**Министерство образования и науки РФ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**
**высшего профессионального образования**
**Томский государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники**

**(ТУСУР)**

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Л.А. Боков
“____”____________ 2012 г.

В. М. Винокуров

# Руководство к практическим занятиям по курсу «Сети связи и системы коммутации(СССК)»

По дисциплинам направлений подготовки **«Телекоммуникации»** специальностей 201100 (210405) «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» и 071700 (210401) «Физика и техника оптической связи», реализуемых в рамках данного направления подготовки дипломированного специалиста

## Учебное методическое пособие

Факультет радиотехнический

Обеспечивающая кафедра «Телекоммуникаций и основ радиотехники»

2012

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Томский государственный Университет Систем Управления и
Радиоэлектроники

(ТУСУР)

Кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники (ТОР)

В.М.Винокуров

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ "СЕТИ СВЯЗИ И СИСТЕМЫ КОММУТАЦИИ"

Учебно-- методическое пособие

2012

Рецензент
Богомолов С.И., канд. техн. наук, доцент

**Винокуров В.М.**

Руководство к практическим занятиям по курсу «Сети связи и системы коммутации(СССК)»: Учебно- методическое пособие / В.М. Винокуров; Томск. гос. ун–т систем упр. и радиоэлектроники. — Томск : Томск. гос. ун–т систем упр. и радиоэлектроники, 2012. — 40 с.

Иллюстраций – 8, приложений – 2.

Изучаются основные определения теории телетрафика, состояние занятости пучка ЭСЛ, законы распределения входного потока КС, модели Эрланга систем с потерями и с ожиданием, система с повторными вызовами, распределение Энгсета. Практикум содержит методические указания к решению задач, сопровождаемые краткими доказательствами основных постулатов классической теории телетрафика.

Для студентов ВУЗов специальностей 210405 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» по направлению «Телекоммуникации», а также для студентов смежных специальностей 210302 «Радиотехника», 210401 «Физика и техника оптической связи»,

СОДЕРЖАНИЕ

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ "СЕТИ СВЯЗИ И СИСТЕМЫ КОММУТАЦИИ"

Предлагаемое учебное методическое пособие имеет целью систематизацию практикума и приведение его в соответствие с требованиями Государственного образовательного стандарта (ГОС ВПО от 17.03.2000 г, рег. номер 151 тех/дс) по специальностям 071700 (210401)“Физика и техника оптической связи” и 201100 (210405) “Радиосвязь, радиовещание и телевидение”.

Теоретический курс, облегчающий решение задач, составляющих практикум, изложен в главе 3 учебного пособия "Сети связи и системы коммутации"[1].

Дисциплина "Сети связи и системы коммутации" является одной из основных дисциплин в образовательной программе специальности "Радиосвязь, радиовещание и телевидение". При разработке учебно-методических материалов по данному курсу предполагалось, что обучающийся уже владеет необходимыми знаниями в области изучения систем передачи (в особенности, цифровых), почерпнутыми им из освоения курса "Основы построения телекоммуникационных систем и сетей". Задачей курса "Сети связи и системы коммутации" является углубленное изучение современных сетей связи и сопряжённых с ними сетевых проблем, таких, как телетрафик, маршрутизация сообщений, сигнализация, синхронизация и т.д.

Учебный план курса "Сети связи и системы коммутации" предусматривает для очного отделения направления «Телекоммуникации» проведение компьютерных коллоквиумов в седьмом и восьмом семестрах по тематике контрольных работ, описанных в [4]: КР1 (в седьмом семестре) и КР3 (в восьмом семестре).

Цикл практических занятий длительностью 16 часов предусмотрен в восьмом семестре. В соответствии с приведённой ниже программой курса изучаются восемь тем: "Тема I.: Основные определения теории телетрафика. Тема II.: Состояние занятости пучка ЭСЛ. Тема № III. Биноминальный закон распределения входного потока. Тема № IV. Модель Эрланга системы с потерями. Тема № V. Система с повторными вызовами. Тема № VI. Распределение нагрузки в полнодоступном пучке из N линий в системе с потерями. Распределение Энгсета. Тема № VII. Система с ожиданием". Практикум завершается контрольной работой с последующим обсуждением её результатов.

**Разделы дисциплины"Сети связи и системы коммутации"и виды занятий**

| № п./п. | **Раздел дисциплины** | Лекции (43 час) | Практ (16час) | Лаб.зан. (27 час) |
|---|---|---|---|---|
| | **СЕМЕСТР 7** | | | |
| 1. | Введение. | 4 | | |
| 2. | Стандартизация сетей электросвязи | 4 | | |
| 3. | Обзор сетей электросвязи<br>Российская телекоммуникационная сеть общего пользования (3 час). Цифровая Сеть с Интеграцией Служб (ЦСИС) (3 час). Интеллектуальные сети (ИС) (3 час). Широкополосная цифровая сеть с интегрированными услугами Ш-ЦСИО (B-ISDN) (4 час). Сети с коммутацией меток (2 час). | 15 | | 27 |
| 4. | Синхронизация цифровых сетей | 4 | | 4 |
| | **Итого** | 27 | | 27 |
| | **СЕМЕСТР 8** | | | |
| 5. | Принципы коммутации в сетях связи. | 10 | | 4 |
| | Основы теории телетрафика | | 16 | |
| 6. | Принципы сигнализации в ТФОП (6 час). | 6 | | 28 |
| | **Итого** | 16 | 16 | |

## СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИКУМА

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1.

***Тема I.: Основные определения теории телетрафика***

«Телетрафик»= «теле» означает «далеко» а «трафик» («tra-veho», лат.) – «перевести», «переслать»

Первая математически корректная работа - работа Эрланга «Теория вероятностей и телефонные разговоры» (1909 г.).

Математический аппарат - теория массового обслуживания (ТМО), предметом изучения которой являются системы массового обслуживания (СМО). Основными компонентами СМО являются входной поток требований (заявок или сообщений), механизм обслуживания, дисциплина обслуживания.

Терминология СМО:

- обслуживающий прибор (ОП), однолинейная и многолинейная СМО; блокировка; фазы обслуживания; очередь ожидания;
- коммутационная система (КС); исходящие соединительные линии (ИСЛ); входящие соединительные линии (ВСЛ;) эквивалентные соединительные линии (ЭСЛ;) «источники» активные и пассивные; «занятие» ЭСЛ вызывающим абонентом;
- время обслуживания; распределение времени обслуживания фиксированное и случайное;
- система с явными потерями; система с повторными вызовами; система с ожиданием; системы с обходами;
- упорядоченный, случайный и циклический поиск коммутационной системой свободных ЭСЛ; полнодоступная и неполнодоступная коммутационная система;
- свойства простейшего телефонного потока вызовов: стационарность, одинарность, отсутствие последействия.
- понятие часа наибольшей нагрузки ( ЧНН ).

### ЗАДАЧА № 1

Параметры поступающей от абонентов нагрузки.

> Пусть в указанной выше СМО за время наблюдения T=10мин совокупность из M=8 абонентов направила в коммутационную систему ряд требований на соединение и получила обслуживание согласно таблице рис.1. Анализируя таблицу, констатируем, что общее время занятости коммутационного оборудования, необходимое для обслуживания $m_з$=13 вызовов, оказалось равным в данном случае V=42мин.

Определим и рассчитаем параметры входного потока требований.

1). Объём нагрузки V, обслуженной за T=10 минут равен сумме всех длительностей занятия; измеряется в ЧАСОЗАНЯТИЯХ (V=42 минутозанятия или 0,7 часозанятия).

2) Поступающий телетрафик A (поток нагрузки, интенсивность поступающей нагрузки) равен :

$$A = \frac{\textit{объем нагрузки } V}{\textit{время наблюдения } T} = 4{,}27\ \textit{Эрл.}$$

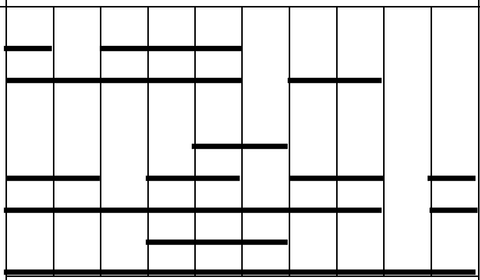
| № абонента | Графики занятости абонента | Время занятости абонента | Число вызовов |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 4мин. | 2выз. |
| 2 | | 7мин. | 2выз. |
| 3 | | 0мин. | 0выз. |
| 4 | | 2мин. | 1выз. |
| 5 | | 7мин. | 4выз. |
| 6 | | 9мин. | 2выз. |
| 7 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 3мин. | 1выз. |
| 8 | | 10мин. | 1выз. |
| | | Итог: 42 мин | 13 выз |

Рис.1 Таблица активности абонентов.

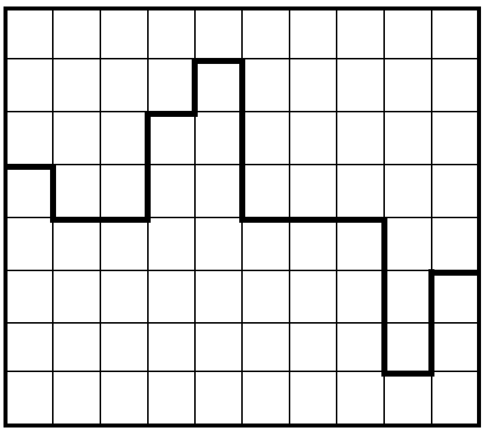



Рис.2. Диаграмма суммарной активности абонентов.

3) Интенсивность одного источника ρ (вероятность занятости одного источника):

$$\rho = \frac{\textit{поступающий} \quad \textit{телетрафик}}{\textit{число} \quad \textit{абонентов}} = \frac{A}{M} = 0{,}525\,\textit{Эрл.}$$

4) Среднее время занятия ЭСЛ одним абонентом $t_{ср}$:

$$t_{ср} = \frac{Объем\ нагрузки}{число\ занятий(вызовов)} = \frac{V}{m_з}\ ; \qquad t_{ср} = \frac{42}{13} = 3{,}23\ мин.$$

5) Частота поступающих вызовов λ, интенсивность потока требований:

$$\lambda = \frac{число\ вызовов}{время\ наблюдения} = \frac{13}{10} = \frac{m_з}{T} = 1{,}3\ \frac{выз}{мин}.$$

6) Средняя продолжительность паузы $f_{ср}$ (в предположении, что все требования обслужены): $f_{ср} = \frac{MT - V}{m_з} = \frac{80 - 42}{13} = 2{,}923 \frac{выз}{мин}$.

Проверка результата вычислений : нетрудно видеть, что при отсутствии «потерянных» требований интенсивность одного источника можно вычислить следующим образом:

$$\rho = \frac{A}{M} = \frac{\lambda t_{ср}}{\lambda(t_{ср} + f_{ср})} = \frac{t_{ср}}{(t_{ср} + f_{ср})} = \frac{3{,}23}{6{,}153} = 0{,}525\ Эрл.$$

Проверка подтверждает полученный ранее результат.

Выводы и обобщения:

1) СМО содержит две основные части: систему абонентов, характеризуемую потоком требований на соединение и коммутационное устройство, содержащее пучок ЭСЛ некоторой ёмкости N. Согласно А.К.Эрлангу система стремится к состоянию статистического равновесия, когда наиболее вероятным её состоянием является такое, когда в системе занято $A=\lambda t_{ср}$ ЭСЛ, то есть, в некотором, достаточно большом пучке линий существует в среднем одновременно A состояний занятости, что за интервал времени T дает нагрузку V=AT; если система окажется выведенной из состояния равновесия, она будет стремиться вернуться в него;

2) в течение интервала времени T в среднем поступает $m_з = \lambda T$ требований, создающих нагрузку $V = m_з t_{ср} = \lambda T\, t_{ср}$;

3) в рассматриваемом примере A=4,2 эрл . Для качественного обслуживания такого потока требуется коммутационная система с ёмкостью, равной или большей A, то есть N≥5 ЭСЛ. Как показывает диаграмма Рис.2, на четвёртой минуте 6 источников требуют обслуживания, для чего необходимо 6 ЭСЛ. Следовательно, при N=5 по истечении трёх минут от начала наблюдения будет отказано в немедленном обслуживании либо абоненту № 5, либо абоненту № 7. Таким образом, для того, чтобы система гарантированно не имела потерь, требуется ёмкость пучка ЭСЛ, равная числу источников M, что в большинстве случаев экономически нецелесообразно и зачастую невозможно.

Нагрузка, обслуженная коммутационными приборами. Условимся рассматривать в качестве коммутационного устройства пучок эквивалентных соединительных линий (ЭСЛ) ёмкостью N, обеспечивающий величину интенсивности обслуженной нагрузки, равную Y эрл. Для систем с потерями $Y<A$ , для систем с ожиданием $Y=A$.

Потери нагрузки. Поток потерянных (блокированных) требований (интенсивность отказов) определяется величиной разности между величинами поступающей и обслуженной нагрузок: $R=A-Y$.

Параметры системы с потерями:

1) вероятность потерь $B=R/A=(A-Y)/A$;

2) опасное время G представляет собой вероятность того, что коммутационное устройство или его определенная подгруппа полностью заняты; для случайной нагрузки $G=B$ ;

3) пропускная способность СМО - максимально возможная нагрузка при гарантированной величине потерь.

Сводка формул для расчетов.

1) $A=\lambda t_{cp}$. (1)

2) $Y=A(1-B)\leq A$ . (2)

3) $A=Y+R$ , где $Y< N$ . (3)

4) $R=AB$ , (4)

где B- величина безразмерная, но может быть выражена в процентах (в таком случае в формулу следует подставлять величину $B=B/100\%$),

5) $\overline{t_w}=t_w\,P(>0)$. (5)

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2.**

***Тема II.: Состояние занятости пучка ЭСЛ.***

Линия может быть в одном из двух состояний: она может быть либо свободна, либо занята.

Дискретная случайная величина X(t) “Состояние занятости пучка N линий в момент времени t” определяется числом одновременных занятий X(t)=(0,1,2,…N) линий.

Вероятность занятия = Q(x,t) – вероятность того, что в момент времени “t” занято “x” линий. Для стационарного процесса Q(x,t)=Q(x).

$$\sum_{X=0}^{N} Q(x) = 1 \qquad 6)$$

Обслуженная нагрузка может быть найдена как математическое ожидание случайной величины “X” :

$$Y = \sum_{X=0}^{N} xQ(x). \qquad (7)$$

Для полнодоступного пучка линий, если x=N, имеет место соотношение полной загрузки и величина G=Q(N) есть опасное время.

Пуассоновский входной поток.

а) Как интервал времени между поступлением требований, так и продолжительность отдельных занятий подчиняются экспоненциальному закону распределения:

$W(t)=\alpha e^{-\alpha t}$ , $t \geq 0$ , $1/\alpha$- математическое ожидание случайной величины “t”;

$F(t)=1-e^{-\alpha t}$ , $t \geq 0$ , $\alpha$-плотность потока требований.

Если допустить поток требований, содержащий бесконечное дискретное множество возможных значений числа этих требований, интервалы времени между моментами поступления которых НЕЗАВИСИМЫ друг от друга и имеют одинаковое экспоненциальное распределение с интенсивностью $\lambda$ то:

- случайное число X поступивших в единицу времени требований имеет в этом случае ПУАССОНОВСКОЕ распределение с вероятностью

$$P_X(\lambda\, t) = \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (8)$$

Пуассоновское распределение в телефонии приводят обычно [1] в следующей формулировке:

- вероятность того, что за интервал времени t поступит j вызовов равна:

$$P(\lambda \cdot t) = \frac{(\lambda \cdot t)^j}{J!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \qquad (9)$$

(при этом количество заинтересованных в использовании ресурсов сети абонентов предполагается бесконечно большим $M \to \infty$ );

- распределение состояний занятости при пуассоновском распределении имеет вид: $Q(x)=(A^x /x!)e^{-A}$.; (при этом ёмкость пучка ЭСЛ предполагается бесконечно большой $N \to \infty$ ).

Следствия:

1) при j=0 (или x=0) получаем распределение вероятностей непревышения величины “t” интервалами времени между соседними требованиями:

$$P_0(\lambda t)=((\lambda t)^0/0!)e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}; \qquad (10)$$

2) при наложении двух независимых пуассоновских потоков требований возникает новый пуассоновский поток с интенсивностью, равной сумме интенсивностей отдельных потоков $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

**ЗАДАЧА №2**

Предполагая, что каждая из 10000 абонентских линий посылает один вызов в час, определим, как часто поступают два вызова с интервалом между ними меньшим, чем 0,01 с.

Решение. Средняя интенсивность поступления вызовов $\lambda=10000\times1/3600=2{,}78$ вызова в секунду.

На основании уравнения (9.2) определяем вероятность того, что в течение интервала длиной 0,01 с не поступит ни один вызов: $P_0(0{,}0287)=e^{-0{,}0287}=0{,}973$

Таким образом, в течение 0,01 с от момента поступления предыдущего вызова поступает 2,7% вызовов. Поскольку интенсивность поступления вызовов равна 2,78 вызова в секунду, то интенсивность появления промежутков между последовательными вызовами, длина которых меньше 0,01 секунды, равна $2{,}78\times0{,}027=0{,}075$ раз в секунду.

**ЗАДАЧА №3**

Для узла коммутации сообщений, на который поступает обычно 4 вызова в минуту, определим вероятность того, что в любом произвольно выбранном интервале времени длительностью 30с поступят 8 или более вызовов.

Решение. Среднее число вызовов, которые поступают в интервале 30с, равно

$\lambda t=4\ (30/60)=2$. Вероятность того, что поступит 8 или более вызовов (при среднем их числе, равном 2)

$$P_{\geq 8}(2)=\sum_{i=8}^{\infty}P_i(2)=1-\sum_{i=0}^{7}P_i(2)=1-e^{-2}\left(1+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+.....+\frac{2^7}{7!}\right)=0{,}0011$$

**ЗАДАЧА №4**

Пучок соединительных линий содержит достаточно каналов, чтобы обслужить нагрузку, поступающую на него в соответствии с пуассоновским процессом со средней интенсивностью поступления вызовов, равной одному вызову в минуту. Предположим, что средняя длительность занятия равна 2 мин. В предположении, что нагрузка распределяется, начиная всегда с каналов с наименьшими по порядку номерами, определить, какой процент общей нагрузки обслуживается первыми пятью каналами, и какая нагрузка обслуживается всеми остальными каналами.

Решение. Интенсивность поступающей нагрузки системы равна А= 1×2=2Эрл. Интенсивность нагрузки, обслуженной i активными каналами, равна точно i Эрл. Следовательно, нагрузка, обслуженная первыми пятью каналами, может быть определена следующим образом:

$A = 1 \cdot P_1(2) + 2 \cdot P_2(2) + 3 \cdot P_3(2) + 4 \cdot P_4(2) + 5 \cdot P_5(2)=$

$=e^{-2} \cdot [\ 2 + 2 \cdot 2^2/2! + 3 \cdot 2^3/3! + 4 \cdot 2^4/4! + 5 \cdot 2^5/5!\ ]=1{,}89$ Эрл

Все остальные каналы обслуживают 2-1,89=0,11 Эрл.

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3.**

***Тема III. Биноминальный закон распределения входного потока***

В системе, содержащей M источников каждый из источников может быть либо занят (с вероятностью, равной $\rho$), либо свободен (с вероятностью, равной $(1-\rho)$). Соответственно величины средних времен перечисленных состояний равны $t_{ср}$ и $f_{ср}$. Очевидно, что в системе без потерь выполняется условие:

$$\lambda(t_{ср.}+f_{ср.})=M.$$

Памятуя, что $\lambda t_{ср.}=A$, нетрудно установить, что $\rho=A/M=t_{ср.}/(t_{ср.}+f_{ср.})$, и $f_{ср.}= t_{ср.}(1-\rho)/\rho$.

Введем параметр $q=t_{ср}/f_{ср}$, имеющий смысл потока «пауз» за время $t_{ср}$ от одного источника, который для системы без потерь принимает вид:

$$q=\frac{t_{cp}}{f_{cp}}=\frac{t_{cp}\rho}{t_{cp}(1-\rho)}=\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{11}$$

Исследуем вероятность того, что x из M источников системы заняты в некоторый момент времени. Учитывая, что события «занят» и «свободен» независимы и несовместны, приходим к биноминальному закону распределения состояний занятости:

$$Q(x)=P_{M,\rho}(x)=C_M^x\cdot\rho^x(1-\rho)^{M-x}=C_M^x\left(\frac{A}{M}\right)^x\cdot\left(1-\frac{A}{M}\right)^{M-x}. \tag{12}$$

Зависимости (11) и (12) позволяют найти компактную рекуррентную зависимость в форме:

$$\frac{Q(x)}{Q(x-1)}=\frac{C_M^x}{C_M^{x-1}}\frac{\rho^x}{\rho^{x-1}}\frac{(1-\rho)^{M-x}}{(1-\rho)^{M-x+1}}=\frac{C_M^x}{C_M^{x-1}}\cdot q. \tag{13}$$

При анализе систем с конечным числом источников необходимо считаться с тем обстоятельством, что интенсивность поступления вызовов изменяется по мере того, как изменяется число занятых источников. Таким образом, строго говоря, считать интенсивность поступающей нагрузки величиной неизменной можно лишь с большими оговорками.

Вырождение биноминального закона в закон Пуассона.

Если положить неограниченное число источников с малой вероятностью состояний их занятости ($M\to\infty$, $\rho\to 0$), то величину A поступающего телетрафика можно считать неизменной, независимой от количества источников M. Тогда:

$$Q(x) = \lim_{M \to \infty} P_{m,\rho}(x) = \lim_{M \to \infty} \left[ \frac{M!}{x!(M-x)!} \frac{A^x}{M^x} \frac{\left(1 - \frac{A}{M}\right)^M}{\left(1 - \frac{A}{M}\right)^x} \right].$$

Учитывая, что $\lim_{M \to \infty} \left(1 - \frac{A}{M}\right)^M = e^{-A}$ и $\lim_{M \to \infty} \left(1 - \frac{A}{M}\right)^x = 1$, приходим окончательно к закону Пуассона:

$$Q(x) = \frac{A^x}{X!} \cdot e^{-A}.$$

**ЗАДАЧА №5**

Определить, какова вероятность того, что в блоке данных длиной 1000 битов возникнут точно четыре ошибки при его передаче по линии с вероятностью ошибок по битам, равной $10^{-5}$?

Решение. Предполагая, что ошибки независимы (сомнительное предположение для многих линий передачи), можно получить вероятность возникновения точно четырех ошибок непосредственно из распределения Пуассона. Среднее число ошибок (вызовов) $\lambda t = 10^3 \times 10^{-5} = 0{,}01$. Таким образом, вероятность четырех ошибок $P_4(0{,}01) = [(0{,}04)^4/4!]e^{-0{,}01} = 4{,}125 \times 10^{-10}$. Другое решение может быть получено из биномиального закона распределения вероятностей: Вероятность четырех ошибок равна $C^4_{1000}\, p^4(1-p^{996}) = 4{,}101 \times 10^{-10}$, где $p = 10^{-5}$

***Тема № IV. Модель Эрланга системы с потерями***

Распределение Эрланга

Процесс обслуживания включает множество возможных состояний занятости x, каждое из которых имеет экспоненциально распределенную протяженность с зависящей только от этого состояния интенсивностью $\lambda_x$. Это однородный марковский процесс с дискретным фазовым пространством [6]. Последовательность состояний образует простую однородную марковскую цепь (простую потому, что вероятность перехода из одного состояния в другое не зависит от того, каким путем процесс попал в предыдущее состояние в силу свойств одинарности и отсутствия последействия в процессе, и однородную вследствие того, что вероятность такого перехода не зависит от момента времени перехода (в силу стационарности процесса).

Стационарные вероятности Q(x) состояний можно найти решением системы линейных уравнений состояний занятости. Принцип действия коммутационного устройства определяется переходными вероятностями p(z,x) марковской цепи.

Рассмотрим состояние x линий заняты, полагая что продолжительность состояния имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью, равной:

$\lambda_x=\lambda+x\mu$,

где $\lambda=m_з/T$ – интенсивность занятия ЭСЛ (интенсивность поступления требований на обслуживание);

$\mu=1/t_{ср}=m_з/V$ – интенсивность освобождения ЭСЛ коммутационного устройства.

Приведенное равенство при умножении обеих его частей на $t_{ср}$ дает соотношение $\lambda_x t_{ср}=A+x$, которое для величины $t_{ср}$ равной единице, принимает вид $\lambda_x=A+x$.

Вероятности того, что очередным событием будет занятие либо освобождение линии, относятся друг к другу как $\lambda/\mu x=A/x$.

Процесс обслуживания, согласно теории марковских процессов, полностью описывается однородной системой линейных уравнений состояний занятости, дополненной условием нормирования [6]:

$$\begin{cases} \lambda_x Q(x) = \sum\limits_{z\in Z} \lambda_Z P(z,x)Q(z); \\ \sum\limits_{x\in X} Q(x) = 1; \end{cases} \tag{14}$$

где x, z – состояния занятости,

Q(x), Q(z) – стационарные вероятности появления состояний x и z,

$\lambda_x$ – интенсивность распределения продолжительностей состояния x,

p(z,x) – переходная вероятность (вероятность того, что по завершении состояния z наступит состояние x).

Продемонстрируем решение уравнений (14) для полнодоступного пучка ЭСЛ с N линиями, рассматриваемого в качестве системы с потерями, на которую поступает случайная нагрузка A.

Искомой величиной в (14) является Q(x). Случайные величины X и Z могут принимать значения (0,1,2,….,N) – число одновременно занятых линий. Интенсивности состояний x: $\lambda_x=A+x$. Принимая во внимание, что в данной системе переходы возможны лишь в соседние состояния (например, из z только в (z+1) или (z–1), что составляет полную группу событий: P(z,(z+1))+P(z,(z–1))=1), запишем все возможные величины переходных вероятностей:

при занятии линий, когда x=z+1: P(z, z+1)=A/(A+z) для $0\leq z<N$;

при освобождении линий, когда x=z –1: P(z, z–1)=z /(A+z) для $0<z<N$;

если заняты все N линий x=z=N: P(N, N)=A/(A+N) для z=N;

все остальные переходные вероятности: P(z, x)=0.

С учетом введенных обозначений уравнение (14) приобретает для $0<x<N$ следующий вид:

$(A+x)\cdot Q(x)=\lambda_{z1}\cdot p(z_1,x)\cdot Q(z_1)+\lambda_{z2}\cdot p(z_2,x)\cdot Q(z_2)$, где $z_1$=x–1; $\lambda_{z1}$=A+$z_1$; p(x–1,x)=A/(A+x–1);

$z_2$=x+1; $\lambda_{z2}$=A+$z_2$; p(x+1,x)=(x+1)/(A+x+1).

После преобразований полученное равенство приводится к форме:

$$(A+x)\cdot Q(x)=A\cdot Q(X-1)+(x+1)\cdot Q(x+1),$$

которая позволяет записать простое рекуррентное соотношение для вероятностей состояний занятости:

$$Q(x)=\frac{A}{x}\cdot Q(x-1).$$

Отсюда легко получить граничные условия для состояний x=0 и x=N:

$$Q(1)=A\cdot Q(0) \text{ и } Q(N)=\frac{A}{N}Q(N-1).$$

Введение нижнего граничного условия приводит рекуррентное соотношение к удобному виду:

$$Q(x)=\frac{A^x}{x!}\cdot Q(0). \tag{15}$$

Величина Q(0) определяется из условия нормировки: $\sum_{x=0}^{N} Q(x)=1$:

$$Q(0)=\left(\sum_{x=0}^{N}\frac{A^x}{x!}\right)^{-1}.$$

В окончательном виде вероятность состояния занятости полнодоступного пучка ЭСЛ емкостью N определяется по формуле:

$$Q(x)=\frac{A^x}{x!\cdot\sum_{z=0}^{N}\frac{A^z}{z!}}. \tag{16}$$

Соотношение (16) носит название распределения Эрланга для СМО с потерями. Нетрудно видеть,что при наличии коммутационного устройства неограниченной емкости (N→∞) и случайного входного потока требований (M→∞) распределение Эрланга трансформируется в распределение Пуассона:

$$Q(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{A^x}{x!}\cdot\left(\sum_{z=0}^{N}\frac{A^z}{z!}\right)^{-1}=\frac{A^x}{x!}e^{-A}.$$

*Блокировка требований в полнодоступном пучке при M→∞*

Вероятность блокировки в данном случае равна вероятности того, что все линии пучка ЭСЛ заняты; данная величина вычисляется по формуле, известной в теории массового обслуживания как В –формула Эрланга:

$$B = G = E_{1,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{x=0}^{N} \frac{A^X}{x!}}. \tag{17}$$

Результаты расчетов по формуле (17) для некоторых величин параметров A и N сведены в табл. 3.1 (Приложение 1) ,заимствованную в [27]. При этом вероятности блокировок пучков линий с ресурсами N и (N–1) связаны друг с другом посредством рекуррентного соотношения вида:

$$B_{N-1} = \frac{NB_N}{A(1 - B_N)}. \tag{18}$$

**ЗАДАЧА №6**

Какую нагрузку может обслужить пучок линий (N=24), если вероятность блокировки составляет 1%? Какова интенсивность нагрузки, обслуженной одной линией?

Решение. Согласно таблице распределения Эрланга (табл. 3.1, [2, стр.108]; [1, стр. 82]), величинам N=24 и B=1% соответствует поступающий телетрафик A=15,3 Эрл.

Обслуженная пучком линий нагрузка равна:

Y=A(1-B)=15,3(1-0,01)=15,14 Эрл.

Нагрузка, обслуженная одной линией, составляет g=Y/N=0,631 Эрл.

**ЗАДАЧА №7**

Четыре группы терминалов данных нужно связать с ЭВМ с помощью арендованных каналов, как показано на рис. 3. На рис. 3,а нагрузка от групп терминалов данных распределяется по отдельным пучкам разделенных каналов. На рис. 3,б нагрузка от всех групп терминалов данных концентрируется и обслуживается одним общим пучком каналов. Определить общее число каналов, требуемых в обоих случаях, если максимально желаемая вероятность блокировки равна 5%. Принять, что в каждой группе по 24 терминала и каждый терминал активен в течение 10 % времени. Использовать метод расчёта для системы с явными потерями.

*Решение.* Интенсивность нагрузки, поступающей от каждой группы терминалов, равна 22·0,1 = 2,2 Эрл. Так как среднее число активных каналов много меньше числа источников, то можно использовать формулу для бесконечно большого числа источников. Используя Табл. 3.1 , определяем, что число каналов, требуемых для обеспечения B = 5 % при интенсивности нагрузки 2,2 Эрл, равно 5. Таким образом, конфигурация сети рис. 3,а требует всего 20 каналов.

Суммарная интенсивность нагрузки, поступающей на концентратор при конфигурации сети такой, как на рис. 3.8,а, равна 4·2,2== 8,8 Эрл. Из Табл. 3.1 (Приложение 1) находим, что для обслуживания данной нагрузки требуется 13 каналов.

Решение задачи №7 показывает, что объединение малых нагрузочных групп в одну большую нагрузочную группу может привести к существенной экономии числа требуемых каналов. Большие группы оказываются более эффективными, чем множество малых групп, поскольку маловероятно, что в малых группах одновременно возникают перегрузки (в предположении о независимости поступления вызовов). В действительности избыточная нагрузка одной группы может быть обслужена свободными каналами в другой группе. Таким образом, те каналы, которые введены для приспособления к пиковым нагрузкам, но обычно остаются свободными, используются более эффективно, если нагрузка собирается в одну группу. Эта особенность

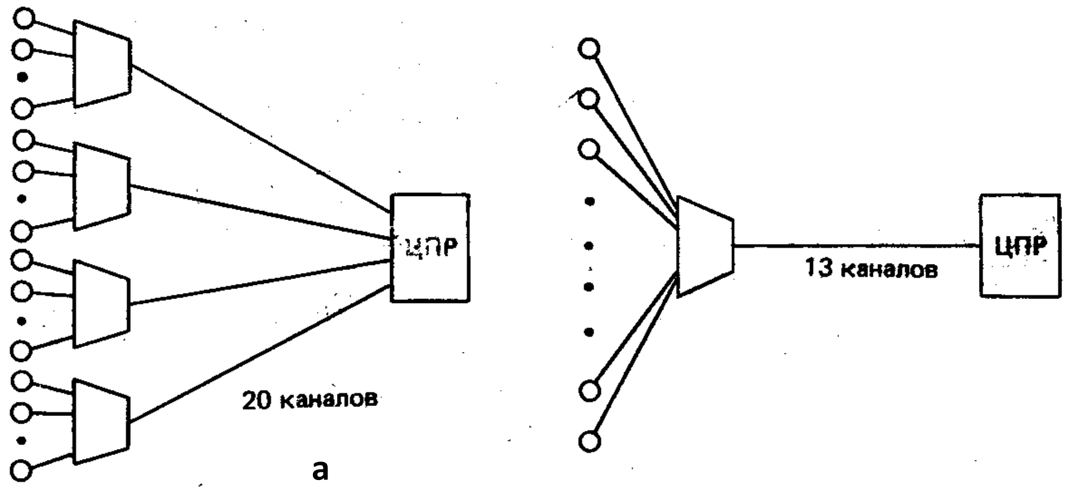
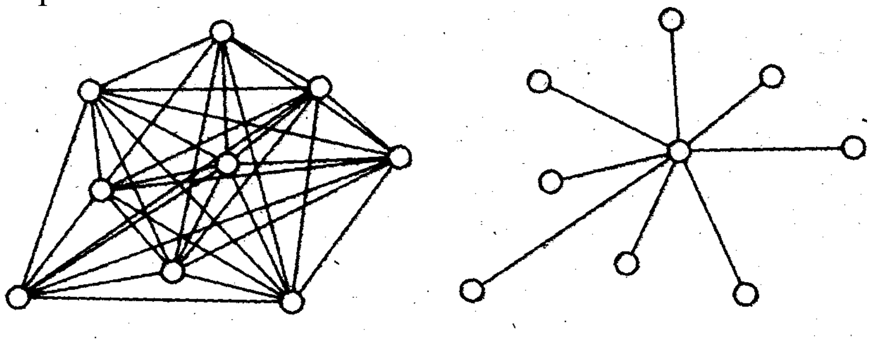



Рис. 3. Сеть терминалов данных, рассматриваемая в задаче №7:
а) – четыре отдельные группы; б) – вся нагрузка концентрируется в одной группе

является одним из мотивов интеграции, нагрузки речевой информации и данных в общей сети. Общая экономия затрат на передачу оказывается наиболее значительной, когда интенсивности нагрузки отдельных источников малы. Следовательно, именно периферийная область сети извлечет наибольшую выгоду при концентрации нагрузки. Более высокая, эффективность использования каналов, получаемая путем объединения нагрузки в большие группы, часто называется преимуществом групп большой емкости. Эта эффективность является основной причиной выбора иерархических коммутационных структур. Вместо того чтобы соединять друг с другом большое число узлов, связывая каждую пару пучками соединительных линий малой емкости, экономически более выгодно собирать всю нагрузку от отдельных узлов на один пучок линий большой емкости и направлять эту нагрузку через транзитный коммутационный узел. Рис. 4 сопоставляет полносвязную сеть и звездообразную сеть с центральным коммутационным узлом в середине.

## ЗАДАЧА №8

Что произойдет с вероятностями блокировки в схемах рис. 3,а и 3,б, рассмотренными в задаче №7, если интенсивность нагрузки возрастает на 50%?



а) б)

Рис. 4. - Применение транзитных узлов для концентрации нагрузки: а) — полносвязная сеть; б) — звездообразная сеть

Решение. Если интенсивность нагрузки каждой группы возрастает с 2,2 до 3,3 Эрл, то вероятность блокировки на сети, показанной на рис. 3,а, возрастает с 5 почти до 14%. Увеличение интенсивности нагрузки на 50% на сети, показанной на рис. 3.8,б, .вызывает возрастание вероятности блокировки на 400% (с 5% до 20%).

Задача №8 иллюстрирует два важных соображения, которые следует учитывать при проектировании сети. Как было показано, вероятность блокировки весьма чувствительна к увеличению интенсивности нагрузки, особенно когда каналы сильно загружены. Таким образом, поскольку в пучках большой емкости каналы используются более эффективно, они более чувствительны к возрастанию нагрузки, чем группа пучков меньшей емкости, рассчитанных так, чтобы обеспечить то же самое качество обслуживания. Кроме того, потеря одного и того же процента пропускной способности при передаче оказывает большее влияние на показатели работы пучков с большой емкостью, чем на показатели нескольких пучков с малой емкостью. В обоих случаях уязвимость пучков с большой емкостью обусловлена тем, что они имеют значительно меньший запас пропускной способности, чем совокупность пучков с малой емкостью.

Второй аспект анализа блокировки, продемонстрированный в примере,состоит в том, что результаты вычислений существенно зависят от точности данных об интенсивности, нагрузки. Кроме того, даже если получены точные данные измерений нагрузки, они не обеспечивают точных сведений об уровне возможного ее прироста. Таким образом, в полном смысле слова лишь с ограниченной степенью уверенности можно доверять результатам вычислений вероятностей блокировки. Основное значение этих методов анализа состоит в том, что они, по существу, предоставляют реальные средства для сравнения различных по конфигурации и емкости сетей. При заданном качестве обслуживания следует выбирать именно такой проект, который будет наиболее эффективным по затратам, даже если статистика нагрузки является гипотетической. Если сеть подвержена значительным колебаниям или быстрому росту нагрузки, то все эти факторы следует учитывать при сравнении вариантов проекта. Сеть с несколько большей начальной стоимостью может оказаться предпочтительнее, если она может быть легко сокращена или расширена для приспособления к непредвиденным объемам нагрузки.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4.

### *Тема № IV. Система с повторными вызовами*

Методы, разработанные для систем с явными потерями, можно использовать и в тех случаях, когда заблокированные вызовы не получают обслуживания. Во многих случаях в таких системах заблокированные вызовы стремятся возвратиться в систему в виде повторных вызовов. Некоторыми примерами таких систем являются: системы абонентских концентраторов; корпоративные соединительные линии между УТС и пучки соединительных линий УТС; вызовы, направленные к занятым телефонным номерам.

Постулируются три основных предположения, касающихся природы повторных вызовов:

1. Все заблокированные вызовы возвращаются в систему и в конце концов получают обслуживание, даже если для этого требуются многократные повторные попытки.
2. Интервалы времени между моментами поступления заблокированных вызовов и повторных попыток являются случайными и статистически независимыми друг от друга.
3. Система не устанавливает требования в очередь (очереди нет)— это делают сами абоненты путем непрерывного набора номера. Допускается, что система достигает статистического равновесия прежде, чем поступает повторный вызов.

Эти предположения во всей своей полноте характеризует нагрузку, создаваемую повторными вызовами, как статистически неотличимую от нагрузки, создаваемой первичными вызовами'. Следовательно, интенсивность заблокированных вызовов может быть просто сложена с интенсивностью первичных вызовов.

Рассмотрим систему с поступающим на него телетрафиком А. Если блокируется В% вызовов, то на втором этапе произойдет ВА повторных попыток. Однако из этих повторных вызовов В% будет вновь заблокировано. Продолжая эти рассуждения, можно определить общую интенсивность поступления вызовов А' после того, как система достигла статистического равновесия, в виде бесконечного ряда:

$$A' = A+A\cdot B+A\cdot B^2+ A\cdot B^2+ A\cdot B^2\_+ A\cdot B^2+ \cdots = A/(1-B),$$

где В — вероятность блокировки, полученная по методу расчета системы с явными потерями при интенсивности поступающей нагрузки А.

Полученное уравнение связывает поступающий телетрафик А′, включающий и повторные вызовы, с телетрафиком А первичных вызовов и вероятностью блокировки вызовов. Таким образом, это соотношение не дает средства для прямого определения А′ или В, поскольку каждая из этих величин выражается одна через другую. Однако желаемый результат можно получить путем итераций уравнения для системы с явными потерями. Сначала определяем оценку В, используя А, а затем вычисляем А'. Далее используем А' для получения нового значения В и уточненного значения А'. Продолжаем таким образом до тех пор, пока не получим искомых значений А' и В.

**ЗАДАЧА №9**

Какова вероятность блокировки пучка соединительных линий, связывающих УТС с центральной станцией, при емкости пучка 10 каналов и интенсивности поступающей нагрузки 7 Эрл? Какова вероятность блокировки, если число каналов увеличивается до 13? Принимаем, что характер повторных попыток для всех блокированных вызовов случайный.

Решение. Можно предположить, что интенсивность нагрузки, равную 7 Эрл, создает большое число абонентских установок УТС. Таким образом, подтверждается правомерность использования метода для бесконечно большого числа источников. Вероятность блокировки равна 8%. Таким образом, суммарная интенсивность поступающей нагрузки, включая повторные попытки, примерно равна 7,6Эрл. При N=10 и А=7Эрл вероятность блокировки системы с явными потерями равна 10% согласно Табл 3.1 Приложения. Еще две итерации эффективно обеспечивают сходимость при А=8 Эрл и В=12%. Если число линий в пучке увеличивается до 13, то вероятность блокировки системы с явными потерями равна 1,5%. Таким образом, первая аппроксимация интенсивности нагрузки с учетом повторных вызовов равна 7/0,985=7,1 Эрл. Следовательно, вероятность блокировки, включая всю нагрузку с учетом повторных вызовов, увеличивается лишь незначительно относительно 1,5%.

## *Тема № VI. Система с сохранением заблокированных вызовов*

Дисциплину обслуживания с сохранением заблокированных вызовов (СЗВ) следует отличать как от дисциплины с явными потерями (ЯП), так и от дисциплины обслуживания с ожиданием.

В отличие от ЯП в системе СЗВ источник продолжает требовать обслуживания независимо от того, имеет ли система свободный обслуживающий, прибор или нет. Если в течение того промежутка времени, когда источник требует обслуживания, освобождается какой-либо прибор, то он сразу же занимается данным источником вызова и тем самым делает его недоступным для других источников вызовов до того момента, до которого продолжалось бы обслуживание его системой, если бы вызов был ею обслужен немедленно при его поступлении. Следует отметить, что в системе с СЗВ все дообслуженные вызовы считаются потерянными. Однако в отличие от системы с ЯП в системе с СЗВ время обслуживания потерянных вызовов не равно нулю.

С другой стороны, дисциплину СЗВ следует отличать от обычной дисциплины с ожиданием. Отличие состоит в том, что в последнем случае источник вызовов начинает обслуживаться спустя какое-то время ожидания, при этом получает в свое распоряжение свободный прибор и начинает передачу информации. Именно с этого момента начинает отсчитываться время обслуживания вызова. В отличие от этого в системе СЭВ время обслуживания начинает отсчитываться с момента поступления вызова в систему независимо от того, имеет ли она в данный момент свободный и доступный данному источнику обслуживающий прибор или не имеет.

**ЗАДАЧА №10**

Какова вероятность клиппирования (частичной потери сигналов речи) речевого сигнала в системе TASI при 10 источниках и пяти каналах? Какова вероятность клиппирования в случае 100 источников и 50 каналов? Примем коэффициент активности каждого говорящего равным 0,4.

Решение. В первом случае вероятность клиппирования можно определить, как вероятность того, что пять или более источников заняты при пуассоновском процессе со средним числом занятых обслуживающих приборов A=0,4×10=4.

Вероятность клиппирования равна

$$\sum_{i=5}^{\infty} P_i(4) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} P_i(4) = 1 - e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{4^5}{5!}\right) = 0{,}37$$

При наличии 100 источников среднее число занятых каналов A=0,4×100=40. Речевой сегмент клиппируется, когда в одно и то же время окажутся активными 50 или более каналов. Таким образом, вероятность клиппирования можно определить следующим образом:

Вероятность клиппирования = $1 - \sum_{i=0}^{50} P_i(40) = 0{,}04$

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

***Тема V. Распределение нагрузки в полнодоступном пучке из N линий в системе с потерями. Распределение Энгсета.***

Поскольку входной поток сохраняет биномиальное распределение, рекуррентное соотношение $\dfrac{Q(x)}{Q(x-1)} = \dfrac{C_M^x}{C_M^{x-1}} \dfrac{\rho^x}{\rho^{x-1}} \dfrac{(1-\rho)^{M-x}}{(1-\rho)^{M-x+1}} = \dfrac{C_M^x}{C_M^{x-1}} \cdot q$ попрежнему применимо, необходимо лишь при подсчете параметра q учитывать потери в пучке ЭСЛ конечной емкости.

Новое значение параметра $q=t_{cp}/f_{cp}$ легко раскрыть, используя очевидное соотношение: $M-Y=\lambda f_{cp}$, имеющее место в СМО с явными потерями, когда вызовы, получившие отказ, выбывают из системы. Структура прохождения входного потока через коммутационное поле СМО показана на рис. 5.

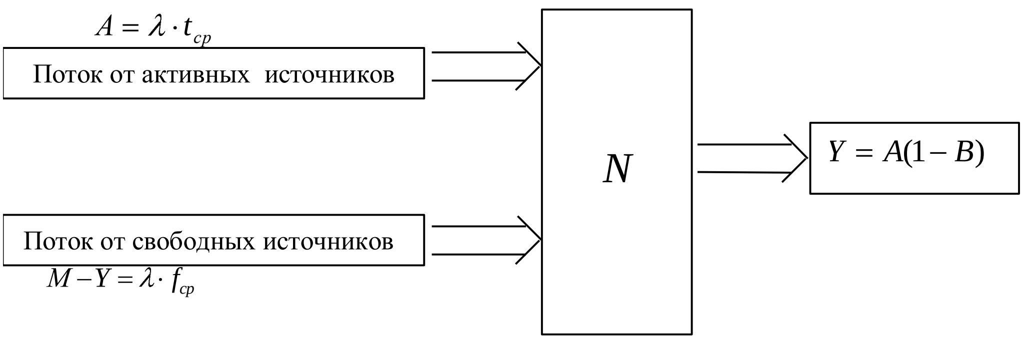



Рис. 5. – Прохождение потоков нагрузки через КС

Имеют место следующие очевидные соотношения:

$$q = \frac{t_{cp}}{f_{cp}} = \frac{A}{M-Y} = \frac{M\rho}{M - M\rho(1-B)} = \frac{\rho}{1-\rho(1-B)}, \qquad (19)$$

где B – вероятность блокировки вызова.

Используя соотношение (19), запишем рекуррентный ряд:

$$Q(1) = \frac{C_M^1}{C_M^0} \cdot q \cdot Q(0),$$

$$Q(2) = \frac{C_M^2}{C_M^0} \cdot q^2 \cdot Q(0), \qquad Q(3) = \frac{C_M^3}{C_M^0} \cdot q^3 \cdot Q(0)$$

и так далее, что объединяется общей формулой

$$Q(x) = \frac{C_M^x}{C_M^0} \cdot q^x \cdot Q(0). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в условие нормировки $\sum_{z=0}^{N} Q(z) = 1$, получим искомое распределение

$$Q(x) = \frac{C_M^x \cdot q^x}{\sum_{Z=0}^{N} C_M^z \cdot q^z}, \qquad (21)$$

называемое распределением Энгсета.

Для систем с конечным числом источников дополнительно к понятию потерь по вызовам вводится понятие потерь по времени. Потери по времени равны доле времени относительно величины всего контролируемого промежутка времени, в течение которой все N линий пучка ЭСЛ заняты:

$P_н(N)=Q(N)$.

Если $M \rightarrow \infty$, потери по времени равны потерям по вызовам (блокировке). Для системы с конечным M процент блокируемых вызовов меньше, что вызвано уменьшением интенсивности поступления вызовов по мере того, как число занятых источников увеличивается:

$B<Q(N)$.

Потери по времени определяют вероятность того, что все линии заняты; должен поступить вызов, чтобы произошла блокировка. Поэтому B (вероятность блокировки вызозовов) есть опасное время в системе с числом источников, уменьшенным на единицу (M–1):

$$B = G_{M-1} = \frac{C_{M-1}^N \cdot q^N}{\sum_{Z=0}^{N} C_{M-1}^z \cdot q^z}. \qquad (22)$$

Результаты расчетов по формуле (22) для некоторых величин параметров A и N сведены в табл. 3.2 (ПРИЛОЖЕНИЕ 2).

Согласно (21), величина вероятности блокировки B зависит от параметра q, который, в свою очередь есть функция от величины B, что постулировано выше.

**ЗАДАЧА №11**

Группа абонентов посылает требования на установление соединения с интенсивностью пять вызовов в час с одного телефонного аппарата (включая входящие и исходящие вызовы). Принимая среднее время обслуживания вызова равным 4 мин, определим, какова средняя интенсивность поступления вызовов от одного свободного источника. Какое число абонентов можно подключить через 12-канальный концентратор (мультиплексор), если максимально допустимая вероятность блокировки равна 1%?

Решение. Так как каждый абонент активен в течение 20 мин каждого часа, то интенсивность поступления вызовов от свободных источников λ = 5/40 = 0,125 вызовов в минуту. Поступающая нагрузка от М источников в предположении, что вся нагрузка обслуживается, равна 0,33М. Таким образом, следует найти из табл. 3.2 самое большое М, такое, чтобы 0,33М было меньше или равно максимальному значению поступающей нагрузки при В=1% и N=12. Интерполируя, получаем для М=21, что 12 приборов могут обслужить 7,11 Эрл при В=1%. Поскольку поступающая нагрузка равна 21×0,33 = 6,93, то 21 источник — приемлемое решение. Если подключается 22 источника, то поступающая нагрузка 7,26 Эрл больше, чем значение 7,04 Эрл, получаемое путем интерполяции по табл. 3.2 в качестве максимального значения поступающей нагрузки при В=1%.

**ЗАДАЧА №12**

Определим вероятность клиппирования (частичной потери сигналов речи) системы TASI. В этом случае, однако, необходимо использовать формулу расчета дли системы с сохранением заблокированных вызовов при конечном числе источников.

Решение. В этом примере рассматриваем только вероятность того, что в течение некоторого периода времени активная речь клиппируется до тех пор, пока не становится доступным канал. Таким образом, уравнение

$B_h = \sum_{n=N}^{M-1} C_{M-1}^{n} \rho^{n} (1-\rho)^{M-1-n}$, где $B_h$- вероятность блокировки при сохранении заблокированных вызовов, равная вероятности того, что вызов застаёт в системе другие N или более вызовов, дает желаемый ответ при использовании в качестве значения поступающей от одного источника нагрузки $\rho$=0,4. В первом случае при наличии 10 источников и пяти каналов

$$B_h = \sum_{n=5}^{9} C_9^n (0,4)^n (0,6)^{9-n} = 0,27 .$$

Во втором случае при 100 источниках и 50 обслуживающих приборах

$$B_h = \sum_{n=50}^{99} C_{99}^n (0,4)^n (0,6)^{99-n} = 0,023 .$$

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

***Тема № VI. Система с ожиданием***
***Классификация Д.Г. Кендалла***

Для упрощения описания конкретных систем Д.Г. Кендаллом был предложен и широко используется классификатор, составленный из буквенных сокращений, характеризующих различные свойства параметров СМО. На рис. 6. показан расширенный вариант формата классификатора.

При описании систем, содержащих либо неограниченную длину очереди (последняя позиция классификатора), либо неограниченные как длину очереди, так и число источников (две последние позиции классификатора), указанные одну или две позиции классификатора обычно исключают. Примером сокращенного формата может послужить описание трафика в шине Ethernet вида M/M/1, что означает систему с пуассоновским входным потоком, отрицательным экспоненциальным распределением времени ожидания и одним обслуживающим прибором.

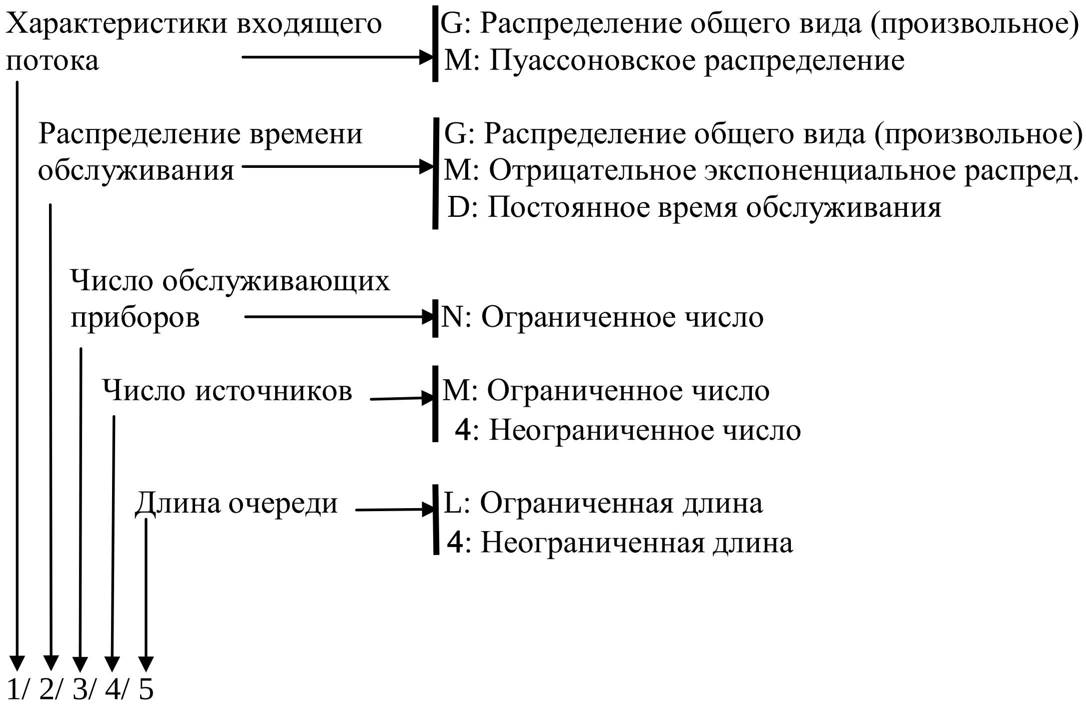



Рис. 6. – Обозначения, принятые в СМО с ожиданием

### *VII. Модель Эрланга M/M/N*

Примем согласно 3.4.6.1 следующие исходные допущения:

1) коммутационное устройство имеет N линий и полнодоступно,

2) поток требований пуассоновский с интенсивностью $\lambda$,

3) длительности занятий распределены экспоненциально со средним временем $t_{ср}$,

4) ожидающие требования обслуживаются в порядке поступления (дисциплина F.I.F.O.),

5) $A<N$, чтобы очередь не росла до бесконечности.

При принятых допущениях исходные данные (по аналогии с моделью Эрланга для системы с потерями) приобретают вид:

1) $x=0,1,2,\ldots,N,N+1,\ldots,\infty$;

2) если $x<N$, то занято x линий, но очереди ожидания нет;

3) если $x\geq N$, то занято N линий и $(x–N)$ заявок находятся в очереди ожидания;

4) интенсивности:

$$\lambda_x = A+x, \quad 0 \leq x \leq N–1,$$
$$\lambda_x = A+N, \quad x \geq N; \qquad (23)$$

5) вероятности переходов системы из состояния z в другие состояния:

$$P(z, z+1) = A/\lambda_Z, \quad 0 \leq z \leq N,$$
$$P(z, z–1) = z/\lambda_Z, \quad 0 \leq z \leq N, \qquad (24)$$
$$P(z, x) = 0, \quad z > N;$$

6) системы линейных уравнений состояний занятости:

$$\lambda_x\cdot Q(x) = \Sigma\lambda_{zi}\cdot P(z_i,x)\cdot Q(z_i), \quad z\in Z;$$
$$\Sigma Q(x) = 1, \quad x\in Z.$$

Найдем решения системы уравнений для различных областей существования переменной x:

а) для $0 \leq x < N$:

$$z_1=x–1, \quad \lambda_{Z1}=A+x–1, \quad P(z_1,x)=P(x–1,x)=A/\lambda_{Z1},$$
$$z_2=x+1, \quad \lambda_{Z2}=A+x+1, \quad P(z_2,x)=P(x+1,x)=z_2/\lambda_{Z2};$$

после подстановки найденных зависимостей в систему уравнений состояния занятости получим рекуррситную зависимость:

$$(A+x)\cdot Q(x)=A\cdot Q(x–1)+(x+1)\cdot Q(x+1),$$

дающую для различных x:

$$\begin{array}{ll} \text{для } x=0 & A\cdot Q(0)=Q(1), \\ x=1 & (A+1)\cdot Q(1) = A\cdot Q(0)+2Q(2) \text{ или } A\cdot Q(1) = 2Q(2), \\ x=2 & (A+2)\cdot Q(2) = A\cdot Q(1)+3Q(3) \text{ или } A\cdot Q(2) = 3Q(3), \qquad (25) \end{array}$$

-----------------------------------------------------------------------------

$$x=N–1 \quad (A+N–1)\cdot Q(N–1)=A\cdot Q(N–2)+N\cdot Q(N) \text{ или } A\cdot Q(N–1)=N\cdot Q(N).$$

Результатом такого представления, во-первых, служит значительное упрощение исходного рекуррентного соотношения:

$$A\cdot Q(x)=x\cdot Q(x+1).$$

Во-вторых, появляется возможность записать общую формулу для любого $0 \leq x < N$:

$$Q(x)=(A^x/x!)\cdot Q(0). \qquad (26)$$

В-третьих, найденная рекуррентность позволяет распространить результат на случай x=N, что следует из (25):

$$Q(N)=(A/N)\cdot Q(N-1)=(A^N/N!)\cdot Q(0)\ ; \qquad (27)$$

б) для области $x \geq N$ справедливо равенство $\lambda_x=A+N$, что позволяет определить переходные вероятности:

для $z_1=x-1$, $\lambda_{Z1}=A+N$, $P(z_1,x)=P(x-1,x)=A/\lambda_{Z1}$,

для $z_2=x+1$, $\lambda_{Z2}=A+N$, $P(z_2,x)=P(x+1,x)=N/\lambda_{Z2}$.

Подстановка найденных величин в систему уравнений состояния занятости дает рекуррентное соотношение:

$$(A+N)\cdot Q(x)=A\cdot Q(x+1)+N\cdot Q(x+1),$$

упрощаемое до формы:

$$A\cdot Q(x)=N\cdot Q(x+1),$$

и позволяющее записать общую формулу вероятности состояния занятости в виде:

$$Q(x)=(A/N)^{x-N}\cdot Q(N), \qquad (28)$$

где $Q(N)=(A^N/N!)\cdot Q(0)$.

Таким образом, единственной неизвестной величиной в формулах (26) и (28) остается величина Q(0). Найти ее позволяет условие нормировки:

$$\sum_{x=0}^{\infty} Q(x) = 1 = \sum_{x=0}^{N} \frac{A^x}{x!}\cdot Q(0) + \sum_{x=N+1}^{\infty} (\frac{A}{N})^{x-N} \cdot \frac{A^N}{N}\cdot Q(0) =$$

$$= Q(0)\cdot(\sum_{x=0}^{N}\frac{A^x}{x!} + \frac{A^N}{N!}\sum_{x=N+1}^{\infty}(\frac{A}{N})^x) = Q(0)\cdot(\sum_{x=0}^{N}\frac{A^x}{x!} + \frac{A^{N+1}}{N!\cdot(N-A)}). \qquad (29)$$

Последнее равенство позволяет записать результат в виде:

$$Q(0) = \left(\sum_{x=0}^{N}\frac{A^x}{x!} + \frac{A^{N+1}}{N!\cdot(N-A)}\right)^{-1}.$$

Таким образом, формулы (26), (28), (29) полностью описывают вероятность состояния занятости в системе с ожиданием.

Однако полученный результат мало пригоден на практике. Для системы с очередями определяющую роль играет не столько знание вероятности состояния, сколько знание времени ожидания.

Среднее время ожидания может быть определено как математическое ожидание случайной величины «время ожидания t»:

$$\overline{t_w} = \int_0^{\infty} t\cdot W(t)\cdot dt, \qquad (30)$$

где W(t) − плотность вероятности случайной величины t.

Таким образом, задача сводится к поискам закона распределения времени ожидания в системе.

В теории очередей этот закон определяется в нестандартной, дополняющей, форме:

$$P(>t) = 1 - F(t), \qquad (31)$$

где P(>t) − вероятность того, что поступившее требование будет ожидать обслуживания в течение времени, большего величины t, $F(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t)dt$ − интегральный закон распределения (вероятность того, что время ожидания не превышает величину t.

Распределение (31) может быть получено по формуле полной вероятности для любого возникающего требования:

$$P(>t) = \sum_{x=N}^{\infty} Q(x) \cdot P_x(>t), \qquad (32)$$

где $P_x(>t) = \sum_{k=0}^{x-N} P_k(\lambda' t)$.

Величина $P_x(>t)$ имеет смысл условной вероятности того, что время ожидания обслуживания для некоторого требования с порядковым номером (x+1) окажется больше величины «t» при условии, что требование застает при своем появлении x ≥ N более ранних, а следовательно, более приоритетных вызовов, (x–N) из которых организованы в очередь с дисциплиной F.I.F.O.

Здесь величина $P_k(\lambda' t)$ означает вероятность того, что за время t завершатся k вызовов (сеансов связи):

$$P_k(\lambda' t) = \frac{(\lambda' t)}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \qquad (33)$$

где $\lambda' = N/t_{ср}$ − частота обслуживания требований пуассоновского входного потока в системе с ожиданием при полностью задействованной емкости пучка ЭСЛ (x ≥ N).

Производя элементарные действия над (32) по перестановке операций суммирования и уточнению их пределов, приходим к следующему результату:

$$P(>t) = \sum_{x=N}^{\infty} Q(x) \sum_{k=0}^{x-N} P_k(\lambda' t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\lambda' t) \sum_{x=N+k}^{\infty} Q(x).$$

После подстановки соотношений (28) и (33) в полученный результат формула для вычисления параметра P(>t) приобретает вид:

$$P(>t) = Q(N) \cdot e^{-\lambda' t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda' t)^k}{k!} \sum_{x=N}^{\infty} \left( \frac{A}{N} \right)^{x-N}.$$

Свертывая бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и учитывая ранее введенное обозначение $\lambda' = N/t_{ср}$, окончательно приходим к соотношению:

$$P(>t) = P(>0) \cdot e^{-\frac{(N-A)}{t_{cp}} \cdot t}, \qquad (34)$$

где $P(>0) = \dfrac{N}{N-A} \cdot Q(N)$ − вероятность ожидания (вероятность наличия очереди на обслуживание);

P(>t) − вероятность того, что время ожидания в очереди превысит величину t.

Вероятность P(>0) представляет собой весьма важный параметр, характеризующий систему с ожиданием. С учетом соотношений (28), (29) формула для вычисления P(>0) принимает вид, известный в теории телетрафика как вторая формула Эрланга (С-формула Эрланга):

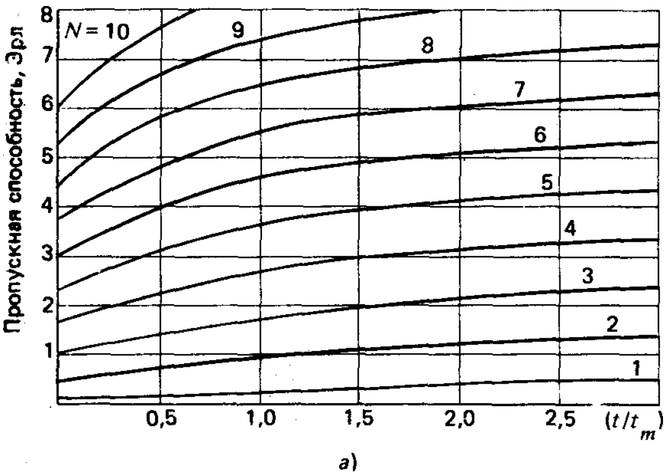
$$P(>0) = E_{2,N}(A) = C = \frac{N \cdot E_{1,N}(A)}{N - A \cdot (1 - E_{1,N}(A))}, \qquad (35)$$

где $E_{1,N}(A)$ − первая формула Эрланга для системы с потерями (14), так называемая В-формула.

Формула (35) иллюстрирует классическое определение вероятности события «наличие очереди». Определение соответствует модели системы с потерями, адекватной системе с ожиданием по основным параметрам, но без очередей. В такой системе при величине поступающей нагрузки А и емкости пучка ЭСЛ коммутационной системы равной N, имеется вероятность блокировки величиной $B = E_{1,N}(A)$. Обслуженный трафик подсчитывается по формуле Y = =A·(1–B).

Максимальный поток, который может обслужить коммутационная система из N ЭСЛ, равен N Эрл. Разница (N–Y) составляет как бы максимальный резерв коммутационной системы, позволяющей ей обеспечить объявленные среднестатистические параметры.

Наличие в системе очереди означает априори, что емкость коммутационной системы уже использована максимально. В таком случае очередь формируется за счет избыточного потока, равного (N·B). Эта величина дает количество, благоприятное событию «наличие очереди» (числитель формулы (35)). Количество же, соответствующее всем возможным комбинациям составляющих потока (знаменатель формулы (35)), определяется величиной резерва коммутационной системы (N–Y).Уравнение (34) определяет вероятность того, что вызов, поступающий в случайно выбранный момент времени, ожидает не более $t/t_{cp}$ длительностей обслуживания. На рис. 3.6 представлено соотношение (34) в виде пропускной способности различного числа обслуживающих устройств как функции допустимого времени ожидания. Для заданной нормы времени ожидания $t/t_{cp}$ на рис.7, а интенсивность нагрузки максимальна, если норма ожидания будет превышена только для 10% поступающих вызовов.



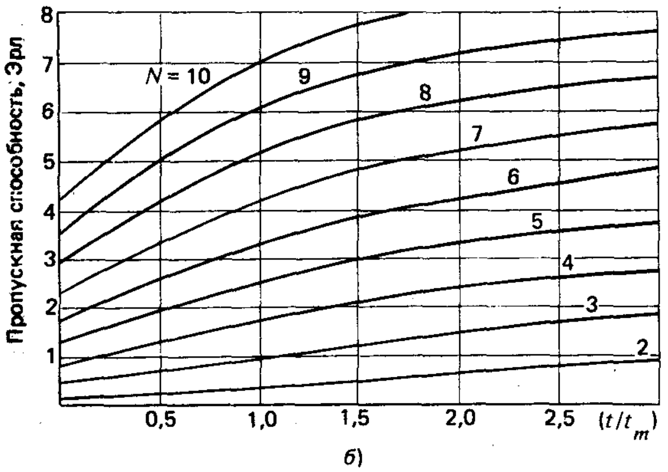




Рис. 7. Пропускная способность системы с ожиданием с несколькими обслуживающими приборами в случае экспоненциального распределения длительности обслужи вания:

*а* — вероятность ожидания свыше времени (, *p(>t)* = 10%;

б — вероятность ожидания свыше времени (, *p(>t)* =1%

Аналогично на рис. 7,б интенсивность нагрузки максимальна, если норма ожидания оказывается превышенной только для 1% поступающих вызовов. Заметим, что при p(>0) = =0,01 системы обслуживания не достигают своей максимальной пропускной способности, если только допустимое время ожидания не оказывается в несколько раз больше, чем $t_{ср}$ .

Согласно формулам (31), (34), распределение времени ожидания приобретает вид:

$$\begin{cases} F(t) = 1 - P(>0) \cdot e^{-\frac{N-A}{t_{cp}} \cdot t}, \ t > 0, \\ W(t) = \dfrac{P(>0) \cdot (N-A)}{t_{cp}} \cdot e^{-\frac{(N-A)}{t_{cp}} \cdot t}, \ t > 0. \end{cases} \quad (36)$$

Таким образом, распределение времени ожидания имеет форму, близкую к классической экспоненциальной $W(t)=\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot t}$ с интенсивностью, равной $(N-A)/t_{cp}$.

Среднее время ожидания определим по формуле (30):

$$\bar{t}_w = \int_0^{\infty} t \cdot \frac{P(>0)\cdot(N-A)}{t_{cp}} \cdot e^{-\frac{(N-A)}{t_{cp}}\cdot t} dt = \frac{P(>0)\cdot t_{cp}}{(N-A)}. \qquad (37)$$

Величину $t_w= t_{cp}/(N-A)$, входящую в формулы (36), (37), можно трактовать как среднее время пребывания заявок в очереди при усреднении только среди заявок, находящихся в очереди.

В свою очередь величина $\bar{t}_w$ предполагает усреднение среди полного ансамбля заявок:

$$\bar{t}_w = P(>0)\cdot t_w,$$

где $t_w = \dfrac{t_{cp}}{(N-A)}$. (38)

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

***Тема № VI. Система с ожиданием***

Для лучшего понимания смысла введенных параметров проанализируем формулу (38). Для этого найдем величину, обратную $t_w$:

$$\frac{1}{t_w} = \frac{N}{t_{cp}} - \frac{A}{t_{cp}}.$$

Нетрудно заметить, что данное равенство интерпретируется как комбинация трех интенсивностей:

- $\lambda = \dfrac{A}{t_{cp}}$ – частота поступления вызовов,
- $\lambda_w = \dfrac{1}{t_w}$ – частота рассасывания очереди,
- $\lambda' = \dfrac{N}{t_{cp}} = \lambda + \lambda_w$ – частота обслуживания.

Умножая обе части полученного равенства $\lambda' = \lambda + \lambda_w$ на $\bar{t}_w$, получим:

$$\lambda' \cdot \bar{t}_w = \lambda \cdot \bar{t}_w + \lambda_w \cdot \bar{t}_w.$$

Величину ($\lambda \cdot \bar{t}_w$) называют емкостью накопителя вызовов или средней длиной очереди:

$$l = \lambda \cdot \bar{t}_w = \lambda \cdot \bar{t}_w \cdot P(>0) = \frac{A \cdot t_w}{t_{cp}} \cdot P(>0). \qquad (39)$$

Слагаемое ($\lambda_w \cdot \bar{t}_w$) равно вероятности ожидания $P(>0)$:

$$\lambda_w \cdot \bar{t}_w = \frac{t_w \cdot P(>0)}{t_w} = P(>0). \qquad (40)$$

Таким образом, выполняется соотношение:

$$\lambda' \cdot \bar{t}_w = P(>0) + l. \qquad (41)$$

Среднее время пребывания требования в системе легко вычислить, суммируя время ожидания $t_w$ и среднее время обслуживания $t_{cp}$:

$$t_{np} = \bar{t}_w + t_{cp} = t_{cp} \cdot \left(1 + \frac{P(>0)}{N - A}\right). \qquad (42)$$

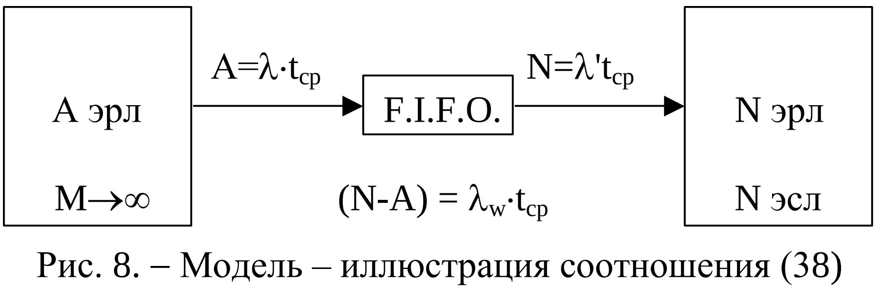



Рис. 8. – Модель – иллюстрация соотношения (38)

Среднее число требований, находящихся в системе, вычисляется по теореме Литтла и равно сумме поступающего телетрафика и средней длины очереди:

$$m_s = \lambda \cdot t_{пр} = l + A. \tag{43}$$

В случае наличия в системе единственного обслуживающего прибора (N=1; однолинейная СМО) имеют место следующие соотношения:

$$E_{1,1}(A) = \frac{A}{1+A}, \tag{44}$$

$$P(>0) = A, \tag{44,а}$$

$$l = \frac{A^2}{1-A}, \tag{44,б}$$

$$\bar{t}_w = t_{cp} \cdot \frac{A}{1-A}, \tag{44,в}$$

$$t_{пр} = \frac{t_{cp}}{1-A}, \tag{44,г}$$

$$m_s = \frac{A}{1-A}. \tag{44,д}$$

**ЗАДАЧА №13**

Пучок из 10 соединительных линий обслуживает нагрузку 10 Эрл. Полагая, что среднее время обслуживания одного сообщения равно 90 секунд, а допустимая продолжительность ожидания обслуживания составляет 12 с., вычислить все основные параметры системы: вероятность наличия очереди; среднее время обслуживания при усреднении как по всему ансамблю поступивших требований, так и при усреднении только среди заявок, находящихся в очереди; вероятность ожидания в очереди в течении времени, больше допустимого, а также длину очереди и количество требований на обслуживание, одновременно находящихся в системе.

*Решение.* По таблице Эрланга (табл. 3.1, Приложение 1) находим $E_{10}(5)$=0,0184.

Отсюда, согласно (40) $P(>0)$=0,031. Применяя (38), легко найти $t_w$=18 с, что позволяет вычислить $\bar{t}_w$=0,65 с при использовании (37). Формула (34) даёт возможность вычислить $P(>12)$=0,0185. Длина очереди находится по формуле (39): l=0,036 мест ожидания, а количество требований на обслуживание, одновременно находящихся в системе согласно теореме Литтла согласно (43) равно $m_s$=5,036 требований.

**ЗАДАЧА №14**

Сеть коммутации сообщений должна быть спроектирована таким образом, чтобы обеспечить 95%-ное использование своих линий передачи. Предполагая, что длины сообщений подчиняются экспоненциальному распределению, а интенсивность их поступления составляет 10 сообщений в минуту, определим среднее время ожидания и вероятность ожидания свыше 5 мин.

Решение. Предположим, что в сети коммутации сообщений между каждой парой узлов имеется отдельный канал связи. Таким образом, имеется один обслуживающий прибор и отдельная очередь к каждой линии передачи. Так как по условию вероятность р должна быть равна 0,96, а $\lambda$ составляет 10 вызовов в минуту, то среднюю длительность обслуживания можно определить как $t_{ср}$ = 0,95/10= 0,095 мин. Среднее время ожидания (не включая время обслуживания) легко определить по формуле

$\bar{t}_w$ = p(>0)$t_{ср}$/<N — A) = 0,95 0,095/(1—0,95) = 1,805 мин.

Используя уравнение (9.25), можно определить вероятность ожидания свыше 5 мин

$p(>5) = 0,95\ e^{-(1-0,95)\ 5/0,095} = 0,068$.

Таким образом, 6,8% сообщений задерживаются в очереди более, чем на 5 мин.

ЛИТЕРАТУРА


1. Винокуров В.М. Сети связи и системы коммутации. [Электронный ресурс]: учеб. пособие /Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, ISBN 5-86889-215-1, 2006. – 304 с. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/694.
2. Винокуров В.М. Сети связи и системы коммутации: учеб. пособие /Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, ISBN 5-86889-215-1, 2006. – 304 с.(190 экз)
3. Винокуров В.М. Сети связи и системы коммутации. Учебное пособие, раздел 1-Томск, ТМЦДО, 2004 - 238с.
4. Винокуров В.М. Сети связи и системы коммутации. [Электронный ресурс]:: учебно-методическое пособие /Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники. – Томск :Факультет дистанционного образования, 2012. – 35 с. Режим доступа: http://edu.tusur.ru/training/publications/1497.
5. Цифровая телефония : Пер. с англ. / Дж. К. Беллами; Ред. пер. А. Н. Берлин, Ред. пер. Ю. Н. Чернышов. - 3-е изд. - М. : Эко-Трендз, 2004. - 640 с. : ил. - (Библиотека МТС). - Предм. указ.: с. 612-618. -Библиогр.: с. 619-639. - ISBN 5-88405-059-3 : (21 экз).

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 3.1 **Максимальная интенсивность поступающей нагрузки в зависимости от $B$ и $N$ ***

| N | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .0001 | .0005 | .001 | .005 | .010 | .020 | .053 | .111 | .176 | .250 | .429 | .667 |
| 2 | .014 | .032 | .046 | .105 | .153 | .223 | .381 | .595 | .796 | 1.00 | 1.45 | 2.00 |
| 3 | .087 | .152 | .194 | .340 | .455 | .602 | .899 | 1.27 | 1.60 | 1.93 | 2.63 | 3.48 |
| 4 | .235 | .362 | .439 | .701 | .869 | 1.09 | 1.62 | 2.05 | 2.50 | 2.95 | 3.89 | 5.02 |
| 5 | .452 | .649 | .762 | 1.13 | 1.36 | 1.66 | 2.22 | 2.88 | 3.45 | 4.01 | 5.10 | 6.60 |
| 6 | .728 | .996 | 1.15 | 1.62 | 1.91 | 2.28 | 2.96 | 3.76 | 4.44 | 5.11 | 6.51 | 8.19 |
| 7 | 1.05 | 1.39 | 1.58 | 2.16 | 2.50 | 2.94 | 3.74 | 4.67 | 5.46 | 6.23 | 7.86 | 9.80 |
| 8 | 1.42 | 1.83 | 2.05 | 2.73 | 3.13 | 3.63 | 4.54 | 5.60 | 6.50 | 7.37 | 9.21 | 11.4 |
| 9 | 1.83 | 2.30 | 2.56 | 3.33 | 3.78 | 4.34 | 5.37 | 6.55 | 7.55 | 8.52 | 10.6 | 13.0 |
| 10 | 2.26 | 2.80 | 3.09 | 3.96 | 4.46 | 5.08 | 6.22 | 7.51 | 8.62 | 9.68 | 12.0 | 14.7 |
| 11 | 2.72 | 3.33 | 3.65 | 4.61 | 5.16 | 5.84 | 7.08 | 8.49 | 9.69 | 10.9 | 13.3 | 16.3 |
| 12 | 3.21 | 3.88 | 4.23 | 5.28 | 5.88 | 6.61 | 7.95 | 9.47 | 10.8 | 12.0 | 14.7 | 18.0 |
| 13 | 3.71 | 4.45 | 4.83 | 5.96 | 6.61 | 7.40 | 8.83 | 10.5 | 11.9 | 13.2 | 16.1 | 19.6 |
| 14 | 4.24 | 5.03 | 5.45 | 6.66 | 7.35 | 8.20 | 9.73 | 11.5 | 13.0 | 14.4 | 17.5 | 21.2 |
| 15 | 4.78 | 5.63 | 6.08 | 7.38 | 8.11 | 9.01 | 10.6 | 12.5 | 14.1 | 15.6 | 18.9 | 22.9 |
| 16 | 5.34 | 6.25 | 6.72 | 8.10 | 8.88 | 9.83 | 11.5 | 13.5 | 15.2 | 16.8 | 20.3 | 24.5 |
| 17 | 5.91 | 6.88 | 7.38 | 8.83 | 9.65 | 10.7 | 12.5 | 14.5 | 16.3 | 18.0 | 21.7 | 26.2 |
| 18 | 6.50 | 7.52 | 8.05 | 9.58 | 10.4 | 11.5 | 13.4 | 15.5 | 17.4 | 19.2 | 23.1 | 27.8 |
| 19 | 7.09 | 8.17 | 8.72 | 10.3 | 11.2 | 12.3 | 14.3 | 16.6 | 18.5 | 20.4 | 24.5 | 29.5 |
| 20 | 7.70 | 8.83 | 9.41 | 11.1 | 12.0 | 13.2 | 15.2 | 17.6 | 19.6 | 21.6 | 25.9 | 31.2 |
| 21 | 8.32 | 9.50 | 10.1 | 11.9 | 12.8 | 14.0 | 16.2 | 18.7 | 20.8 | 22.8 | 27.3 | 32.8 |
| 22 | 8.95 | 10.2 | 10.8 | 12.6 | 13.7 | 14.9 | 17.1 | 19.7 | 21.9 | 24.1 | 28.7 | 34.5 |
| 23 | 9.58 | 10.9 | 11.5 | 13.4 | 14.5 | 15.8 | 18.1 | 20.7 | 23.0 | 25.3 | 30.1 | 36.1 |
| 24 | 10.2 | 11.6 | 12.2 | 14.2 | 15.3 | 16.6 | 19.0 | 21.8 | 24.2 | 26.5 | 31.6 | 37.8 |
| 25 | 10.9 | 12.3 | 13.0 | 16.0 | 16.1 | 17.5 | 20.0 | 22.8 | 25.3 | 27.7 | 33.0 | 39.4 |
| 26 | 11.5 | 13.0 | 13.7 | 15.8 | 17.0 | 18.4 | 20.9 | 23.9 | 26.4 | 28.9 | 34.4 | 41.1 |
| 27 | 12.2 | 13.7 | 14.4 | 16.6 | 17.8 | 19.3 | 21.9 | 24.9 | 27.6 | 30.2 | 35.8 | 42.8 |
| 28 | 12.9 | 14.4 | 15.2 | 17.4 | 18.6 | 20.2 | 22.9 | 26.0 | 28.7 | 31.4 | 37.2 | 44.4 |
| 29 | 13.6 | 15.1 | 15.9 | 18.2 | 19.5 | 21.0 | 23.8 | 27.1 | 29.9 | 32.6 | 38.6 | 46.1 |
| 30 | 14.2 | 15.9 | 16.7 | 19.0 | 20.3 | 21.9 | 24.8 | 28.1 | 31.0 | 33.8 | 40.0 | 47.7 |
| 31 | 14.9 | 16.6 | 17.4 | 19.9 | 21.2 | 22.8 | 25.8 | 29.2 | 32.1 | 35.1 | 41.5 | 49.4 |
| 32 | 15.6 | 17.3 | 18.2 | 20.7 | 22.0 | 23.7 | 26.7 | 30.2 | 33.3 | 36.3 | 42.9 | 51.1 |
| 33 | 16.3 | 18.1 | 19.0 | 21.5 | 22.9 | 24.6 | 27.7 | 31.3 | 34.4 | 37.5 | 44.3 | 52.7 |
| 34 | 17.0 | 18.8 | 19.7 | 22.3 | 23.8 | 25.5 | 28.7 | 32.4 | 35.6 | 38.8 | 45.7 | 54.4 |
| 35 | 17.8 | 19.6 | 20.5 | 23.2 | 24.6 | 26.4 | 29.7 | 33.4 | 36.7 | 40.0 | 47.1 | 56.0 |
| 36 | 18.5 | 20.3 | 21.3 | 24.0 | 25.5 | 27.3 | 30.7 | 34.5 | 37.9 | 41.2 | 48.6 | 57.7 |
| 37 | 19.2 | 21.1 | 22.1 | 24.8 | 26.4 | 28.3 | 31.6 | 35.6 | 39.0 | 42.4 | 50.0 | 59.4 |
| 38 | 19.9 | 21.9 | 22.9 | 25.7 | 27.3 | 29.2 | 32.6 | 36.6 | 40.2 | 43.7 | 51.4 | 61.0 |
| 39 | 20.6 | 22.6 | 23.7 | 26.5 | 28.1 | 30.1 | 33.6 | 37.7 | 41.3 | 44.9 | 52.8 | 62.7 |
| 40 | 21.4 | 23.4 | 24.4 | 27.4 | 29.0 | 31.0 | 34.6 | 38.8 | 42.5 | 46.1 | 54.2 | 64.4 |
| 41 | 22.1 | 24.2 | 25.2 | 28.2 | 29.9 | 31.9 | 35.6 | 39.9 | 43.6 | 47.4 | 55.7 | 66.0 |
| 42 | 22.8 | 25.0 | 26.0 | 29.1 | 30.8 | 32.8 | 36.6 | 40.9 | 44.8 | 48.6 | 57.1 | 67.7 |
| 43 | 23.6 | 25.7 | 26.8 | 29.9 | 31.7 | 33.8 | 37.6 | 42.0 | 45.9 | 49.9 | 58.5 | 69.3 |
| 44 | 24.3 | 26.5 | 27.6 | 30.8 | 32.5 | 34.7 | 38.6 | 43.1 | 47.1 | 51.1 | 59.9 | 71.0 |
| 45 | 25.1 | 27.3 | 28.4 | 31.7 | 33.4 | 35.6 | 39.6 | 44.2 | 48.2 | 52.3 | 61.3 | 72.7 |
| 46 | 25.8 | 28.1 | 29.3 | 32.5 | 34.3 | 36.5 | 40.5 | 45.2 | 49.4 | 53.6 | 62.8 | 74.3 |
| 47 | 26.6 | 28.9 | 30.1 | 33.4 | 35.2 | 37.5 | 41.5 | 46.3 | 50.6 | 54.8 | 64.2 | 76.0 |
| 48 | 27.3 | 29.7 | 30.9 | 34.2 | 36.1 | 38.4 | 42.5 | 47.4 | 51.7 | 56.0 | 65.6 | 77.7 |
| 49 | 28.1 | 30.5 | 31.7 | 35.1 | 37.0 | 39.3 | 43.5 | 48.5 | 52.9 | 57.3 | 67.0 | 79.3 |
| 50 | 28.9 | 31.3 | 32.5 | 36.0 | 37.9 | 40.3 | 44.5 | 49.6 | 54.0 | 58.3 | 68.5 | 81.0 |

* $N$ — число обслуживающих приборов; цифры вверху колонок показывают вероятность потерь $B$, %

| N | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 29.6 | 32.1 | 33.3 | 36.9 | 38.8 | 41.2 | 45.5 | 50.6 | 55.2 | 59.7 | 69.9 | 82.7 |
| 52 | 30.4 | 32.9 | 34.2 | 37.7 | 39.7 | 42.1 | 46.5 | 51.7 | 56.3 | 61.0 | 71.3 | 84.3 |
| 53 | 31.2 | 33.7 | 35.0 | 38.6 | 40.6 | 43.1 | 47.5 | 52.8 | 57.5 | 62.2 | 72.7 | 86.0 |
| 54 | 31.9 | 34.5 | 35.8 | 39.5 | 41.5 | 44.0 | 48.5 | 53.9 | 58.7 | 63.5 | 74.2 | 87.6 |
| 55 | 32.7 | 35.3 | 36.6 | 40.4 | 42.4 | 44.9 | 49.5 | 55.0 | 59.8 | 64.7 | 75.6 | 89.3 |
| 56 | 33.5 | 36.1 | 37.5 | 41.2 | 43.3 | 45.9 | 50.5 | 56.1 | 61.0 | 65.9 | 77.0 | 91.0 |
| 57 | 34.3 | 36.9 | 38.3 | 42.1 | 44.2 | 46.8 | 61.5 | 67.1 | 62.1 | 67.7 | 78.4 | 92.6 |
| 58 | 35.1 | 37.8 | 39.1 | 43.0 | 45.1 | 47.8 | 62.6 | 68.2 | 63.3 | 68.4 | 79.8 | 94.3 |
| 59 | 35.8 | 38.6 | 40.0 | 43.9 | 46.0 | 48.7 | 53.6 | 59.3 | 64.5 | 69.7 | 81.3 | 96.0 |
| 60 | 36.6 | 39.4 | 40.8 | 44.8 | 46.9 | 49.6 | 54.6 | 60.4 | 65.6 | 70.9 | 82.7 | 97.6 |
| 61 | 37.4 | 40.2 | 41.6 | 45.6 | 47.9 | 50.6 | 55.6 | 61.5 | 66.8 | 72.1 | 84.1 | 99.3 |
| 62 | 38.2 | 41.0 | 42.5 | 46.5 | 48.8 | 51.5 | 56.6 | 62.6 | 68.0 | 73.4 | 85.5 | 101. |
| 63 | 39.0 | 41.9 | 43.3 | 47.4 | 49.7 | 52.5 | 57.6 | 63.7 | 69.1 | 74.6 | 87.0 | 103. |
| 64 | 39.8 | 42.7 | 44.2 | 48.3 | 50.6 | 53.4 | 58.6 | 64.8 | 70.3 | 75.9 | 88.4 | 104. |
| 65 | 40.6 | 43.5 | 45.0 | 49.2 | 51.5 | 54.4 | 59.6 | 65.8 | 71.4 | 77.1 | 89.8 | 106. |
| 66 | 41.4 | 44.4 | 45.8 | 50.1 | 52.4 | 55.3 | 60.6 | 66.9 | 72.6 | 78.3 | 91.2 | 108. |
| 67 | 42.2 | 45.2 | 46.7 | 51.0 | 53.4 | 56.3 | 61.6 | 68.0 | 73.8 | 79.6 | 92.7 | 109. |
| 68 | 43.0 | 46.0 | 47.5 | 51.9 | 54.3 | 57.2 | 62.6 | 69.1 | 74.9 | 80.8 | 94.1 | 111. |
| 69 | 43.8 | 46.8 | 48.4 | 52.8 | 55.2 | 58.2 | 63.7 | 70.2 | 76.1 | 82.1 | 95.5 | 113. |
| 70 | 44.6 | 47.7 | 49.2 | 53.7 | 56.1 | 59.1 | 64.7 | 71.3 | 77.3 | 83.3 | 96.9 | 114. |
| 71 | 45.4 | 48.5 | 50.1 | 54.6 | 57.0 | 60.1 | 65.7 | 72.4 | 78.4 | 84.6 | 98.4 | 116. |
| 72 | 46.2 | 49.4 | 50.9 | 55.5 | 58.0 | 61.0 | 66.7 | 73.5 | 79.6 | 85.8 | 99.8 | 118. |
| 73 | 47.0 | 50.2 | 51.8 | 56.4 | 58.9 | 62.0 | 67.7 | 74.6 | 80.8 | 87.0 | 101. | 119. |
| 74 | 47.8 | 51.0 | 52.7 | 57.3 | 59.8 | 62.9 | 68.7 | 75.6 | 81.9 | 88.3 | 103. | 121. |
| 75 | 48.6 | 51.9 | 53.6 | 58.2 | 60.7 | 63.9 | 69.7 | 76.7 | 83.1 | 89.5 | 104. | 123. |
| 76 | 49.4 | 52.7 | 54.4 | 59.1 | 61.7 | 64.9 | 70.8 | 77.8 | 84.2 | 90.8 | 105. | 124. |
| 77 | 50.2 | 53.6 | 55.2 | 60.0 | 62.6 | 65.8 | 71.8 | 78.9 | 85.4 | 92.0 | 107. | 126. |
| 78 | 51.1 | 54.4 | 56.1 | 60.9 | 63.5 | 66.8 | 72.8 | 80.0 | 86.6 | 93.3 | 108. | 128. |
| 79 | 51.9 | 55.3 | 56.9 | 61.8 | 64.4 | 67.7 | 73.8 | 81.1 | 87.7 | 94.5 | 110. | 129. |
| 80 | 52.7 | 56.1 | 57.8 | 62.7 | 65.4 | 68.7 | 74.8 | 82.2 | 88.9 | 95.7 | 111. | 131. |
| 81 | 53.5 | 56.9 | 58.7 | 63.6 | 66.3 | 69.6 | 75.8 | 83.3 | 90.1 | 97.0 | 113. | 133. |
| 82 | 54.3 | 57.8 | 59.5 | 64.5 | 67.2 | 70.6 | 76.9 | 84.4 | 91.2 | 98.2 | 114. | 134. |
| 83 | 55.1 | 58.6 | 60.4 | 65.4 | 68.2 | 71.6 | 77.9 | 85.5 | 92.4 | 99.5 | 115. | 136. |
| 84 | 56.0 | 59.5 | 61.3 | 66.3 | 69.1 | 72.5 | 78.9 | 86.6 | 93.6 | 101. | 117. | 138. |
| 85 | 56.8 | 60.4 | 62.1 | 67.2 | 70.0 | 73.5 | 79.9 | 87.7 | 94.7 | 102. | 118. | 139. |
| 86 | 57.6 | 61.2 | 63.0 | 68.1 | 70.9 | 74.5 | 80.9 | 88.8 | 95.9 | 103. | 120. | 141. |
| 87 | 58.4 | 62.1 | 63.9 | 69.0 | 71.9 | 75.4 | 82.0 | 89.9 | 97.1 | 104. | 121. | 143. |
| 88 | 59.3 | 62.9 | 64.7 | 69.9 | 72.8 | 76.4 | 83.0 | 91.0 | 98.2 | 106. | 123. | 144. |
| 89 | 60.1 | 63.8 | 65.6 | 70.8 | 73.7 | 77.3 | 84.0 | 92.1 | 99.4 | 107. | 124. | 146. |
| 90 | 60.9 | 64.6 | 66.5 | 71.8 | 74.7 | 78.3 | 85.0 | 93.1 | 101. | 108. | 126. | 148. |
| 91 | 61.8 | 65.5 | 67.4 | 72.7 | 75.6 | 79.3 | 86.0 | 94.2 | 102. | 109. | 127. | 149. |
| 92 | 62.6 | 66.3 | 68.2 | 73.6 | 76.6 | 80.2 | 87.1 | 95.3 | 103. | 111. | 128. | 151. |
| 93 | 63.4 | 67.2 | 69.1 | 74.5 | 77.5 | 81.2 | 88.1 | 96.4 | 104. | 112. | 130. | 153. |
| 94 | 64.2 | 68.1 | 70.0 | 75.4 | 78.4 | 82.2 | 89.1 | 97.5 | 105. | 113. | 131. | 154. |
| 95 | 65.1 | 68.9 | 70.9 | 76.3 | 79.4 | 83.1 | 90.1 | 98.6 | 106. | 114. | 133. | 156. |
| 96 | 65.9 | 69.8 | 71.7 | 77.2 | 80.3 | 84.1 | 91.1 | 99.7 | 108. | 116. | 134. | 158. |
| 97 | 66.8 | 70.7 | 72.6 | 78.2 | 81.2 | 85.1 | 92.2 | 101. | 109. | 117. | 135. | 159. |
| 98 | 67.6 | 71.5 | 73.5 | 79.1 | 82.2 | 86.0 | 93.2 | 102. | 110. | 118. | 137. | 161. |
| 99 | 68.4 | 72.4 | 74.4 | 80.0 | 83.1 | 87.0 | 94.2 | 103. | 111. | 119. | 138. | 163. |
| 100 | 69.3 | 73.2 | 75.2 | 80.9 | 84.1 | 88.0 | 95.2 | 104. | 112. | 121. | 140. | 164. |

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Таблица 3.2. Максимальная интенсивность поступающей нагрузки в зависимости от *B*, *N* и числа источников *M* ***

| *N* | *M* | .01 | .05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | .0002 | .0010 | .0020 | .0100 | .0200 | .0400 | .100 | .202 | .307 | .417 | .659 | .9 |
| | 3 | .0002 | .0008 | .0015 | .0075 | .0151 | .0303 | .077 | .159 | .246 | .341 | .559 | .8 |
| | 4 | .0001 | .0007 | .0013 | .0067 | .0134 | .0270 | .069 | .143 | .224 | .312 | .519 | .7 |
| | 5 | .0001 | .0006 | .0013 | .0063 | .0126 | .0254 | .065 | .136 | .213 | .298 | .498 | .7 |
| 2 | 3 | .030 | .067 | .095 | .212 | .300 | .425 | .678 | .980 | 1.23 | 1.47 | 1.97 | 2. |
| | 4 | .023 | .052 | .074 | .167 | .238 | .342 | .560 | .832 | 1.07 | 1.30 | 1.78 | 2. |
| | 5 | .021 | .046 | .065 | .149 | .213 | .308 | .510 | .767 | .997 | 1.22 | 1.70 | 2. |
| | 6 | .019 | .043 | .061 | .139 | .200 | .289 | .482 | .731 | .955 | 1.18 | 1.65 | 2. |
| | 7 | .018 | .041 | .058 | .133 | .191 | .277 | .464 | .707 | .928 | 1.15 | 1.62 | 2. |
| 3 | 4 | .186 | .317 | .400 | .685 | .864 | 1.09 | 1.50 | 1.95 | 2.31 | 2.65 | 3.35 | 4. |
| | 5 | .148 | .254 | .322 | .561 | .715 | .918 | 1.30 | 1.72 | 2.08 | 2.42 | 3.13 | 3. |
| | 6 | .131 | .227 | .288 | .505 | .648 | .837 | 1.20 | 1.62 | 1.97 | 2.31 | 3.02 | 3. |
| | 7 | .122 | .211 | .268 | .473 | .609 | .790 | 1.14 | 1.55 | 1.90 | 2.24 | 2.95 | 3. |
| | 8 | .116 | .201 | .255 | .452 | .583 | .759 | 1.10 | 1.51 | 1.85 | 2.19 | 2.90 | 3. |
| | 9 | .111 | .194 | .246 | .437 | .565 | .737 | 1.07 | 1.47 | 1.82 | 2.16 | 2.86 | 3. |
| | 10 | .108 | .188 | .240 | .426 | .551 | .720 | 1.05 | 1.45 | 1.79 | 2.13 | 2.84 | 3. |
| | 15 | .100 | .174 | .222 | .396 | .514 | .675 | .994 | 1.38 | 1.72 | 2.06 | 2.76 | 3. |
| 4 | 5 | .500 | .748 | .889 | 1.33 | 1.59 | 1.89 | 2.24 | 2.98 | 3.43 | 3.86 | 4.76 | 5. |
| | 6 | .408 | .617 | .737 | 1.12 | 1.36 | 1.64 | 2.15 | 2.71 | 3.16 | 3.60 | 4.51 | 5. |
| | 7 | .365 | .554 | .665 | 1.02 | 1.24 | 1.52 | 2.01 | 2.56 | 3.02 | 3.46 | 4.38 | 5. |
| | 8 | .340 | .517 | .621 | .963 | 1.17 | 1.44 | 1.92 | 2.47 | 2.93 | 3.37 | 4.30 | 5. |
| | 9 | .323 | .492 | .592 | .922 | 1.13 | 1.37 | 1.86 | 2.41 | 2.87 | 3.31 | 4.24 | 5. |
| | 10 | .310 | .474 | .571 | .892 | 1.09 | 1.35 | 1.82 | 2.36 | 2.82 | 3.27 | 4.20 | 5. |
| | 15 | .280 | .429 | .518 | .816 | 1.00 | 1.25 | 1.71 | 2.24 | 2.70 | 3.14 | 4.08 | 5. |
| 5 | 6 | .951 | 1.31 | 1.51 | 2.08 | 2.40 | 2.77 | 3.39 | 4.04 | 4.58 | 5.09 | 6.17 | 7. |
| | 7 | .794 | 1.11 | 1.28 | 1.80 | 2.10 | 2.45 | 3.07 | 3.73 | 4.28 | 4.80 | 5.91 | 7. |
| | 8 | .716 | 1.00 | 1.16 | 1.66 | 1.94 | 2.29 | 2.90 | 3.56 | 4.12 | 4.65 | 5.77 | 7. |
| | 9 | .668 | .940 | 1.09 | 1.56 | 1.84 | 2.18 | 2.78 | 3.45 | 4.01 | 4.55 | 5.68 | 7. |
| | 10 | .635 | .896 | 1.04 | 1.50 | 1.77 | 2.11 | 2.71 | 3.37 | 3.94 | 4.48 | 5.61 | 6. |
| | 12 | .592 | .839 | .979 | 1.42 | 1.68 | 2.01 | 2.60 | 3.27 | 3.84 | 4.38 | 5.52 | 6. |
| | 15 | .556 | .791 | .924 | 1.35 | 1.60 | 1.92 | 2.51 | 3.18 | 3.74 | 4.29 | 5.44 | 6. |
| | 20 | .525 | .748 | .876 | 1.28 | 1.53 | 1.84 | 2.42 | 3.09 | 3.66 | 4.21 | 5.37 | 6. |
| 6 | 7 | 1.51 | 1.97 | 2.21 | 2.90 | 3.26 | 3.69 | 4.38 | 5.12 | 5.73 | 6.32 | 7.59 | 9. |
| | 8 | 1.28 | 1.70 | 1.91 | 2.55 | 2.90 | 3.32 | 4.02 | 4.78 | 5.41 | 6.02 | 7.32 | 8. |
| | 9 | 1.17 | 1.55 | 1.76 | 2.37 | 2.71 | 3.12 | 3.82 | 4.59 | 5.24 | 5.85 | 7.17 | 8. |
| | 10 | 1.09 | 1.46 | 1.65 | 2.25 | 2.58 | 2.98 | 3.69 | 4.47 | 5.12 | 5.74 | 7.07 | 8. |
| | 15 | .926 | 1.25 | 1.43 | 1.97 | 2.29 | 2.68 | 3.38 | 4.17 | 4.84 | 5.48 | 6.84 | 8. |
| | 20 | .865 | 1.17 | 1.34 | 1.87 | 2.17 | 2.56 | 3.26 | 4.05 | 4.72 | 5.37 | 6.74 | 8. |
| | 30 | .813 | 1.10 | 1.27 | 1.77 | 2.07 | 2.45 | 3.15 | 3.94 | 4.62 | 5.28 | 6.66 | 8. |
| 7 | 8 | 2.15 | 2.70 | 2.98 | 3.76 | 4.17 | 4.63 | 5.39 | 6.20 | 6.89 | 7.56 | 9.01 | 10. |
| | 9 | 1.85 | 2.36 | 2.62 | 3.36 | 3.75 | 4.22 | 5.00 | 5.85 | 6.56 | 7.25 | 8.74 | 10. |
| | 10 | 1.70 | 2.17 | 2.42 | 3.13 | 3.52 | 3.99 | 4.78 | 5.64 | 6.37 | 7.07 | 8.58 | 10. |
| | 15 | 1.39 | 1.80 | 2.02 | 2.68 | 3.05 | 3.51 | 4.31 | 5.21 | 5.97 | 6.70 | 8.25 | 10. |
| | 20 | 1.28 | 1.67 | 1.88 | 2.52 | 2.88 | 3.33 | 4.14 | 5.05 | 5.81 | 6.56 | 8.13 | 10. |
| | 30 | 1.19 | 1.56 | 1.76 | 2.38 | 2.74 | 3.18 | 3.99 | 4.90 | 5.68 | 6.44 | 8.03 | 9. |

* Числа вверху колонок показывают вероятность потерь, *B* %.

Окончание табл 3.2

| N | M | .01 | .05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 2.85 | 3.48 | 3.80 | 4.65 | 5.09 | 5.59 | 6.41 | 7.30 | 8.05 | 8.80 | 10.4 | 12. |
| | 10 | 2.49 | 3.08 | 3.37 | 4.20 | 4.64 | 5.14 | 6.00 | 6.92 | 7.71 | 8.48 | 10.2 | 12. |
| | 11 | 2.29 | 2.85 | 3.14 | 3.94 | 4.38 | 4.89 | 5.76 | 6.71 | 7.51 | 8.29 | 9.99 | 12. |
| | 12 | 2.16 | 2.70 | 2.97 | 3.77 | 4.20 | 4.17 | 5.59 | 6.56 | 7.37 | 8.17 | 9.88 | 12. |
| | 15 | 1.93 | 2.43 | 2.70 | 3.46 | 3.89 | 4.40 | 5.29 | 6.29 | 7.13 | 7.94 | 9.69 | 11. |
| | 20 | 1.76 | 2.24 | 2.49 | 3.23 | 3.65 | 4.16 | 5.06 | 6.07 | 6.93 | 7.76 | 9.54 | 11. |
| | 30 | 1.63 | 2.08 | 2.32 | 3.03 | 3.45 | 3.95 | 4.86 | 5.89 | 6.77 | 7.61 | 9.41 | 11. |
| 9 | 10 | 3.59 | 4.30 | 4.64 | 5.57 | 6.03 | 6.56 | 7.44 | 8.39 | 9.22 | 10.0 | 11.9 | 14. |
| | 11 | 3.18 | 3.84 | 4.17 | 5.07 | 5.54 | 6.09 | 7.00 | 8.01 | 8.87 | 9.72 | 11.6 | 13. |
| | 12 | 2.94 | 3.57 | 3.89 | 4.79 | 5.26 | 5.81 | 6.75 | 7.78 | 8.66 | 9.52 | 11.4 | 13. |
| | 13 | 2.78 | 3.39 | 3.71 | 4.59 | 5.06 | 5.61 | 6.57 | 7.62 | 8.51 | 9.39 | 11.3 | 13. |
| | 14 | 2.66 | 3.26 | 3.57 | 4.44 | 4.91 | 5.47 | 6.43 | 7.50 | 8.41 | 9.29 | 11.2 | 13. |
| | 16 | 2.50 | 3.08 | 3.38 | 4.23 | 4.70 | 5.27 | 6.24 | 7.33 | 8.25 | 9.15 | 11.1 | 13. |
| | 18 | 2.39 | 2.95 | 3.25 | 4.09 | 4.56 | 5.13 | 6.11 | 7.21 | 8.15 | 9.06 | 11.0 | 13. |
| | 20 | 2.31 | 2.87 | 3.15 | 3.99 | 4.46 | 5.02 | 6.02 | 7.13 | 8.07 | 8.99 | 11.0 | 13. |
| | 30 | 2.12 | 2.64 | 2.91 | 3.73 | 4.19 | 4.76 | 5.77 | 6.90 | 7.87 | 8.81 | 10.8 | 13. |
| 10 | 11 | 4.38 | 5.15 | 5.52 | 6.49 | 6.98 | 7.54 | 8.47 | 9.49 | 10.4 | 11.3 | 13.3 | 15. |
| | 12 | 3.91 | 4.64 | 5.00 | 5.97 | 6.47 | 7.04 | 8.02 | 9.09 | 10.0 | 11.0 | 13.0 | 15. |
| | 13 | 3.63 | 4.34 | 4.69 | 5.65 | 6.16 | 6.74 | 7.75 | 8.86 | 9.81 | 10.8 | 12.8 | 15. |
| | 14 | 3.45 | 4.13 | 4.47 | 5.43 | 5.94 | 6.54 | 7.56 | 8.69 | 9.66 | 10.6 | 12.7 | 15. |
| | 15 | 3.31 | 3.98 | 4.32 | 5.27 | 5.78 | 6.38 | 7.41 | 8.56 | 9.55 | 10.5 | 12.6 | 15. |
| | 16 | 3.20 | 3.86 | 4.19 | 5.14 | 5.65 | 6.25 | 7.30 | 8.46 | 9.46 | 10.4 | 12.6 | 15. |
| | 18 | 3.04 | 3.68 | 4.01 | 4.95 | 5.46 | 6.07 | 7.13 | 8.31 | 9.33 | 10.3 | 12.5 | 15. |
| | 20 | 2.93 | 3.56 | 3.88 | 4.81 | 5.32 | 5.93 | 7.01 | 8.21 | 9.23 | 10.2 | 12.4 | 15. |
| | 25 | 2.75 | 3.36 | 3.68 | 4.59 | 5.10 | 5.72 | 6.81 | 8.04 | 9.08 | 10.1 | 12.3 | 14. |
| | 30 | 2.65 | 3.25 | 3.56 | 4.47 | 4.98 | 5.59 | 6.69 | 7.93 | 8.99 | 10.0 | 12.2 | 14. |
| 11 | 12 | 5.19 | 6.01 | 6.41 | 7.44 | 7.95 | 8.53 | 9.50 | 10.6 | 11.6 | 12.5 | 14.7 | 17. |
| | 13 | 4.68 | 5.46 | 5.85 | 6.88 | 7.40 | 8.01 | 9.04 | 10.2 | 11.2 | 12.2 | 14.4 | 17. |
| | 14 | 4.37 | 5.13 | 5.51 | 6.54 | 7.07 | 7.69 | 8.76 | 9.94 | 11.0 | 12.0 | 14.2 | 17. |
| | 15 | 4.15 | 4.90 | 5.27 | 6.30 | 6.84 | 7.47 | 8.56 | 9.77 | 10.8 | 11.9 | 14.1 | 17. |
| | 16 | 3.99 | 4.72 | 5.09 | 6.12 | 6.66 | 7.30 | 8.40 | 9.63 | 10.7 | 11.7 | 14.0 | 16. |
| | 17 | 3.86 | 4.59 | 4.95 | 5.98 | 6.52 | 7.17 | 8.28 | 9.53 | 10.6 | 11.7 | 14.0 | 16. |
| | 18 | 3.76 | 4.48 | 4.84 | 5.86 | 6.41 | 7.06 | 8.18 | 9.44 | 10.5 | 11.6 | 13.9 | 16. |
| | 20 | 3.60 | 4.31 | 4.66 | 5.68 | 6.23 | 6.88 | 8.03 | 9.31 | 10.4 | 11.5 | 13.8 | 16. |
| | 25 | 3.36 | 4.04 | 4.39 | 5.40 | 5.95 | 6.62 | 7.79 | 9.10 | 10.2 | 11.3 | 13.7 | 16. |
| | 30 | 3.32 | 3.90 | 4.24 | 5.24 | 5.79 | 6.46 | 7.64 | 8.98 | 10.1 | 11.2 | 13.6 | 16. |
| 12 | 13 | 6.03 | 6.90 | 7.31 | 8.39 | 8.92 | 9.52 | 10.5 | 11.7 | 12.7 | 13.8 | 16.1 | 19. |
| | 14 | 5.47 | 6.31 | 6.72 | 7.80 | 8.35 | 8.98 | 10.1 | 11.3 | 12.4 | 13.4 | 15.8 | 18. |
| | 15 | 5.13 | 5.95 | 6.35 | 7.44 | 8.00 | 8.65 | 9.77 | 11.0 | 12.1 | 13.2 | 15.7 | 18. |
| | 16 | 4.88 | 5.69 | 6.09 | 7.18 | 7.75 | 8.42 | 9.56 | 10.8 | 12.0 | 13.1 | 15.5 | 18. |
| | 17 | 4.70 | 5.50 | 5.90 | 6.99 | 7.56 | 8.24 | 9.40 | 10.7 | 11.8 | 13.0 | 15.5 | 18. |
| | 18 | 4.56 | 5.35 | 5.74 | 6.83 | 7.41 | 8.09 | 9.27 | 10.6 | 11.8 | 12.9 | 15.4 | 18. |
| | 20 | 4.34 | 5.12 | 5.51 | 6.60 | 7.18 | 7.87 | 9.08 | 10.4 | 11.6 | 12.8 | 15.3 | 18. |
| | 25 | 4.03 | 4.77 | 5.16 | 6.24 | 6.83 | 7.54 | 8.78 | 10.2 | 11.4 | 12.6 | 15.1 | 18. |
| | 30 | 3.85 | 4.58 | 4.96 | 6.04 | 6.63 | 7.35 | 8.61 | 10.0 | 11.3 | 12.5 | 15.0 | 18. |