

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники»

Кафедра электронных приборов

**С.М. Шандаров, А.И. Башкиров**

## **ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ И ОПТИЧЕСКУЮ ЭЛЕКТРОНИКУ**

Учебное пособие

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения  
и оптотехники в качестве учебного пособия для студентов высших  
учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки  
200600 – Фотоника и оптоинформатика и специальности  
200201 – Лазерная техника и лазерные технологии

2012

**Рецензенты:**

**В.А. Тарлыков**, д-р техн., профессор Санкт-Петербургского гос. ун-та информационных технологий, механики и оптики;

**Б.Н. Пойзнер**, канд. физ.-мат. наук, доцент Томск. гос. ун-та

**Шандаров Станислав Михайлович,  
Башкиров Александр Иванович**

Введение в квантовую и оптическую электронику: учеб. пособие. - 2-е изд., испр. / С.М. Шандаров, А.И. Башкиров / Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Кафедра электронных приборов. - Томск: ТУСУР, 2012. - 98 с.

Изложены физические основы квантовой и оптической электроники, используемые при построении квантовых и оптоэлектронных приборов и устройств. Основное внимание уделено принципам функционирования квантовых и оптоэлектронных приборов.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области квантовой и оптической электроники, фотоники и оптики, обучающихся по направлениям «Электроника и микроэлектроника» - 210100, «Электроника и наноэлектроника» - 210100, «Фотоника и оптоинформатика» - 200600 и 200700, 200201 – Лазерная техника и лазерные технологии

© ТУСУР, 2012

© Шандаров Станислав Михайлович, 2012

© Башкиров Александр Иванович, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение .....	5
2. Принцип квантового усиления электромагнитных волн.....	6
3. Описание электромагнитного излучения оптического диапазона.....	10
3.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме.....	10
3.2. Материальные уравнения.....	10
3.3. Граничные условия.....	11
3.4. Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды.....	12
3.5. Одномерное волновое уравнение.....	13
3.6. Плоские скалярные волны.....	13
3.7. Гармонические волны.....	14
3.8. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении.....	16
3.9. Электромагнитные плоские волны.....	17
3.10. Поляризация плоских электромагнитных волн.....	20
3.11. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.....	21
3.12. Распространение волновых пакетов. Групповая скорость.....	22
4. Описание квантовых ансамблей и процессов релаксации.....	26
4.1. Общие принципы.....	26
4.2. Термостатированный ансамбль. Безызлучательные переходы.....	27
4.3. Описание релаксации.....	28
4.4. Общие уравнения для матрицы плотности.....	30
5. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом.....	31
5.1. Электрические и магнитные дипольные моменты и энергия взаимодействия микрочастиц с внешним полем.....	31
5.2. Двухуровневая система микрочастиц во внешнем поле. Основные уравнения. Вероятности индуцированных переходов.....	33
5.3. Анализ поглощения электромагнитного поля двухуровневой системой. Эффект насыщения.....	36
5.4. Спонтанные переходы.....	39

5.5.	Балансные уравнения.....	40
6.	Общие вопросы построения лазеров.....	41
6.1.	Особенности оптического диапазона.....	41
6.2.	Элементарная теория открытых оптических резонаторов.....	42
6.3.	Добротность резонаторов.....	45
6.4.	Волновая теория открытых резонаторов.....	47
6.5.	Классификация оптических резонаторов.....	49
6.6.	Селекция типов колебаний в оптических резонаторах.....	52
6.7.	Характеристики лазерного излучения.....	53
6.8.	Уширение спектральных линий.....	62
7.	Твердотельные лазеры.....	64
7.1.	Схемы функционирования твердотельных лазеров .....	64
7.2.	Системы накачки твердотельных лазеров.....	68
7.3.	Балансные уравнения и режим непрерывной генерации в твердотельных лазерах.....	70
7.4.	Режим свободной генерации.....	73
7.5.	Лазеры с модуляцией добротности резонатора.....	76
7.6.	Синхронизация продольных мод и генерация ультракоротких импульсов.....	80
8.	Газовые лазеры... ..	83
8.1.	Особенности газов как активного вещества для лазеров.....	83
8.2.	Механизмы возбуждения газоразрядных лазеров.....	84
8.3.	Атомарный гелий-неоновый лазер.....	88
8.4.	Ионный аргоновый лазер.....	90
8.5.	Молекулярный лазер на углекислом газе.....	92
9.	Список рекомендуемой литературы.....	96

## 1. Введение

Квантовые приборы и устройства изучает *квантовая электроника* – сравнительно молодая область физики и электроники, начало которой было положено в середине 50-х годов прошлого столетия работами российских ученых Н.Г. Басова, А.М. Прохорова и американских ученых из Колумбийского университета под руководством Ч. Таунса. В основе работы квантовых приборов лежит *принцип квантового усиления электромагнитных волн*, качественно отличный от известных способов генерирования и усиления когерентных колебаний. Реализация этого принципа позволила электронике сделать скачок по частоте сразу на 4 порядка – от  $10^{11}$  Гц до  $10^{15}$  Гц.

Оптоэлектронные приборы и устройства изучает *оптоэлектроника* – научно-техническое направление, основанное на использовании одновременно как оптических, так и электрических методов передачи, обработки, приема, хранения и отображения информации. Кроме сочетания оптических и электронных процессов для современной оптоэлектроники характерны стремление к миниатюризации и интеграции элементов на основе твердотельной технологии и усиливающаяся направленность на решение задач информатики.

Наш курс посвящен основным принципам функционирования квантовых и оптоэлектронных приборов и изучению смежных направлений – нелинейной оптики, динамической голографии, интегральной и волоконной оптики, а также применению квантовых и оптоэлектронных приборов к решению научно-технических задач. Отметим, что данные вопросы тесно переплетаются друг с другом, поэтому в курсе не будет резкой границы между квантовой и оптической электроникой. Часто одни и те же устройства используют как принципы квантовой электроники, так и являются оптоэлектронными. Пример – полупроводниковые инжекционные лазеры, в которых излучательная рекомбинация электронов и дырок, осуществляемая в полупроводниковых *p-n* переходах при пропускании электрического тока в прямом направлении, приводит к генерации когерентного оптического излучения. Именно такие лазеры используются в широко распространенных ныне лазерных *CD* (Compact Disk) и *DVD* (Digital Versatile Disk) устройствах.

Зачастую лишь использование квантовых приборов позволяет реализовать эффекты, не обязательно являющиеся квантовыми. Пример – нелинейная оптика, когда свойства

оптической среды начинают зависеть от интенсивности света. Как правило, для этого световые поля должны быть сравнимы, по создаваемой напряженности поля, с внутрикристаллическими полями (для кристаллов) или с электрической прочностью среды.

## 2. Принцип квантового усиления электромагнитных волн

В основе принципа квантового усиления электромагнитных волн лежат процессы взаимодействия электромагнитного поля с веществом. Как известно, энергия элементов вещества, например, атомов или молекул, квантована. Частицы могут обладать лишь дискретными значениями энергии  $E_1, E_2, E_3$  и т.д., образующими систему энергетических уровней (рис. 2.1). Когда мы имеем не одну частицу, а их совокупность, то они распределяются по системе уровней так, что на уровне  $E_1$  оказывается  $N_1$  частиц,  $E_2 - N_2$ , и т.д.

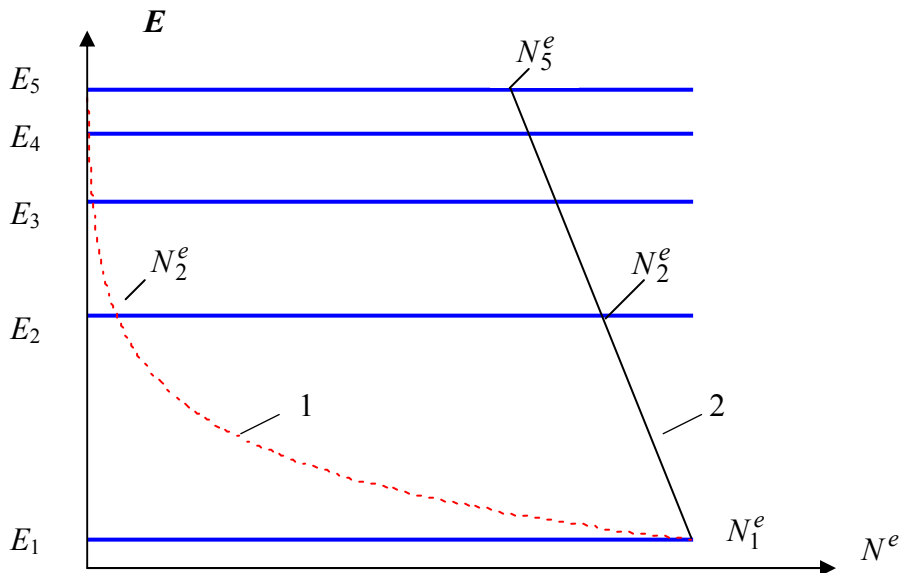


Рис. 2.1. Распределение частиц по энергетическим уровням для оптического (1) и СВЧ (2) диапазонов в условиях термодинамического равновесия

В условиях термодинамического равновесия распределение числа частиц по уровням, или по энергиям, подчиняется закону Больцмана:

$$N_m^e(E_m) = C \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right), \quad (2.1)$$

где  $C$  – константа,  $T$  – абсолютная температура,  $k=1.3807 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Эту зависимость изобразим на рис. 2.1 для двух характерных диапазонов – оптического и СВЧ. Для этого найдем из постулата Бора расстояние между уровнями с номерами  $m$  и  $n$ :

$$E_m - E_n = \hbar\omega_{mn}, \quad (2.2)$$

где  $\hbar=1.05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $\omega_{mn}$  – частота перехода между уровнями. В оптическом диапазоне выполняется условие  $\hbar\omega_{mn} \gg kT$ , поэтому практически все частицы находятся на нижнем уровне с энергией  $E_1$  (кривая 1 на рис. 2.1). В диапазоне СВЧ выполняется обратное условие,  $\hbar\omega_{mn} \ll kT$ , и населенность уровней изменяется по линейному закону

$$N_m^e \cong C \left(1 - \frac{E_m}{kT}\right). \quad (2.3)$$

Во всех случаях при термодинамическом равновесии число частиц на любом верхнем уровне меньше, чем на любом нижнем. Представим, что рассматриваемая система частиц находится в электромагнитном поле с частотой  $\omega = \omega_{21}$ , вызывающем переходы между энергетическими уровнями 1 и 2. Тогда, как известно из физики, между полем и веществом будет происходить эффективное резонансное взаимодействие. Во-первых, поле будет индуцировать переходы частиц, находящихся в состоянии 1, в состояние 2. При этом переходе частица «отбирает» у поля квант энергии  $\hbar\omega$ , то есть происходит поглощение электромагнитной энергии веществом.

Найдем поглощаемую веществом мощность  $P_{abs}$ , считая, что вероятность индуцированного полем перехода одной частицы в единицу времени из состояния 1 в состояние 2 равна  $W$ . Тогда общее число переходов, совершенное в единицу времени, будет  $N_1W$ , а общая поглощаемая веществом мощность составит

$$P_{abs} = N_1W\hbar\omega. \quad (2.4)$$

Одновременно с этим электромагнитное поле будет вынуждать частицы, находящиеся в состоянии 2, к переходу в состояние 1. При каждом переходе частиц сверху вниз излучается квант энергии  $\hbar\omega$ . Главная особенность этого процесса в том, что *излученное поле при таком вынужденном переходе сверху вниз является точной копией поля, вызвавшего переход. Оно совпадает с ним по частоте, фазе, поляризации и направлению распространения.* Рассмотренный процесс излучения электромагнитных волн носит название *индуцированного, или вынужденного, излучения и является основой работы квантовых устройств.*

Заметим, что переход частицы с верхнего уровня на нижний может быть и **самопроизвольным (спонтанным)**, при котором частица сама по себе совершает переход. Излученный при таком переходе квант не согласуется с какими-либо квантами ни по фазе, ни по поляризации, ни по направлению распространения. Частота спонтанного излучения может быть произвольной в некотором спектральном интервале вблизи  $\omega_{21}$ .

Зададимся вопросом: будет ли усиливаться исходное электромагнитное поле при переходах частиц с уровня 2 на уровень 1? За счет индуцированного излучения – да, за счет спонтанного – нет! Каков аналог спонтанного излучения в традиционной электронике? Это некоторый шум.

Таким образом, подсчитаем мощность, излучаемую частицами при вынужденных переходах  $2 \rightarrow 1$ , учитывая, что вероятности индуцированных переходов одной частицы сверху вниз и снизу вверх в единицу времени одинаковы:

$$P_{rad} = \hbar\omega W N_2. \quad (2.5)$$

Суммарная мощность, поглощаемая частицами вещества, равна:

$$P_{\Sigma} = P_{abs} - P_{rad} = \hbar\omega W (N_1 - N_2). \quad (2.6)$$

Так как в условиях термодинамического равновесия всегда  $N_1^e > N_2^e$ , то  $P_{\Sigma} > 0$ , что соответствует поглощению электромагнитных волн обычными средами. Если же создать состояние вещества, при котором выполняется условие

$$N_2 > N_1, \quad (2.7)$$

то в этом случае среда не поглощала бы, а усиливала электромагнитное поле ( $P_{\Sigma} < 0$ ).



В создании ситуации, соответствующей неравенству (2.7), и состоит основная идея получения квантового усиления. Оказывается, существует достаточно много способов достижения такого состояния вещества, при котором энергетически более высоко лежащие уровни имеют большую заселенность, чем низко лежащие. Эта ситуация носит название *состояния инверсии населенностей энергетических уровней*. В настоящем курсе мы изучим ряд способов создания инверсии населенностей, реализуемых в различных квантовых приборах.

Приборы квантовой электроники, генерирующие оптическое излучение, принято называть лазерами (*laser*), по первым буквам английского словосочетания “light amplification by stimulated emission of radiation” – усиление света посредством индуцированного излучения.

Таким образом, *принцип квантового усиления электромагнитных волн заключается в создании в веществе состояния инверсии населенностей и в использовании индуцированных переходов.*

### 3. Описание электромагнитного излучения оптического диапазона

#### 3.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Электромагнитные поля и волны являются важнейшим физическим объектом, как в квантовых, так и в оптоэлектронных приборах. Рассмотрим в данном разделе методы описания таких полей и волны в неограниченных диэлектрических средах.

Следствие закона Ампера, закона *полного тока*:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}_{\text{compl}}. \quad (3.1)$$

Обобщение закона *электромагнитной индукции Фарадея*:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Электрическое поле может иметь стоки и истоки. Ими являются электрические заряды с объемной плотностью  $\rho$ :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (3.3)$$

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, т.е. магнитные заряды в природе отсутствуют:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.4)$$

В рамках классической электродинамики эти уравнения для векторов напряженности электрического и магнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , векторов электрической и магнитной индукции  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  являются строгими.

### 3.2. Материальные уравнения

На связь между векторами поля оказывает влияние материальная сред. на связь между векторами поля. В большинстве случаев используют идеализированные модели среды. В линейном приближении для изотропных сред, если можно пренебречь дисперсией, имеем

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$  Ф/м;  $\mu = \mu_r \mu_0$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м. Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды  $\varepsilon$  и  $\mu$  здесь являются скалярными величинами, а векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  параллельны друг другу. Кроме того, такая связь между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  является *локальной*. То есть значение вектора  $\vec{D}$  в данный момент времени  $t'$  в данной точке пространства  $\vec{r}'$  определяется значениями  $\vec{E}$  для тех же  $t'$  и  $\vec{r}'$ .

Как известно, полный ток состоит из 4-х составляющих:

$$\vec{\delta}_{\text{compl}} = \vec{\delta}_{\text{cond}} + \vec{\delta}_{\text{disp}} + \vec{\delta}_{\text{transf}} + \vec{\delta}_{\text{extr}}, \quad (3.7)$$

где плотности токов определяются выражениями:

$$\vec{\delta}_{\text{cond}} = \sigma \vec{E} \quad - \quad \text{закон Ома в дифференциальной форме}, \quad (3.8)$$

$$\vec{\delta}_{\text{disp}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad - \quad \text{ток смещения}, \quad (3.9)$$

$$\vec{\delta}_{\text{transf}} = \rho \vec{v} \quad - \quad \text{ток переноса}. \quad (3.10)$$

Здесь  $\sigma$  - проводимость среды,  $\vec{\delta}_{\text{cond}}$  - плотность тока проводимости и  $\vec{v}$  - скорость движения свободных зарядов. Сторонний ток с плотностью  $\vec{\delta}_{\text{extr}}$  задается внешними

источниками. Его роль может играть, например, диффузионный ток, созданный вследствие неоднородности распределения объемного заряда  $\rho$ . Такое распределение  $\rho$  может быть получено при фотовозбуждении носителей заряда световым пучком в зону проводимости или при бомбардировке электронным пучком поверхности диэлектрика.

### 3.3. Граничные условия

Уравнения Максвелла в представленном виде пригодны для областей пространства, в пределах которых физические свойства среды ( $\epsilon$ ,  $\mu$  и др.) непрерывны. На границах раздела сред I и II имеют место граничные условия:

$$E_{\tau}^I - E_{\tau}^{II} = 0, \quad (3.11)$$

$$D_n^I - D_n^{II} = \xi, \quad (3.12)$$

$$B_n^I - B_n^{II} = 0, \quad (3.13)$$

$$H_{\tau}^I - H_{\tau}^{II} = \eta. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.11) и (3.13) свидетельствуют, что тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля  $E_{\tau}$  и нормальная составляющая вектора магнитной индукции  $B_n$  при переходе через границу раздела меняются непрерывно. Из (3.12) следует, что в этом случае нормальная составляющая вектора электрической индукции  $D_n$  изменяется на величину поверхностной плотности заряда  $\xi$ . В соответствии с (3.14), тангенциальный компонент вектора магнитной напряженности испытывает скачок на величину поверхностной плотности тока  $\eta$ . Необходимо учитывать, что векторы  $\vec{H}_{\tau}^I$  и  $\vec{H}_{\tau}^{II}$  ортогональны к направлению тока, текущего по границе раздела. Уравнения (3.12) и (3.13) выводятся на основании теоремы Гаусса; (3.11) и (3.14) - на основе применения теоремы Стокса к уравнениям Максвелла. Доказательства этих соотношений можно выполнить самостоятельно или найти в литературе (см., например, [3]).

### 3.4. Волновое уравнение для немагнитной безграничной среды

Рассмотрим немагнитную однородную среду, являющуюся непроводящей, в которой также отсутствуют сторонние токи и заряды. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.18)$$

Первые два уравнения в данном случае образует замкнутую систему, причем одну из величин, характеризующих поле, можно отсюда исключить. Как это сделать? Применим к уравнению (3.16) операцию  $\operatorname{rot}$  и используем уравнение (3.15):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Используя далее соотношение  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$  и уравнение (3.17), получаем

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.20)$$

Аналогично можно найти уравнение и для  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.21)$$

Данные уравнения называются волновыми, как и уравнение (3.19), которое является более общим, чем уравнения (3.20) и (3.21), и справедливым также для анизотропной среды, где условие  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  выполняется не всегда..

### 3.5. Одномерное волновое уравнение

Рассмотрим среду, в которой поле зависит только от координаты  $z$ . Из (3.20) получаем одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$

Отметим, что в данном случае из (3.17) получается уравнение

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0,$$

откуда следует  $E_z = \text{const}$ . Такие решения нас не интересуют, и можно положить  $E_z = 0$ .

То есть вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и может быть представлен в виде:

$$\vec{E} = \vec{e} \cdot E_t, \quad (3.23)$$

где  $\vec{e}$  - единичный вектор в плоскости  $xy$ ,  $E_t = |\vec{E}|$ . Перепишем уравнение (3.22) с учетом (3.23) в виде скалярного одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = 0. \quad (3.24)$$

### 3.6. Плоские скалярные волны

Общее решение уравнения (3.24) представляет плоскую скалярную волну вида

$$E_t(z, t) = E_{t1} \left( t - \frac{z}{v} \right) + E_{t2} \left( t + \frac{z}{v} \right), \quad (3.25)$$

где  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  - скорость распространения волны вдоль оси  $z$ . Как представить себе такую волну? Предположим, что при  $z = 0$  мы имеем источник поля, напряженность которого изменяется по закону  $E_1(t)$ , в общем случае произвольному. Тогда в области  $z > 0$  имеем

$$E_t(z, t) = E_t \left( t - \frac{z}{v} \right), \quad (3.26)$$

поскольку граничное условие (3.15) требует непрерывности тангенциальных компонент вектора  $\vec{E}$ . Это формальная сторона. А физическая? Мы имеем при  $z > 0$  распространение сигнала вдоль оси  $z$ . Скорость распространения определяется соотношением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}. \quad (3.27)$$

Здесь  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  - скорость света в вакууме,  $n$  - показатель преломления среды.

### 3.7. Гармонические волны

Рассмотрим сигнал, заданный при  $z = 0$  в виде

$$E(t) = E_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{E_m}{2} \{ \exp[i(\omega t + \psi)] + \exp[-i(\omega t + \psi)] \}. \quad (3.28)$$

Ему будут соответствовать гармонические плоские волны

$$\left. \begin{aligned} E(z, t) &= E_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi\right), & \text{при } z \geq 0, \\ E(z, t) &= E_m \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v} z + \psi\right), & \text{при } z \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

распространяющиеся вдоль направлений  $+z$  и  $-z$ .

Мгновенное значение  $E(z, t)$  электрического поля в каждый момент времени и в каждой точке пространства определяется амплитудой  $E_m$  плоской волны и фазой

$$\varphi(z, t) = \omega t \mp kz + \psi. \quad (3.30)$$

Если  $E_m$  не зависит от координат  $x, y$ , то волна будет *однородной*. Здесь через  $k = \frac{\omega}{v}$

мы обозначим *волновое число*:

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}. \quad (3.31)$$

Геометрическое место точек, в которых фаза волны остается постоянной:

$$\varphi = \omega t \mp kz + \psi = \text{const}, \quad (3.32)$$

называют *фазовым или волновым фронтом*.

Для некоторого момента времени  $t'$  фазовый фронт рассматриваемой нами волны является плоскостью, перпендикулярной оси  $z$ . При изменении времени на  $\Delta t$  фазовый фронт волны сдвигается в пространстве на расстояние  $\Delta z$ . Отношение  $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v$  определяет *фазовую скорость волны* - скорость движения фазового фронта в пространстве, в данном случае вдоль оси  $z$ . Как изменяется поле плоской гармонической волны в фиксированный момент времени в пространстве? Очевидно, по косинусоидальному закону (рис. 3.1).

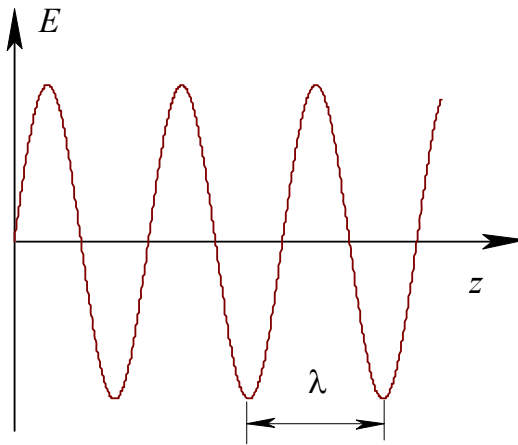


Рис. 3.1. Поле гармонической волны

Периодичность изменения поля в пространстве задается волновым числом  $k$ . Изменение фазы волны в пространстве на  $2\pi$  соответствует прохождению волной расстояния  $\lambda$ :  $\Delta\phi = 2\pi = k\lambda$ . Отсюда получаем соотношения:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.33)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{fn}, \quad (3.34)$$

где  $f$  - частота волны (Гц).

### 3.8. Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Выше мы рассматривали волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ . Для волны в произвольном направлении необходимо использование более общего волнового уравнения

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_t - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Запишем сразу гармоническую плоскую волну, которая удовлетворяет данному уравнению:

$$E_t(\vec{r}, t) = E_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (3.36)$$

Здесь мы для простоты считаем начальную фазу колебаний равной нулю ( $\psi = 0$ ) и вводим волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{n} \frac{\omega}{v} = \vec{n} \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} (\vec{i}n_x + \vec{j}n_y + \vec{k}^0 n_z), \quad (3.37)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор волновой нормали. Подставим выражение для  $E_t(\vec{r}, t)$  в (3.35):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{v^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) E_t - \mu\varepsilon \omega^2 E_t = 0, & \left( \frac{\omega^2}{v^2} - \mu\varepsilon \omega^2 \right) E_t = 0; \\ (k^2 - \mu\varepsilon \omega^2) E_t = 0; & \left( \frac{1}{v^2} - \mu\varepsilon \right) E_t = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Из (3.38) следует, что для  $E_t \neq 0$  должно быть:

$$k^2 = \mu\varepsilon \omega^2. \quad (3.39)$$

Зависимость  $k(\omega)$  называется дисперсионной зависимостью, а уравнение

$$k(\omega) = 0, \quad (3.40)$$

называется дисперсионным уравнением. В данном случае монохроматических волн имеем:

$$k^2 - \mu\varepsilon \omega^2 = 0; \quad k^2 - \mu_r \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0; \quad k = n \frac{\omega}{c}. \quad (3.41)$$



В общем случае показатель преломления зависит от частоты (явление дисперсии), что необходимо учесть в соотношении для волнового числа:

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (3.42)$$

### 3.9. Электромагнитные плоские волны

В общем случае решение для плоской монохроматической однородной волны имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi) &= \frac{\vec{E}_m}{2} \left\{ \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi) \right] + \right. \\ &+ \left. \exp \left[ -i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi) \right] \right\} = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_m \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] + c.c., \end{aligned} \quad (3.43)$$

где  $\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m \exp(i\psi)$ , а *c.c.* означает комплексно-сопряженную функцию к первому слагаемому. Нетрудно заметить, что функции  $\exp \left[ \pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \psi) \right]$  также являются решениями волнового уравнения. Величина  $\dot{\vec{E}}_m$  - комплексная векторная амплитуда волны.

Поскольку работать с экспонентами очень удобно, то принято пользоваться понятием комплексной формы записи для гармонических плоских волн

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{E}}_m \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right], \quad (3.44)$$

опуская множитель 1/2 и комплексно-сопряженное слагаемое. Необходимо понимать, что *это выражение справедливо только формально*. Истинное значение электрического поля будет определяться выражением

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{E}}_m \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Во многих случаях, когда мы имеем дело с линейными функциями от  $\vec{E}$ , этот подход дает одинаковые результаты с подходом, при котором используются тригонометрические функции. Исключение составляют случаи, когда необходимо вычислить произведения или степени - например, при расчетах интенсивности или вектора Пойнтинга.

В чем же достоинство комплексного метода? Найдем производную по времени от напряженности поля плоской гармонической волны

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{\vec{E}}_m \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \right\} = i\omega \dot{\vec{E}}_m \exp \left[ i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right].$$

Таким образом, операции дифференцирования по  $t$  соответствует умножение на  $i\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega. \quad (3.46)$$

Нетрудно показать, что действие оператора  $\nabla$  на  $\dot{\vec{E}}(\vec{r}, t)$  аналогично действию на нее оператора  $-i\vec{k}$ :

$$\nabla \cdot \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \cdot \dot{\vec{E}} = \text{div } \dot{\vec{E}}, \quad (3.47)$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -i\vec{k} \times \dot{\vec{E}} = \text{rot } \dot{\vec{E}}. \quad (3.48)$$

С учетом записанных соотношений представим уравнения Максвелла, которые мы применяли при описании волновых процессов в изотропной непроводящей среде в отсутствие сторонних токов и зарядов, в новой форме.

Общий вариант уравнений Максвелла	Уравнения Максвелла в операторной форме для $\sigma = 0$ , $\rho = 0$ , $\vec{\delta}_{extr} = 0$	Уравнения Максвелла для плоских гармонических волн ( $\sigma = 0$ , $\rho = 0$ , $\vec{\delta}_{extr} = 0$ )
$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}_{compl}$	$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$-\vec{k} \times \vec{H} = \omega \vec{D}$
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$+\vec{k} \times \vec{E} = +\omega \vec{B}$
$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{D} = 0$	$\rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

С учетом материальных уравнений (3.5) и (3.6)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

из последней системы получаем:

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \vec{E}, \quad (3.49)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}, \quad (3.50)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.51)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0. \quad (3.52)$$

Отсюда следуют важные выводы о структуре полей в плоской электромагнитной волне:

1. Из первого уравнения следует, что  $\vec{E} \perp \vec{k}$  и  $\vec{E} \perp \vec{H}$ .
2. Из второго -  $\vec{H} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{H} \perp \vec{E}$ . Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$  образуют правую систему координат.
3. Третье и четвертое уравнения также свидетельствуют о поперечности полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .
4.  $|\vec{k} \times \vec{H}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} H_m = \omega \epsilon E_m$  ( $|\vec{k} \times \vec{H}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{H}| \sin(\vec{k} \wedge \vec{H})$ ),

$$H_m = \frac{E_m}{\sqrt{\mu/\epsilon}} = \frac{E_m}{W}. \quad (3.53)$$

Величина  $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$  имеет размерность Ом и называется волновым сопротивлением среды. Напомним, что размерность  $H$  - А/м;  $E$  - В/м. Для вакуума получаем

$$W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом}. \quad (3.54)$$

Итак, векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$  в плоской волне можно изобразить так для фиксированного момента времени  $t$  (рис. 3.2). В общем случае в зависимости от вида поляризации (линейная, круговая, эллиптическая) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут синхронно изменять свое положение.

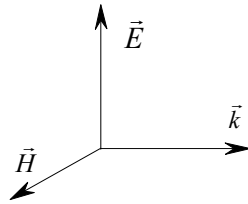


Рис. 3.2. Ориентация векторов в плоской электромагнитной волне

### 3.10. Поляризация плоских электромагнитных волн

Поле с векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , направление которых может быть определено в любой момент времени, называют *поляризованным*. При случайных направлениях  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в пространстве поле является *неполяризованным* (солнечный свет и т.д.).

*Плоскость поляризации* проходит через вектор  $\vec{E}$  и направление распространения волны. Различают *линейную, эллиптическую* и *круговую* (правую и левую) поляризации - в зависимости от фигуры, которую описывает конец вектора  $\vec{E}$  при распространении волны. Математически волну с произвольным видом поляризации представляют в виде двух составляющих

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \vec{i}E_{1m} \cos(\omega t - kz), \\ \vec{E}_y &= \vec{j}E_{2m} \cos(\omega t - kz - \varphi),\end{aligned}\tag{3.55}$$

сдвинутых по фазе и имеющих различные амплитуды в общем случае. Для плоскости  $z=0$  имеем

$$\frac{E_x}{E_{1m}} = \cos \omega t, \quad \frac{E_y}{E_{2m}} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi,\tag{3.56}$$

откуда получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.\tag{3.57}$$

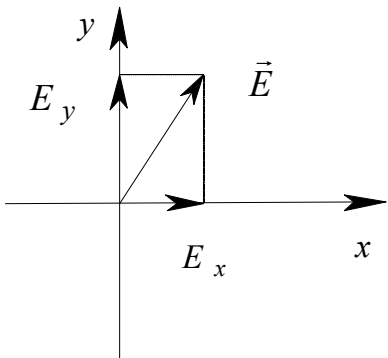


Рис. 3.3. Ориентация вектора поляризации в плоской электромагнитной волне

Если учесть, что  $E_x \sim x$ ,  $E_y \sim y$  (рис. 3.3), то (3.57) представляет уравнение эллипса. То есть, поскольку  $E_x \sim \cos \omega t$ , конец вектора

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y, \quad |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

будет описывать эллиптическую траекторию за время  $T = 2\pi/\omega$ .

Рассмотрим характерные виды поляризации.

$$1. \varphi = 0, \quad \frac{E_x}{E_{1m}} - \frac{E_y}{E_{2m}} = 0, \quad E_y = \frac{E_{2m}}{E_{1m}} E_x.$$

Это уравнение прямой, наклон которой к оси ОХ определяется отношением  $E_{2m}/E_{1m}$ . Действительно, при синфазном изменении  $E_x$  и  $E_y \sim \cos \omega t$  синхронно изменяется и результирующий вектор  $\vec{E}$ . Легко видеть, что такая же по типу *линейная* поляризация имеет место и при  $\varphi = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

$$2. \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с большой и малой полуосями, ориентированными точно по осям  $x$  и  $y$ . Направление вращения вектора  $\vec{E}$  определяется знаком  $\varphi$ . Для  $\varphi = -\pi/2$  какое будет вращение, левое или правое? Правое.

3. В каком случае мы будем иметь круговую поляризацию?  $\varphi = \pm \pi/2, E_{1m} = E_{2m}$ .

### 3.11. Закон сохранения энергии

#### для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Как известно, в объеме  $V$  сосредоточен запас энергии электромагнитного поля

$$W = \int_V \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dV = \int_V \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV. \quad (3.58)$$

Рассмотрим изменение энергии  $W$  во времени. Для этого перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}_{cond} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

считая токи переноса и сторонние токи отсутствующими. Домножим первое уравнение на  $\vec{E}$ , а второе - на  $\vec{H}$  скалярно и вычтем полученные результаты:

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}. \quad (3.59)$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2), \\ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (H^2), \\ \vec{E} \cdot \text{rot } H - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} &= -\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}],\end{aligned}$$

и интегрируя (3.59) по объему, получаем

$$\int_V (\text{div} [\vec{E} \times \vec{H}]) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV - \int_V (\vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.60)$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

и вводя вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (3.61)$$

получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \int_V (\vec{\delta}_{cond} \cdot \vec{E}) dV. \quad (3.62)$$

Уравнение (3.62) выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Левая часть - полное изменение электромагнитной энергии в объеме  $V$  во времени. Первый член в правой части - поток вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую объем  $V$  ( $\vec{\Pi}$ -плотность потока энергии через поверхность  $S$  в единицу времени). Вторым членом в правой части (3.62) - количество тепла, выделяющегося в проводящих частях объема  $V$  в единицу времени.

## 3.12. Распространение волновых пакетов.

### Групповая скорость

Гармоническая плоская волна является, строго говоря, неограниченной как в пространстве, так и во времени. Как только мы ограничим размеры волнового фронта, то в результате дифракции сразу получим волны с другими направлениями распространения (рис. 3.4). Точно также, если мы ограничим сигнал во времени (рис. 3.5), мы должны

представить его в виде интеграла Фурье, т.е. в виде суперпозиции колебаний с различными частотами. Ограниченная длительность электромагнитного сигнала, таким образом, приводит к существованию некоторой конечной полосы частот  $\Delta\omega$  вблизи некоторой центральной частоты  $\omega_0$ . В силу линейности уравнений Максвелла распространение импульсного электромагнитного сигнала в линейной среде можно представить в виде линейной комбинации плоских волн с различными частотами и волновыми числами:

$$E(x,t) = \sum_{\ell} \dot{E}_m(k_{\ell}) \cdot \exp[i(\omega_{\ell}t - k_{\ell}x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp\{i[\omega(k)t - kx]\} dk. \quad (3.63)$$

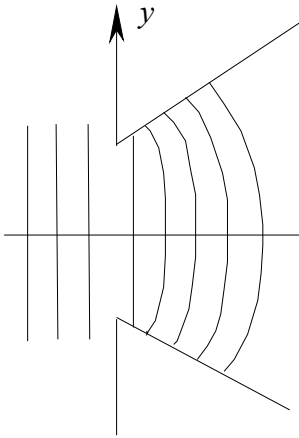


Рис. 3.4. Дифракция плоской волны на отверстии в непрозрачном экране

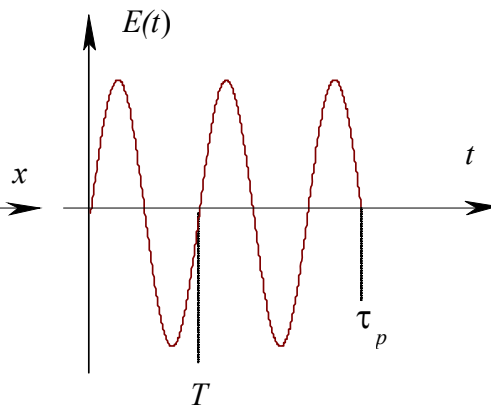


Рис. 3.5. Электромагнитный импульс

Эти сумма и интеграл удовлетворяют уравнениям Максвелла, поскольку суммируются (интегрируются) плоские волны, являющиеся решением тех же уравнений. Если  $\dot{E}_m(k)$  отличаются заметно от нуля лишь в небольшом промежутке  $\Delta k \ll k$ , то поле  $E(x,t)$  описывает *волновой пакет*, или *волновую группу*. В этом случае и  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , и поле будет *почти монохроматическим* (квазимонохроматическим). Вспомним теперь дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между  $\omega$  и  $k$  для плоской волны:

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c},$$

и перепишем его в виде

$$\omega(k) = \frac{c}{n(k)} k. \quad (3.64)$$

В изотропной среде дисперсионные свойства не зависят от направления векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{E}$ , поэтому

$$\omega(-k) = \omega(k).$$

Рассмотрим теперь эволюцию волнового пакета  $E(x, t)$  во времени. Для этого разложим  $\omega(k)$  в ряд Тейлора вблизи центрального волнового числа  $k_0 = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$ :

$$\omega(k) = \omega_0 + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) + \dots, \quad (3.65)$$

и ограничимся первыми двумя членами разложения, так как  $\Delta k = (k - k_0) \ll k_0$ ,  $\Delta \omega \ll \omega_0$ .

Подставим это разложение в интеграл для  $E(x, t)$ :

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[ \omega_0 t + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) t - kx + k_0 x - k_0 x \right] \right\} = \\ &= \exp [i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(k) \exp \left\{ i \left[ \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t - x \right] (k - k_0) \right\} dk. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Интеграл в конечном выражении зависит только от комбинации переменных  $\left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$  и называется *оггибающей*  $E \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$  *волнового пакета*. Первый же сомножитель представляет некоторую *несущую* (заполнение) этого пакета и соответствует гармонической (монохроматической) плоской волне (рис. 3.6).

Таким образом,

$$E(x, t) = E \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \exp [i(\omega_0 t - k_0 x)]. \quad (3.67)$$

Отсюда следует, что волновой пакет распространяется с сохранением своей формы со скоростью

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0, \quad (3.68)$$



которая называется *групповой скоростью* волны. Приведенное соотношение справедливо для волн любой природы: электромагнитных, акустических и т.д.

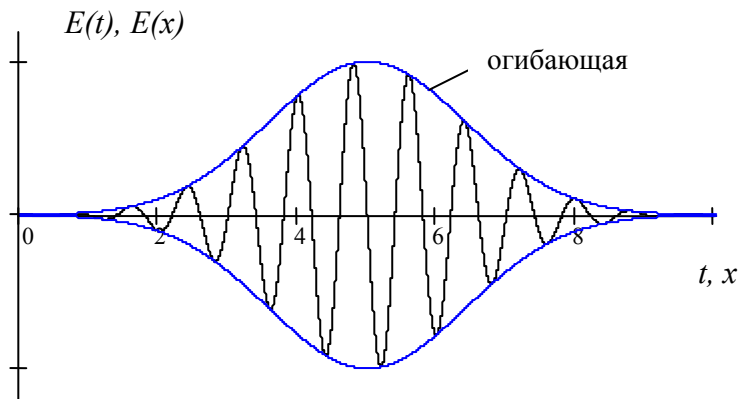


Рис. 3.6. Волновой пакет

Для дисперсионной зависимости в изотропной среде

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_0} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn}{d\omega_0}} = \frac{c}{n + \omega_0 \frac{dn}{d\omega_0}}. \quad (3.69)$$

При *нормальной дисперсии*, когда  $dn/d\omega > 0$ , групповая скорость меньше фазовой скорости. При *аномальной дисперсии*  $dn/d\omega < 0$ ,  $v_g$  больше фазовой скорости, но и в данном случае  $v_g < c$ . Мы отбросили в разложении члены второго и высшего порядков малости. Если членом второго порядка  $\frac{1}{2}\left(d^2\omega/dk^2\right)_0(k-k_0)^2$  пренебречь нельзя, то ширина импульса электромагнитного излучения будет изменяться в процессе распространения (уширяться).

## 4. Описание квантовых ансамблей и процессов релаксации

### 4.1. Общие принципы

Для реализации принципа квантового усиления электромагнитных волн используются переходы между уровнями в квантовых системах, то есть в макросистемах, состоящих из большого числа микросистем. Как известно, квантовые микросистемы описываются на языке квантовой механики, а их совокупность – на основе подходов статистической физики.

Существует такое понятие, как **чистый ансамбль** – ансамбль тождественных изолированных микросистем, который описывается единственной волновой функцией. В так называемом **смешанном ансамбле** содержится совокупность нескольких чистых ансамблей, каждый из которых описывался своей волновой функцией до образования смешанного ансамбля из чистых. Смешанный ансамбль описывается **матрицей плотности**  $\hat{\rho}$ , физический смысл элементов которой следующий.

1. Диагональные элементы описывают распределение микросистем по энергетическим уровням:

$$\rho_{kk} = \frac{N_k}{\sum_k N_k}, \quad (4.1)$$

где  $N_k$  - число микросистем, находящихся в  $k$ -м состоянии (на  $k$ -м энергетическом уровне), а сумма определяет общее количество микросистем в ансамбле. Важное свойство матрицы  $\hat{\rho}$ :

$$Sp\hat{\rho} = 1, \quad (4.2)$$

где  $Sp\hat{\rho}$  - след матрицы  $\hat{\rho}$ , то есть сумма ее диагональных элементов.

2. Недиagonalные элементы  $\rho_{kn}$  ( $k \neq n$ ) характеризуют связь между  $k$ -м и  $n$ -м состояниями (переходы), и отличны от нуля в состоянии релаксации. В стационарном состоянии  $\rho_{kn} = 0$ .

Зная  $\hat{\rho}$ , можно найти **среднее по ансамблю значение физической величины**  $\hat{F}$ :

$$\langle F \rangle = \sum_{n,k} F_{nk} \rho_{kn} = \sum_n (\hat{F} \cdot \hat{\rho})_{nn} = Sp(\hat{F} \cdot \hat{\rho}). \quad (4.3)$$

**Уравнение движения для матрицы плотности смешанного ансамбля,** характеризующее временные изменения матрицы плотности, имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}], \quad (4.4)$$

где  $[\hat{\rho}, \hat{H}] = \hat{\rho} \cdot \hat{H} - \hat{H} \cdot \hat{\rho}$  - коммутатор оператора  $\hat{\rho}$  с гамильтонианом  $\hat{H}$ .

В стационарном состоянии матрица плотности  $\hat{\rho}$  не зависит от времени и коммутирует с  $\hat{H}$ . Это означает, что в энергетическом представлении  $\hat{H}$  и  $\hat{\rho}$  описываются диагональными матрицами:

$$\rho_{kn} = f(E_n) \delta_{kn}, \quad H_{kn} = E_n \delta_{kn}.$$

## 4.2. Термостатированный ансамбль.

### Безызлучательные переходы

Рассмотрим систему частиц, находящихся при температуре  $T_0$ .

Пример. Кристалл рубина, представляющий собой кристаллическую матрицу  $Al_2O_3$  (корунд), в котором небольшая часть ионов Al ( $\sim 3 \cdot 10^{-4}$  от полного числа) замещена ионами  $Cr^{3+}$  ( $Al_2O_3:Cr^{3+}$ ). Весь объем кристалла можно разбить на части, в каждой из которых находится один ион  $Cr^{3+}$ . Окружающая его решетка играет роль термостата, поддерживающего температуру  $T_0$ , и такая система частиц (в данном случае ионов  $Cr^{3+}$ ) является **термостатированным ансамблем**.

Если такую систему вывести из состояния равновесия, то распределение частиц по уровням будет отличаться от больцмановского. Однако после прекращения воздействия она будет стремиться к прежнему равновесному состоянию, определяемому температурой термостата  $T_0$ . Такой переход системы частиц из неравновесного состояния в равновесное называется **релаксацией**.

При релаксации система частиц обменивается энергией с термостатом. Этот процесс будем характеризовать вероятностью  $\Gamma_{mn}$  перехода одной частицы в единицу времени с уровня  $m$  на уровень  $n$  под действием термостата. При таких переходах не происходит излучения или поглощения электромагнитного поля, поэтому их называют

*безызлучательными*, или *тепловыми*. Однако ясно, что на самом деле, когда речь идет о твердом теле, при безызлучательных переходах поглощаются или излучаются фононы.

### 4.3. Описание релаксации

Если термостатированный ансамбль вывести из состояния равновесия, то он с течением времени будет переходить в другое равновесное состояние.

Однако уравнение (4.4) не может быть использовано для описания процессов релаксации. Покажем это, для чего перепишем его в виде

$$\dot{\rho}_{kn} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}]_{kn} = \frac{i}{\hbar} \sum_m (\rho_{km} H_{mn} - H_{km} \rho_{mn}). \quad (4.5)$$

Для  $\rho_{kn}$  в энергетическом представлении имеем:

$$H_{mn} = 0, m \neq n; H_{km} = 0, k \neq m; H_{mn} = E_n, m = n; H_{km} = E_k, k = m;$$

$$\dot{\rho}_{kn} = \frac{i}{\hbar} (\rho_{kn} E_n - E_k \rho_{kn}) = \frac{i}{\hbar} \rho_{kn} (E_n - E_k) = -\frac{i}{\hbar} (E_k - E_n) \rho_{kn}.$$

Обозначая  $(E_k - E_n)/\hbar = \omega_{kn}$ , получаем:

$$\dot{\rho}_{kn} + i\omega_{kn} \rho_{kn} = 0. \quad (4.6)$$

Запишем это уравнение отдельно для диагональных и недиагональных элементов:

$$\dot{\rho}_{nn} = 0, \rho_{nn} = \text{const}, \quad (4.7a)$$

$$\dot{\rho}_{kn} + i\omega_{kn} \rho_{kn} = 0, \rho_{kn} = C_{kn} \exp(-i\omega_{kn} t). \quad (4.7b)$$

Из решения (4.7 б) следует, что модуль  $|\rho_{kn}| = C_{kn} = \text{const}$  и от времени не зависит.

Однако эксперимент показывает, что при приближении системы к состоянию равновесия все недиагональные элементы матрицы плотности стремятся к нулю. Это связано с тем, что в действительности рассматриваемые нами микросистемы взаимодействуют с термостатом.

Рассмотрим действие термостата феноменологически. Опыт показывает, что  $\rho_{kn}$  стремится к нулю по экспоненциальному закону. Это можно учесть добавкой слагаемого  $\rho_{kn} / \tau_{kn}$  в уравнение (4.7б):

$$\dot{\rho}_{kn} + \frac{\rho_{kn}}{\tau_{kn}} + i\omega_{kn} \rho_{kn} = 0, \quad (4.8)$$

где  $\tau_{kn}$  - время релаксации, определяемое из эксперимента.

Решение (4.8) следующее:

$$\rho_{kn}(t) = C_{kn} \exp(-t / \tau_{kn}) \exp(-i\omega_{kn}t),$$

причем  $|\rho_{kn}| = |C_{kn}| \exp(-t / \tau_{kn})$ .

За время  $\tau_{kn}$  элементы матрицы плотности по модулю уменьшаются в  $e$  раз. Числа  $\tau_{kn}$  образуют квадратную матрицу, ввиду самосопряженности матрицы  $\hat{\rho}$  являющуюся симметричной:

$$\tau_{kn} = \tau_{nk}. \quad (4.9)$$

Обратимся теперь к уравнению (4.7a). Примем, что действие термостата состоит в индуцировании переходов между различными состояниями системы. Пусть  $\Gamma_{kn}$  - вероятность перехода под действием термостата для одной частицы в единицу времени с уровня  $k$ , характеризуемого энергией  $E_k$ , на уровень с энергией  $E_n$  (рис. 4.1). Здесь  $\rho_{kk}$  - относительное число частиц на  $k$ -м уровне. Относительное число частиц, перешедшее с уровня  $k$  на уровень  $n$ , будет равно  $\Gamma_{kn}\rho_{kk}$ . Общее относительное число частиц, перешедшее в единицу времени с уровня  $k$  на все  $n$ -е уровни, будет равно  $\sum_n \Gamma_{kn}\rho_{kk}$ .

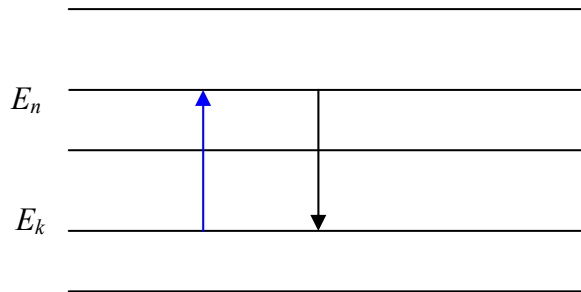


Рис. 4.1. Переходы между уровнями, индуцируемые термостатом

Найдем также число частиц, приходящих на  $k$ -й уровень:  $\sum_n \Gamma_{nk}\rho_{nn}$ . В результате для скорости изменения числа частиц на уровне  $k$  получаем уравнение

$$\dot{\rho}_{kk} = \sum_{n \neq k} (\Gamma_{nk}\rho_{nn} - \Gamma_{kn}\rho_{kk}). \quad (4.10)$$

Это уравнение и обобщает соотношение (4.5) на случай системы, взаимодействующей с термостатом. В частном случае термодинамического равновесия  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^e$  и не зависит от времени. Поэтому сумма в правой части (4.10) равна нулю. Обычно постулируется, что в этой сумме равно нулю каждое слагаемое:

$$\Gamma_{nk} \rho_{nn}^e = \Gamma_{kn} \rho_{kk}^e. \quad (4.11)$$

Это равенство выражает **принцип детального равновесия** и ограничивает возможные значения  $\Gamma_{nk}$ . При учете только тепловых переходов  $\rho_{nn}^e$  и  $\rho_{kk}^e$  могут быть найдены из закона Больцмана:

$$\begin{aligned} \Gamma_{nk} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) &= \Gamma_{kn} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right), \\ \Gamma_{nk} &= \Gamma_{kn} \exp\left(\frac{E_n - E_k}{kT}\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, вероятность тепловых (или безызлучательных) переходов сверху вниз всегда больше, чем для переходов снизу вверх.

#### 4.4. Общие уравнения для матрицы плотности

В общем случае квантовая система находится во взаимодействии с внешним полем, и ее гамильтониан может быть представлен в аддитивном виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (4.13)$$

где  $\hat{H}_0$  - гамильтониан невозмущенной системы и  $\hat{V}$  - оператор взаимодействия с внешним полем. В результате общее уравнение движения для матрицы плотности может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}_0] + \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{V}] + \\ &+ \text{члены, ответственные за взаимодействие с термостатом.} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Распишем это уравнение отдельно для диагональных и недиагональных элементов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_{mm}}{dt} &= \sum_{n \neq m} (\rho_{nn} \Gamma_{nm} - \rho_{mm} \Gamma_{mn}) + \frac{i}{\hbar} \sum_s (\rho_{ms} V_{sm} - V_{ms} \rho_{sm}), \\ \frac{d\rho_{mn}}{dt} + \frac{\rho_{mn}}{\tau_{mn}} + i\omega_{mn} \rho_{mn} &= \frac{i}{\hbar} \sum_s (\rho_{ms} V_{sn} - V_{ms} \rho_{sn}), \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

и дополним уравнениями:

$$\Gamma_{nk} \rho_{nn}^e = \Gamma_{kn} \rho_{kk}^e, \quad \tau_{nm} = \tau_{mn}, \quad Sp \hat{\rho} = 1. \quad (4.16)$$

Система уравнений (4.15) и (4.16) и определяет общие уравнения для матрицы плотности квантовой системы, находящейся во взаимодействии с внешним полем.

## 5. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом

### 5.1. Электрические и магнитные дипольные моменты и энергия взаимодействия микрочастиц с внешним полем

Рассмотрим взаимодействие электромагнитного поля с элементами вещества (атомами, молекулами или ионами). Такое взаимодействие возможно благодаря наличию у них дипольных, квадрупольных и мультипольных электрических и магнитных моментов. Для нейтрального атома, содержащего ядро и отрицательно заряженный электрон, дипольный момент равен

$$\vec{p} = e\vec{r}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, соединяющий ядро с электроном,  $e$  - элементарный электрический заряд. Для более сложного атома полный дипольный момент может быть получен как векторная сумма частных моментов.

Если рассматриваемый атом находится во внешнем поле с электрической напряженностью  $\vec{E}$ , то энергия взаимодействия диполя с полем равна

$$V = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (5.2)$$

При квантовомеханическом рассмотрении величины  $\vec{p}$ ,  $\vec{r}$  и  $\vec{E}$  нужно заменить операторами. Мы будем пользоваться *полуклассическим приближением*, когда поле рассматривается классически (не квантуется):

$$\hat{V} = -\hat{p} \cdot \vec{E}, \quad (5.3)$$

где  $\hat{p} = e\hat{r}$  - оператор электродипольного момента. В энергетическом представлении  $\hat{p}$  изображается матрицей с элементами

$$\vec{p}_{mn} = \int_V \psi_m^* e\hat{r} \psi_n dV, \quad (5.4)$$

где  $\psi_m(\vec{r}, t)$  - собственные функции оператора энергии.

Обычно функции  $\psi_m$ , входящие в (5.4), обладают определенной четностью, то есть каждая из этих функций либо четная, либо нечетная функция координат. Тогда при  $m=n$  произведение  $\psi_m^* \psi_m = |\psi_m|^2$  является четной функцией, а  $\psi_m^* \vec{r} \psi_m$  - нечетная функция. Поэтому диагональные матричные элементы оператора электродипольного момента равны нулю:

$$\vec{p}_{mm} = 0. \quad (5.5)$$

Кроме того, те из  $\vec{p}_{mn}$ , которые соответствуют состояниям с одинаковой четностью, также равны нулю. Это означает, что *электродипольные переходы между состояниями с одинаковой четностью запрещены*.

Если атом (частица) обладает магнитным моментом  $\vec{\mu}$ , то он также будет взаимодействовать с электромагнитным полем за счет составляющей  $\vec{H}$ :

$$\hat{V} = -\hat{\mu} \cdot \vec{H}. \quad (5.6)$$

Самым сильным является электродипольное взаимодействие. Если же  $\vec{p}_{mn} = 0$ , то следует учесть магнитодипольное взаимодействие. При  $\vec{p}_{mn} = 0$  и  $\vec{\mu}_{mn} = 0$  взаимодействие частицы с полем является слабым и осуществляется за счет квадрупольных и мультипольных электрических моментов.



## 5.2. Двухуровневая система микрочастиц во внешнем поле. Основные уравнения. Вероятности индуцированных переходов

Рассмотрим ансамбль микрочастиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле. Полагаем, что у данных частиц имеется пара энергетических уровней 1 и 2, расстояние между которыми  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$  соответствует частоте  $\omega_{21} \cong \omega$ , близкой к частоте приложенного поля  $\omega$ . Тогда наличием всех прочих уровней можно пренебречь и рассматривать данную систему как двухуровневую.

Нас интересует мощность  $P$ , поглощаемая веществом, которая, как было показано ранее, равна:

$$P = \hbar\omega W(N_1 - N_2). \quad (5.7)$$

Здесь нам неизвестны как вероятность индуцированных переходов, так и населенности уровней  $N_1$  и  $N_2$ , которые можно выразить через диагональные элементы матрицы плотности:

$$N_k = \rho_{kk} N,$$

где  $N$  – полное число частиц.

Таким образом, расчет поглощаемой мощности связан с решением уравнений для матрицы плотности (4.15) и (4.16). В случае двухуровневой системы общие уравнения для  $\hat{\rho}$  существенно упрощаются. В первую очередь найдем матричные элементы оператора энергии взаимодействия микрочастицы с полем:

$$\left. \begin{aligned} V_{11} = -\vec{p}_{11} \cdot \vec{E} = 0, \quad V_{22} = -\vec{p}_{22} \cdot \vec{E} = 0, \\ V_{12} = -\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}, \quad V_{21} = -\vec{p}_{21} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

С учетом этого запишем уравнения для матричных элементов  $\rho_{11}$  и  $\rho_{12}$ :

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \Gamma_{21}\rho_{22} - \Gamma_{12}\rho_{11} + \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}V_{21} - V_{12}\rho_{21}), \quad (5.9)$$

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} + \frac{\rho_{12}}{\tau} - i\omega_{21}\rho_{12} = \frac{i}{\hbar}(\rho_{11}V_{12} - V_{12}\rho_{22}), \quad (5.10)$$

где учтено, что  $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau$ .

Уравнения (5.9) и (5.10) содержат 4 неизвестных:  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$ . Поэтому к ним нужно добавить еще 2 уравнения. В качестве таковых можно использовать общее соотношение  $Sp\hat{\rho} = 1$ , которое в данном случае имеет вид

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1, \quad (5.11)$$

и учесть условие самосопряженности матрицы  $\hat{\rho}$ :

$$\rho_{12}^* = \rho_{21}. \quad (5.12)$$

Система уравнений (5.9)-(5.12) позволяет определить все элементы матрицы плотности.

Для ее решения выпишем в явном виде значения  $V_{ik}$ . Для поля  $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t)$  имеем

$$V_{12} = -\frac{\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m}{2} [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]. \quad (5.13)$$

Входящая в уравнение (5.10) вынуждающая сила в этом случае содержит две составляющие, пропорциональные  $\exp(i\omega t)$  и  $\exp(-i\omega t)$ . Поскольку собственные колебания системы, определяемые левой частью (однородным уравнением), происходят по закону  $\exp(-t/\tau)\exp(i\omega_{21}t)$ , то основной вклад в решение даст «резонансное» слагаемое в (5.13), пропорциональное  $\exp(i\omega t)$ :

$$V_{12} \cong -\frac{\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m}{2} \exp(i\omega t). \quad (5.14)$$

Из условия самосопряженности находим

$$V_{21} = V_{12}^* = -\frac{\vec{p}_{12}^* \cdot \vec{E}_m}{2} \exp(-i\omega t) \quad (5.15)$$

Отыскивая решение в виде  $\rho_{12} = \rho_{12}^m \exp(i\omega t)$ , где  $\rho_{12}^m$  - медленно меняющаяся функция времени (так что ее производной можно пренебречь), из (5.10) находим

$$\rho_{12}^m = -\frac{(i/\hbar)(\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m/2)}{1/\tau + i(\omega - \omega_{21})} (\rho_{11} - \rho_{22}). \quad (5.16)$$

Учитывая соотношение  $[(-i/\hbar)V_{12}\rho_{21}] = [(i/\hbar)V_{21}\rho_{12}]^*$ , найдем последний член в правой части уравнения (5.9):

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}(\rho_{12}V_{21} - V_{12}\rho_{21}) &= -\frac{1}{4} \left| \frac{\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m}{\hbar} \right|^2 \left[ \frac{1}{1/\tau + i(\omega - \omega_{21})} + \frac{1}{1/\tau - i(\omega - \omega_{21})} \right] (\rho_{11} - \rho_{22}) = \\ &= -\frac{(1/2\tau) \left| (\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m)/\hbar \right|^2}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2} (\rho_{11} - \rho_{22}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.9) и вводя обозначения

$$W = \frac{|\Lambda|^2 / (2\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}; \quad \Lambda = \frac{\vec{p}_{12} \cdot \vec{E}_m}{\hbar}, \quad (5.17)$$

окончательно получаем

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = (\Gamma_{21} + W)\rho_{22} - (\Gamma_{12} + W)\rho_{11}. \quad (5.18)$$

Рассмотрим физический смысл членов, входящих в данное уравнение. В левой части определяется относительная скорость изменения числа частиц на нижнем уровне с энергией  $E_1$ . Первый член в правой части характеризует приток частиц на данный уровень. Тепловые (или безызлучательные) переходы имеют вероятность  $\Gamma_{21}$ , а величина  $W$  определяет, очевидно, вероятность индуцированного перехода одной частицы в единицу времени. Второе слагаемое в правой части (5.18), характеризующее отток частиц с уровня 1, показывает, что вероятности индуцированного перехода сверху вниз и снизу вверх одинаковы, и в случае двухуровневой системы частиц определяются формулами (5.17).

Определим мощность, поглощаемую двухуровневой системой, для стационарного случая, когда  $d\rho_{11}/dt = d\rho_{22}/dt = 0$ . Из (5.18) получаем

$$(\Gamma_{21} + W)\rho_{22} - (\Gamma_{12} + W)\rho_{11} = 0. \quad (5.19)$$

Используя соотношение (5.11), находим

$$\rho_{11} = \frac{\Gamma_{21} + W}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}, \quad \rho_{22} = \frac{\Gamma_{12} + W}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}, \quad (5.20)$$

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{\Gamma_{21} - \Gamma_{12}}{\Gamma_{21} + \Gamma_{12} + 2W}. \quad (5.21)$$

Переписывая уравнение детального равновесия в виде

$$\frac{\rho_{11}^e}{\Gamma_{21}} = \frac{\rho_{22}^e}{\Gamma_{12}} = T_1, \quad (5.22)$$

где величина  $T_1$  имеет размерность времени и характеризует скорость релаксации за счет взаимодействия с термостатом, вместо (5.21) можно получить

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{1}{1 + 2WT_1} (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e). \quad (5.23)$$

Таким образом, поглощаемая двухуровневой системой мощность может быть найдена в виде

$$P = \hbar\omega_{21}W(N_1 - N_2) = \hbar\omega_{21}WN(\rho_{11} - \rho_{22}) = \hbar\omega_{21}N \frac{W}{1 + 2WT_1} (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e). \quad (5.24)$$

### 5.3. Анализ поглощения электромагнитного поля двухуровневой системой. Эффект насыщения

Применим общее выражение (5.24) для анализа двух предельных случаев.

1. Слабое поле. Вероятность индуцированного перехода  $W \ll 1/T_1$ . Тогда слагаемым  $2WT_1$  в знаменателе можно пренебречь. Подставляя в (5.24) для этого случая  $W$  из формулы (5.17), получаем

$$P = \hbar\omega_{21}N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{|\Lambda|^2 / (2\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}. \quad (5.25)$$

Отсюда видно, что мощность, поглощаемая от поля веществом, пропорциональна квадрату напряженности внешнего поля, а значит, пропорциональна его мощности. Такая связь характерна для линейной электродинамики, когда параметры среды не зависят от величины поля.

Частотная зависимость поглощаемой мощности описывается функцией

$$g(\omega) = \frac{1/(\pi\tau)}{1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2}, \quad (5.26)$$

называемой кривой Лоренца, совпадающей по виду с резонансной кривой простого колебательного контура (рис. 5.1). Максимум поглощения достигается при частоте внешнего поля  $\omega = \omega_{21}$ . Полуширина кривой  $\Delta\omega$  по уровню 0.5 равна  $\Delta\omega = 1/\tau$ . Отсюда следует, что время релаксации  $\tau$  можно определить экспериментально, сняв частотную зависимость поглощаемой мощности.

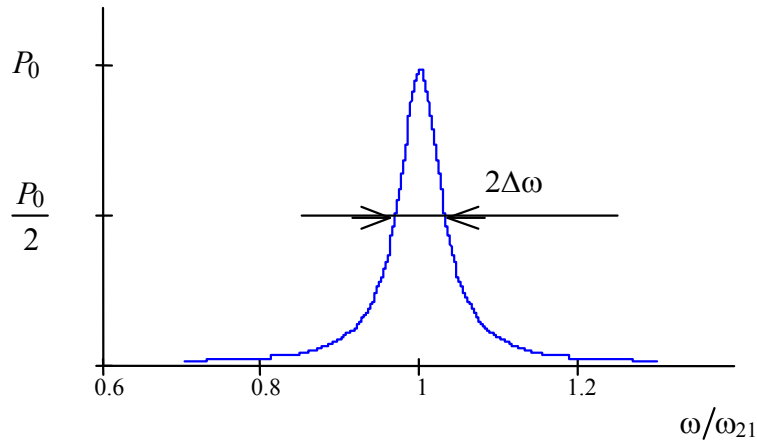


Рис. 5.1. Частотная зависимость поглощаемой мощности

2. Сильное поле. Вероятность индуцированного перехода  $W$  сравнима с вероятностью переходов под действием термостата  $1/T_1$ . В этом случае из (5.24) и (5.17) получаем

$$P = \hbar\omega_{21}N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{\frac{1}{2\tau}|\Lambda|^2}{\frac{1}{\tau^2} + (\omega - \omega_{21})^2 + \frac{T_1}{\tau}|\Lambda|^2}. \quad (5.27)$$

Отсюда видно, что связь между мощностями внешнего поля и мощностью, поглощаемой веществом, нелинейна. Когда внешнее поле очень велико ( $|\Lambda|^2 \rightarrow \infty$ ), поглощаемая мощность не зависит от внешнего поля и равна:

$$P_{sat} = \hbar\omega_{21}N(\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{1}{2T_1}. \quad (5.28)$$

Величина предельной мощности поглощения определяется скоростью, с которой энергия передается термостату:  $1/T_1$ . График зависимости поглощаемой мощности от мощности падающего излучения  $P_{inp} \sim |\vec{E}_m|^2 \sim |\Lambda|^2$  схематично изображен на рис. 5.2. Область I на этом рисунке соответствует линейной электродинамике (слабое поле). В области III поглощенная веществом мощность не зависит от входной мощности. Вещество в этой области просветляется, почти все излучение проходит через образец.

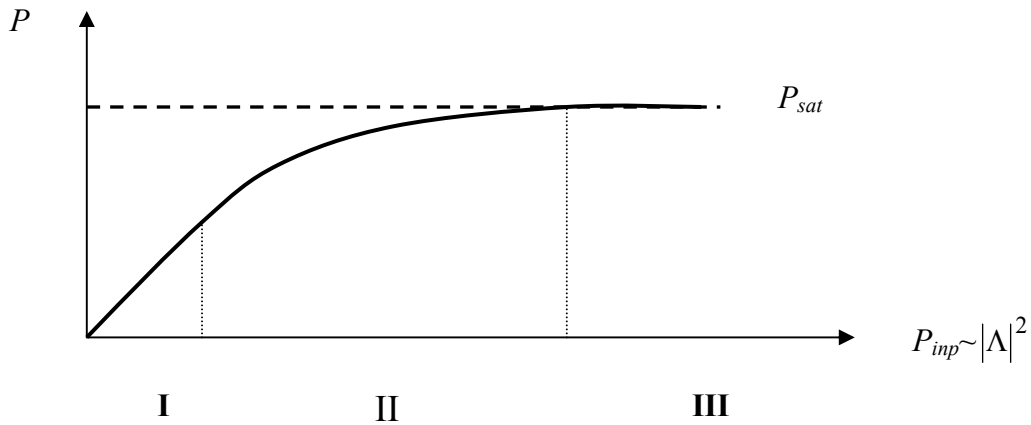


Рис. 1.4.2. Зависимость мощности, поглощаемой веществом, от входной мощности

*Нелинейность зависимости поглощаемой мощности от падающей мощности называют эффектом насыщения.* Физической причиной насыщения является выравнивание населенностей уровней,  $\rho_{11}$  и  $\rho_{22}$ , при увеличении вероятности индуцированных переходов  $W$ . Действительно, из (5.23) получаем

$$\rho_{11} - \rho_{22} \cong (\rho_{11}^e - \rho_{22}^e) \frac{1}{2WT_1}, \quad (5.29)$$

и видим, что разность населенностей уровней  $(\rho_{11} - \rho_{22}) \rightarrow 0$  при  $WT_1 \rightarrow \infty$ .

## 5.4. Спонтанные переходы

В подразд. 5.2 и 5.3 учитывались только индуцированные и тепловые (или безызлучательные) переходы. Кроме них существуют спонтанные (самопроизвольные) переходы с верхнего на нижний уровень. При  $E_m > E_n$  имеем

$$A_{mn} \neq 0, A_{nm} = 0, \quad (5.30)$$

где  $A_{mn}$  - вероятность спонтанного перехода одной частицы в единицу времени с  $m$ -го на  $n$ -й уровень. Следует напомнить, что при спонтанном переходе излучается поле с произвольной фазой, поляризацией и направлением распространения во всем телесном угле. Частотная зависимость мощности спонтанного излучения определяется функцией

$$g(\omega) = (1/\pi\tau) / [1/\tau^2 + (\omega - \omega_{21})^2],$$

где  $\tau = 1/A_{21}$ . Вероятность спонтанного перехода была найдена А. Эйнштейном из анализа формулы Планка для равновесного излучения абсолютно черного тела в виде (в системе единиц СГСЕ)

$$A_{21} = \frac{8\pi\nu_{21}^3}{c^3} B, \quad (5.31)$$

где  $B = [(4\pi^2)/(3\hbar^2)] |\vec{p}_{12}|^2$  - коэффициент Эйнштейна и  $\nu_{21}$  - частота перехода, Гц.

Равновесное излучение абсолютно черного тела можно представить как результат спонтанных переходов  $2 \rightarrow 1$  и вынужденных им переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$ . Плотность вероятности индуцированных переходов под действием монохроматического излучения с частотой  $\omega$  определяется выражением  $W_{21}^\omega = W_{12}^\omega = B\rho_\omega$ , где  $\rho_\omega$  - спектральная плотность энергии излучения, а  $N_2^e < N_1^e$  в равновесном состоянии. Поэтому для равенства числа переходов  $2 \rightarrow 1$  и  $1 \rightarrow 2$  спонтанные переходы должны обязательно существовать.

Отметим, что  $A_{21} \sim \nu_{21}^3$ , поэтому очень велико значение спонтанных переходов для оптического диапазона. Для безызлучательных переходов вероятность  $\Gamma_{mn}$  велика при

$\hbar\omega_{mn} \sim kT$ . Это означает, что их роль является определяющей в СВЧ-диапазоне, где  $\Gamma_{mn} \gg A_{mn}$ , и мала в оптическом диапазоне, где  $\Gamma_{mn} \ll A_{mn}$ .

## 5.5. Балансные уравнения

Одна из задач квантовой электроники – нахождение распределения числа частиц по энергетическим уровням. Её строгое решение может быть проведено на основе общих уравнений для матрицы плотности и электромагнитного поля, когда учитывается динамика как диагональных, так и недиагональных элементов. Существует приближенный подход, когда используются балансные (кинетические) уравнения для числа частиц на энергетических уровнях. Вспомним в качестве примера уравнения для двухуровневой схемы

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \Gamma_{21}\rho_{22} - \Gamma_{12}\rho_{11} + W\rho_{22} - W\rho_{11}.$$

Здесь не учтены спонтанные переходы и наличие других уровней. В общем случае запишем следующее **балансное (кинетическое) уравнение**:

$$\frac{dN_m}{dt} = \sum_{n \neq m} (\Gamma_{nm}N_n - \Gamma_{mn}N_m) + \sum_{n \neq m} W_{nm}(N_n - N_m) + \sum_{n \neq m} (A_{nm}N_n - A_{mn}N_m). \quad (5.32)$$

Данная методика, основанная на уравнениях баланса, будет использоваться нами довольно часто при анализе энергетических характеристик лазеров.



## 6. Общие вопросы построения лазеров

### 6.1. Особенности оптического диапазона

1. В оптическом диапазоне  $\hbar\omega_{mn} \gg kT$  и населенность верхних уровней близка к нулю в состоянии термодинамического равновесия:

$$\frac{N_m^e}{N_n^e} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{mn}}{kT}\right).$$

Все частицы в равновесном состоянии сосредоточены на нижнем энергетическом уровне:  $N_1^e \approx N$ .

2. Велика роль спонтанных переходов, поскольку  $A_{mn} \sim \nu_{mn}^3$ .

3. Размеры оптических резонаторов существенно превышают длину волны:  $\lambda \ll a, b, L$ , или  $\lambda \ll a, L$ , или  $\lambda \ll L$ , где  $a$ ,  $b$  и  $L$  – размеры резонатора по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно. Это необходимо для обеспечения достаточного энергосъема, который пропорционален числу активных частиц в рабочем веществе лазера:  $W_{out} \sim N$ . В газовых лазерах плотность таких частиц мала, и для достижения необходимых мощностей используются резонаторы длиной до десятков метров. В твердотельных лазерах плотность активных частиц ограничена необходимостью обеспечения узких спектральных линий используемых ионов. Например, в рубине  $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr}^{3+}$  концентрация таких активных частиц (ионов  $\text{Cr}^{3+}$ , уровни которого расположены в запрещенной зоне кристалла), не должна превышать 0.05 вес.%. Поэтому типичные размеры активной среды и резонаторов здесь могут составлять несколько сантиметров. Некоторые кристаллические матрицы допускают большую концентрацию активных ионов и поэтому позволяют реализовать лазеры на микрокристаллах с миллиметровой длиной.

Очень высока плотность активных частиц (электронов и дырок) в полупроводниках, где используются переходы между валентной зоной и зоной проводимости. Размер резонатора полупроводникового лазера составляет доли миллиметра.

## 6.2. Элементарная теория открытых оптических резонаторов

В лазерной технике используют открытые оптические резонаторы, представляющие собой в простейшем случае два плоских параллельных зеркала с коэффициентами отражения  $R_1$  и  $R_2$ , расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 6.1). Между зеркалами помещается активное вещество. Таким образом, реализуется так называемый **резонатор Фабри-Перо**, схема которого аналогична известному в оптике интерферометру Фабри-Перо.

Наименьшие потери в этом резонаторе имеют световые волны, распространяющиеся под малыми углами к его оси  $z$ . Их суперпозиция и определяет **собственные типы колебаний в резонаторе**, или **моды резонатора**. В общем случае, для нахождения резонансных частот и структуры светового поля мод резонатора расчеты проводятся с использованием волновой теории, основанной на применении уравнений Максвелла и граничных условий, или принципа Гюйгенса-Френеля. Однако некоторые важные характеристики можно получить *в приближении геометрической оптики*.

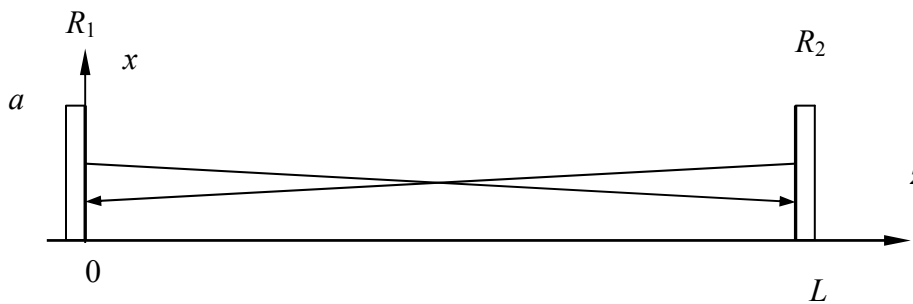


Рис. 6.1. Резонатор Фабри-Перо

Будем считать зеркала прямоугольными, имеющими большие поперечные размеры  $a$  и  $b$  по сравнению с длиной волны, но являющиеся сравнительно малыми относительно расстояния между ними, так что справедливы неравенства  $a, b \ll L$  и  $a^2, b^2 \gg \lambda L$ . Поле в таком резонаторе можно приближенно представить в виде суперпозиции плоских волн с волновыми векторами  $\vec{k}$ , близкими по направлению с осью  $z$ . В резонаторе будет поддерживаться поле (он будет обладать минимальными потерями) для волн, отражающихся от зеркал и распространяющихся в противоположных направлениях точно

вдоль его оси ( $\vec{k} \parallel \vec{z}^0$ ), если фаза поля при двукратном обходе по резонатору изменяется на  $2\pi q$ :

$$\omega_q t_{2\text{pass}} = q2\pi, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Учитывая, что  $t_{2\text{pass}} = 2L/c$ , получаем

$$\omega_q = q \frac{\pi c}{L}; \quad \Delta\omega = \omega_q - \omega_{q-1} = \frac{\pi c}{L}; \quad \Delta f = \frac{c}{2L}. \quad (6.2)$$

Индекс  $q = (\omega_q L)/(\pi c) = L/(\lambda/2)$  характеризует число полуволин, укладываемых вдоль оси резонатора, и называется продольным (или аксиальным) индексом. Для  $L = 1$  м и  $\lambda = 0.5$  мкм имеем  $q = 4 \cdot 10^6$ . Спектр резонансных частот для собственных колебаний такого типа, представляющих однородные стоячие волны в резонаторе Фабри-Перо и относящихся к так называемым *продольными (или аксиальными) модам*, является *эквидистантным* (рис. 6.2).

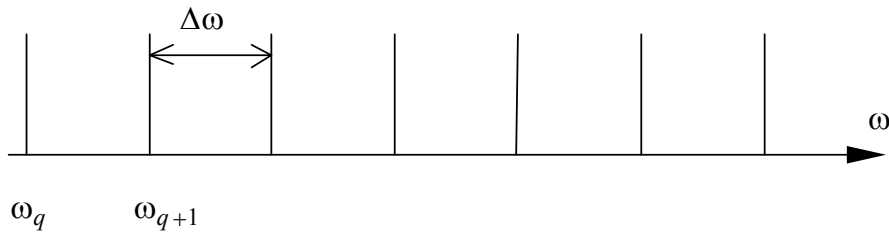


Рис. 6.2. Спектр продольных мод резонатора Фабри-Перо

Однако использованный подход не учитывает дифракционных явлений, связанных с конечными поперечными размерами зеркал. Проведенное Л.А. Вайнштейном на основе сведения волнового уравнения (3.20) к параболическому уравнению приближенное рассмотрение показывает, что электромагнитное поле в резонаторе Фабри-Перо с прямоугольными зеркалами может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн

$$E(\vec{r}, t) = E_{m+} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{mq}) + E_{m-} \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{mq}), \quad (6.3)$$

где вектор  $\vec{k}$  имеет проекции

$$k_x = \pm \frac{\pi}{a}(m+1), \quad k_y = \pm \frac{\pi}{b}(n+1), \quad k_z = \frac{\pi}{L}q, \quad (6.4)$$

а  $m$ ,  $n$  и  $q$  – положительные целые числа. Использование приближенных граничных условий, предполагающих обращение в ноль поля на поверхности зеркал (при  $z = 0, L$ ) и на их краях (при  $x = 0, a$  и  $y = 0, b$ ), а также неравенств  $a^2, b^2 \gg \lambda L$ , позволяет представить структуру светового поля в резонаторе в виде стоячих волн следующего вида:

$$E_{mnq}(x, y, z, t) = E_0 \cos(\omega_{mnq}t) \sin\left[\frac{\pi}{a}(m+1)x\right] \sin\left[\frac{\pi}{b}(n+1)y\right] \sin\left(\frac{\pi}{L}qz\right). \quad (6.5)$$

Таким образом, распределение полей различных мод в резонаторе можно характеризовать одним аксиальным индексом  $q$  и двумя **поперечными индексами**  $m$  и  $n$ . Поскольку поперечные размеры зеркал значительно меньше расстояния между ними, световое поле мод принято считать поперечно-электромагнитным и обозначать как  $TEM_{mnq}$ . В лазерных резонаторах обычно поперечные индексы невелики ( $m, n \sim 0 - 5$ ), в то время как аксиальные индексы, как отмечалось выше, имеют порядок  $q \sim 10^6$ .

Совокупность типов колебаний, характеризуемых одной парой поперечных индексов  $m$  и  $n$ , принято называть **поперечной модой**. Такой поперечной моде могут соответствовать несколько типов колебаний, отличающихся продольным индексом  $q$ . При рассматриваемой прямоугольной симметрии индексы  $m$  и  $n$  соответствуют числу перемен знака поля вдоль каждой поперечной оси ( $x$  и  $y$ ). Низший тип колебаний  $TEM_{00q}$  (так называемая *основная, или фундаментальная мода*) не содержит изменений знака поля.

Резонансная частота  $\omega_{mnq}$  для соответствующей моды резонатора может быть найдена из дисперсионного уравнения (3.39). Для волнового вектора с проекциями, определяемыми формулами (6.4), находим

$$\omega_{mnq} = \pi c \sqrt{\frac{(m+1)^2}{a^2} + \frac{(n+1)^2}{b^2} + \frac{q^2}{L^2}} \approx q \frac{\pi c}{L} + \frac{(m+1)^2}{2q} \frac{\pi c L}{a^2} + \frac{(n+1)^2}{2q} \frac{\pi c L}{b^2}. \quad (6.6)$$

Из выражения (6.6) можно получить разность частот  $\Delta\omega_q = \omega_{mnq+1} - \omega_{mnq} = \pi c/L$  между двумя соседними модами, имеющими одни и те же значения поперечных индексов  $m$  и  $n$ ,

но различающимися на единицу аксиальными индексами  $q$ . Как видно, данный межмодовый интервал, нередко называемый *разностью частот между двумя последовательными продольными модами*, совпадает с полученным выше результатом на основе рассмотрения поля в виде плоских волн, распространяющихся точно вдоль оси в резонаторе Фабри-Перо.

Отметим, что поле основной моды  $TEM_{00q}$  в рассматриваемом приближении представляется в виде суперпозиции плоских волн, имеющих отличные от нуля поперечные составляющие волнового вектора  $k_x = \pm\pi/a$  и  $k_y = \pm\pi/b$ .

Оно обладает угловой расходимостью дифракционного характера, которая может быть оценена по оси  $x$  как  $\theta_{dx} \sim 2k_x/k_z \approx (2\pi/a)/(2\pi/\lambda) = \lambda/a$  и по оси  $y$  как  $\theta_{dy} \sim 2k_y/k_z \approx \lambda/b$ .

### 6.3. Добротность резонатора

Потери связаны как с неидеальностью резонатора, так и со связью с нагрузкой (*полезные потери*). Для вывода энергии одно или оба зеркала резонатора делаются частично прозрачными. Уменьшение энергии в резонаторе за один полный проход равно:

$$\Delta W = -W(1-r), \quad (6.7)$$

где  $r = R_1 R_2$  - результирующий коэффициент отражения зеркал, а  $R_1$  и  $R_2$  относятся к зеркалам 1 и 2 (рис. 6.1). Затухание энергии в колебательной системе определяется через ее добротность  $Q$ :

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{\omega}{Q}t\right), \quad (6.8)$$

следовательно,

$$dW = -W \frac{\omega}{Q} dt. \quad (6.9)$$

Отсюда, приравнявая  $\Delta W$  и  $dW$ , при  $dt = 2Ln/c$ , получаем

$$Q = \frac{2L\omega n}{(1-r)c} = \frac{4\pi Ln}{\lambda(1-r)}, \quad (6.10)$$

где  $n$  – показатель преломления среды, заполняющей резонатор.

Оценим порядок величины добротности реального резонатора. Для  $r = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  мкм,  $L = 1$  м,  $n = 1$  получаем  $Q = 2 \cdot 10^7$ .

*Внутренние потери* связаны с дифракцией на зеркалах, их непараллельностью, с дефектами чистоты полирования поверхности зеркал и т. д.

Оценим *влияние дифракции на добротность резонатора*. Из физики известно, что угол дифракционной расходимости излучения равен:

$$\theta_{dif} \approx \frac{\lambda}{D}, \quad (6.11)$$

где  $D$  – размер зеркала. Вероятность того, что свет выйдет из резонатора за счет дифракции, равна отношению  $\theta_{dif}$  к угловому размеру зеркала:

$$\frac{\theta_{dif}}{D/L} = \frac{\lambda L}{D^2}.$$

Эта вероятность должна суммироваться с вероятностью  $(1 - r)$  выхода энергии через зеркала:

$$Q = \frac{4\pi Ln}{\lambda \left(1 - r + \frac{\lambda L}{D^2}\right)}. \quad (6.12)$$

Для  $\lambda = 0,5$  мкм,  $D = 10$  мм,  $L = 1$  м,  $n = 1$  имеем:  $\lambda L / D^2 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ . В твердотельных лазерах, как правило,  $\lambda L / D^2 \ll (1 - r)$ . В случае гелий-неонового лазера дифракционные потери сравнимы с полезными потерями, обеспечивающими оптимальную выходную мощность, и играют существенную роль.

На добротность резонатора влияет и *перекос зеркал* (рис. 6.3).

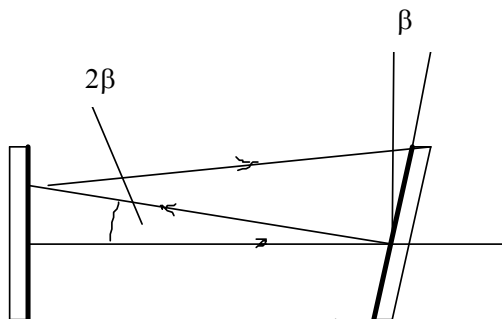


Рис. 6.3. Влияние перекоса зеркал на распространение лучей в резонаторе Фабри-Перо

Можно показать, что расстройка  $\beta$  не должна превышать величину  $\beta < 2D(1-r)^2 / L$ , чтобы исключить это влияние. Для реальных лазеров допускается перекося зеркал в единицы-десятки угловых секунд.

#### 6.4. Волновая теория открытых резонаторов

Строгое решение, определяющее собственные колебания (моды) резонатора, должно быть основано на использовании уравнений Максвелла (или соответствующих волновых уравнений) с определенными начальными и граничными условиями, учитывающими, в частности, отличие от нуля светового поля на поверхности зеркал и на их краях. Более простой подход базируется на последовательном применении принципа Гюйгенса-Френеля, поскольку все размеры существенно превышают длину волны, и поле имеет поперечный характер.

Расчеты показывают, что в резонаторе устанавливаются различные типы поперечно-электромагнитных (*ТЕМ*) колебаний, характеризующихся тремя индексами –  $m$ ,  $n$  и  $q$ . Резонансные частоты определяются выражением

$$\omega_{mnq} = q \frac{\pi c}{L} + \frac{c}{L} \varphi_{mn}, \quad (6.13)$$

где  $\varphi_{mn}$  – фазовый сдвиг за один проход резонатора для данного типа колебаний. Отметим, что частотный интервал между двумя последовательными продольными модами  $\Delta\omega_q = \omega_{mnq+1} - \omega_{mnq} = \pi c/L$  здесь получается таким же, как и из элементарной теории. Как и выше, поперечные индексы  $m$  и  $n$  указывают число изменений знака поля на поверхностях зеркал вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно, а аксиальный индекс  $q$  равен числу полуволн, укладываемых вдоль координаты  $z$ .

Примеры распределения поля на зеркалах резонатора представлены на рис. 6.4. Обычно  $m$  и  $n$  принимают значения от 0 до  $\sim 5$ , а  $q=10^5-10^6$ . Частотные интервалы между модами с одним продольным и с различными поперечными индексами ( $mn$ ,  $(m+1)n$ ;  $mn$ ,  $m(n+1)$ ; и т. д.) невелики, поскольку для резонатора Фабри-Перо выполняется условие  $\varphi_{mn} \ll 2\pi$ , и составляют от единиц до десятков кГц (иногда сотни). Расстояние между продольными модами, как было найдено выше, много больше и составляет сотни мегагерц.

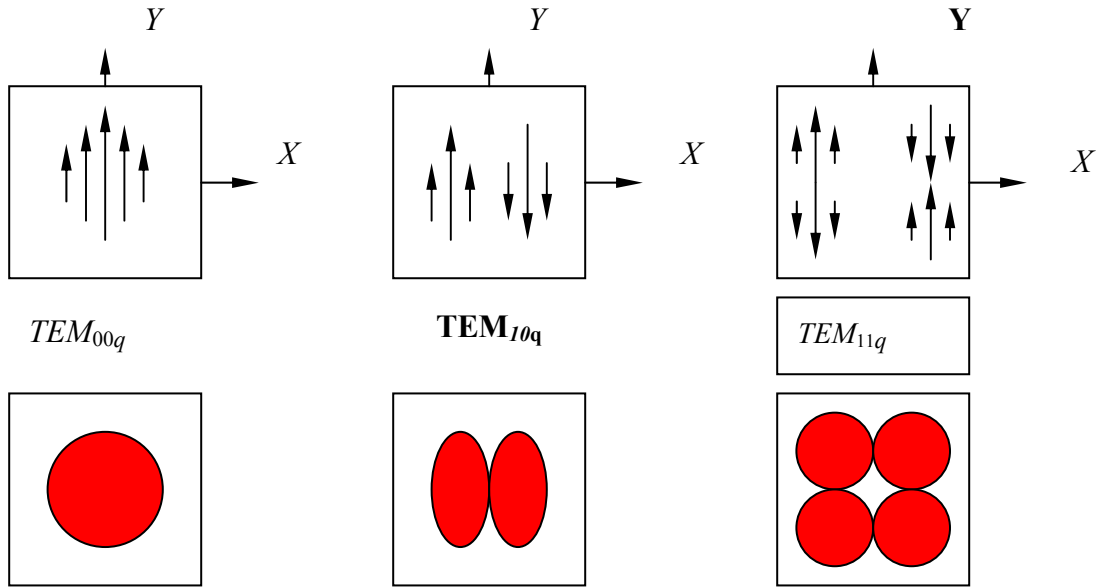


Рис. 6.4. Распределения светового поля на зеркалах резонатора для различных мод

В активном резонаторе помещено вещество, способное усилить электромагнитные волны. Оно обладает определенной спектральной характеристикой – усиливает лишь те моды пассивного резонатора, которые попадают в пределы спектральной линии усиления вещества (рис. 6.5).

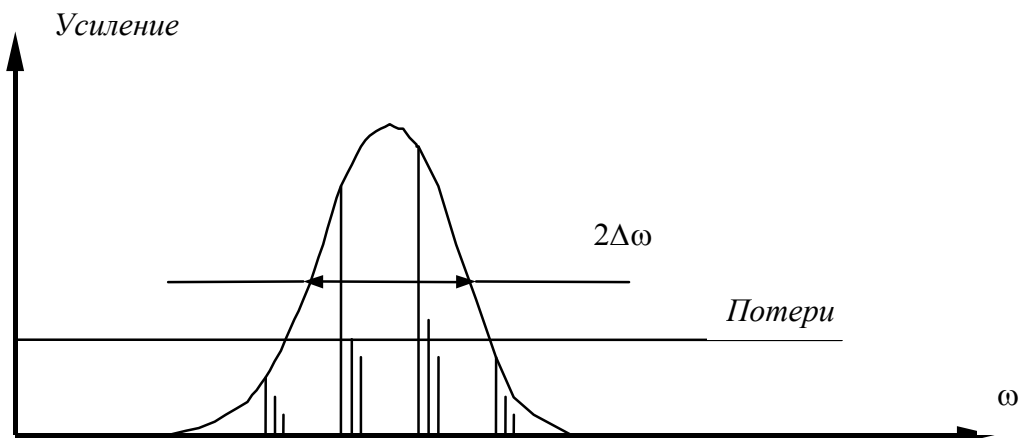


Рис. 6.5. Спектральные характеристики активного резонатора



Генерируют лишь те моды, для которых усиление больше потерь. Для He-Ne лазера ширина спектральной линии вещества составляет  $\sim 800$  МГц, для твердотельных лазеров – 30-40 ГГц и более.

Поэтому в He-Ne лазере одновременно могут генерироваться несколько мод. В твердотельных лазерах число одновременно генерируемых мод может достигать десятков, и даже сотен.

## 6.5. Классификация оптических резонаторов

Кроме резонаторов Фабри-Перо, используются и резонаторы со сферическими зеркалами. Рассмотрим основные типы таких двухзеркальных резонаторов.

1. **Конфокальный резонатор**: оба зеркала имеют радиус кривизны  $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = L$  (рис. 6.6, а).
2. **Полуконфокальный**:  $\tilde{R}_1 = 2L, \tilde{R}_2 = \infty$  (плоское зеркало) (рис. 6.6, б).
3. **Концентрический**:  $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 = L/2$  (рис. 6.6, в).
4. Резонаторы с произвольным соотношением радиусов кривизны зеркал и расстояния между ними.

Достоинства резонаторов со сферическими зеркалами заключаются в том, что в ряде случаев они обладают меньшими дифракционными потерями, чем резонаторы Фабри-Перо, кроме того, они менее критичны к точности юстировки.

В резонаторах с произвольными радиусами кривизны зеркал дифракционные потери сильно зависят от соотношения  $L$  и  $\tilde{R}$ . В некоторых случаях резонатор может стать неустойчивым, то есть иметь большие дифракционные потери. На рис. 6.7 приведена диаграмма для качественной оценки величины дифракционных потерь в резонаторах с произвольным соотношением  $L$  и  $\tilde{R}$ .

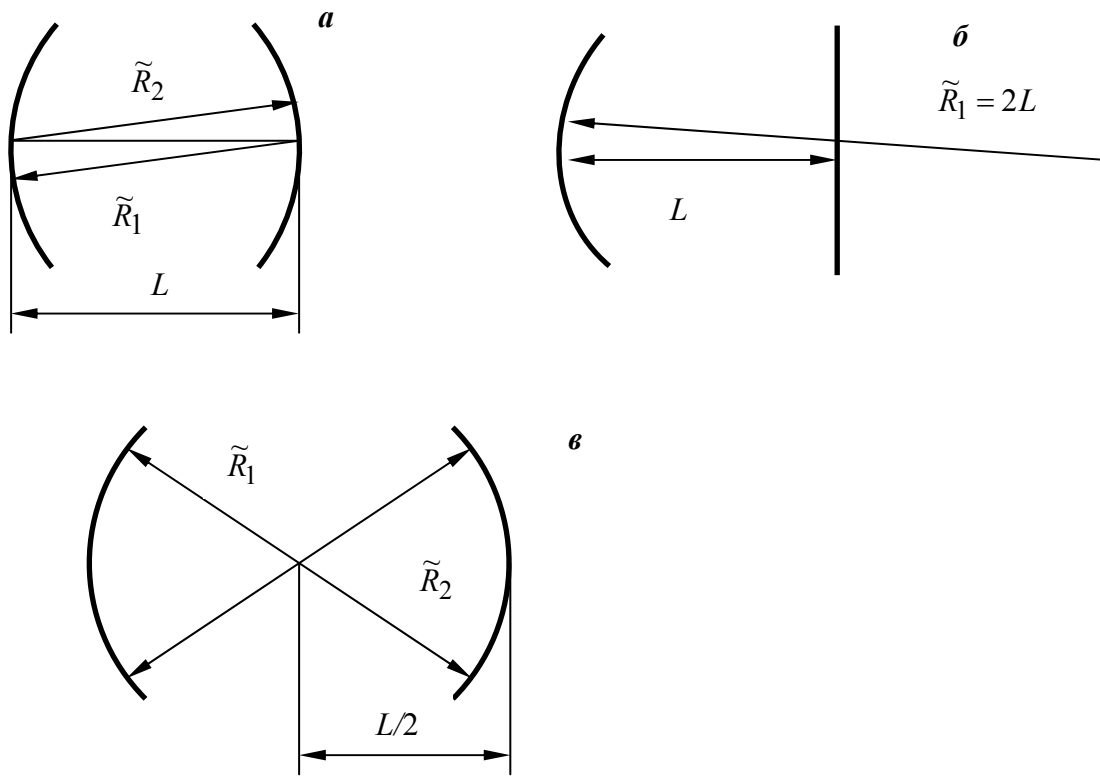


Рис. 6.6. Конфигурация конфокального (а), полуконфокального (б) и концентрического (в) резонаторов

Отметим, что резонаторы Фабри-Перо [точка (-1,-1)], конфокальный (0,0) и концентрический (1,1) находятся на границе устойчивости. Здесь небольшие изменения длины резонатора или кривизны зеркал приводят к большим дифракционным потерям. Наиболее широко применяются лазерные резонаторы, которые образованы либо двумя сферическими зеркалами с большими радиусами кривизны (превышающими длину резонатора, например, в 2 – 10 раз), либо плоским зеркалом и сферическим зеркалом с большим  $\tilde{R}$ . В последнем случае плоское зеркало используется в качестве выходного, обеспечивая плоский волновой фронт генерируемого пучка.

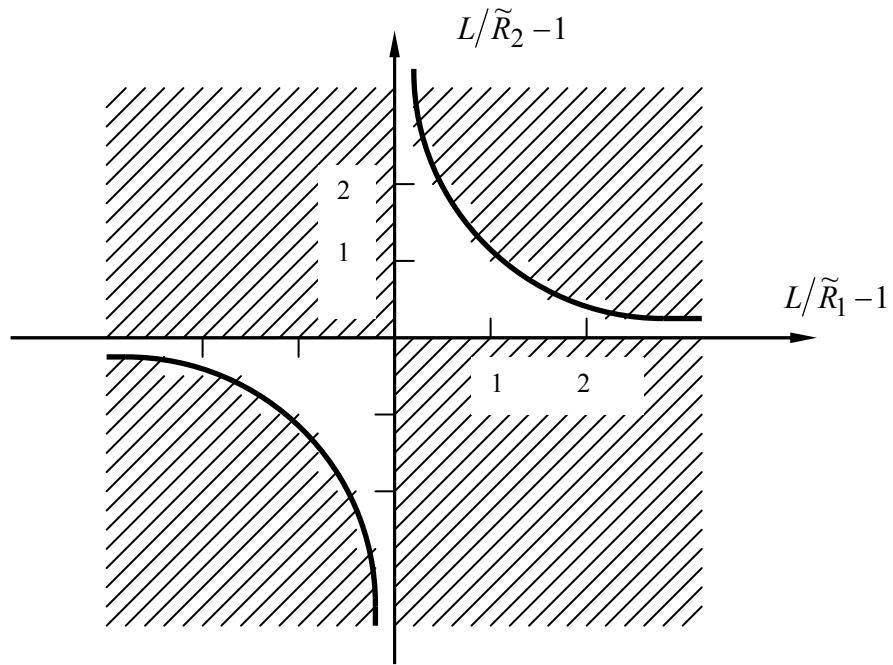


Рис. 6.7. Диаграмма для качественной оценки дифракционных потерь (заштрихованные области соответствуют большим потерям в резонаторе)

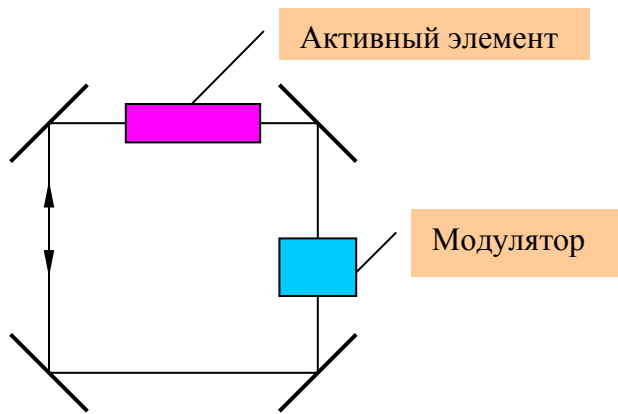


Рис. 6.8. Четырехзеркальный кольцевой оптический резонатор

В резонаторах кольцевого типа световые волны распространяются в двух направлениях – по часовой стрелке и против ее движения. Обычно используются трехзеркальные и четырехзеркальные (рис. 6.8) схемы.

## 6.6. Селекция типов колебаний в оптических резонаторах

Генерация многих продольных и поперечных типов колебаний существенно ухудшает такие характеристики лазеров, как монохроматичность, когерентность и направленность излучения. Поэтому применяют различные способы подавления как высших поперечных мод, так и всех продольных мод, кроме одной.

Если лазер работает на одной продольной моде и основном типе колебаний  $TEM_{00q}$ , то такой режим называют **одночастотным**.

При работе лазера на основной моде  $TEM_{00q}$  его режим работы называют **одномодовым**.

Поперечные типы колебаний высших порядков можно исключить из процесса усиления, вводя потери для таких мод, имеющих индексы  $m$  и  $n$ , отличные от нуля (рис. 6.9). Применяются для селекции поперечных мод плоско-сферические резонаторы, находящиеся на границе устойчивости. Используются и неустойчивые резонаторы, у которых одно из зеркал является плоским, а другое – выпуклым.

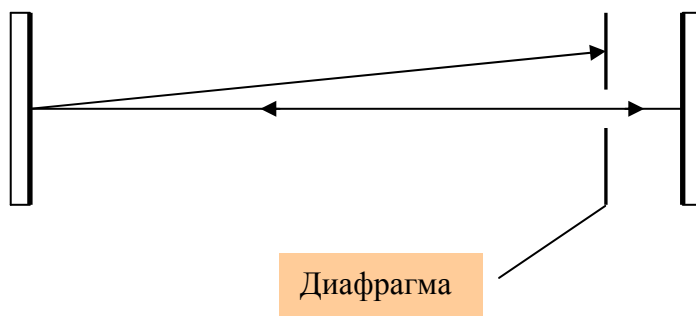


Рис. 6.9. Резонатор Фабри-Перо с селектором поперечных мод в виде диафрагмы

Селекция продольных мод может осуществляться применением связанных резонаторов (рис. 6.10).

Резонансные частоты данных резонаторов определяются выражениями:

$$\omega_{q_1} = \frac{\pi c}{L_1} q_1, \quad \omega_{q_2} = \frac{\pi c}{L_2} q_2.$$

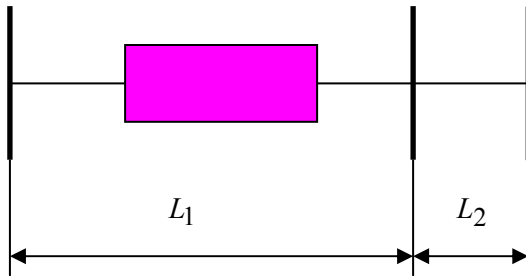


Рис. 6.10. Составной резонатор Фабри-Перо

В случае выполнения условия  $L_2 \ll L_1$  зеркала, составляющие резонатор с расстоянием  $L_2$  между ними, могут рассматриваться как единое зеркало. Коэффициент отражения такого зеркала достигает максимума на частотах  $\omega_{q_2}^R = \omega_{q_2} + \pi c / (2L_2)$ , поэтому максимальная добротность связанных резонаторов будет иметь место при совпадении частот  $\omega_{q_1} = \omega_{q_2}^R$ . В генерацию будет входить продольная мода с наивысшей добротностью. Именно таким образом реализуется *одночастотная* генерация.

## 6.7. Характеристики лазерного излучения

### Когерентность и монохроматичность

Лазерное излучение обладает рядом замечательных свойств – высокой *монохроматичностью и когерентностью* (когерентность бывает *временная и пространственная*).

*Степень монохроматичности* – это отношение ширины спектра частот, генерируемых источником, к центральной частоте,  $\delta f / f_0$ . Ширина спектра  $\delta f$  определяется шириной линии излучения (люминесценции) и числом генерируемых мод.

Наименьшая ширина линии излучения достигается при работе лазера в одночастотном режиме. Наилучшие результаты –  $\delta f$  составляет единицы Гц. При  $f_0 \sim 10^{14}$ - $10^{15}$  Гц степень монохроматичности достигает значений  $\delta f/f_0 \sim 10^{-14}$ .

*Когерентностью называют согласованное протекание во времени нескольких волновых процессов или свойство, отражающее стабильность фазы одной или нескольких электромагнитных волн.*

Когерентность характеризует, например, способность электромагнитных волн интерферировать друг с другом. Рассмотрим интерференцию двух волн, осуществляемую, например, с помощью интерферометра Юнга (рис. 6.11).

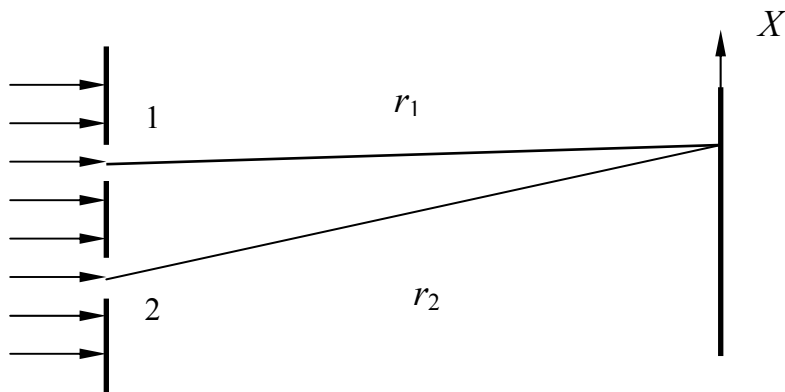


Рис. 6.11. Интерференция света в опыте Юнга

В интерференционной картине, распределение интенсивности в которой иллюстрируется рис. 6.12, будут наблюдаться максимумы (при  $k(r_2 - r_1) - (\psi_2 - \psi_1) = 2\pi p$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  - начальные фазы светового поля для щелей 1 и 2) и минимумы (при  $k(r_2 - r_1) - (\psi_2 - \psi_1) = (2p+1)\pi$ ).

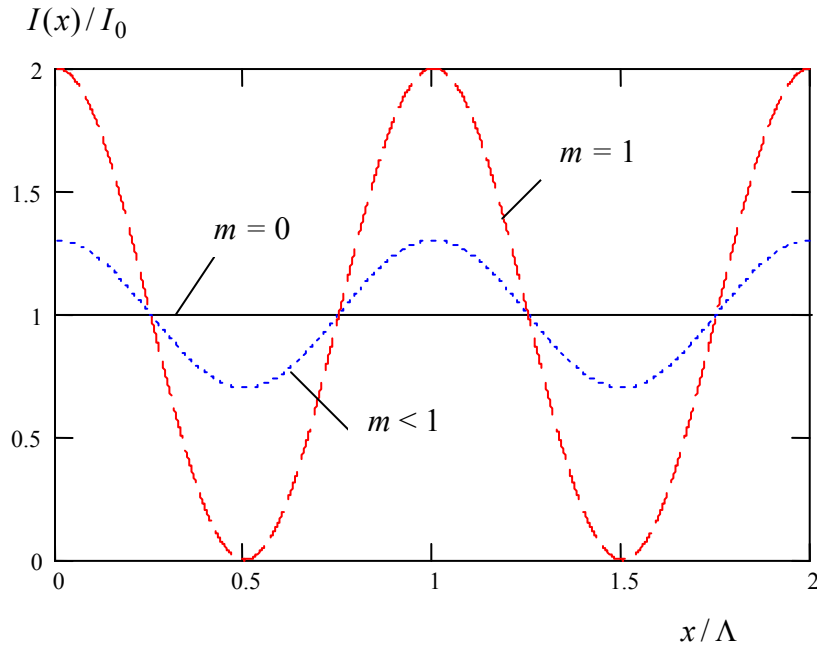


Рис. 6.12. Распределение интенсивности света в интерференционной картине при ее различных контрастах

Существует понятие **контрастности** интерференционной картины

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (6.14)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – интенсивности света в ее максимумах и минимумах.

При  $m = 1$  излучение полностью когерентно, при  $m = 0$  – полностью некогерентно. Для всех реальных источников света  $m < 1$ , то есть когерентность является частичной, что связано с двумя причинами.

1. Излучение не строго монохроматично (частичная временная когерентность).
2. Источник излучения имеет конечные размеры, причем фазы волн, испускаемых из разных точек источника, отличаются друг от друга. В этом случае разность фаз  $\psi_2 - \psi_1 = \Delta\psi(t)$  для двух пространственно разделенных точек не является постоянной во времени (частичная пространственная когерентность).

Чтобы определить величины, которыми принято характеризовать временную когерентность, рассмотрим интерференцию излучения с конечной степенью монохроматичности при  $\psi_2 - \psi_1 = 0$ . При ширине спектра излучения  $\delta f \neq 0$  условие  $k\Delta r = (2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = (\omega/c)(r_2 - r_1) = (2\pi f/c)\Delta r = 2\pi\tau$  выполняется в некоторой области

значений  $\Delta r$ . Для количественной оценки учтем, что частицы вещества излучают не непрерывно, а в течение некоторых интервалов времени, расстояниями между которыми случайны (рис. 6.13).

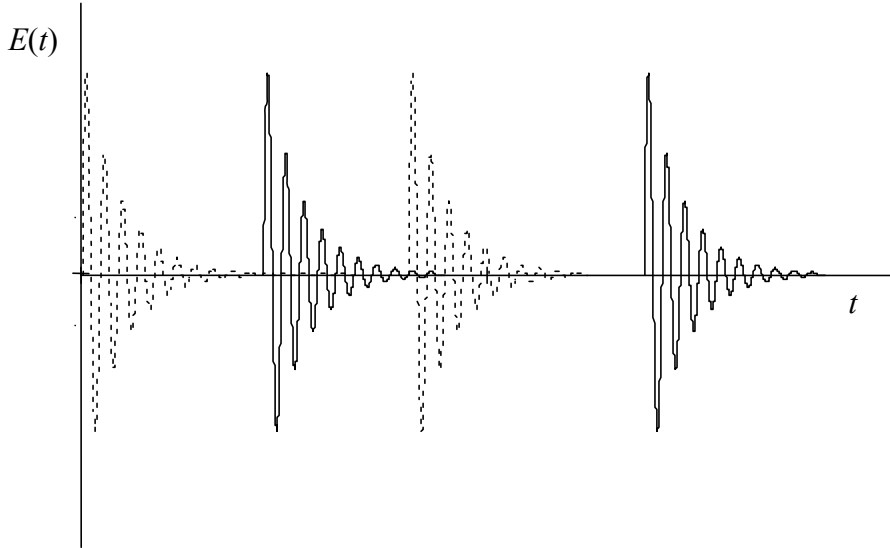


Рис. 6.13. Цуги излучения нескольких микрочастиц

Часть сигнала, в течение которой его фаза меняется непрерывно, называется *цугом* – за это время *временная когерентность сохраняется*. Длина цуга  $\tau_c$  обратно пропорциональна ширине спектра излучения:

$$\tau_c = \frac{1}{\delta f}, \quad (6.15)$$

то есть связана со степенью монохроматичности. Время  $\tau_c$  называют *временем когерентности*, а длину цуга в пространстве  $l_c = c\tau_c = c/\delta f = \lambda_0^2/\delta\lambda$  – *длиной когерентности*.

Очевидно, что контрастная интерференционная картина получается в том случае, когда изменение разности фаз  $d(k\Delta r) = (2\pi/\lambda_0^2)\delta\lambda\Delta r$ , связанное с конечной шириной спектра  $\delta\lambda$ , будет много меньше, чем  $2\pi$ . Отсюда получаем:

$$\Delta r \ll \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}; \quad \Delta r \ll l_c. \quad (6.16)$$

Таким образом, для получения контрастной интерференционной картины разность хода волн должна быть много меньше длины когерентности. Какова же длина когерентности различных источников света? Для белого света  $\delta f \sim 10^{14}$  Гц,  $\tau_c \sim 10^{-14}$  с и  $l_c \sim$



1 мкм. Для многомодового гелий-неонового лазера  $\lambda_0 = 0,633$  мкм,  $\delta f \sim 5 \cdot 10^8$  Гц,  $\tau_c \sim 2 \cdot 10^{-9}$  с,  $l_c \sim 60$  см. Для одночастотного лазера при  $\delta f \sim 15$  Гц, имеем  $\tau_c \sim 6,7 \cdot 10^{-2}$  с и  $l_c \sim 2 \cdot 10^7$  м.

Данное свойство **временной когерентности** очень важно для голографии. Схема записи голограммы Лейта и Упатниекса представлена на рис. 6.14. На фотопластинку падает как опорная волна  $R$ , так и предметная волна  $S$  от объекта. Интерференционная картина этих волн фиксируется на фотопленке в виде функции пропускания. После экспонирования, проявления, закрепления, промывки и просушки она играет роль дифракционной решетки, на которой при дифракции опорной волны создаются рассеянные волны в том же направлении, что и сигнальные волны, «пронизывающие» фотопленку. У наблюдателя создается иллюзия, что за пластинкой находится объект, который находился в данном месте при записи голограммы. Естественно, здесь  $\Delta r$  должно быть существенно меньше  $l_c$ . Чем больше длина когерентности лазера, тем больше глубина сцены, которую можно запечатлеть на голограмме.

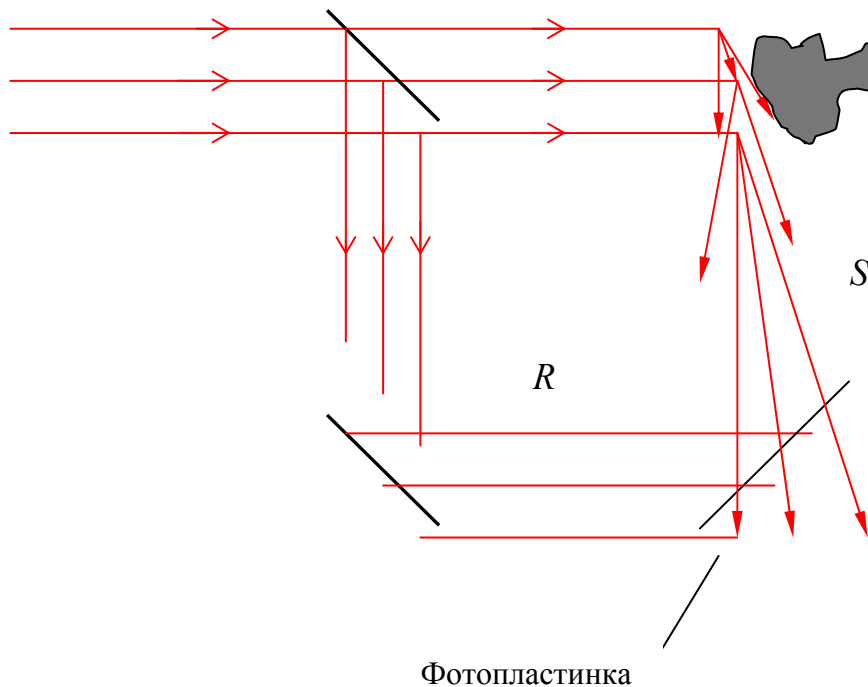


Рис. 6.14. Схема записи голограмм по методу Лейта и Упатниекса

**Пространственная когерентность** связана со стабильностью фазы излучения в плоскости поперечного сечения пучка. Если лазер генерирует основную моду  $TEM_{00q}$ , то

фазовый фронт пучка близок к плоскому, то есть фаза остается постоянной по всему сечению. Большую роль пространственная когерентность играет при создании направленного излучения и при фокусировке лазерных пучков.

Как пространственная, так и временная когерентность лазерного излучения являются следствием использования индуцированных переходов для его генерации: частота, фаза и направление распространения излучения являются согласованными для всего объема активного вещества.

### Расходимость лазерных пучков

Расходимость выходного пучка минимальна при генерации лазера на основной моде  $TEM_{00q}$ . В случае плоского выходного зеркала фазовый фронт излучения на этом зеркале также является плоским, а амплитуда падает от центра к краям пучка по закону Гаусса

$$E(r) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right), \quad (6.17)$$

где радиус  $r_0$  характеризует поперечный размер пучка (при  $r = r_0$  интенсивность уменьшается в  $e$  раз). Угол дифракционной расходимости такого гауссова пучка (рис. 6.15) определяется приближенным выражением

$$\theta_{dg} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\lambda}{2r_0} \approx \frac{\lambda}{D_0}, \quad (6.18)$$

где  $D_0 = 2r_0$  определяет эффективный диаметр пучка в области его наименьшего сечения (перетяжки), то есть на выходном зеркале.

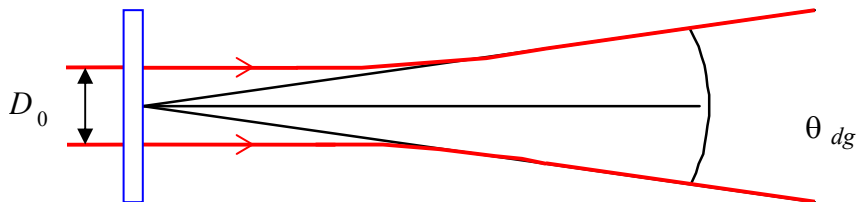


Рис. 6.15. Дифракционная расходимость светового пучка

Для уменьшения расходимости лазерный пучок можно расширить с помощью коллиматора, например, линзового (рис. 6.16) или зеркального.

В рассматриваемом случае линзовый коллиматор увеличивает апертуру пучка в  $D_2/D_1 = F_2/F_1$  раз. Оценим угловую расходимость при  $\lambda = 0,5$  мкм и  $D_0 = 50$  см:  $\theta_{dg} \approx 1$  мкрад. На расстоянии  $R = 400\,000$  км это дает освещенное пятно с размером  $D_{ill} = R\theta_{dg} = 400$  м.

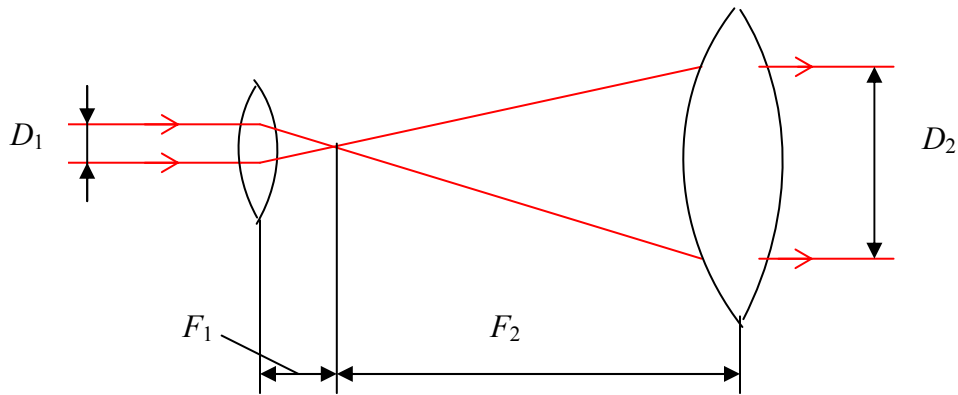


Рис. 6.16. Линзовый коллиматор

Пример использования лазерного излучения с малой угловой расходимостью – оптическая локация Луны. Для увеличения интенсивности отраженного пучка можно использовать систему угловых отражателей (рис. 6.17).

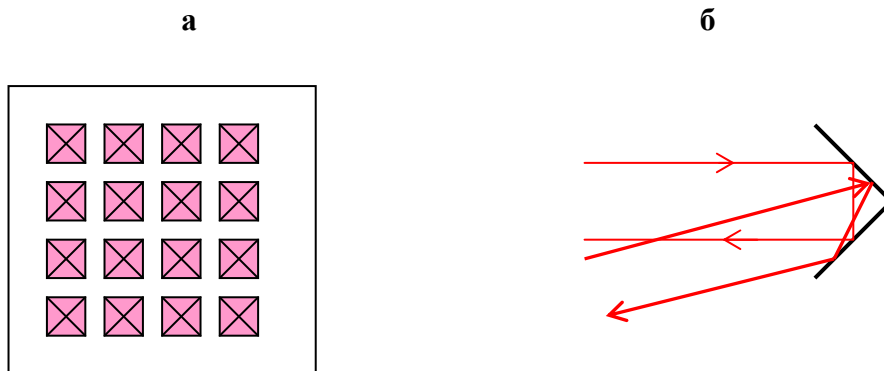


Рис. 6.17. Решетка угловых отражателей (а) и ход лучей при отражении (б)

### Фокусировка лазерных пучков

Схема, иллюстрирующая фокусировку лазерного пучка с гауссовым распределением амплитуды, имеющего эффективный диаметр пучка  $D$  и плоский волновой фронт на выходном зеркале, показана на рис. 6.18. Для этой цели здесь используется тонкая положительная линза с фокусным расстоянием  $F$ , расположенная на расстоянии  $f_1$  от выходного зеркала лазера.

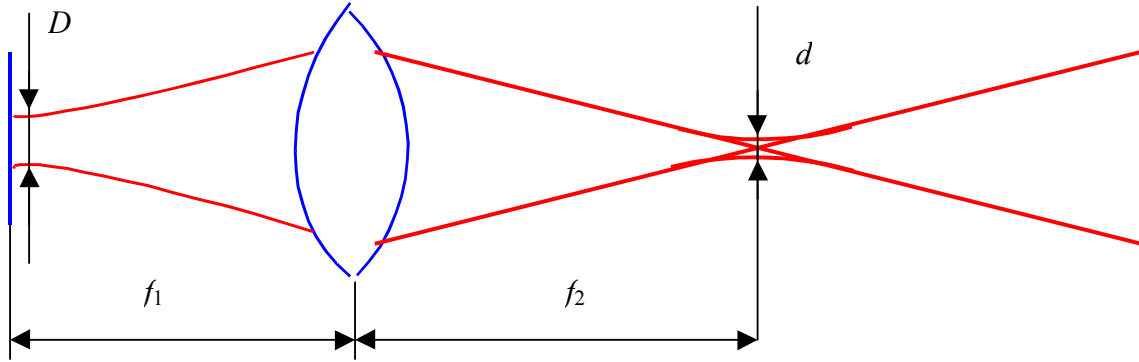


Рис. 6.18. Фокусировка гауссова лазерного пучка

После прохождения линзы пучок сохраняет гауссов профиль, но имеет другой эффективный диаметр  $d$  в области его наименьшего сечения (перетяжки пучка), расположенного на расстоянии  $f_2$  от нее. Эти параметры пучка, преобразованного линзой, определяются выражениями

$$d = \frac{DF}{\sqrt{(f_1 - F)^2 + [\pi D^2 / (4\lambda)]^2}}, \quad (6.19)$$

$$f_2 = F + \frac{(f_1 - F)F^2}{(f_1 - F)^2 + [\pi D^2 / (4\lambda)]^2}, \quad (6.20)$$

и зависят от соотношения между параметром конфокальности фокусируемого пучка  $z_0 = \pi D^2 / (4\lambda)$  и расстоянием  $f_1 - F$  между выходным зеркалом и передней фокальной плоскостью линзы. Для пучка с эффективным диаметром  $D > 2$  мм и длиной волны  $\lambda = 0,633$  мкм, излучаемого гелий-неоновым лазером, параметр конфокальности можно оценить как  $z_0 > 5$  м. В случае выполнения неравенства  $z_0 \gg |f_1 - F|$  соотношения (6.19) и (6.20) существенно упрощаются:

$$d \approx \lambda \frac{4F}{\pi D} \approx 1.27\lambda \frac{F}{D}, \quad f_2 \approx F. \quad (6.21)$$

Параметр  $F/D$  определяет угловую апертуру линзы. Поскольку легко достигаемая угловая апертура имеет значения  $F/D \sim 2$ , то эффективный размер пятна в фокальной плоскости линзы составляет  $\sim 2,5\lambda$ . Для гелий-неонового лазера ( $\lambda = 0,633$  мкм) этот размер можно оценить как  $d \sim 1,5$  мкм.

Применения сфокусированных лазерных пучков: запись и хранение информации в цифровой форме (лазерные диски); обеспечение высоких плотностей мощности лазерного излучения для технологических целей и другое. Например, легко подсчитать, что гелий-неоновый лазер с мощностью 50 мВт обеспечивает в фокальном пятне интенсивность  $5 \cdot 10^4$  Вт/мм<sup>2</sup>. Кстати, хрусталик человеческого глаза является очень хорошей положительной линзой. Поэтому нужно быть осторожным с лазерным излучением и избегать попадания прямого (не рассеянного) излучения в глаза.

### Энергетические и временные характеристики лазеров

Лазеры работают в следующих режимах генерации: *непрерывном, моноимпульсном и периодическом*. Основная характеристика лазера в *непрерывном режиме* – выходная мощность  $P_{out}$ . Она может изменяться от милливаттного уровня в маломощных лазерах (например, полупроводниковых инжекционных и гелий-неоновых), до значений, превышающих десятки киловатт, в мощных химических и молекулярных газовых лазерах.

В *моноимпульсном режиме* основными характеристиками являются энергия  $W_p$ , длительность импульса  $\tau_p$  и мощность  $P_p = W_p / \tau_p$ .

Пример. Экимерный фторкриптоновый лазер имеет параметры  $W_p = 10^4$  Дж и  $\tau_p = 1$  мкс. Его мощность в импульсе составляет  $P_p = 10^{10}$  Вт. Минимальная достигнутая длительность импульса составляет  $\tau_p = 8 \cdot 10^{-15}$  с. Максимальная мощность в импульсе, полученная к настоящему времени, равна  $\sim 10^{13}$  Вт.

*Периодический режим* имеет дополнительный параметр – частота следования импульсов  $f_p = 1/T_p$ . Она может быть и достаточно малой, например  $f_p = 0.1$  Гц ( $T_p = 10$  с). В инжекционных полупроводниковых лазерах за счет модуляции тока накачки сейчас легко достигается частота повторения  $f_p \sim 10^9$  Гц.

## 6.8. Уширение спектральных линий

### Естественная ширина спектральной линии

Как отмечалось ранее, при переходе частицы с верхнего  $p$  на нижний  $n$  уровень излучение происходит в течение конечного времени жизни  $\tau_p$  на данном верхнем уровне:

$$E(t) = E_m \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \exp(i\omega_{pn}t).$$

Если переход возможен только на единственный нижний уровень и никакие внешние факторы на частицу не действуют, то время жизни определяется вероятностью спонтанного перехода  $A_{pn}$ :  $\tau_p = 1/A_{pn}$ . Если же существуют возможности перехода и на другие нижние уровни спонтанно, то уравнение баланса для населенности уровня  $p$  принимает вид:

$$\frac{dN_p}{dt} = -(A_{pn} + A_{pk} + A_{pl} + \dots)N_p. \quad (6.22)$$

Таким образом,  $1/\tau_p = A_{pn} + A_{pk} + A_{pl} + \dots = 1/\tau_{pn} + 1/\tau_{pk} + 1/\tau_{pl} + \dots$ . Время жизни сокращается по сравнению со случаем единственного нижнего уровня. Спектральная линия излучения в данном случае имеет вид кривой Лоренца

$$g(\omega) = \frac{1/(\pi\tau_p)}{1/\tau_p^2 + (\omega - \omega_{pn})^2}, \quad (6.23)$$

удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega = 1. \quad (6.24)$$

Ширина этой линии по уровню 0,5 от максимума равна  $2\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = 1/\tau_p$  (рис. 6.19).

*Ширина спектральной линии, обусловленная только спонтанными переходами, называется естественной шириной спектральной линии, а время  $\tau_p$  – естественным временем жизни частицы на верхнем уровне  $p$ .*

*Ширина данной спектральной линии  $2\Delta\omega$  определяет тот предел, уже которого спектральная линия быть не может.*

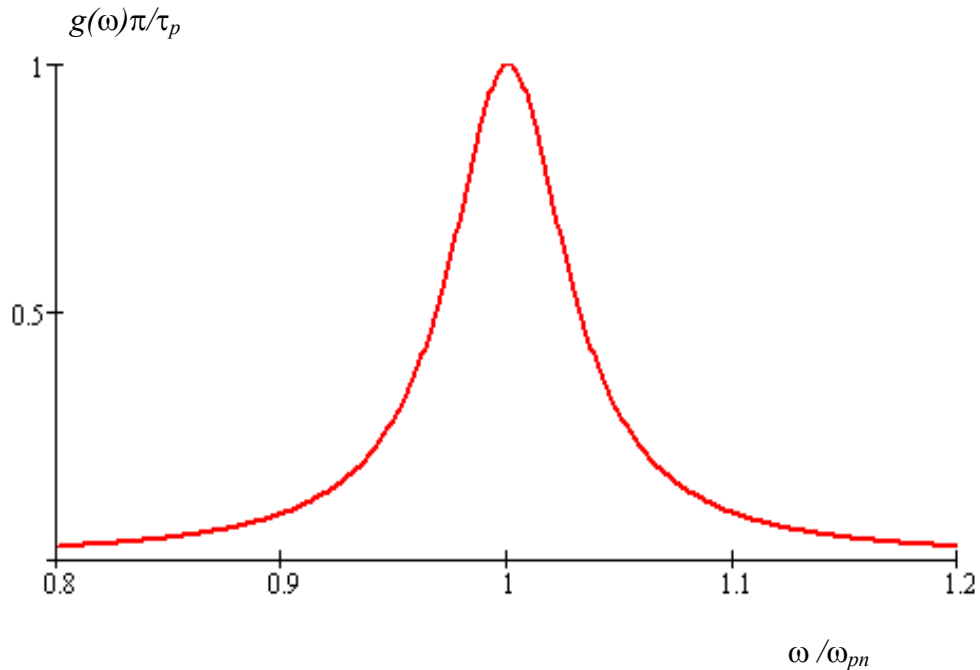


Рис. 6.29. Нормированная спектральная линия излучения, соответствующая спонтанным переходам, при  $\omega_{pn}\tau_p = 10\pi$

### Однородное уширение спектральной линии

Время жизни на верхнем уровне может быть существенно сокращено за счет безызлучательных (тепловых) переходов под действием термостата. В твердых телах такие процессы связаны с взаимодействием примесных центров (например, ионов  $\text{Cr}^{3+}$ , замещающие атомы Al в  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) с колебаниями решетки. В газах тепловые переходы происходят при соударениях частиц друг с другом и со стенками сосуда, в котором они находятся. Частота перехода в этом случае не изменяется, и происходящее за счет уменьшения времени жизни уширение спектральной линии называют **однородным**.

Форма спектральной линии  $g(\omega)$  при этом также не изменяется и описывается кривой Лоренца. Величина уширения может быть как малой, так и очень большой.

## Неоднородное уширение спектральной линии

*Неоднородно* уширенные спектральные линии наблюдаются в том случае, когда частота перехода для различных частиц не является постоянной. Примером может служить различие в частотах квантов, излучаемых движущимися частицами газа, связанное с эффектом Допплера. Такое *неоднородное* уширение называют **доплеровским уширением**. Другая причина *неоднородного* уширения, наблюдаемого в твердых телах, связана с *расщеплением энергетических уровней примесных центров* за счет **эффектов Штарка** (во внешнем и внутрикристаллическом электрическом поле) и **Зеемана** (в магнитном поле) в условиях взаимодействия с кристаллической решеткой и ее неидеальности. В стеклах каждый примесный активный центр находится в своем (случайном) окружении, то есть в случайном электрическом поле. В этом случае неоднородное уширение спектральной линии особенно велико.

Неоднородно уширенную спектральную линию можно представить как совокупность однородно уширенных линий Лоренца с различными частотами перехода. Вклад каждой из этих элементарных линий пропорционален числу частиц, имеющих данную частоту перехода. Форму такой неоднородно уширенной спектральной линии излучения чаще всего описывают с помощью кривой Гаусса.

## 7. Твердотельные лазеры

### 7.1. Схемы функционирования твердотельных лазеров

В твердотельных лазерах состояние инверсии населенностей реализуется между энергетическими уровнями активных частиц (активаторов), в качестве которых используются ионы, внедренные в диэлектрические кристаллы или стекла. Для создания инверсии населенностей используется оптическая накачка с помощью газоразрядных ламп, полупроводниковых светодиодов и лазеров. Коэффициент полезного действия (КПД) твердотельных лазеров не превышает нескольких процентов при ламповой накачке и может достигать значения  $\sim 30\%$  при использовании в качестве источника накачки инжекционных лазеров. Спектральный диапазон излучения для твердотельных лазеров



ограничен оптической прозрачностью кристаллов и стекол, в которые внедрены активные ионы. Поэтому такие лазеры генерируют излучение в ближней ультрафиолетовой, видимой и ближней инфракрасной областях спектра.

Используемые в твердотельных лазерах ионы активаторов обладают сложным энергетическим спектром. Однако реализующиеся схемы переходов частиц между используемыми уровнями позволяют рассматривать в качестве моделей так называемые **трехуровневую и четырехуровневую схемы реализации состояния инверсии населенностей**.

Трехуровневая схема иллюстрируется рис. 7.1.

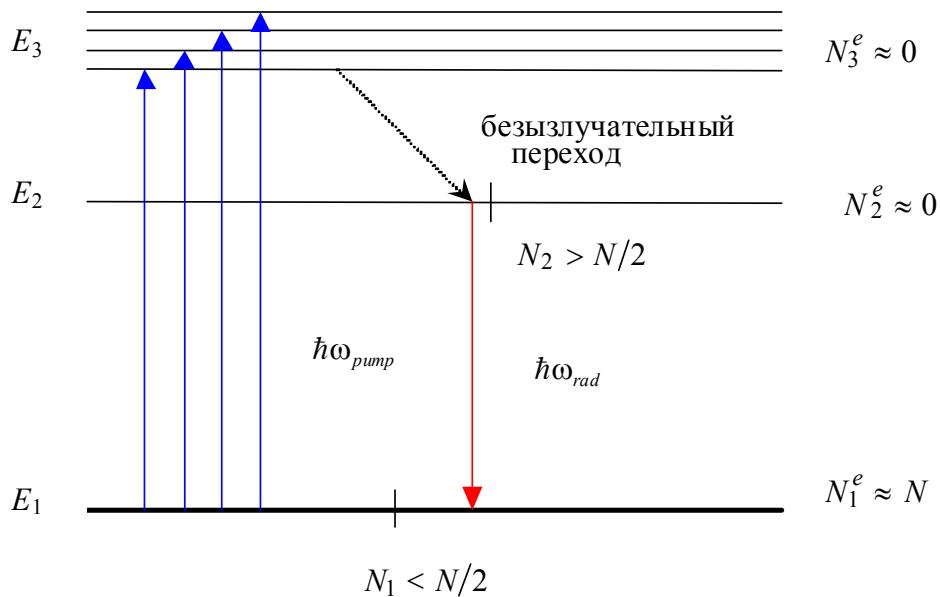


Рис. 7.1. Трехуровневая схема достижения инверсии населенностей в твердотельном лазере при накачке немонахроматическим излучением

В условиях термодинамического равновесия практически все частицы расположены на нижнем (основном) энергетическом уровне с энергией  $E_1$ , то есть  $N_1^e \approx N$ . Населенности лежащих выше уровней 2 и 3 близки к нулю:  $N_2^e \approx 0, N_3^e \approx 0$ . Верхнее энергетическое состояние 3 представляет систему близко расположенных уровней, заселение которых происходит под действием оптического излучения накачки, переводящей на них частицы с основного энергетического уровня. Условно это показано несколькими вертикальными стрелками, отражающими отдельные спектральные

компоненты некогерентного излучения накачки. Сколько таких стрелок останется при некогерентном источнике накачки? Только одна.

Время жизни частиц на уровне 3 очень мало – в лазере на рубине, для которого реализуется именно трехуровневая схема, при комнатной температуре  $\tau_3 \sim 10^{-8}$  с. Частицы с уровня 3 переходят на метастабильный (с большим временем жизни) уровень 2, где за счет этого могут накапливаться. Например, в лазере на рубине  $\tau_2 = 3.4$  мс при  $T = 300$  К. После выполнения условия  $N_2 > N_1$  ( $N_2 > N/2$  в рассматриваемой схеме) реализуется состояние инверсии населенностей, и на переходе 2→1 возникает сильное спонтанное излучение (люминесценция). Некоторые из излучаемых спонтанно фотонов соответствуют модам оптического резонатора, в который помещается активный элемент. Эти фотоны являются затравочными, они имеют максимальное время жизни в резонаторе, и вызываемые ими индуцированные переходы частиц между уровнями 2 и 1 становятся преобладающими над спонтанными переходами 2→1. В результате лазер генерирует когерентные оптические колебания, но только на тех модах резонатора, для которых испускаемая энергия будет больше потерь.

Трехуровневая схема имеет значительный недостаток – для нее принципиально существует порог генерации, т. е. минимально необходимая энергия накачки. Она требуется для обеспечения инверсии населенностей, реализующейся при переводе на второй уровень (верхний уровень рабочего перехода) более половины частиц. Это делает ее невыгодной энергетически.

Отметим, что не все частицы, заброшенные накачкой на верхний уровень, переходят на уровень 2. Доля частиц, попавших на верхний уровень рабочего перехода, от их полного числа, заброшенных накачкой на верхний уровень, называется **квантовым выходом**. Для лазера на рубине квантовый выход может достигать значения  $\eta = 0.8$ .

**Четырехуровневая схема реализации состояния инверсии населенностей** изображена на рис. 7.2. Как и в предыдущем случае, в равновесном состоянии все частицы находятся в основном энергетическом состоянии, а населенности остальных уровней – второго, третьего и четвертого – близки к нулю.

Поэтому достаточно небольшого количества частиц, переведенных накачкой с уровня 1 на уровень 4, чтобы, после их безызлучательного перехода на уровень 3, между

уровнями 3 и 2 возникло состояние инверсии населенностей. Индуцированные переходы частиц  $3 \rightarrow 2$  обеспечивают генерацию лазерного излучения с частотой  $\omega_{rad} = \omega_{32} = (E_3 - E_2) / \hbar$ , а большая вероятность безызлучательного перехода  $2 \rightarrow 1$  способствует опустошению уровня 2 и сохранению состояния инверсии населенностей.

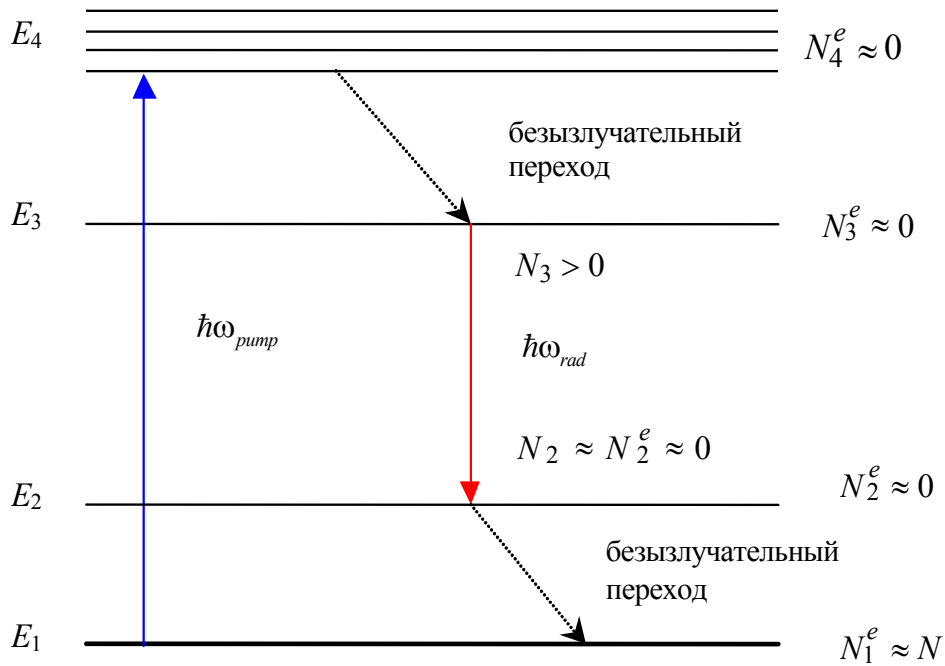


Рис. 7.2. Четырехуровневая схема достижения инверсии населенностей в твердотельном лазере при монохроматическом источнике накачки

По четырехуровневой схеме создания инверсия населенностей достигается в большинстве современных твердотельных лазеров: это лазеры на кристаллах и стеклах, активированных трехвалентными ионами неодима  $\text{Nd}^{3+}$ ; сапфир-титановый лазер ( $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Ti}^{3+}$ ); волоконные усилители и лазеры на кварцевом волокне, легированном ионами эрбия  $\text{Er}^{3+}$ ; и другие. Преимущество четырехуровневой схемы проявляется в более низком уровне накачки, при котором в лазере возникает генерация (пороговая энергия или мощность накачки), и в большей выходной мощности, чем для трехуровневой схемы. Например, для лазера на рубине в непрерывном режиме достигнута выходная мощность  $\sim 5$  Вт, в то время как в лазере на алюмоиттриевом гранате с неодимом ( $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}:\text{Nd}^{3+}$ ) она может составлять 200 Вт.

## 7.2. Системы накачки твердотельных лазеров

В системе накачки твердотельных лазеров можно выделить 3 основных элемента:

1. Источник излучения накачки, световое излучение которого обеспечивает создание инверсии населенностей на рабочем переходе.
2. Осветительная система, с помощью которой излучение накачки концентрируется на активном элементе.
3. Блок питания источника накачки.

К источникам света для накачки предъявляются требования *высокой эффективности преобразования электрической энергии в световую* и *хорошего согласования спектра излучения со спектром поглощения* примесных центров в активном элементе.

В качестве **некогерентных источников накачки** наибольшее распространение получили газоразрядные лампы стержневой конструкции (рис. 7.3). Такие лампы должны выдерживать большие значения подводимой электрической мощности без их разрушения.

Для накачки импульсных лазеров на рубине используются ксеноновые лампы сверхвысокого давления с энергией излучения в импульсе, составляющей до нескольких тысяч Дж. Для накачки непрерывных лазеров на алюмоиттриевом гранате с неодимом эффективными являются лампы с криптоновым наполнением. Суммарный коэффициент полезного действия, с учетом эффективностей согласования спектров и преобразования электрической энергии в световую, для газоразрядных ламп составляет от 15% до 35%.

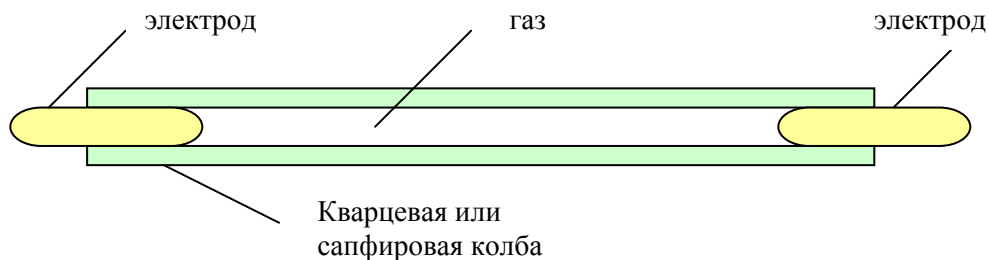


Рис. 7.3. Газоразрядная лампа стержневой конструкции

Среди **когерентных источников накачки** наибольшее распространение получили инжекционные лазерные диоды, коэффициент полезного действия которых достигает 60%. Для лазеров на алюмоиттриевом гранате с неодимом эффективно использование

**диодной накачки** с помощью инжекционных лазеров на основе GaAs, которые обеспечивают квантовый выход  $\eta \rightarrow 1$  при накачке в полосу поглощения излучения с длиной волны 0.9 мкм.

Для лазеров с накачкой некогерентным излучением в качестве **осветительной системы** используются, как правило, отражатели в виде эллиптического цилиндра (рис. 7.4). В основе функционирования этой системы лежит свойство, состоящее в том, что всякий луч, проходящий через фокальную ось, после отражения от поверхности эллиптического цилиндра обязательно пройдет через его вторую фокальную ось. Если на одну фокальную ось поместить лампу накачки, а на другую – активный элемент, то будет происходить эффективная концентрация светового излучения в активном элементе.

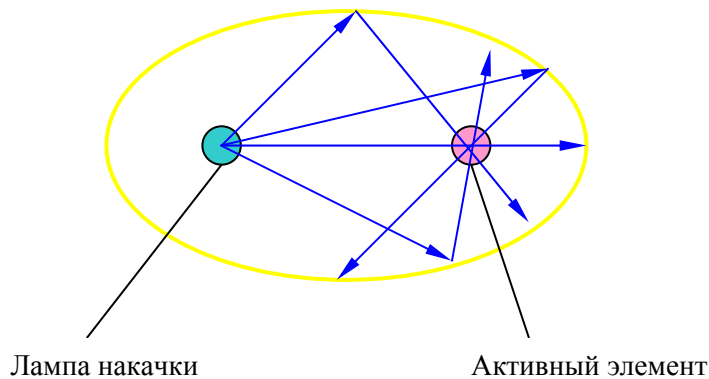


Рис. 7.4. Осветительная система твердотельного лазера на основе отражателя в виде эллиптического цилиндра

Поверхность эллиптического цилиндра полируется и покрывается высокоотражающим покрытием, например, серебром или алюминием. Эффективность такой осветительной системы, характеризующей отношение светового потока, падающего на активный элемент, к полному потоку, излучаемой лампой накачки, может достигать 70%. Потери связаны в первую очередь с конечными поперечными размерами газоразрядного промежутка лампы накачки и с отличием коэффициента отражения покрытия от единицы.

### 7.3. Балансные уравнения и режим непрерывной генерации в твердотельных лазерах

Для анализа энергетических характеристик лазера воспользуемся балансными уравнениями (см. подразд. 5.5) для числа частиц на верхнем и нижнем уровнях рабочего перехода. Для трехуровневой схемы это уровни 1 и 2, а для четырехуровневой – 2 и 3. Пренебрежем безызлучательными переходами между этими уровнями и примем, что квантовый выход накачки  $\eta = 1$ , то есть все частицы, заброшенные на третий (четвертый) уровень, оказываются на верхнем уровне рабочего перехода. Это позволяет ввести вероятность перехода одной частицы в единицу времени  $W_{pump}$  с основного уровня 1 на уровень 2 (3) под действием накачки. Тогда для трехуровневой схемы уравнения баланса можно представить в виде

$$\frac{dN_1}{dt} = bm(N_2 - N_1) + \frac{N_2}{\tau} - W_{pump}N_1, \quad (7.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -bm(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} + W_{pump}N_1, \quad (7.2)$$

где  $\tau = 1/A_{21}$  и вероятность индуцированного перехода на рабочем переходе для одной частицы в единицу времени выражена через число фотонов  $m$  в резонаторе:  $W_{21} = W_{12} = W = bm$ .

Считая выполняющимся условие  $N_1 + N_2 = N$ , введем новую переменную  $n = N_2 - N_1$  – разность населенностей уровней на рабочем переходе. Вычитая первое уравнение из второго и учитывая соотношения  $2N_1 = N - n$ ,  $2N_2 = N + n$ , получаем

$$\frac{dn}{dt} = -2bmn - \left(W_{pump} + \frac{1}{\tau}\right)n + \left(W_{pump} - \frac{1}{\tau}\right)N. \quad (7.3)$$

Сюда необходимо добавить уравнение для  $m$ . В резонаторе без активного вещества и для единственной моды имеем

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{\tau_R},$$

где  $\tau_R = Q/\omega$  – время затухания поля в резонаторе.

При наличии активного вещества число фотонов в резонаторе изменяется за счет индуцированных переходов. Учтем, что изменение разности населенностей в единицу

времени за счет индуцированных переходов равно  $2bmn$ , а также то, что при каждом переходе число фотонов в резонаторе меняется на  $\Delta m = \pm 1$ , а разность населенностей – на  $\Delta n = \mp 2$ . Поэтому для числа фотонов имеем

$$\frac{dm}{dt} = bmn - \frac{m}{\tau_R}. \quad (7.4)$$

Уравнения (7.3) и (7.4) образуют замкнутую систему, описывающую **динамику генерации лазерного излучения для трехуровневой схемы функционирования** твердотельного лазера в рамках принятых приближений.

Аналогичные уравнения для четырехуровневой схемы функционирования могут быть получены с учетом того, что  $n = N_3$ , поскольку  $N_2 = 0$ ; с использованием замен в (7.2)  $N_2 \rightarrow N_3 = n$ ,  $N_1 \rightarrow N_2 = 0$  в первых двух членах в правой части и  $N_1 \rightarrow N - n$  в третьем члене:

$$\frac{dn}{dt} = -bmn - \frac{n}{\tau} + W_{pump}(N - n), \quad (7.5)$$

$$\frac{dm}{dt} = bmn - \frac{m}{\tau_R}. \quad (7.6)$$

Рассмотрим далее **стационарные решения**, когда  $dn/dt = 0$  и  $dm/dt = 0$ . Для трехуровневой схемы получаем:

$$m \left( bn - \frac{1}{\tau_R} \right) = 0; \quad -2bmn - \left( W_{pump} + \frac{1}{\tau} \right) n + \left( W_{pump} - \frac{1}{\tau} \right) N = 0. \quad (7.7)$$

Система уравнений (7.7) имеет два решения:

$$m = 0, \quad n = \frac{W_{pump} - 1/\tau}{W_{pump} + 1/\tau} N; \quad (7.8)$$

$$m = \frac{N_{2thresh}}{\tau} \tau_R (\alpha - 1), \quad n = \frac{1}{b\tau_R}, \quad (7.9)$$

где введены обозначения:

$$N_{2thresh} = \frac{1}{2} \left( N + \frac{1}{b\tau_R} \right); \quad \alpha = \frac{W_{pump}}{W_{thresh}}; \quad W_{thresh} = \frac{1}{\tau} \frac{N + 1/(b\tau_R)}{N - 1/(b\tau_R)}. \quad (7.10)$$

В режиме 1  $m = 0$ , то есть лазерная генерация отсутствует. С ростом накачки  $W_{pump}$  разность населенностей  $n$  возрастает, и при  $W_{pump} \gg 1/\tau$  происходит полная перекачка частиц на уровень 2,  $n = N$ .

Существование *режима 2* возможно при  $\alpha > 1$ ,  $W_{pump} > W_{thresh}$  (при  $\alpha < 1$   $m < 0$ , что не имеет физического смысла). В этом случае *существует лазерная генерация*,  $m > 0$ . Разность населенностей в этом режиме не зависит от накачки, а выходная мощность, которая пропорциональна числу фотонов,  $P_{out} \sim m$ , линейно связана с мощностью накачки, которая пропорциональна  $W_{pump}$ .

Проверка найденных стационарных решений на устойчивость показывает, что при  $\alpha < 1$  устойчив режим 1, а при  $\alpha > 1$  – режим 2.

Анализ стационарных решений системы уравнений (7.5) и (7.6) для четырехуровневой схемы для режима генерации 2 дает те же соотношения (7.9) для разности населенностей  $n$  и числа фотонов в резонаторе  $m$ , но при других пороговых значениях населенности верхнего уровня и накачки:

$$N_{3thresh} = \frac{1}{b\tau_R}; \quad W_{thresh} = \frac{1}{\tau} \frac{1/b\tau_R}{N - 1/b\tau_R}. \quad (7.11)$$

Как следует из сравнения соотношений (7.10) и (7.11), при одинаковых значениях времени жизни частиц на верхнем уровне рабочего перехода  $\tau$  пороговое значение мощности накачки, пропорциональное  $W_{thresh}$ , для четырехуровневого лазера значительно меньше, чем для лазера, в котором используется трехуровневая схема функционирования.

Оценим выходную мощность непрерывного лазера. Полную мощность, рассеиваемую в резонаторе и излучаемую через выходное зеркало, можно оценить как  $\hbar\omega m / \tau_R$ . Если  $\tau_c$  – время жизни фотонов в резонаторе, обусловленное потерями на излучение через зеркало, а  $\tau_0$  – время жизни за счет всех других причин, то эти времена связаны соотношением:

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_0}.$$

Поэтому для трехуровневого лазера выходная мощность может быть оценена как

$$P_{out} = \frac{\hbar\omega}{\tau_c} m = \frac{N_{2thresh}}{\tau} (\alpha - 1) \frac{\tau_R}{\tau_c} \hbar\omega. \quad (7.12)$$

Численные расчеты по формуле (7.12) показывают, что выходная мощность лазера на рубине должна быть порядка 10 Вт. Это близко к экспериментально полученному значению 5 Вт.



Расчеты для четырехуровневого лазера на алюмоиттриевом гранате с неодимом дают значения выходной мощности в сотни Вт, соответствующие экспериментально полученным данным.

#### 7.4. Режим свободной генерации

*Режим свободной генерации* – это режим, в котором отсутствуют какие-либо воздействия на активный элемент и оптический резонатор, кроме системы накачки, и в резонаторе нет нелинейных элементов. Он может быть реализован в твердотельных лазерах при разряде батарей конденсаторов через лампу накачки. Длительность импульса накачки составляет около 1 мс, а лазерная генерация начинается с задержкой, необходимой для достижения пороговой разности населенностей  $n$ . Как правило, лазерное излучение генерируется в этом режиме в виде нерегулярной последовательности импульсов, называемых «пичками». Их длительность составляет от 0,1 до 1 мкс, а средний период следования имеет порядок 10 мкс.

Для анализа временного характера лазерного излучения в режиме свободной генерации воспользуемся системой уравнений (7.5) и (7.6) для четырехуровневой схемы реализации состояния инверсии населенностей, полученной в одномодовом приближении:

$$\frac{dn}{dt} = -bmn - \frac{n}{\tau} + W_{pump}(N - n),$$

$$\frac{dm}{dt} = bmn - \frac{m}{\tau_R}.$$

В качестве математической модели импульса накачки используем следующую его временную зависимость:

$$W_{pump}(t) = W_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_p} t\right) \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_p^2}\right). \quad (7.13)$$

Временная форма импульса накачки при  $W_0 = 500 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_p = 2 \text{ мс}$  и  $\tau_p = 0,2 \text{ мкс}$  представлена на рис. 7.5.

Численный анализ нелинейной системы уравнений (7.5) и (7.6) для параметров активного элемента и оптического резонатора  $\tau = 1 \text{ мс}$ ,  $b = 4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $N = 5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ,  $\tau_R =$

20 нс при начальных условиях  $n(0) = 0$  и  $m(0) = 10^{15} \text{ м}^{-3}$  приводит к зависимостям  $m(t)$  и  $n(t)$ , представленным на рис. 7.6 для интервала времени от 0 до 0,5 мс.

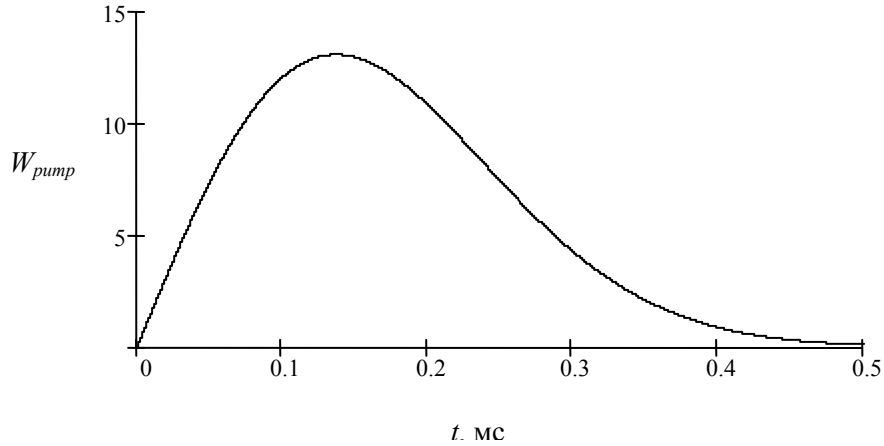


Рис. 7.5. Форма импульса накачки

Разность населенностей колеблется около своего порогового значения благодаря конкуренции накачки и индуцированного излучения, которое быстро, в течение генерируемого импульса, опустошает верхний уровень рабочего перехода. Для перевода накачкой частиц на этот уровень требуется гораздо большее время, поэтому нарастание  $n(t)$  происходит гораздо медленнее, чем ее падение.

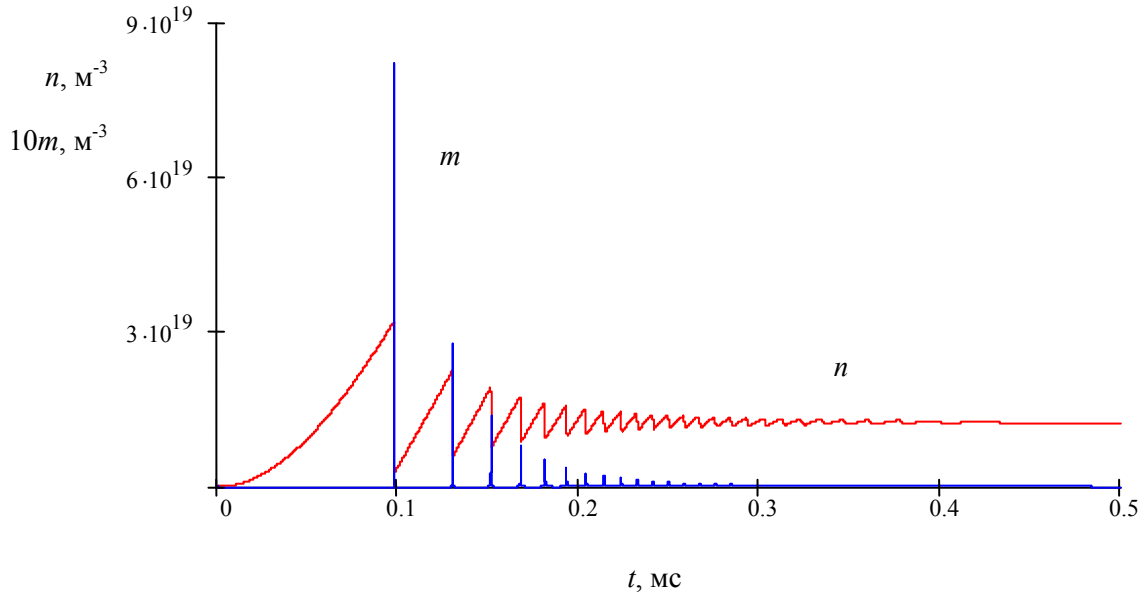


Рис. 7.6. Динамика изменения разности населенностей и числа фотонов в резонаторе в режиме свободной генерации

Структура первого из генерируемых импульсов показана на рис. 7.7. В указанных условиях он генерируется при достижении накачки порогового значения разности населенностей (около  $1,22 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ). Однако начало развития генерации, происходящее по экспоненциальному закону, трудно прослеживается по данному рисунку. Максимум излучения наблюдается, когда разность населенностей падает до порогового значения  $n_{\text{thresh}} = 1/(b\tau_R)$  (см. (7.6)).

При определенных параметрах активного вещества и резонатора генерируемые импульсы могут иметь постоянную величину в пределах большей части импульса накачки. Однако приближение одной генерируемой моды резонатора обычно не выполняется, и генерируемые в режиме свободной генерации «пички» носят хаотический характер.

В режиме свободной генерации твердотельные лазеры имеют энергию излучения от сотых долей джоуля до тысяч джоулей, а их коэффициент полезного действия может достигать нескольких процентов. Применяются такие лазеры в технологических установках, в частности, для пробивания отверстий малого диаметра и подгонки резисторов в интегральных схемах.

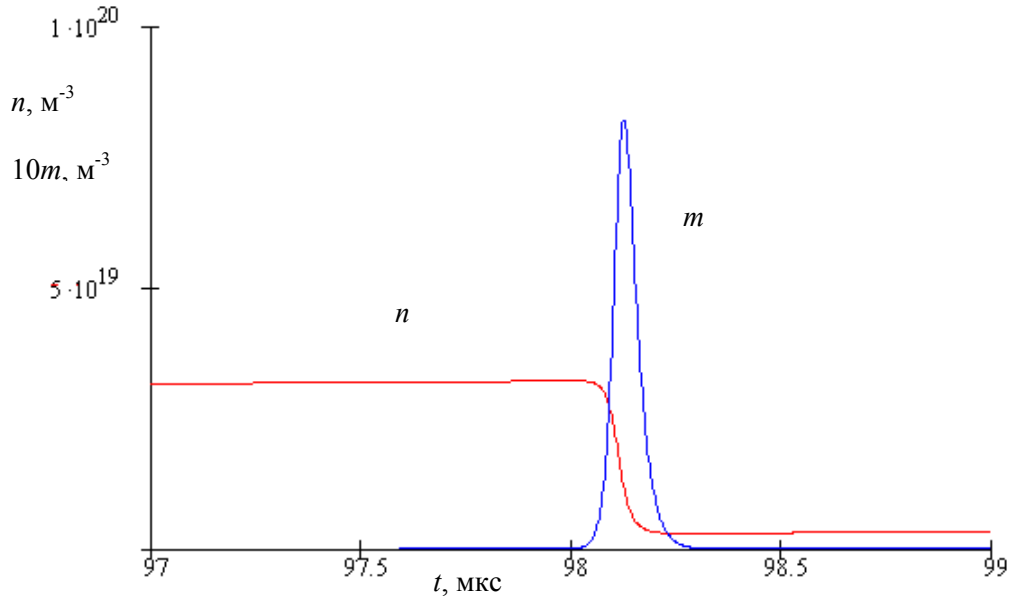


Рис. 7.7. Динамика изменения разности населенностей и числа фотонов в резонаторе вблизи первого генерируемого лазерного импульса

## 7.5. Лазеры с модуляцией добротности резонатора

Для ряда приложений, таких как дальнометрия и оптическая локация, требуется иметь моноимпульс лазерного излучения длительностью менее 1 мкс. Моноимпульсы излучения длительностью от 10 до 100 нс генерируются лазерами с модулированной добротностью резонатора.

### Принцип действия лазеров с модуляцией добротности резонатора

Как следует из рассмотрения режима свободной генерации, «пичок» начинается в момент, когда нарастающая разность населенностей становится равной пороговому значению. Максимум излучения «пичка» приходится на тот момент времени, когда она падает до порогового значения. В этом промежутке разность населенностей достигает максимума. Очевидно, что энергия, излученная в «пичке», определяется тем, насколько разность населенностей превысит свое пороговое значение. При свободной генерации эта разность мала, и излученная в одном «пичке» энергия тоже невелика. Чтобы ее увеличить, поступают следующим образом. Добротность резонатора уменьшают

настолько, чтобы разность населенностей не достигала порогового значения даже при высоких уровнях накачки. В некоторый момент времени потери выключаются, и добротность резонатора резко возрастает. Для образовавшегося высокодобротного резонатора величина  $n_{thresh}$  достаточно мала, а разность  $n - n_{thresh}$  достигает большой величины. В результате генерируется мощный импульс света малой длительности.

Динамику генерации моноимпульса рассмотрим на основе уравнений (7.5) и (7.6), полагая, что на первом этапе добротность резонатора низкая. Из полученной временной зависимости разности населенностей находим ее максимальное значение  $n_{max}$  и время его достижения. Далее полагаем, что добротность резонатора включается мгновенно при  $t = 0$  и используем полученное значение  $n_{max}$  в качестве начального,  $n(0)$ . При этом в уравнении (7.5) можно опустить последние два члена в правой части, считая, что во время генерации моноимпульса вероятности индуцированных переходов значительно превышают вероятности спонтанных переходов и переходов частиц на верхний уровень за счет накачки. В этом случае уравнения принимают вид:

$$\frac{dn}{dt} = -bmn, \quad (7.14)$$

$$\frac{dm}{dt} = bmn - \frac{m}{\tau_R}. \quad (7.15)$$

Воспользуемся описанной методикой для численного анализа моноимпульсной генерации лазера с модулированной добротностью, с параметрами активного элемента и накачки  $\tau = 3$  мс,  $b = 4 \cdot 10^{-12}$  м<sup>3</sup>/с,  $N = 5 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup> для резонатора, имеющего начальное время затухания поля  $\tau_R = 2$  нс, при начальных условиях  $n(0) = 0$  и  $m(0) = 10^{14}$  м<sup>-3</sup>. Импульс накачки с временной зависимостью, определяемой формулой (7.13), и с параметрами, приведенными в подразд. 7.4, приводит к эволюции разности населенностей, показанной на рис. 7.8.

Полагаем далее, что добротность резонатора «включается» при  $t = 400$  мкс, когда разность населенностей имеет значение  $n = 1,342 \cdot 10^{20}$  м<sup>-3</sup>. Для времени затухания поля в резонаторе  $\tau_R = 100$  нс и указанного значения «начальной» разности населенностей  $n(0) = 1,342 \cdot 10^{20}$  м<sup>-3</sup> численное решение системы уравнений (7.14) и (7.15) дает временные зависимости, представленные на рис. 7.9.

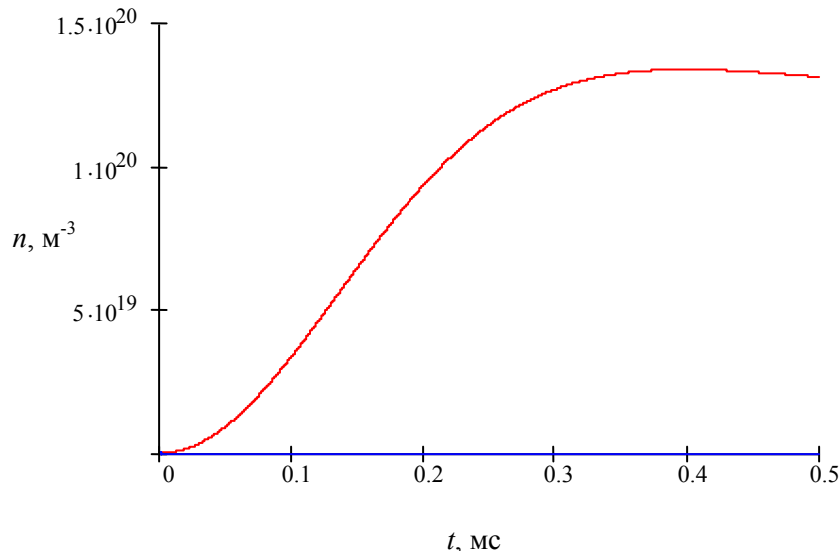


Рис. 7.8. Временная зависимость разности населенностей в лазере с низкодобротным резонатором

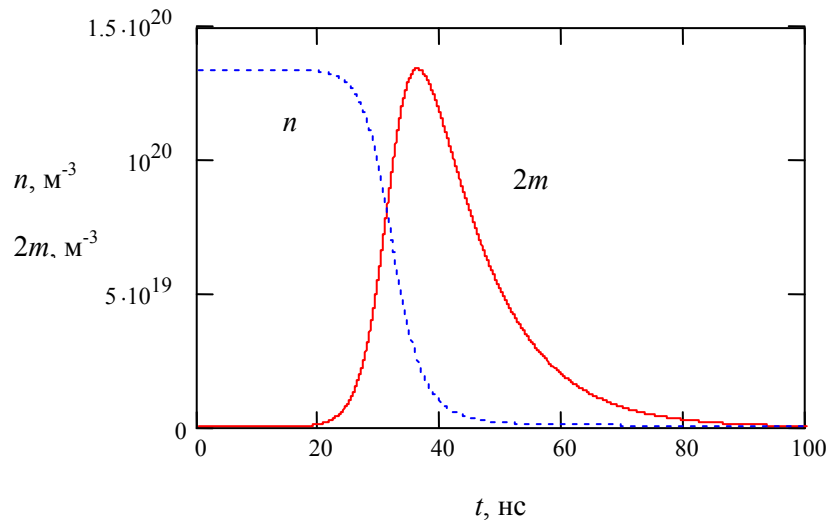


Рис. 7.9. Динамика изменения разности населенностей и числа фотонов в резонаторе в режиме модуляции добротности

Как видно, в этом случае генерируется моноимпульс излучения с длительностью  $\sim 20$  нс по уровню половинной мощности. Характерно, что максимальное число фотонов в резонаторе составляет примерно половину от максимально достигнутого значения разности населенностей. Оценки показывают, что энергия в импульсе для таких лазеров

составляет от единиц до десятков Дж, а импульсная мощность может достигать сотен МВт. Это делает такие лазеры чрезвычайно полезными для многих приложений.

### Способы модуляции добротности резонатора.

Самый простой способ заключается во *вращении одного из зеркал резонатора вокруг оси* (рис. 7.10).

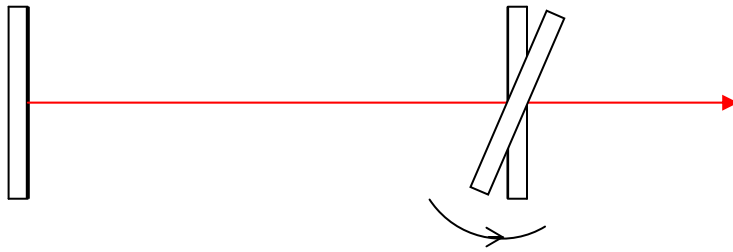


Рис. 7.10. Модуляция добротности резонатора с помощью вращающегося зеркала

Потери в резонаторе будут высокими до тех пор, пока зеркала не станут параллельными друг другу. Скорость вращения должна составлять от 20 до 30 тысяч оборотов в минуту, а импульс накачки быть синхронизованным с этим вращением таким образом, чтобы максимальная добротность «включалась» во время достижения разностью населенностей своего максимума. На практике в качестве вращающегося отражателя используют призму полного внутреннего отражения.

Более удобны в управлении **активные внутрирезонаторные оптические модуляторы потерь**, в качестве которых чаще всего используются электрооптические и акустооптические модуляторы света (рис. 7.11). Принцип действия этих модуляторов основан на изменении показателя преломления среды под действием приложенного электрического поля (электрооптический эффект) или акустических колебаний (фотоупругий эффект).

**Пассивные внутрирезонаторные модуляторы потерь** представляют собой насыщающиеся поглотители, принцип действия которых основан на просветлении среды под действием светового излучения. Это явление, называемое **эффектом насыщения**, рассмотрено подразд. 5.3.

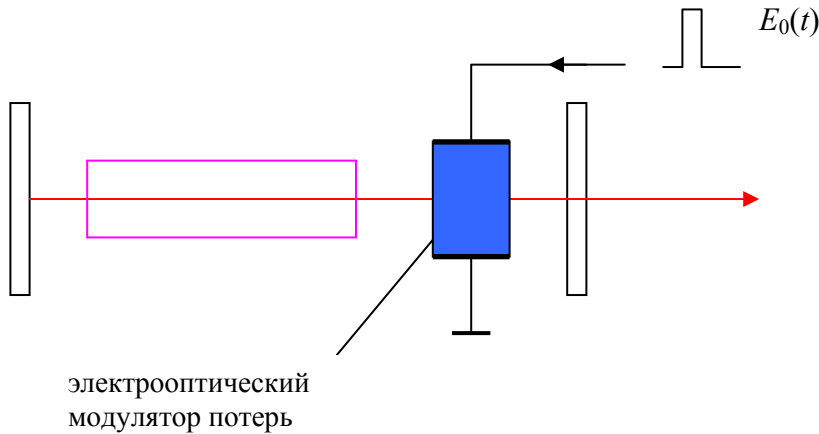


Рис. 7.11. Модуляция добротности с помощью внутриврезонаторного активного электрооптического модулятора потерь

## 7.6. Синхронизация продольных мод и генерация ультракоротких импульсов

Многие лазеры, в том числе и твердотельные, генерируют одновременно большое количество продольных мод. Фазы этих мод могут быть случайными относительно друг друга, и тогда какая-либо связь между ними в выходном излучении отсутствует. Однако усложнением схемы лазера *можно добиться жесткой связи между их фазами колебаний* – в этом случае реализуется **режим синхронизации мод**. Рассмотрим, к чему приводит жесткая фазовая связь на примере пяти эквидистантных мод, фазы которых совпадают при  $t = 0$ . Для наглядности изобразим временные зависимости для сигналов, у которых соседние частоты отличаются на 10% (рис. 7.12).

Как видно, амплитуда суммарного сигнала при  $t = 0$  увеличивается в 5 раз, а мощность, как квадратичная величина, увеличится в 25 раз по сравнению с мощностью единичного сигнала. Если сигналы не будут сфазированными и когерентными (стабильными по фазе), то они будут складываться не по амплитуде, а по интенсивности, которая в этом случае увеличится только в 5 раз.

Реально в лазерах отличия частот соседних мод составляют значительно меньшую величину, а число мод, которые удается синхронизовать, достигает 100 и более. Однако



для наглядности ограничимся суммированием девяти эквидистантных мод с частотами, отличающимися на 2% (рис. 7.13).

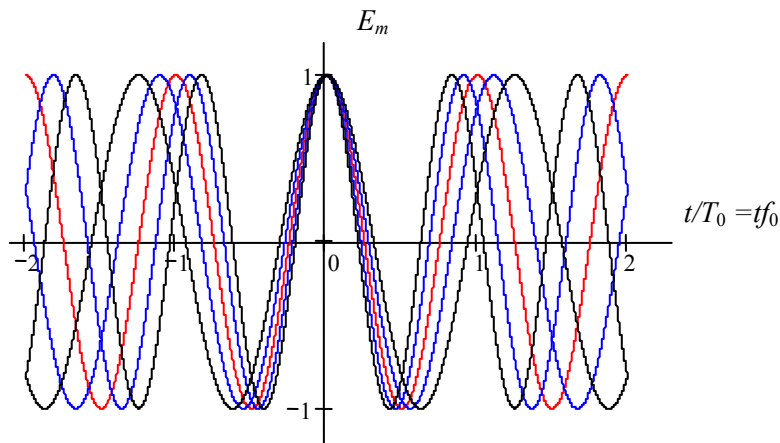


Рис. 7.12. Временные зависимости для пяти гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и с частотами  $f_m = f_0 (1 \pm 0.1p)$ ;  $p = 0, 1, 2$

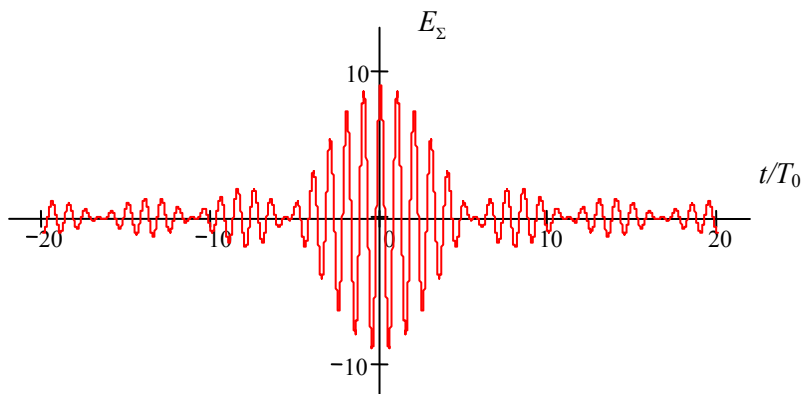


Рис. 7.13. Временная зависимость для сигнала, образованного интерференцией девяти эквидистантных синхронизованных мод, с межмодовым интервалом  $0.02f_0$

Таким образом, в режиме синхронизации мод лазер генерирует излучение в виде импульса, основная энергия которого сосредоточена в небольшом временном (пространственном) интервале. Анализ показывает, что длительность такого импульса обратно пропорциональна числу синхронизованных мод  $N_S$  и межмодовому интервалу  $\Delta f = c/(2L)$ :  $\tau_p = 1/(N_S \Delta f) = 2L/(cN_S) = T_p/N_S$ , где за  $T_p$  обозначено время двойного прохода света по резонатору, являющееся одновременно периодом повторения синхронизованных импульсов (рис. 7.14).

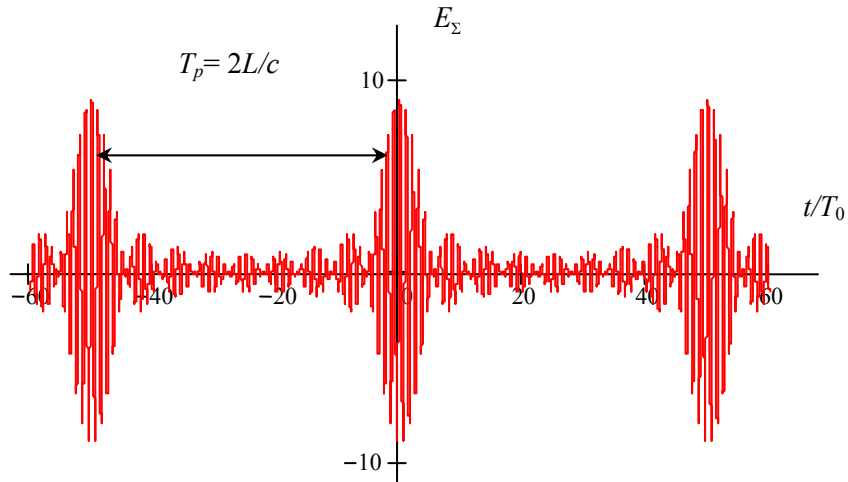


Рис. 7.14. Временная зависимость для сигнала, образованного интерференцией девяти эвидистантных синхронизованных мод, с межмодовым интервалом  $0.02f_0$  при интервале наблюдения от  $-60/f_0$  до  $60/f_0$ .

Для реализации режима синхронизации мод используется внутрирезонаторная модуляция оптических потерь по схеме, изображенной на рис. 7.11. Однако электрический сигнал, подаваемый на оптический модулятор, должен обеспечивать большую добротность резонатора с периодом повторения, равным  $T_p$ , а сам модулятор нужно размещать на минимальном расстоянии от зеркала резонатора. В этом случае синхронизованный импульс, проходя модулятор потерь в прямом направлении в момент, когда его пропускание близко к максимальному, доходит до зеркала, отражается и успевает пройти в обратном направлении также при малых потерях. Далее этот импульс проходит через активное вещество, усиливается в нем за счет индуцированных переходов, после отражения от второго зеркала снова усиливается и приходит к модулятору потерь в тот момент времени, когда потери в нем снова минимальны.

Следует отметить, что при наличии описанной выше схемы внутрирезонаторной модуляции потерь режим генерации синхронизованных импульсов устанавливается автоматически, как наиболее выгодный с точки зрения баланса амплитуд, благодаря свойствам индуцированного излучения.

От точности совпадения межмодового интервала и частоты модуляции потерь зависит число синхронизованных мод, а значит, и длительность генерируемых импульсов.

Реально достижима синхронизация десятков и сотен продольных мод. При длине резонатора 1 м и синхронизации 100 мод генерируемые импульсы можно считать *ультракороткими*, поскольку их длительность составит величину  $\tau_p = 30$  пс.

## 8. Газовые лазеры

### 8.1. Особенности газов как активного вещества

#### для лазеров

Активное вещество газовых лазеров находится в газообразном состоянии. Им может быть как газ, так и вещество, находящееся в обычном состоянии в жидкой или твердой фазе.

Для газовых активных лазерных сред характерны следующие особенности.

1. Из-за малой плотности газовая среда отличается высокой оптической однородностью. Потери на рассеяние и поглощение здесь гораздо ниже, чем в твердотельных средах. Это позволяет использовать газонаполненные трубки длиной в несколько метров. Оптическая однородность обеспечивает и более высокую пространственную когерентность излучения.

2. Узкие спектральные линии атомов и молекул, уширение которых в основном обусловлено эффектом Допплера, позволяют получить высокую монохроматичность излучения.

3. Вследствие малой плотности газа удельный энергосъем (энергия с единицы объема) намного меньше, чем у твердотельных и полупроводниковых лазеров. Поэтому активные элементы газовых лазеров имеют значительно большие размеры, чем у твердотельных и полупроводниковых лазеров той же мощности.

4. Способы создания инверсии населенностей в газовых средах отличаются большим разнообразием.

Перечислим некоторые способы реализации инверсии населенностей в газах:

- *в газовом разряде* за счет столкновений между электронами и невозбужденными частицами, а также при столкновениях между возбужденными и невозбужденными частицами;
- *при оптической накачке*;

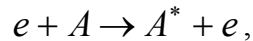
- за счет *химических реакций*, при которых образуются атомы или радикалы в возбужденных состояниях;
- *при диссоциации молекул* и образовании в этом случае атомов в возбужденных состояниях;
- *при охлаждении предварительно нагретой газовой смеси* (газодинамические лазеры);
- при использовании *квасимолекул*, или *эксимерных комплексов* атомов, существующих только в возбужденных состояниях.

Ограничимся далее рассмотрением газоразрядных лазеров.

## 8.2. Механизмы возбуждения газоразрядных лазеров

В газоразрядных лазерах возбуждение атомов, молекул или ионов на верхние уровни осуществляется за счет электрического разряда на постоянном токе или ВЧ-разряда. Основными процессами, создающими инверсию населенностей в газовом разряде, являются столкновения 1-го или 2-го рода.

*Столкновения 1-го рода* – наиболее существенный механизм заселения возбужденных состояний атомов, ионов и молекул в газовом разряде. При таких процессах электроны газового разряда сталкиваются с частицами в невозбужденном состоянии,



и при неупругом соударении передают свою кинетическую энергию, которая переходит во внутреннюю энергию частицы. Обозначим как  $1/\theta_{mn}$  вероятность перехода одной частицы в единицу времени с  $m$ -го на  $n$ -й уровень за счет столкновения с электроном ( $\theta_{mn}$  – время между двумя последовательными столкновениями, приводящими к данному переходу). Для трехуровневой схемы изобразим возможные переходы (рис. 8.1). Как видим, схема достаточно сложна для анализа. Анализ, проведенный на основе балансных уравнений, показывает, что для достижения инверсии населенностей в непрерывном режиме должно выполняться условие  $\tau_3 \gg \tau_{21}$ , где время жизни на третьем уровне определяется из выражения  $\tau_3^{-1} = \tau_{31}^{-1} + \tau_{32}^{-1}$ .

Число газовых сред, для которых это условие выполняется, невелико. Однако инверсия населенностей во многих газовых средах за счет столкновений 1-го рода может

быть получена в импульсном режиме. Изменение населенностей уровней в таком лазере во времени изображено на рис. 8.2.

Здесь генерация возникает на начальном и конечном участках импульса накачки. Ее длительность составляет  $10^{-8}$ - $10^{-9}$  с. Примером могут служить лазеры на парах меди и бромида меди, генерирующие в видимом диапазоне на длинах волн 510,6 нм (зеленая линия) и 578,2 нм (желтая линия).

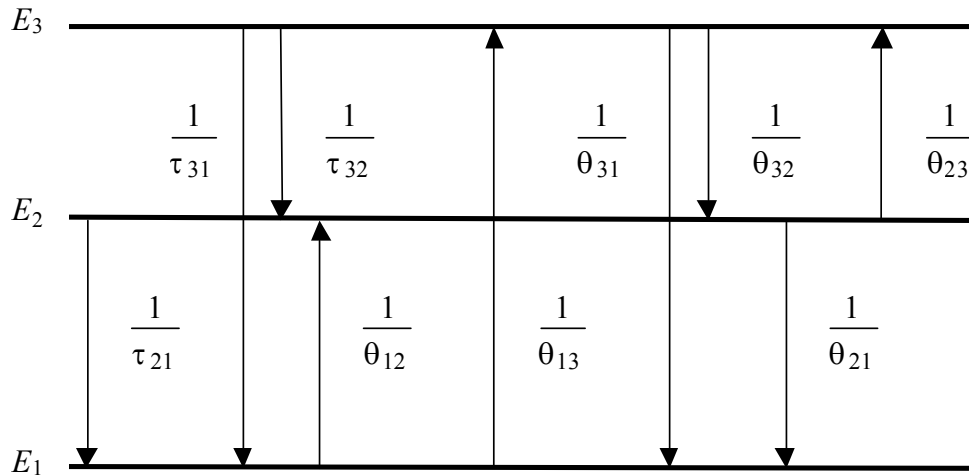
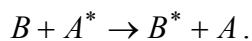


Рис. 8.1. Схема переходов в газоразрядном лазере за счет столкновений 1-го рода

Газоразрядная трубка такого лазера изготавливается из керамики  $Al_2O_3$ , возбуждение разряда от конденсатора, заряженного до 15-20 кВ. Для обеспечения требуемого давления паров меди температура внутри трубки должна составлять  $\sim 1500$  °С. Средняя мощность составляет единицы-десятки Вт, коэффициент полезного действия  $\sim 3\%$ . Частота следования импульсов может достигать 20 кГц, длительность импульса составляет  $\sim 20$  нс.

**Столкновения 2-го рода** происходят в смеси газов. Частицы одного из газов (вспомогательного газа  $A$ ) за счет столкновений 1-го рода переходят в возбужденное метастабильное состояние. Энергия этого метастабильного состояния близка к энергии возбужденного уровня частиц другого газа, который является основным (рабочим газом  $B$ ). В результате неупругого столкновения частицы  $A$  с частицей  $B$  происходит резонансная передача энергии от  $A$  к  $B$ :



Вероятность этого процесса велика при  $\hbar\omega_{21}^A = \hbar\omega_{31}^B$  (рис. 8.3).

Между уровнями 3 и 2 газа  $B$  в результате накопления частиц на уровне 3 может возникать инверсия населенностей. Анализ показывает, что для достижения инверсии населенностей возбуждение частиц  $B$  должно происходить в основном за счет столкновений 2-го рода, причем  $\tau_3^B$  должно быть больше, чем  $\tau_2^B$ . Кроме того, плотность (число в единице объема) атомов  $A$  должна превышать плотность атомов  $B$ .

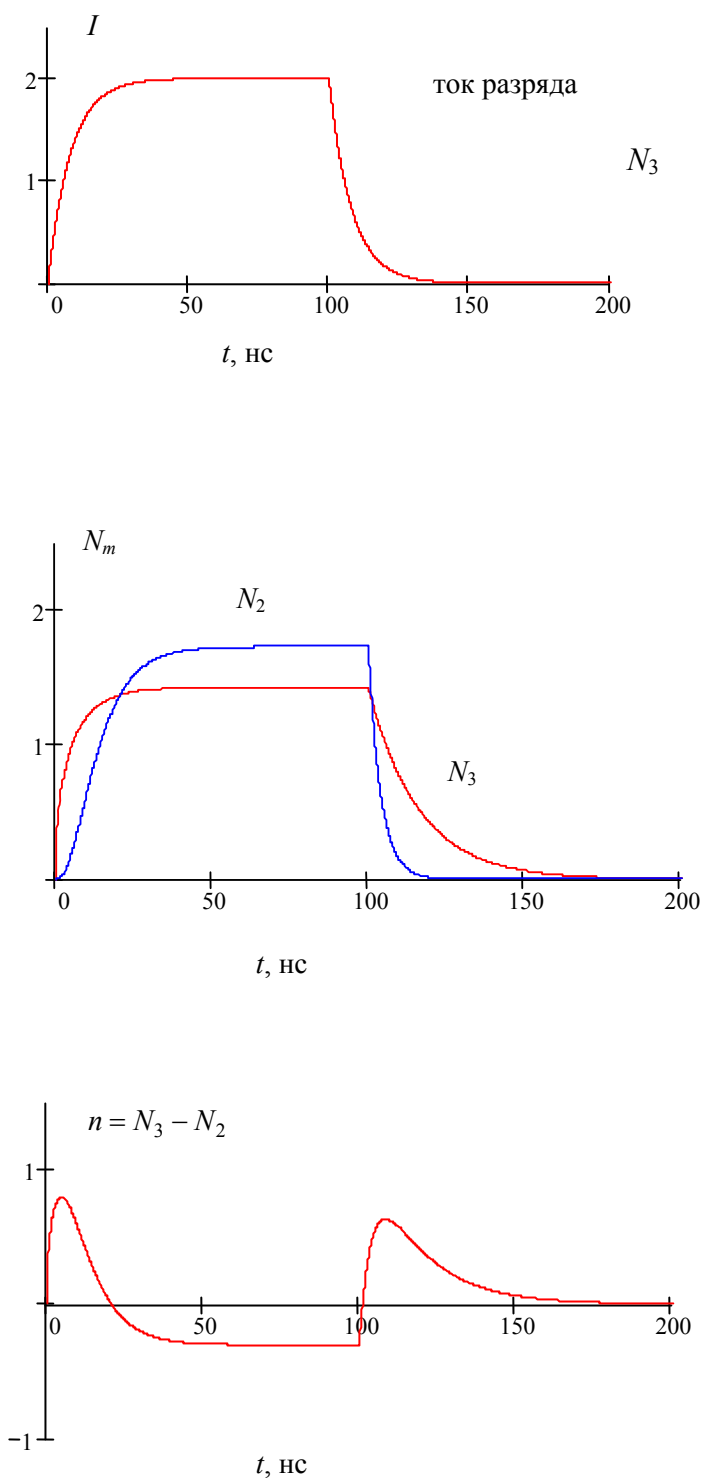


Рис. 8.2. Временные зависимости тока разряда (а), населенностей уровней (б) и разности населенностей на рабочем переходе (в)

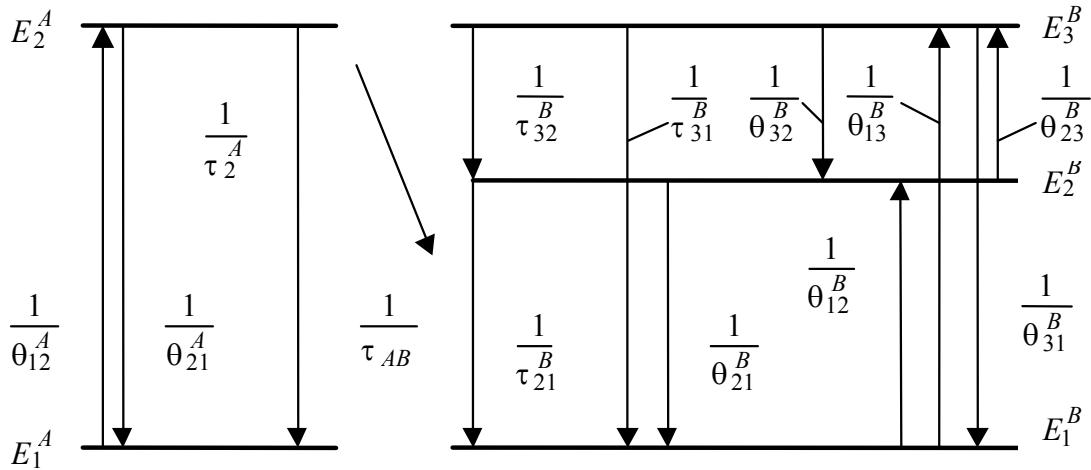


Рис. 8.3. Схема переходов в газоразрядном лазере при столкновениях 2-го рода

Среди газоразрядных лазеров различают *атомарные*, *ионные* и *молекулярные лазеры*, использующие соответственно энергетические уровни атомов, ионов и молекул.

### 8.3. Атомарный гелий-неоновый лазер

В гелий-неоновом лазере инверсия населенностей достигается между энергетическими уровнями атомов неона (Ne) за счет столкновений 2-го рода с атомами вспомогательного газа гелия (He). Упрощенная схема энергетических уровней этих газов приведена на рис. 8.4.

В основном энергетическом состоянии атом гелия содержит 2 электрона и имеет конфигурацию  $1s^2$ . Возбужденное состояние He реализуется за счет столкновений с электронами (1-го рода), и ему соответствует электронная конфигурация  $1s2s$ . Этой конфигурации соответствуют два энергетических уровня, которые принято обозначать  $2^1S_0$  и  $2^3S_1$ . Излучательные переходы с этих уровней в основное состояние запрещены (ввиду одинаковой четности волновых функций), и они являются метастабильными, запасая энергию, получаемую при столкновениях 1-го рода. Времена жизни для состояний  $2^1S_0$  и  $2^3S_1$  составляют  $5 \cdot 10^{-6}$  и  $10^{-4}$  с, соответственно.

Основное состояние атома Ne характеризуется электронной конфигурацией  $1s^2 2s^2 2p^6$ . При возбуждении неона один электрон из оболочки  $2p$  в зависимости от полученной атомом энергии переходит в состояния  $3s$ ,  $3p$ ,  $4s$ ,  $4p$  или  $5s$ , которым соответствуют



изображенные на рис. 8.4 электронные конфигурации  $1s^2 2s^2 2p^5 3s$ ,  $1s^2 2s^2 2p^5 3p$ ,  $1s^2 2s^2 2p^5 4s$ ,  $1s^2 2s^2 2p^5 4p$  и  $1s^2 2s^2 2p^5 5s$ . Все конфигурации типа  $2p^5 Ns$  ( $N = 3, 4, 5$ ) имеют 4 энергетических подуровня, а  $2p^5 Np$  – 10 подуровней.

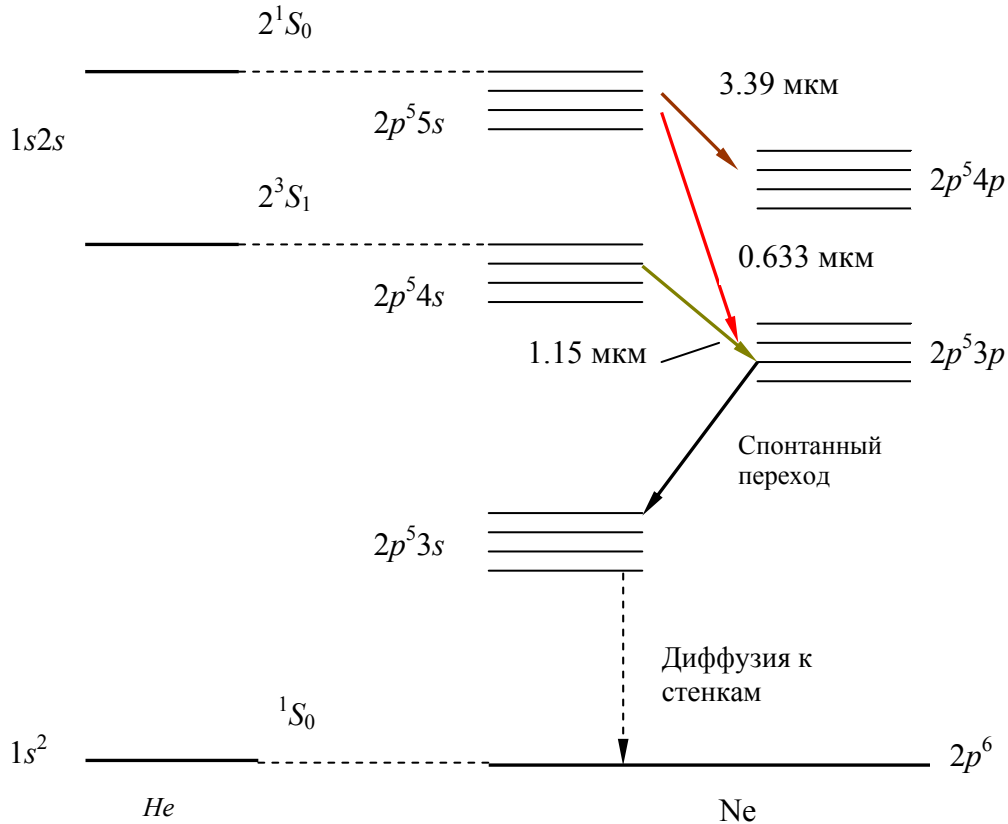


Рис. 8.4. Энергетические уровни атомов гелия и неона и схема, поясняющая переходы для He-Ne лазера

В гелий-неоновом лазере используется тлеющий газовый разряд. За счет столкновений с электронами, как уже отмечалось, атомы Ne переходят в метастабильные возбужденные состояния  $2^1S_0$  и  $2^3S_1$ , энергетическое положение которых близко к таковому для состояний  $2p^5 5s$  и  $2p^5 4s$  атомов Ne. Поэтому при столкновениях 2-го рода происходит резонансная передача энергии, и атомы неона переходят в эти возбужденные состояния. Лазерная генерация может происходить на переходах  $2p^5 5s \rightarrow 2p^5 4p$  ( $\lambda = 3,39$  мкм),  $2p^5 5s \rightarrow 2p^5 3p$  ( $\lambda = 0,633$  мкм) и  $2p^5 4s \rightarrow 2p^5 3p$  ( $\lambda = 1,15$  мкм).

Соответствующим подбором интерференционных зеркал резонатора можно получить излучение на любой из этих длин волн. Опустошение нижних лазерных уровней  $2p^5 4p$  и  $2p^5 3p$  происходит за счет излучательных переходов в состояние  $2p^5 3s$ , имеющих большое

время жизни. Накопление частиц на этом уровне нежелательно, а переход находящихся на нем частиц в основное состояние с конфигурацией  $2p^6$  происходит, как правило, при их столкновении со стенками сосуда. По этой причине работа гелий-неонового лазера критична к диаметру разрядной трубки, размер которой не должен превышать 10 мм.

Одна из возможных схем газоразрядного лазера схематично поясняется рис. 8.5.

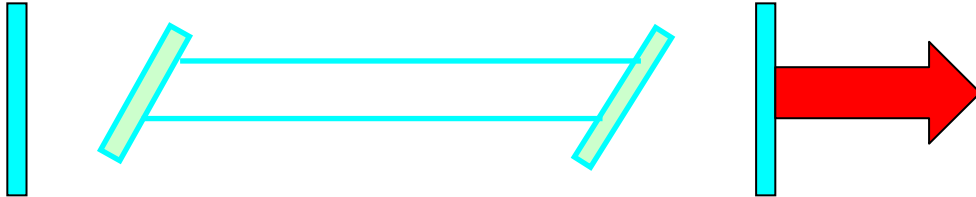


Рис. 8.5. Устройство газового лазера.

Выходные окна газоразрядной трубки для уменьшения отражения от них волн, распространяющихся в направлениях, близких к оси резонатора, скошены под углом Брюстера. Излучение такого лазера будет иметь линейную поляризацию. Газовый разряд может быть реализован на постоянном токе или на частотах 20-50 МГц с помощью соответствующих методов, которые хорошо известны и рисунком не поясняются.

Гелий-неоновые лазеры характеризуются высоким качеством выходного излучения. Относительный уход частоты не превышает  $10^{-9}$  в час. В специальных моделях лазера с уменьшенными шумами полоса генерируемых частот не превышает единиц герц. Однако коэффициент полезного действия гелий-неоновых лазеров мал и составляет сотые доли процента.

#### 8.4. Ионный аргонный лазер

В ионных лазерах инверсия населенностей достигается между возбужденными уровнями ионов. Характерным примером является аргонный лазер. Считается, что возбуждение частиц в аргонном лазере происходит в два этапа. Сначала атомы Ar, сталкиваясь с электронами в газоразрядной плазме, ионизируются. Затем при втором столкновении, тоже 1-го рода, происходит возбуждение иона Ar, при котором один электрон переходит из  $3p$  в  $4p$ -оболочку:



Упрощенно схема уровней Ar изображена на рис. 8.6.

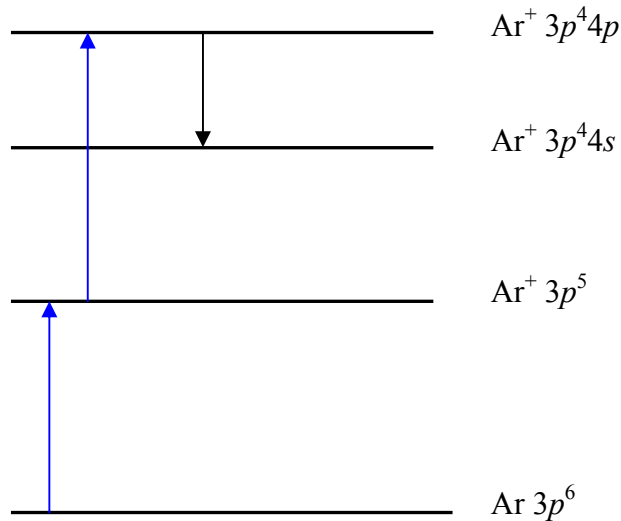


Рис. 8.6. Схема уровней в ионном аргоновом лазере

На самом деле уровни  $3p^4p$  и  $3p^4s$  состоят из множества подуровней, поэтому аргоновый лазер может генерировать на многих переходах между подуровнями этих состояний в диапазоне от 0,46 до 0,52 мкм, то есть в сине-зеленой области спектра.

Для ионизации газа аргоновый лазер требует пропускания через трубку токов очень большой плотности – до нескольких тысяч ампер на квадратный сантиметр. Для увеличения плотности тока в таком сильноточном дуговом разряде трубка делается малого диаметра – 1-3 мм. Разрядная трубка-капилляр выполняется из бериллиевой керамики или графита. Как правило, аргоновые лазеры работают с водяным охлаждением. Для уменьшения бомбардировки стенок трубки ионами и электронами используют продольное магнитное поле, которое концентрирует заряженные частицы на оси разрядного элемента.

Положительные ионы  $\text{Ar}^+$ , двигаясь к катоду, увеличивают свою концентрацию вблизи него. Для компенсации перекачки газа анодную и катодную полости соединяют между собой более длинным капилляром, в котором не происходит разряда и обеспечивается обратная циркуляция газа. Вследствие однонаправленного движения ионов аргона в

разрядном промежутке контур спектральной линии излучения имеет асимметричную форму.

Аргоновые лазеры являются самыми мощными непрерывными лазерами в видимом диапазоне, обеспечивая выходную мощность от единиц до сотен Вт. Недостатками являются малый коэффициент полезного действия (~0.1 %) и сроки службы, не превышающие сотен часов.

К другим типам ионных лазеров, достаточно часто используемых, относятся гелий-кадмиевый ( $\lambda = 0,4416$  и  $0,325$  мкм) и криптоновый ( $\lambda = 0,6471, 0,616, 0,5682$  и  $0,35$  мкм).

### 8.5. Молекулярный лазер на углекислом газе

Низкий коэффициент полезного действия атомарных и ионных лазеров, работающих в непрерывном режиме, обусловлен следующими причинами.

Возбуждение газовой смеси происходит на высоко расположенные электронные уровни, так что отношение энергии генерируемых квантов к энергии возбуждения не превышает 0.1. Кроме того, не все электроны газового разряда имеют достаточную энергию для возбуждения верхнего рабочего уровня. В существующих атомарных и ионных лазерах доля электронов, имеющих такую энергию, относительно мала, а основная часть энергии источника питания тратится электронами на возбуждение самых низких уровней. В результате суммарный коэффициент полезного действия составляет доли процента.

Для повышения коэффициента полезного действия выгодно в качестве рабочих использовать низко расположенные энергетические уровни частиц. Наиболее подходящими с этой точки зрения являются *возбужденные колебательные уровни молекул*.

Как известно, любая молекула совершает колебательные и вращательные движения. Энергия этих движений квантована таким образом, что разрешены лишь состояния с определенными ее значениями. Обычно энергия вращательного движения меньше энергии колебательного движения. Поэтому одному колебательному энергетическому состоянию с квантовым числом  $\nu$  соответствует много вращательных состояний, характеризующихся квантовыми числами  $j$ , отличающимися на единицу. Подобно

электронным состояниям атома, молекула имеет основное невозбужденное колебательное состояние с минимальной энергией и возбужденные состояния.

Рассмотрим молекулу  $\text{CO}_2$ , которая представляет собой линейную цепочку, в центре которой располагается атом углерода. Атомы в молекуле могут совершать колебания около положения равновесия (рис. 8.7).

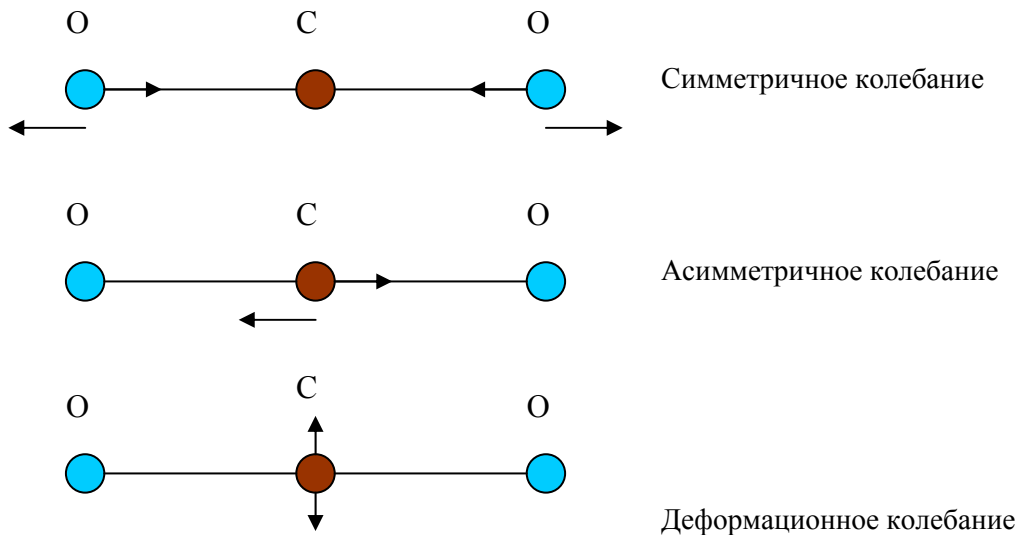


Рис. 8.7. Типы колебаний молекулы углекислого газа

Молекула  $\text{CO}_2$  имеет 3 типа колебаний.

1. Симметричный тип колебания. Атомы кислорода колеблются вдоль оси молекулы симметрично относительно атома углерода.
2. Асимметричный (антисимметричный) тип колебания. При этом атом углерода колеблется вдоль продольной оси молекулы.
3. Деформационные типы колебания. В этом случае атом углерода колеблется в направлении, перпендикулярном продольной оси молекулы. Данный тип колебания является двукратно вырожденным, поскольку при этом имеется два взаимно перпендикулярных направления колебаний.

Все вышеперечисленные типы колебаний обозначаются соответственно тремя цифрами:  $\nu \ 0^0 \ 0$ ;  $0 \ 0^0 \ \nu$ ;  $0 \ \nu^l \ 0$ . В этих обозначениях  $\nu$  - число квантов, запасенных в данном виде колебаний (номер колебательного уровня), а  $l$  - поляризация деформационного колебания. Если число  $\nu$  стоит первым в тройке цифр, то этот уровень

соответствует симметричному типу колебаний. Когда не равна нулю последняя цифра, то это означает, что уровень относится к асимметричному виду колебаний, а когда средняя – к деформационному колебанию. Расстояния между колебательными уровнями одного вида колебаний всегда одинаковы, то есть их спектр является эквидистантным.

Основное состояние молекулы  $\text{CO}_2$  обозначается  $0\ 0^0\ 0$  (рис. 8.8).

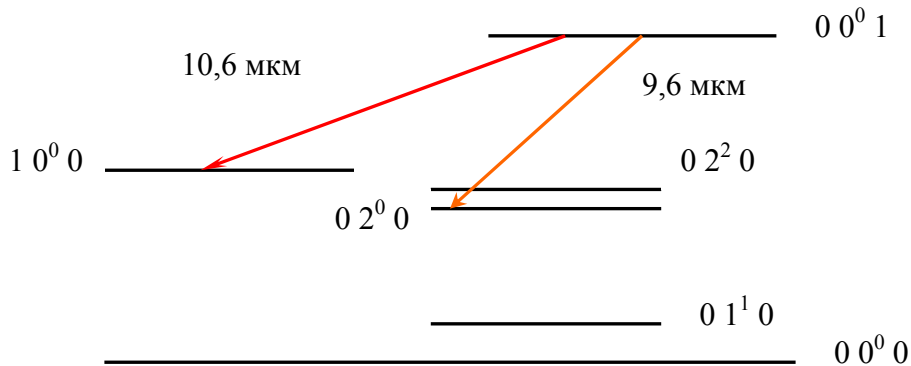


Рис.8.8. Схема уровней в молекулярном лазере на  $\text{CO}_2$

Самым низшим возбужденным уровнем молекулы  $\text{CO}_2$  является уровень  $0\ 1^1\ 0$  (деформационное колебание). Далее идут  $0\ 2^0\ 0$ ,  $0\ 2^2\ 0$ ,  $1\ 0^0\ 0$ ,  $0\ 0^0\ 1$  и так далее. Обычно частоты переходов между различными колебательными состояниями молекул лежат в миллиметровой и инфракрасной области спектра. В лазерах на  $\text{CO}_2$  используются колебательно-вращательные переходы  $0\ 0^0\ 1 \rightarrow 1\ 0^0\ 0$  и  $0\ 0^0\ 1 \rightarrow 0\ 2^0\ 0$  ( $\lambda = 10,6$  и  $9,6$  мкм соответственно).

Инверсия населенностей в стационарном режиме на колебательно-вращательных переходах молекулы  $\text{CO}_2$  реализуется за счет того, что скорость разрушения колебательных состояний  $1\ 0^0\ 0$  и  $0\ 2^0\ 0$  много больше скорости разрушения состояния  $0\ 0^0\ 1$ . Вероятность перехода молекулы с уровня  $1\ 0^0\ 0$  вниз возрастает при введении в газовую смесь атомов гелия, которые при столкновении с  $\text{CO}_2$  разрушают это состояние. Вероятность же разрушения состояния  $0\ 0^0\ 1$  при столкновениях с He мала.

Возбуждение молекул  $\text{CO}_2$  на верхние уровни для достижения инверсии населенностей осуществляется в основном за счет столкновений 2-го рода. В качестве вспомогательного газа используется азот, молекулы которого  $\text{N}_2$  находятся на возбужденных колебательных уровнях (рис. 8.9).

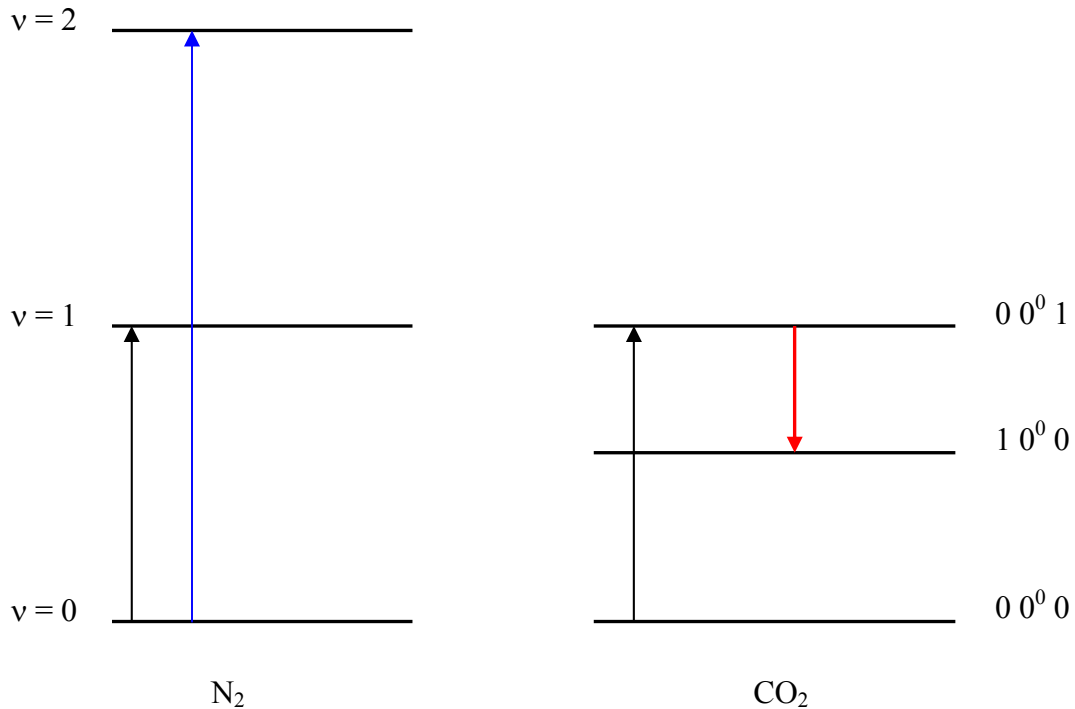


Рис. 8.9. Колебательные энергетические уровни молекул азота и углекислого газа и схема, поясняющая переходы для лазера на  $CO_2$

В газоразрядных лазерах на  $CO_2$  реализуется высокий коэффициент полезного действия, достигающий 30 %. Это объясняется тем, что, во-первых, отношение энергии излучаемого кванта к необходимой для возбуждения верхнего рабочего уровня составляет  $\sim 0.4$ . Во-вторых, почти вся энергия электронов газового разряда идет на возбуждение как молекул  $N_2$ , так и молекул  $CO_2$ . Кроме того, колебательные уровни молекул азота являются эквидистантными. Практически любое возбужденное состояние молекулы  $N_2$  способно передать колебательный квант невозбужденной молекуле  $CO_2$ , переходя в ближайшее нижнее состояние. Таким образом, одна молекула  $N_2$ , переведенная в самое верхнее колебательное состояние, может при столкновениях возбудить несколько молекул  $CO_2$ .

Особенностью молекулы  $CO_2$  является большое время жизни верхнего лазерного уровня  $0\ 0^0\ 1$ . Благодаря этому верхний уровень в отсутствие генерации служит накопителем возбужденных молекул. Поэтому в лазерах на молекулах  $CO_2$  с модуляцией добротности резонатора возможно получение мощных моноимпульсов.

## Список рекомендуемой литературы

1. Пихтин А.Н. Оптическая и квантовая электроника : учеб. для вузов / А.Н. Пихтин. – М.: Высш. шк., 2001. – 573 с.
2. Волноводная оптоэлектроника / под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1991. – 575 с.
3. Ярив А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М.: Мир, 1987. – 616 с.
4. Коваленко Е.С., Пуговкин А.В., Тихомиров А.А. Введение в квантовую электронику / Е.С. Коваленко, А.В. Пуговкин, А.А. Тихомиров. – Томск: Изд-во ТГУ, 1974. – 432 с.
5. Пихтин А.Н. Физические основы квантовой электроники и оптоэлектроники / А.Н. Пихтин. – М.: Высш. шк., 1983. – 304 с.
6. Байбородин Ю.В. Основы лазерной техники / Ю.В. Байбородин. – Киев: Высш. шк., 1988. – 383 с.
7. Семенов А.С. Интегральная оптика для систем передачи и обработки информации / А.С. Семенов, В.А. Смирнов, А.В. Шмалько. – М.: Высш. шк., 1990. – 225 с.
8. Интегральная оптика / под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
9. Клэр Ж. Введение в интегральную оптику / Ж. Клэр. – М.: Сов. радио, 1980. – 104 с.
10. Крылов К.И. Основы лазерной техники / К.И. Крылов, В.Т. Прокопенко, В.А. Тарлыков. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 316 с.
11. Пойзнер Б.Н. Физические основы лазерной техники : учеб. пособие / Б.Н. Пойзнер. – Томск : Томск. гос. ун-т, 2006. – 208 с.
12. Звелто О. Принципы лазеров / О. Звелто. – М.: Мир, 1990. – 560 с.
13. Справочник по лазерной технике / пер. с нем. под ред. А.П. Напартовича. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 554 с.
14. Карлов Н.В. Лекции по квантовой электронике : учеб. руководство / Н.В. Карлов. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
15. Химические лазеры / под ред. Н.Г. Басова. – М.: Наука, 1982. – 370 с.
16. Мэйтленд А. Введение в физику лазеров / А. Мэйтленд, М. Данн. – М.: Наука, 1978. – 408 с.
17. Справочник по лазерной технике / под ред. Ю.В. Байбородина, Л.З. Криксунова, О.Н. Литвиненко. – Киев : Техника, 1978. – 288 с.



18. Ярив А. Квантовая электроника / А. Ярив ; пер. с англ. под ред. Я.И. Ханина. – 2-е изд. – М. : Сов. радио, 1980. – 488 с.
19. Ищенко Е.Ф. Открытые оптические резонаторы: некоторые вопросы теории и расчета / Е. Ф. Ищенко. – М. : Сов. радио, 1980. – 208 с.
20. Хакен Г. Лазерная светодинамика / Г. Хакен ; пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 350 с.

Учебное издание

**Шандаров** Станислав Михайлович  
**Башкиров** Александр Иванович

ВВЕДЕНИЕ  
В КВАНТОВУЮ И ОПТИЧЕСКУЮ  
ЭЛЕКТРОНИКУ  
Учебное пособие

Формат 60x84/16. Усл. печ. л..

Тираж . Заказ .

Томский государственный университет  
систем управления и радиоэлектроники.  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.  
Тел. (3822) 533018.