)$$

$$\dot{U}_S(t) = \exp[j\psi_S(t)] = \exp[j\psi_R(t - \tau_S)]. \quad (6.82б)$$

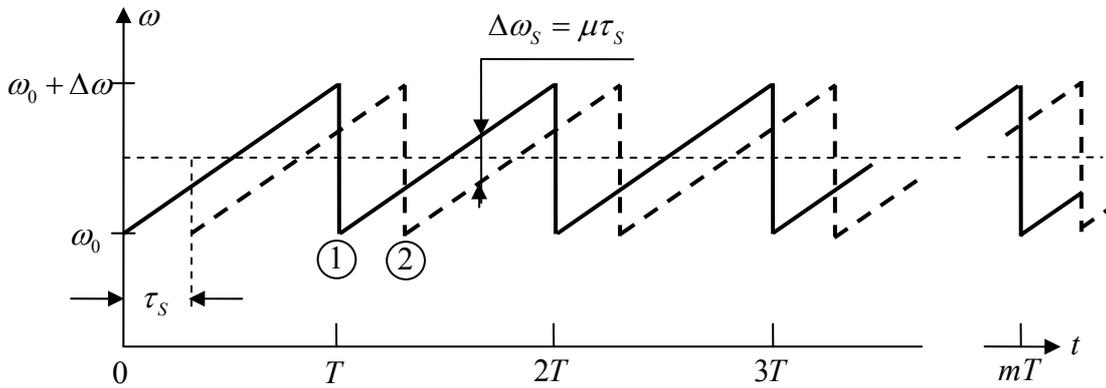


Рис. 6.22. Закон модуляции излучаемого сигнала и его смещенная копия

Тогда сигнал на выходе смесителя – перемножителя приемника (рис. 6.21) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_R(t)\dot{U}_S^*(t) &= \exp[j\psi_R(t)]\exp[-j\psi_S(t - \tau_S)] = \\ &= \exp\{j[\psi_R(t) - \psi_S(t - \tau_S)]\}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Поскольку $\psi_r(t) = \omega_0 t + \mu t^2 / 2$, а $\psi_s(t) = \omega_0(t - \tau_S) + 0,5\mu(t^2 - 2t\tau_S + \tau_S^2)$, то разность полных фаз излученного и рассеянного сигнала определяется как

$$\psi_R(t) - \psi_S(t) = \omega_0 \tau_S + \mu t \tau_S - 0,5\mu \tau_S^2. \quad (6.84)$$

Производная разности полных фаз излученного и рассеянного сигнала по времени

$$\frac{d}{dt}[\psi_R(t) - \psi_S(t - \tau_S)]$$

определяет разность частот Δf , которая пропорциональна временной задержке τ_S рассеянного сигнала относительно излученного. Следовательно

$$\dot{U}_R(t)\dot{U}_S^*(t) = \exp\{j2\pi\Delta f_S t\}, \quad (6.85)$$

где $\Delta f_S = \mu \tau_S$.

Последним шагом в обработке принятого сигнала является операция спектрального анализа произведения (6.85) с целью определения значения частоты Δf_s , которое определяет расстояние до объекта. ЛЧМ сигнал на входе системы обработки и сигнал с постоянной частотой $\Delta f_s = \mu\tau_s$, имеющий место на выходе системы, изображены на рис. 6.23а,б.

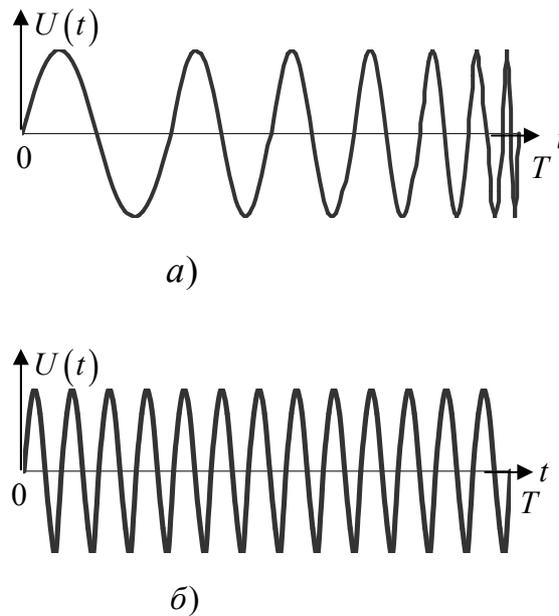


Рис. 6.23. ЛЧМ сигнал на входе системы обработки и сигнал с постоянной частотой $\Delta f_s = \mu\tau_s$ на выходе системы обработки

Полагая, что $T_s \ll T$, примем пределы интегрирования для преобразования Фурье как $(0, T)$

$$\dot{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \int_0^T \dot{U}_R(t) \dot{U}_S^*(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (6.86)$$

Принимая во внимание соотношение (6.80), можно утверждать, что результат обработки (6.86) ЛЧМ сигнала в данном случае представляет собой свертку спектральных плотностей излучаемого и рассеянного сигналов или автокорреляционную функцию спектральной плотности ЛЧМ сигнала:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{BBLX}(\omega) &= \int_0^T \dot{U}_R(t) \dot{U}_S^*(t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_R(\omega') \dot{S}_S^*(\omega' - \omega) d\omega' = B(\omega).\end{aligned}\quad (6.87)$$

Это означает, что система обработки сигнала в РЛС с непрерывным излучением и пилообразной ЧМ представляет собой корреляционный прием, использующий вычисление АКФ излучаемого сигнала в частотной области [36]. Чтобы определить форму АКФ (6.86) в частотной области и продемонстрировать эффект сжатия спектра непрерывного ЛЧМ сигнала как результат корреляционной обработки, перепишем уравнение (6.87) в виде:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_R(\omega') \dot{S}_R^*(\omega' - \omega) d\omega' = \\ = \int_0^T \dot{U}_R(t) \dot{U}_S^*(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^T \exp(j2\pi\Delta f_s t) \exp(-j\omega t) dt.\end{aligned}$$

Используя замену переменных $t' = t - T/2$, найдем автокорреляционную функцию спектральной плотности непрерывного ЛЧМ сигнала:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_R(\omega') \dot{S}_R^*(\omega' - \omega) d\omega' = \exp(j\pi\Delta\omega\tau_s) \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\mu\tau_s t) \exp(-j\omega t) dt = \\ = \exp\{j\pi\Delta\omega\tau_s\} \frac{\sin[\pi(f - 2\mu\tau_s)T]}{[\pi(f - 2\mu\tau_s)T]}.\end{aligned}\quad (6.88)$$

Автокорреляционная функция (6.88) концентрируется в области значения разностной частоты $\Delta f_s = \mu\tau_s$, которая определяется временем прохождения сигнала от радиолокатора до объекта и обратно, т.е. дистанцией до объекта. Нетрудно видеть, что ширина автокорреляционной функции спектральной плотности непрерывного ЛЧМ сигнала (6.88) равна

$$\Delta f = T^{-1}.\quad (6.89)$$

Из выражения (6.89) следует, что ширина спектра сигнала после обработки $\Delta f = T^{-1}$ связана с шириной спектра $\Delta f_0 = (\mu T)/2\pi$ до обработки соотношением

$$\Delta f_0 / \Delta f = \Delta f / T^{-1} = \Delta f T = B, \quad (6.90)$$

указывающим, что в результате обработки имеет место уменьшение ширины спектральной плотности ЛЧМ сигнала, т.е. сжатие спектра по оси частот на величину $\Delta f T = B$, которая есть не что иное, как база непрерывного сигнала с пилообразной частотной модуляцией. Эффект сжатия спектра по оси частот изображен на рис. 6.24.

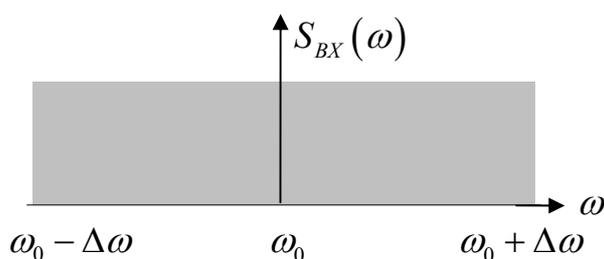


Рис. 6.24а

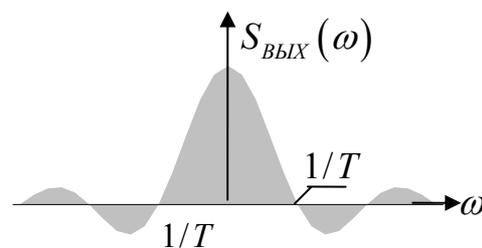


Рис. 6.24б

Рис. 6.24. Эффект сжатия спектра по оси частот

6.5.4. Разрешающая способность при спектральном анализе

Под разрешающей способностью прибора понимается его способность отдельно реагировать на два близко расположенных входных воздействия. Так, способность обработки сигналов в РЛС с непрерывным излучением и ЧМ отдельно реагировать на сигналы с близкими частотами называется разрешающей способностью по частоте. В данном случае разрешающая способность по частоте будет определять чрезвычайно важную характеристику РЛС – так называемую разрешающую способность по дальности, т.к. информация о дистанции до объекта заключается в цен-

тральной частоте спектра рассеянного сигнала после операции сжатия по оси частот.

Понятие раздельного реагирования на близко расположенные входные воздействия тесно связано с понятием ортогональности. Минимальное расстояние между входными воздействиями, при котором имеет место ортогональность выходных откликов прибора на эти воздействия, определяет разрешающую способность. Рассмотрим процесс спектрального анализа двух сигналов с частотами $\omega_1 = 2\pi\Delta f_1$ и $\omega_2 = 2\pi\Delta f_2$. Здесь величины $\Delta f_1 = \mu\tau_1$ и $\Delta f_2 = \mu\tau_2$ определяются дистанцией до объектов, обуславливающей величины задержки рассеянных сигналов $\tau_1 = 2r_1/c$ и $\tau_2 = 2r_2/c$. Длительность временного интервала, на котором производится спектральный анализ, будем полагать равным периоду частотной модуляции.

Тогда спектральная плотность сигнала с частотой ω_1 , заданного на интервале времени $(-T/2, T/2)$ имеет вид:

$$S_1(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\omega_1 t) \exp\{-j\omega t\} dt =$$

$$= -\frac{1}{j(\omega - \omega_1)} \exp[-j(\omega - \omega_1)t] \Big|_{-T/2}^{T/2} = T \frac{\sin(\omega - \omega_1)T/2}{(\omega - \omega_1)T/2}. \quad (6.91 \text{ а})$$

а спектральная плотность сигнала с частотой ω_2 , заданного на этом же интервале, определяется аналогично:

$$S_2(\omega) = T \frac{\sin(\omega - \omega_2)T/2}{(\omega - \omega_2)T/2}. \quad (6.91 \text{ б})$$

Таким образом, спектральная плотность гармонического сигнала, заданного на конечном интервале T , имеет форму функции отсчетов, подробно изученной в главе 5. Напомним, что функции отсчетов образуют ортогональную систему функций, а минимальное расстояние между двумя функциями, на котором выполняется условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\sin(\omega - \omega_1)T/2][\sin(\omega - \omega_2)T/2]}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)T^2/4} d\omega = 0$$

определяется как $(\omega_1 - \omega_2)T/2 = \Delta\omega T/2 = \pi$. Отсюда

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi/T. \quad (6.92)$$

Из выражения (6.92) следует, что разрешающая способность при спектральном анализе определяется временем анализа, т.е. в данном случае – длительностью периода ЛЧМ.

В заключение настоящего подраздела отметим, что непрерывный сигнал с пилообразной ЛЧМ представляет собой периодический сигнал, а его спектр является дискретным. При этом расстояние между спектральными линиями определяется длительностью периода модуляции как $1/T$.

7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ. ПРИНЦИПЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Глава посвящена вопросам спектрального анализа дискретных сигналов, которые приобрели особо важное значение в последние десятилетия в связи с бурным развитием цифровых способов обработки информации с использованием быстродействующих вычислительных устройств.

7.1 Дискретизация непрерывных сигналов

Напомним, что сигнал называется дискретным, если его значения определены не во все моменты времени, а только лишь на некотором счетном множестве моментов времени [1]. Таким образом, если непрерывный сигнал $x(t)$, заданный на интервале $(0, t)$, описывается непрерывной (или кусочно – непрерывной) функцией времени, то отвечающий ему дискретный сигнал $x_{\Delta}(t)$ представляет собой последовательность отсчетных значений x_0, x_1, \dots, x_n сигнала $x(t)$ в точках t_0, t_1, \dots, t_n .

При дискретизации непрерывного сигнала ось времени разбивается на равные интервалы (интервалы дискретизации) длительностью Δ . Поскольку, как это неоднократно указывалось, большинство радиотехнических сигналов обладает финитным спектром, то, в соответствии с теоремой отчетов, $\Delta = 1/2f_B$, где f_B – верхняя частота спектра сигнала. Разбиение оси времени на интервалы Δ приводит к возникновению $N - 1$ интервалов дискретизации (см. рис.7.1,а). При этом на оси времени фиксируется N точек, координаты которых отвечают следующим значениям моментов времени t : $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (n-1)\Delta$. В каждой из этих точек производится отчет значения исходной функции, т.е. определяется значение $x(t)$ в данной точке. Таким образом, получается набор дискретных значений $x(k\Delta)$ (см.

рис. 7.1,б). Эта операция называется дискретизацией (или квантованием) во времени.

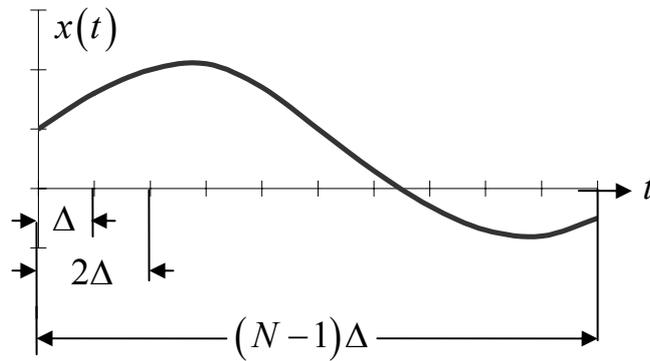


Рис. 7.1а. Исходный непрерывный сигнал.

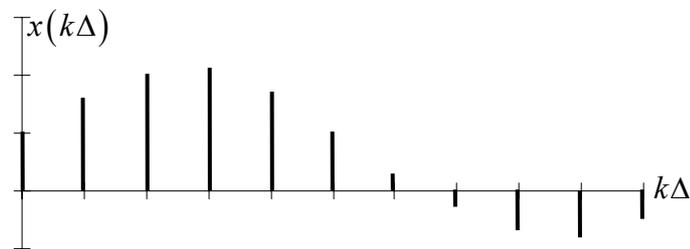


Рис. 7.1б. Дискретизированный сигнал.

Для того, чтобы полученный набор дискретных величин $x(k\Delta)$ мог быть подвергнут обработке с использованием цифровых вычислительных устройств, необходимо определить численное значение этих величин. С этой целью производится квантование величин $x(k\Delta)$ по уровню, т.е. ось значений $x(k\Delta)$ разбивается на некоторое число интервалов и, с точностью до единицы отсчета μ , определяются величины ординат точек $x(k\Delta)$ (см. рис 7.1в).

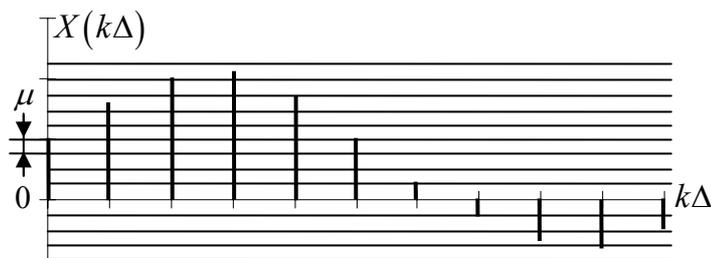


Рис. 7.1в. Дискретизированный сигнал, квантованный по уровню.

Эти значения кодируются и вводятся в цифровое устройство. Однако для анализа спектральных свойств дискретизированных функций достаточно ограничиться дискретизацией во времени.

Формально рассмотренную операцию дискретизации (т.е. переход от непрерывного сигнала $x(t)$ к дискретному сигналу $x_{\Delta}(t)$) можно описать, введя так называемую решетчатую функцию (или дискретизирующую последовательность), представляющую собой бесконечно протяжённый набор δ – функций, расположенных на расстоянии Δ одна от другой

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta). \quad (7.1)$$

Тогда операция дискретизации может быть определена как скалярное произведение функций $x(t)$ и $\eta(t)$ в пространстве Гильберта:

$$x_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta). \quad (7.2)$$

Меняя местами операции суммирования и интегрирования и используя фильтрующее свойство δ – функции, получим:

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta) dt = \{...x(-2\Delta), x(-\Delta), x(0), x(\Delta), x(2\Delta)...\}. \quad (7.3)$$

Техническая реализация устройства, реализующего операцию дискретизации, была рассмотрена в главе 5 (см. рис. 5.7).

7.2. Спектральное разложение дискретизированного сигнала

При переходе от непрерывной функции $x(t)$ к дискретизированной функции $x_{\Delta}(t)$ спектральное представление исходной функции изменяется кардинальным образом и этот вопрос имеет принципиальное значение. Запишем дискретизированную функцию $x_{\Delta}(t)$ в виде произведения

$$x_{\Delta}(t) = x(t)\eta(t), \quad (7.4)$$

где $\eta(t)$ – решетчатая функция, заданная соотношением (7.1).

Поскольку $\eta(t)$ есть периодическая функция с периодом Δ , то её можно разложить в комплексный ряд Фурье:

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp[j2\pi kt / \Delta]. \quad (7.5)$$

Запишем теперь выражение для коэффициента \dot{C}_k

$$\dot{C}_k = 1/\Delta \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \delta(t) \exp[-j2\pi kt / \Delta] dt \quad (7.6a)$$

и выражение для спектральной плотности аperiodического сигнала, идентичного элементу периодической последовательности $\eta(t)$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp[-j\omega t] dt. \quad (7.6б)$$

Выражение (7.6a) для спектрального коэффициента периодической функции отличается от величины спектральной плоскости (7.6б) для каждого из значений $2\pi k / \Delta = 2\pi f$ только множителем $1/\Delta$. Аналогично связаны и спектры амплитуд.

Как было показано ранее, спектральная плотность смещенной δ -функции имеет вид

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \exp[-j\omega t] dt = \exp[-j\omega t_0],$$

откуда и следует, что модуль спектра δ -функции равен единице. Тогда для ряда (7.5) коэффициенты $C_k = 1/\Delta$, что следует также из уравнения (7.6a). Определим теперь спектральную плоскость дискретизированной функции, представляющей собой скалярное произведение (7.4)

$$S_{\Delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\eta(t) \exp[-j\omega t] dt. \quad (7.7)$$

С этой целью заменим функцию $\eta(t)$ её представлением в виде ряда Фурье (7.6а), с учетом того что $C_k = 1/\Delta$.

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi kt/\Delta] \exp[-j\omega t] dt = \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j(\omega - 2\pi k/\Delta)t] dt. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Нетрудно видеть, что после интегрирования по переменной t интеграл в выражении (7.8) будет представлять собой спектральную плоскость функции $x(t)$, смещенную по оси частот на величину $2\pi k/\Delta$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[\omega - 2\pi k/\Delta] dt = S_X(\omega - 2\pi k/\Delta).$$

Тогда, в соответствии с выражением (7.8), спектральная плоскость $S_{\Delta}(\omega)$ дискретизированного сигнала $x_{\Delta}(t)$ представляет собой сумму бесконечного количества копий спектра исходного непрерывного сигнала $x(t)$

$$S_{\Delta} = 1/\Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X(\omega - 2\pi k/\Delta). \quad (7.9)$$

Эти копии располагаются на оси частот через одинаковые интервалы $2\pi/\Delta$, которые определяются величиной угловой частоты первой гармоники дискретизирующей последовательности $\eta(t)$ (рис. 7.2) [1].

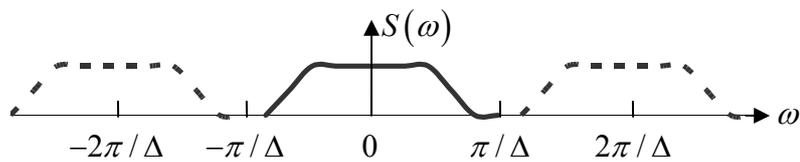


Рис. 7.2. Спектральная плотность дискретизированного сигнала.

Если верхняя угловая частота спектра $S_X(\omega)$ не превышает величины π/Δ ($\omega \leq \pi/\Delta$), то копии спектра дискретизированного сигнала не перекрываются. Нетрудно видеть, что при правильном выборе шага дискрети-

зации $\Delta = 1/2f_B$ (т.е. на основании теоремы отчетов) копии спектра перекрываться не будут, поскольку в данном случае условие $\omega_0 \leq \pi/\Delta = 2\pi f_B$ выполняется. Если же шаг дискретизации будет выбран неправильно, копии спектральной плоскости перекрываются, и непрерывный сигнал не может быть правильно восстановлен по данной дискретной последовательности.

В качестве фильтра, восстанавливающего непрерывный сигнал, может быть использован идеальный НЧ – фильтр, как и в главе 5. Действительно, если фильтр обладает равномерной амплитудно-частотной характеристикой

$$K(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ k_0, & -\omega_B < \omega < \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B, \end{cases}$$

то импульсная реакция этого фильтра имеет вид

$$h(t) = (k_0/2\pi) \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \exp(j\omega t) d\omega = \frac{k_0}{2\pi} \frac{1}{jt} \exp(j\omega t) \Big|_{-\omega_B}^{\omega_B} = \frac{k_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin(\omega_B t)}{\omega_B t} \dots$$

Поскольку дискретизированный сигнал

$$x_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta), \quad (7.10)$$

представляет собой взвешенную последовательность δ – функций, то сигнал на выходе НЧ – фильтра определяется в соответствии с теоремой отчетов как

$$y(t) = (k_0 \omega_B / \pi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \sin \omega_B(t - k_\Delta) / \omega_B(t - k_\Delta) \equiv ax(t),$$

где $x(t)$ есть исходный непрерывный сигнал, а величина a есть некоторый масштабный множитель.

7.3. Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Выражение (7.10), представляющее собой математическую модель дискретного сигнала $x_\Delta(t)$, предполагает, что отсчетные значения некоторого непрерывного сигнала $x(t)$ должны быть заданы на неограниченном интервале времени. Однако на практике обработка сигнала производится на конечном интервале времени и задать сигнал на неограниченном интервале невозможно. Таким образом, для обработки и анализа доступен дискретный сигнал, который задан на отрезке времени $[0, t]$ своими отсчетами $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, взятыми в моменты времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (n-1)\Delta$. Полное число отчетов $N = t/\Delta$, а интервал $\Delta = 1/2f_B$, как и ранее, определяются в соответствии с теоремой отсчетов.

Набор этих отсчетов (вещественных или комплексных), является единственным источником информации о спектральных свойствах сигнала $x(t)$. Прделаем, как и в гл. 5, мысленную операцию периодического продолжения имеющейся выборки отсчетных значений. В результате сигнал становится периодическим с периодом $T = N\Delta$ (см. рис. 7.3).

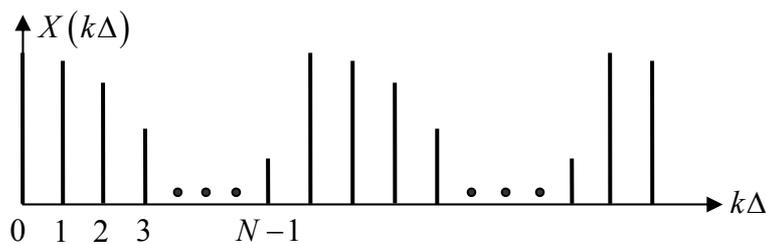


Рис. 7.3. Периодическое продолжение выборки отсчетных значений.

Сопоставляя данному сигналу подходящую математическую модель, можно разложить его в комплексный ряд Фурье и найти соответствующие коэффициенты разложения, совокупность которых и представляет собой спектр дискретного периодического сигнала [1, 36].

Воспользуемся моделью (7.10), изменив соответствующие пределы суммирования для сопоставления исходному сигналу $x(t)$ его дискретного представления

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta). \quad (7.11)$$

Представим периодический дискретный сигнал (7.11) комплексным рядом Фурье

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(j2\pi nt/T), \quad (7.12)$$

где величины

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N\Delta} \int_0^T x_{\Delta}(t) \exp(-j2\pi nt/T) dt \quad (7.13)$$

являются коэффициентами ряда Фурье (7.12).

Подставим выражение (7.11) в (7.13) и поменяем местами операции интегрирования и суммирования

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \delta(t - k\Delta) \exp(-j2\pi nt/T) dt = \\ &= \frac{1}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{N\Delta} \delta(t - k\Delta) \exp(-j2\pi nt/T) dt. \end{aligned}$$

Введем в последнем выражении замену переменных вида $\xi = t/\Delta$. Тогда $t = \Delta\xi$, $dt = \Delta d\xi$, а верхний предел интеграла, равный $T = N\Delta$, примет вид $\xi = T/\Delta = N\Delta/\Delta = N$. Таким образом, получим

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^N \delta(\xi - k) \exp(-j2\pi n\xi/N) d\xi. \quad (7.14)$$

Используя фильтрующее свойство δ – функции, преобразуем выражение (7.14) к виду

$$\dot{C}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-j2\pi nk/N). \quad (7.15)$$

Выражение (7.15), определяющее последовательность коэффициентов, образующих спектр периодического дискретного сигнала, называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Рассмотрим некоторые свойства ДПФ.

1. Дискретное преобразование Фурье представляет собой линейное преобразование, т.е. сумме сигналов отвечает сумма их ДПФ.

2. Число коэффициентов $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$, определяемых по формуле (7.14) равно числу отсчетов N за период T ; при $n = N$ коэффициент \dot{C}_N определяется выражением $C_N = C_0$.

3. Коэффициент C_0 , отвечающий постоянной составляющей, представляет собой среднее значение всех отсчетов $C_0 = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x_k$.

4. Если N – четное число, то

$$\dot{C}_{N/2} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x_k (-1)^k,$$

поскольку для $n = N/2$ имеет место равенство

$$\exp(-j2\pi nk/N) = \exp(-j2\pi Nk/2N) = \exp(-j\pi k) = \cos \pi k = (-1)^k.$$

5. Если отчетные значения x_k есть вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно $N/2$ (N – четное), образуют сопряженные пары. Докажем это, определив номера коэффициентов ДПФ, расположенных симметрично относительно $N/2$, как $(N/2) - m$ и $(N/2) + m$. Тогда

$$\dot{C}_{(N/2)-m} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp[-j2\pi(N/2 - m)k/N].$$

После простейших преобразований показателя экспоненты получим

$$\dot{C}_{(N/2)-m} = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-j\pi k) \exp(j2\pi mk/N) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(j2\pi mk / N). \quad (7.16a)$$

Выполняя аналогичное преобразование для коэффициента ДПФ с номером $(N/2) + m$, получим

$$\begin{aligned} \dot{C}_{(N/2)+m} &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp[-j2\pi(N/2 + m)k / N] = \\ &= \frac{(-1)^k}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp(-j2\pi mk / N). \end{aligned} \quad (7.16б)$$

Сравнивая выражения (7.16а) и (7.16б), видим что $\dot{C}_{(N/2)-m} = \dot{C}_{(N/2)+m}^*$. Таким образом, коэффициенты ДПФ, номера которых расположены симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары.

Здесь необходимо напомнить (см. гл.1), что при разложении действительной периодической функции в комплексный ряд Фурье, коэффициенты для спектральных составляющих, имеющих отрицательные номера (т.е. при отрицательных частотах), были комплексно сопряжены коэффициентами Фурье, отвечающим положительным номерам (т.е. положительным частотам). Таким образом, можно считать, что коэффициенты ДПФ $\dot{C}_{(N/2)-1}, \dots, \dot{C}_{(N/2)-m}$ отвечают отрицательным частотам.

Отметим теперь, что задача дискретного спектрального анализа может быть поставлена и в обратном порядке. Предположим, что заданы коэффициенты C_N , составляющие ДПФ некоторого дискретного сигнала. Полагая, что в выражении (7.12) время задано дискретными моментами $t = k\Delta$ и учитывая, что суммируется лишь конечное число членов ряда, отвечающее числу заданных коэффициентов ДПФ, получим выражение для вычисления отсчетных значений функции времени

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_n \exp(j2\pi nk / N). \quad (7.17)$$

Выражение (7.17) представляет собой алгоритм обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ). Пара выражений (7.15) и (7.17) является дискретным аналогом преобразований Фурье для непрерывных сигналов.

Пример. Пусть дискретный сигнал задан на интервале периодичности шестью равностоящими отсчетами $\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Здесь предполагается, что исходный непрерывный сигнал удовлетворяет условиям теоремы отчетов. Необходимо найти коэффициенты ДПФ данного сигнала.

Используя выражение (7.15), вычислим

$$C_0 = (1/6) \sum_{k=0}^5 x_k = 3/6 = 0,5;$$

$$\dot{C}_1 = (1/6) [1 + \exp(-j\pi/3) + \exp(-j2\pi/3)] = (1/6)(1 - j\sqrt{3});$$

$$\dot{C}_2 = (1/6) [1 + \exp(-j2\pi/3) + \exp(-j4\pi/3)] = 0;$$

$$\dot{C}_3 = (1/6) [1 + \exp(-j\pi) + \exp(-j2\pi)] = 1/6, \quad (n = N/2).$$

Последующие коэффициенты определяются с использованием свойства 5:

$$\dot{C}_4 = \dot{C}_2^* = 0, \quad \dot{C}_5 = \dot{C}_1^* = (1/6)(1 + j\sqrt{3}).$$

Итак, дискретный сигнал, обладающий количеством отчетов $N = 6$, позволяет определить постоянную составляющую C_0 , а также комплексные амплитуды первой, второй и третьей гармоник исходного непрерывного сигнала. Отсюда следует, что при любом четном числе отчетов N число определяемых гармоник равно половине числа отчетов. Действительно, верхняя частота сигнала с ограниченным спектром может быть найдена следующим образом: Поскольку интервал квантования $\Delta = 1/2f_B$, то $f_B = 1/(2\Delta)$. Тогда, учитывая, что $T = N\Delta$, а $\Delta = T/N$, получим

$$f_B = 1/(2\Delta) = N/(2T) = (N/2)f_1,$$

где $f_1 = 1/T$ есть частота первой гармоники.

7.4. Дискретная свертка

Запишем известное выражение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

для свертки двух непрерывных функций времени, где $x(\tau)$ – сигнал на входе линейной цепи (фильтр), $h(t-\tau)$ – импульсная реакция цепи, $y(t)$ – сигнал на выходе цепи. По аналогии с этим выражением можно ввести понятие дискретной свертки, т.е. операции, при которой отсчеты некоторого дискретного сигнала $y_{\Delta}(t)$ связаны с отсчетами дискретных сигналов $x_{\Delta}(t)$ и $h_{\Delta}(t)$ соотношением [1, 2, 16, 36]

$$y_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{m-k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.18)$$

Дискретный характер свертки (7.18) не должен изменять ее свойств и, в частности, дискретное преобразование Фурье свертки должно быть равно произведению ДПФ свертываемых функций. Для доказательства данного утверждения представим значения отсчетов x_k и h_{m-k} обратными дискретными преобразованиями Фурье от соответствующих наборов спектральных коэффициентов:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_{xn} \exp(j2\pi nk / N),$$

$$h_{m-k} = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{C}_{hl} \exp[j2\pi l(m-k) / N]$$

и подставим эти выражения в соотношение (7.18):

$$y_m = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_{xn} \exp(j2\pi nk / N) \sum_{l=0}^{N-1} \dot{C}_{hl} \exp[j2\pi l(m-k) / N]. \quad (7.19)$$

Изменим порядок суммирования по индексам l и k в выражении (7.19):

$$y_m = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \dot{C}_{xn} \dot{C}_{hl} \exp(j2\pi lm/N) \sum_{k=0}^{N-1} \exp[j2\pi l(n-l)k/N]. \quad (7.20)$$

Перед тем, как продолжить анализ выражения (7.20), сделаем некоторое отступление и рассмотрим дискретное преобразование Фурье как разложение некоторого вектора x в N – мерном ортогональном функциональном пространстве, ортами которого являются векторы

$$\bar{e}_0 = \{1, 1, 1, \dots, 1\};$$

$$\dot{e}_1 = \{1, \exp[j2\pi/N], \exp[j4\pi/N], \dots, \exp[j2(N-1)\pi/N]\};$$

$$\dot{e}_2 = \{1, \exp[j4\pi/N], \exp[j8\pi/N], \dots, \exp[j4(N-1)\pi/N]\};$$

.....

$$\dot{e}_{N-1} = \{1, \exp[j2(N-1)\pi/N], \exp[j4(N-1)\pi/N], \dots, \exp[j2(N-1)^2\pi/N]\}.$$

В силу ортогональности ортов функционального пространства их скалярные произведения равны нулю

$$\dot{e}_n \cdot \dot{e}_l^* = \sum_{k=0}^{N-1} \exp[j2\pi(n-l)k/N] = \begin{cases} N, & n=l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \quad (7.21)$$

Напомним, что аналогичная трактовка рассматривалась и при спектральном анализе периодических функций. Используя результат (7.21), нетрудно видеть, что при $n=l$ внутренняя сумма в выражении (7.20) дает величину N , а двойное суммирование по n и l переходит в однократное по n :

$$y_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{xn} C_{hn} \exp(j2\pi mn/N). \quad (7.22)$$

Соотношение (7.22) есть не что иное, как обратное дискретное преобразование Фурье над произведением коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов. Номера коэффициентов ДПФ в их произведениях совпадают. Данное обстоятельство приводит к выводу, что коэффициенты преобразования Фурье дискретной свертки есть произведения коэффициентов ДПФ свертываемых сигналов совпадающих номеров:

$$C_{yk} = C_{xk} C_{hk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (7.23)$$

Выражение (7.18) для дискретной свертки описывает процесс преобразования дискретного сигнала цифровым фильтром, функционирование которого будет описано ниже. При этом фильтрация сигнала реализуется во временной области. Однако если дискретный сигнал представляет собой достаточно длинную выборку (несколько тысяч отсчетов), то вместо вычислений дискретной свертки целесообразно произвести ДПФ входного сигнала, умножить его на ДПФ импульсной реакции (т.е. на частотную характеристику в дискретном виде) и найти ОДПФ от полученного результата. Эта операция может быть более экономична, чем прямое вычисление дискретной свертки.

7.5. Дискретное преобразование Лапласа и z – преобразование

При анализе и синтезе дискретных цифровых устройств широко используется так называемое z - преобразование [1, 15, 36]. Это преобразование имеет такое же значение по отношению к дискретным сигналам, как интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к непрерывным функциям. Наиболее ясным представляется пусть изложения теории z –

преобразования, использующий переход от преобразования Лапласа через дискретное преобразование Лапласа к z – преобразованию.

7.5.1. Дискретное преобразование Лапласа

В гл. 3 преобразование Лапласа было использовано для анализа непрерывных функций. Однако, как это было изложено в гл. 5 и в настоящей главе, в реальной действительности зачастую вместо непрерывной функ-

ции времени $x(t)$ задается дискретная последовательность значений x_n , $n = (0, 1, 2, \dots)$ определенных в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$

Если эту дискретную последовательность x_n заменить некоторой ступенчатой функцией $x_0(t)$, которая задана условиями

$$x_0(t) = x_n \quad \text{при } n \leq t < n+1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(см. рис. 7.4), то к данной ступенчатой функции может быть применено преобразование Лапласа [15].

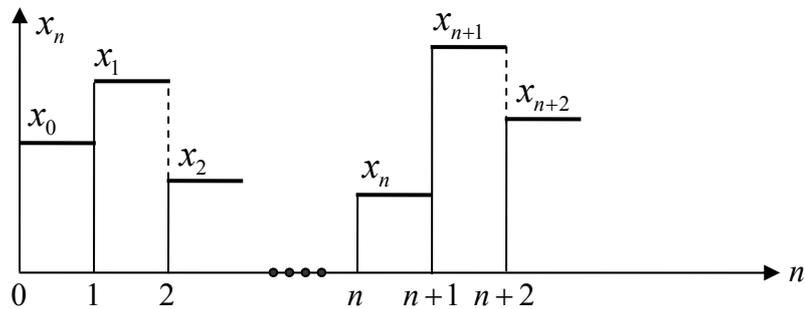


Рис. 7.4. Представление дискретной последовательности ступенчатой функцией

Поскольку функция $x_0(t)$ кусочно-постоянна, то ее преобразование Лапласа можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} L\{x_0(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x_n \exp(-st) dt = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left[-\frac{1}{s} \exp(-st) \right]_n^{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{\exp(-ns) - \exp[-(n+1)s]}{s} = \frac{1 - \exp[-s]}{s} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \exp(-ns). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Каждый раз при составлении некоторой ступенчатой функции и выполнении над ней преобразований Лапласа появляется множитель $[1 - \exp(-s)]/s$ и запись типа (7.24) можно упростить, опуская этот множитель. Тогда в правой части выражения (7.24) останется только сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \exp(-ns),$$

представляющая собой результат преобразования конкретной последовательности x_n . Обозначим это преобразование символом $D\{\dots\}$ и назовем его дискретным преобразованием Лапласа. Итак

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \exp[-ns] \equiv D\{x_n\}. \quad (7.25)$$

Как указывалось выше, последовательность x_n , выделенная из непрерывной функции $x(t)$ может рассматриваться как результат действия набора δ -функций $\delta(t-n\Delta)$, извлекающих (в силу фильтрующего свойства δ -функции) из функции $x(t)$ ее значения x_n в моменты времени $t = n\Delta$.

Можно сказать, что решетчатая функция $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\Delta)$ модулируется по амплитуде функцией $x(t)$, в результате чего получается соотношение

$$x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t-n\Delta).$$

Таким образом, задачи, возникающие в связи с анализом дискретных последовательностей, могут быть рассмотрены либо с использованием преобразования Лапласа применительно к соответствующим ступенчатым функциям, либо более коротким путем и использованием дискретного преобразования Лапласа самих последовательностей.

7.5.2. Z-преобразование и его основные свойства

Сделать анализ дискретных последовательностей еще более простым можно, если заменить переменную s новой переменной z с использованием подстановки $\exp(s) = z$ [1, 15]. Тогда ряд (7.25) переходит в степенной ряд вида

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \equiv Z\{x_n\} \quad (7.26)$$

и называется z -преобразованием дискретной последовательности x_n .
Вообще говоря, ряд (7.26) представляет собой ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

для случая $a=0$ и при условии равенства нулю всех C_n для положительных значений n .

Используя выражение (7.26) можно найти z -преобразования дискретных сигналов с конечным числом отсчетов. Так, простейшему дискретному сигналу $\{x_n\} = \{1, 0, 0, \dots\}$ соответствует z -преобразование $x(z) = 1$.
Для случая $\{x_n\} = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$ имеет место z -преобразование

$$x(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3}.$$

Поскольку число слагаемых в ряде (7.26) может быть бесконечно велико, то необходимо рассмотреть проблему его сходимости [15].

Если коэффициенты ряда удовлетворяют условию $|x_n| < AR_0^n$ для любых $n \geq 0$, где $A > 0$ и $R_0 > 0$ есть постоянные вещественные числа, то теория функций комплексного переменного [18] утверждает, что ряд (7.26) сходится при всех значениях z , для которых $|z| > R_0$. В этой области суммой ряда является аналитической функцией, все особые точки которой лежат внутри круга $|z| \leq R_0$, то есть вне области сходимости.

Рассмотрим пример дискретного сигнала $\{x_n\} = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$, служащий дискретной моделью единичной ступеньки Хевисайда. Тогда z -преобразование данного сигнала, имеющее вид

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$$

представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, знаменателем которой является величина $q = 1/z$. Сумма этой прогрессии при $n \rightarrow \infty$ равна

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} = 1/(1 - q),$$

откуда $x(z) = 1/(1 - 1/z) = z/(z - 1)$.

Рассмотрим теперь вопрос о применении z -преобразования к непрерывным функциям. Пусть непрерывная функция $x(t)$ обладает ограниченным спектром и может быть представлена отсчетами $\{x_n\}$, взятыми в моменты $t = n\Delta$, где $\Delta = 1/2f_B$. Тогда данной функции можно сопоставить ее z -преобразование при данном шаге дискретизации Δ

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta)z^{-n}. \quad (7.27)$$

Так, z -преобразование функции $x(t) = \exp(\alpha t)$ имеет вид

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\alpha n\Delta)z^{-n} = 1 + \frac{\exp(\alpha\Delta)}{z} + \frac{\exp(2\alpha\Delta)}{z^2} + \dots \quad (7.28)$$

Перепишем это преобразование в виде

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(\alpha\Delta)z^{-1}]^n$$

и введем обозначение $\exp(\alpha\Delta)z^{-1} = a$. Тогда

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n. \quad (7.29)$$

Сумма ряда (7.29) определяется выражением

$$x(z) = (1 - a)^{-1}.$$

Таким образом, z -преобразование (7.28) может быть определено как

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\exp(\alpha\Delta)z^{-1}]^n = [1 - \exp(\alpha\Delta)z^{-1}]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 - \exp(\alpha\Delta)z^{-1}} = \frac{z}{z - \exp(\alpha\Delta)}. \quad (7.30)$$

Полагая $\alpha = 0$, нетрудно видеть, что z -преобразование единичной ступеньки Хевисайда есть частный случай выражения (7.30).

Вычислим теперь z -преобразование дискретной показательной функции

$$\{x_n\} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0, \\ a^n & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$

Здесь величина n принимает только целочисленные значения. Для вычисления z -преобразования этой функции необходимо найти сумму ряда

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-n}. \quad (7.31)$$

Нетрудно видеть, что выражение (7.31) представляет собой сумму геометрической прогрессии, первый член которой есть единица, а знаменатель определяется величиной $q = az^{-1}$. Этот ряд сходится при $|az|^{-1} < 1$, т.е. при $|z| > |a|$. Учитывая, что сумма геометрической прогрессии определяется как $S = (1 - q)^{-1}$, запишем z -преобразование дискретной показательной функции в виде

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Рассмотрим теперь основные свойства z -преобразования.

1. Линейность. В соответствии с определением (7.26), z -преобразование представляет собой линейную комбинацию отсчетов некоторой дискретной последовательности, а поэтому оно удовлетворяет принципу суперпозиции. Таким образом, если $\{x_1(n)\} \Leftrightarrow X_1(z)$, а $\{x_2(n)\} \Leftrightarrow X_2(z)$, то z -преобразование взвешенной суммы (разности) функций $\{x_1(n)\}$, представляет собой взвешенную сумму (разность) z -преобразований этих функций

$$a\{x_1(n)\} \pm b\{x_2(n)\} \Leftrightarrow aX_1(z) \pm bX_2(z). \quad (7.32)$$

2. *Z-преобразование задержанной последовательности.* Рассмотрим дискретный сигнал $\{y(n)\}$, полученный путем задержки исходного дискретного сигнала $\{x(n)\}$ на одну позицию (один период дискретизации, или один такт). При этом $\{y(n)\} = \{x(n-1)\}$ и вычисление z -преобразования приводит к результату

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-1}X(z). \quad (7.33)$$

Таким образом, при задержке дискретной последовательности на один такт, z -преобразование задержанной последовательности определяется произведением z -преобразования исходной последовательности и z^{-1} . При смещении дискретного сигнала на N тактов, z -преобразование данной последовательности определяется умножением z -преобразования исходной последовательности на величину z^{-N} .

3. *Z-преобразование дискретной свертки.* Как было показано в подразделе 7.4, дискретная свертка двух последовательностей имеет вид

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k}.$$

Найдем z -преобразование дискретной свертки:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} h_{m-k} z^{-(m-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = X(z)H(z). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Здесь введено обозначение $n = m - k$. Таким образом, z -преобразование дискретной свертки двух последовательностей равно произведению z -преобразований этих последовательностей, что соответствует рассмотрен-

ным в предыдущих главах правилам преобразований Фурье и Лапласа свертки.

7.5.3. Обратное z -преобразование

Как было упомянуто выше, z -преобразование некоторого сигнала $\{x_n\}$, обозначенное как $X(z)$, есть функция комплексной переменной z , аналитическая в области $|z| > R_0$. При этом соответствие между дискретной последовательностью $\{x_n\}$ и её z -преобразованием $X(z)$ является взаимно однозначным.

Выражение, позволяющее перейти от z -преобразования $X(z)$ к дискретной последовательности $\{x_n\}$ называется обратным z -преобразованием. Для определения обратного z -преобразования умножим левую и правую части выражения (7.26) на величину z^{m-1} :

$$z^{m-1}x(z) = x_0z^{m-1} + x_1z^{m-2} + \dots + x_mz^{-1} + \dots \quad (7.35)$$

и вычислим интегралы от обеих частей этого равенства. Контуром интегрирования при этом будет некоторая замкнутая кривая, расположенная в области аналитичности и охватывающая все полюсы функции $X(z)$. Из теоремы Коши о вычетах [...] следует что

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi j, & \text{если } n = -1, \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

Использование этого свойства при интегрировании выражения (7.35) приведет к тому, что интегралы от слагаемых правой части равенства обратятся в нуль за исключением интеграла от слагаемого x_mz^{-1} , что приведет к выражению

$$x_m = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-1} X(z) dz, \quad (7.36)$$

которое и представляет собой обратное z – преобразование.

Пример. Найдем значения дискретного сигнала $\{x_n\}$ по заданному z – преобразованию вида

$$X(z) = \frac{z+1}{z}.$$

Используя выражение (7.36), запишем первые три значения сигнала $\{x_0, x_1, x_2\}$:

$$x_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} X(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z+1}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} dz + \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-2} dz = 1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint z^0 X(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z+1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint dz + \frac{1}{2\pi j} \oint z^{-1} dz = 1,$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint z X(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint (z+1) dz = 0.$$

Нетрудно видеть, что, начиная с $n = 2$, все значения дискретного сигнала $\{x_n\}$ будут равны нулю, т.к.

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-2} (z+1) dz = 0.$$

Таким образом, исходный дискретный сигнал имеет вид

$$\{x_n\} = \{1, 1, 0, 0, \dots\}.$$

7.6. Принципы цифровой фильтрации

Линейные цифровые фильтры представляют собой простейший класс систем дискретной обработки сигналов. Такие фильтры реализуются с использованием электронных вычислительных машин или специализированных процессоров [1, 36].

Как известно, аналоговые линейные цепи (фильтры) допускают два подхода к анализу их функционирования: временной и спектральный. Однако в реальной действительности аналоговые фильтры функционируют

только во временной области, поскольку входные сигналы этих фильтров не подвергаются искусственному спектральному разложению перед прохождением через фильтр. В связи с этим спектральный подход к анализу функционирования фильтра является умозрительным (абстрактным).

В отличие от аналогового фильтра, временной и частотный подходы к анализу функционирования цифрового фильтра являются физически реализуемыми в одинаковой степени. Так, при временном подходе цифровой фильтр реализует операцию вычисления дискретной свертки входного дискретного сигнала $x(k\Delta)$ с дискретной импульсной реакцией $h(k\Delta)$, форма которой хранится в устройстве памяти процессора.

При частотном подходе входной дискретный сигнал подвергается дискретному преобразованию Фурье с последующим умножением коэффициентов ДПФ на соответствующие значения дискретной частотной характеристики фильтра, форма которой хранится в устройстве памяти. Дискретный сигнал на выходе фильтра определяется с использованием обратного ДПФ и, далее, как было показано в главе 5, непрерывный выходной сигнал в случае необходимости восстанавливается путем пропускания выходной дискретной последовательности через фильтр нижних частот. Структурная схема цифрового фильтра, предназначенного для обработки непрерывных сигналов, приведена на рис. 7.5. Непрерывный входной сигнал $x(t)$ поступает на вход аналого – цифрового преобразователя (АЦП). АЦП управляется генератором импульсов синхронизации, частота следования которых определяется величиной интервала дискретизации $\Delta t = 1/2f_B$. В момент подачи каждого из серии синхронизирующих импульсов на выходе АЦП появляется двоичное число с некоторым фиксированным количеством разрядов, которое отображает величину мгновенного значения входного сигнала в момент времени, отвечающий подаче синхроимпульса.

Преобразованный таким образом сигнал поступает в цифровой процессор, функционирующий в соответствии с заданным алгоритмом фильтрации. Этот алгоритм может быть реализован с использованием дискретной свертки (временной подход) или с использованием частотного подхода.

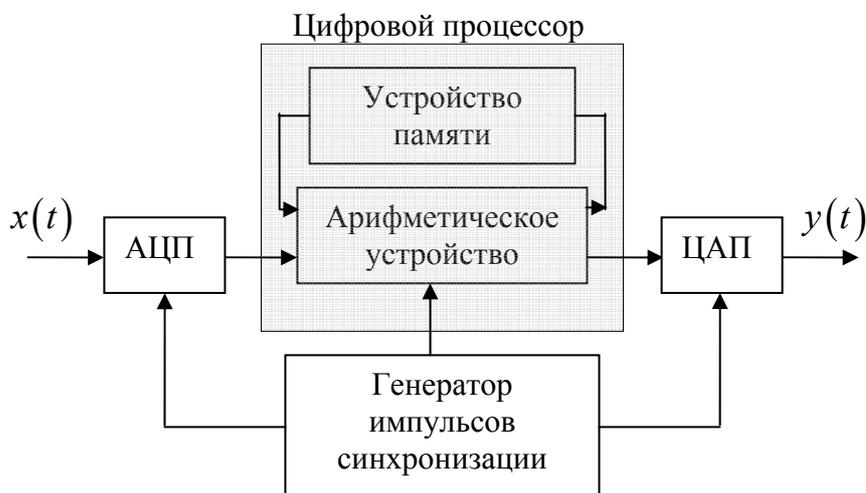


Рис. 7.5. Структурная схема цифрового фильтра

Если выходная информация должна быть представлена в аналоговой форме, то необходимо выполнение цифро – аналогового преобразования (ЦАП). Однако, если дальнейшие операции по обработке сигнала реализуются в цифровой форме, то ЦАП не требуется.

Рассмотрим более подробно функционирование цифрового фильтра для случая временного подхода [36].

Как неоднократно указывалось выше, сигнал $y(t)$ на выходе линейного фильтра представляет собой свертку входного сигнала с импульсной реакцией фильтра $h(t)$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (7.37)$$

Линейный цифровой фильтр преобразует входную дискретную последовательность $\{x_n\}$ в выходную последовательность $\{y_n\}$

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (7.38)$$

При этом выходная последовательность представляет собой сумму откликов фильтра на каждый из отсчетов входной последовательности.

Обобщая выражение (7.37) на случай дискретных сигналов, введем понятие импульсной реакции цифрового фильтра $\{h_k\}$ как отклика этого фильтра на единичный импульс:

$$(1, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow (h_0, h_1, h_2, \dots, h_n). \quad (7.39)$$

При смещении входного единичного импульса на некоторое число интервалов дискретизации импульсная реакция смещается на это же число интервалов, не изменяя своей формы:

$$(0, 1, 0, \dots, 0) \Rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_n),$$

$$(0, 0, 1, \dots, 0) \Rightarrow (0, 0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_n).$$

Сформулируем теперь алгоритм линейной цифровой фильтрации. Для этого зададим дискретную последовательность $\{x_n\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ на входе цифрового фильтра, обладающего заданной импульсной реакцией $\{h_m\}$.

Тогда m -й отсчет выходной последовательности $\{y_m\}$ можно записать в виде

$$y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}. \quad (7.40)$$

Выражение (7.40) показывает, что в момент каждого отсчета цифровой фильтр производит взвешенное суммирование всех предыдущих значений входного сигнала, причем отсчеты импульсной реакции имеют смысл последовательности весовых коэффициентов. Таким образом, выходная последовательность $\{y_m\}$ есть не что иное, как дискретная свертка входной последовательности $\{x_k\}$ и импульсной реакции цифрового фильтра $\{h_k\}$.

На рис. 7.6 этот процесс изображен графически для случая входной последовательности, имеющей конечную протяженность.

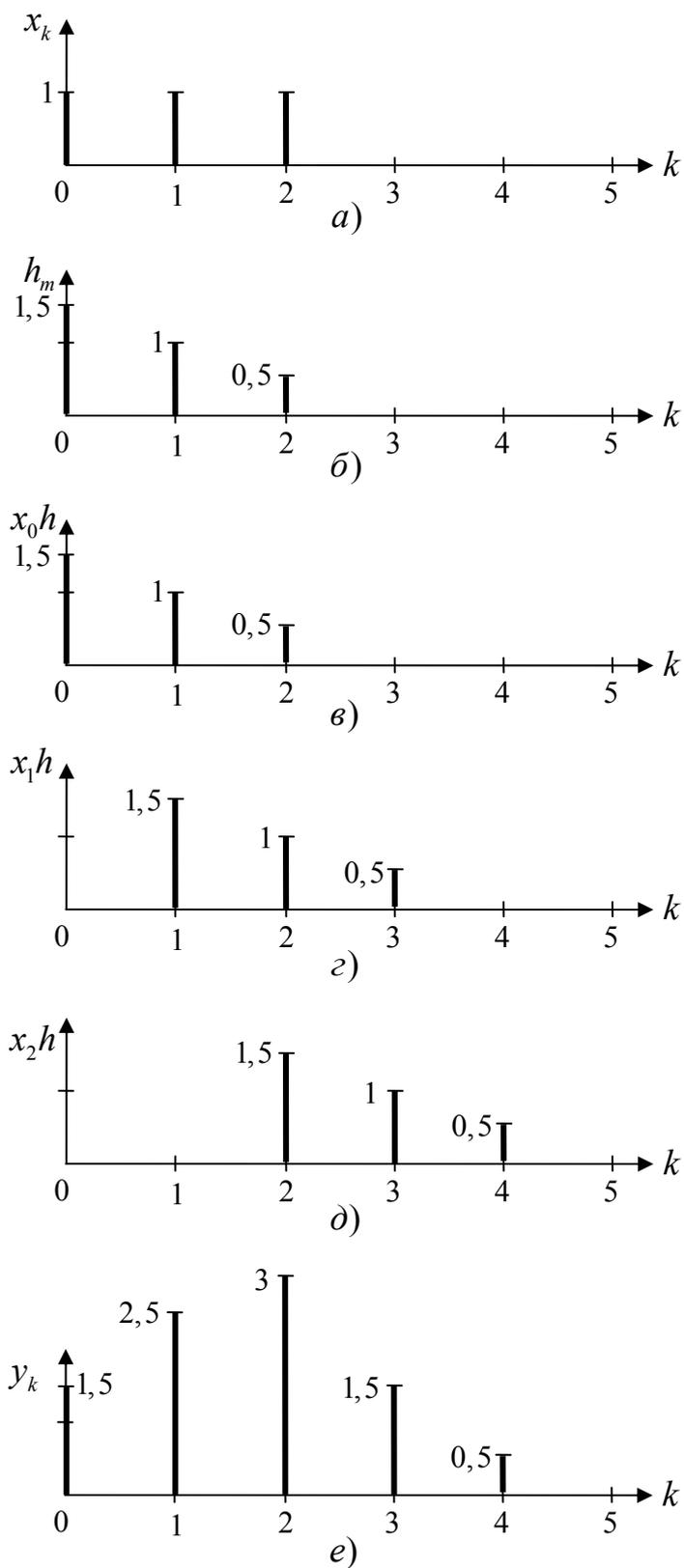


Рис. 7.6. Процесс цифровой фильтрации.
 а) входная последовательность; б) импульсная реакция;
 в), г), д) отклики фильтра на импульсы входной последовательности;
 е) выходной сигнал цифрового фильтра

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. шк., 1988. 448 с. ISBN 5 – 06 – 001409 – 6.
2. Нефедов. В.И. Основы радиоэлектроники и связи. М.: Высш. шк., 2002. 510 с. ISBN 5 – 06 – 004274 – X.
3. Анго А. Математика для электро – и радиоинженеров/ Пер. с франц.; Ред. К.С. Шифрин. М.: Наука, 1967. 780 с.
4. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1962.156с.
5. Карман Т.К., Био М. Математические методы в инженерном деле/ Пер. с англ.; Ред. А.М. Лопшиц. М. – Л., ОГИЗ Гостехиздат, 1946. 424 с.
6. Гольдман С. Гармонический анализ, модуляция и шумы/ Пер с англ.; Ред. Г.С. Горелик. М.: ИЛ, 1951. 408 с.
7. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.236с.
8. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы, т.1/ Пер с англ.; Ред. И.С. Рыжак. М.: Мир, 1988. 336 с. ISBN 5 – 03 – 000977 – 9.
9. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье/ Пер. с англ.; М. – Л., ОГИЗ Гостехиздат, 1948. 480 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.1100с.
11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1971. 672 с.
12. Каратаева Н.А. Радиотехнические цепи и сигналы, часть 1. Теория сигналов и линейные цепи. Томск: Изд. ТУСУР, 2001. 260 с.
13. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций/ Пер. с англ.; М. – Л., ОГИЗ Гостехиздат, 1948. 460 с.

14. Ван дер Поль Б, Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа/ Пер с англ.; Ред. И.Н. Денисюк. М.: ИЛ, 1952. 506 с.
15. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z – преобразования/ Пер. с нем.; Ред. Я.З.Цыпкин. М.: Наука, 1971. 288 с.
16. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы, т.2/ Пер с англ.; Ред. И.С. Рыжак. М.: Мир, 1988. 360 с. ISBN 5 – 03 – 000978 – 7.
17. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа/ Пер с англ.; Ред. А.М. Лопшиц. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
18. Тихонов А.Н., Свешников А.Г. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970. 304 с.
19. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 576 с.
20. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1966. 728 с.
21. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1/ Пер с англ.; Ред. Б.Р. Левин. М.: Советское радио, 1961. 782 с.
22. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. М.: Советское радио, 1980. 544 с.
23. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М.: Физматгиз, 1962. 220 с.
24. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: ИЛ, 1957. 446 с.
25. Гольдман С. Теория информации/ Пер с англ.; Ред. В.В. Фурдуев. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
26. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники, т.2. М.: Советское радио, 1968. 504 с.
27. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Методы аналитического выражения радиосигналов. М.: Высш. шк., 1996. 104 с.

28. Горелик Г.С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. М.: Физматгиз, 1959. 572 с.
29. Новоселов С.И. Специальный курс тригонометрии. М.: Высш. шк., 1967. 536 с.
30. Картьяну Г. Частотная модуляция. Бухарест: Изд. Ан Румынской Народной Республики, 1961. 578 с.
31. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
32. Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие радиосигналов. М.: Советское радио, 1971. 282 с.
33. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М.: Советское радио, 1971. 568 с.
34. Вакман Д.Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации. М.: Советское радио, 1965. 304 с.
35. Довиак Р. Зрнич Д. Доплеровские радиолокаторы и метеорологические наблюдения/ Пер с англ.; Ред. А.А. Черников. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 512 с.
36. Tatarinov V.N., Tatarinov S.V., Lighthart L.P. FM –CW Polarization Radar as a Correlation Receiver With Signals Compression Along the Frequency Axis// Proc. of the 14-th International Conference MIKON – 2002. Gdansk, Poland, 2002, vol. 2. Pp. 412–418.